**异构资源杀伤网时序优化问题研究报告**

中国科学院数学与系统科学研究院

2023年12月11日

目录

[一、 引言 5](#_Toc153482260)

[(一) 问题介绍 5](#_Toc153482261)

[(二) 问题描述 5](#_Toc153482262)

[(三) 关键概念 7](#_Toc153482263)

[(四) 问题假设 8](#_Toc153482264)

[二、 问题参数和问题分析 10](#_Toc153482265)

[(一) 符号约定 10](#_Toc153482266)

[(二) 目标与约束的数学描述 11](#_Toc153482267)

[(三) 核心算法思路 13](#_Toc153482268)

[(四) 评价指标 14](#_Toc153482269)

[(五) 主要的数值结果 15](#_Toc153482270)

[三、 报告与合同的对应关系 17](#_Toc153482271)

[(一) 报告对应的项目指标 18](#_Toc153482272)

[(二) 研究内容 18](#_Toc153482273)

[四、数学模型构建 19](#_Toc153482274)

[(一) 问题的场景描述 19](#_Toc153482275)

[(二) 目标与约束的数学表征 20](#_Toc153482276)

[i. 优化目标 20](#_Toc153482277)

[ii. 约束条件 22](#_Toc153482278)

[(三) 问题的数学形式 23](#_Toc153482279)

[i. 原模型的数学表述 23](#_Toc153482280)

[ii. 线性化模型的数学表述 24](#_Toc153482281)

[五、算法设置与最优性证明 25](#_Toc153482282)

[(一) 研究思路 25](#_Toc153482283)

[(二) 算法应用的主要技术说明 26](#_Toc153482284)

[(三) 算法的求解流程 30](#_Toc153482285)

[i. 算法的整体流程 30](#_Toc153482286)

[ii. 模型转化方法：线性化方法 30](#_Toc153482288)

[iii. 分支定界算法（算法一） 31](#_Toc153482289)

[iv. 列生成算法（算法二） 31](#_Toc153482290)

[v. 外逼近算法（算法三） 32](#_Toc153482291)

[(四) 模型及算法核心方法详细描述 32](#_Toc153482292)

[i. 列生成算法 32](#_Toc153482293)

[ii. 列生成算法在体系多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题中的表现形式。 36](#_Toc153482294)

[iii. 时间点的非均匀离散 41](#_Toc153482295)

[五、 仿真模拟 42](#_Toc153482300)

[(一) 仿真模拟参数设置 42](#_Toc153482301)

[i. 测试集 42](#_Toc153482302)

[(二) 仿真实验结果 44](#_Toc153482303)

[i. 结果评价指标 44](#_Toc153482304)

[ii. 仿真实验结果 45](#_Toc153482305)

[iii. 仿真实验结论 46](#_Toc153482306)

[六、 总结 46](#_Toc153482307)

# 引言

在引言部分，将对问题背景进行基本的介绍，指出问题的具体描述，给出问题中涉及的关键概念以及我们在此问题中采取的主要假设。

## 问题介绍

现代战争的强度和复杂性日益提高，诸如无人机、战术歼击机、强击机、轰炸机、各种直升机、各种巡航导弹、各型战役-战术导弹、远程雷达探测系统、各型防空反导系统等种类繁多、数量庞大的兵器频繁参与到战斗中。面对这种形势，帮助指挥员在任何情况下都能有效地应对各种类型的目标并完成作战目标，需要充分利用现代科学技术对作战资源进行优化。

在本问题中资源优化的实质含义是对我方的作战资源进行统筹调度，在整个作战的过程之中，在多个时点针对每个来袭目标建立有效的包含“目标-雷达-发射车-弹药”完整序列的杀伤链，在过去的研究中，并没有从全局的角度整体统筹各个资源，而是针对每个具体的时刻进行杀伤网的构建，因此研究希望能够从全局角度考虑，针对来袭目标设计包含时序的异构资源杀伤网，根据真实作战需求实现效能最大化。

## 问题描述

我们的目标是对战场中存在的各种威胁进行识别和评估，然后根据这些信息动态地对作战资源进行优化。这涉及在整个作战过程中，随着情况的变化，在多个关键时点上，针对每个目标建立有效的“杀伤链”，每条杀伤链都代表一种具体的打击，包括“目标-指控-雷达-发射车-弹药”的完整序列。每个目标都可以在多个时点上分配一条或多条杀伤链，这取决于我们的战略目标、敌方威胁的具体情况以及我们的资源状况。

我们的优化目标是使得在资源限制的条件下，对所有作战目标的整体效能（如最小化作战时间、最大化杀伤效果、最小化作战费效比等）达到最优。与以往的研究不同，过去的方法往往忽略了从整体战略角度出发的资源调配，仅仅关注于针对每一具体时刻的单一目标的反应。而我们的研究目标是打破这种模式，通过全局视角的优化，设计一个能够随时间动态变化的异构资源网络。这种网络不仅要能够针对即时来袭的目标进行有效应对，还要能够根据作战进程的推移和敌我双方态势的变化，实时调整和优化资源配置。这样的方法将有助于我们在保持战术灵活性的同时，实现作战效能的最大化，包括但不限于缩短作战时间、提升击毁效果和降低作战成本等关键指标。

作为一个求解系统，在这个数学模型中系统的输入与输出分别是：

输入：

1. 敌方有多个目标来袭，可对目标路径进行初步预测，以得到每个目标的可打击时间、雷达可探测时间。
2. 不同时间使用不同资源对敌方目标的杀伤概率、目标的权重。
3. 其他的目标及资源特性。

输出：

在每个打击时间点，如何给每个目标安排杀伤链。

## 关键概念

本部分中列出了一些模型中的关键概念，方便后续的理解和操作，如作战时点、目标、杀伤链、杀伤网、毁伤概率等。

概念及解释：

* 目标：对方的威胁，需要我们进行打击的对象。
* 雷达：我们用来监控和定位目标的设备。
* 发射车：装载弹药并进行发射的作战装备。
* 杀伤链：由目标、雷达、发射车和弹药构成的完整的打击流程。在这个流程中，指控部分可以解耦，而弹药与发射车则是绑定在一起的。
* 作战时点：将整个作战时间离散为多个作战时点，仅允许在这些作战时点时进行作战决策与行为（即给目标分配杀伤链）。
* 雷达窗口：给定目标与雷达，雷达能够探测到目标的时点集合。
* 打击窗口：给定目标，允许武器命中的时点集合，在其他时点认为对该目标的打击无效。
* 杀伤网：是整个打击目标的分配方案，每个目标都会被分配至少一条杀伤链进行打击。杀伤网的构建考虑了所有的资源限制和作战目标，目标是全局最优。
* 存活概率：在多个杀伤链打击下地方目标的存活概率，每个目标在不同的时点因为有不同的打击方案，因此在每个时点都需要重新计算存活概率。
* 毁伤概率：每个目标被毁伤的可能性，即1减去目标的存活概率。

本报告将考虑对战场中存在的各种威胁进行识别和评估，然后根据这些信息动态地对作战资源进行优化，利用整数规划求解技巧，从全局角度考虑，在各个时点为目标建立一条或多条“目标-指控-雷达-发射车-弹药”的杀伤链，构成整体包含时序的杀伤网，实现多种作战目标。

## 问题假设

本部分提出了问题模型中的主要假设，包括资源假设、毁伤概率假设、优化目标假设以，资源限制假设等多种类型的假设，为接下来的模型构建和分析提供基础。

在对全局资源优化问题进行特征提取后，我们做出如下假设：

* + 确定性假设：每个目标的价值是固定的，不随着时间发生变化。同时在给定打击时点、目标、雷达、发射车、弹药的条件下，雷达-发射车-弹药组成的杀伤链对目标的毁伤概率是定值，不随时间发生变化。
  + 毁伤概率假设：我们假设每条杀伤链之间是相互独立的。如果一个目标被多个杀伤链同时打击，那么该目标的存活概率就是每个杀伤链打击后的存活概率的乘积。如果一个目标在不同时间被多个不同的杀伤链打击，则它的存活概率是累积到该时点的所有杀伤链打击下存活概率的乘积。优化目标中的毁伤概率就是用1减去存活概率的大小。
  + 优化目标假设：我们的目标是整合多个优化目标，包括最大化消除的来袭目标威胁值、最小化作战时间和最小化作战消耗。这几个目标之间的关系为线性相加，其系数可随着战场态势由指挥官负责调整，以体现多个作战目标的优先级。
  + 资源限制假设：由于资源特性，我们假设为每个目标分配杀伤链时，需要考虑到各类限制，具体而言包括：
    1. 在每个时点杀伤链使用雷达的次数应小于等于其通道数
    2. 在每个时点杀伤链使用发射车的次数应小于等于发射车载弹量。
    3. 每个发射车具有总体的弹药上限，在各个时点使用这个发射车的次数累加也应该有上限。
    4. 针对每个目标，最多可构建的杀伤链条数有上限。
    5. 每个雷达与一个目标绑定，每个目标占用雷达的一个通道。当雷达锁定一个目标时，多个武器可以同时使用这个雷达的锁定信息。
    6. 每个武器与一个雷达绑定，在武器发射到击中目标这段时间内，不允许更换武器使用的雷达。
    7. 雷达窗口约束：针对每个来袭目标，不同的雷达仅在部分时间能够扫描到这个目标，雷达对目标的锁定必须在这个窗口期内。
    8. 打击窗口约束：针对每个来袭目标，能够被打击得窗口有限，由此限制了给定杀伤链攻击的时点，不能在超出时点范围外对目标进行打击。

请注意，这些假设是在我们的优化问题中所需的，而实际情况可能会更为复杂。但是，这些假设提供了一个处理这个问题的实用框架，并可以根据更具体的场景进行调整和扩展。

# 问题参数和问题分析

在问题参数和问题分析部分，给出了问题中的符号约定、问题目标和约束的数学形式、关键算法的思路、衡量数学模型求解能力的评价标准以及主要的数值结果。

## 符号约定

这一部分主要定义了所有在模型中使用的**参数、含义及设置的值**。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 符号 | 含义 | 取值 |
|  | 第目标的威胁值 | 随作战发生变化 |
|  | 决策变量，针对目标，在时间 , 是否使用雷达和发射车 构建杀伤链。 | 没有构建这条杀伤链，则，否则为正整数 |
|  | 针对目标，在时间 , 是否使用雷达 锁定目标 。 |  |
|  | 毁伤概率。针对目标，在时间 , 使用雷达和发射车 构建杀伤链时的毁伤概率 | 概率，应符合真实作战场景 |
|  | 发射车集合 | 随战场态势发生变化 |
|  | 目标集合 | 随战场态势发生变化 |
|  | 雷达集合 | 实际场景给出 |
|  | 发射车个数 |  |
|  | 雷达个数 |  |
|  | 目标数量 |  |
|  | 为了有效降低考虑的时点， 并非均匀分布. 举例而言，可以设置为 |  |
|  | 目标 最后的打击时间，达到 则认为目标已经命中我方关键内容。 |  |
|  | 在时间 , 使用雷达和发射车 构建的杀伤链的作战时间 |  |
|  | 在时间 ，雷达使用次数限制。 |  |
|  | 在时间 ，发射车使用次数限制 |  |
|  | 发射车的弹药使用次数限制 |  |
|  | 第目标允许分配的杀伤链个数限制 |  |
|  | 目标，在时间 的时间权重，用于衡量目标此时打击的紧迫程度 |  |
|  | 目标 的打击窗口，武器必须在这个时间区间内打击目标 |  |
|  | 针对目标，使用雷达 锁定目标的时间范围。 |  |

## 目标与约束的数学描述

这部分描述了优化问题的**目标函数和约束条件及其数学形式**。

**优化目标**

优化目标1：最大化消除时间加权的来袭目标威胁值

优化目标2：最小化作战花费

优化目标3：最小化作战时间

为了能够去掉max符号，增加一个变量，并增加对应的约束，以保证能够有效体现这个优化目标：

**条件约束**

雷达通道约束：在时点 ，杀伤链使用雷达的次数应小于等于其通道数。

发射车通道约束：在时点 ，杀伤链使用发射车的次数应小于等于弹药数。

杀伤链数目约束：目标最多可构建的杀伤链条数为。

发射车弹药约束：在时点 ，杀伤链使用发射车的次数应小于等于弹药数。

锁定约束：武器要求当武器进行打击直到打到目标的过程中，必须要有唯一一个雷达进行锁定：

雷达窗口约束：雷达必须在规定的窗口内:

打击窗口约束：武器的打击必须在目标的可打击窗口内

## 核心算法思路

在整个问题的求解过程中，涉及多个不同的算法，其中核心算法是线性化方法，因此在此将这个关键技术的基本思路进行呈现：

**线性化方法**的执行步骤如下：

1. 打击场景分析：针对每个目标，共有N个允许的打击时间节点，在每个时间节点，在各种资源约束的条件下，各目标依照限制都有多个可行的备选杀伤链。因此针对一个目标，可以计算出在各个时间节点都有哪些可行的杀伤链组合方案。
2. 打击场景枚举：给定目标后，假设全部资源都可以用来只处理这一个目标，可以得到多种不同的包含时序的资源分配方案，每种分配方案都可以计算出针对目标的花费和包含时间权重的毁伤概率，以及这个方案对 的打击时间，从而可以计算出目标函数中与目标相关的毁伤概率、打击时间和花费。
3. 打击场景分配：每个目标需要从打击场景中选择一个，会生成指数多个不同的打击方案，将这些打击方案作为线性规划的列，即可获得问题的线性规划模型。
4. 调整约束条件：将各种资源约束条件调整为新形式，如果针对目标的某个方案与资源约束冲突，且仅与目标相关，则可以设置这个决策变量一定为0。
5. 增加新约束：增加额外的约束，确保每个目标只能被分配一个打击场景。

应用以上步骤，将原问题转化为等价的线性化模型，且线性化模型的可行解与原模型的可行解可以形成一一对应的关系。使用整数规划求解策略求解线性化模型即可得到原模型的可行解。

## 评价指标

这部分定义了用来评价解决方案性能的一系列指标。包括：算法的计算时间，算法的有效性指标。

**（1）算法的计算时间**

使用整数规划算法计算时间被记为，我们将对比在不同的规模下，算法的执行时间，确保该计算指标能够覆盖合同要求的规模。

**（2）算法的杀伤能力指标**

由于考虑时序后，算法从更加全局的角度对问题进行计算，因此希望算法能够比不考虑时序的问题效果更好，因此我们关注的是包含时序的异构作战资源杀伤网相比于不考虑时序的杀伤网构建算法作战效能的提升程度。我们采用以下公式来衡量两种算法所获得方案对应的优化指标的差异比例：

其中， 和 分别表示包含时序的异构作战资源杀伤网和不考虑时序的杀伤网构建算法所得到的方案的优化指标值。其中优化目标指的是从整体的角度考虑，针对目标的毁伤概率、整体的花费与作战时间的加权比较。

## 主要的数值结果

在本部分中，给出了上述评价指标的主要数值结果，并将结果与合同要求进行了对比，证明了求解算法及软件能够满足合同要求，并具有满足要求的计算效能和求解速度。

**（1）算法的计算时间（合同指标）**

合同要求计算300目标与300资源的条件下，根据目标与资源的比例，并真实的作战资源配比，按照

**目标：指控：雷达：发射车：弹药 = 26：1：1：4：20**

的资源配比进行设置。其中发射车与总资源的比例为1：1，与合同要求的300：300 =1：1相同。

同时假设整体的作战时间为1000秒，来袭目标假设随机分布在1000秒的作战时间内，每次决策时考虑时间为200秒，在决策过程内设置13个计算时点：

且每5秒进行一次重新决策。

根据不同的大小规模设置不同的算例，其规模及计算结果如下（最后一列是求解时间）：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 类型 | 目标 | 雷达 | 发射车 | 弹药 | 资源总数 | 计算时间(s) |
| 1 | 26 | 1 | 1 | 4 | 26 | 0.95 |
| 2 | 52 | 2 | 2 | 8 | 52 | 1.13 |
| 3 | 78 | 3 | 3 | 12 | 78 | 2.52 |
| 4 | 104 | 4 | 4 | 16 | 104 | 4.11 |
| 5 | 156 | 6 | 6 | 24 | 156 | 8.80 |
| 6 | 208 | 8 | 8 | 32 | 208 | 12.19 |
| 7 | 312 | 12 | 12 | 48 | 312 | 33.11 |
| 8 | 364 | 14 | 14 | 56 | 364 | 54.03 |
| 9 | 468 | 18 | 18 | 72 | 468 | 77.26 |
| 10 | 598 | 23 | 23 | 92 | 598 | 100.48 |
| 11 | 728 | 28 | 28 | 112 | 728 | 1450.77 |
| 12 | 1092 | 42 | 42 | 168 | 1092 | 2801.06 |

合同要求规模与类型7接近（要求为300资源300目标，类型四为312资源，312目标，在上表中标红），在这个规模下，**问题的平均求解时间为33.11秒，在生成的10个算例中最慢计算时间为42.48秒，能够满足在60秒内求得解的合同要求**。

**（2）算法的杀伤能力指标**

在这360个算例中，统计了算法的效能提升，其中设置毁伤概率，打击花费、作战时间的权重分别为0.6，0.3，0.1，根据不同的提升区间得到如下数据：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 提升比例区间 | 算例个数 | 占比 |
| [30%, +] | 23 | 6.39% |
| [25%, 30%) | 63 | 17.50% |
| [20%,25%) | 107 | 29.72% |
| [15%,20%) | 136 | 37.78% |
| [0,15%) | 31 | 8.61% |

在360个算例上，有91.39%的案例显示出算法的提升比例超过了15%，平均的提升比例为23.1%，最大的提升比例为52.4%。合同要求的提升比例为15%，从平均提升的角度而言，算法效果提升了23.1%，能够满足合同的要求。值得指出的是，虽然有部分方法提升效果不高，并非新算法的效果能力不足，而是在一些简单的场景下，使用局部方法不考虑时序已经能够达到比较好的结果，因此无法再得到进一步的提升。

# 报告与合同的对应关系

在报告与合同的对应关系部分中，主要给出了本次报告对应合同中的哪些研究内容与项目指标。

## 报告对应的项目指标

本次报告对应**如下研究指标**：

**指标名称**：杀伤网时序运筹优化求解算法

**指标要求**：异构资源杀伤网运筹优化时间不超过60秒，相比无时序优化的杀伤网构建方法效能提升15%

**考核方式**：针对战术指层面，在资源种类不少于指控、发射车、高功率微波式武器及其他要素6类，空袭目标300个，我方防御要素不少于300个的攻防场景下，从软件模块接收目标空情，到构建决策结束计时完毕，时间不超过30分钟。相比无时序优化的杀伤网构建方法，作战费效比提升15%，通过仿真测试方式进行考核

**完成情况：已完成**

## 研究内容

本报告对应的研究内容包括多准则策略和时序约束下异构作战资源动态杀伤网构建问题的**运筹优化数学描述、数学模型与求解算法**。其细节对应的章节如下。

针对数学建模部分，在第四章中的第1节对多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题进行特征提取，对作战资源进行能力表征，在第四章的第2节中根据问题中资源与作战目标抽象出的数学结构特点，提出体系多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题优化问题中的作战目标与条件约束。

针对算法设计部分，在第四章第3节中给出多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的约束与能力数学描述，建立问题的整数规划模型。在第五章第1节至第3节给出多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的整数规划求解模型，求解模型依据多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的问题特征，利用预处理算法、割平面算法、启发式方法等求解技术，完成分支定界框架下的算法设计。并在第五章第4节给出算法设计相关的一些数学证明。

针对仿真模拟部分，在第六章中，将给出数学求解模型的仿真模拟实验结果，其中第六章第1节给出了仿真模拟的参数设置，第2节给出了典型算例的求解结果展示，第3节中给出了结果分析，其中包括与合同要求的对比。

# 四、数学模型构建

## 问题的场景描述

我们的目标是对战场中存在的各种威胁进行识别和评估，然后根据这些信息动态地对作战资源进行优化。这涉及在整个作战过程中，随着情况的变化，在多个关键时点上，针对每个目标建立有效的“杀伤链”，每条杀伤链都代表一种具体的打击，包括“目标-指控-雷达-发射车-弹药”的完整序列。每个目标都可以在多个时点上分配一条或多条杀伤链，这取决于我们的战略目标、敌方威胁的具体情况以及我们的资源状况。

我们的优化目标是使得在资源限制的条件下，对所有作战目标的整体效能（如最小化作战时间、最大化杀伤效果、最小化作战费效比等）达到最优。与以往的研究不同，过去的方法往往忽略了从整体战略角度出发的资源调配，仅仅关注于针对每一具体时刻的单一目标的反应。而我们的研究目标是打破这种模式，通过全局视角的优化，设计一个能够随时间动态变化的异构资源网络。这种网络不仅要能够针对即时来袭的目标进行有效应对，还要能够根据作战进程的推移和敌我双方态势的变化，实时调整和优化资源配置。这样的方法将有助于我们在保持战术灵活性的同时，实现作战效能的最大化，包括但不限于缩短作战时间、提升击毁效果和降低作战成本等关键指标。

总体而言，我们需要在各种资源限制的条件下，构建问题的运筹优化模型，设计算法，给出多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题在各个时点的打击方案。

## 目标与约束的数学表征

### 优化目标

优化目标1：最大化消除含时间加权的来袭目标威胁值

优化目标2：最小化作战花费

优化目标3：最小化作战时间

**符号解释**

：决策变量，针对目标，在时间 , 是否使用雷达和发射车 构建杀伤链。

: 毁伤概率。针对目标 ，在时间 , 使用雷达 和发射车 构建杀伤链时的毁伤概率。

发射车下标

雷达下标

目标下标

：第 目标的威胁值

：目标，在时间 的时间权重，用于衡量目标此时打击的紧迫程度。

：使用第个武器，第个雷达的作战花费

：总体的作战时间，用于辅助的决策变量。

：在时间 , 使用雷达和发射车 构建的杀伤链的作战时间

在我们的模型中，对于 设置的动机如下：

当同时面临多个目标时，希望优先分配那些比较紧急而且权重较大的目标，（比如同时面对2个来袭目标，目标 1 还有10秒到达，目标2有200秒才到达，此时若仅有一发可用导弹，应该优先分配给剩余打击窗口少的目标）。基于这个目标，设计了参数，用于刻画当前目标的紧迫程度。这个参数可以进行调整，其应该符合的标准为：目标剩余打击窗口的个数约少，这个目标越紧迫，它的时间权重就越高。因此采用如下的设置：

其中 是一个参数， 表示剩余的时间间隔。当设置为0时，我们认为和打击目标的急迫程度与剩余时间窗数呈反比，加入平衡参数可以让这个曲线变得更平缓，但同样呈现随着时间窗变小紧迫性变大。

### 约束条件

雷达通道约束：在时点 ，杀伤链使用雷达的次数应小于等于其通道数。

发射车通道约束：在时点 ，杀伤链使用发射车的次数应小于等于弹药数。

杀伤链数目约束：目标最多可构建的杀伤链条数为。

发射车弹药约束：在时点 ，杀伤链使用发射车的次数应小于等于弹药数。

锁定约束：武器要求当武器进行打击直到打到目标的过程中，必须要有唯一一个雷达进行锁定：

雷达窗口约束：雷达必须在规定的窗口内:

打击窗口约束：武器的打击必须在目标的可打击窗口内

## 问题的数学形式

### 原模型的数学表述

原模型的数学形式为：

### 线性化模型的数学表述

**数学符号：**

* ：打击场景，表示包含时序的杀伤链使用组合集合。
* ：针对目标 允许被使用的包含时序的杀伤链打击方案。诸多可行约束被包含在这项之内。
* ：针对某个目标的一个包含时序的杀伤链使用组合
* ：决策变量，是否对目标应用打击场景。
* ：目标目标在场景打击下的加权毁伤概率与花费，注意此时仅考虑一个目标 ，其计算公式为：
* ：打击场景在时间是否使用发射车 (0-1常量，1代表使用该发射车，0代表未使用该发射车）。
* ：打击场景时间是否使用雷达 (0-1常量，1代表使用该雷达，0代表未使用该雷达）。
* ：打击场景 使用发射车 的次数，应该对时间进行累加
* ：雷达使用限制。
* ：发射车使用。
* ：发射车弹药

# 五、算法设置与最优性证明

## 研究思路

基于上一段提到的数学模型，我们希望设计一个多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的数学模型与求解算法，其关键在于如何有效将时序考虑在模型内，以达到全局优化的目的。基于这个研究方向，我们将设计一个多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的运筹优化求解方法并评估这种方法在不同应用场景下的性能。从算法设计的角度而言，时序模型和非时序模型各有其优势。时序模型能够考虑时间维度上的动态变化，为长期规划提供支持，这是其显著的优势。但当处理高度动态且复杂的问题时，时序模型的计算复杂度会大大增加。与此相比，非时序模型更适用于短期或静态问题的快速解决，但可能无法充分考虑长期规划和时间维度上的变化。

为了能够有效验证建立多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的求解算法，我们设计了一系列不同规模的算例用于检验模型的求解效果。针对每个案例，我们分别运用时序模型和非时序模型进行求解，并对比结果。在比较中，我们重点关注两个主要指标：计算效率和决策质量。这两方面的评估将帮助我们理解在不同应用场景下两种模型的性能，我们希望能够找到一个时间可以接受，同时能够比较有效地提升性能的求解方法。

与以往的研究不同，过去的方法往往忽略了从整体战略角度出发的资源调配，仅仅关注于针对每一具体时刻的单一目标的反应。而我们的研究目标是打破这种模式，通过全局视角的优化，设计一个能够随时间动态变化的异构资源网络。我们期望通过这种全新的方法，实现更加全面和长远的资源优化和调度策略，以适应快速变化的环境和需求。

## 算法应用的主要技术说明

**① 分支定界方法**

根据问题分支过程中不同子问题的关系，提出强有效的分支策略，割掉不同子问题之间的可行域相交部分，减少搜索树的规模，提升问题的求解效率。通过大量数值实验反复论证，验证新的分支策略的有效性。在此问题中，设计了针对问题结构的分支策略，以优化求解速率。

在全局资源匹配问题中，分支定界方法同样展现了其独特的优势。我们尝试将列生成方法应用于求解松弛问题，并将其融入到分支定界的框架中。这种独特的方法结合使得整个求解过程更为高效，不仅保证了问题的整数最优解的获得，而且极大地提高了问题的求解速度。

**② 列生成方法**

列生成方法的总体思想是许多线性规划问题的列数（变量）太多而无法明确考虑所有变量，因此在算法的开始仅使用其变量的子集求解所考虑的子问题开始求解。 然后迭代地，将有可能改进目标函数的变量添加到数学规划模型中。一旦可以证明添加新变量将无法再提高目标函数的值，该过程就会停止。应用列生成算法时，希望只生成很小一部分变量即可得到最优解，对于这个想法是基于以下思路的支持：在最优解中，大多数变量将是非基本变量并假定值为零，因此可以在没有它们的情况下找到最优解。

在算法的执行过程中，该算法考虑了两个问题：主问题和子问题。主要问题即如上面指出的，仅考虑部分变量，依次构造出一列规模逐渐变大的线性规划问题，知道能够保证得到问题的精确解。子问题则是为识别改进变量（即选择出可以改进主问题的变量）而创建的新问题。当问题的结构让子问题可以使用高效算法（通常是专用组合算法）解决子问题时，列生成方法特别有效。通常原问题是大规模的线性规划问题，此时可以保证子问题同样是线性规划问题。

在体系多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题中，我们已经通过理论推导，证明该问题的子问题是一个凸优化问题，因此可以采用相应的凸优化方法来对问题进行求解，从而保证了整体列生成方法的全局最优性与快速性。

**③ 外逼近方法**

外逼近方法是针对一类特定的凸优化问题，基于对最优值的逼近来求解问题。该方法在每一次迭代中，都会在现有的可行域中寻找一个局部最优解，并根据该局部最优解形成一个割平面，用以割去部分可行域，使得新的可行域仍包含全局最优解。在实际操作过程中，通过调整这个割平面的生成策略，可以有效地控制迭代过程，以提高收敛速度和解的精度。

在全局资源匹配问题中，已经证明了列生成子问题具有凸性，因此我们决定采用外逼近方法对子问题进行求解。这种方法能够有效地缩小问题规模，提高求解效率，尤其在处理大规模问题时表现出色。

**④ 割平面方法**

依据资源的具体结构，推导定制的割平面算法，改善模型质量，以加速问题的求解速度，通过数值实验，分析该问题中涉及的整数规划求解器，进行参数调优，确定割平面算法在每个分支定界节点的执行频率；在某一分支定界节点产生的割平面应用到其他节点的标准；在每个节点添加割平面的数量等参数，以最大化割平面方法效率的最大化。

在全局资源匹配问题中，割平面方法发挥了关键性的作用。考虑到问题的特性，我们针对我方的资源配置情况，设计了一种特定的割平面。这种方法有效地利用了问题的结构信息，以优化割平面的生成策略，从而大大减小了问题的规模，同时也提高了求解的效率。

**⑤ 次模割方法**

次模割方法是一种专用于处理带有次模结构的优化问题的方法。次模函数是一种在整个定义域上具有凸性的函数，因此，次模问题可以被看作是一种特殊的凸优化问题。次模割方法利用了次模函数的特性，通过在每次迭代中引入一个割平面，逐步逼近全局最优解。对于整数问题，可以通过构造有效的不等式将问题转化为次模问题，从而应用次模割方法进行求解。

在全局资源匹配问题中，决策变量均为二元变量，目标函数可以通过次模函数描述，因此我们决定采用次模割方法进行求解。这种方法的应用，使我们能够得到更有效的不等式，从而有效地降低了问题规模，提升了求解速度。

## 算法的求解流程

### 算法的整体流程

体系多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的求解过程涉及到一个模型等价转换与三个求解算法，模型等价转换将问题等价转换为一个线性规划整数模型，并调用算法一进行求解，算法一的求解过程中会调用算法二，算法二的求解过程中会调用算法三，三个算法共同保证了问题解的最优性。

等价转化方法被称为**线性化方法**，三个求解算法是：**（一）分支定界求解算法**，**（二）列生成求解算法**与**（三）外逼近求解算法**，线性化方法及三个求解算法的主要求解流程及算法间的关系如下：



### 模型转化方法：线性化方法

1. 初始化打击场景：将针对每个目标的不同的打击场景作为线性规划的列，设定其上下界以及目标函数系数。
2. 调整约束条件：将资源容量约束条件调整为新形式。将其他约束转化用于判定打击场景的可行性。
3. 增加新约束：增加额外的约束，确保每个目标只能被分配一个打击场景。

应用以上步骤，将原问题转化为等价的线性化模型。

### 分支定界算法（算法一）

1. 问题初始化：对于一个整数规划问题，先解其线性规划松弛问题，得到初值。**求解线性松弛的步骤调用了算法二**。
2. 分支操作：基于当前解，选择一个分数解进行分支，创建两个新的子问题。
3. 定界操作：求解子问题的线性规划松弛问题，得到解作为界，如果解为整数解则可能是最优解，如果解的目标函数值小于当前已知的最优解，则剪枝（舍弃该子问题）。
4. 选择操作：从当前未被剪枝的子问题中选择一个子问题作为下一个求解的问题，**子问题求解的步骤调用了算法二**。
5. 迭代过程：重复执行2-4步，直到所有子问题都被剪枝或者求得最优解。
6. 终止条件：当所有子问题都被处理后，得到的整数解即为问题的最优解，算法执行结束。

### 列生成算法（算法二）

1. 初始化主问题：通过启发式方法或随机选择的方式，为每个目标分配少量的备选的含时序的打击方案。
2. 求解主问题：从每个目标当前的备选杀伤链（含时序的打击方案）中构建含时序的异构杀伤网，得到局部最优杀伤网。
3. 求解子问题：计算尚未选择的杀伤链（含时序的打击方案）对当前异构杀伤网是否有改进潜力，依此判断局部最优杀伤网是否还具有优化空间，**列生成子问题求解的过程调用了算法三**。
4. 步骤三的结果分为可以改进与不可改进两种情况。如果存在具有对当前杀伤网具有改进潜力的打击方案，则将该方案加入到备选中，回到步骤二接待求解。否则进入步骤五。
5. 算法逐步改进可行解，可依据无改进方案或其他符合实际作战需求的终止条件作为列生成算法的终止条件。

### 外逼近算法（算法三）

1. 问题初始化：选择一组初始解，计算目标函数值，定义收敛精度。
2. 线性化：在当前解处对非线性问题进行线性化，形成切平面，将非线性问题转化为一个线性问题。
3. 求解线性问题：求解线性问题，得到一个新的解。
4. 收敛性检验：比较新解与旧解之间的差异，如果小于定义的收敛精度，则停止迭代，输出当前解作为最优解。否则，进入步骤5。
5. 更新：将新解作为旧解，返回步骤2，进行新的迭代。
6. 终止条件：满足收敛性条件后，算法执行结束，输出最优解。

## 模型及算法核心方法详细描述

### 列生成算法

**（1）列生成算法概述**

列生成方法是一种在大规模优化问题中广泛应用的技术，它的核心思想是在一个较小的、更易于管理的问题（即主问题）上求解，而不是在问题的所有可能性上一次性求解。这种方法主要应用在大规模的线性规划和整数规划问题中，尤其适用于那些具有大量可能决策变量，但在任何最优解中只有少数决策变量非零的情况。

**（2）列生成算法的算法流程**

列生成方法求解的是一个标准的线性规划问题：

其中代表的决策变量个数非常多，通过以下步骤迭代地求解这个线性规划问题：

**步骤一：初始化主问题**。

这一步通常通过启发式方法或随机选择的方式，选取一个较小的、可解的问题作为主问题的初始版本，主问题的数学模型可以描述为：

使用 表示仅选择了原问题的部分列。

**步骤二： 求解主问题**。

接下来我们使用线性规划方法（如单纯形法或者内点法）来求解这个初步限制的注问题，获取当前的最优解和对偶变量值。

注意，这个步骤产生的结果实际上构成了原问题的一个可行解。在这个过程中，尚未选取的变量被视为零，从而在满足所有原始约束的情况下进一步简化了问题。然而，这个解可能不是原问题的最优解，这是由于我们在初步限制的问题中并没有包含所有的决策变量，也即尚未选取的变量。因此，在后续的步骤中，我们需要通过逐步引入新的列来改进这个初步的解，以期达到原问题的最优解。

**步骤三：求解子问题**。

对于子问题，我们实际上是在尝试寻找那些未被包含在当前主问题中的列（即尚未选取的变量），若加入主问题后有可能改进当前解。这一过程被称为定价过程。在定价过程中，我们会计算每个未选取变量的约化费用（Reduced cost）。约化费用是一个衡量将一个未选取的变量（也就是一列）加入主问题后，主问题的目标函数值改变程度的指标。约化费用的计算公式为

得到，其中 是对偶问题的解，和分别是决策变量的系数向量和成本。如果某个变量的约化费用为负，那么将此变量加入主问题有可能得到更优的解。因此，我们将计算所有未选取变量的约化费用中的最小值，如果最小值小于0，说明主问题尚有改进的空间。

具体而言，子问题的数学形式为：

若该问题的最优值小于0，对应的将被加入到主问题的备选解中。

**步骤四： 判断当前主问题是否达到最优解。**

如果在步骤三的定价过程中，我们找到了一个约化费用小于零的决策变量，那么我们就将这个决策变量（也即新的列）加入到主问题中，并回到步骤二，对扩充了的主问题进行求解。否则，如果所有未选取的决策变量的约化费用都大于或等于零，那么我们就停止算法，因为这表明当前的主问题解就是全局最优解。

（3）**列生成算法可以得到理论最优解的数学证明**。

上述步骤指出了列生成方法的迭代步骤，算法终止条件为步骤四中的判断是否所有的约化费用都大于等于0。因此证明的步骤分两步：如果这个条件成立，则一定可以得到问题的最优解。算法迭代一定可以在有限步终止于这个条件。

对于第一步，证明需要用到如下定理：

**引理（弱对偶定理）**：对于任意的线性规划问题，如果原问题

和对偶问题

都存在可行解，则必有原问题的目标函数值大于等于对偶问题的目标函数值。同时，如果存在一组原问题的解和对偶问题的解，使得原问题的目标函数值和对偶问题的目标函数值相等，即有 ，则和 分别是原问题和对偶问题的最优解。 在列生成方法中，主问题求解结果是原问题的一组可行解，但主问题的对偶问题的解未必是原问题对偶问题的可行解，如果验证了所有的约化费用都大于等于0，即保证了对偶问题的约束

一定成立，从而得到了原问题的对偶问题的一组可行解。由于和分别是主问题和主问题对偶问题的最优解，因此可以保证，即根据弱对偶定理，保证了解的最优性。

对于第二步，证明如下：

假设原问题有列（变量），主问题初始化有列（变量），如果在步骤四的判断过程中发现存在使得约化系数小于0的变量（列），则将其加入到主问题的备选列当中，每次迭代至少使得备选列增加1，因此经过至多次迭代，主问题就会包含原问题全部的列，此时一定会得到原问题的最优解。而当在步骤四的判断过程中发现不存在使得约化系数小于0的变量（列），则问题已经达到了最优解。

综上所述，可以得到如下定理：

**定理：**使用上述的列生成算法，问题一定可以在次迭代内终止，且此时可得到原问题的最优解。

### 列生成算法在体系多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题中的表现形式。

列生成算法的步骤应用于全局资源匹配后可以得到如下迭代步骤：

1. 初始化主问题：通过启发式方法或随机选择的方式，为每个目标分配少量的备选的含时序的打击方案。
2. 求解主问题：从每个目标当前的备选杀伤链（含时序的打击方案）中构建含时序的异构杀伤网，得到局部最优杀伤网。
3. 求解子问题：计算尚未选择的杀伤链（含时序的打击方案）对当前异构杀伤网是否有改进潜力，依此判断局部最优杀伤网是否还具有优化空间，**列生成子问题求解的过程调用了算法三**。
4. 步骤三的结果分为可以改进与不可改进两种情况。如果存在具有对当前杀伤网具有改进潜力的打击方案，则将该方案加入到备选中，回到步骤二接待求解。否则进入步骤五。
5. 算法逐步改进可行解，可依据无改进方案或其他符合实际作战需求的终止条件作为列生成算法的终止条件。

上述流程步骤中的原模型即线性化模型，列生成主问题的形式可以使用下面的数学模型表述：

其中即为第次迭代后的备选杀伤链集合，其依然要满足之前提到的每个目标的杀伤链约束。

列生成方法使用范围是线性规划，因此需要计算该问题的松弛模型，其数学表述如下：

如果考虑这个问题的列生成子问题，就需要从对偶问题的多个不同的行中选择出一列Reduced cost < 0 的一列，而如果分别记录上面约束对应的对偶变量为

则对偶问题的一个约束（对应原问题的一个变量，即 ，即对目标的一种打击方案。可以被写为：

因此列生成子问题的判断依据就是对于一个给定的目标，计算是否存在

由于该形式能够对目标进行分离，因此每次迭代步骤中可以求解个互不影响的子问题，由于这些子问题并没有相互影响，可以进行并行计算，并且在依此求解子问题步骤中可以同时检验个目标，上述两个原因保证了算法具有较好的计算性能。

对于子问题的求解，将的定义代入，可以得到第个目标的子问题形式为：

**命题**：目标函数可以转化为下面的形式

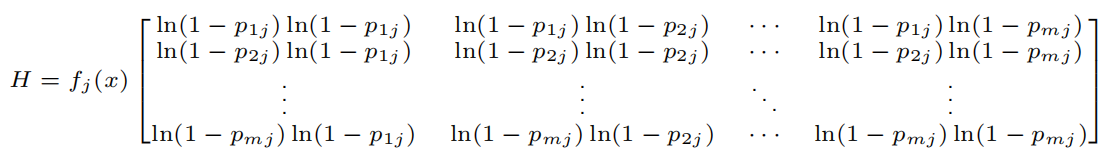
且这个函数是凸函数。

**证明**：转化只需要将视为一个变量，系数替换为即可。

而对于上述函数，考虑

它的海森矩阵中的每一项为

因此可以得到：



假设

则海森矩阵为：

因为海森矩阵是秩一矩阵，所以目标函数是凸函数。

证毕。

在子问题是凸问题的基础上，可以采用分支定界、外逼近等方法来对问题进行求解，其具体求解细节在此不再赘述，过程中应用了一些适合此问题的加速求解方法，但整体而言是比较成熟的求解凸问题的求解流程。

### 时间点的非均匀离散

对于时间的离散，如果对整体采用均匀离散，如果离散间隔较小，会导致计算复杂度过大，并且过度详细地考虑了比较久的未来，未来节点可能随态势发生较大变化，因此太过详细的考虑或许并不合理。但如果离散间隔较大，则可能导致近期的决策没有办法有效制定，降低了整体的复杂度。因此采用了这种先疏后密的离散方式，近期节点详细考虑，安排较为精细的作战策略。长期节点进行粗略考虑，未来随战场态势进行调整。在这个问题中，设置的计算点为：



# 仿真模拟

## 仿真模拟参数设置

在仿真模拟中，共设计一个随机生成的测试集，测试集包含合同要求的数据规模，并对更大规模的问题进行了考察

### 测试集

（1）算例规模参数设置

合同要求计算300目标与300资源的条件下，根据目标与资源的比例，并真实的作战资源配比，按照

**目标：指控：雷达：发射车：弹药 = 26：1：1：4：20**

的资源配比进行设置。其中发射车与总资源的比例为1：1，与合同要求的300：300 =1：1相同。

同时假设整体的作战时间为1000秒，来袭目标假设随机分布在1000秒的作战时间内，每次决策时考虑时间为200秒，在决策过程内设置13个计算时点：

且每5秒进行一次重新决策。

根据不同的大小规模设置不同的算例，如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 类型 | 目标 | 雷达 | 发射车 | 弹药 | 资源总数 |
| 1 | 26 | 1 | 1 | 4 | 26 |
| 2 | 52 | 2 | 2 | 8 | 52 |
| 3 | 78 | 3 | 3 | 12 | 78 |
| 4 | 104 | 4 | 4 | 16 | 104 |
| 5 | 156 | 6 | 6 | 24 | 156 |
| 6 | 208 | 8 | 8 | 32 | 208 |
| 7 | 312 | 12 | 12 | 48 | 312 |
| 8 | 364 | 14 | 14 | 56 | 364 |
| 9 | 468 | 18 | 18 | 72 | 468 |
| 10 | 598 | 23 | 23 | 92 | 598 |
| 11 | 728 | 28 | 28 | 112 | 728 |
| 12 | 1092 | 42 | 42 | 168 | 1092 |

根据武器资源特点与合同要求，设置目标与作战资源比例为：

共有12种不同的规模类型，其中类型7与合同规模要求相近

（2）杀伤概率与目标威胁值设置

为杀伤概率最大值，为杀伤概率最小值。所有链的杀伤概率为在到之间均匀分布的随机数。

为目标威胁值的最大值， 为目标威胁值的最小值。所有目标的威胁值设定为在 到 之间均匀分布的随机整数。首先生成目标可打击窗口，先设置在10-60秒的打击窗口长度，再将打击窗口随机设置在整体的作战时间中。给定目标与雷达后的可探测窗口依照目标可打击窗口结束往前倒推进行随机设置，设置为10-100秒的随机窗口。

（3）随机数设置

针对上述算例规模，每种计算规模随机采样30组，最终共产生360组随机算例。

## 仿真实验结果

### 结果评价指标

**（1）算法的计算时间**

使用整数规划算法计算时间被记为，我们将对比在不同的规模下，算法的执行时间，确保该计算指标能够覆盖合同要求的规模。

**（2）算法的杀伤能力指标**

由于考虑时序后，算法从更加全局的角度对问题进行计算，因此希望算法能够比不考虑时序的问题效果更好，因此我们关注的是包含时序的异构作战资源杀伤网相比于不考虑时序的杀伤网构建算法作战效能的提升程度。我们采用以下公式来衡量两种算法所获得方案对应的优化指标的差异比例：

其中， 和 分别表示包含时序的异构作战资源杀伤网和不考虑时序的杀伤网构建算法所得到的方案的优化指标值。其中优化目标指的是从整体的角度考虑，针对目标的毁伤概率、整体的花费与作战时间的加权比较。

### 仿真实验结果

（1）**计算时间**

不同规模的计算结果如下：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 类型 | 目标 | 雷达 | 发射车 | 弹药 | 资源总数 | 计算时间(s) |
| 1 | 26 | 1 | 1 | 4 | 26 | 0.95 |
| 2 | 52 | 2 | 2 | 8 | 52 | 1.13 |
| 3 | 78 | 3 | 3 | 12 | 78 | 2.52 |
| 4 | 104 | 4 | 4 | 16 | 104 | 4.11 |
| 5 | 156 | 6 | 6 | 24 | 156 | 8.80 |
| 6 | 208 | 8 | 8 | 32 | 208 | 12.19 |
| 7 | 312 | 12 | 12 | 48 | 312 | 33.11 |
| 8 | 364 | 14 | 14 | 56 | 364 | 54.03 |
| 9 | 468 | 18 | 18 | 72 | 468 | 77.26 |
| 10 | 598 | 23 | 23 | 92 | 598 | 100.48 |
| 11 | 728 | 28 | 28 | 112 | 728 | 1450.77 |
| 12 | 1092 | 42 | 42 | 168 | 1092 | 2801.06 |

合同要求规模与类型7接近（要求为300资源300目标，类型四为312资源，312目标，在上表中标红），在这个规模下，**问题的平均求解时间为33.11秒，在生成的10个算例中最慢计算时间为42.48秒，能够满足在60秒内求得解的合同要求**。

**（2）算法的杀伤能力指标**

在这360个算例中，统计了算法的效能提升，其中设置毁伤概率，打击花费、作战时间的权重分别为0.6，0.3，0.1，根据不同的提升区间得到如下数据：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 提升比例区间 | 算例个数 | 占比 |
| [30%, +] | 23 | 6.39% |
| [25%, 30%) | 63 | 17.50% |
| [20%,25%) | 107 | 29.72% |
| [15%,20%) | 136 | 37.78% |
| [0,15%) | 31 | 8.61% |

在360个算例上，有91.39%的案例显示出算法的提升比例超过了15%，平均的提升比例为23.1%，最大的提升比例为52.4%。合同要求的提升比例为15%，从平均提升的角度而言，算法效果提升了23.1%，能够满足合同的要求。值得指出的是，虽然有部分方法提升效果不高，并非新算法的效果能力不足，而是在一些简单的场景下，使用局部方法不考虑时序已经能够达到比较好的结果，因此无法再得到进一步的提升。

### 仿真实验结论

多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题的运筹优化数学描述模型与求解算法能够在效率与有效性两个角度实现合同目标。

# 总结

在第一章在引言部分，对问题背景进行基本的介绍，指出问题的具体描述，给出问题中涉及的关键概念以及我们在此问题中采取的主要假设。

在第二章问题参数和问题分析部分，给出了问题中的符号约定、问题目标和约束的数学形式、关键算法的思路、衡量数学模型求解能力的评价标准以及主要的数值结果。

第四章开始针对研究目标进行深入探究，第四章中对多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题进行了详细的描述。首先，我们描绘了问题的场景（4.1），提供了问题的背景和应用环境。然后，我们给出了优化目标和约束条件的数学表征（4.2），明确了优化目标以及约束条件。最后，我们提出了问题的数学形式（4.3），包括原模型的数学表述以及线性化模型的数学表述。这一部分为后续的算法设计和最优性证明提供了清晰的数学框架。

第五章主要讲述了算法的设置与最优性证明。我们首先介绍了研究的主要思路（5.1），然后详细说明了在算法应用过程中使用的主要技术（5.2）。接着，我们给出了算法的求解流程（5.3），包括算法的整体流程，模型转化方法，分支定界算法，列生成算法以及外逼近算法。在这一部分中，我们深入探讨了各项技术的应用及其效果。最后，我们进行了对关键方法的核心步骤进行了更详细的阐述（5.4）。

在第六章中，我们进行了仿真模拟实验，详细展示了我们的数学求解模型在实际问题中的应用效果。我们设置了一系列详细的参数，并对一些典型的算例进行了求解。实验结果显示，目前的求解算法在时间与效能两方面能够达成合同要求。这些结果验证了算法的有效性和实用性，为未来的研究提供了强有力的支持。

这份报告的内容指出，在多准则策略和时序约束下的异构作战资源杀伤网构建问题上，基于列生成的算法能够完成合同要求的指标，完成了研究目标。