

# 数学物理笔记

数学物理基础与经典数值方法总结



# 目录

<b>I 数学部分</b>	<b>5</b>
<b>1 数理逻辑</b>	<b>7</b>
1.1 逻辑学简介 . . . . .	7
<b>2 集合论</b>	<b>9</b>
2.1 集合公理 . . . . .	9
<b>3 结构与范畴</b>	<b>11</b>
3.1 数学结构 . . . . .	11
3.1.1 二元关系 . . . . .	11
3.1.2 代数结构 . . . . .	11
3.1.3 序结构 . . . . .	11
3.1.4 拓扑结构 . . . . .	11
3.2 范畴论 . . . . .	12
<b>4 数系扩充</b>	<b>13</b>
4.1 整数 . . . . .	14
4.2 有理数 . . . . .	15
4.3 实数 . . . . .	16
4.4 复数 . . . . .	17
4.4.1 代数基本定理 . . . . .	17
4.5 四元数 . . . . .	18
<b>5 抽象代数</b>	<b>19</b>
<b>6 线性代数</b>	<b>21</b>
<b>II 物理学部分</b>	<b>23</b>
<b>7 质点力学</b>	<b>25</b>
7.1 质点运动学 . . . . .	25
<b>8 分析力学</b>	<b>27</b>

<b>III 数值方法部分</b>	<b>29</b>
<b>9 浮点数与误差分析</b>	<b>31</b>
9.1 浮点数表示 . . . . .	31

## Part I

### 数学部分



# Chapter 1

## 数理逻辑

### 1.1 逻辑学简介



## Chapter 2

# 集合论

### 2.1 集合公理



# Chapter 3

## 结构与范畴

### 3.1 数学结构

3.1.1 二元关系

3.1.2 代数结构

3.1.3 序结构

3.1.4 拓扑结构

### 3.2 范畴论

# Chapter 4

## 数系扩充

自然数系是最基础的数系，通过集合论，已经定义了自然数。自然数上定义加法和乘法两种运算，通过这两种运算的组合，可以定义多项式和多项式方程。

**定义 4.0.1** (多项式 Polynomial). 设  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  是常量， $x$  是变量， $n \in \mathbb{N}$  是自然数，则形如

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

的表达式称为一个多项式，其中， $a_i, i = 0, \dots, n$  称为多项式的系数， $n$  称为多项式的次数，当  $a_n \neq 0$  时，称  $a_n$  为多项式的首项系数。

**定义 4.0.2** (多项式方程 Polynomial Equation). 设  $P(x)$  是一个首项系数不为零的多项式，等式：

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (4.1)$$

称为一个  $n$ -次多项式方程。

数系扩充的动力源自解多项式方程 4.1，从自然数出发可以逐步扩充出整数、有理数、实数和复数。根据代数基本定理，复数是多项式方程的代数闭包，也即任何系数为复数的多项式方程都能在复数域内找到解。从代数角度，数系扩充到复数就足够了。

### 说明

在复数之后，数系的扩充主要有两条途径：一是引入超实数和超复数，从而构造非标准分析；二是引入四元数和八元数，从而构造更高维的代数结构。不过这些数系都与解多项式方程的关系不大，最后只简单介绍一下四元数系。

## 4.1 整数

为了解多项式方程:  $x + a = 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{N}$  需要引入整数系。

## 4.2 有理数

为了解多项式方程:  $ax + b = 0, \forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$  需要引入有理数系。

### 4.3 实数

为了解多项式方程:  $x^2 - 2 = 0$  需要引入实数系。实数的定义没有那么简单，在历史上曾多次引发争议。现代比较公认的实数构造方法主要有两种：戴德金分割法和柯西列法。这里介绍柯西列法，通过下面这个例子来简单理解这种方法的思想。

**例 4.3.1.** 函数  $f(x) = x^2 - 2$  的零点对应多项式方程  $x^2 - 2 = 0$  的根，通过牛顿迭代法，可以找到一个有理数序列  $a_n$ ，使得  $(a_n)^2$  趋近于 2：

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad (4.2)$$

## 4.4 复数

为了解多项式方程  $x^2 + 1 = 0$  需要引入复数系。

### 4.4.1 代数基本定理

## 4.5 四元数

## Chapter 5

# 抽象代数

抽象代数起源于多项式方程根式解的研究。



# Chapter 6

## 线性代数

线性代数是现代数学物理最基础的“语言”，其重要性不言而喻。



## Part II

### 物理学部分



# Chapter 7

## 质点力学

### 7.1 质点运动学



Chapter 8

分析力学



# Part III

## 数值方法部分



# Chapter 9

## 浮点数与误差分析

### 9.1 浮点数表示