

Математический анализ. Модуль 2. Лекции

1 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Рассмотрим $y = f(x)$ определённую в $S(x_0)$. Пусть x – произвольная точка из $S(x_0)$. Обозначим:

- Δx – приращение аргумента

$$x = x_0 + \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = x - x_0$$

- Δy – приращение функции

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если предел *конечен*, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную. Если предел *бесконечен*, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет бесконечную производную.

Дифференцирование – процесс получения производной.

Пример.

$$\begin{aligned} y &= e^x, D_f = \mathbb{R} \\ x &= x_0 + \Delta x, \forall x \in D_f \\ \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1) \\ y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \Delta x}{\Delta x} = e^{x_0} \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}
 y &= \sin(x), D_f = \mathbb{R} \\
 x &= x_0 + \Delta x, \forall x \in D_f \\
 \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = \\
 &= 2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \\
 y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0
 \end{aligned}$$

1.1 Односторонние производные

Определение 2. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 справа или правосторонней производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа.

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 3. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 слева или левосторонней производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю слева.

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Теорема 1. О существовании производной функции в точке. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную тогда и только тогда, когда она имеет производные и справа, и слева, и они равны между собой.

$$y'(x_0) = y'_+(x_0) = y'_-(x_0)$$

Пример.

$$\left. \begin{aligned} y'_+(0) &= 1 \\ y'_-(0) &= -1 \end{aligned} \right\} \text{ — т.к. производные конечные, но различные, то } x_0 = 0 \text{ называется точкой излома}$$

Геометрический смысл: \nexists касательной к функции в точке излома.

Пример.

$$y = x^{\frac{1}{3}}, z_0 = 0$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

1.2 Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Пусть $f(x)$ определена в $S(x_0)$. Обозначим:

- $f(x_0) = y_0, M(x_0, y_0)$
- Δx – приращение функции
- $x = x_0 + \Delta x$
- $N(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$
- MN - секущая

При $\Delta x \rightarrow 0$ точка N движется вдоль графика функции $y = f(x)$, а секущая MN вращается вдоль графика.

В пределе $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ секущая MN становится *касательной*.

Определение 4. Если существует предельное секущей MN, когда точка N перемещается вдоль графика функции к точке M, это положение называется *касательной* к графику функции в точке M.

$$\Delta MNK : \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha_0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} y'(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0)}$$

где α – угол между секущей и положительным направлением оси OX, а α_0 – угол между касательной и положительным направлением оси OX.

С другой стороны, прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

где k – тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси OX.

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0) = k$$

Рассмотрим $\forall P(x, y)$ на касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}\triangle MPK : \operatorname{tg} \alpha &= \frac{PK}{MK} \\ \operatorname{tg} \alpha_0 &= \frac{y - y_0}{x - x_0} \\ y'(x_0) &= \operatorname{tg} \alpha_0 \\ y'(x_0) &= \frac{y - y_0}{x - x_0}\end{aligned}$$

Получаем:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

– уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$

Выводы:

1. Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ох или угловому коэффициенту касательной.

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0 = k$$

2. Механический смысл производной функции $s = f(t)$ в точке t_0 равна мгновенной скорости в момент t_0

$$V(t_0) = s'(t_0)$$

Определение 5. *Нормалью* к графику функции $y = f(x)$ называется прямая, перпендикулярная касательной к графику функции в данной точке.

$$\begin{aligned}l_1 : y_1 &= k_1 x + b_1 \\ l_2 : y_2 &= k_2 x + b_2 \\ l_1 \perp l_2 &\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y - y_0 &= y'(x)(x - x_0) \\ k_1 = y'(x) &\Rightarrow k_2 = -\frac{1}{y'(x)} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x)}(x - x_0)$$

Замечание. Касательная к графику функции существует не в любой точке (точка излома и точка заострения).

Определение 6. Кривая, имеющая касательную в любой точке рассматриваемого промежутка, называется *гладкой*.

Следствие. Если $y'(x_0) = \infty$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 , параллельно оси ординат и имеет вид $x = x_0$ (нормаль имеет вид $y = y_0$).

Если $y'(x_0) = 0$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = y_0$ (нормаль имеет вид $x = x_0$).

Определение 7. Углом между двумя пересекающимися кривыми в точке с абсиссой x_0 называется угол между касательными, проведёнными в этой точке.

Следствие.

$$\begin{array}{l} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f_1 \cap f_2 = M_0(x_0, y_0) \\ y_1 = k_1x + b_1 \\ y_2 = k_2x + b_2 \end{array}$$

φ – угол между f_1, f_2 $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1 = f_1'(x_0)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2 = f_2'(x_0)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0) f_1'(x_0)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0) f_1'(x_0)} \right|$$

2 Дифференцируемость функции в точке

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0 , если существует константа A такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x > 0$.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости

функции в точке.

Функция $y = f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство. .

Необходимость.

Дано: $y = f(x)$ – дифференцируема в точке x_0 .

Доказать: $\exists y'(x)$ – конечное число

Т.к. $y = f(x)$, то $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = \\ &= A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= y'(x_0) \text{ – по определению} \\ \Rightarrow y'(x_0) &= A = \text{const} \Rightarrow \exists y'(x_0) \text{ – конечное число.} \end{aligned}$$

Достаточность.

Дано: $\exists y'(x_0)$ – конечное число.

Доказать: $y = f(x)$ – дифференцируема в этой точке.

Доказательство:

Т.к. $\exists y'(x)$, то по определению производной

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

По теореме "О связи функции, её предела и некоторой бесконечно малой функции":

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $A = y'(x_0) \Rightarrow y = f(x)$ дифференцируема в данной точке. \square

Следствие. Формула, выражающая дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид:

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$

Теорема 3. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.

Если функция дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Т.к. $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то $\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $y'(x_0) = \text{const}$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

Вычислим:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) \\ &= y'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \\ &= y'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

По определению непрерывной функции $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0 . \square

Замечание. Если функция непрерывна, она не обязательно дифференцируема!

2.1 Правила дифференцирования

Теорема 4. *Арифметические операции.*

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x . Тогда в этой точке дифференцируемая их сумма, разность, произведение, частное (при условии знаменателя не равного нулю), справедливо равенство:

$$\begin{aligned}(u \pm v)' &= u' \pm v' \\ (u \cdot v)' &= u'v + v'u \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2}\end{aligned}$$

Доказательство. Распишем приращения каждой из функций:

$$\begin{cases} \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(\Delta x + x) = \Delta u + u(x) \\ v(\Delta x + x) = \Delta v + v(x) \end{cases}$$

\square

Доказательство. Пусть $y = uv$, тогда:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (\Delta u + u(x))(\Delta v + v(x)) - u(x)v(x) = \Delta u\Delta v + \Delta uv(x) + \\ &\quad + \Delta vu(x) + u(x)v(x) = \\ &= \Delta u\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta vu(x).\end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\
 &= \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u}_0 \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} + v(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)} + u(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} = \\
 &= v(x)u'(x) + v'(x)u(x) + v'(x) \cdot 0 = \\
 &= \boxed{v(x)u'(x) + u(x)v'(x)}
 \end{aligned}$$

Т.к. функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x , то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\Rightarrow u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны в точке $x \Rightarrow$ по определению непрерывности функции:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0 \end{cases}$$

□

Доказательство. Пусть $y = \frac{u}{v}$, тогда:

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \\
 &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\
 &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\
 &= \frac{(u(x) + \Delta u)v(x) - u(x)(v(x) + \Delta v)}{(\Delta v + v(x))v(x)} = \\
 &= \frac{u(x) + \Delta uv(x) - u(x)v(x) - u(x)\Delta v}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\
 &= \frac{\Delta uv(x) - \Delta vu(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}
 \end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} - v(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\
 &= \frac{v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) - v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \\
 &= \boxed{\frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}}
 \end{aligned}$$

Для доказательства использовали:

- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$
- т.к $v(x)$ – дифференцируема, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности $v(x)$ – непрерывна, \Rightarrow по определению непрерывности $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$

□

Теорема 5. Производная от постоянной равна нулю.

$$(c)' = 0, \quad c = \text{const}$$

Следствие. Константу можно выносить за знак производной.

$$(c \cdot f)' = c \cdot f', \quad c = \text{const}$$

Следствие. Производная функции $y = \frac{1}{v(x)}$ имеет вид:

$$\left(\frac{1}{v(x)} \right)' = -\frac{1}{v^2(x)} v'(x)$$

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале*, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Теорема 6. Производная сложной функции.

Пусть функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке $x = a$.

$$F'(x)|_{x=a} = (f(g(x)))'|_{x=a} = f'_u(b) \cdot g'_x(a)$$

Доказательство. Т.к. функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по определению \Rightarrow

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0$. Т.к. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке b , то по определению дифференцируемости \Rightarrow

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u \quad (2)$$

где $\beta(\Delta u)$ – б.м.ф при $\Delta u \rightarrow 0$.

Подставим (1) в (2). Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(b) \cdot (g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) + \beta(\Delta u)(g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = \\ &= f'(b) \cdot g'(a)\Delta x + \Delta x(f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)) = \Delta F \end{aligned}$$

Обозначим: $\gamma(\Delta x) = f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$. В итоге получаем $\Delta F = f'(b)g'(a)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x$.

$f(b)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0$ (как производная постоянной на б.м.ф.). Т.к. $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = a \Rightarrow$ по определению непрерывности $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ или при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta u \rightarrow 0$. $g'(a)\beta(\Delta u)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0(\dots)$. $\beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0$ (как производная двую б.м.ф). Следовательно, $\gamma(x)$ – б.м.ф при $x \rightarrow 0$ как сумма конечного числа б.м.ф.

Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(b)g'(a) + \gamma(\Delta x)) = f(b)g'(a) + 0 = f'(b)g'(a).$$

□

Теорема 7. Производная обратной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = 0$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)$ и пусть для неё существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $b = f(a)$. Тогда существует производная обратной функции и она равна:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. Т.к. функция $x = g(y)$ однозначно определена, то соответственно при $\Delta y \neq 0, \Delta x \neq 0$. Т.к. функция $x = g(y)$ непрерывна

в соответствующей точке b , то $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$ или $\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} g'(b) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)} \end{aligned}$$

□

Пример.

$$\begin{aligned} y &= \arcsin(x), \quad x = \sin(y), \quad y' = \frac{1}{x'} \\ y' &= (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ x' &= \cos(y) \\ \cos^2(y) + \sin^2(y) &= 1 \\ \cos^2(y) &= 1 - \sin^2(y) \\ \cos(y) &= \sqrt{1 - \sin^2(y)} \\ y &= \arcsin(x) \\ D_f &= [-1, 1], E_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

2.2 Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b) . Тогда $\forall x \in (a, b)$ существует производная $y' = f'(x)$.

Функция:

$y'' = (y')' = f''(x)$ называется *производной второго порядка* или *второй производной*.

Определение 10. Производной n -ого порядка или n -производной функции $y = f(x)$ называется производная от $(n - 1)$ -ой производной функции $y = f(x)$.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

$C[a, b]$ – множество непрерывных функций на $[a, b]$

$C^1[a, b]$ – множество функций непрерывных вместе со своей производной на $[a, b]$ или *непрерывно-дифференцируемых* функций.

Определение 11. Производная порядка выше первого называется *производной высшего порядка*.

2.3 Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Тогда по определению дифференцируемой функции приращение:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \rightarrow 0$. Если $f'(x_0) \neq 0$, то $f'(x_0)\Delta x$ – имеет один порядок малости, то $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – б.м.ф. более высокого порядка малости, чем $f'(x_0)\Delta x$. Тогда по теореме о сумме б.м.ф. разного порядка малости $\Rightarrow \Delta y \sim f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$. По определению главной части $\Rightarrow f'(x_0)\Delta x$ – главная часть равенства (1) приращения функции Δy .

Определение 12. Дифференциалом функции $y = f(x_0)$ называется главная часть приращения функции Δy или первое слагаемое в равенстве (1).

$$dy = f'(x_0)\Delta x \quad (2)$$

Если $f'(x_0) = 0$, то $dy = 0$, но $f'(x_0)\Delta x$ уже не является главной частью приращения функции Δy .

Пусть $y = x$. Тогда по определению дифференциала получится $\Rightarrow dy = (x)'\Delta x = 1\Delta x$. С другой стороны, $y = x \Rightarrow dx = \Delta x$. Отсюда получаем вывод, что дифференциал независимой переменной равен её приращению.

Подставляем $\Delta x = dx$ в (2) \Rightarrow

$$\boxed{dy = f'(x_0)dx} \quad (3)$$

Если $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , тогда:

$$\forall x \in (a, b) : \boxed{dy = f'(x)dx} \quad (4)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}} \quad (5)$$

Вывод: производная функции представима в виде отношения дифференциалов функции и независимой переменной.

2.4 Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке.

$M(x_0, y_0), \quad M(x, y), \quad \Delta x$ – приращение аргумента

$$MK = \Delta y, \quad M_0K = \Delta x$$

$$PK = dy$$

$$dy = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \rightarrow 0$

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной

$$y - y_0 = \Delta y$$

$$f'(x_0)(x - x_0) - f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx = dy$$

$$dy = \Delta y$$

2.5 Инвариантность формы первого дифференциала

Формула первого дифференциала

$$dy = f'(x)dx \quad (3)$$

x – независимая переменная.

Докажем, что формула (3) верна и в том случае, когда x – функция от некоторой другой переменной.

Теорема 8. *Инвариантность формы записи первого дифференциала.* Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией другого аргумента.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$. Тогда можно задать сложную функцию:

$$F(t) = y = f(\varphi(t))$$

По определению дифференциала функции:

$$dy = F'(t)dt \quad (6)$$

По теореме о производной сложной функции:

$$F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t) \quad (7)$$

Подставим (7) в (6):

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt \quad (8)$$

По определению дифференциала функции $dx = \varphi'(t)dt$. Подставим (9) в (8):

$$dy = f'(x)dx$$

Получили формулу (3). □

2.6 Дифференциалы высшего порядка

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b) , тогда $\forall x \in (a, b) \Rightarrow dy = f'(x)dx$. Дифференциал – это функция:

$$dy = y'(x)dx$$

Вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка называется дифференциал от первого дифференциала.

$$d^2y = d(dy)$$

Определение 13. n -ым дифференциалом или дифференциалом n -ого порядка называется дифференциал от дифференциала $n - 1$ порядка.

$$d^n y = d(d^{n-1}y), \quad n = 2, 3, \dots$$

Следствие. Свойством инвариантности обладает только первый дифференциал

2.7 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 9. Теорема Ферма или теорема о нулях производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и во внутренней точке C этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = c$ принимает наибольшее значение на промежутке X . Тогда $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq f(c)$. Дадим приращение Δx точке $x = c$. Тогда $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Пусть

$$\exists f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \Delta x > 0, \Delta x \rightarrow 0+, x \rightarrow c+$$

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+} \right) \leq 0$$

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{-} \right) \geq 0$$

По теореме о существовании производной функции в точке:

$$f'_+(c) = -f'_-(c) = 0$$

□

Геометрический смысл

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $M(c, f(c))$ параллельна оси абсцисс. $f(c)$ – наибольшее значение функции.

Теорема 10. *Теорема Ролля.* Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке (a, b)
2. Дифференцируема на интервале (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b) , то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Возможны два случая:

1. Наибольшее и наименьшее значение достигаются на границе, т.е. в точке a и в точке b . Это означает, что $m = M$, где m – наименьшее значение, а M – наибольшее. Из этого следует, что функция $y = f(x) = \text{const}$ на (a, b) . Соответственно $\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$
2. Когда наибольшее или наименьшее значение достигаются во внутренней точке (a, b) . Тогда для функции $y = f(x)$ справедлива теорема Ферма, согласно которой $\exists c \in (a, b), f'(c) = 0$.

□

Следствие. Между двумя нулями функции существует хотя бы один нуль производной.

Теорема 11. *Теорема Лагранжа.*

Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных функций. Существует конечная производная функции $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

следовательно по необходимому и достаточному условию дифференцируемости будет верно $F(x)$ – дифференцируема на (a, b) . Покажем, что $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$\begin{aligned} F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

Значит функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда по теореме Ролля $\exists c \in (a, b), F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

Геометрический смысл

$$A(a, f(a)), \quad B(b, f(b))$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha$$

Теорема 12. Теорема Коши.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) f'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(a) - \varphi(b)}(\varphi(x) - \varphi(a))$$

□