Physics

LiGu 梨菇

1 Mechanics 力学

1.1 力学系统描述——运动方程

(对于 s 个自由度的系统,)
广义坐标: 完全刻画其位置的任意 s 个变量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$
广义速度: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s$
经验表明, 同时给定广义坐标、广义速度, 就可确定系统状态, 原则上可预测以后动作.
(加速度 $\ddot{q}$, 可由 $\dot{q}, q$ 唯一确定.)
运动方程: 加速度与坐标、速度的关系式. (二阶微分方程, 原则上积分得 q(t) 可确定系统运动轨迹.)
Lagrange 函数: 每一个力学系统可以用一个确定函数 L() 表征.

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t)$$

最小作用量原理: 系统在两个时刻的, 位置之间的运动, 使得 Lagrange 函数积分 (作用量 S) 取最小值.

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\delta S = \delta \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t1}^{t2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q|_{t1}^{t2} + \int_{t1}^{t2} (\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) \delta q dt = 0$$

Lagrange 方程: 运动微分方程.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, s)$$

1.2 参考系

* 研究力学现象必须选择参考系.
惯性参考系: 空间相对它均匀且各向同性, 时间相对它均匀.(特别的, 某时刻静止的自由物体将永远保持静止.)
$\Rightarrow$ Lagrange 函数不显含 $\vec{r}, t$, 不依赖 $\vec{v}$ 的矢量方向, 即

$$L = L(v^2)$$

$\Rightarrow$ Lagrange 方程有 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const$
惯性定律: 在惯性参考系中, 质点任何自由运动的速度的大小和方向都不改变.

$$\Rightarrow \vec{v} = const$$

1.3 参考系间相对性

Galilean 相对性原理: 存在无穷个相互作匀速直线运动的惯性参考系, 这些惯性系之间时空性质相同, 所有力学规律等价.

(今后不特别声明, 默认惯性参考系.)

Galilean 变换: 两个不同参考系 K、K' 之间的的坐标变换 (K' 相对 K 以速度 $\vec{V}$ 运动).

绝对时间假设: 我们认为两个参考系的时间相同.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r'} + \vec{V}t \\ t = t' \end{cases}$$

Galilean 相对性原理: 力学系统在 Galilean 变换下具有不变性.

1.4 守恒定律

1.4.1 能量守恒: 时间均匀性

时间均匀性: 封闭系统 Lagrange 函数不显含时间. $\Rightarrow L(\vec{q},\dot{\vec{q}})$

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum \frac{d}{dt}(\frac{L}{\dot{q}_i}\dot{q}_i) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L) = 0$$

能量 E:

$$\Rightarrow E = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = T(q,\dot{q}) + U(q) \qquad \frac{d}{dt}E = 0$$

1.4.2 动量守恒: 空间均匀性

空间均匀性: 空间平移不变性.

$$\delta L = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \cdot \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad (\forall \vec{\epsilon}) \Rightarrow \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \sum \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt}\sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0$$

动量 $\vec{p}$:

$$\Rightarrow \vec{p} = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \sum m_i \vec{v}_i \qquad \frac{d}{dt}\vec{p} = 0$$

1.4.3 角动量守恒: 空间各向同性

空间各向同性: 空间旋转不变性.

$$\begin{aligned} \delta L &= \textstyle\sum(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \delta \vec{v}_i) = \sum[\dot{\vec{p}}_i \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_i)] = \delta\vec{\varphi} \cdot \sum(\vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i + \vec{v}_i \vec{p}_i) \\ &= \delta\vec{\varphi} \cdot \tfrac{d}{dt}\textstyle\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0 \quad (\forall \vec{\varphi}) \Rightarrow \tfrac{d}{dt}\textstyle\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0 \end{aligned}$$

角动量 $\vec{M}$:

$$\Rightarrow \vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad \frac{d}{dt}\vec{M} = 0$$

1.4.4 $E, \vec{p}, \vec{M}$ 参考系间变换

不同惯性参考系中 (K' 相对 K 以速度 $\vec{V}$ 运动),

E 的变换:

$$E = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + U = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i + \vec{V})^2 + U = \frac{m_c V^2}{2} + \vec{V} \cdot \sum m_i \vec{v}_i' + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 + U = E' + \vec{V} \cdot \vec{p}' + \frac{m_c V^2}{2}$$

$\vec{p}$ 的变换:

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{v}'_i + \vec{V} \sum m_i = \vec{p}' + \vec{V} \sum m_i$$

$\vec{M}$ 的变换 (K' 相对 K 以速度 $\vec{V}$ 运动且坐标原点相差 $\vec{R}$):

$$\vec{M} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{r}'_i + \vec{R}) \times (\vec{v}'_i + \vec{V}) = \sum m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i + \vec{R} \times \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{V}) = \vec{M}' + \vec{R} \times \vec{p}'_c + m_c \vec{r}'_c \times \vec{V} + m_c \vec{R} \times \vec{V}$$

1.5 质心

质心系:∃ $\vec{V}$ 使得系统相对 K' 静止 ($\vec{p}' = 0$), 且 K' 原点为系统质量中心,K' 即质心系:

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

质心:

$$\begin{cases} m_c = \sum m_i \\ \vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \\ \vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \end{cases}$$

质心动量: $\vec{p}_c = m_c \vec{v}_c$
质心能量:
内能 E_{int}: 整体静止的 (质心系内) 力学系统的能量, 包括系统内相对运动动能 + 相互作用势能.

$$E = \frac{m_c V^2}{2} + \vec{V} \cdot \vec{p}'|_{\vec{p}'=0} + E_{int} = E_{int} + \frac{m_c v_c^2}{2}$$

质心角动量:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{R} \times \vec{p}'_c + m_c \vec{r}'_c \times \vec{V} + m'_c \vec{R} \times \vec{V}|_{\vec{p}'_c = \vec{r}'_c = 0, \vec{R} = \vec{r}_c, \vec{V} = \vec{v}_c} = \vec{M}_{int} + \vec{r}_c \times \vec{p}_c$$

1.6 刚体运动

刚体: 质点间距离保持不变的质点组成的系统.
角速度 $\vec{\omega}$:
惯性张量:

1.7 力学相似性

* Lagrange 函数乘任意常数, 不会改变运动方程.

$$\vec{r}_i \to \alpha \vec{r}_i, t \to \beta t \Rightarrow \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \to \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_i, T \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} T, U \to \alpha^k U$$

若 $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k$, 即 $\beta = \alpha^{1-k/2}$, 则 Lagrange 函数乘 const., 运动方程不变. 前后运动轨迹相似, 只是尺寸不同.
且各力学量之比, 满足: (l: 轨迹线度)

$$\frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{1-k/2}, \frac{v'}{v} = (\frac{l'}{l})^{k/2}, \frac{E'}{E} = (\frac{l'}{l})^k, \frac{M'}{M} = (\frac{l'}{l})^{1+k/2}$$

· 例 1: 均匀力场, 势能与坐标成线性,⇒ $k = 1, \Rightarrow \frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$, 重力场自由落体, 下落时间平方与初始高度成正比.
· 例 2: Kepler's 第三定律,Newton 引力、Coulomb 力, 势能与两点间距离成反比,⇒ $k = -1, \Rightarrow \frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{3/2}$, 轨道运动周期的平方与轨道尺寸的立方成正比.

2 相对论力学

2.1 相对性原理, 相互作用传播速度

相对性原理: 所有物理定律, 在所有惯性参考系中都相同.
· 实验表明, 相对性原理是有效的.
· 实验表明, 瞬时相互作用在自然界不存在, 相互作用的传播需要时间.
相互作用的传播速度, 在所有惯性参考系中都一样 (相对性原理可得). 电动力学中证明, 这个速度是光在真空中的速度.

$$c = 2.998 \times 10^8 m/s$$

(取 $c \to \infty$, 即可过渡到经典力学.)

2.2 相对时间

· <1881 年 Michelson-Morley 干涉实验 > 表明, 光速与其传播方向无关.
(而按经典力学, 光应在地球速度同方向 (v+c), 比反方向 (v-c) 更快一点.)
⇒Galilean 变换的绝对时间假设 (t=t') 错了. ⇒ 不同参考系, 时间流逝的速度不同.

事件: 由事件发生的位置 (x,y,z) 和时间 (t) 决定.
事件间隔:

$$S_{12} = [(ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

⇒ 两个事件的间隔在所有参考系中都一样. 这个不变性, 就是光速不变的数学表示.
固有时: 与物体一同运动的钟所指示的时间.
固有长度: 物体在相对静止参考系内的长度.

2.3 参考系间变换

Lorentz 变换: 参考系间变换

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

速度变换: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad v' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$

$$\Rightarrow v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}$$

· 例 1: **钟慢**:
· 例 2: **尺缩**:

2.4 四维矢量

2.5 Lagrange 函数、动量、能量

Lagrange 函数:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

动量 $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

力 $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \to \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{F}\perp\vec{v}) \quad or \quad \frac{m}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{F}\parallel\vec{v})$$

能量 E:

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

静能: $E(v=0) = mc^2$

3 Electromagnetics 电磁学

· 事实表明, 粒子同电磁场相互作用的性质, 由粒子电荷 q 所决定.

四维势 A_i**:** **标势** φ**:** **矢势** $\vec{A}$**:**

$$A^i = (\varphi, \vec{A})$$

运动方程:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + \frac{e}{c}\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}$$

电场强度 $\vec{E}$**:** **磁场强度** $\vec{H}$**:**

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \\ \vec{H} = \nabla\times\vec{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$$

对 $\vec{E},\vec{H}$ 取旋散度, 有

Maxwell's 方程组:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$