Математический анализ. Модуль 1. Лекции

1 Основы математического анализа

Математический анализ - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

1.1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

Определение 1.1. Высказывание - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Пример. $2 + 3 = 5$ - истинно, $3 < 0$ - ложно

1.1.1 Логические символы

- $\wedge$ - конъюнкция (логическое "И")
- $\vee$ - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")
- $\implies$ - импликация ("если A то B")
- $\iff$ - эквивалетность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

- $\exists$ - существует
- $\nexists$ - не существует
- $!\exists$ - существует единствуенный элемент
- $\forall$ - для каждого

1.2 Теория множеств

Определение 1.2. Множество - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

1.2.1 Символы теории множеств

- $\in$ - принадлежит
- $\notin$ - не принадлежит
- $\subset$ - включает
- $\subseteq$ - включает, возможно равенство
- $\equiv$ - тожденственное равенство (для любого значения переменной)
- $\emptyset$ - пустое множество

1.2.2 Операции со множествами

- $\cup$ - объединение множеств
- $\cap$ - пересечение множеств

Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} A \cap B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Определение 1.3. Подмножество - множество A называется подмножеством B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Определение 1.4. Универсальное множество - такое множество, подномножествами которого являются все рассматриваемые множества.

1.2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

1.2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2} \ldots\}$ - множество иррациональных чисел
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ - множество действительных чисел

Замечание. Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Промежутки

Определение 1.5. Промежуток - подножество X множества $\mathbb{Q}$, где $\forall x_1, x_2 \in X$ этому множеству принадлежат все x, где $x_1 < x < x_2$.

1.2.5 Виды промежутков

1. Отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2. Интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. Полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

1.2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, δ и ϵ - малые положительные величины

Определение 1.6. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержаший эту точку

Определение 1.7. δ - окрестностью $(S(x_0, \delta)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2δ.

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 1.8. ε - окрестностью $(S(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε.

$$S(x_0; \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

Определение 1.9. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 1.10. Окрестностью $-\infty$ называется любой интеграл вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 1.11. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

2 Числовая последовательность

Определение 2.1. **Числовая последовательность** - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой $\forall n \in \mathbb{N}$ можно записать соответствующий элемент последовательности.

Замечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример.

$$1, -1, 1, -1, 1 \ldots$$

Число элементов бесконечно

- Значенией последовательности два

Пример.

$$x_n = (-1)^{n+1}$$
$$2, 2, 2, 2, 2 \ldots$$

Число элементов бесконечно

- Значенией последовательности одно

Пример.

$$x_n = 2 * 1^n$$
$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 4, 5, 5 \ldots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *убывающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

Пример. $1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1 \ldots$

Постоянная последовательность

Пример. $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1 \ldots$

2.1 Предел последовательности

Определение 2.2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ϵ найдется натуральное число $N(\epsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\epsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \epsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \quad \iff \quad (\forall\epsilon > 0)(\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\epsilon)) \implies |x_n - a| < \epsilon.$$

'

Замечание. Т.е. начиная с номера $N(\epsilon)+1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ϵ-окрестность точки a.

2.1.1 Геометрический смысл

$$|x_n - a| < \epsilon$$
$$-\epsilon < x_n - a < \epsilon$$
$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$
$$\forall n > N(\epsilon)$$

Какой бы малый ϵ мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности $\{x_n\}$ попадают в ϵ-окрестность точки a, причем чем $\epsilon \downarrow$, тем $N(\epsilon) \uparrow$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть $\epsilon = 0.3$, $x_n \in (a-\epsilon; a+\epsilon)$, т.е. $(-0.3; 0.3)$
Получается два элемента $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\implies N(\epsilon) = 2$$
$$N(\epsilon) + 1 = 3$$
$$x_3., x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

Определение 2.3. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Определение 2.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу (сверху)*, если $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ $(x_n \leq M)$

Определение 2.5. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 2.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\epsilon > 0$ $\exists$ свой порядковый номер $N(\epsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\epsilon)$ и $m \geq N(\epsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \quad \forall n \geq N(\epsilon) \quad \forall m \geq N(\epsilon) \implies |x_n - x_m| < \epsilon$$

Теорема 2.1. *Критерий Коши существования предела последовательности*
Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} \text{ - сходится} \iff \{x_n\} \text{ - фундаментальная.}$$

2.2 Свойства сходящихся последовательность

Теорема 2.2. *О существовании единственности предела последовательности*
Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Аналитическое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n\to\infty} = a$$
$$\lim_{n\to\infty} = b$$
$$a \neq b$$

$$\lim_{n\to\infty} = a \iff (\forall \epsilon_1 > 0)(\exists N_1(\epsilon_1) \in N)(\forall n > N_1(\epsilon_1) \implies |x_n - a| < \epsilon_1) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} = b \iff (\forall \epsilon_2 > 0)(\exists N_2(\epsilon_2) \in N)(\forall n > N_2(\epsilon_2) \implies |x_n - b| < \epsilon_2) \tag{2}$$

Выберем $N = max\{N_1(\epsilon_1), N_2(\epsilon_2)\}$.
Пусть

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

$$3\epsilon = |b-a| = |b-a+x_n-x_n| =$$
$$= |(x_n-a)-(x_n-b)| \leq |x_n-a| + |x_n-b| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\epsilon$$
$$3\epsilon < 2\epsilon$$

Противоречие. Значит, предоположение не является верным $\implies$ последовательность x_n имеет единственный предел. □

Доказательство. Геометрическое доказательство
Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности x_n в две непересекающиеся окрестности.
□

Теорема 2.3. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность *ограничена.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\implies \lim_{n\to\infty} = a \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\epsilon) \implies |x_n - a| < \epsilon).$$

Выберем в качестве $M = max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|, |a-\epsilon|, |a+\epsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ - это и означает, что последовательность x_n - ограниченная. □

Теорема 2.4. *Признак сходимости Вейерштрасса.*
Ограниченная монотонная последовательность сходится.

2.2.1 Предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Теорема 2.5. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ имеет предел равный e.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

3 Предел функции

Определение 3.1. Окрестностью, из которой исключена точка x_0 называется *проколотой окрестностью.*

$$\mathring{S}(x_0; \delta) = S(x_0; \delta) \setminus x_0$$

Определение 3.2. *Определение функции по Коши* или *на языке* ϵ *и* δ
.
Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall \epsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ϵ такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \epsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies |f(x) - a| < \epsilon)$$

Эквивалентные записи определения

$$\begin{gathered} \ldots \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies \ldots \\ \ldots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \epsilon \implies \ldots \\ \ldots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \implies \ldots \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \ldots \implies |f(x) - a| < \epsilon \\ \ldots \implies f(x) \in \mathring{S}(a, \epsilon) \end{gathered}$$

Геометрический смысл предела функции

Если для $\forall \mathring{S}(a; \epsilon)$ найдется $\mathring{S}(x_0; \delta)$, то соответствующее значение функции лежат в $\mathring{S}(a; \epsilon)$ (полоса 2ϵ):

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies |f(x_1) - a| < \epsilon$$

Определение 3.3. *Определение предела функции по Гейне* или *на языке последовательностей.*
Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательнсти x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x\to x_0} = a \iff (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a)$$

Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Для любых точек x, достаточно близких к точке x_0 (на языке математики $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$) соответствующие значения $f(x_n)$ достаточно близко расположены к a (на языке математики - $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$)

Теорема 3.1. Определение предела функции по Коши и по Гейне *эквивалентны.*

3.1 Ограниченная функция

Определение 3.4. Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента x, если $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \le M$.

Если $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной.*

Определение 3.5. Функция называется **локально ограниченной** при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

3.2 Основные теоремы о пределах

Теорема 3.2. *О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.*
Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{matrix} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{matrix} \qquad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Выберем $M = max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$

$$|f(x)| \le M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, a)$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 3.3. *О единственности предела функции.*
Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что функция имеет более одного предела, например 2 - a и b. Тогда:

$$\lim_{x \to x_0} = a \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} = b \tag{2}$$

$$a \neq b, \text{ пусть } b > a$$

$$(1) \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \implies |f(x) - a| < \varepsilon_1)$$
$$(2) \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \implies |f(x) - b| < \varepsilon_2)$$

Распишем:

$$(1) \implies a - \varepsilon_1 < f(x) < a + \varepsilon_1, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1)$$
$$(2) \implies b - \varepsilon_2 < f(x) < b + \varepsilon_2, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2)$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ будет верно (1) и (2) одновременно.

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{b-a}{2}$:

$$(1) \implies f(x) < a + \varepsilon_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$
$$(2) \implies f(x) > b - \varepsilon_2 = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$
$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Мы получили противоречие. Это означает, что предположение не является верным. Функция имеет единственный предел. □

Теорема 3.4. *О сохранении функией знака своего предела*
Если $\lim_{x \to x_0} = a \neq 0$, то $\exists \mathring{S}(x_0, \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет

знак своего предела.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0 \to \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x\to x_0} = a \iff (\forall\varepsilon = a)(\exists\delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.

Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon = -a)(\exists\delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.

Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ □

Вывод. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 и знакопостояна в $\mathring{S}(x_0, \delta)$, тогда её предел не может иметь с ней противоположные знак.

Теорема 3.5. *О предельном переходе в неравенстве.*
Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$.
Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, соответственно и функция $F(X)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из предыдущей теоремы $\implies \lim_{x\to x_0} F(x)$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \leq 0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$\square$

Пример. Пусть $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ и $x_0 = 0$.

$$\begin{gathered}\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \qquad 0 < x^2 \\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) \\ \lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0} g(x)\end{gathered}$$

В теореме знак **строгий** переходит в **нестрогий**!

Теорема 3.6. *О пределе промежуточной функции.*
Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta)$ верно неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Тогда $\lim_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \implies |g(x) - a| < \varepsilon) \tag{2}$$

Выберем $\delta_0 = min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \le h(x) \le g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta_0)$.

$$\begin{gathered}(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \\ (2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \implies a - \varepsilon_1 < f(x) \le h(x) \le g(x) < a + \varepsilon_2 \\ \implies \forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta_0) \qquad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon\end{gathered}$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0 \implies |h(x) - a| < \varepsilon)$$
$$\implies \text{по определению предела}$$
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = a$$

□

Теорема 3.7. *О пределе сложной функции.*
Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a, то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a, равный C, тода сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0, равный C.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = a \\ \lim_{y \to a} \varphi(y) = C \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y \to a} \varphi(y) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \mathring{S}(a, \delta_1) \implies |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - a| < \delta_1 \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = c$$

□

4 Бесконечно малые функции

Определение 4.1. Функция называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен 0. Кратко - **б.м.ф.** или **б.м.в.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| < \varepsilon)$$

Замечание. Стремление аргумента может быть *любое*, главное, чтобы предел был равен нулю.

Бесконечно малые функции обозначаются $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \dots$

Пример.

$$y = x - 2$$
$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

$y = x - 2$ при $x \to 2$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin(x)$$
$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

$y = \sin(x)$ при $x \to 0$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin(\frac{1}{x})$$
$$\lim_{x \to \infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

$y = \sin(\frac{1}{x})$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой.

4.1 Свойства бесконечно малых функций

Теорема 4.1. *О сумме конечного числа бесконечно малых функций.* Конечная сумма бесконечно малых функции есть бесконечно малая функция.

Доказательство. Пусть дано конечное число бесконечно малых функций, например две: $\alpha(x), \beta(x)$. Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$$

Нужно доказать, что:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \iff$$

$$(\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0 \iff$$

$$(\forall \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \tag{2}$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (1) и (2) верны одновременно. Получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$
$$\implies |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon)$$

Тогда по определнию бесконечно малой функции:

$$\lim_{x\to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

□

Теорема 4.2. *О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную.*
Произведение бесконечно малой функции на локальной ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

$$\iff (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \tag{1}$$

$$M \in \mathbb{R}, M > 0$$

$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \implies |f(x)| < M \tag{2}$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies$$
$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

Пример.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Т.к. $\sin(x)$, при $x \to \infty$ является локально ограниченной $\sin(x) \leq 1$.

Теорема 4.3. *О связи функции, её предела и бесконечно малой.* Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) - \text{б.м.ф при } x \to x_0$$

Доказательство. *Необходимость.*
Дано:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Достаточность.
Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

□

Вывод. Т.к. любая бесконечно малая функция локально ограничена, то произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Вывод. Произведение бесконечно малой функции на константу есть величина бесконечно малая.

5 Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0.

Теорема 5.1. Предел суммы (разности) двух функций, имеющих конечные пределы равен сумме (разности) пределов.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 5.2. *О пределе отношения функций.*
Предел отношения двух функций, имеющих конечный предел, равен частному их пределов при условии, что предел в знаменателе отличен от нуля.

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}, \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Теорема 5.3. *О пределе произведения функций.*
Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \tag{2}$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \implies f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф.}$$
$$(2) \implies f(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) \text{ - б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a + \alpha(x))(b + \beta(x)) \\ &= ab + \underbrace{a \cdot \beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\gamma(x)} \\ &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы 15:

$$\begin{aligned} a \cdot \beta(x) &= \text{б.м.ф. при } x \to 0 \\ b \cdot \alpha(x) &= \text{б.м.ф. при } x \to 0 \\ \alpha(x) \cdot \beta(x) &= \text{б.м.ф. при } x \to 0 \end{aligned}$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x \to 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) \\ &= \lim_{x \to x_0} ab + \lim_{x \to x_0} \gamma(x) \\ &= ab + 0 \\ &= ab \end{aligned}$$

□

Вывод.

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

6 Односторонние пределы

Определение 6.1. Число A_1 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 **слева**, если:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = A_1 \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \implies |f(x)-A_1| < \varepsilon)$$

Определение 6.2. Число A_2 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 **справа**, если:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = A_2 \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \implies |f(x)-A_2| < \varepsilon)$$

Пределы справа и слева называют *односторонними пределами.*

Теорема 6.1. *О существовании предела функции в точке.*
Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существуют пределы справа и слева и они равны между собой.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

6.1 Пределы на бесконечности

Определение 6.3. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где N - большое число, $N > 0, N \in \mathbb{R}$.

Определение 6.4. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N) \implies |f(x)-a| < \varepsilon)$$

где N - большое число, $N > 0, N \in \mathbb{R}$.

Замечание.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \iff$$
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \iff$$
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N) \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \iff$$
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x \in |x| > N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

6.2 Бесконечные пределы

Определение 6.5. Функция $y = f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| > M)$$

где M - большое число, $M > 0, M \in \mathbb{R}$, а δ - малое число.

Замечание.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies f(x) > M)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies f(x) < -M)$$

Пример.

$$y = \operatorname{arctg}(x), \qquad x \to \infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Пример.

$$y = \ln(x), \qquad x \to 0$$
$$\lim_{x\to0-} = \nexists$$
$$\lim_{x\to0+} = -\infty$$

Пример.

$$y = \sqrt{-x}, \qquad x \to 0$$
$$\lim_{x\to0+} = \nexists$$
$$\lim_{x\to0-} = 0$$

Пример.

$$y = \frac{1}{|x-2|}, \qquad x \to 2$$
$$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

Определение 6.6. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой функцией** (далее - **б.б.ф.** если:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

Бесконечный предел на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty} = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists N(M) > 0)(\forall x \in |x| > N \implies |f(x)| > M)$$

6.3 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Теорема 6.2. *О связи бесконечно малой и бесконечно большой функции.* Если $\alpha(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство. По условию $\alpha(x)$ - б.б.ф при $x \to x_0$. По определению:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| > M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{M}$.

$$|\alpha(x) > M| \implies \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M}$$
$$\implies |\frac{1}{\alpha(x)}| < \frac{1}{M} < \varepsilon$$

В итоге получаем:

$$\forall x \in \mathring{s}(x_0, \delta) \implies |\frac{1}{\alpha(x)}| < \varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией. $\square$

1-ый замечательный предел

Теорема 6.3.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Доказательство. Рассмотрим $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Потом $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Пусть α - угол в радианах, $x \to 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Тут должен быть рисунок, но его пока нет :(.

Окружность $R = 1$.

Отложим луч OK под углом к оси oX равным x, где $O(0,0), K \in$ окружности.

$KH \perp OA$.

Рассмотрим $\triangle OKH$. $OA = 1$ как радиус. $\sin(x) = \frac{KH}{OA} = KH$.
Рассмотрим $\triangle OLA$. $OA = 1$ как радиус. $\operatorname{tg}(x) = \frac{LA}{OA} = LA$.
Из геометрических построений (да будут они когда-нибудь...):

$$S_{\triangle OKA} < S_{secOKA} < S_{\triangle OLA}$$

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} OA \cdot KH = \frac{1}{2}\sin(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$
$$S_{secOKA} = \frac{1}{2} OA \cdot OK \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$$
$$S_{\triangle OLa} = \frac{1}{2} OA \cdot LA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}(x) = \frac{tg(x)}{2}$$

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(x) < x < tg(x) \\ x \to 0+ \implies \begin{cases} \sin(x) > 0 \\ \operatorname{tg}(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right\} \implies \sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) \quad | : \sin(x)$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$
$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{x\to 0+} \cos(x) \le \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} \le 1$$

По теореме о промежуточной функции:

$$\lim_{x\to 0+} \cos(x) = 1 \implies \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Аналогично для $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Т.к. односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

□

Вывод.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x}{\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Вывод.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \left| \begin{matrix} t = \arcsin(x) \\ x \to 0, t \to 0 \end{matrix} \right| \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(t)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} \\
&= \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

□

Вывод.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} &= \left|\begin{matrix} x=\operatorname{tg}(t) \\ x\to 0, t\to\infty\end{matrix}\right| \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{t}{\operatorname{tg}(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{tg(t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1}=1\end{aligned}$$

$\square$

Вывод.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \left|\begin{matrix} \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos(x)}{2} \\ 1-\cos(x)=2\sin^2\frac{x}{2}\end{matrix}\right| \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x-2}{x^2} \\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{(\frac{x}{2})^2}{x^2} \\ &= 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\square$

Второй замечательный предел

Теорема 6.4.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

Вывод.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=e$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t} \\ x\to 0, t\to\infty\end{matrix}\right| \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \\ &= e\end{aligned}$$

□

Вывод.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) \\ &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

□

Вывод.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x}{x} &= \frac{1}{x}\log_a(1+x) \\ &= \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_a e = \frac{1}{\ln a}\end{aligned}$$

□

Вывод.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}&=\begin{vmatrix} e^x-1=t\\ x=\ln(t+1)\\ x\to 0, t\to 0\end{vmatrix}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\\ &=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}\\ &=\frac{1}{1}=1\end{aligned}$$

$\square$

Вывод.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\begin{vmatrix} a^x-1=t\\ x=\log_a(1+t)\\ x\to 0, t\to 0\end{vmatrix}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}\\ &=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}}\\ &=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a\end{aligned}$$

$\square$

7 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть даны функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, которые являются б.м.ф. при $x\to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Рассмотрим варианты:

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

  $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$.

  $\boxed{\alpha(x) = o(\beta(x)),\ \text{при } x \to x_0}$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$$

  $\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$.

  $\boxed{\beta(x) = o(\alpha(x)),\ \text{при } x \to x_0}$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

  $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - эквивалентны.

  $\boxed{\alpha(x) \sim \beta(x),\ \text{при } x \to x_0}$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = const$$

  $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - одного порядка малости.

  $$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha(x) = O(\beta(x)) & \\ \beta(x) = O(\alpha(x)) & \end{array} \quad \text{при } x \to x_0}$$

- $$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

  $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - несравнимы.

Определение 7.1. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются одного порядка малости, если:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = const \neq 0$$

Определение 7.2. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми* , если:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Определение 7.3. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* , если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

Определение 7.4. Если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x\to x_0$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$.

Определение 7.5. Б.м.ф. $\alpha(x)$ имеет порядок малости k относительно функции б.м.ф. $\beta(x)$, если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=const\neq 0$$

где k – порядок малости.

7.1 Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

Теорема 7.1. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, а $\beta(x)\sim\gamma(x)$, при $x\to x_0$, то $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to x_0$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\gamma(x)\cdot\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1\cdot 1=1$$
$$\Longrightarrow\ \alpha(x)\sim\gamma(x),\text{ при } x\to x_0$$

□

Теорема 7.2. *Необходимое и достаточное условие экваивалентных бесконечно малых функий.*
Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\alpha(x),\beta(x)\text{ - б.м.ф при } x\to x_0$$
$$\alpha(x)\sim\beta(x)\iff\begin{matrix}\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))\\ \alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))\end{matrix}\quad\text{при } x\to x_0$$

Доказательство. Необходимость.
Дано:
$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0$$
Доказать:
$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \to x_0$$
Доказательство:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) \\ &= 1 - \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{1} = 0\end{aligned}$$

Достаточность.
Дано:
$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0$$
Доказать:
$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$
Доказательство:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\implies \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$
$$\implies \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

□

Теорема 7.3. *О суммы бесконечно малых разного порядка.*
Сумма бесконечно малых функций разных порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0 \\ &\alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0\end{aligned}\right\} \implies \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}+1\right)$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}+1$$
$$= 0+1=1$$

□

Вывод. Сумма б.б.ф. разного порядка роста эквивалентна слагаемому высшего порядка роста.

Теорема 7.4. *О замене функции на эквивалентную под знаком предела.* Предел **отношения** двух б.м.ф. (б.б.ф) не изменится, если заменить эти функции на эквивалентные.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(x),\beta(x)\text{ - б.м.ф. при } x\to x_0\\ \alpha(x)\sim\alpha_0(x)\\ \beta(x)\sim\beta_0(x)\end{array}\right\}\implies \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha_0(x)}{\beta(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\cdot\alpha_0(x)\cdot\beta_0(x)}{\beta(x)\cdot\alpha_0(x)\cdot\beta_0(x)}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_0(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$
$$= 1\cdot1\cdot1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

□

8 Непрерывность функции. Точки разрыва

Определение 8.1. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется непрерывной в этой точке если:

$$\exists\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Множество непрерывных функций в точке x_0 обозначается $C(x_0)$

$$f(x)\in C(x_0)\iff\text{ - функция непрерывна в точке } x_0$$

Таблица 1: Таблица эквивалентных б.м.ф

1-ый замечательный предел	2-ой замечательный предел
$\sin(x) \sim x$ при $x \to 0$	
$\text{tg}(x) \sim x$ при $x \to 0$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin(x) \sim x$ при $x \to 0$	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$\text{arctg}(x) \sim x$ при $x \to 0$	e^x x
$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$	

Сумма б.м.ф. и б.б.ф.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \sim a_n x^n \text{ при } x \to \infty$$
$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \sim a_1 x \text{ при } x \to 0$$

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \sin(x) = 0 \iff \sin(x) \in C(0)$$

Пример.

$$sgnx = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \implies sgn \notin C(0)$$

Определение 8.2. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется непрерывной в этой точке, если в достаточно малой окрестности точки x_0 значение функции близки к $f(x_0)$.

$$y = f(x) \in C(x_0)$$
$$\iff$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Определение 8.3. Функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 называется непрерывной в этой точке, если выполняются условия:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x)$

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой точке в окрестности x_0. Выберем произвольный x в этой окрестности. Тогда:

$\boxed{\Delta x = x - x_0}$ - приращение аргумента

$\boxed{\Delta y = f(x) - f(x_0)}$ - соответствующее приращение функции

Определение 8.4. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

8.1 Односторонняя непрерывность

Определение 8.5. Функция $y = f(x)$ определённая в правосторонней окрестности точки x_0 (математическим языком - $[x_0, x_0+\delta)$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \to x_0+} = f(x_0)$$

Определение 8.6. Функция $y = f(x)$ определённая в левосторонней окрестности точки x_0 (математическим языком - $(x_0-\delta, x_0]$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \to x_0-} = f(x_0)$$

Теорема 8.1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева.

Определение 8.7. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 8.8. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если:

1. Непрерывна на интервале (a, b)
2. Непрерывна в точке a справа
3. Непрерывна в точке b слева

- $C(a, b)$ - множество функций, непрерывных на интервале.
- $C[a, b]$ - множество функций, непрерывных на отрезке.
- $C(X)$ - множество функций, непрерывных на промежутке X.

8.2 Классификация точек разрыва

Определение 8.9. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке проколотой окрестности точки x_0 непрерывна в любой точке этой окрестности (за исключением самой точки x_0). Тогда точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Пусть точка x_0 - точка разрыва. Её можно классифицировать как:

- I-ого рода
  - Основное условие
    $$\exists \lim_{x \to x_0 + -}$$
  - Точка конечного разрыва
    $$\lim_{x \to x_0 +} \neq \lim_{x \to x_0 -}$$
  - Точка устранимого разрыва
    $$\lim_{x \to x_0 +} = \lim_{x \to x_0 -} \neq f(x_0) \text{ или } \nexists f(x_0)$$
- II рода
  $$\nexists \lim_{x \to x_0 + -}$$

Определение 8.10. Если точка x_0 – точка разрыва функции $y = f(x)$ и существуют конечные пределы $\lim_{x \to x_0 +} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$, то x_0 называют точкой I-го рода.

Определение 8.11. Если точка x_0 – точка разрыва функции $y = f(x)$ и **не** существуют конечные пределы $\lim_{x \to x_0 +} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ или $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то x_0 называется точкой разрыва II-го рода.

Определение 8.12. Если точка x_0 – точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$, и предел $\lim_{x \to x0+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 -} f(x)$, то x_0 называется точкой конечного разрыва или точкой *скачка.*

Определение 8.13. Если точка x_0 – точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$, и предел $\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$, но $\neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Примеры

Пример.

$$y = \frac{|x-1|}{x-1}$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$x = 1 \text{ - точка разрыва}$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$
$$\Longrightarrow \; x = 1 \text{ - т.р. I рода, точка скачка}$$
$$\Delta f = |\lim_{x\to 1+} f(x) - \lim_{x\to 1-} f(x)| = |1-(-1)| = 2$$

Пример.

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x)$$
$$\Longrightarrow \; x = 0 - \text{ т.р. I рода, устранимая точка разрыва}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$
$$f(x) \notin C(0)$$
$$g(x) \in C(0)$$

Пример.

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$$
$$\Longrightarrow \; x = 0 \text{ - т.р. II рода}$$

8.3 Свойства непрерывных функций в точке

Теорема 8.2. Пусть функции:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= g(x) \end{aligned}\right\} \in C(x_0)$$

Тогда:

$$f(x) + g(x) \in C(x_0)$$
$$(f \cdot g)(x) \in C(x_0)$$

Доказательство. По определению непрерывной функции:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Рассмотрим:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) = g(x_0)$$
$$\implies f(x) + g(x) \in C(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$
$$\implies (f \cdot g)(x) \in C(x_0)$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x_0)}$$

□

Теорема 8.3. Пусть

$$g(y) \in C(y_0), \quad y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Тогда:

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to 0} f(x))$$

Доказательство. Т.к. функция $g(y) \in C(y_0)$, то $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$. С другой стороны, по условию $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. По теореме "О пределе сложной функции" $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x))$. Подставим в последнее равенство $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

□

Теорема 8.4. *О непрерывности сложной функции.*
Пусть функция $y = f(x) \in C(x_0)$, а функция $g(y_0) \in C(y_0)$, причем $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $F(x) = g(f(x)) \in C(x_0)$.

Доказательство. Т.к. $y = f(x) \in C(x_0)$, то по определению непрерывности $\implies \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично для $f(x) \in C(x_0)$ – по определению непрерывности $\implies \lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)$. Рассмотрим $\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x))$. По теореме 29:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) =$$

По непрерывности функции:

$$= g(f(x_0)) = F(x_0) \implies g(f(x)) \in C(x_0)$$

□

Теорема 8.5. *О сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки.*
Если функция $f(x) \in C(x_0)$ и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists S(x_0)$, в которой знак значения функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x) \in C(x_0)$, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. По теореме о сохранении функции знака своего предела $\implies$ $\exists S(x_0)$, в которой знак значений функции совпадает со знаком $f(x_0)$. □

Замечание. На экзамене требуется доказать также и теорему о сохранении функции знака своего предела!

8.4 Непрерывность элементарных функций

Теорема 8.6. *Основные элементарные функции непрерывные в области определения.*

Доказательство. Это теорема доказывается для каждой элементарной функции отдельно. Докажем её для функций $y = \sin(x), y = \cos(x)$:

$$y = \sin(x), D_y = \mathbb{R}$$
$$x_0 = 0, \lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(0) \implies y = \sin(x) \in C(0)$$
$$\forall x \in D_y = \mathbb{R}, \quad \Delta x \text{ – приращение функции}$$
$$x = x_0 + \Delta x, \quad x \in D_f = \mathbb{R}$$
$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$
$$= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = 2\sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$
$$\text{– по т. об произв. огр. на б.м.ф.}$$

Т.к. $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ по опр. непр. функции $\implies y = \sin(x)$ непрерывна в точке x_0. Т.к. x_0 – произвольная точка из области определения, то $y = \sin(x)$ непрерывна на всей области произведения. □

Теорема 8.7. *Элементарные функции непрерывны в области определения*

Доказательство. Доказательство данной теоремы следует из определения элементарных функций с помощью операций *сложения, вычитания, умножения, композиции*, предыдущей теоремы, теоремы об алгебраических свойствах непрерывной функции и теоремы о композиции непрерывных функций. □

8.5 Свойства функций, непрерывных на промежутке

Теорема 8.8. *Об ограниченности непрерывной функции* или *Первая теорема Вейерштрасса.* .
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке ab, то она на этом отрезке ограниченна.

$$f(x) \in C[a,b] \implies \exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$$

Теорема 8.9. *О достижении непрерывной функции наибольшего и наименьшего значений* или *Вторая теорема Вейерштрасса.*
Если функция $y = f(x) \in C[a,b]$, то она достигает на этом отрезке

своего наибольшего и наименьшего значения.

$$f(x) \in C[a,b]$$
$$\Longrightarrow$$
$$\exists x_*, x^* \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \implies m = f(x_*) \le f(x) \le f(x^*) = M$$

Теорема 8.10. *О существовании нуля непрерывной функции* или *Первая теорема Больцано-Коши.*
Если функция $y = f(x) \in C[a,b]$, и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

$$f(x) \in S[a,b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$$

Теорема 8.11. *О промежуточном значении непрерывной функции* или *Вторая теорема Больцано-Коши.*
Если функция $y = f(x) \in C[a,b]$ и принимает на границах отрезка различные значения $f(a) = A \ne f(b) = B$, то $\forall C \in [A,B] \exists c \in (a,b)$, в которой $f(c) = C$.

$$f(x) \in C[a,b] \wedge f(a) = A \ne f(b) = B \implies \exists C \in (A,B) \implies \exists c \in (a,b) : f(c) = C$$

Теорема 8.12. *О существовании обратной к непрерывной функции.*
Пусть $y = f(x) \in C(a,b)$ и строго монотонна на этом интервале. Тогда в соответствующем (a,b) интервале значений функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая так же строго монотонна и непрерывна.