Аналитическая геометрия. Модуль 2. Лекции

1 Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка:

$$\boxed{x^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

где:

$$A, B, C, D, E, F = const$$
$$A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

1.1 Эллипс

Определение 1. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна и равна $2a$.

F_1, F_2 - фокусы эллипса

Расстояние между фокусами называется *фокальным расстоянием.*

Расстояние от каждой точки эллипса до фокуса называется *фокальным радиусом*

Прямая, которая проходит через фокусы, и прямая, которая проходит через середину этой прямой и перпендикулярной ей, являются *осями симметрии данного эллипса.* Первая прямая называется *большой осью*, а вторая – *малой осью.*

Точка пересечения осей эллипса называется *центром эллипса*, а точки пересечения эллипса с осями называются *вершинами эллипса.*

Уравнение эллипса

Расположим прямоугольную систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром эллипса, а фокусы лежали на оси абцисс.

O – центр эллипса
F_1, F_2 – фокусы эллипса
A_1, A_2, A_3, A_4 – вершины эллипса
$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние
Возьмём точку $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, и составим векторы:

$$\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}$$
$$\overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$$

Тогда:

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$$
$$x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$
$$x^2a^2 + x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$. Получаем *каноническое уравнение эллипса*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

где a – *большая полуось эллипса*, а b – *большая полуось эллипса.*

Отношение фокусного расстояния эллипса к большой оси называется *центриситетом* эллипса.

$$\frac{F_1F_2}{A_3A_1} = \frac{2c}{2a} = \varepsilon$$
$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

> **Замечание.** Т.к. $a < c$, то $0 < \varepsilon < 1$

Центриситет показывает степень "сжатия"эллипса.

Отношение фокального радиуса точки эллипса к расстоянию до некоторой прямой, называемой *директрисой*, постоянно и равно *эксцентриситету.*

Уравнение директрис:

$$d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$$
$$d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$$

> **Замечание.** 1. Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0, y_0)$:
>
> $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

2. Уравнение мнимого эллипса с центром в точке $O(0,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

3. Если $a = b = R$, то это уравнение окружности:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Для окружности в точке $O(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

4. Если $a < b$, то изображение эллипса "переворачивается"на 90:

1.2 Гипербола

Определение 2. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой их которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянно и равно $2a$.

Прямая, на которой лежат фокусы, и прямая, которая проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы и перпендикулярная ей, называются *осями симметрии гиперболы*. Первая прямая называется *действительной осью*, а вторая – *мнимой осью*.

F_1, F_2 – фокусы

$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние

Точки пересечения действительной и мнимой оси гиперболы называется *центром гиперболы*, а точка пересечения с действительной осью называются *вершинами гиперболы*.

Уравнение гиперболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром гипероболы, а фокусы лежали на оси абсцисс.

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

Возьмём произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащей гиперболе.

$$\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}$$
$$\overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$$
$$|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2$$
$$x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4$$
$$x^2a^2 + x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$x^2(a^2 + c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$. Получаем *каноническое уравнение эллипса*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Центриситетом эллипса называется:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Замечание. Т.к. $c > a$, то $\varepsilon > 1$

Замечание. Уравнение сопряжённой гиперболы:

$$\boxed{-\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ или } \boxed{\frac{x^2}{b^2} = -1}$$

Уравнение гиперболы с центром в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)}{a^2} - \frac{(y - y_0)}{b^2} = 1$$

Если $a = b$, то гипербола становится *равносторонней*.
Если:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

то получается вырожденной уравнение – две пересекающиеся прямые:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0(bx - ay)(bx + ay) = 0$$
$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

Эти же уравненения и являются *уравнениями ассимптот.*

Если центр гиперболы $O(x_0, y_0)$, то:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0$$
$$y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + (y_0 + \frac{b}{a}x_0$$

1.3 Парабола

Определение 3. *Параболой* называется геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до некоторой точки, называмой *фокусом*, и фиксированной прямой, называемой *директрисой*, равно.

Уравнение параболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы начало координат совпадало с вершиной параболы.

$$A(-\frac{p}{2}), \quad F(\frac{p}{2}, 0)$$

$$\overrightarrow{AM} = \{x + \frac{p}{2}, a\}, \quad \overrightarrow{FM} = \{x - \frac{p}{2}, y\}$$
$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{FM}|$$
$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left((x - \frac{p}{2}) + y^2\right)}$$
$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$$

Тогда получаем каноническое уравнение параболы с вершиной в $O(0, 0)$:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Если $p > 0$, то ветви параболы направлены *вправо*, если $p < 0$, то ветви направлены *влево*.

Если вершина в точке $Mx_0, y_0)$, тогда:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$$

Уравнение директрисы:

$$d : x = -\frac{p}{2}$$

1.4 Примеры

Пример.

$$2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 10 = 0$$
$$2(x^2 - 3x) - 4(y^2 - 2y) - 10 = 0$$
$$2(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) - -4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 10 = 0$$
$$2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2} - 4(y-1)^2 + 4 - 10$$
$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4(y-1)^2 = \frac{21}{2}$$
$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{21}{8}} = 1$$

Получили *уравнение гиперболы* с центром в $O\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, действительная полуось $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и мнимая полуось $b = \sqrt{\frac{21}{8}}$.

2 Матрицы

Определение 4. *Матрицей* называется таблица чисел, в которой элементы расположены по строкам и столбцам.

Обозначаются заглавными латинскими буквами: $A, B, C\ldots$ Размерность матрицы определятся кол-вом строк m и кол-вом столбцов n, и обозначается $m \times n$. Элемент матрицы a_{ij} – элемент, который расположен в i-ой строку и j-ом столбце.

Матрицу можно записать таким образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_1m \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_2m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_nm \end{pmatrix}$$

Определение 5. Матрица называется *квадратной* если кол-во строк равно кол-ву столбцов $(m = n)$.

Определение 6. Квадратная матрица называется *диагональной* если все элементы матрицы, кроме элементов на главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Определение 7. *Главной диагональю* называется диагональ матрицы, идущая из левого верхнего в правым нижний.

Определение 8. *Побочной диагональю* называется диагональ матрицы, идущая из левого верхнего в правым нижний.

Определение 9. Квадратная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице, а остальные равны нулю, называют *единичной*.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 10. *Нулевой матрицей* называется матрица, все элементы которой равные нулю.

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 11. *Верхне-треугольной матрицей* называется квадратная матрица, у которой под главной диагональю равны нулю.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Определение 12. *Нижне-треугольной матрицей* называется квадратная матрица, у которой под главной диагональю равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Две матрицы *равны*, если они имеют одинаковую размерность, и их соответствующие элементы равны.

2.1 Действия с матрицами

Определение 13. *Суммой матриц* $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой являются суммой соответствующих элементов матриц A и B.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Определение 14. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}$ на число $k = const$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой равны произведению соответствующего элемента матрицы на данное число $c_{ij} = ka_{ij}$.

2.1.1 Свойства сложения и произведения матриц на число

1. $$A + B = B + A$$
2. $$(A + B) + C = A + (B + C$$
3. Если Θ – нулевая матрица, то:
$$A + \Theta = A$$
4. Найдётся такая матрица B, что:
$$A + B = 0$$
5. $$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
6. $$(\lambda + \rho)A = \lambda A + \rho A$$
7. $$(\lambda\rho)A =$$

2.2 Транспонирование матрицы

Определение 15. *Транспонированной матрицей* A_{mn} называется матрица размерностью $n \times m$, элементы которой:

$$a^{\tau}_{ij} = a_{ji}$$
$$A^{\tau}_{n\times m} \text{ – транспонированная матрица } A_{m\times n}$$

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A^{\tau}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2.1 Свойства транспонированния

1. $$(A + B)^{\tau} = A^{\tau} + B^{\tau}$$
2. $$(\lambda A)^{\tau} = \lambda A^{\tau}$$

2.3 Произведение матриц

Определение 16. *Произведением матриц* A и B назвается матрица C, элементы которой определяются как:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$$

Замечание. Две матрицы можно перемножить, если количество столбцов одной матрицы равно количеству строк другой матрицы. Тогда результирующая матрица будет иметь количество строк одной матрицы и количеству столбцов другой матрицы.

$$C_{a\times b} = A_{a\times c} \cdot B_{c\times b}$$

Свойство антикомунитативности произведения матриц.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Замечание. *Исключения:* Когда $A = B$:

А $\cdot B = A \cdot A = A^2$ Когда матрица B – нулевая матрица:

$$A \cdot \Theta = \Theta$$

Когда матрица B – единичная матрица:

$$A \cdot E = A$$

Когда матрица B – обратная матрица:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

2.3.1 Свойства произведения матриц

1. Произведение матриц антикомунитативно.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2.

$$1 \cdot A = A$$

3. Ассоциативность

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
(A \cdot B)\, C = & \\
&= \sum_{r=1}^{k} [(A \cdot B)]_{ir} \cdot [C]_{rj} = \\
&= \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \cdot [B]_{sn} \right) \cdot [C]_{rj} = \\
&= \sum_{n=1}^{n} \sum_{k=1}^{k} [A]_{is} \cdot [B]_{sn} \cdot [C]_{rj} = \\
&= \sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \cdot [(B \cdot C)] = \\
&= A \cdot (B \cdot C)
\end{aligned}
$$

4. Дистрибутивность произведения матриц относительно сложения:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
(A_{m\times k} + B_{m\times k}) \cdot C_{k\times n} = & \\
&= \sum_{r+1}^{k} [(A + B)]_{ir} \cdot [C]_{ir} \\
&= \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir} + [B]_{ir}) \cdot [C]_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir}[C]_{rj} + [B]_{ir} \cdot [C]_{rj}) \\
&= \sum_{r=1}^{k} [A]_{ir}[C]_{ir} + \sum_{r=1}^{k} [B]_{ir}[C]_{ir} \\
&= A \cdot C + B \cdot C
\end{aligned}
$$

5. Применение транспорирования к произведению матриц

$$(A \cdot B)^{\tau} = B^{\tau} \cdot A^{\tau}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^\tau &= \\ &= [(A \cdot B)^\tau]_{ij} \\ &= [AB]_{ji} = \sum_{r=1}^{k} [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} \\ &= \sum_{r=1}^{k} [A^\tau] \cdot [B^\tau]_{ir} \\ &= \sum_{r=1}^{k} [B^\tau]_{ir} [A^\tau]_{rj} \\ &= [B^\tau \cdot A^\tau] \\ &= B^\tau \cdot A^\tau\end{aligned}$$

2.4 Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка строк и столбцов.
2. Умножение элементов строк (столбцов) на число.
3. Прибавление к элементам одной строки соответствующий элементов другой строки (столбца), умноженного на число.

Используя элементарные преобразования, можно привести любую матрицу к *ступенчатому виду*.

Пример. Пример ступенчатой матрицы для 3×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$