Математический анализ. Модуль 1. Лекции

1 Неопределённые интегралы и их свойства

Определение 1.1. $F(x)$ **первообразная** для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$
$f(x), F(x)$ *определены на промежутке* I

Теорема 1.1. $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, тогда $F(x) + C$ так же первообразная для $f(x)$

Доказательство. Пусть $F(x), G(x)$ – первообразные для $f(x)$
Рассмотрим $F(x) - G(x)$*:*

$$(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

$$F(x) - G(x) = const$$

$$F(x) + C = G(x)$$

□

Определение 1.2. **Интеграл** – совокупность всех первообразных для $f(x)$ на одном промежутке

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Замечание. Любая непрерывная функция на промежутке имеет первообразную на этом промежутке

1.1 Свойства

- $(\int f(x)\,dx)' = f(x) \qquad d(\int f(x)\,dx) = f(x)\,dx$
- $\int dF(x) = F(x) + C$
- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
- $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2 Интегрирование

2.1 Интегрирование подстановкой

Теорема 2.1. **Интегрирование подстановкой**
$x = \phi(t)$ *определена и диффиринцируема на промежутке* I_1
$y = f(x)$ *определенна на промежутке* I_2
$\phi(t) \in I_2 \quad \forall t \in I_1$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ на } I_1 \implies \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C \text{ на } I_2$$

Вывод.

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax)\,d(ax) = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

$$\int f(x+b)\,dx = \int f(x+b)\,d(x+b) = F(x+b) + C$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Пример. $\boxed{\int sin(5x+3)\,dx} = \frac{1}{5}\int sin(5x{+}3)\,d(5x{+}3) = \boxed{-\frac{1}{5}cos(5x+3) + C}$

Пример. $\boxed{\int cos^2 x\,dx} = \int \frac{1}{2}\,(cos2x + 1)\;dx = \frac{1}{2}\left(\int cos(2x)\,dx + \int dx\right) =$
$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sin2x + x\right) + C}$

2.2 Интегрирование заменой переменной

Теорема 2.2. Интегрирование заменой переменной
$x = \phi(t)$ определена на промежутке I_1 и однозначно отображается на I_2
$\phi'(t) \neq 0 \qquad \phi(t) \in I_2 \quad \forall t \in I_1$
$y = f(x)$ определена на I_2

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(t) + C \implies \int f(x)\,dx = F(\phi^{-1}(x)) + C$$

Вывод.

$$sinx\,dx = -d(cosx) \qquad cosx\,dx = d(sinx)$$

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2) \qquad x^2\,dx = \frac{1}{3}\,d(x^3)$$

$$e^x\,dx = d(e^x)$$

$$\frac{dx}{cos^2x} = d(tgx) \qquad \frac{dx}{sin^2x} = -d(ctgx)$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(arcsinx)$$

$$\int tgx\,dx = -ln|cosx| + C \qquad \int ctgx\,dx = ln|sinx| + C$$

$$\int \frac{dx}{sinx} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{cosx} = ln\left|tg\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + C$$

Пример. $\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx} = \begin{bmatrix} x = asint \\ dx = acost\,dt \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int \sqrt{a^2 - a^2sin^2t} \cdot acost\,dt =$
$a^2 \int cos^2t\,dt = \boxed{a^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sin2t + t\right) + C}$

2.3 Интегрирование по частям

Теорема 2.3. Интегрирование по частям
u, v диффиринцируемы на промежутке I
$u'v$ имеет первообразную на I

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Доказательство. $(uv)' = u'v + uv'$

$$d(uv) = (uv)'\,dx = (u'v + uv')\,dx = u'v\,dx + uv'\,dx = v\,du + u\,dv$$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$uv - \int v\,du$$

□

Пример. $\boxed{\int (3x+5)e^{2x}\,dx} = \begin{bmatrix} u = 3x+5 & du = 3\,dx \\ dv = e^{2x}\,dx & v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} =$
$(3x+5)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{3}{2}e^{2x}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}(3x+5)e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C}$