Математический анализ. Модуль 2. Лекции

1 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Рассмотрим $y = f(x)$ определённую в $S(x_0)$. Пусть x – произвольная точка из $S(x_0)$. Обозначим:

- Δx – приращение аргумента

$$x = x_0 + \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = x - x_0$$

- Δy – приращение функции

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Определение 1. *Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0* называется предел отношения приращения функции и предел приращения аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если предел *конечен*, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную. Если предел *бесконечен*, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет бесконечную производную.

Дифференцирование – процесс получения производной.

Пример.

$$y = e^x, D_f = \mathbb{R}$$
$$x = x_0 + \Delta x, \forall x \in D_f$$
$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)$$
$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\Delta x}{\Delta x} = e^{x0}$$

Пример.

$$y = \sin(x), D_f = \mathbb{R}$$
$$x = x_0 + \Delta x, \forall x \in D_f$$
$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) + y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) =$$
$$2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$
$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0$$

1.1 Односторонние производные

Определение 2. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *справа* или *правосторонней производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа.

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 3. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *слева* или *левосторонней производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю слева.

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Теорема 1. *О существовании производной функции в точке.* Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную тогда и только тогда, коогда она имеет производные и справа, и слева, и они равны между собой.

$$y'(x_0) = y'_+(x_0) = y'_-(x_0)$$

Пример.

$\left.\begin{aligned} y'_+(0) &= 1 \\ y'_-(0) &= -1 \end{aligned}\right\}$ – т.к. производные конечные, но различные, то $\mathrm{x}_0 =$ 0 называется точкой излома

Геометрический смысл: $\nexists$ касательной к функции в точке излома.

Пример.

$$y = x^{\frac{1}{3}}, z_0 = 0$$
$$y' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

1.2 Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Пусть $f(x)$ опредена в $S(x_0)$. Обозначим:

- $f(x_0) = y_0$, $M(x_0, y_0)$
- Δx – приращение функции
- $x = x_0 + \Delta x$
- $N(x0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$
- MN - секущая

При $\Delta x \to 0$ точка N движется вдоль графика функции $y = f(x)$, а секущая MN вращается вдоль графика.

В пределе $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ секущая MN становиться *касательной*.

Определение 4. Если существует предельное секущей MN, когда точка N перемещается вдоль графика функции к точке M, это положение называется *касательной* к графику функции в точке M.

$$\triangle MNK : \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha_0 \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} y'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha_0 = y'(x_0)}$$

где α – угол между секущей и положительным направлением оси OX, а α_0 – угол между касательной и положительным направлением оси OX.

С другой стороны, прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

где k – тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox.

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = y'(x_0) = k$$

Рассмотрим $\forall P(x, y)$ на касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\triangle MPK : \operatorname{tg}\alpha = \frac{PK}{MK}$$
$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0$$
$$y'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Получаем:

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

– уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$

Выводы:

1. Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox или угловому коэффициенту касательной.

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0 = k$$

2. Механический смысл производной функции $s = f(t)$ в точке t_0 равна мгновенной скорости в момент t_0

$\mathrm{V}(\mathrm{t}_0) = s'(t_0)$

Определение 5. *Нормалью* к графику функции $y = f(x)$ называется прямая, перпендикулярная касательной к графику функции в данной точке.

$$l_1 : y_1 = k_1x + b_1$$
$$l_2 : y_2 = k_2x + b_2$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$y - y_0 = y'(x)(x - x_0)$$
$$k_1 = y'(x) \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{y'(x)} \Rightarrow$$
$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'(x)}(x - x_0)}$$

Замечание. Касательная к графику функции существует не в любой точке (точка излома и точка заострения).

Определение 6. Кривая, имеющая касательную в любой точке рассматриваемого промежутка, называется *гладкой.*

Следствие. Если $y'(x_0) = \infty$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, параллельно оси ординат и имеет вид $x = x_0$ (нормаль имеет вид $y = y_0$).
Если $y'(x_0) = 0$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = y_0$ (нормаль имеет вид $x = x_0$).

Определение 7. *Углом между двумя пересекающимися кривыми* в точке с абциссой x_0 называется угол между касательными, проведёнными в этой точке.

Следствие.

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) \\ y &= f_2(x) \end{aligned} \Rightarrow \quad f_1 \cap f_2 = M_0(x_0, y_0) \quad \begin{aligned} y_1 &= k_1x + b_1 \\ y_2 &= k_2x + b_2 \end{aligned}$$

$$\varphi - \text{угол между } f_1, f_2 \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1 = f_1(x_0)$$
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2 = f_2(x_0)$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} = \frac{f_2'(x_0)f_1(x_0)}{1 + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$$
$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = |\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0)f_1'(x_0)}|}$$

2 Дифференцируемость функции в точке

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если существует константа A такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$.

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие дифференцируемости*

функции в точке.
Функция $y = f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство. .
Необходимость.
Дано: $y = f(x)$ – дифференцируема в точке x_0.
Доказать: $\exists y'(x)$ – конечное число
Т.к. $y = f(x)$, то $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.
Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) =$$
$$A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) \text{ – по определению}$$
$$\Rightarrow y'(x_0) = A = const \Rightarrow \exists y'(x_0) \text{ – конечное число.}$$

Достаточность.
Дано: $\exists y'(x_0)$ – конечное число.
Доказать: $y = f(x)$ – дифференцируема в этой точке.
Доказательство:
Т.к. $\exists y'(x)$, то по определению производной

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

По теореме "О связи функции, её предела и некоторой бесконечно малой функции":
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$
где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $A = y'(x_0) \Rightarrow y = f(x)$ дифференцируема в данной точке. □

Следствие. Формула, выражающая дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид:

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$

Теорема 3. *Связь дифференцируемости и непрерывности функции.*
Если функция дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Т.к. $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $y'(x_0) = const$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.
Вычислим:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x\to 0}(y'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) \\ &= y'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x \\ &= y'(x_0)\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

По определению непрерывной функции $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0. □

Замечание. Если функция непрерывна, она не обязательно дифференцируема!

2.1 Правила дифференцирования

Теорема 4. *Арифметические операции.*
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда в этой точке дифференцируемая их сумма, разность, произведение, частное (при условии знаменателя не равного нулю), справедливо равенство:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$(u\cdot v)' = u'v + v'u$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Доказательство. Распишем приращения каждой из функций:

$$\begin{cases}\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x) \\ \Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u(\Delta x + x) = \Delta u + u(\Delta x) \\ v(\Delta x + x) = \Delta v + v(\Delta x)\end{cases}$$

□

Доказательство. Пусть $y = uv$, тогда:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$
$$= (\Delta u + u(x))(\Delta v + v(x)) - u(x)v(x) = \Delta u\Delta v + \Delta u v(x) +$$
$$+\Delta v u(x) + u(x)v(x) =$$
$$\Delta u\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x).$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \\
&= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u}_{0}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} + v(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)} + u(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} = \\
&= v(x)u'(x) + v'(x)u(x) + v'(x)\cdot 0 = \\
&= \boxed{v(x)u'(x) + u(x)v('x)}
\end{aligned}$$

Т.к. функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\Rightarrow$ $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны в точке x $\Rightarrow$ по определению непрерывности функции:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0\end{cases}$$

$\square$

Доказательство. Пусть $y = \frac{u}{v}$, тогда:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = \\
&= \frac{u(x+\Delta x}{v(x+\Delta x} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\
&= \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)} = \\
&= \frac{(u(x)+\Delta u)v(x) - u(x)(v(x)+\Delta v)}{(\Delta v + v(x))v(x)} = \\
&= \frac{u(x)+\Delta u v(x) - u(x)v(x) - u(x)\Delta v}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\
&= \frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}
\end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - v(x_0\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\ &= \frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) - v(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \\ &= \boxed{\frac{v_(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}} \end{aligned}$$

Для доказательства использовали:

- $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$
- $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$
- т.к $v(x)$ – дифференцируема, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности $v(x)$ – непрерывна, $\Rightarrow$ по определению непрерывности $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$

□

Теорема 5. Производная от постоянной равна нулю.

$$(c)' = 0, \quad c = const$$

Следствие. Константу можно выносить за знак производной.

$$(c \cdot f)' = c \cdot f', \quad c = const$$

Следствие. Производная функции $y = \frac{1}{v(x)}$ имеет вид:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{1}{v^2(x)}v'(x)$$

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале*, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Теорема 6. *Производная сложной функции.*

Пусть функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке $x = a$.

$$F'(x)|_{x=a} = (f(g(x)))'|_{x=a} = f'_u(b) \cdot g'_x(a)$$

Доказательство. Т.к. функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по определению $\Rightarrow$

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$. Т.к. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке b, то по определению дифференцируемости $\Rightarrow$

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u \tag{2}$$

где $\beta(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$.
Подставим (1) в (2). Тогда:

$$\Delta y = f'(b) \cdot (g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) + \beta(\Delta u)\,(g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) =$$
$$= f'(b) \cdot g'(a)\Delta x + \Delta x\,(f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)) = \Delta F$$

Обозначим: $\gamma(\Delta x) = f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(x)$. В итоге получаем $\Delta F = f'(b)g'(a)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x$.
$f(b)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ (как производная постоянной на б.м.ф.).
Т.к. $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = a \Rightarrow$ по определению непрерывности $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ или при $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$. $g'(a)\beta(\Delta u)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0(...)$. $\beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ (как производная двую б.м.ф). Следовательно, $\gamma(x)$ – б.м.ф при $x \to 0$ как сумма конечного числа б.м.ф.
Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(b)g'(a) + \gamma(\Delta x)) = f(b)g'(a) + 0 = f'(b)g'(a).$$

□

Теорема 7. *Производная обратной функции.*
Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = 0$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)$ и пусть для неё существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $b = f(a)$. Тогда существует производная обратной функции и она равна:

$$\boxed{g'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

Доказательство. Т.к. функция $x = g(y)$ однозначно определена, то соответственно при $\Delta y \neq 0$, $\Delta x \neq 0$. Т.к. функция $x = g(y)$ непрерывна в соответствующей точке b, то $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ или $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

$$g'(b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}$$

$\square$

Пример.

$$y = \arcsin(x), \quad x = \sin(y), y' = \frac{1}{x'}$$
$$y' = (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$x' = \cos(y)$$
$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$$
$$\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$$
$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$$
$$y = \arcsin(x)$$
$$D_f = [-1, 1], E_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$y \in [-\frac{\pi}{2}]$$

2.2 Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда $\forall x \in (a, b)$ существует производная $y' = f'(x)$.
Функция:

y” $= (y')' = f''(x)$ называется *производной второго порядка* или *второй производной.*

Определение 10. Производной n-ого порядка или n-производной функции $y = f(x)$ называется производная от (n - 1)-ой производной функции $y = f(x)$.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

$C[a, b]$ – множество непрерывных функций на [a,b]
$C^1[a, b]$ – множество функций непрерывных вместе со своей производной на $[a, b]$ или *непрерывно-дифференцируемых* функций.

Определение 11. Производная порядка выше первого называется *производной высшего порядка.*

2.3 Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Тогда по определению дифференцируемой функции приращение:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$. Если $f'(x_0) \neq 0$, то $f'(x_0)\Delta X$ – имеет один порядок малости, то $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – б.м.ф более высокого порядка малости, чем $f'(x_0)\Delta x$. Тогда по теореме о сумме б.м.ф разного порядка малости $\Rightarrow$ $\Delta y \sim f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$. По определению главной части $\Rightarrow f'(x_0)\Delta x$ – главная часть равенства (1) приращения функции Δy.

Определение 12. *Дифференциалом функции* $y = f(x_0)$ называется главная часть приращения функции Δy или первое слагаемое в равенстве (1).

$$dy = f'(x_0)\Delta x \tag{2}$$

Если $f'(x_0) = 0$, то $dy = 0$, но $f'(x_0)\Delta x$ уже не является главной частью приращения функции Δy.

Пусть $y = x$. Тогда по определению дифференциала получится $\Rightarrow dy = (x)'\Delta x = 1\Delta x$. С другой стороны, $y = x \Rightarrow dx = \Delta x$. Отсюда получаем вывод, что дифференциал независимой переменной равен её приращению.

Подставляем $\Delta x = dx$ в (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{dy = f'(x_0)dx} \tag{3}$$

Если $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), тогда:

$$\forall x \in (a, b) : \boxed{dy = f'(x)dx} \tag{4}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}} \tag{5}$$

Вывод: производная функции представима в виде отношения дифференциалов функции и независимой переменной.

2.4 Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке.

$$M(x_0, y_0), \quad M(x, y), \quad \Delta x \text{ – приращение аргумента}$$
$$MK = \Delta y, \quad M_0K = \Delta x$$
$$PK = dy$$
$$dy = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$
$$\alpha(\Delta x) \text{ – б.м.ф. при } \Delta x \to 0$$
$$dy = f'(x_0)\Delta x$$
$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)} \text{ – уравнение касательной}$$
$$y - y_0 = \Delta y$$
$$f'(x_0)(x - x_0) - f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx = dy$$
$$dy = \Delta y$$

2.5 Инвариантность формы первого дифференциала

Формула первого дифференциала

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \tag{3}$$

x - независимая переменная.

Докажем, что формула (3) верна и в том случае, когда x – функция от некоторой другой переменной.

Теорема 8. *Инвариантность формы записи первого дифференциала.* Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией другого аргумента.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$. Тогда можно задать сложную функцию:

$$F(t) = y = f(\varphi(t))$$

По определению дифференциала функции:

$$dy = F'(t)dt \tag{6}$$

По теореме о производной сложной функции:

$$F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t) \tag{7}$$

Подставим (7) в (6):

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt \tag{8}$$

По определению дифференциала функции $dx = \varphi'(t)dt$. Подставим (9) в (8):

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Получили формулу (3). □

2.6 Дифференциалы высшего порядка

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b), тогда $\forall x \in (a, b) \Rightarrow dy = f'(x)dx$. Дифференциал – это функция:

$$dy = y(x)$$

Вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка называется дифференциал от первого дифференциала.

$$d^2y = d(dy)$$

Определение 13. *n-ым дифференциалом* или *дифференциалом n-ого порядка* называется дифференциал от дифференциала $n-1$ порядка.

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right), \quad n = 2, 3 \dots$$

Следствие. Свойством инвариантности обладает только первый дифференциал

2.7 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 9. *Теорема Ферма* или *теорема о нулях производной.* Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и во внутренней точке C этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = c$ принимает наибольшее значение на промежутке X. Тогда $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \le f(c)$. Дадим приращение Δx точке $x = c$. Тогда $f(c + \Delta x) \le f(c)$. Пусть

$$\exists f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x}$$

Рассмоотрим два случая:

$$1) \Delta x > 0, \Delta x \to 0+, x \to c+$$

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \le 0 2) \Delta x < 0, \Delta x \to 0-, x \to c-$$

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{-}\right) \ge 0$$

По теореме о существовании производной функции в точке:

$$f'_+(c) = -f'_-(c) = 0$$

$\square$

Геометрический смысл

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $M(c, f(c))$ параллельна оси абцисс. $f(c)$ – наибольшее значение функции.

Теорема 10. *Теорема Ролля.* Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке (a, b)
2. Дифференцируема на интервале (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b), то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Возможны два случая:

1. Наибольше и наименьшее значение достигаются на границе, т.е. в точке a и в точке b. Это означает, что $m = M$, где m – наименьшее значение, а M – наибольшее. Из этого следует, что функция $y = f(x) = const$ на (a, b). Соответственно $\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$
2. Когда наибольшее или наименьшее значение достигаются во внутренней точке (a, b). Тогда для функции $y = f(x)$ справедлива теорема Ферма, согласно которой $\exists c \in (a, b), f'(c) = 0$.

□

Следствие. Между двумя нулями функции существует хотя бы один нуль производной.

Теорема 11. *Теорема Лагранжа.*
Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных функций. Существует конечная производная функции $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

следовательно по необходимому и достаточному условию дифференцируемости будет верно $F(x)$ – дифференцируема на (a, b). Покажем, что $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$
$$= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$$

Значит функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда по теореме Ролля $\exists c \in (a, b), F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

Геометрический смысл

$$A(a, f(a)), \quad B(b, f(b))$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} \quad \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha$$

Теорема 12. *Теорема Коши.*
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) f'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(a) - \varphi(b)}(\varphi(x) - \varphi(a)$$

Докажем применимость Теоремы Ролля:

1. $F(x)$ непрервына на $[a, b]$ как линейная комбинация непрерывных функций.
2. $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ как линейная комбинация дифференцируемых функций.
3. $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} (\varphi(a) - \varphi(a)) = 0$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{\varphi(b) - \varphi(a)}} \cancel{(\varphi(b) - \varphi(a))} = 0$$

Значит, функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля, $\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$. Вычислим:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(x)$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = f'(c)$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

□

3 Правило Лопиталя-Бернулли

Теорема 13. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

- Определены и дифференцируемы в $\mathring{S})(x_0)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$
- $\forall x \in \mathring{S}(x_0) \quad \varphi'(x) \neq 0$
- $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 нулём:

$$f(x_0) = 0 \quad \varphi(x_0) = 0$$

По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0 = \varphi(x_0)$$

$f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0.
По условию функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в точке $\mathring{s}(x_0) \Rightarrow$ по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности $\Rightarrow f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $\mathring{s}(x_0)$. Таким образом $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $S(x_0)$.

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию т.Коши на $[x_0, x]$. Тогда по теореме Коши $\Rightarrow$

$$\exists c \in [x_0, x] : \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (*)$$

Т.к. $f(x_0) = 0$ и $\varphi(x_0) = 0 \Rightarrow$

$$(*) \quad \boxed{\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi(c)}}$$

Т.к. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \Rightarrow$ правая часть (*):

$$\lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Левая часть (*):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Получаем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

□

Теорема 14. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

- Определены и дифференцируемы в $\mathring{S})(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$
- $\forall x \in \mathring{S}(x_0) \quad \varphi'(x) \neq 0$
- $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

3.1 Сравнение показательной, степенной и логарифмической функции на бесконечности

Пусть:

$$f(x) = x^n$$
$$g(x) = a^x$$
$$h(x) = \ln x$$

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^x \ln a}$$
$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots \cdot 1}{a^x (\ln a)^n} =$$
$$= \frac{n!}{\ln^n a} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{n!}{\ln^n a} = 0.$$

Значит a^x растёт быстрее, чем x^n при $x \to \infty$ или $x^n = o(a^x)$ при $x \to +\infty$.

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

Значит, x^n растёт быстрее, чем $\ln x$ при $x \to +\infty$ $\ln x = o(x^n)$ при $x \to +\infty$.

Вывод: на бесконечности функции расположены в таком порядке:

1. $g(x) = a^x$ – самая быстрорастущая функция
2. $f(x) = x^n$
3. $h(x) = \ln x$

4 Формула Тейлора. Многочлен Тейлора

Теорема 15. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0 и определена в некоторой окрестности этой точки. Тогда $\forall x \in S(x_0)$ имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Или кратко: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

- $P_n(x)$ называют *многочленом* или *полиномом Тейлора.*
- $R_n(x)$ называют *остаточным членов формулы Тейлора.*

Доказательство. Покажем, что многочлен $P_n(x)$ существует. Будем искать многочлен Тейлора в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n \quad (2)$$

где $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ – некоторые константы.

Пусть выполнены условия:

$$P_n(x_0) = f(x_0) \quad P_n'(x) = f'(x) \quad \ldots \quad P_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \qquad (3)$$

$f'(x_0), f''(x_0), \ldots f^{(n)}(x)$ существуют т.к. $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0.

Вычислим $P_n'(x), P_n''(x), \ldots P_n^{(n)}(x)$:

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2(x - x_0) + a_3 \cdot 3(x - 0)^2 + \ldots + a_n \cdot n(x - x_0)^{(n-1)} \\
P_n''(x) &= a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 3 \cdot 2(x - x_0) \\
&\quad + a_4 \cdot 4 \cdot 3(x - 0)^2 + \ldots + a_n \cdot n \cdot (n-1)(x - x_0)^{(n-2)} \\
&\quad \ldots \\
P_n^{(n)}(x) &= a_n n(n-1)(n-2)\ldots 1 = a_n \cdot n!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 = f(x_0) \\
P_n'(x_0) &= 1 \cdot a_1 = f'(x_0) \\
P_n''(x_0) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 = 2f''(x_0) \\
&\ldots \\
P_n^{(n)}(x_0) &= n!a_n = n! \cdot f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

Выразим $a_0, a_1, a_2, \ldots a_3$:

$$a_0 = f(x_0) \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad \ldots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Подставим значения $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ в (2):

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$\square$

Теорема 16. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0, тогда $x \to x_0$:

$$\boxed{R_n(x) = o((x - x_0)^n)}$$

– *форма Пеано.*

Доказательство. Формула Тейлора:

$$f(x) = P_n(x) - R_n(x)$$
$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

В силу условия (3):

$$R_n(x) = f(x_0) - P_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$
$$R'_n(x) = f'(x_0) - P'_n(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$
$$\dots$$
$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0$$

Вычислим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$
$$\dots$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n)}}{n(n-1)(n-2)\dots 1}$$
$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} R_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot 0 = 0$$

Вывод: $Rn(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. □