

CT 二维成像问题

摘要

CT 是利用 X 射线束，对物体的各个层面进行连续扫描，以探测出物体的内部结构，该技术在医学上发挥着重要的作用。但如何将断层扫描的一系列一维投影，还原出物体本身的结构？基于这个问题，本文从反投影重建算法 (FBP) 着手，运用 Ramp 滤波函数和 Gauss 低通滤波器，分别对原始吸收率数据和重建图像数据进行低通滤波，成功还原出物体几何结构，并对问题一一进行解答。

针对问题一，本文根据原始数据绘出的吸收率等高线图，寻找并记录下 6 条特殊值数据 (内切、外切、重合、平行)。其次，我们利用解析几何的相关知识，求解出 6 个特殊值相应旋转位置处的角度数值、旋转中心与探测器间距，并通过增加测量数据容量，利用逐差法以降低数据误差，完成问题一。

针对问题二，本文首先构建了反投影重建 (FBP) 模型，利用 x - y 桌面系与 r - t 探测器旋转系的坐标变换，将探测器原始投影数据，平摊到其所对应的 (x, y) 点中。其次，我们对原始数据进行傅里叶变换，与 Ramp 滤波函数相乘，完成频域的裁剪，然后再进行傅里叶逆变换还原为时域，实现对原始数据的 Ramp 低通滤波，并代回 FBP 模型，求解出其重建图像。最后，我们对还原的图像数据，运用 Gauss 低通滤波器，降低其噪声与波纹起伏，使图像光滑平整，各点吸收率准确还原。于是，我们成功将断层扫描的一系列一维投影，还原出物体本身的结构，并通过对问题一重建图像的对比，建立了问题二物体的桌面参考系，得到物体相对桌面的位置与十个目标点吸收率数据，对问题二进行了解答。

针对问题三，我们同样利用问题二的滤波反投影重建模型，还原出问题三物体的几何形状，求解出物体相对桌面的位置与各点吸收率数据，完成问题三的解答。

针对问题四，首先，对问题一的参数精度进行稳定性分析，对于探测单元间距与旋转中心的参数标定，我们从 X 射线与间距的数据数量级差距入手，分析其带来的数据误差。而对于 CT 系统旋转的 180 个方向的确定，我们从数据出发，计算了其标准偏差以及不确定度。其次，对于新模板的设计，我们保留了原模板优点，根据圆的几何特性，进行了新模板的设计，并进行了图像的验证。

最后，我们对本文模型的优缺点进行了讨论，并对可以改进的方向提出了建议。

关键词：反投影重建 Ramp 滤波函数 Gauss 滤波器 CT

一、问题重述

1.1 问题的背景

CT(Computed Tomography)可以在不破坏样品的情况下,利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像,由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统是平行入射的 X 射线垂直于探测器平面,每个探测器单元看成一个接收点,且等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变,整个发射—接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向,在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量,并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。

CT 系统安装时往往存在误差,从而影响成像质量,因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定,即借助于已知结构的样品(称为模板)标定 CT 系统的参数,并据此对未知结构的样品进行成像。

1.2 问题的数据信息

已知的数据如下:(1)正方形托盘上两个均匀固体介质组成的标定模板的几何信息与有关数据,其中数据中每一点的数值反映了该点的吸收强度,即“吸收率”;(2)该模板的接受信息的有关数据;(3)利用 CT 系统得到的某未知介质的接收信息的数据;(4)CT 系统中已知的十个待求解吸收率的为位置信息;(5)利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息数据。

1.3 需要解决的问题

问题一:在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板,根据数据(1)、(2)确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

问题二:根据数据(3)及第一问得到的标定参数,确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外,请具体给出数据(4)这 10 个位置处的吸收率。

问题三:根据数据(5)及问题一中得到的标定参数,给出该未知介质的相关信息。另外,请具体给出数据(4)的 10 个位置处的吸收率。

问题四:分析问题一中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型,以改进标定精度和稳定性,并说明理由。

二、问题分析

二维 CT 成像技术是样品成像的一种有效方法。通过对模板的几何信息和每一点对射线的吸收强度进行图像处理和分析,可以得到探测器之间的间距,CT 系统的旋转中心,以及系统的旋转方向。难点在于根据已知的接收信息得到未知介质的各种信息,得出模板构建的各个参数对成像的影响,从而进一步设计新的精度与稳定性更佳模型。

2.1 问题一的分析

问题一要求根据给定模板及其接收信息,确定 CT 系统相关参数(探测单元间距,系统旋转中心以及 180 个旋转方向)。为此,我们可以先给出模板信息以及吸收率数据下的图像,并依此进行观察分析。之后,根据图中所得信息,结合模板的几何特性,CT

系统 X 射线入射与探测器接收的位置关系等最终得出各 CT 系统参数值。

2.2 问题二的分析

为了依据 CT 系统得到的未知介质的接收信息，得到此未知介质的一系列信息，我们可以首先构建反投影重建 (FBP) 模型，利用 x - y 桌面系与 r - t 探测器旋转系的坐标变换，将探测器原始投影数据，平摊到其所对应的 (x, y) 点中。其次，我们将对原始数据进行傅里叶变换，与 Ramp 滤波函数相乘，完成频域的裁剪，然后再进行傅里叶逆变换还原为时域，实现对原始数据的 Ramp 低通滤波，并代回 FBP 模型，求解出其重建图像。最后，我们会对还原的图像数据，运用 Gauss 低通滤波器，降低其噪声与波纹起伏，使图像光滑平整，各点吸收率准确还原。

2.3 问题三的分析

问题三与问题二的解决方法相同，我们也是通过构建反投影重建模型，利用坐标变换，再对原始数据进行滤波处理，从而得到其重建图像，准确得出十点的吸收率信息。

2.4 问题四的分析

首先，针对问题一的参数精度与稳定性分析，对于探测单元间距与旋转中心的参数标定，我们从 X 射线与间距的数据数量级差距入手，分析其带来的数据误差。而对于 CT 系统旋转的 180 个方向的确定，我们从数据出发，计算了其标准偏差以及不确定度。

其次，对于新模板的设计，我们保留了原模板优点，根据圆的几何特性，进行了新模板的设计，并进行了图像的验证。

三、模型假设

1. 假设题中所给的一切数据均来源真实、准确、可靠；
2. 假设 CT 系统每次旋转的角度是均匀的；
3. 假设 X 射线能量只被样品吸收，而不会在空气等外界因素的影响下散失；

四、符号说明

符号	符号说明
x - y	桌面坐标系
r - t	探测器坐标系
r	探测排列方向
t	探测投影方向
θ	t 与 x 夹角
p	旋转中心点
$f(x, y)$	需重建图像
$F(u, v)$	$f(x, y)$ 的二维傅里叶变换
$g(r, \theta)$	$f(x, y)$ 在 θ 角度的平行投影
r	投影射线与 p 的距离
w	滤波函数

表 1 符号说明表

五、模型建立与求解

5.1 问题一的模型建立与求解

5.1.1 模型的建立

我们由正方形托盘上两个均匀固体介质组成的标定模板的几何信息与吸收率信息数据与该模板的接受信息的有关数据绘制出数据的三维展示图和等高线图：

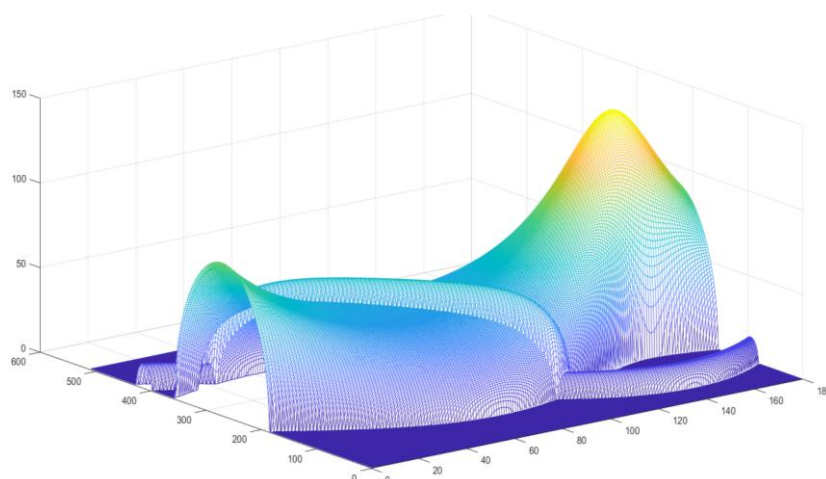


图 1 问题一数据的三维展示图

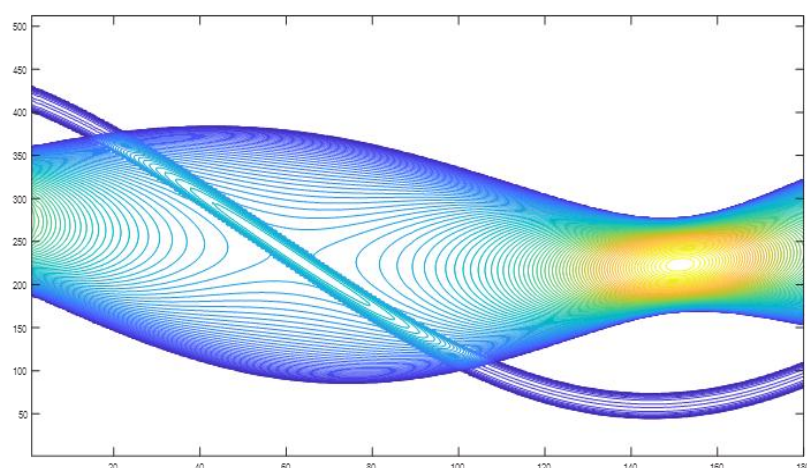


图 2 问题一数据的等高线图

问题一数据的三维展示图，展示了当 CT 系统旋转 180 个方向时，每一个旋转方向下，512 个探测单元探测到的样品厚度。问题一数据的等高线图，展示了 CT 系统每一个旋转方向对应的探测单元探测到相同厚度的曲线变化。

从问题一数据的等高线图，可以清晰得感知出模板确实是由一个椭圆与一个圆组成的。并且随着 CT 系统的旋转，还可以从图 2 得出 X 射线与椭圆跟圆组成的标定模板的相对的位置关系。CT 系统在从 1 到第 180 次旋转过程中，有六个相对特殊的位置：首先是 X 射线沿两圆公切线入射，其次是从圆心重合处入射，接着再依次经过两圆的两条公切线，最后沿椭圆长轴入射。

5.1.2 模型的求解

首先，在等高线图上具体做出 X 射线从圆心重合处入射与从最厚处（即沿椭圆长轴）入射时的两条虚线，它们分别是 CT 系统第 61 与第 151 次旋转：

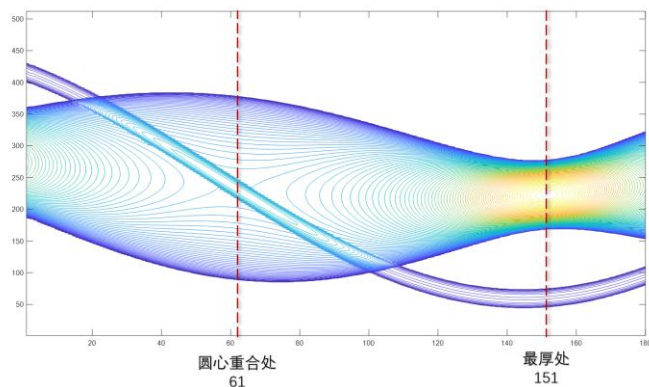


图3 射线从圆心重合处与最厚处入射展示图

其次，我们绘制出 X 射线从两圆圆心重合处入射时 512 个等距单元的探测器上接收到的吸收率信息曲线图。图中峰值对应探测器接收到的某条从大小圆心重合处入射的 X 射线；吸收率从无到有（从有到无）的变化处对应的是某条从椭圆长轴端点入射的 X 射线；吸收率突变处对应从圆切线入射的 X 射线。

然后，绘制出 X 射线沿椭圆长轴入射时 512 个等距单元的探测器上接收到的吸收率信息曲线图。其中两个峰值分别对应的接收器接收到的沿椭圆长轴与沿圆直径入射的 X 射线，吸收率数值从无到有处对应的是沿切线入射的射线。

最后，我们得到模板几何信息与探测器这两个特殊位置吸收率曲线组合示意图，并在图上用虚线标出上述的几条特殊的 X 射线：

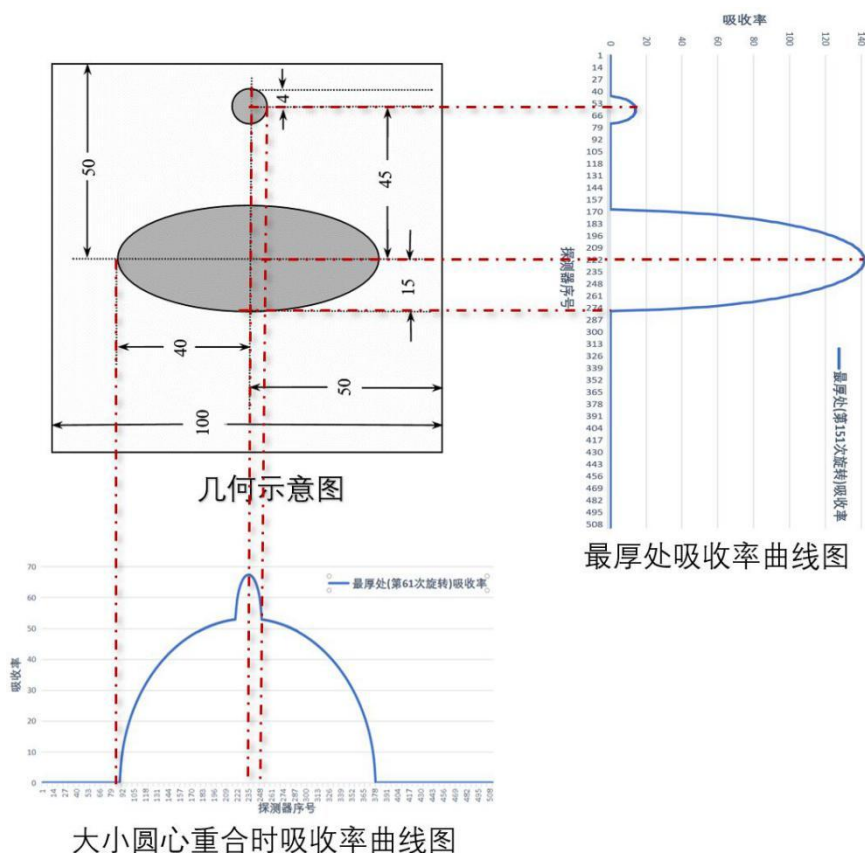


图4 模板几何信息与探测器特殊位置组合图

结合图4并题意可知：CT系统旋转过程中，当X射线垂直穿过小圆与椭圆圆心时，小圆两端的X射线距离固定为其直径8mm，这两条X射线之间的探测单元个数为30个；

椭圆长轴两端 X 射线距离固定为其长轴直径 80mm，这两条 X 射线之间的探测单元个数为 290 个；当射线沿椭圆长轴入射时，短轴两端的 X 射线固定为 30mm，且这两条射线之间的探测器单元个数为 110 个。而 CT 系统探测器单元之间是等距的，故可以用平均值求出探测器之间的距离：

$$d = \frac{1}{3} \times \left(\frac{8}{30} + \frac{30}{110} + \frac{80}{290} \right) = 0.272mm$$

如图 4，当 X 射线沿椭圆长轴入射时，我们分别得到小圆与椭圆的峰值所对应的探测单元数，当 X 射线沿椭圆短轴入射时，我们可以得到最大值所对应的探测单元数。而当 CT 系统围绕旋转中心逆时针旋转时，旋转中心所对应的位置为第 256 个探测单元与第 257 个探测单元之间，据算出的探测单元间距 d，即可得出旋转中心的位置。

如图 5，以椭圆长轴为 x 轴，以椭圆短轴为 y 轴建立直角坐标系。如图 6 我们在等高线数据图上做出 X 射线沿两圆的四条公切线入射时的情况（对应的是 CT 系统第 19、22、100、109 次旋转）展示图，并在直角坐标系中画出这四条公切线，其中⑤表示 CT 系统旋转第 13 次时的情况，其中⑥表示 CT 系统旋转第 22 次，其中①表示 CT 系统旋转第 100 次，其中②表示 CT 系统旋转第 109 次：

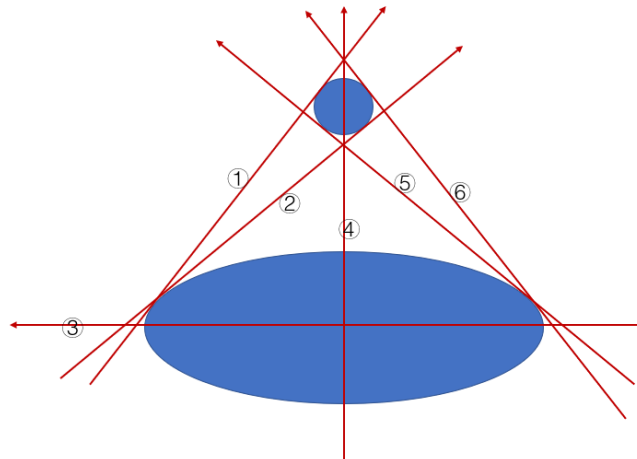


图 5 由椭圆建立的直角坐标系

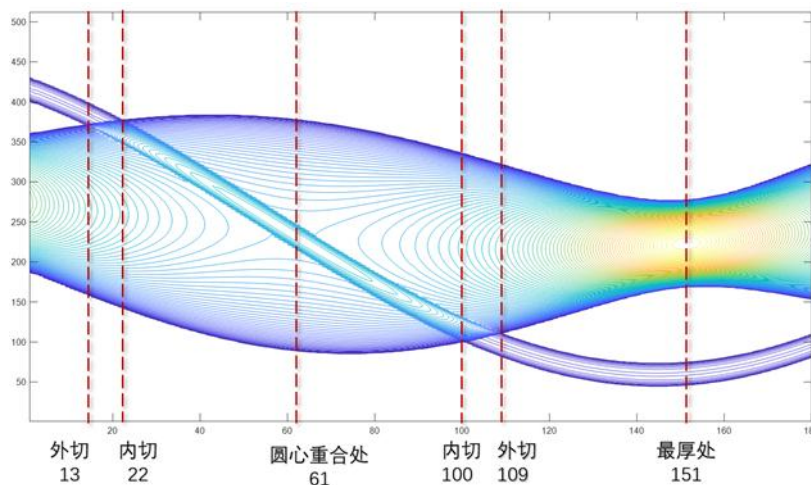


图 6 X 射线从椭圆与圆公切线处入射展示图

若长轴对应探测单元点为 a，则旋转中心纵坐标为：

$$y_a = -(256 - a) \times d - \frac{d}{2} \quad (1)$$

从图 4 中可以看出 a=232, 代入式(1)可得 $y_a = -6.664$;

若短轴对应探测单元点为 b，则旋转中心横坐标为：

$$x_a = (256 - b) \times d + \frac{d}{2} \quad (2)$$

从图 4 中可以看出 b=235, 代入式(2)可得 $x_a = 5.848$;

故旋转中心坐标为 (5.848, -6.664)。

根据几何知识我们可以列出直线，椭圆与圆在直角坐标系中的一般方程：

$$\begin{cases} y = kx + m & \text{直线方程} \\ \frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 & \text{椭圆方程} \\ x^2 + (y - 45)^2 = 4^2 & \text{小圆方程} \end{cases} \quad (3)$$

圆心 (0, 45) 到直线的距离为：

$$d = \frac{45 - m}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (4)$$

式中 d=4mm

把直线方程代入椭圆方程得：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + m)^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

解得的 Δ 为：

$$\Delta = (128km)^2 - 4(9 + 64k^2)(64m^2 - 14400) = 0 \quad (6)$$

则根据式 (4) (5) (6) 可以得出 k 和 m 的具体数值。令直线与 x 轴正半轴之间的夹角为 α ，k 是直线的斜率。由 $k = \tan \alpha$ 可以反求出 $\alpha = \tan^{-1} k$ 。解之得⑤的角度为 42.48°，⑥的角度为 50.832°，①的角度为 129.168°，②的角度为 137.52°

假设 CT 系统均匀旋转，由得出当 X 射线沿椭圆长轴入射时为 CT 系统第 151 次旋转，当 X 射线沿椭圆短轴入射时为第 55 次，结合四条公切线的旋转次数与角度可得下表：

旋转次数	13	22	61	100	109	151
角度	42.48°	50.832°	90°	129.168°	137.52°	180°

表 2 旋转次数与角度

用逐差法计算得到的旋转角度为：

$$\Delta\alpha = \frac{129.168^{\circ} - 42.48^{\circ}}{100 - 13} + \frac{137.52^{\circ} - 50.832^{\circ}}{109 - 22} + \frac{180^{\circ} - 90^{\circ}}{151 - 61} = 0.9977 \quad (7)$$

作出旋转次数与旋转角度的折线图：

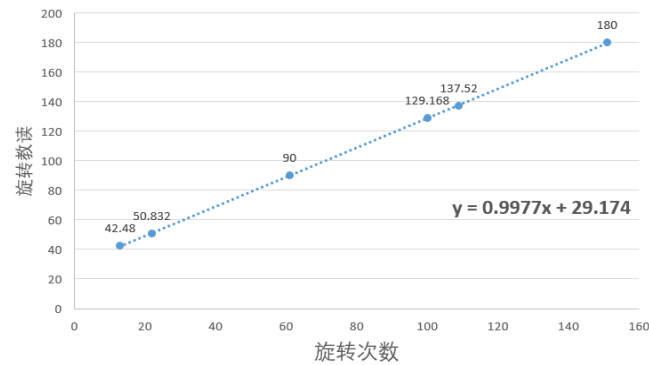


图 旋转次数与角度

由此可以得到 CT 系统旋转的 180 个角度为：

方向	角度	方向	角度
1	30.17°	63	92.03°
2	31.17°
...	...	151	180°
...	...	152	180.82°
61	90°
62	91.03°	180	208.76°

表 3 180 个旋转角度表

5.2 问题二的模型建立与求解

5.2.1 模型的建立

①反投影模型

要由已知的介质的接受信息得到介质在托盘中的位置、几何形状以及吸收率，实际为第一问的逆向过程。

介质的接受信息可以理解为 X 射线入射方向和探测单元排列方向下的 180 组投影值。我们需要做的是将这些投影值还原到二维平面。这里我们用到了滤波反投影的方法。如图，我们以模板所在平面建立直角坐标系 x-y 轴，以 X 射线入射方向为 t 轴，探测单元排列方向为 r 轴重新建立一个 r-t 直角坐标系。

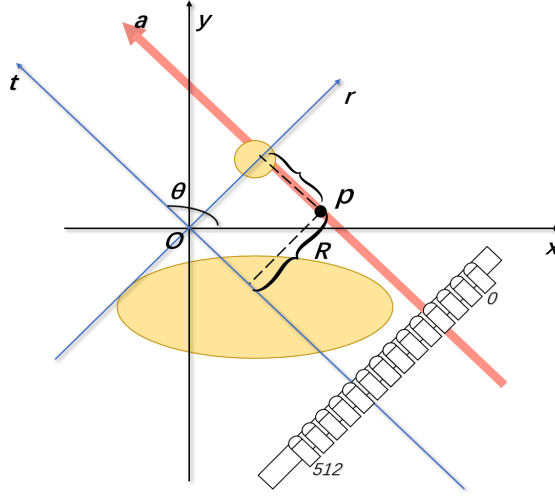


图 7 由 CT 系统建立的坐标轴

设 X 射线入射方向与 x 轴夹角设为 θ , p 为旋转中心点。 $f(x,y)$ 表示需要重建的图像, 用 $g(r, \theta)$ 表示在 θ 角度获取的 $f(x,y)$ 的一个平行投影, r 表示投影射线与旋转中心的距离。

$$g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, t) dt \quad (8)$$

对 $g(r, \theta)$ 进行一维傅里叶变换

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(r, \theta) e^{-j2\pi\omega r} dr \quad (9)$$

将 (8) 代入 (9) 式得到

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, t) e^{-j2\pi\omega r} dr dt \quad (10)$$

旋转中心到射线的距离

$$r = x \sin \theta - y \cos \theta \quad (11)$$

旋转中心在 r-t 坐标系中

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (12)$$

将 (10) (11) 式代入 (12) 得到

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x \sin \theta - y \cos \theta)} dx dy \quad (13)$$

设图像 $f(x,y)$ 的二维傅里叶变换为 $F(u,v)$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2j\pi(ux - vy)} dx dy \quad (14)$$

令 $u = \omega \sin \theta$, $v = \omega \cos \theta$, 则

$$F(\omega \sin \theta, \omega \cos \theta) = P(\omega, \theta) \quad (15)$$

由傅里叶变换知, 图像函数 $f(x,y)$ 可以通过其傅里叶反变换 $F(u,v)$ 中恢复, 即

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{2j\pi(ux-vy)} du dv \quad (16)$$

由 $u = \omega \sin \theta$, $v = \omega \cos \theta$, 并根据(15)得到

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(\sin\theta x - \cos\theta y)} \omega d\omega d\theta \quad (17)$$

利用对称关系 $P(\omega, \theta + \pi) = P(-\omega, \theta)$, (9)式变为

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x\sin\theta - y\cos\theta)} d\omega \quad (18)$$

如果令

$$m(x\sin\theta - y\cos\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x\sin\theta - y\cos\theta)} d\omega \quad (19)$$

则(18)式重写为

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} m(x\sin\theta - y\cos\theta) d\theta \quad (20)$$

上述(19)(20)就是滤波反投影的主要公式, (19)中的 $|w|$ 表示滤波函数。

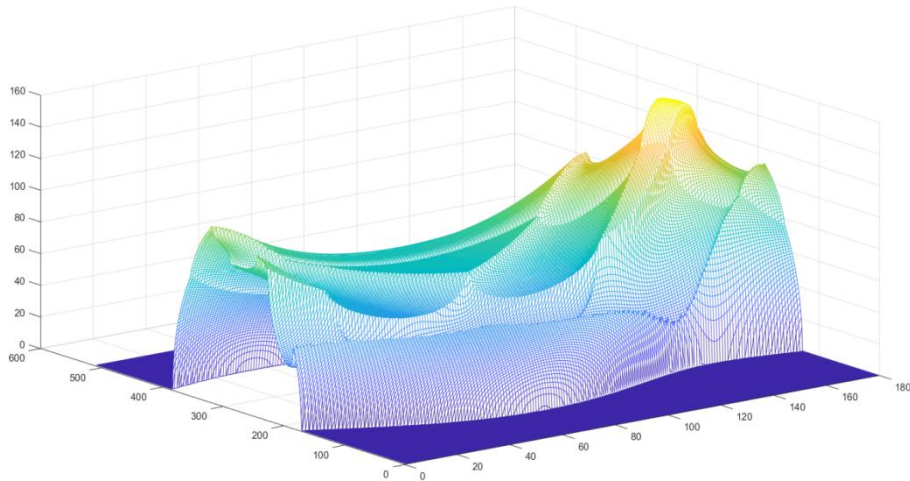


图 8 介质吸收信息的三维图

上图为由介质的接收信息绘出的三维图形, 即前述 $r-t$ 坐标系下的投影值, 利用滤波反投影法, 我们还原了该未知介质接收数据下的二维图与三维空间图:

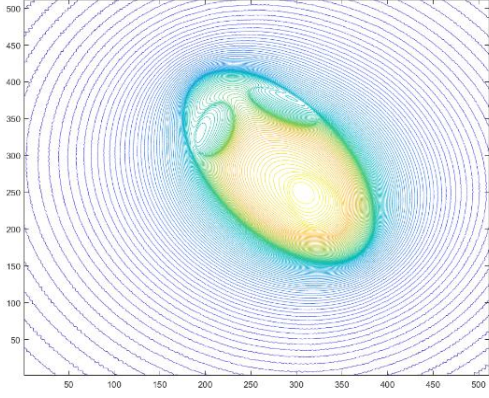


图 9 未知介质吸收率信息二维图

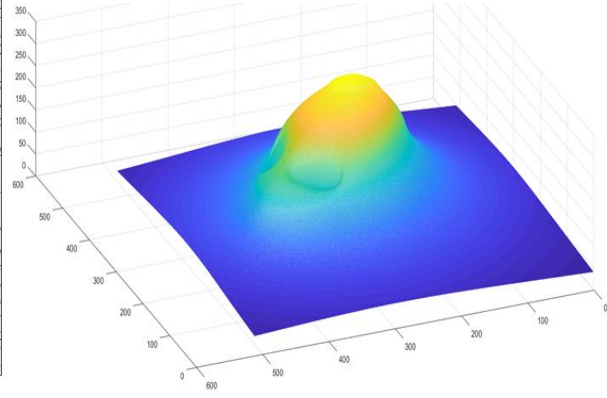


图 10 未知介质吸收率信息三维图

为了验证该滤波反投影法的可行性与准确性，我们对问题一中的已知介质应用此法，得到了第一问中对应的二维图与三维空间图如下：

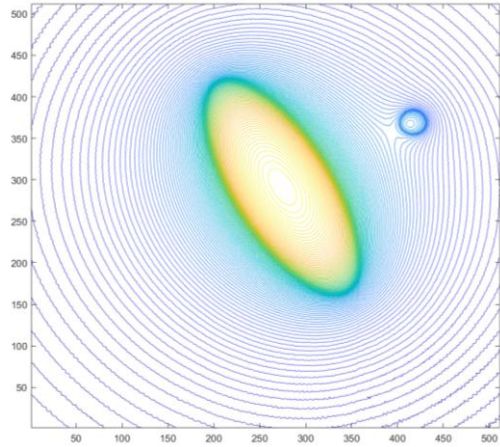


图 11 问题一吸收率信息二维图

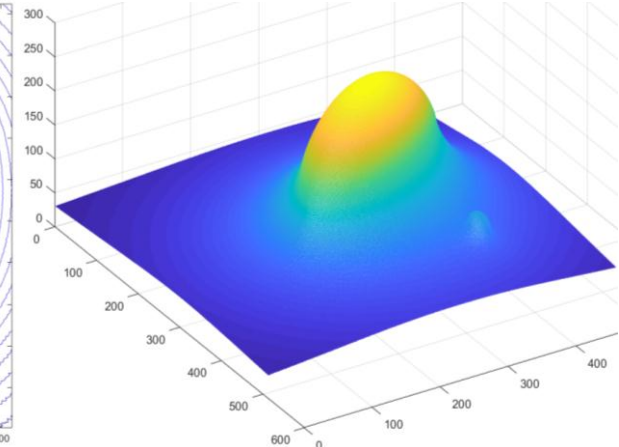


图 12 问题一吸收率信息三维图

从上述两幅图的还原来看，反投影法可以较为粗略的还原物体本身的几何信息。但由于未加滤波函数，故其重建图像有部分缺陷：图像边缘模糊，平面圆滑，不能准确的反映出几何物体的边缘信息。因为直接重建的图像存在“伪影”，将吸收率均匀平摊，会导致重建图像受到周围点的影响。故我们接下来添加滤波函数，对反投影重建算法进行进一步优化。

②Ramp 滤波器模型

为了获得较为清晰的二维成像图，我们还需对图像进行滤波，本题采用 Ramp 滤波函数对问题二的 X 射线吸收数据进行滤波。

Ramp 滤波函数的表达式为：

$$\begin{cases} -\frac{2}{n}x & x \in [0, n/2] \\ \frac{2}{n}x & x \in [n/2, n] \end{cases} \quad (21)$$

Ramp 滤波函数的图像如下：

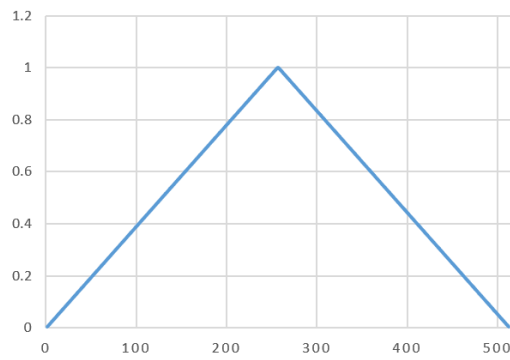


图 13 Ramp 滤波函数图像

首先，对问题二的 X 射线吸收数据做傅里叶变换，并进行频域搬移。然后我们使用 Ramp 滤波函数对频域数据进行低通滤波，将其进行傅里叶反变换，还原为时域数据，并绘制出 Ramp 滤波前后的等高线图像，如下图所示：

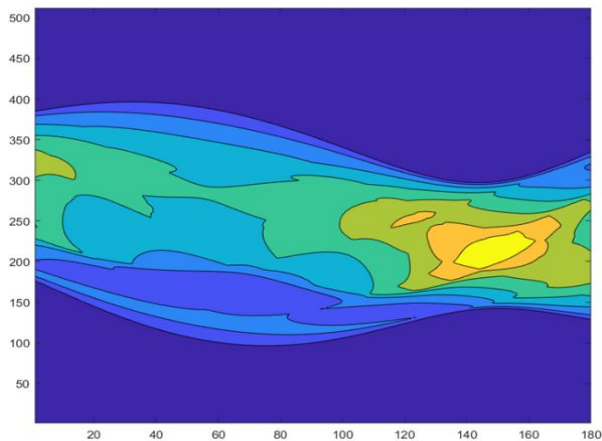


图 14 滤波前 X 射线吸收数据等高线

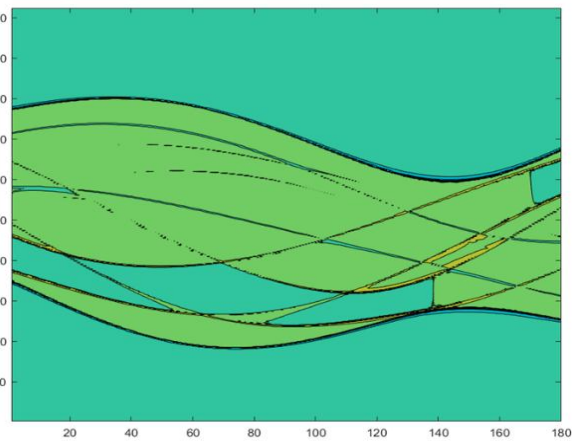


图 15 滤波后 X 射线吸收数据等高线图

其次，我们将滤波后的数据，代入上述反投影程序，求解出其几何重建图形，并绘制出吸收率图像，如图 16、17 所示：



图 16 滤波反投影后的几何重建图

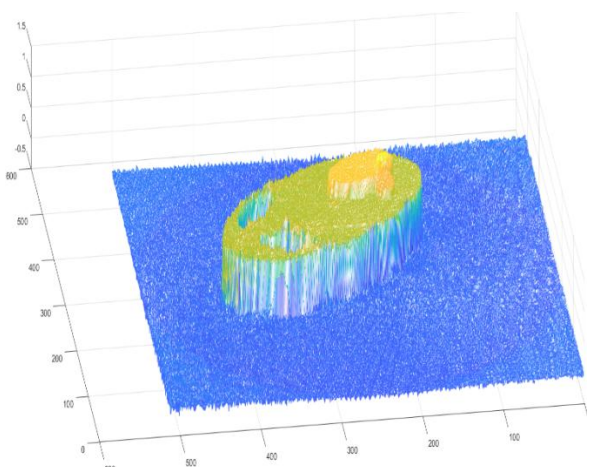


图 17 滤波反投影后的三维吸收率图

同样，为了检测滤波反投影法下还原图像的准确性，我们对问题一的数据也进行了此法的应用，得到的效果如图 18、19 所示：

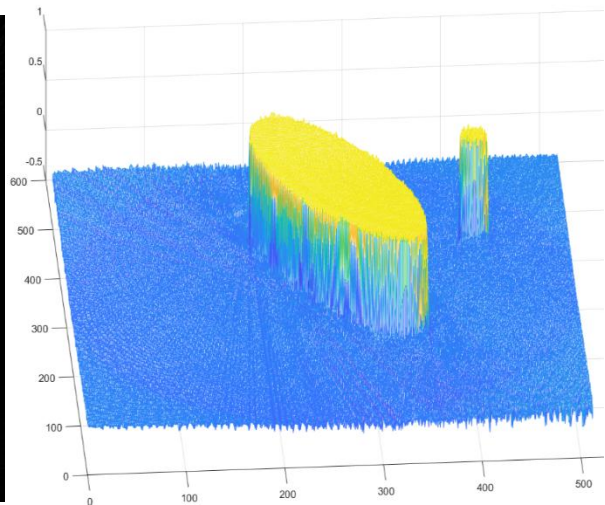
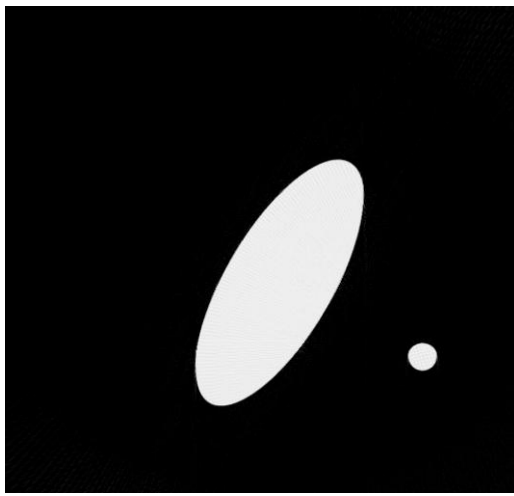


图 18 问题一数据滤波反投影后的几何重建图 图 19 问题一数据滤波反投影后的三维吸收率图

由上述图像我们可以看出，滤波反投影重建的几何图形还原程度准确、良好，边缘清晰、平整。由问题一的原始几何图像与重建图形进行对比、检验，可以发现，所有的几何特征基本得到准确地反映，椭圆圆润、清晰，吸收率数据也基本符合。故 Ramp 滤波反投影方法，能较好地重建出原始图像，并准确得到各点位置的吸收率数据。

③ Gauss 低通滤波器模型

因为 Ramp 滤波虽然还原良好，但仍存在一些噪音，可能会对问题二中十个点的吸收率求解产生影响。故我们利用 Gauss 低通滤波器对还原图像进行低通滤波，滤出其噪音数据。滤波后曲线平滑，各点吸收率数据也尽可能均匀、准确，受噪音影响的起伏也大为减小。

5.2.2 模型的求解

首先，我们对反投影重建出的问题一中的二维图像，结合问题一中所给出的几何与吸收率信息，建立桌面网格坐标如图 20 所示。

其次，我们依据所建立的网格坐标下，将其对应到问题二的重建图形中，并求解出问题二图形对于桌面的位置信息与几何形状，如下图所示。

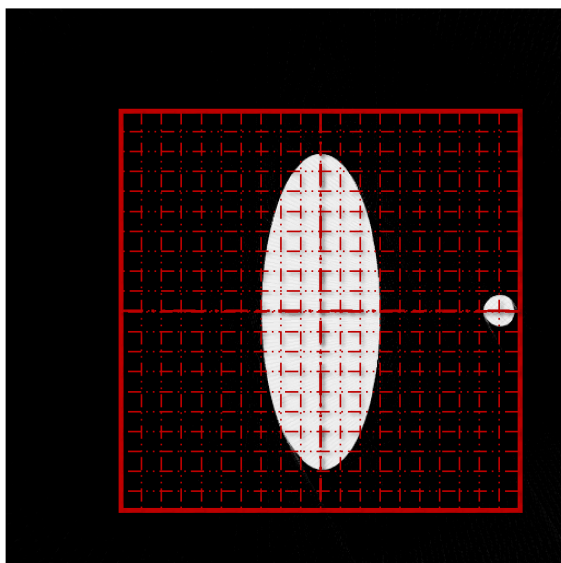


图 20 问题一桌面网格图

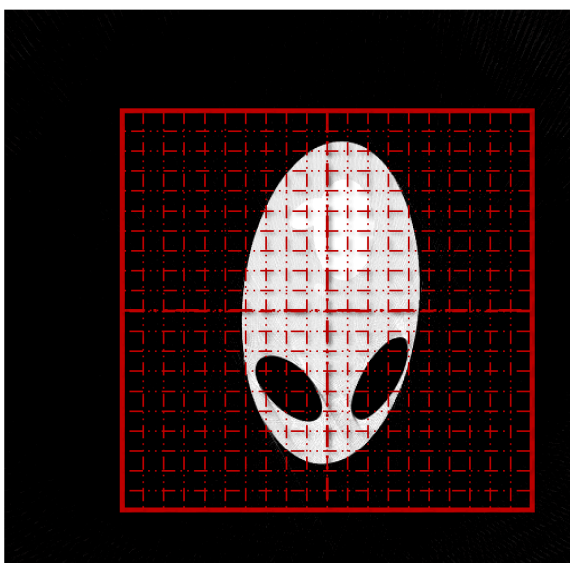


图 21 问题二桌面网格图

然后，从由题目中所给出的十个点对应的坐标，结合滤波反投影后的吸收率图像数据，解答并列十个目标点的吸收率：

坐标	吸收率	坐标	吸收率
(10.0, 18.0)	-0.0364	(50.0, 75.5)	1.2102
(34.5, 25.0)	-0.0688	(56.0, 76.5)	1.2067
(43.5, 33.0)	-0.0641	(65.5, 37.0)	-0.0708
(45.0, 75.5)	0.9174	(79.5, 18.0)	-0.0767
(48.5, 55.5)	0.9098	(98.5, 43.5)	-0.0725

表 4 问题二中十点吸收率表

5.3 问题三的建立与求解

5.3.1 模型的建立

首先，我们绘制出问题三介质滤波前的 X 射线吸收数据等高线，如图所示：

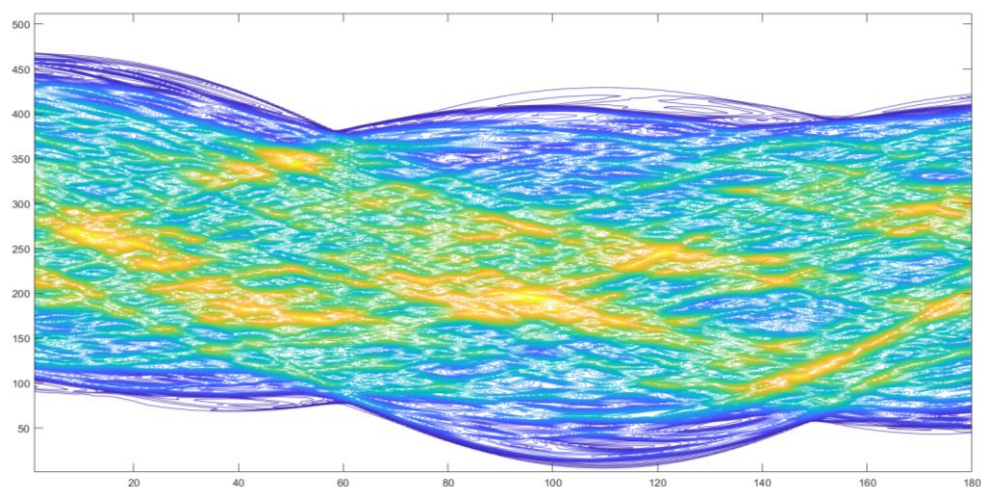


图 22 滤波前 X 射线吸收数据等高线

同样的，我们可以由第二问的求解模型，通过 Ramp 滤波函数，得到其低通滤波后的吸收率数据图像，如下图所示：

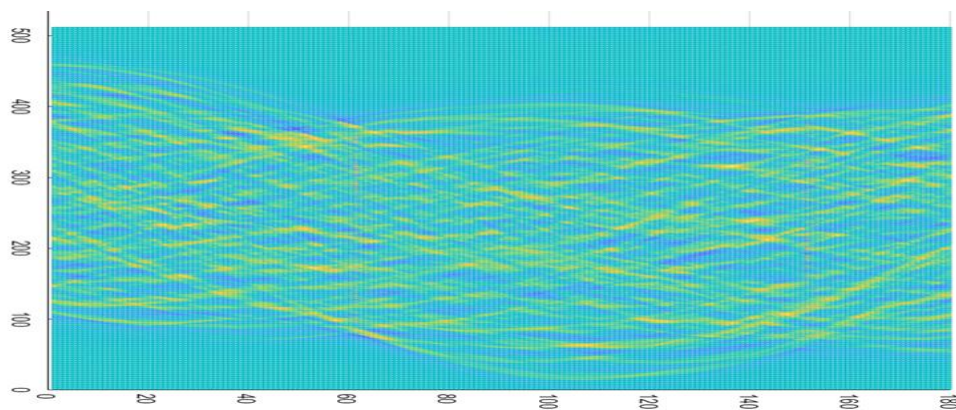


图 23 滤波后 X 射线吸收数据等高线

其次，我们代入了滤波反投影法，利用问题三中的介质接收数据还原二维成像图以及吸收率三维图像。滤波反投影法应用后，还原出的二维成像图与吸收率信息图如下：

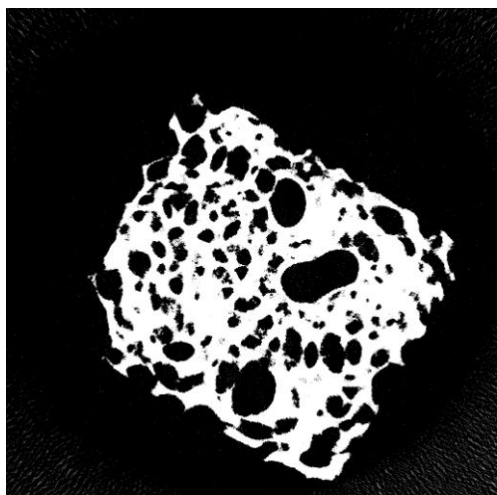


图 24 滤波反投影后的几何重建图

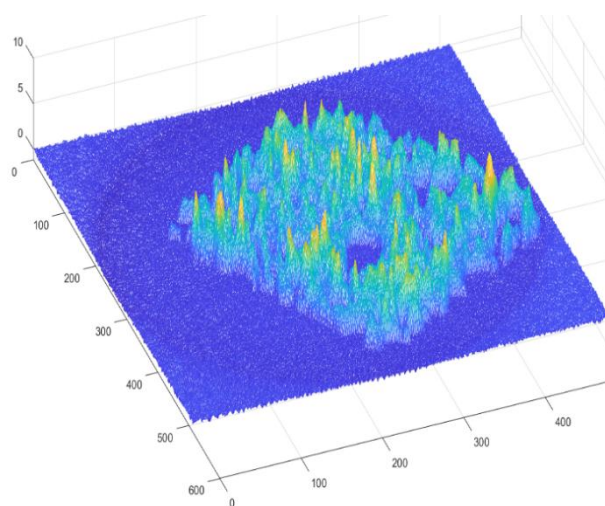


图 25 滤波反投影后的三维吸收率图

5.3.2. 模型的求解

同理，我们建立与问题二相同的网格坐标，找出第三问要求的对应的十个所求点的吸收率，如下图：

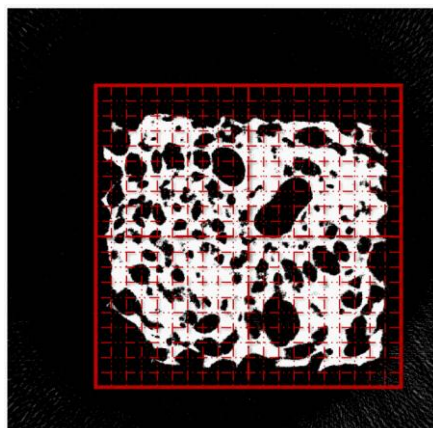


图 26 问题三桌面网格图

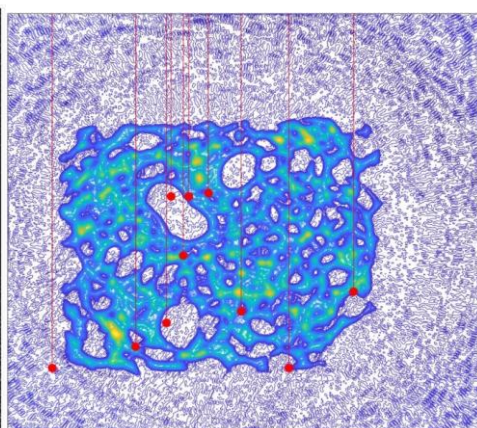


图 27 问题三十点对应图

坐标	吸收率	坐标	吸收率
(10.0, 18.0)	-0.0876	(50.0, 75.5)	1.5580
(34.5, 25.0)	0.3018	(56.0, 76.5)	0.4808
(43.5, 33.0)	-0.3599	(65.5, 37.0)	0.3701
(45.0, 75.5)	-0.3733	(79.5, 18.0)	-0.3461
(48.5, 55.5)	1.6540	(98.5, 43.5)	0.2960

表 5 问题三中十点吸收率表

5.4 模型的求解

5.4.1 灵敏度与误差分析：

探测器之间的间距 d 是通过间接测量得到的，故与实际值之间存在一定的误差。对 d 进行误差分析时，首先计算出标准偏差 s ：

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 7.128 \times 10^{-3} \quad (22)$$

之后可以计算出其 A 类不确定度 Δ_A ：

$$\Delta_A = \frac{t}{\sqrt{n}} s = \frac{2.78}{\sqrt{5}} \times s = 8.7663 \times 10^{-3} \quad (23)$$

X 射线波长约在 0.001~0.1 nm 之间，而我们求出的探测单元间距约为 0.27mm 左右，数量级相差巨大，使得漏掉的接收信息较多，会与实际结果之间存在较大误差；

5.4.2 新模板的设计

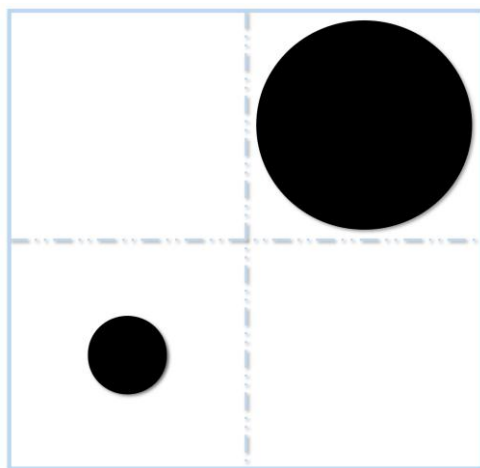


图 28 新的模板图

汲取题目给出的标准模板的优点，利用圆的几何对称性，我们将模板选择为了两个正圆的组合摆放。大圆与小圆的给出，不仅方便了对探测单元间距的计算，同时，即使 X 射线入射方向不断变化，圆两边的投影间距都不会产生改变始终为圆的直径，在计算旋转中心时更为精确。

在这样的设计模板下，变换 X 射线入射方向，由 Matlab 函数 Radon 求解得到的接收信息图像如下。图像平滑清晰，相较给定模板更有利于 CT 系统参数的测定

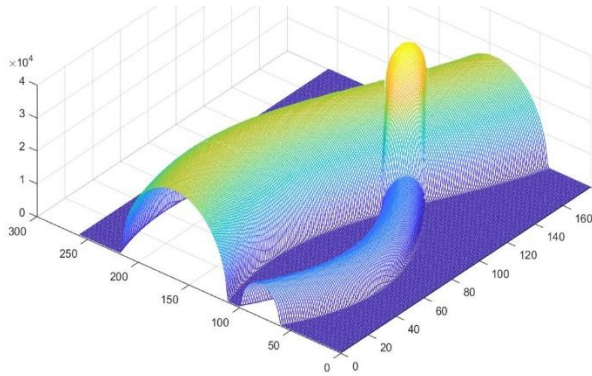


图 29 Radon 变换后三维图

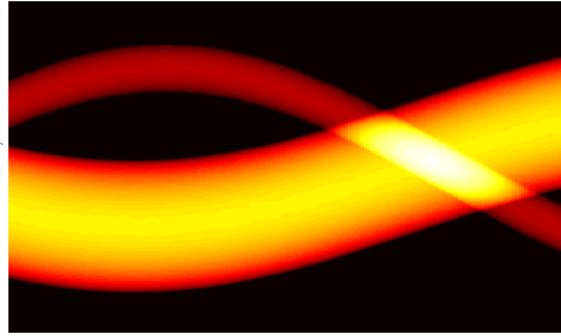


图 30 Radon 变换后二维图

六、模型的评价与改进

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

1. 利用多种数学软件（如 Excel、matlab）对各种数据进行分析、处理并作出各种平面图，可视化程度较强，让读者清晰易懂。

2. 问题一中求解探测器单元距离时选用多组数值求平均值，可以减小误差；且求解旋转中心的位置，旋转角度等问题过程中运用了圆锥曲线的数学知识，推导过程严谨，求解步骤简单易懂，结果可信度高，说服力强。

3. 问题二中运用反投影重建算法、Ramp 滤波函数和 Gauss 低通滤波器，具有提高图像清晰度、准确度和平滑度的优势；

6.1.2 模型的缺点

1. 探测器数据是离散值，有一定间隔，故与实际几何形状的模拟量之间存在一定误差。

2. 由反投影重建算法滤波后的曲面图形仍存在一定的噪声，可能对实验分析产生一定的影响。

6.2 模型的改进

对反投影的滤波器算法进行进一步的改进，以尽可能还原实际几何模型。

七、参考文献

- [1] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [2] 毛小渊. 二维 CT 图像重建算法研究[D]. 南昌航空大学. 2016.
- [3] 高峰, 牛憨笨. 光学 CT 中的图像重建算法[A]. 光学学报, 1996(4): 0253-2239
- [4] 曾笋, 董芳华, 陈晓, 周宏周. 建中利用 MATLAB 实现 CT 断层图像的三维重建[A]. CT 理论与应用研究, 2004(5): 1004-4140

附录

附录一 FBP 反投影算法:

```
clear all
data=load('data03.txt');
N=size(data,1);

% make a Ram-Lak filter. it's just abs(f).
width = 2^nextpow2(size(data,1));
filter = 2*[0:(width/2-1), width/2:-1:1]'/width;

proj_fft = fft(data, width);
% do my own FT domain filtering
filteredProj = zeros(width,180);
for i = 1:180
    filteredProj(:,i) = proj_fft(:,i).*filter;
end
data = real(ifft(filteredProj));
figure
subplot(1,2,1),imshow(proj_fft),title('傅立叶变换')
subplot(1,2,2),imshow(filteredProj),title('傅立叶变换+滤波')
figure
mesh(1:180,1:512,data)

figure
maxn=512;
img=zeros(maxn);
for i=1:180
    for x=1:maxn
        for y=1:maxn
            t=round(...
                -(x-maxn/2)*sin(i*pi/180)+(y-maxn/2)*cos(i*pi/180));
            t=t+512/2;
            if(t>0&& t<=512)
                img(x,y)=img(x,y)+data(t,i);
            end
        end
    end
end
img = (img*pi)/180;
mesh(1:maxn,1:maxn,img)
figure
imshow(img)
```

附录二 十点的吸收率:

```
close all
cur=[10.0000 18.0000
34.5000 25.0000
43.5000 33.0000
45.0000 75.5000
48.5000 55.5000
50.0000 75.5000
56.0000 76.5000
65.5000 37.0000
79.5000 18.0000
98.5000 43.5000 ];
cur(:,1)=cur(:,1);
cur(:,2)=cur(:,2);

cur=round(cur.*(512/141));
cur(:,1)=512-cur(:,1);
cur(:,2)=512-cur(:,2);
figure
contour(1:maxn,1:maxn,img,100);
hold on
stem(cur(:,1),cur(:,2),'ro')
Ans=[];
for i=1:10
    Ans=[Ans;img(cur(i,2),cur(i,1))];
end
figure
mesh(1:maxn,1:maxn,img);
Ans
```