Аналитическая геометрия. Модуль 2. Лекции

1 Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка:

$$\boxed{x^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

где:

$$A, B, C, D, E, F = const$$
$$A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

1.1 Эллипс

Определение 1. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна и равна $2a$.

F_1, F_2 - фокусы эллипса

Расстояние между фокусами называется *фокальным расстоянием.*

Расстояние от каждой точки эллипса до фокуса называется *фокальным радиусом*

Прямая, которая проходит через фокусы, и прямая, которая проходит через середину этой прямой и перпендикулярной ей, являются *осями симметрии данного эллипса.* Первая прямая называется *большой осью*, а вторая – *малой осью.*

Точка пересечения осей эллипса называется *центром эллипса*, а точки пересечения эллипса с осями называются *вершинами эллипса.*

Уравнение эллипса

Расположим прямоугольную систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром эллипса, а фокусы лежали на оси абцисс.

O – центр эллипса
F_1, F_2 – фокусы эллипса
A_1, A_2, A_3, A_4 – вершины эллипса
$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние
Возьмём точку $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, и составим векторы:

$$\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}$$
$$\overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$$

Тогда:

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$$
$$x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$
$$x^2a^2 + x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$. Получаем *каноническое уравнение эллипса*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

где a – *большая полуось эллипса*, а b – *большая полуось эллипса.*

Отношение фокусного расстояния эллипса к большой оси называется *центриситетом* эллипса.

$$\frac{F_1F_2}{A_3A_1} = \frac{2c}{2a} = \varepsilon$$
$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

Замечание. Т.к. $a < c$, то $0 < \varepsilon < 1$

Центриситет показывает степень "сжатия"эллипса.

Отношение фокального радиуса точки эллипса к расстоянию до некоторой прямой, называемой *директрисой*, постоянно и равно *эксцентриситету.*

Уравнение директрис:

$$d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$$
$$d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$$

Замечание. 1. Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

2. Уравнение мнимого эллипса с центром в точке $O(0,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

3. Если $a = b = R$, то это уравнение окружности:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Для окружности в точке $O(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

4. Если $a < b$, то изображение эллипса "переворачивается"на 90:

1.2 Гипербола

Определение 2. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой их которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянно и равно $2a$.

Прямая, на которой лежат фокусы, и прямая, которая проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы и перпендикулярная ей, называются *осями симметрии гиперболы*. Первая прямая называется *действительной осью*, а вторая – *мнимой осью*.

F_1, F_2 – фокусы

$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние

Точки пересечения действительной и мнимой оси гиперболы называется *центром гиперболы*, а точка пересечения с действительной осью называются *вершинами гиперболы*.

Уравнение гиперболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром гипероболы, а фокусы лежали на оси абцисс.

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

Возьмём произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащей гиперболе.

$$\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}$$
$$\overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$$
$$|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2$$
$$x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4$$
$$x^2a^2 + x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$x^2(a^2 + c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$. Получаем *каноническое уравнение эллипса*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Центриситетом эллипса называется:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Замечание. Т.к. $c > a$, то $\varepsilon > 1$

Замечание. Уравнение сопряжённой гиперболы:

$$\boxed{-\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ или } \boxed{\frac{x^2}{b^2} = -1}$$

Уравнение гиперболы с центром в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)}{a^2} - \frac{(y - y_0)}{b^2} = 1$$

Если $a = b$, то гипербола становится *равносторонней*.
Если:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

то получается вырожденной уравнение – две пересекающиеся прямые:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0(bx - ay)(bx + ay) = 0$$
$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

Эти же уравненения и являются *уравнениями ассимптот.*

Если центр гиперболы $O(x_0, y_0)$, то:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0$$
$$y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + (y_0 + \frac{b}{a}x_0$$

1.3 Парабола

Определение 3. *Параболой* называется геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до некоторой точки, называмой *фокусом*, и фиксированной прямой, называемой *директрисой*, равно.

Уравнение параболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы начало координат совпадало с вершиной параболы.

$$A(-\frac{p}{2}), \quad F(\frac{p}{2}, 0)$$

$$\overrightarrow{AM} = \{x + \frac{p}{2}, a\}, \quad \overrightarrow{FM} = \{x - \frac{p}{2}, y\}$$
$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{FM}|$$
$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left((x - \frac{p}{2}) + y^2\right)}$$
$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$$

Тогда получаем каноническое уравнение параболы с вершиной в $O(0, 0)$:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Если $p > 0$, то ветви параболы направлены *вправо*, если $p < 0$, то ветви направлены *влево*.

Если вершина в точке $Mx_0, y_0)$, тогда:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$$

Уравнение директрисы:

$$d : x = -\frac{p}{2}$$