数学物理笔记

数学物理基础与经典数值方法总结

目录

Part I

逻辑学部分

Chapter 1

逻辑学简介

Part II

数学部分

Chapter 2

集合论

2.1 集合公理

Chapter 3

结构与范畴

3.1 数学结构

3.1.1 二元关系

3.1.2 代数结构

3.1.3 序结构

3.1.4 拓扑结构

3.2 范畴论

Chapter 4

数系扩充

自然数系是最基础的数系，通过集合论，已经定义了自然数。自然数上定义加法和乘法两种运算，通过这两种运算的组合，可以定义多项式和多项式方程。

定义 4.0.1 (多项式 Polynomial)**.** 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常量，x 是变量，$n \in \mathbb{N}$ 是自然数，则形如

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的表达式称为一个**多项式**，其中，$a_i, i = 0, \cdots, n$ 称为多项式的**系数**，n 称为多项式的**次数**，当 $a_n \neq 0$ 时，称 a_n 为多项式的**首项系数**。

定义 4.0.2 (多项式方程 Polynomial Equation)**.** 设 $P(x)$ 是一个首项系数不为零的多项式，等式：

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

称为一个 **n-次多项式方程**。

数系扩充的动力源自解多项式方程 4.0.2，从自然数出发可以逐步扩充出整数、有理数、实数和复数。根据代数基本定理，复数是多项式方程的代数闭包，也即任何系数为复数的多项式方程都能在复数域内找到解。从代数角度，数系扩充到复数就足够了。

说明

在复数之后，数系的扩充主要有两条途径：一是引入超实数和超复数，从而构造非标准分析；二是引入四元数和八元数，从而构造更高维的代数结构。不过这些数系都与解多项式方程的关系不大，最后只简单介绍一下四元数系。

4.1 整数

为了解多项式方程：$x + a = 0,\ \forall a \in \mathbb{N}$ 需要引入整数系。

4.2 有理数

为了解多项式方程：$ax + b = 0,\ \forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ 需要引入有理数系。

4.3 实数

为了解多项式方程：$x^2 - 2 = 0$ 需要引入实数系。实数的定义没有那么简单，在历史上曾多次引发争议。现代比较公认的实数构造方法主要有两种：戴德金分割法和柯西列法。这里介绍柯西列法，通过下面这个例子来简单理解这种方法的思想。

例 4.3.1. 函数 $f(x) = x^2 - 2$ 的零点对应多项式方程 $x^2 - 2 = 0$ 的根，通过牛顿迭代法，可以找到一个有理数序列 a_n，使得 $(a_n)^2$ 趋近于 2：

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \tag{4.1}$$

4.4 复数

为了解多项式方程 $x^2 + 1 = 0$ 需要引入复数系。

4.4.1 代数基本定理

4.5 四元数

Chapter 5

抽象代数

抽象代数起源于多项式方程根式解的研究。

Chapter 6

线性代数

线性代数是现代数学物理最基础的“语言”，其重要性不言而喻。

Part III

物理学部分

Chapter 7

质点力学

7.1 质点运动学

Chapter 8

分析力学

Part IV

数值方法部分

Chapter 9

浮点数与误差分析

9.1 浮点数表示