

# 偏微分方程数值解: 第三次作业

林立康 25210180078

2025 年 12 月 17 日

相关代码可从 [https://github.com/LiHuaGz/Spectral\\_Method.git](https://github.com/LiHuaGz/Spectral_Method.git) 获取.

## 1.(a)

令  $\mathcal{L}u = \partial_x^m[(1-x^2)^m \partial_x^m u]$ . 显然  $\forall u \in P_n, \mathcal{L}u \in P_n$ . 对于  $\forall \phi \in P_{n-1}$ , 我们考察内积:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}L_n, \phi)_{w^{0,0}} &= \int_{-1}^1 \partial_x^m[(1-x^2)^m \partial_x^m L_n] \phi dx \\&= (-1)^m \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \partial_x^m L_n \cdot \partial_x^m \phi dx \quad (\text{分部积分}) \\&= (-1)^m \cdot (-1)^m \int_{-1}^1 L_n \partial_x^m[(1-x^2)^m \partial_x^m \phi] dx \\&= (L_n, \mathcal{L}\phi)_{w^{0,0}}.\end{aligned}$$

由于  $\phi \in P_{n-1}$ , 故  $\mathcal{L}\phi \in P_{n-1}$ , 从而

$$(L_n, \mathcal{L}\phi)_{w^{0,0}} = 0.$$

由  $I = (-1, 1), w^{0,0} \equiv 1$  对应正交多项式的唯一性, 必存在常数  $\tilde{\lambda}_{n,m}$  使得:

$$\mathcal{L}L_n = \tilde{\lambda}_{n,m} L_n.$$

计算特征值  $\tilde{\lambda}_{n,m}$ :

考察方程两边的首项系数. 由 Leibniz 公式,  $\mathcal{L}L_n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [(1-x^2)^m]^{(k)} (\partial_x^m L_n)^{(m-k)}$ . 其首项系数由  $k=0$  项贡献 (最高次项):

$$\begin{aligned}\text{Coeff}(\mathcal{L}L_n) &= \binom{m}{0} \cdot (-1)^m \cdot k_n \cdot \frac{(2m)!}{(2m-0)!} \cdot \frac{n!}{(n-(2m-0))!} \\&= (-1)^m \cdot k_n \cdot (2m)! \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{2m-k} \\&= (-1)^m \cdot k_n \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.\end{aligned}$$

其中  $k_n$  为  $L_n$  的首项系数. 比较两边系数即得:

$$\tilde{\lambda}_{n,m} = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

从而原式成立.

### 1.(b)

利用 (a) 中的算子性质:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_n^{(m)}(x) L_k^{(m)}(x) (1-x^2)^m dx &= (-1)^m \int_{-1}^1 L_n(x) \partial_x^m \left[ L_k^{(m)}(x) (1-x^2)^m \right] dx \\ &= (-1)^m \int_{-1}^1 L_n(x) \mathcal{L} L_k(x) dx \\ &= (-1)^m \int_{-1}^1 L_n(x) \tilde{\lambda}_{k,m} L_k(x) dx \\ &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \|L_n\|^2 \delta_{n,k}. \end{aligned}$$

### 1.(c)

$m=0$  时: 由递推关系  $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$ ,  $n \geq 1$ , 易知:

$$L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n.$$

$m \geq 1$  时: 当  $x = -1$  时,

$$\begin{aligned} &\left. \partial_x^m [(1+x)^m (1-x)^m L_n^{(m)}] \right|_{x=-1} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [(1+x)^m]^{(k)} [(1-x)^m L_n^{(m)}]^{(m-k)} \Big|_{x=-1} \\ &= m! \cdot 2^m \cdot L_n^{(m)}(-1). \end{aligned}$$

故由 (a),

$$L_n^{(m)}(-1) = \frac{(-1)^m \tilde{\lambda}_{n,m} (-1)^n}{m! 2^m} = \frac{(-1)^{m+n} (n+m)!}{m! 2^m (n-m)!}.$$

同理, 当  $x = 1$  时:

$$\left. \partial_x^m [(1-x)^m (1+x)^m L_n^{(m)}] \right|_{x=1} = (-1)^m \cdot m! \cdot 2^m L_n^{(m)}(1).$$

结合  $\mathcal{L} L_n(1) = \tilde{\lambda}_{n,m} L_n(1) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$ , 解得:

$$L_n^{(m)}(1) = \frac{\tilde{\lambda}_{n,m}}{m! 2^m} = \frac{1}{m! 2^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

### 1.(d)

$n$  为奇数时: 由于  $L_n(-x) = (-1)^n L_n(x) = -L_n(x)$ , 故  $L_n(0) = 0$ .

$n$  为偶数时: 由勒让德多项式的显式公式:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n/2} (-1)^l \frac{(2n-2l)!}{l!(n-l)!(n-2l)!} x^{n-2l}.$$

取  $x = 0$ , 仅当  $n - 2l = 0$  即  $l = n/2$  时有非零项:

$$L_n(0) = \frac{1}{2^n} (-1)^{n/2} \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!0!} = \frac{(-1)^{n/2} n!}{2^n [(n/2)!]^2}.$$

### 1.(e)

利用 Laplace 积分表示:

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right)^n d\theta.$$

考察被积函数的模长平方:

$$\begin{aligned} \left| x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right|^2 &= x^2 + (1-x^2) \cos^2 \theta \\ &= x^2(1 - \cos^2 \theta) + \cos^2 \theta \\ &= x^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \leq \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

当  $n \geq 2$  时:

$$\left| x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right|^n \leq \left| x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right|^2.$$

故:

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \leq \frac{1}{\pi} \left( x^2 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1+x^2}{2}.$$

当  $n = 1$  时,  $L_1(x) = x$ ,  $|x| \leq \frac{1+x^2}{2}$  (即  $(|x| - 1)^2 \geq 0$ ) 显然成立.

### 1.(f)

1. 首先考虑第三个式子:

已知  $L_n(x) = \frac{1}{2n+1} (L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x))$ .

$$\begin{aligned} \partial_x^k u &= \sum_{n=0}^N \hat{u}_n^{(k)} L_n = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n^{(k)} \frac{1}{2n+1} (L'_{n+1} - L'_{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\hat{u}_{n-1}^{(k)}}{2n-1} L'_n - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\hat{u}_{n+1}^{(k)}}{2n+3} L'_n \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \frac{\hat{u}_{n-1}^{(k)}}{2n-1} - \frac{\hat{u}_{n+1}^{(k)}}{2n+3} \right] L'_n + (\text{边界项}). \end{aligned}$$

另一方面,  $\partial_x^k u = \partial_x(\partial_x^{k-1} u) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n^{(k-1)} L'_n$ . 对比  $L'_n$  的系数得:

$$\hat{u}_n^{(k-1)} = \frac{1}{2n-1} \hat{u}_{n-1}^{(k)} - \frac{1}{2n+3} \hat{u}_{n+1}^{(k)}.$$

## 2. 其次考虑第一个式子:

将上式重写为:

$$\frac{\hat{u}_{n-1}^{(1)}}{2n-1} = \hat{u}_n^{(0)} + \frac{\hat{u}_{n+1}^{(1)}}{2n+3}.$$

作变量替换  $n \rightarrow n+1$ :

$$\frac{\hat{u}_n^{(1)}}{2n+1} = \hat{u}_{n+1}^{(0)} + \frac{\hat{u}_{n+2}^{(1)}}{2n+5}.$$

这是一个关于  $\frac{\hat{u}_n^{(1)}}{2n+1}$  的递归式. 展开得:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_n^{(1)}}{2n+1} &= \hat{u}_{n+1}^{(0)} + \left( \hat{u}_{n+3}^{(0)} + \frac{\hat{u}_{n+4}^{(1)}}{2n+9} \right) \\ &= \hat{u}_{n+1}^{(0)} + \hat{u}_{n+3}^{(0)} + \hat{u}_{n+5}^{(0)} + \dots \\ &= \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ odd}}}^N \hat{u}_p^{(0)}. \end{aligned}$$

## 3. 最后考虑第二个式子:

由上可知

$$\hat{u}_n^{(2)} = (2n+1) \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ odd}}}^N \hat{u}_p^{(1)}.$$

将  $\hat{u}_p^{(1)} = (2p+1) \sum_{\substack{j=p+1 \\ j+p \text{ odd}}}^N \hat{u}_j^{(0)}$  代入:

$$\hat{u}_n^{(2)} = (2n+1) \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ odd}}}^N (2p+1) \sum_{\substack{j=p+1 \\ j+p \text{ odd}}}^N \hat{u}_j^{(0)}.$$

交换求和顺序: 外部求和指标  $p$  从  $n+1$  开始, 步长为 2. 内部指标  $j$  从  $p+1$  开始, 步长为 2. 这意味着  $j$  的范围是从  $n+2$  到  $N$ , 且  $j$  与  $n$  同奇偶 (即  $j+n$  为偶数). 对于固定的  $j$ ,  $p$  的范围是从  $n+1$  到  $j-1$ , 步长为 2.

$$\hat{u}_n^{(2)} = (2n+1) \sum_{\substack{j=n+2 \\ j+n \text{ even}}}^N \left( \sum_{\substack{p=n+1 \\ \text{step}=2}}^{j-1} (2p+1) \right) \hat{u}_j^{(0)}.$$

利用等差数列求和  $\sum_k (2k+1) = k(k+1) + C$ : 中间的求和项为  $\frac{1}{2}[j(j+1) - n(n+1)]$ . (基于  $p$  的求和结果). 最终得到:

$$\hat{u}_n^{(2)} = \frac{2n+1}{2} \sum_{\substack{j=n+2 \\ j+n \text{ even}}}^N [j(j+1) - n(n+1)] \hat{u}_j^{(0)}.$$

## 2.(a)(b)

本文将正交多项式的根转化为对称三对角矩阵的特征值问题求解.

- **LG 格点:** 为  $(N + 1)$  阶 Legendre 多项式  $P_{N+1}(x)$  的零点. 由递推关系构造  $(N + 1) \times (N + 1)$  的三对角矩阵  $J_{LG}$ , 其非对角元素为  $\beta_i = \sqrt{\frac{i^2}{4i^2 - 1}}$ . 节点即为  $J_{LG}$  的特征值.
- **LGL 格点:** 包含端点  $\{-1, 1\}$  以及  $P'_N(x)$  的  $N - 1$  个零点. 内部节点对应于 Jacobi 多项式  $P_{N-1}^{(1,1)}(x)$  的零点, 对应矩阵  $J_{LGL}$  的大小为  $(N - 1) \times (N - 1)$ , 非对角元素为  $\beta_i = \sqrt{\frac{i(i+2)}{(2i+1)(2i+3)}}$ .

为了验证程序的正确性, 将计算结果与 `numpy.polynomial.legendre` 标准库及通过多项式求导直接求根的结果进行了对比. 在  $N = 50$  的情况下, 最大绝对误差如下表所示, 误差均在机器精度 ( $10^{-15}$ ) 量级, 验证了算法实现的准确性.

表 1: 数值解与参考解的最大绝对误差 ( $N = 50$ )

类型	节点误差	权重误差
Legendre-Gauss (LG)	$3.33 \times 10^{-16}$	$3.05 \times 10^{-15}$
Legendre-Gauss-Lobatto (LGL)	$3.11 \times 10^{-15}$	$1.60 \times 10^{-16}$

图 1 展示了  $N = 15$  时 LG 与 LGL 节点的分布情况.

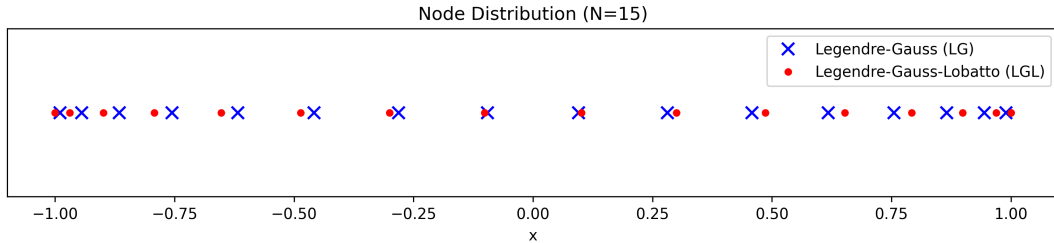


图 1: Legendre-Gauss (LG) 与 Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 节点分布对比 ( $N = 15$ )

## 3.(a)

易知

$$u'(x) = L'_{N+1}(x) - L'_{N-1}(x) = (2N + 1)L_N(x),$$

故

$$\|u'\|^2 = (2N + 1)^2 \|L_N\|^2 = (2N + 1)^2 \cdot \frac{2}{2N + 1} = 2(2N + 1),$$

即题中不等式右端  $cN^{1/2}\|u'\| \sim cN^{1/2} \cdot N^{1/2} = cN$ . 现考虑不等式左端.

(1) 首先说明对于 Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 插值, 题中结论不成立:

LGL 点  $\{x_j\}_{j=0}^N$  是  $(1-x^2)L'_N(x)$  的根, 故

$$u(x_j) = L_{N+1}(x_j) - L_{N-1}(x_j) = (1-x_j^2)L'_N(x_j) = 0, \quad \forall j = 0, \dots, N.$$

由于  $I_N u$  是一个次数  $\leq N$  的多项式, 且在  $N+1$  个点上为 0, 因此  $I_N u \equiv 0$ . 此时

$$\|I_N u - u\|_{H^1} = \|-u\|_{H^1} = \|u\|_{H^1} = \|u\| + \|u'\| \sim \frac{1}{\sqrt{N}} + \sqrt{N},$$

因此题中不等式不成立. (2) 其次, 如果  $I_N$  是 Legendre-Gauss (LG) 插值, 则结论成立:

LG 点  $\{y_j\}_{j=0}^N$  是  $L_{N+1}(x)$  的根. 因此:

$$u(y_j) = L_{N+1}(y_j) - L_{N-1}(y_j) = -L_{N-1}(y_j), \quad j = 0, \dots, N.$$

由于  $\deg(I_N u) \leq N, \deg(-L_{N-1}(x)) \leq N-1$ , 故

$$I_N u(x) = -L_{N-1}(x),$$

$$I_N u - u = -L_{N-1} - (L_{N+1} - L_{N-1}) = -L_{N+1}.$$

从而

$$\|I_N u - u\|_{H^1} = \|L_{N+1}\| + \|L'_{N+1}\|.$$

前一项  $\|L_{N+1}\| \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ , 后一项由于

$$L'_{N+1} = \sum_{k=0, k+N+1 \text{ odd}}^N (2k+1)L_k,$$

$$\|L'_{N+1}\|^2 = \sum (2k+1)^2 \|L_k\|^2 = \sum (2k+1)^2 \frac{2}{2k+1} = \sum 2(2k+1) \approx 2 \sum_{k=1}^{N/2} 4k \approx 2N^2.$$

所以:

$$\|I_N u - u\|_{H^1} \sim C \cdot N.$$

### 3.(b)

以下证明过程与书上引理 3.4 类似. 令  $x = \cos \theta, \hat{u}(\theta) = u(\cos \theta)$ . 由于  $I_N u(\pm 1) = 0$ , 故  $\frac{(I_N u(x))^2}{1-x^2}$  是多项式, 因此

$$\begin{aligned} \|I_N u\|_{w^{-1}, -1}^2 &= \int_{-1}^1 \frac{(I_N u)^2}{1-x^2} dx = \sum_{j=0}^N \frac{(I_N u(x_j))^2}{1-x_j^2} w_j = \sum_{j=0}^N \frac{u^2(x_j)}{1-x_j^2} w_j = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{u^2(x_j)}{1-x_j^2} w_j \\ &\lesssim \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\hat{u}(\theta_j)^2}{\sin^2 \theta_j} \cdot N^{-1} \sin \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_j}{2} \\ &\lesssim N^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \hat{u}^2(\theta_j) (\sin \theta_j)^{-1} \\ &\lesssim N^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sin \theta_j} \max_{\theta \in K_j} |\hat{u}(\theta)|^2, \end{aligned}$$

其中每个  $\theta_j$  都位于某个区间  $K_j$  内,  $\theta_j \in K_j \subset [a_0, a_1] \subset (0, \pi)$ , 其中  $a_0 = \frac{O(1)}{N-1}$ ,  $a_1 = \frac{N\pi + O(1)}{N-1}$ , 并且  $K_j$  的区间长度等于  $\frac{1}{N-1}$ . 由于

$$\begin{aligned} \max_{\theta \in K_j} |\hat{u}(\theta)| &\lesssim \sqrt{N-1} \|\hat{u}\|_{L^2(K_j)} + \frac{1}{\sqrt{N-1}} \|\partial_\theta \hat{u}\|_{L^2(K_j)}, \\ \max_{\theta \in K_j} |\hat{u}(\theta)|^2 &\lesssim \left( \sqrt{N-1} \|\hat{u}\|_{L^2(K_j)} + \frac{1}{\sqrt{N-1}} \|\partial_\theta \hat{u}\|_{L^2(K_j)} \right)^2 \\ &\lesssim (N-1) \|\hat{u}\|_{L^2(K_j)}^2 + \frac{1}{N-1} \|\partial_\theta \hat{u}\|_{L^2(K_j)}^2, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|I_N u\|_{w^{-1}, -1}^2 &\lesssim \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sin \theta_j} \|\hat{u}\|_{L^2(K_j)}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sin \theta_j} N^{-2} \|\partial_\theta \hat{u}\|_{L^2(K_j)}^2 \\ &\lesssim \sum_{j=1}^{N-1} \int_{K_j} \frac{|\hat{u}|^2}{\sin \theta} d\theta + N^{-2} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{K_j} \frac{|\partial_\theta \hat{u}|^2}{\sin \theta} d\theta \\ &\lesssim \int_0^\pi \frac{|\hat{u}|^2}{\sin \theta} d\theta + N^{-2} \int_0^\pi \frac{|\partial_\theta \hat{u}|^2}{\sin \theta} d\theta, \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{|\hat{u}|^2}{\sin \theta} d\theta &\stackrel{x = -\cos \theta}{=} \int_{-1}^1 \frac{|u(x)|^2}{1-x^2} dx = \|u\|_{w^{-1}, -1}^2, \\ \int_0^\pi \frac{|\partial_\theta \hat{u}|^2}{\sin \theta} d\theta &\stackrel{x = -\cos \theta}{=} \int_{-1}^1 |\partial_x u|^2 dx = \|\partial_x u\|^2, \end{aligned}$$

故

$$\|I_N u\|_{w^{-1}, -1}^2 \lesssim \|u\|_{w^{-1}, -1}^2 + N^{-2} \|\partial_x u\|^2.$$

整理知原题结论成立.

#### 4.(a)

考虑如下两点边值问题:

$$u(x) - u''(x) = f(x), \quad -1 < x < 1; \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 1. \quad (1)$$

其中真解  $u(x)$  定义为:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0], \\ x^\gamma, & x \in (0, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

这里  $\gamma \in \{4, 5, 6\}$ . 右端项  $f(x)$  由  $u(x)$  导出. 要求使用 Legendre-Galerkin 方法求解, 取  $N = 2^i, i = 4, \dots, 9$ , 并分析误差  $\|u - u_N\|_{N, w}$  的收敛性.

##### 1. 齐次化边界条件

由于原问题边界条件非齐次, 令数值解  $u_N(x)$  为:

$$u_N(x) = v_N(x) + u_b(x). \quad (3)$$

其中  $u_b(x) = \frac{x+1}{2}$  是满足边界条件的提升函数,  $v_N(x)$  满足齐次边界条件  $v_N(\pm 1) = 0$ . 将  $u_N$  代入方程 (1), 并注意到  $u_b''(x) = 0$ , 得到关于  $v_N$  的方程:

$$v_N - v_N'' = f - u_b. \quad (4)$$

## 2. 变分形式与离散化

选取逼近空间  $V_N = \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{N-2}\}$ , 其中

$$\phi_k(x) = L_k(x) - L_{k+2}(x), \quad k = 0, 1, \dots, N-2. \quad (5)$$

易知  $\phi_k(\pm 1) = 0$ . Legendre-Galerkin 方法的弱形式为: 寻找  $v_N \in V_N$ , 使得对所有  $\phi_j \in V_N$ :

$$(v_N, \phi_j) + (v_N', \phi_j') = (I_N f - u_b, \phi_j). \quad (6)$$

令  $v_N(x) = \sum_{k=0}^{N-2} \hat{v}_k \phi_k(x)$ , 代入上式得到线性方程组:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{S})\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \quad (7)$$

其中:

- 矩阵  $\mathbf{S}$  ( $S_{jk} = (\phi_k', \phi_j')$ ) 为对角阵:

$$S_{jk} = (4k+6)\delta_{jk}. \quad (8)$$

- 矩阵  $\mathbf{M}$  ( $M_{jk} = (\phi_k, \phi_j)$ ) 为对称五对角阵, 非零元素为:

$$M_{kk} = \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+5}, \quad M_{k,k+2} = M_{k+2,k} = -\frac{2}{2k+5}. \quad (9)$$

- 向量  $\mathbf{F}$ :

$$F_j = \int_{-1}^1 I_N f(x) \phi_j(x) dx - \int_{-1}^1 u_b(x) \phi_j(x) dx. \quad (10)$$

## 3. 数值结果

图 2 展示了  $\log_{10} \|u - u_N\|_{N,w}$  随  $\log_{10} N$  的变化关系.

谱方法的收敛速度通常取决于解的光滑性. 对于本题, 解析解  $u(x)$  在  $x = 0$  处存在奇点. 虽然  $u$  连续, 但在  $x = 0$  处的  $\gamma$  阶导数不连续. 具体来说, 解属于 Sobolev 空间  $H^{\gamma+1/2-\epsilon}$ . 根据逼近理论, Legendre 谱方法的  $L^2$  误差估计为:

$$\|u - u_N\| \leq CN^{-s} \|u\|_{H^s}. \quad (11)$$



在此问题中, 受限於  $x = 0$  处的正则性, 预期的收敛阶为  $O(N^{-(\gamma+0.5)})$ . 数值实验结果 (斜率约为  $-4.5, -5.5, -6.5$ ) 与之吻合.

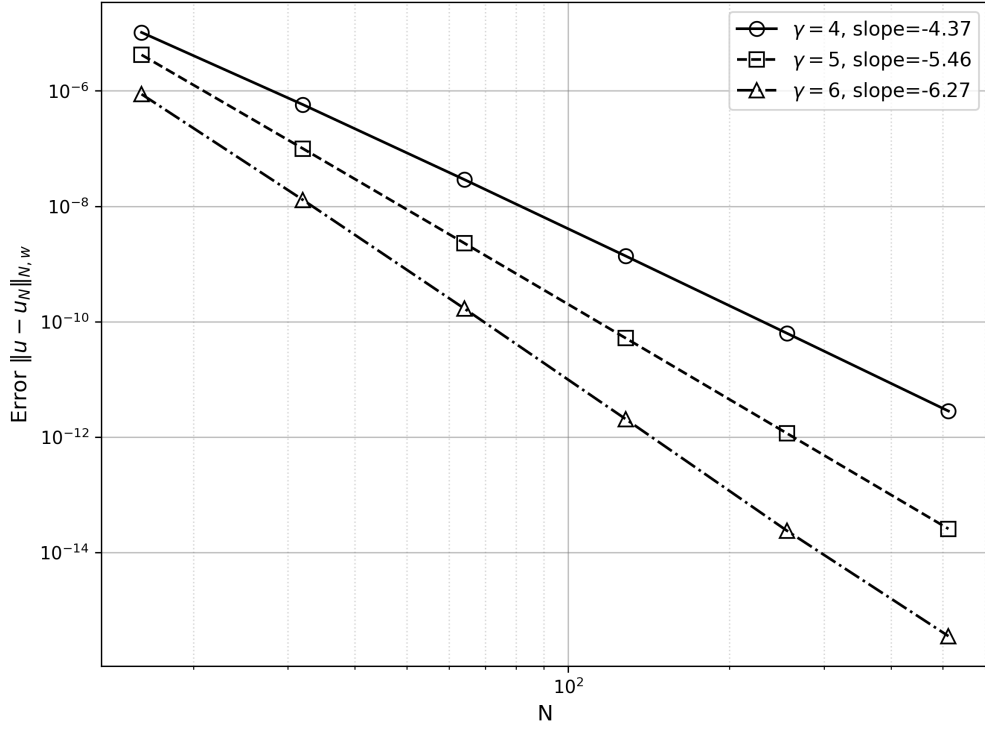


图 2: Legendre-Galerkin 方法在不同  $\gamma$  下的误差收敛曲线

#### 4.(b)

考虑如下变系数两点边值问题:

$$x^2 u(x) - (e^x u'(x))' = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (12)$$

其中真解  $u(x)$  定义为:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0], \\ x^\gamma, & x \in (0, 1]. \end{cases} \quad (13)$$

考虑  $\gamma \in \{4, 5, 6\}$ , 并针对以下两种边界条件分别求解:

- 情形 1:  $u(-1) = 0, \quad u(1) = 1$
- 情形 2:  $u(-1) - u'(-1) = 0, \quad u(1) = 1$

题目要求使用 Chebyshev 配点法 (强形式) 进行求解, 取  $N = 2^i, i = 4, \dots, 9$ , 并分析误差  $\|u - u_N\|_{N,w}$  的收敛性.

##### 1. 算子展开与离散

首先将方程 (12) 中的微分项展开:

$$x^2 u(x) - (e^x u'(x) + e^x u''(x)) = f(x). \quad (14)$$

即:

$$x^2 u - e^x u' - e^x u'' = f. \quad (15)$$

选取 Chebyshev-Gauss-Lobatto 节点  $x_j = \cos(j\pi/N)$ ,  $j = 0, \dots, N$ . 记 Chebyshev 微分矩阵为  $\mathbf{D}$ . 若  $\mathbf{u} = [u(x_0), \dots, u(x_N)]^T$ , 则节点处的一阶导数和二阶导数向量分别为  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{D}\mathbf{u}$  和  $\mathbf{u}'' \approx \mathbf{D}^2\mathbf{u}$ . 将方程 (15) 写成矩阵形式:

$$(\mathbf{X}^2 - \mathbf{E}\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{D}^2)\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (16)$$

其中  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{E}$  分别为对角元是  $x_j$  和  $e^{x_j}$  的对角矩阵. 记总系数矩阵为  $\mathbf{A}_{global}$ , 则有线性系统  $\mathbf{A}_{global}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ .

## 2. 边界条件处理

在强形式配点法中, 边界条件通过直接替换矩阵  $\mathbf{A}_{global}$  的对应行来施加.

**右边界** ( $x_0 = 1$ ) 条件为  $u(1) = 1$ . 在矩阵系统中, 这是第一个未知量  $u_0$ . 我们将  $\mathbf{A}$  的第 0 行替换为  $[1, 0, \dots, 0]$ , 并将右端项向量  $\mathbf{f}$  的第 0 个元素设为 1.

$$1 \cdot u_0 + 0 \cdot u_1 + \dots = 1. \quad (17)$$

**情形 1:**  $u(-1) = 0$ . 类似地, 将第  $N$  行替换为  $[0, \dots, 0, 1]$ , 右端项设为 0.

**情形 2:**  $u(-1) - u'(-1) = 0$ . 这里涉及到导数. 离散形式为:

$$u_N - \sum_{k=0}^N D_{N,k} u_k = 0. \quad (18)$$

写成向量形式为  $(\mathbf{e}_N^T - \mathbf{D}_{N,:})\mathbf{u} = 0$ , 其中  $\mathbf{e}_N$  是第  $N$  个分量为 1 的单位向量. 我们在代码中将矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $N$  行替换为向量:

$$\mathbf{row}_N = [0, \dots, 0, 1] - [D_{N,0}, \dots, D_{N,N}]. \quad (19)$$

并将右端项  $f_N$  设为 0.

## 3. 数值结果

利用 Python 代码计算并绘制了两种边界条件下,  $\gamma = 4, 5, 6$  时的误差收敛曲线 (图 3).

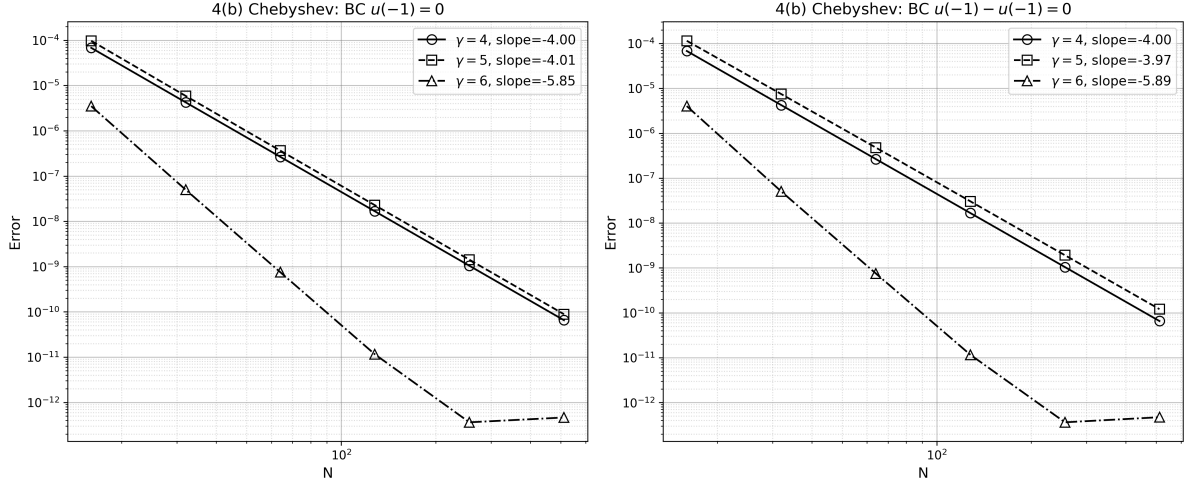


图 3: Chebyshev 配点法在不同边界条件下的误差收敛曲线

其一, 代数收敛性. 结果显示误差呈代数收敛而非谱收敛 (指数收敛). 这是因为真解  $u(x)$  在  $x = 0$  处存在奇异性. 对于 Chebyshev 逼近, 若函数  $u$  的  $k$  阶导数有界变差, 则误差衰减率为  $O(N^{-k})$ .

- 当  $\gamma = 4$  时,  $u^{(4)}(x)$  在  $x = 0$  处不连续, 故预期收敛阶为 4. 实验结果吻合.
- 当  $\gamma = 6$  时,  $u^{(6)}(x)$  在  $x = 0$  处不连续, 预期收敛阶为 6. 实验结果吻合.

其二,  $\gamma = 5$  的特殊情况. 理论上应观察到 5 阶收敛, 但实验数据接近 4 阶. 这可能是由于强形式配点法中引入了二阶微分矩阵  $\mathbf{D}^2$ , 其条件数随  $N$  增长较快 ( $O(N^4)$ ), 加之奇点  $x = 0$  正好位于区间中央, 导致数值误差的主导项发生变化.

其三, 边界条件的影响. 对比情形 1 和情形 2, 收敛曲线的斜率和误差量级几乎一致. 这说明通过“行替换”的方式处理 Robin 边界条件 ( $u - u' = 0$ ) 是非常有效的, 不会破坏 Chebyshev 方法的精度.

## 5.(a)

显然.

## 5.(b) 数值求解方案

### 1. 算子分裂 (Operator Splitting)

考虑 Fisher 方程  $\partial_t u = \partial_{xx} u + u(1 - u)$ . 我们将其分裂为非线性反应部分  $\mathcal{R}$  和线性扩散部分  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{R}: \quad \partial_t u = u(1 - u), \quad (20)$$

$$\mathcal{D}: \quad \partial_t u = \partial_{xx} u. \quad (21)$$

设时间步长为  $\tau$ , 从  $t_n$  到  $t_{n+1}$  采用二阶 Strang 分裂格式:

$$u^{n+1} = \mathcal{S}_R(\tau/2) \circ \mathcal{S}_D(\tau) \circ \mathcal{S}_R(\tau/2)u^n, \quad (22)$$

其中  $\mathcal{S}_R(t)$  为反应步的精确解算子. 对于初值问题  $\frac{du}{dt} = u(1-u)$ ,  $u(0) = u_0$ , 其解析解为:

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-t}}. \quad (23)$$

## 2. 空间离散与边界处理

对于扩散步  $\partial_t u = \partial_{xx} u$ ,  $x \in [-L, L]$ , 作坐标变换  $\xi = x/L$ ,  $\xi \in [-1, 1]$ , 方程变为:

$$\partial_t u = \frac{1}{L^2} \partial_{\xi\xi} u. \quad (24)$$

为处理非齐次边界条件  $u(-1, t) = 1, u(1, t) = 0$ , 引入边界函数  $u_B(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$ . 令  $u(\xi, t) = v(\xi, t) + u_B(\xi)$ , 则  $v$  满足齐次 Dirichlet 边界条件  $v(\pm 1, t) = 0$ . 注意到  $\partial_{\xi\xi} u_B = 0$ , 故  $v$  满足的方程仍为  $\partial_t v = \frac{1}{L^2} \partial_{\xi\xi} v$ .

选取 Legendre-Galerkin 基函数  $\phi_k(\xi) = L_k(\xi) - L_{k+2}(\xi)$ , 将数值解展开为:

$$v_N(\xi, t) = \sum_{k=0}^{N-2} \hat{v}_k(t) \phi_k(\xi). \quad (25)$$

代入方程并作 Galerkin 投影, 得到线性系统:

$$\mathbf{M} \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = -\frac{1}{L^2} \mathbf{S} \hat{\mathbf{v}}, \quad (26)$$

其中刚度矩阵与质量矩阵元素分别为:

$$M_{kj} = (\phi_j, \phi_k)_{L^2}, \quad S_{kj} = (\phi_j', \phi_k')_{L^2}. \quad (27)$$

利用 Crank-Nicolson 格式进行时间离散, 需在每一步求解如下线性方程组:

$$\left( \mathbf{M} + \frac{\tau}{2L^2} \mathbf{S} \right) \hat{\mathbf{v}}^{n+1} = \left( \mathbf{M} - \frac{\tau}{2L^2} \mathbf{S} \right) \hat{\mathbf{v}}^n. \quad (28)$$

求解得到  $\hat{\mathbf{v}}^{n+1}$  后, 通过  $u^{n+1} = v_N^{n+1} + u_B$  恢复物理空间解, 再进行下一步的非线性更新.

## 3. 数值结果

取参数  $N = 128, L = 100, \tau = 10^{-3}$ . 数值解与精确解  $u_{exact}(x, t) = [1 + \exp((x/\sqrt{6}) - (5/6)t)]^{-2}$  的最大误差 ( $L^\infty$ ) 如下表所示:

表 2: Fisher 方程数值解与精确解的最大误差

Time ( $t$ )	Max Error ( $L^\infty$ )
1	$2.91 \times 10^{-5}$
2	$1.49 \times 10^{-5}$
3	$2.79 \times 10^{-5}$
4	$4.81 \times 10^{-5}$
5	$1.15 \times 10^{-4}$
6	$3.21 \times 10^{-4}$

各时间点的数值解如图所示, 波形由  $x \approx 0$  处向右平稳传播, 与 Fisher 方程行波解性质一致.

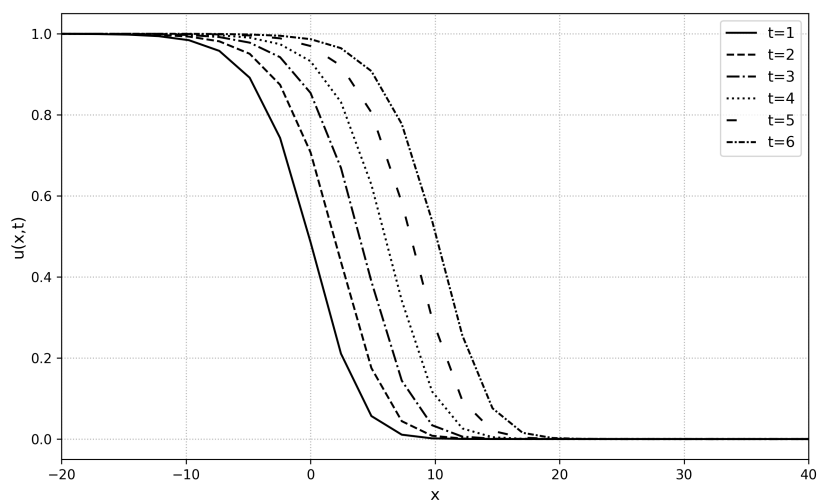


图 4: Fisher 方程在  $t = 1, \dots, 6$  时刻的数值解

### 5.(c)

结果如下图所示.

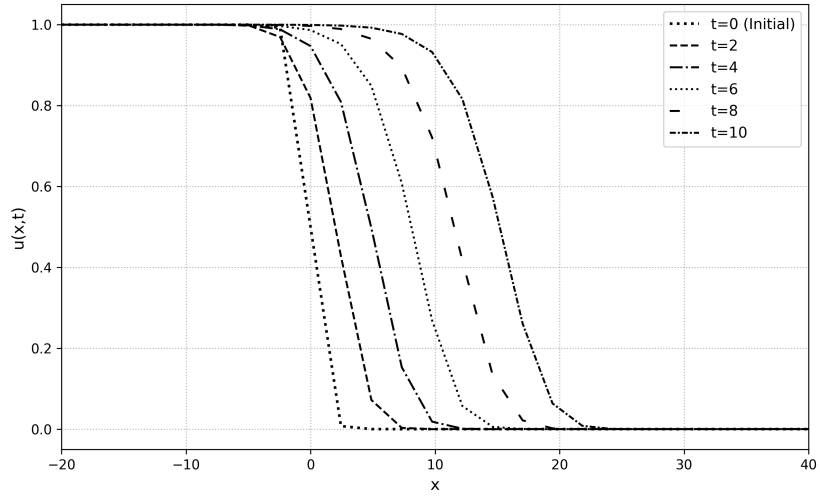


图 5: Fisher 方程在初值条件  $u(x, 0) = \frac{1}{2} [1 - \tanh(x)]$  下的动力学

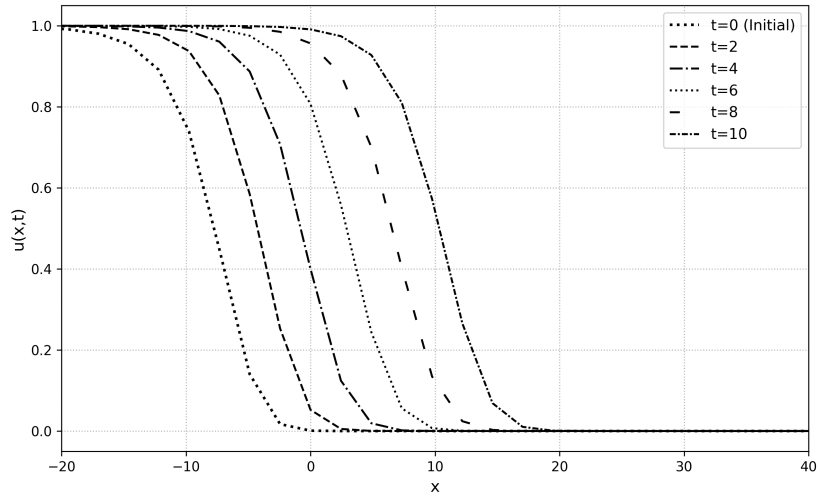


图 6: Fisher 方程在初值条件  $u(x, 0) = \frac{1}{[1+e^{(x+5)/2}]^2} \frac{1}{[1+e^{x/3}]^2} \frac{1}{[1+e^{(x-5)/4}]^2}$  下的动力学

## 6.(a)

考虑定义在  $\Omega = (-1, 1)^2$  上的二维可分偏微分方程:

$$au_{xx} + bu_x + cu + du_{yy} + eu_y + fu = g(x, y). \quad (29)$$

边界条件为:

- $x$  方向 (Neumann):  $\partial_x u(\pm 1, y) = 0, \quad y \in [-1, 1]$

- $y$  方向 (Dirichlet):  $u(x, \pm 1) = 0, \quad x \in [-1, 1]$

其中系数  $a, \dots, f$  均为常数.

### 1. 基函数的构造

为了利用 Galerkin 方法, 我们需要构造满足相应边界条件的基函数空间. 令  $L_k(x)$  为  $k$  次 Legendre 多项式.

$x$  方向: 构造基函数  $\phi_k(x)$  满足  $\phi'_k(\pm 1) = 0$ :

$$\phi_k(x) = L_k(x) - \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)} L_{k+2}(x), \quad k = 0, 1, \dots, N-2. \quad (30)$$

$y$  方向: 构造基函数  $\psi_k(y)$  满足  $\psi_k(\pm 1) = 0$ :

$$\psi_k(y) = L_k(y) - L_{k+2}(y), \quad k = 0, 1, \dots, N-2. \quad (31)$$

### 2. 离散化格式

设数值解  $u_N(x, y) = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{N-2} u_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y)$ . 代入方程并对测试函数  $\phi_m(x) \psi_n(y)$  做 Galerkin 投影, 可得 Sylvester 矩阵方程:

$$S_x U M_y^T + M_x U S_y^T = G. \quad (32)$$

其中  $U$  是待求系数矩阵,  $G_{mn} = (g, \phi_m \psi_n)$ ,  $(M_y)_{mn} = \int_{-1}^1 \psi_m(y) \psi_n(y) dy$ ,  $(S_x)_{mn} = \int_{-1}^1 (a\phi_n''(x) + b\phi_n'(x) + c\phi_n(x)) \phi_m(x) dx$ .

### 3. 系数矩阵的计算

易知

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = h_m \delta_{mn}, \quad \text{其中 } h_m = \frac{2}{2m+1}. \quad (33)$$

故

$$\begin{aligned} (M_y)_{mn} &= \int_{-1}^1 (L_m(y) - L_{m+2}(y)) (L_n(y) - L_{n+2}(y)) dy \\ &= \int L_m L_n - \int L_m L_{n+2} - \int L_{m+2} L_n + \int L_{m+2} L_{n+2} \end{aligned} \quad (34)$$

$$= h_m \delta_{mn} - h_m \delta_{m, n+2} - h_{m+2} \delta_{m+2, n} + h_{m+2} \delta_{m+2, n+2}. \quad (35)$$

选取 Legendre-Gauss 节点  $x_q$  和对应权重  $w_q$ ,  $(S_x)_{mn}$  可被精确离散为有限和:

$$(S_x)_{mn} = \sum_{q=0}^{Q-1} w_q [a\phi_n''(x_q) + b\phi_n'(x_q) + c\phi_n(x_q)] \phi_m(x_q). \quad (36)$$

### 4. 结果分析

为了验证算法的准确性和收敛阶, 我们设计一个满足边界条件的解析解:

$$u_{exact}(x, y) = \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right). \quad (37)$$

该解满足  $x = \pm 1$  处的 Neumann 条件 (导数为 0) 和  $y = \pm 1$  处的 Dirichlet 条件 (值为 0). 令  $a = 1, b = 0.5, c = 1, d = 1, e = -0.5, f = 2$ . 图 7 展示了随着多项式截断阶数  $N$  的增加, 最大误差 ( $L^\infty$  error) 的变化情况. 可以看出, 误差在半对数坐标系下呈线性下降, 体现了谱收敛特性. 当  $N \geq 24$  时, 误差已达到机器精度 ( $10^{-14}$  量级).

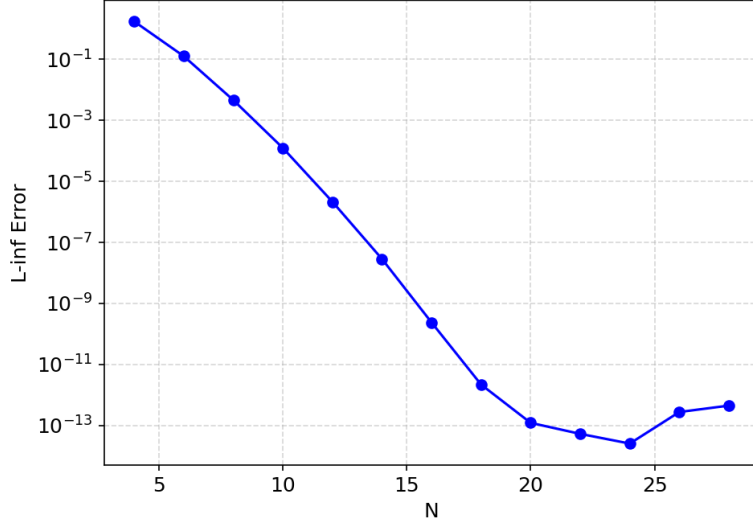


图 7: 误差随截断阶数  $N$  的收敛曲线 (semilog 坐标)

## 6.(b)

### 1. 基函数的构造

基函数的构造与 6(a) 完全一致.

### 2. 离散化格式

设数值解  $u_N(x, y) = \sum_{i,j} u_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y)$ . 尽管系数  $a, b, c$  依赖于  $x$ , 但算子仍然可以分离为  $L = \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_y$ . Galerkin 投影后的矩阵方程形式依然为 Sylvester 方程:

$$S_x U M_y^T + M_x U S_y^T = G. \quad (38)$$

其中  $y$  方向的矩阵  $M_y, S_y$  与常系数情况完全相同. 主要区别在于  $x$  方向的变系数刚度矩阵:

$$(S_x)_{mi} = \int_{-1}^1 [a(x) \phi_i''(x) + b(x) \phi_i'(x) + c(x) \phi_i(x)] \phi_m(x) dx. \quad (39)$$

### 3. 变系数矩阵的计算

对于变系数积分, 解析计算较为困难且不通用. 我们采用 Gauss-Legendre 数值积分进行高精度近似. 选取  $Q$  个积分节点  $x_q$  和权重  $w_q$  (取  $Q \geq N + k$ , 以处理系数函数的非线性), 则  $(S_x)_{mi}$  计算如下:

$$(S_x)_{mi} \approx \sum_{q=0}^{Q-1} w_q \underbrace{[a(x_q) \phi_i''(x_q) + b(x_q) \phi_i'(x_q) + c(x_q) \phi_i(x_q)]}_{\text{算子在节点上的值}} \phi_m(x_q). \quad (40)$$



#### 4. 结果分析

设定系数为:

$$a(x) = 2 + \sin(x), \quad b(x) = x, \quad c(x) = e^{x/2}, d = e = f = 1.$$

并构造精确解:

$$u_{exact}(x, y) = \sin^2(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right). \quad (41)$$

验证可见:  $\partial_x u|_{x=\pm 1} \propto \sin(2\pi) = 0$ ,  $u|_{y=\pm 1} \propto \cos(\pm\pi/2) = 0$ . 图 8 展示了误差收敛曲线. 结果表明, 即使引入变系数, Legendre-Galerkin 方法依然保持了谱收敛特性, 误差随着  $N$  的增加呈指数级衰减.

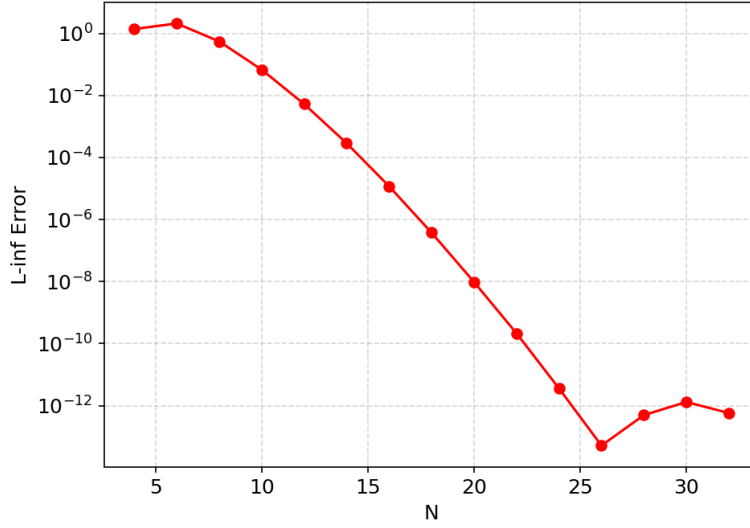


图 8: 变系数方程误差收敛曲线 (semilog 坐标)