Physics

LiGu 梨菇

1 Mechanics 力学

1.1 力学系统描述

(对于 s 个自由度的系统,)
广义坐标: 完全刻画其位置的任意 s 个变量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$
广义速度: 广义坐标对时间的一阶导 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s$
· 经验表明, 同时给定广义坐标、广义速度, 就可确定系统状态, 原则上可预测以后动作.
(加速度 $\ddot{q}$, 可由 $\dot{q}, q$ 唯一确定.)
运动方程: 加速度与坐标、速度的关系式. (二阶微分方程, 原则上积分得 q(t) 可确定系统运动轨迹.)
Lagrange 函数: 每一个力学系统可以用一个确定函数 L() 表征.

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t)$$

最小作用量原理: 系统在两个时刻的, 位置之间的运动, 使得 Lagrange 函数积分 (作用量 S) 取最小值.

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\delta S = \delta \int_{t1}^{t2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t1}^{t2} (\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q|_{t1}^{t2} + \int_{t1}^{t2} (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) \delta q dt = 0$$

Lagrange 方程: 运动微分方程.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, s)$$

1.2 参考系

· 研究力学现象必须选择参考系.
惯性参考系: 空间相对它均匀且各向同性, 时间相对它均匀.(特别的, 某时刻静止的自由物体将永远保持静止.)
$\Rightarrow$ Lagrange 函数不显含 $\vec{r}, t$, 不依赖 $\vec{v}$ 的矢量方向, 即

$$L = L(v^2)$$

$\Rightarrow$ Lagrange 方程有 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const$
惯性定律: 在惯性参考系中, 质点任何自由运动的速度的大小和方向都不改变.

$$\Rightarrow \vec{v} = const$$

1.3 参考系间相对性

Galilean 相对性原理: 存在无穷个相互作匀速直线运动的惯性参考系, 这些惯性系之间时空性质相同, 所有力学规律等价.
(今后不特别声明, 默认惯性参考系.)
Galilean 变换: 两个不同参考系 K、K' 之间的的坐标变换 (K' 相对 K 以速度 $\vec{V}$ 运动).
绝对时间假设: 我们认为两个参考系的时间相同.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \\ t = t' \end{cases}$$

Galilean 相对性原理: 力学系统在 Galilean 变换下具有不变性.

1.4 质点、质点系

质点的 Lagrange 方程: **质量 m**:

$$L = \frac{m}{2}v^2$$

质点系的 Lagrange 方程:
动能 T: **势能 U**: 描述质点之间相互作用, 而增加的关于坐标的函数 (由相互作用性质决定)(限于经典力学).

$$L = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots) = T(v_1^2, v_2^2, \cdots) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots)$$

1.5 守恒定律

1.5.1 能量守恒: 时间均匀性

时间均匀性: 封闭系统 Lagrange 函数不显含时间. $\Rightarrow L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L) = 0$$

能量 E:

$$\Rightarrow E = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = T(q, \dot{q}) + U(q) = const.$$

1.5.2 动量守恒: 空间均匀性, 力

空间均匀性: 空间平移不变性.

$$\delta L = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \cdot \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad (\forall \vec{\epsilon}) \Rightarrow \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \sum \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt}\sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0$$

动量 $\vec{P}$:

$$\Rightarrow \vec{P} = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \sum m_i \vec{v}_i = const.$$

力 $\vec{F}$:

$$\Rightarrow \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad , \quad \vec{F} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

广义动量:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

广义力:

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad \dot{P}_i = F_i$$

1.5.3 角动量守恒: 空间各向同性

空间各向同性: 空间旋转不变性.

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum(\tfrac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i + \tfrac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\cdot\delta\vec{v}_i) = \sum[\dot{\vec{P}}_i\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i) + \vec{P}_i\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{v}_i)] = \delta\vec{\varphi}\cdot\sum(\vec{r}_i\dot{\vec{P}}_i + \vec{v}_i\vec{P}_i)\\ &= \delta\vec{\varphi}\cdot\tfrac{d}{dt}\sum\vec{r}_i\times\vec{P}_i = 0 \quad (\forall\vec{\varphi}) \Rightarrow \tfrac{d}{dt}\sum\vec{r}_i\times\vec{P}_i = 0\end{aligned}$$

角动量 $\vec{M}$:

$$\Rightarrow \vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{P}_i = const.$$

1.5.4 $E, \vec{P}, \vec{M}$ 参考系间变换

不同惯性参考系中 (K' 相对 K 以速度 $\vec{V}$ 运动),
E 的变换:

$$E = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + U = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i+\vec{V})^2 + U = \frac{m_c V^2}{2} + \vec{V}\cdot\sum m_i\vec{v}_i' + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 + U = E' + \vec{V}\cdot\vec{P}' + \frac{m_c V^2}{2}$$

$\vec{P}$ 的变换:

$$\vec{P} = \sum m_i\vec{v}_i = \sum m_i\vec{v}_i' + \vec{V}\sum m_i = \vec{P}' + \vec{V}\sum m_i$$

$\vec{M}$ 的变换 (K' 相对 K 以速度 $\vec{V}$ 运动且坐标原点相差 $\vec{R}$):

$$\vec{M} = \sum m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i = \sum m_i(\vec{r}_i'+\vec{R})\times(\vec{v}_i'+\vec{V}) = \sum m_i(\vec{r}_i'\times\vec{v}_i'+\vec{R}\times\vec{v}_i'+\vec{r}_i'\times\vec{V}+\vec{R}\times\vec{V}) = \vec{M}'+\vec{R}\times\vec{P}_c'+m_c\vec{r}_c'\times\vec{V}+m_c\vec{R}\times\vec{V}$$

1.6 力学相似性

* Lagrange 函数乘任意常数, 不会改变运动方程.

$$\vec{r}_i \to \alpha\vec{r}_i, t \to \beta t \Rightarrow \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \to \frac{\alpha}{\beta}\vec{v}_i, T \to \frac{\alpha^2}{\beta^2}T, U \to \alpha^k U$$

若 $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k$, 即 $\beta = \alpha^{1-k/2}$, 则 Lagrange 函数乘 const., 运动方程不变. 前后运动轨迹相似, 只是尺寸不同.
且各力学量之比, 满足: (l: 轨迹线度)

$$\frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{1-k/2}, \frac{v'}{v} = (\frac{l'}{l})^{k/2}, \frac{E'}{E} = (\frac{l'}{l})^{k}, \frac{M'}{M} = (\frac{l'}{l})^{1+k/2}$$

· 例 1: 均匀力场, 势能与坐标成线性,$\Rightarrow k=1, \Rightarrow \frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$, 重力场自由落体, 下落时间平方与初始高度成正比.
· 例 2: Kepler's 第三定律,Newton 引力、Coulomb 力, 势能与两点间距离成反比,$\Rightarrow k=-1, \Rightarrow \frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{3/2}$, 轨道运动周期的平方与轨道尺寸的立方成正比.

1.7 质心

质心系:$\exists$ $\vec{V}$ 使得系统相对 K' 静止 ($\vec{P}'=0$), 且 K' 原点为系统质量中心,K' 即质心系:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i}$$

质心:

$$\begin{cases} m_c = \sum m_i \\ \vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \\ \vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \end{cases}$$

质心动量: $\vec{P}_c = m_c \vec{v}_c$

质心能量:

内能 E_{int}: 整体静止的 (质心系内) 力学系统的能量, 包括系统内相对运动动能 + 相互作用势能.

$$E = \frac{m_c V^2}{2} + \vec{V} \cdot \vec{P}'|_{\vec{P}'=0} + E_{int} = E_{int} + \frac{m_c v_c^2}{2}$$

质心角动量:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{R} \times \vec{P}_c' + m_c \vec{r}_c' \times \vec{V} + m_c' \vec{R} \times \vec{V}|_{\vec{P}_c' = \vec{r}_c' = 0, \vec{R} = \vec{r}_c, \vec{V} = \vec{v}_c} = \vec{M}_{int} + \vec{r}_c \times \vec{P}_c$$

质心组合关系: 将质点系分成若干小系, 各小系质心构成新的质点系之质心即为原质点系的质心.

1.8 情景: 一维运动

一维运动, 定常外部条件下,Lagrange 函数:

$$L = \frac{1}{2} = a(q)\dot{q}^2 - U(x) \quad (CartesianCoord) \Rightarrow L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

第一积分——能量守恒, 有

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x} \cdot \dot{x} - (\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

运动方程:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const$$

$\because$ 动能恒正, 故运动只能发生在 $U(x) \leqslant E$ 的空间区域.

1.9 情景: 二体问题

二体问题: 两个相互作用的质点, 组成的系统的运动.

· 相互作用的两个质点的势能仅依赖于它们之间的距离.

二体问题,Lagrange 函数:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m\dot{\vec{r}}_1^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

将问题分解为**质心运动**和**相对质心运动**, 以质心为原点:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}$$

$$\Rightarrow L = \frac{m_{12} \dot{\vec{r}}_{12}^2}{2} - U(|\vec{r}_{12}|), \quad m_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

于是,” 二体问题” 等效为一个质量 m_{12} 的质点, 在外场 $U(\vec{r}_{12})$ 下的运动, 而两个质点的运动 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, 可由 $\vec{r}_{12}$ 分别解出.

1.10 情景: 有心力场

有心力场: 质点势能只与质点到某一固定点的距离有关的外场.
有心力: 始终指向 or 背离与质点到某一固定点的方向，且大小只依赖 r 的力.

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU(r)}{dr}\hat{r}$$

[1]: 有心力场角动量,Lagrange 函数求解.
∵ 中心对称外场下 (即势能仅依赖到空间某特定点 (中心) 距离), 系统角动量在任意过中心的轴上投影都守恒.

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{P} = const.$$

⇒ 质点运动在垂直于 $\vec{M}$ 的平面内. ⇒ 有心力场,Lagrange 函数:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

有心力场角动量守恒, 值为 $mr^2\dot{\varphi}$
φ 的广义动量:

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \quad , \quad \frac{dP_\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}\frac{d\frac{d\varphi}{d\varphi/dt}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad |\vec{M}| = M_z = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = P_\varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{P}| = P_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = const.$$

Kepler's 第二定律: 质点矢径在相同时间内扫过的面积相等.

$$\Rightarrow M = mr^2\dot{\varphi} = 2m\dot{S}_{sector} = const. \quad \Rightarrow \dot{S}_{sector} = \frac{1}{2}r \cdot rd\varphi = const.$$

[2]: 有心力场运动方程求解.
能量守恒, 有

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

运动方程, 有

$$\Rightarrow t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const. \quad \varphi = \int \frac{M}{mr^2}dt + const. = \int \frac{Mdr}{\sqrt{2mr^2[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const.$$

[3]: 有心力场径向运动, 和一维运动的联系.
等效势能

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

离心势能

$$U_{centrifuge} = \frac{M^2}{2mr^2}$$

运动封闭条件:$\Delta\varphi$ 等于 2π 有理数倍.

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{Mdr}{\sqrt{2mr^2[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const.$$

· 有心力场 $U(r)$ 与 $\frac{1}{r}$, r^2 成正比, 则运动始终封闭.

1.11 刚体

刚体: 质点间距离保持不变的质点组成的系统.
角速度 $\vec{\omega}$:
惯性张量:

1.12 流体

1.12.1 理想流体

连续性方程 Euler 方程 Bernoulli 方程

1.12.2 不可压缩流体

1.12.3 粘性流体

1.12.4 湍流

1.12.5 超流体

1.13 振动

1.14 正则方法

2 相对论力学

2.1 相对性原理, 相互作用传播速度

相对性原理: 所有物理定律, 在所有惯性参考系中都相同.
· 实验表明, 相对性原理是有效的.
· 实验表明, 瞬时相互作用在自然界不存在, 相互作用的传播需要时间.
相互作用的传播速度, 在所有惯性参考系中都一样 (相对性原理可得). 电动力学中证明, 这个速度是光在真空中的速度.

$$c = 2.998 \times 10^8 m/s$$

(取 $c \to \infty$, 即可过渡到经典力学.)

2.2 相对时间

· <1881 年 Michelson-Morley 干涉实验 > 表明, 光速与其传播方向无关.
(而按经典力学, 光应在地球速度同方向 (v+c), 比反方向 (v-c) 更快一点.)
⇒Galilean 变换的绝对时间假设 (t=t') 错了. ⇒ 不同参考系, 时间流逝的速度不同.

事件: 由事件发生的位置 (x,y,z) 和时间 (t) 决定.
事件间隔:

$$S_{12} = [(ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

⇒ 两个事件的间隔在所有参考系中都一样. 这个不变性, 就是光速不变的数学表示.
固有时: 与物体一同运动的钟所指示的时间.
固有长度: 物体在相对静止参考系内的长度.

2.3 参考系间变换

Lorentz 变换: 参考系间变换

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

速度变换: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad v' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$

$$\Rightarrow v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}$$

· 例 1: **钟慢**:
· 例 2: **尺缩**:

2.4 四维矢量

2.5 力学量

Lagrange 函数:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

动量 $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

力 $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} (\vec{F} \perp \vec{v}) \quad or \quad \frac{m}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} (\vec{F} \parallel \vec{v})$$

能量 E:

$$E = \vec{P} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

静能: $E(v = 0) = mc^2$

3 Electromagnetics 电磁学

3.1 电磁场方程

· 事实表明, 粒子同电磁场相互作用的性质, 由粒子电荷 q 所决定.

四维势 A_i**:** **标势** φ**:** **矢势** $\vec{A}$**:**

$$A^i = (\varphi, \vec{A})$$

运动方程:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + \frac{e}{c}\vec{v} \times \nabla \times \vec{A}$$

电场强度 $\vec{E}$**:** **磁场强度** $\vec{H}$**:**

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \\ \vec{H} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$$

对 $\vec{E}, \vec{H}$ 取旋散度, 有

Maxwell's 方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

3.2 特解 1: 静电场

3.3 特解 2: 恒磁场

3.4 特解 3: 真空电磁波

4 Gravitational Field 引力场

5 Quantum Mechanics 量子力学

6 Statistical Mechanics 统计力学

6.1 热力学量

温度 T: **压强 P**: **焓**:

$$H = E + PV$$

熵:

6.2 理想气体

6.3 非理想气体

6.4 溶液

6.5 晶体