Background of Navier-Stokes Equations, Projection Method and Finite Volume Method

Li Ruixiang

liruixiang@zju.edu.cn

Contents

1 Phsical Background

Navier-Stokes 方程是流体力学中的动量守恒方程, 简单的说, 单位时间内控制体内动量的变化量等于流入/流出控制体的流体引起的动量变化量加上外力引起的动量变化量, 我们依次考虑各个部分的动量变化, 并使用以下记号:V 表示控制体,S 表示控制体的表面, 法向量 $\mathbf{n}$ 指向外侧.

控制体内动量的变化量

考虑体积微元 $\mathrm{d}V$, 其动量为 $\rho \mathrm{d}V\boldsymbol{u}$, 其中 ρ 为流体密度,$\boldsymbol{u}$ 为流体速度, 则单位时间控制体内内量的变化量为 $\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V$.

流入/流出控制体的流体的动量变化量

单位时间内流入/流出控制体的流体的动量变化量为 $-\int_S \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S$, 其中 $\mathbf{n}$ 为控制体表面的法向量, 负号是因为法向量向外.
利用 Divergence Theorem, 我们可以将面积分转化为体积分, 即

$$\begin{aligned}
(\int_S \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S)_d &= \int_S \rho u_d(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S \\
&= \int_S \rho(u_d\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S \\
&= \int_V \nabla\cdot(\rho u_d\boldsymbol{u})\mathrm{d}V \\
&= \int_V (\rho u_d\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \rho(u\cdot\nabla)u_d)\mathrm{d}V \\
\int_S \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S &= \int_V \rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{1}$$

外力引起的动量变化量

外力包括重力, 粘性力和压力. 其中重力为体积力, 粘性力和压力为表面力. 我们依次考虑各个部分:

Body Force

重力场中, 单位质量流体受到的重力为 $\mathbf{g}$, 则控制体内流体受到的重力为 $\int_V \rho\mathbf{g}\mathrm{d}V$.

Surface Force

τ 为应力张量.

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

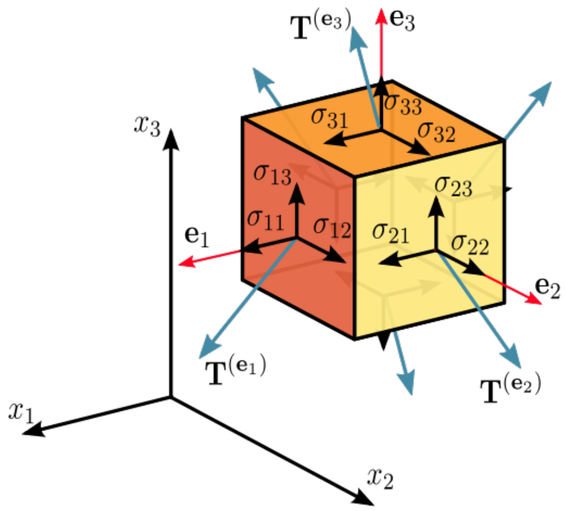

Figure 1: 应力张量示意图, 作用在控制体的表面

则对应的动量变化量为 $\int_S \tau\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$. 利用散度定理转化为体积分, 即 $\int_S \tau\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_V \nabla\cdot\tau\mathrm{d}V$. 由 Stokes Hypothesis, 我们有 $\tau = -(p + \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{u})I + \nu(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T)$, 其中 p 为压力,ν 为粘性系数.

对于不可压流体满足:$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$. 这是因为流入控制体内的流体等于流出控制体内的流体 $\int_S \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = 0$

$$\int_V \nabla\cdot\tau\mathrm{d}V = \int_V(-\nabla p + \nu(\nabla^2\boldsymbol{u} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})))\mathrm{d}V$$

其中 RHS 的最后两项推导利用 Einstein 求和约定,$\tau_{ij} = \delta_{ij}(-p) + \nu(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i})$.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\tau &= \frac{\partial}{\partial x^i}\tau_{ji} = \frac{\partial}{\partial x^i}\tau_{ij} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\delta_{ij}p + \frac{\partial}{\partial x^i}\nu(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^j}p + \nu(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j\partial x^i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^i\partial x^i}) \\
&= -\nabla p + \nu(\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \nabla^2\boldsymbol{u})
\end{aligned}$$

最终我们得到了不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \rho\mathbf{g} - \nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} \\
&\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0
\end{aligned}$$

2 Gepup

2.1 Projection Method

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} - \nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}, \text{ in } \Omega\times(0,+\infty) \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \text{in } \Omega\times(0,+\infty) \end{aligned} \tag{2}$$

现在考虑在空间区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^D$ 内的 Navier-Stokes 方程(2)中, 由于不可压条件是个限制条件, 我们使用投影法将速度分解为无源场和一个梯度场, 从而避免这个限制条件.

2.1.1 Helmholtz Decomposition Theorem

Helmholtz Decomposition Theorem 告诉我们, 有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}$ 上的任意充分光滑向量场 v^* 可以唯一地分解为无源场和无旋场的和, 即 $v^* = v + \nabla\phi$, 其中 $\nabla\cdot v = 0$, 而 ϕ 为标量场. 可以通过求解 Poisson 方程得到

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \nabla\cdot v^* \quad \text{in } \Omega \\ n\cdot\nabla\phi &= \nabla\cdot(v^*-v) \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

2.1.2 Leray-Helmholtz Projection Operator

我们定义 Leray-Helmholtz Projection Operator 为

$$\mathscr{P}v^* = v = v^* - \nabla\phi. \tag{4}$$

当它作用于某个标量的梯度场时, 我们有

$$\mathscr{P}\nabla\phi = 0 \tag{5}$$

此外, 对于无滑移边界条件,$\mathscr{P}$ 与 Δ 算子不可交换, 定义 Laplace-Leray 交换子:

$$[\Delta,\mathscr{P}] = \Delta\mathscr{P} - \mathscr{P}\Delta$$

它满足:

$$[\Delta,\mathscr{P}] = (I-\mathscr{P})\mathcal{B}$$

其中 $\mathcal{B} = [\nabla,\nabla\cdot] = \Delta - \nabla\nabla\cdot$. 即当 Laplace-Leray 交换子作用与一个向量场 $\boldsymbol{u}$ 时, 由于 $\mathcal{B}\boldsymbol{u}$ 仍然为向量场, 所以我们会得到一个标量的梯度场, 如果这个 $\boldsymbol{u}$ 就是流速场, 我们记 Stokes 压强:

$$\nabla p_s = [\Delta,\mathscr{P}]\boldsymbol{u} \tag{6}$$

将投影算子作用于 Navier-Stokes 方程, 我们得到:

$$\frac{\partial \mathscr{P}\boldsymbol{u}}{\partial t} = \mathscr{P}(-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g}) - \mathscr{P}(\nabla p) + \nu\mathscr{P}(\Delta\boldsymbol{u}) \tag{7}$$

现在依次考虑各个部分:

- $\mathscr{P}u = u$, accroding to incompressible condition.
- $\mathscr{P}(-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g}) = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} - \nabla p_c$, accroding to (4).
- $\mathscr{P}(\nabla p) = 0$, accroding to(5).
- $\mathscr{P}(\Delta\boldsymbol{u}) = -[\Delta, \mathscr{P}]\boldsymbol{u} + \Delta(\mathscr{P}u) = -\nabla p_s + \Delta(\mathscr{P}u)$, accroding to(6).

最终我们得到了 Leray-Helmholtz 投影下的 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} - \nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} \tag{8}$$

其中,

$$\nabla p = \nabla p_c + \nu\nabla p_s \tag{9}$$

然而在离散情况下, 投影算子难以满足 $\mathscr{P}$ 的所有性质.

2.2 Gepup for INSE

定义广义高阶投影算子:

$$\mathcal{P}v^* = v = v^* - \nabla\psi \tag{10}$$

其中 $\nabla\cdot v$ 不一定为 0. 满足:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{P} &= \mathcal{B} + \nabla\nabla\cdot\mathcal{P} \\ \mathcal{P}\Delta &= \mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{P}\nabla\nabla\cdot \end{aligned} \tag{11}$$

Laplace 算子和广义高阶投影算子的交换子为:

$$[\Delta, \mathcal{P}] = \Delta\mathcal{P} - \mathcal{P}\Delta = (I - \mathcal{P})\mathcal{B} + [\nabla\nabla\cdot, \mathcal{P}] \tag{12}$$

将广义投影算子作用于 Navier-Stokes 方程, 我们得到:

$$\frac{\partial \mathcal{P}\boldsymbol{u}}{\partial t} = \mathcal{P}(-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g}) + \mathcal{P}(-\nabla p) + \nu\mathcal{P}\Delta(\boldsymbol{u}) \tag{13}$$

现在依次考虑 RHS 的三个部分:

- $\mathcal{P}(-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g}) = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} - \nabla q_c$, accroding to (10).
- $\mathcal{P}(-\nabla p) = 0$, the same to Leray-Helmholtz projection operator$\mathscr{P}$

- Accroding to (12)

$$\begin{aligned}\nu\mathcal{P}\Delta(\boldsymbol{u}) &= -\nu[\Delta,\mathcal{P}]\boldsymbol{u} + \Delta\mathcal{P}\boldsymbol{u} \\ &= \nu(-(I-\mathcal{P})\mathcal{B}\boldsymbol{u} - \nabla\nabla\cdot(\mathcal{P}\boldsymbol{u}) + \mathcal{P}(\nabla\nabla\cdot u) + \Delta(\mathcal{P}\boldsymbol{u}))\end{aligned} \tag{14}$$

  where $(I-\mathcal{P})\mathcal{B}\boldsymbol{u}, \mathcal{P}(\nabla\nabla\cdot u)$ are gradient fields accroding to (10).

最终我们得到了广义投影法的 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial\mathcal{P}\boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} - \nabla q + \nu\Delta(\mathcal{P}\boldsymbol{u}) - \nu\nabla\nabla\cdot(\mathcal{P}\boldsymbol{u}) \tag{15}$$

其中,

$$\begin{aligned}\nabla q &= -\frac{\partial\mathcal{P}\boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} + \nu\Delta(\mathcal{P}\boldsymbol{u}) - \nu\nabla\nabla\cdot(\mathcal{P}\boldsymbol{u}) \\ &= -\frac{\partial\mathcal{P}\boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} + \nu\mathcal{B}\boldsymbol{u} \\ &= -\frac{\partial\mathcal{P}\boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} + \nu\Delta\boldsymbol{u} - \nu\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} \\ &= a^* - \mathcal{P}a - \nu\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{16}$$

第二个等号利用了(11),$a^* = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g} + \nu\Delta\boldsymbol{u},\ a = \frac{\partial\mathcal{P}\boldsymbol{u}}{\partial t}$.
标量 q 可以通过求解 Poisson 方程得到

$$\begin{aligned}\Delta q &= \nabla\cdot\mathcal{P}(-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \mathbf{g}) - \nabla\cdot\mathcal{P}a \quad \text{in } \Omega \\ n\cdot\nabla q &= n\cdot(a^* - \nu\nabla\nabla\cdot u) - n\cdot\mathcal{P}a \quad \text{on } \partial\Omega\end{aligned} \tag{17}$$

考虑无滑移边界条件, 则对流项 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ 在边界上为 0.
定义投影流速 $\boldsymbol{w} = \mathcal{P}\boldsymbol{u}$, 假设其散度满足:

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{w} &= 0 \\ \frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{w}}{\partial t} &= 0\end{aligned} \tag{18}$$

最终得到 INSE 的 Gepup 表述:

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nabla q + \nu\Delta\boldsymbol{w} \quad \text{in } \Omega, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{w} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{u} = \mathscr{P}\boldsymbol{w} \quad \text{in } \Omega, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{22}$$

$$\Delta q = \nabla\cdot(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) \quad \text{in } \Omega, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla q = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{g} + \nu\Delta\boldsymbol{u} - \nu\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{24}$$

其中(21)成立是因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$, 并且 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 只相差一个梯度场.

3 Finite Volume Method

有限体积法是一种数值解偏微分方程的方法, 它将求解区域划分为有限个体积单元, 在每个体积单元上求解方程. 有限体积法的基本思想是将偏微分方程在体积单元上积分, 并利用散度定理体积分转化为面积分, 从而得到离散的方程. 以 $\mathcal{C}_i$ 和 $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}$ 分别表示体积单元和面单元, 以 Gradient 算子 Laplacian 算子为例, 我们有:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h^D}\int_{\mathcal{C}_i}\nabla\phi \mathrm{d}V &= \frac{1}{h^D}\int_{\partial\mathcal{C}_i}\phi\mathbf{n}\mathrm{d}S \\
\frac{1}{h^D}(\int_{\mathcal{C}_i}\nabla\phi \mathrm{d}V)_d &= \frac{1}{h^D}(\int_{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}}\phi\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}e^d}}\phi\mathrm{d}S) \\
\frac{1}{h^D}\int_{\mathcal{C}_i}\nabla\cdot\nabla\phi \mathrm{d}V &= \frac{1}{h^D}\int_{\partial\mathcal{C}_i}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{h^D}\sum_{d=1}^{D}\int_{\mathcal{F}_{i\pm\frac{1}{2}e^d}}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{25}
$$

3.1 Cell Average and Face Average

我们需要将体平均和面平均联系起来, 为此对于标量 ϕ, 定义变上限积分函数:

$$
\Phi^d(\mathbf{x}) := \int_{\xi}^{x_d}\phi(x_1,\ldots,x_{d-1},\eta,x_{d+1},\ldots,x_{\mathrm{D}})\,\mathrm{d}\eta,
$$

不失一般性考虑沿着第一分量方向 x_1 的积分可以表示为:

$$
\begin{aligned}
\varphi_j &:= \Phi^1\left(x_{O,1}+jh,x_2,\ldots,x_{\mathrm{D}}\right); \\
\delta_{\mathrm{i}}\left(x_2,\ldots,x_{\mathrm{D}}\right) &:= \varphi_{i_1+1}-\varphi_{i_1}.
\end{aligned}
$$

δ_i 表示从第 i_1 个 Cell 沿着 x_1 的积分值, 只需在 $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}$ 内对 $(x_2,...,x_D)$ 积分就得到了 ϕ 整个控制体上的积分, 而 ϕ 在 $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}$ 的面积分只需要评估 $\phi|_{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}}$ 的值即可.
至此, 只需要将 φ_i 在 $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}$ 处展开, 即在 $x=x_{O,1}+(i_1+1)h$ 处展开即可. 为了至少有四阶精度, 我们需要至少考虑到 $\varphi_{i_1-1},\varphi_{i_1},\varphi_{i_1+1},\varphi_{i_1+2},\varphi_{i_1+3}$, 即控制体 $\mathcal{C}_{i_1-1},\mathcal{C}_{i_1},\mathcal{C}_{i_1+1},\mathcal{C}_{i_1+2}$.
下面直接给出结果

$$
\left[\begin{array}{c}
\phi \\
h\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\
h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} \\
h^3\frac{\partial^3\phi}{\partial x_1^3}
\end{array}\right]_{x_1=\bar{x}} = \frac{1}{h}\mathbf{T}^{(4)}\left[\begin{array}{c}
\delta_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^1} \\
\delta_{\mathbf{i}} \\
\delta_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}^1} \\
\delta_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^1}
\end{array}\right] + O(h^4),
$$

其中,

$$\mathbf{T}^{(4)}=\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

五阶插值矩阵为:

$$\mathbf{T}^{(5)}=\begin{bmatrix} \frac{47}{60} & \frac{9}{20} & -\frac{13}{60} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{30} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -3 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

3.2 Discretization of Differential Operators

利用以上的结果,

$$\mathbf{G}_d\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}}=\frac{1}{12h}(-\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}^d}+8\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^d}-8\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^d}+\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-2\mathbf{e}^d}) \tag{26}$$

$$\mathbf{D}\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}}=\frac{1}{12h}\sum_d(-\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}^d}+8\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^d}-8\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^d}+\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-2\mathbf{e}^d}) \tag{27}$$

$$\mathbf{L}\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}}=\frac{1}{12h^2}\sum_d(-\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^d}+16\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^d}-30\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}}+16\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^d}-\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-2\mathbf{e}^d}) \tag{28}$$

对于对流项,recall(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^D}\int_{\mathcal{C}_i}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\mathrm{d}V&=\frac{1}{h^D}\int_{\partial\mathcal{C}_i}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\mathbf{n}\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{h^D}\sum_{d=1}^{D}(\int_{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}}u_d\boldsymbol{u}\mathrm{d}S-\int_{\mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}e^d}}u_d\boldsymbol{u}\mathrm{d}S)\end{aligned} \tag{29}$$

即我们需要处理两个标量 ϕ,ψ 的乘积的面积分, 对于体平均和面平均, 有如下的积分公式:

$$\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}}=\phi_{\mathbf{i}}+\frac{h^2}{24}\sum_{d=1}^{\mathbf{D}}\left.\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial x_d^2}\right|_{\mathbf{i}}+O(h^4), \tag{30}$$

$$\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}=\phi_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}+\frac{h^2}{24}\sum_{d'\neq d}\left.\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial x_{d'}^2}\right|_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}+O(h^4). \tag{31}$$

现在, 对于标量 ϕ,ψ 在面 $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}$ 的中心 x_c 处展开,$\boldsymbol{\eta}=\mathbf{x}-\mathbf{x_c}$,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \sum_{|\mathbf{j}|\leq 3}\frac{1}{\mathbf{j}!}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_c\right)^{\mathbf{j}}\phi^{(\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)+O(h^4)\\ &= \sum_{|\mathbf{j}|\leq 3}\frac{1}{\mathbf{j}!}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{j}}\phi^{(\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)+O(h^4)\,,\end{aligned}$$

对于两者的乘积, 丢弃高阶项,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) &= \left(\sum_{j,\mathbf{i}\leq 3}\frac{1}{\mathbf{i}!}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{j}}\phi^{(\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)\right)\left(\sum_{|\mathbf{k}|\leq 3}\frac{1}{\mathbf{k}!}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{k}}\psi^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}_c)\right)+O(h^4)\\ &= \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}|\leq 3}\frac{1}{\mathbf{k}!}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{j}\leq\mathbf{k}}\binom{\mathbf{k}}{\mathbf{j}}\phi^{(\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)\psi^{(\mathbf{k}-\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)+O(h^4),\end{aligned}$$

面平均为:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^{D-1}}\int_{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}}\phi\psi\mathrm{d}S &= \frac{1}{h^{D-1}}\int_{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}|\leq 3}\frac{1}{\mathbf{k}!}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{j}\leq\mathbf{k}}\binom{\mathbf{k}}{\mathbf{j}}\phi^{(\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)\psi^{(\mathbf{k}-\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)\mathrm{d}S+O(h^4)\\ &= \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}|\leq 3}\frac{1}{\mathbf{k}!}\Big(\frac{1}{h^{D-1}}\int_{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}}\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{k}}\mathrm{d}S\Big)\sum_{\mathbf{j},\mathbf{j}\leq\mathbf{k}}\binom{\mathbf{k}}{\mathbf{j}}\phi^{(\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)\psi^{(\mathbf{k}-\mathbf{j})}(\mathbf{x}_c)+O(h^4)\end{aligned}$$

对于 $\int_{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}e^d}}\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{k}}\mathrm{d}S$, 由于其为固定 x_d 分量的超平面, 积分区域和积分的函数 $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{x}-\mathbf{x_c}$ 均关于 $\mathbf{x_c}$ 对称并且 $\boldsymbol{\eta}_d=0$, 所以只有 $\boldsymbol{k}$ 的每个分量全部为偶数并且 $k_d=0$ 时, 积分值不为 0, 即 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}=0;\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{e}^{d'},\boldsymbol{j}=\mathbf{0},\boldsymbol{e}^{\mathbf{d}'},\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{\mathbf{d}'}$. 从而:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^{\mathrm{D}-1}}\int_{\mathcal{F}}\phi\psi\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \phi\psi+\frac{h^2}{24}\sum_{d'\neq d}\left(\phi^{\left(2\mathbf{e}^{d'}\right)}\psi+\psi^{\left(2\mathbf{e}^{d'}\right)}\phi\right)+\frac{h^2}{12}\sum_{d'\neq d}\left(\phi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\psi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\right)+O(h^4)\\ &= \left(\phi+\frac{h^2}{24}\sum_{d'\neq d}\phi\left(2\mathbf{e}^{d'}\right)\right)\left(\psi+\frac{h^2}{24}\sum_{d'\neq d}\psi\left(2\mathbf{e}^{d'}\right)\right)+\frac{h^2}{12}\left(\phi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\psi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\right)+O(h^4)\\ &= \langle\phi\rangle_{1+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}\langle\psi\rangle_{1+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}+\frac{h^2}{12}\left(\phi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\psi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\right)+O(h^4)\end{aligned}$$

对于 $\left(\phi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\psi^{\left(\mathbf{e}^{d'}\right)}\right)$ 只需要对两项进行二阶近似即可, 只需要将 $\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d\pm\mathbf{e}^{d'}$ 的值在 $x\mathbf{x_c}$ 处展开即可.

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{d'}^{\perp}\phi\big|_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} &= \frac{1}{2h}\left(\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d+\mathbf{e}^{d'}}-\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d-\mathbf{e}^{d'}}\right)\\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_{d'}}\bigg|_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}+O(h^2)\,,\end{aligned}$$

最终, 得到了对流项的离散形式:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}\langle \mathbf{uu}\rangle_{\mathbf{i}} &= \frac{1}{h}\sum_{d}\Big(\mathbf{F}\langle u_d,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} - \mathbf{F}\langle u_d,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}\Big)\\
\mathbf{F}\langle u_d,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} &= \langle\phi\rangle_{1+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}\langle\psi\rangle_{1+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} + \frac{h^2}{12}\sum_{d'\neq d}(\mathbf{G}^{\perp}_{d'}\phi\big|_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d})(\mathbf{G}^{\perp}_{d'}\psi\big|_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d})
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Note: 尽管在 $\mathbf{F}\langle u_d,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}$ 只有四阶精度, 但是 $\mathbf{F}\langle u_d,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}$ 和 $\mathbf{F}\langle u_d,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{e}^d}$ 四次项系数之差为 $O(h)$, 故最终离散对流项的精度为四阶.

3.3 Ghost Cell

按照3.1中的处理方法, 假设 $\mathcal{C}_{i_1}$ 是位于边界上的 Cell, 考虑 $\varphi_{i_1-1},\varphi_{i_1},\varphi_{i_1+1},\varphi_{i_1+2}$, 即控制体 $\mathcal{C}_{i_1-2},\mathcal{C}_{i_1-1},\mathcal{C}_{i_1},\mathcal{C}_{i_1+1}$, 而边界面 $\mathcal{F}_{i_1+\frac{1}{2}e^d}$ 的面积分由边界条件直接计算, 最终得到 GhostCell 的外插公式.
Dirichlet 边界条件:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^d} &= \frac{1}{3}\left(-13\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}} + 5\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^d} - \langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-2\mathbf{e}^d}\right) + 4\langle g\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} + O(h^4);\\
\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}^d} &= \frac{1}{3}\left(-70\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}} + 32\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^d} - 7\langle\phi\rangle_{\mathbf{i}-2\mathbf{e}^d}\right) + 16\langle g\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} + O(h^4).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Neumann 边界条件:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^d} &= \frac{1}{10}\left(5\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}} + 9\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^d} - 5\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}-2\mathbf{e}^d} + \langle\psi\rangle_{\mathbf{i}-3\mathbf{e}^d}\right) + \frac{6}{5}h\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial n}\right\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} + O(h^5),\\
\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}+\mathbf{e}^d} &= \frac{1}{10}\left(-75\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}} + 145\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}-\mathbf{e}^d} - 75\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}-2\mathbf{e}^d} + 15\langle\psi\rangle_{\mathbf{i}-3\mathbf{e}^d}\right) + 6h\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial n}\right\rangle_{\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^d} + O(h^5),
\end{aligned}
\tag{34}
$$

3.4 Time Integration

空间半离散后, 得到以下的 ODE:

$$\frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{w}\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle\boldsymbol{g}\rangle - \boldsymbol{D}\langle\boldsymbol{uu}\rangle - \boldsymbol{G}\langle q\rangle + \nu\boldsymbol{L}\langle\boldsymbol{w}\rangle, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{L}\langle q\rangle = \boldsymbol{D}\big(\langle\boldsymbol{g}\rangle - \boldsymbol{D}\langle\boldsymbol{uu}\rangle\big), \tag{36}$$

$$\langle\boldsymbol{u}\rangle = \boldsymbol{P}\langle\boldsymbol{w}\rangle, \tag{37}$$

其中,$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}$ 为离散投影算子.$\nu\boldsymbol{L}\langle\boldsymbol{w}\rangle$ 是关于 $\langle\boldsymbol{w}\rangle$ 的线性算子可以隐式处理, 例如采用如下的半隐半显格式 (ERK-ESDIRK) 就得到 GEPUP-IMEX 算法:
定义:

$$\boldsymbol{X}^{[\mathrm{E}]} := \langle\boldsymbol{g}\rangle - \boldsymbol{D}\langle\boldsymbol{uu}\rangle - \boldsymbol{G}\langle q\rangle;\quad \boldsymbol{X}^{[\mathrm{I}]} := \nu\boldsymbol{L}\langle\boldsymbol{w}\rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{w} \rangle^{(1)} = \langle \boldsymbol{w} \rangle^{n}, \tag{38}$$

$$\begin{cases} \text{for } s = 2, 3, \cdots, n_s, \\ \left(\boldsymbol{I} - \Delta t\, \nu\, \gamma\, L\right) \langle \boldsymbol{w} \rangle^{(s)} \\ = \langle \boldsymbol{w} \rangle^{n} + \Delta t \displaystyle\sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j}^{[\mathrm{E}]} \boldsymbol{X}^{[\mathrm{E}]} \left(\langle \boldsymbol{u} \rangle^{(j)}, t^{(j)} \right) \\ \quad + \Delta t\, \nu \displaystyle\sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j}^{[\mathrm{E}]} \boldsymbol{L} \langle \boldsymbol{w} \rangle^{(j)}, \\ \langle \boldsymbol{u} \rangle^{(s)} = \boldsymbol{P} \langle \boldsymbol{w} \rangle^{(s)}, \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{w} \rangle^{*} = \langle \boldsymbol{w} \rangle^{(n_s)} + \Delta t \sum_{j=1}^{n_s} \left(b_j - a_{n_s,j}^{[\mathrm{E}]} \right) \\ \times \boldsymbol{X}^{[\mathrm{E}]} \left(\langle \boldsymbol{u} \rangle^{(j)}, t^{(j)} \right), \\ \langle \boldsymbol{u} \rangle^{n+1} = \boldsymbol{P} \langle \boldsymbol{w} \rangle^{*}, \\ \langle \boldsymbol{w} \rangle^{n+1} = \langle \boldsymbol{u} \rangle^{n+1}, \end{cases} \tag{40}$$

初始时刻, 投影流速被设置为和流速相等. 在每个 stage, 已知之前阶段的流速 $\langle \boldsymbol{u} \rangle$, 需要:

1. 求解 Possion 方程(36)得到压力 $\langle q \rangle$;
2. 根据(39)在时间上推进投影流速 $\langle \boldsymbol{w} \rangle$;
3. 通过方程(37)计算新的流速 $\langle \boldsymbol{u} \rangle$;