游戏开发工程师数学基础

木头骨头石头

2025 年 9 月 14 日

目录

Chapter 1

集合论简介

1.1 朴素集合论

集合（Set）是由一些事物汇集一起组成的整体，这些事物称为集合的**元素（Element）**。集合通常用大写英文字母表示，集合中的元素用小写字母表示。不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$。集合有如下三个特性：

1. **无序性**：集合中每个元素的地位是相同的，元素之间是无序的。当然，我们可以在集合上定义偏序关系之后，元素之间可以依次排序。但就集合本身，元素之间是没有必然的序的。
2. **互异性**：集合中的元素是互不相同的，每个元素只出现一次。
3. **确定性**：给定一个集合 A，任何一个对象要么属于集合 A，要么不属于集合 A，二者必居其一，不允许有模棱两可的情况出现。

公理 1.1.1 (概括公理模式 Axiom Schema of Comprehension)**.** *假设任意属性 $P(x)$，存在一个集合 A，使得对于任意对象 x， $x \in A$ 当且仅当 $P(x)$ 为真。集合 A 记为 $\{x|P(x)\}$ 或 $\{x : P(A)\}$。*

> 注解
>
> 公理（Axiom）是一条命题。公理模式（Axiom Schema）中的谓词 P 是可变的，公理模式实际上包含无穷多条公理。选择具体的一个谓词，就得到一条命题。

概括公理模式是朴素集合论中构造集合的基本方法，换句话说，存在一个包含万事万物的集合，任选一条属性，都能从中筛选元素建构新的集合。概括公理模式限制太少，所以蕴含一个经典的悖论——**罗素悖论（Russell's Paradox）**，若存在一个集合 R，它是由“所有不包括自身的集合”所组成，也即

$$R = \{x : x \notin x, \text{x is a set}\}$$

那么，R 是否包含自身呢？如果 $R \in R$，那么根据 R 的定义，$R \notin R$；反之，如果 $R \notin R$，那么根据 R 的定义，$R \in R$。无论哪种情况，都会导致矛盾。消解罗素悖论需要提出新的公理。**ZFC 公理系统**是通过限制概括公理模式来规避罗素悖论。在 **NBG 公理系统**中，引入比集合更高阶的“类（Class）”，从而避免讨论“包含所有集合的集合”，而是“包含所有集合的类”。下面主要介绍 ZFC 公理系统。

1.2 ZFC 公理集合论

为了消解罗素悖论，需要限制概括公理模式。为此，数理学家 Zermelo 和 Fraenkel 提出了一套公理定义集合，称为 **ZF 公理集合论（ZF Axiomatic Set Theory）**，在 ZF 公理集合论的基础上加上**选择公理（Axiom of Choice）**就是 **ZFC 公理集合论**。ZFC 公理集合论一共有九条公理：

1. **外延公理 Axiom of extensionality**：设 A, B 是集合，说 A 和 B 是相等的，记作 $A = B$，当且仅当，两个集合有相同的元素。
2. **配对公理 Axiom of pairing**：对于任意集合（或元素）a, b，存在一个集合 $\{a, b\}$ 包含 a, b。
3. **分类公理模式 Axiom schema of specification**：设 A 是一个集合，并对于每个 $x \in A$，设 $P(x)$ 是一个关于 x 的性质。那么存在一个集合 $\{x \in A : P(x)\}$，它的元素是 A 中使 $P(x)$ 成立的所有 x。
4. **并集公理 Axiom of union**：对于集合 A，存在集合 $\cup A$。$\forall u \in \cup A$，存在集合 $B \in A$，使得 $u \in B$。
5. **幂集公理 Axiom of power set**：对于集合 A，存在集合 $\mathcal{P}(A)$ 是所有 A 的子集的集合，称为幂集。
6. **无穷公理 Axiom of infinity**：存在集合 A，使得$\varnothing \in A$，且任意对象 $a \in A$ 都有 $a \cup \{a\} \in A$。
7. **替代公理模式 Axiom schema of replacement**：设属性 $P(x, y)$，对于每个 x 唯一确定一个 y 使得 $P(x, y)$ 成立。则对于任意集合 A，存在集合 B，任意 $b \in B$，存在 $a \in A$ 使得 $P(a, b)$ 成立。
8. **正则公理 Axiom of regularity**：任意非空集合 A 包含一个元素 x，使得 $x \cap A = \varnothing$。
9. **选择公理 Axiom of choic**：任意由非空集合组成的集族 $\mathcal{F}$，存在一个选择函数 f，使得对每个 $A \in \mathcal{F}$，有 $f(A) \in A$。

1.2.1 外延公理

公理 1.2.1 (外延公理 Axiom of extensionality)**.** *设 A, B 是集合，说 A 和 B 是相等的，记作 $A = B$，当且仅当，两个集合有相同的元素。*

注解

外延公理说明一个集合完全由它的元素决定。通过外延公理，可以定义子集。

子集

定义 1.2.1 (子集 Subset)**.** *设 A, B 是集合，说 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$，当且仅当，A 的每个元素都是 B 中的元素。*

定理 1.2.1. *若两个集合互为对方的子集，两集合相等。也即，设 A, B 是集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A = B$。*

1.2.2 配对公理

公理 1.2.2 (配对公理 Axiom of pairing). 对于任意集合（或元素） a, b，存在一个集合 $\{a, b\}$ 包含 a, b。

注解

外延公理和配对公理说明，集合中的元素都是独一无二的，且没有顺序，比如：

$$\{1,2\} = \{2,1\},\ \{1,1\} = \{1\}$$

通过配对公理，可以定义有序对。

有序对

定义 1.2.2 (有序对 Ordered Pair). 由两个元素 x 和 y 按一定顺序排列成的二元组称为一个有序对或序偶，记为：(x, y)，其中 x 是它的第一个元素，y 是第二个，那么

$$(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$$

命题 1.2.1 (有序对的性质). 设 x, y 是元素，(x, y) 是有序对，那么

1. 当 $x = y$ 时，$(x, y) = (y, x)$；当 $x \neq y$ 时，$(x, y) \neq (y, x)$
2. $(x, y) = (u, v)$ 当且仅当 $x = u$，$y = v$

定义 1.2.3 (有序数组 Ordered n-Tuple). 由 n 个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 按一定顺序排列成的 n 元组称为一个有序数组，记为：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 x_1 是它的第一个元素，x_2 是第二个，依此类推，那么

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) := ((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)$$

命题 1.2.2. 两个 n 元有序数组 $(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n)$ 相等，当且仅当，$a_1 = a_1, \cdots, a_n = b_n$

1.2.3 分类公理模式

公理 1.2.3 (分类公理模式 Axiom schema of specification). 设 A 是一个集合，并对于每个 $x \in A$，设 $P(x)$ 是一个关于 x 的性质。那么存在一个集合 $\{x \in A : P(x)\}$，它的元素是 A 中使 $P(x)$ 成立的所有 x。

注解

分类公理模式是 ZFC 公理集合论中构造集合的方式，与朴素集合论的概括公理模式相比，它是从一个已知集合中挑选元素构造一个子集，而不是直接构造所有满足性质 P 的集合。因此通过分类公理模式可以定义空集、交集、差集、补集…… 但不能定义并集。并集需要从已知集合构造一个更大的，包含已知集合的集合，这需要并集公理。

空集

定义 1.2.4 (空集 Empty). 对于任意集合 A，集合：

$$\{x \in A : x \neq x\}$$

称为空集，记为 $\varnothing$

> **注解**
>
> 因为满足性质 $x \neq x$ 的元素并不存在，所以 $\varnothing$ 中不包含任何元素。根据定义，空集是任意集合的子集。

交集

定义 1.2.5 (交集 Intersection). 两个集合 A 和 B 的交是一个集合，记为 $A \cap B$，那么

$$A \cap B := \{x \in A : x \in B\}$$

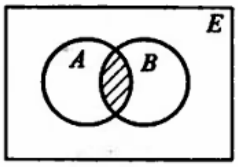

图 1.1: 交集

定义 1.2.6 (分离 Disjoint). 两个集合 A 和 B 是分离的，当且仅当：$A \cap B = \varnothing$

差集

定义 1.2.7 (差集 Difference). 两个集合 A 和 B 的差是一个集合，记为 $A - B$，那么

$$A - B := \{x \in A : x \notin B\}$$

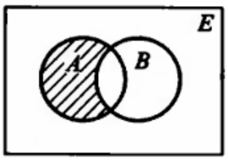

图 1.2: 差集

补集

定义 1.2.8 (补集). 设集合 E 和 A，$A \subseteq E$，A 的补集记为 $\complement_E A$，那么

$$\complement_E A := E - A = \{x \in E : x \notin A\}$$

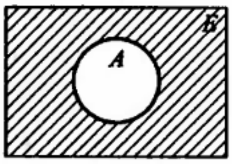

图 1.3: 补集

1.2.4 并集公理

定义 1.2.9 (并集 Union). 两个集合 A 和 B 的并是一个集合，记为 $A \cup B$，那么

$$A \cup B := \{x : x \in A \ or \ x \in B\}$$

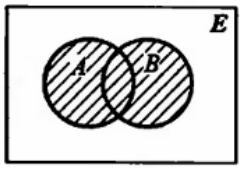

图 1.4: 并集

定义 1.2.10 (对称差 Symmetric Difference). 两个集合 A 和 B 的对称差是一个集合，记为 $A \oplus B$，那么：

$$A \oplus B := (A - B) \cup (B - A)$$

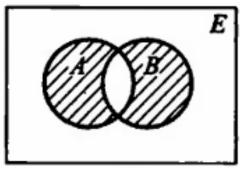

图 1.5: 并集

定理 1.2.2 (集合常用算律). 设 A, B, C 是集合

1. 幂等律：$A \cup A = A$，$A \cap A = A$
2. 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
4. 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. 排中律：$A \cup \complement_E A = E$
6. 矛盾律：$A \cap \complement_E A = \varnothing$
7. 德摩根律：
   (a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   (b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
   (c) $\complement_E(B \cup C) = \complement_E B \cap \complement_E C$
   (d) $\complement_E(B \cap C) = \complement_E B \cup \complement_E C$
8. 双重否定率：$\complement_E(\complement_E A) = A$

1.2.5 幂集公理

公理 1.2.4 (幂集公理 Axiom of power set)**.** 对于集合 A，存在集合 $\mathcal{P}(A)$ 是所有 A 的子集的集合，称为幂集。

注解

换句话说，集合 A 的幂集是 A 全体子集构成的集合。通过幂集公理，同样可以从已知集合构造更大的集合。有序对的定义：

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

如果 $a \in A, b \in B$，那么：

$$(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

通过并集公理和幂集公理，构造集合 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$，通过分离公理模式，分离出有序对的集合，从而可以定义两个集合的**笛卡尔积**。

笛卡尔积

定义 1.2.11 (笛卡尔积 Cartesian Product)**.** 设 A，B 为集合，A, B 的笛卡尔积记为 $A \times B$，那么

$$A \times B := \{(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : x \in A, y \in B\}$$

递归地，可以定义 n 个集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的笛卡尔积，记为 $\prod_{i=1}^n S_i$，那么

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^n S_i$$

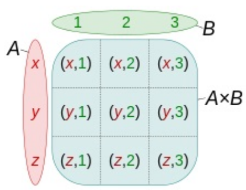

图 1.6: 笛卡尔积

注解

笛卡尔积是构造有序对集合的基本方法。有了有序对的集合，再通过分离公理模式，从中分离出我们感兴趣的有序对，从而构建起集合元素之间的关系，从而为集合定义各种结构。

命题 1.2.3 (笛卡尔积的性质). 设 A, B, C 为集合，

1. 笛卡尔积不满足结合律
   (a) $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
2. 笛卡尔积通常不满足交换律
   (a) $A \times B \neq B \times A$
3. 笛卡尔积对集合交并满足分配律
   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   (b) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
   (c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
   (d) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

1.2.6 无穷公理

公理 1.2.5 (无穷公理 Axiom of Infinity). 存在集合 A，使得 $\varnothing \in A$，且任意对象 $a \in A$ 都有 $a \cup \{a\} \in A$

注解

无穷公理断言了无穷集的存在，但这种“无穷”并不是像朴素集合论那样不加限制的无穷，而是对后继（successor）操作 $a \cup \{a\}$ 封闭的无穷，也即 $\forall a \in A$ 都存在其后继 $a \cup \{a\} \in A$。满足这一性质的集合，也称为**归纳集（Inductive Set）**。自然数的递归定义依赖于无穷公理。数学归纳法的有效性依赖于自然数集的无限性。若没有无穷公理，归纳法只能应用于有限步骤。

自然数

定义 1.2.12 (自然数 Natural numbers). 通过无穷公理，我们可以无限递归地定义每一个自然数：

1. 令 $0 := \varnothing$
2. 任意自然数 n 的后继 $S(n)$，那么 $S(n) := n \cup \{n\}$

无穷公理说明，集合 $n \cup \{n\}$ 的存在，记所有自然数的集合记为 $\mathbb{N}$。

定义 1.2.13 (自然数的序). 设 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ 是自然数，我们说 n 大于等于 m，记作 $n \geq m$ 或 $m \leq n$，当且仅当 $m \subseteq n$。

例 1.2.1. 根据自然数的定义,

$$
\begin{aligned}
&0 = \{\} = \varnothing \\
&1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\} \\
&2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
&3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

1.2.7 替代公理模式

公理 1.2.6 (替代公理模式 Axiom Schema of Replacement)**.** 设属性 $P(x, y)$,对于每个 x 唯一确定一个 y 使得 $P(x, y)$ 成立。则对于任意集合 A,存在集合 B,任意 $b \in B$,存在 $a \in A$ 使得 $P(a, b)$ 成立。

注解

属性 $P(x, y)$ 类似于"函数"(因为函数是通过集合公理定义的,所以在集合公理中避免谈及"函数"),也即 x 对应唯一的 y。通过替代公理模式,可以将已知集合 A 中的元素 x 替换为 y 生成一个新的集合 B。通过替代公理模式,可以递归地定义自然数的加法与乘法。

自然数的加法与乘法

定义 1.2.14 (自然数的加法)**.** 设 m 是自然数,

1. $m + 0 := m$
2. 任意自然数 n 的后继为 $S(n)$,$m + S(n) := S(m + n)$

注解

替代公理模式断言了属性,$P(m, 0) = m + 0$ 和 $P(m, n) = m + S(n)$ 的存在,再根据无穷公理,可以递归的定义任意自然数 m 与 n 的加法:

$$
\begin{aligned}
&m + 0 = m \\
&m + 1 = m + S(0) = S(m + 0) = S(m) \\
&m + 2 = m + S(1) = S(m + 1) = S(S(m + 0)) = S(S(m)) \\
&m + 3 = m + S(2) = S(m + 2) = S(S(S(m + 0))) = S(S(S(m))) \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

定义 1.2.15 (自然数的乘法). 设 m 是自然数，

1. $m \times 0 := 0$
2. 任意自然数 n 的后继为 $S(n)$， $m \times S(n) := m \times n + m$

注解

替代公理模式断言了属性，$P(m,0) = m \times 0$ 和 $P(m,n) = m \times S(n)$ 的存在，再根据无穷公理，可以递归的定义任意自然数 m 与 n 的乘法：

$$\begin{aligned}
&m \times 0 = 0 \\
&m \times 1 = m \times S(0) = m \times 0 + m = m \\
&m \times 2 = m \times S(1) = m \times 1 + m = m \times 0 + m + m = m + m \\
&m \times 3 = m \times S(2) = m \times 2 + m = m \times 0 + m + m + m = m + m + m \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

命题 1.2.4 (自然数的性质). 设任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$ 是自然数，有：

1. 加法交换律：$a + b = b + a$
2. 加法结合律：$(a + b) + c = a + (b + c)$
3. 乘法交换律：$a \times b = b \times a$
4. 乘法结合律：$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
5. 乘法对加法的分配律：$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
6. 加法单位元：0
7. 乘法的零元：0
8. 乘法的单位元：1

1.2.8 正则公理

公理 1.2.7 (正则公理 Axiom of Regularity). 任意非空集合 A 包含一个元素 x，使得 $x \cap A = \varnothing$。

注解

换句话说，如果 A 是一个非空集合，其中至少包含一个元素 x，它要么不是集合，要么是与 A 完全不同的集合。正则公理也称为**基础公理**（**Foundation Axiom**），它断言了不存在以自身为元素的集合，从而避免罗素悖论。

1.2.9 选择公理

定义 1.2.16 (集族 Family of Sets)**.** 以集合为元素的集合称为集族。集族常用大写的花体字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 表示。比如，集合 A 的幂集 $\mathcal{P}(A)$；集合 A 的拓扑 $\mathcal{T}(A)$。集合 A 的 σ 代数 $\mathcal{M}(A)$

公理 1.2.8 (选择公理 Axiom of Choice)**.** 任意由非空集合组成的集族 $\mathcal{F}$，存在一个选择函数 f，使得对每个 $A \in \mathcal{F}$，有 $f(A) \in A$

注解

选择公理说明，无论集合族的结构如何复杂，总能为每个集合选出一个代表元素。选择公理仅断言选择函数存在，但不提供具体构造方法。这与构造主义数学的哲学相冲突，但被经典数学广泛接受。

Chapter 2

关系与结构

任意两事物之间存在某种关系（Relation），比如数之间的大小关系、相等关系，相似关系、正交关系、共线关系等。这些关系可以用关系谓词来叙述，比如 a 大于 b、点 A 与点 B 共线、整数 x 整除整数 y 等。在没有定义元素之间的关系前，集合只是一堆元素的“堆砌”，我们只能讨论集合与集合的包含关系，集合与元素的从属关系。当定义了元素之间的关系时，集合就会表现出某些性质，就称这个集合具备了某种结构（Structure）。

受结构主义（Structuralism）思潮的影响，在二十世纪初，布尔巴基学派（Bourbaki）的数学家主张在集合论的基础上，通过元素之间的关系定义数学对象。集合限定了讨论对象的范围；关系是集合的笛卡尔积，通过分类公理模式筛选出来的子集；集合与关系一起构成了数学对象的结构。布尔巴基学派提出三种基本数学结构：

1. 代数结构 Algebraic Structure：群、环、域、向量空间等，研究运算与代数性质，作为代数学的基础
2. 序结构 Order Structure：偏序集、全序集等，研究元素之间的顺序关系，作为分析学的基础
3. 拓扑结构 Topological Structure：拓扑空间、度量空间等，研究元素之间的邻近关系，作为几何学的基础

2.1 二元关系

2.1.1 二元关系的定义

定义 2.1.1 (关系 Relation). 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为集合，存在属性 P，使得有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足该属性，则称 P 为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 上的一个 n 元关系（*n-ary Relation*），记为 R，那么

$$R = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i : P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

特别的，当 $n = 2$，称为**二元关系（*Binary Relation*）**。若 $(a, b) \in R$，记为 aRb。二元关系 R 中所有有序对的第一个元素构成的集合称为 R 的**定义域（*Domain*）**，记为 $\mathrm{dom}R$；二元关系 R 中所有有序对的第二个元素构成的集合称为 R 的**值域（*Range*）**，记为 $\mathrm{ran}R$。

定义 2.1.2 (二元关系的逆 Inverse). 设 R 为集合 X, Y 上的二元关系，则 R 的**逆（*Inverse*）**，记为 R^{-1}，定义为

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$$

定义 2.1.3 (二元关系的复合 Composition). 设 R 为集合 X, Y 上的二元关系，S 为集合 Y, Z 上的二元关系，则 R, S 的**复合（*Composition*）**，记为 $S \circ R$，定义为

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S]\}$$

定义 2.1.4 (恒等关系 Identity Relation). 设 X 为集合，则 X 上的**恒等关系（*Identity Relation*）**，记为 I_X，定义为

$$I_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

命题 2.1.1. 设 R, S, T 为适当集合上的二元关系，则有

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
3. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$
4. $F \circ (S \cup R) = (F \circ S) \cup (F \circ R)$
5. $(S \cup R) \circ F = (S \circ F) \cup (R \circ F)$
6. $F \circ (S \cap R) \subseteq (F \circ S) \cap (F \circ R)$
7. $(S \cap R) \circ F \subseteq (S \circ F) \cap (R \circ F)$

2.1.2 关系矩阵与关系图

定义 2.1.5 (关系矩阵)**.** 设 R 为有限集 X,Y 上的二元关系，则称 R 的**关系矩阵**（***Relation Matrix***）为

$$m_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{如果 } (x_i,y_j)\in R\\ 0, & \text{如果 } (x_i,y_j)\notin R\end{cases}$$

其中 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$。

定义 2.1.6 (关系图)**.** 设 X 是有限集合，R 是 X 上的二元关系，则称 R 的**关系图**（***Relation Graph***）为一个有向图 $G_R=(V,E)$，其中

- 顶点集 $V=X$；
- 边集 $E=\{(x_i,x_j):(x_i,x_j)\in R\}$。

2.1.3 自反性与反自反性

定义 2.1.7. 设 R 为集合 X 上的二元关系，

1. **自反性 *Reflexivity***: 若对任意 $x\in X$，$(x,x)\in R$，则称 R 具有自反性。
2. **反自反性 *Irreflexivity***: 若对任意 $x\in X$， $(x,x)\notin R$，则称 R 具有反自反性。

命题 2.1.2. 设 R 为集合 X 上的二元关系，则有

1. R 是自反的，当且仅当，$I_X\subseteq R$
2. R 是反自反的，当且仅当，$I_X\cap R=\varnothing$

注解

如果 X 是有穷集合，通过关系矩阵或关系图可以更直观的判断该二元关系是否具有自反性或反自反性：

1. 关系矩阵：自反性对应矩阵的主对角线全为 1；反自反性对应矩阵的主对角线全为 0
2. 关系图：自反性对应每个节点都有一个指向自身的环；反自反性对应没有节点有指向自身的环

自反性说明该集合中任意一个元素与其自身的都有关系，比如实数集上的等于关系，自然数集上的整除关系等；反之，如果如果集合中任意一个元素与其自身没有关系，那么这种二元关系具有反自反性，比如实数集上的大于关系。不具有自反关系的二元关系不一定是反自反的，比如一个二元关系：a 与 a 的乘积是偶数，这个二元关系在偶数集上是自反的、在奇数集上是反自反的、在自然数集上既不是自反的，也不是反自反的。

2.2 函数

定义 2.2.1 (函数 Function)**.** 设 X, Y 为集合，f 为 X, Y 上的二元关系，f 称为 X 到 Y 的一个**函数（*Function*）**，当且仅当，f 满足：

1. 唯一性：$\forall x \in \mathrm{dom}f$，如果 $(x, y_1) \in f$ 且 $(x, y_2) \in f$，则 $y_1 = y_2$

记作 $f : X \to Y$，记 xfy 为 $y = f(x)$。定义域 $\mathrm{dom}f$ 也称为函数的原像（*Preimage*），值域 $\mathrm{ran}f$ 也称为函数的像（*Image*），也常记为 $\mathrm{im}f$ 或 $f(X)$。

注解

函数是一种特殊的二元关系，其唯一性说明，若对任意 $x \in X$，在 f 中存在唯一的 $y \in Y$，使得 $(x, y) \in f$。不存在一个 $x \in X$，对应多个 $y \in Y$ 的情况。函数的复合的复合也即二元关系的复合。函数的逆不一定是函数，因为可能存在 $y \in Y$，对应多个 $x \in X$ 的情况，不满足唯一性。

定义 2.2.2. 设 $f : X \to Y$ 为函数，若

1. **满射（*Surjection*）**：如果 $\mathrm{ran}f = Y$，则称 f 为满射。
2. **单射（*Injection*）**：如果 $\forall y \in \mathrm{ran}f$，$(x_1, y) \in f$ 且 $(x_2, y) \in f$，$x_1 = x_2$，则称 f 为单射。
3. **双射（*Bijection*）**：如果 f 同时为单射与满射，则称 f 为双射。

2.2.1 集合的势

对于一个有穷集合，我们可以用一个自然数表示集合的大小，并根据自然数的大小比较集合的大小。这是对集合“大小”非常朴素的认识，并没有严格定义，而且推广到无穷集时，这一方法就失效了。为了使无穷集之间也能比“大小”，通过函数定义集合的势（Cardinality）。

定义 2.2.3 (集合的势 Cardinality)**.** 设 X, Y 为集合，

1. X 与 Y **等势**，当且仅当，存在 X 到 Y 的双射，记为 $|X| = |Y|$；
2. Y **优势于** X ，当且仅当，存在 X 到 Y 的单射，记为 $|X| \leq |Y|$；
3. Y **严格优势于** X，当且仅当，存在 X 到 Y 的单射，但不存在 X 到 Y 的双射，记为 $|Y| < |X|$。

命题 2.2.1. 等势具有自反性、对称性和传递性：

1. 自反性：对于任意集合 X，有 $|X| = |X|$。
2. 对称性：如果 $|X| = |Y|$，则 $|Y| = |X|$。
3. 传递性：如果 $|X| = |Y|$ 且 $|Y| = |Z|$，则 $|X| = |Z|$。

命题 2.2.2. 优势关系具有自反性、反对称性和传递性：

1. 自反性：对于任意集合 X，有 $|X| \le |X|$。
2. 反对称性：如果 $|X| \le |Y|$ 且 $|Y| \le |X|$，则 $|X| = |Y|$。
3. 传递性：如果 $|X| \le |Y|$ 且 $|Y| \le |Z|$，则 $|X| \le |Z|$。

定义 2.2.4 (有限集与无限集)**.** 设 X 为集合，

1. 如果 X 与某个自然数 n 等势，则称 X 为**有限集（*Finite Set*）**，记为 $|X| = n$；
2. 如果 X 为空集，则称 X 为**空集（*Empty Set*）**，记为 $|X| = 0$；
3. 如果 X 既不是空集也不是有限集，则称 X 为**无限集（*Infinite Set*）**。
4. 如果 X 与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势，则称 X 为**可数无限集（*Countably Infinite Set*）**

例 2.2.1. 对于常见的数集，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 都是可数无限集，$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$，因为可以找到双射函数

1. 设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$，将 $\mathbb{Z}$ 中的整数按如下方式排列：
   $$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$$
   这样就可以定义双射 $f(n)$ 为上述排列中第 n 个整数
2. 设 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$，将 $\mathbb{Q}$ 中的有理数按如下方式排列：
   $$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3, -3, \cdots$$
   这样就可以定义双射 $g(n)$ 为上述排列中第 n 个有理数

实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数无限集，$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$，可以通过 *Cantor* 对角线论证法证明。

Chapter 3

数系的扩充

3.1 整数