Математический анализ. Модуль 2. Лекции

1 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Рассмотрим $y = f(x)$ определённую в $S(x_0)$. Пусть x – произвольная точка из $S(x_0)$. Обозначим:

- Δx – приращение аргумента

$$x = x_0 + \Delta x \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = x - x_0$$

- Δy – приращение функции

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Определение 1.1. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции и предел приращения аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если предел *конечен*, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную. Если предел *бесконечен*, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет бесконечную производную.

Дифференцирование – процесс получения производной.

Пример.

$$y = e^x, D_f = \mathbb{R}$$
$$x = x_0 + \Delta x, \forall x \in D_f$$
$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)$$
$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\Delta x}{\Delta x} = e^{x0}$$

Пример.

$$y = \sin(x), D_f = \mathbb{R}$$
$$x = x_0 + \Delta x, \forall x \in D_f$$
$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) + y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) =$$
$$2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$
$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0$$

1.1 Односторонние производные

Определение 1.2. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *справа* или *правосторонней производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа.

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 1.3. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *слева* или *левосторонней производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю слева.

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Теорема 1.1. *О существовании производной функции в точке.* Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную тогда и только тогда, когда она имеет производные и справа, и слева, и они равны между собой.

$$y'(x_0) = y'_+(x_0) = y'_-(x_0)$$

Пример.

$$y = |x|, x_0 = 0$$
$$y = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases} \implies y' = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} y'_+(0) = 1 \\ y'_-(0) = -1 \end{array}\right\}$ – т.к. производные конечные, но различные, то $x_0 = 0$ называется точкой излома

Геометрический смысл: $\nexists$ касательной к функции в точке излома.

Пример.

$$y = x^{\frac{1}{3}}, z_0 = 0$$
$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

1.2 Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Пусть $f(x)$ опредена в $S(x_0)$. Обозначим:

- $f(x_0) = y_0$, $M(x_0, y_0)$
- Δx – приращение функции
- $x = x_0 + \Delta x$
- $N(x0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$
- MN - секущая

При $\Delta x \to 0$ точка N движется вдоль графика функции $y = f(x)$, а секущая MN вращается вдоль графика.

В пределе $\lim_{\Delta x \to 0}$ секущая MN становиться *касательной*.

Определение 1.4. Если существует предельное секущей MN, когда точка N перемещается вдоль графика функции к точке M, это положение называется *касательной* к графику функции в точке M.

$$\triangle MNK : \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\left.\begin{matrix} \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha_0 \\ \lim_{\Delta x \to 0} y'(x_0) \end{matrix}\right\} \implies \boxed{\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0)}$$

где α – угол между секущей и положительным направлением оси OX, а α_0 – угол между касательной и положительным направлением оси OX.

С другой стороны, прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

где k – тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox.

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0) = k$$

Рассмотрим $\forall P(x, y)$ на касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\triangle MPK : \operatorname{tg}\alpha = \frac{PK}{MK}$$
$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0$$
$$y'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Получаем:

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

– уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$

Выводы:

1. Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ох или угловому коэффициенту касательной.

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0 = k$$

2. Механический смысл производной функции $s = f(t)$ в точке t_0 равна мгновенной скорости в момент t_0

$$V(t_0) = s'(t_0)$$

Определение 1.5. *Нормалью* к графику функции $y = f(x)$ называется прямая, перпендикулярная касательной к графику функции в данной точке.

$$l_1 : y_1 = k_1 x + b_1$$
$$l_2 : y_2 = k_2 x + b_2$$
$$l_1 \perp l_2 \iff k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$y - y_0 = y'(x)(x - x_0)$$
$$k_1 = y'(x) \implies k_2 = -\frac{1}{y'(x)} \implies$$
$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'(x)}(x - x_0)}$$

Замечание. Касательная к графику функции существует не в любой точке (точка излома и точка заострения).

Определение 1.6. Кривая, имеющая касательную в любой точке рассматриваемого промежутка, называется *гладкой*.

Вывод. Если $y'(x_0) = \infty$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, параллельно оси ординат и имеет вид $x = x_0$ (нормаль имеет вид $y = y_0$).
Если $y'(x_0) = 0$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = y_0$ (нормаль имеет вид $x = x_0$).

Определение 1.7. *Углом между двумя пересекающимися кривыми* в точке с абциссой x_0 называется угол между касательными, проведёнными в этой точке.

Вывод.

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) \\ y &= f_2(x) \end{aligned} \implies \quad f_1 \cap f_2 = M_0(x_0, y_0) \quad \begin{aligned} y_1 &= k_1 x + b_1 \\ y_2 &= k_2 x + b_2 \end{aligned}$$

$$\varphi - \text{угол между } f_1, f_2 \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1 = f_1(x_0)$$
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2 = f_2(x_0)$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{f_2'(x_0) f_1(x_0)}{1 + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$$
$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = |\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0) f_1'(x_0)}|}$$

2 Дифференцируемость функции в точке

Определение 2.1. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если существует константа A такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$.

Теорема 2.1. *Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.*
Функция $y = f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство. .
Необходимость.
Дано: $y = f(x)$ – дифференцируема в точке x_0.
Доказать: $\exists y'(x)$ – конечное число
Т.к. $y = f(x)$, то $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.
Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) =$$
$$A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) \text{ – по определению}$$
$$\implies y'(x_0) = A = const \implies \exists y'(x_0) \text{ – конечное число.}$$

Достаточность.
Дано: $\exists y'(x_0)$ – конечное число.
Доказать: $y = f(x)$ – дифференцируема в этой точке.
Доказательство:
Т.к. $\exists y'(x)$, то по определению производной

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

По теореме "О связи функции, её предела и некоторой бесконечно малой функции":

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $A = y'(x_0) \implies y = f(x)$ дифференцируема в данной точке. □

Вывод. Формула, выражающая дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид:

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$

Теорема 2.2. *Связь дифференцируемости и непрерывности функции.*
Если функция дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Т.к. $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $y'(x_0) = const$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.
Вычислим:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \to 0} (y'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) \\
&= y'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \\
&= y'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

По определению непрерывной функции $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0. □

Замечание. Если функция непрерывна, она не обязательно дифференцируема!

2.1 Правила дифференцирования

Теорема 2.3. *Арифметические операции.*
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда в этой точке дифференцируемая их сумма, разность, произведение, частное (при условии знаменателя не равного нулю), справедливо равенство:

$$\begin{gathered}
(u \pm v)' = u' \pm v' \\
(u \cdot v)' = u'v + v'u \\
\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}
\end{gathered}$$

Доказательство. Распишем приращения каждой из функций:

$$\begin{cases} \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \end{cases} \implies \begin{cases} u(\Delta x + x) = \Delta u + u(\Delta x) \\ v(\Delta x + x) = \Delta v + v(\Delta x) \end{cases}$$

□

Доказательство. Пусть $y = uv$, тогда:

$$\begin{gathered}
\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\
= (\Delta u + u(x))(\Delta v + v(x)) - u(x)v(x) = \Delta u \Delta v + \Delta u v(x) + \\
+ \Delta v u(x) + u(x)v(x) = \\
\Delta u \Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x).
\end{gathered}$$

Вычислим предел:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$
$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u}_{0} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} + v(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)} + u(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} =$$
$$= v(x)u'(x) + v'(x)u(x) + v'(x) \cdot 0 =$$
$$= \boxed{v(x)u'(x) + u(x)v('x)}$$

Т.к. функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\implies$ $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны в точке x $\implies$ по определению непрерывности функции:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0 \\ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0 \end{cases}$$

□

Доказательство. Пусть $y = \frac{u}{v}$, тогда:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) =$$
$$= \frac{u(x + \Delta x}{v(x + \Delta x} - \frac{u(x)}{v(x)} =$$
$$= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} =$$
$$= \frac{(u(x) + \Delta u)v(x) - u(x)(v(x) + \Delta v)}{(\Delta v + v(x))v(x)} =$$
$$= \frac{u(x) + \Delta u v(x) - u(x)v(x) - u(x)\Delta v}{v^2(x) + v(x)\Delta v} =$$
$$= \frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - v(x_0\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\ &= \frac{v(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) - v(x)\lim_{\Delta x \to 0}\Delta v} = \\ &= \boxed{\frac{v_(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}} \end{aligned}$$

Для доказательства использовали:

- $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$
- $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$
- т.к $v(x)$ – дифференцируема, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности $v(x)$ – непрерывна, $\implies$ по определению непрерывности $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$

□

Теорема 2.4. Производная от постоянной равна нулю.

$$(c)' = 0, \quad c = const$$

Вывод. Константу можно выносить за знак производной.

$$(c \cdot f)' = c \cdot f', \quad c = const$$

Вывод. Производная функции $y = \frac{1}{v(x)}$ имеет вид:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{1}{v^2(x)}v'(x)$$

Определение 2.2. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале*, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Теорема 2.5. *Производная сложной функции.*
Пусть функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a)$. Тогда

сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке $x = a$.

$$F'(x)|_{x=a} = (f(g(x))')_{x=a} = f'_u(b) \cdot g'_x(a)$$

Доказательство. Т.к. функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по определению $\implies$

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$. Т.к. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке b, то по определению дифференцируемости $\implies$

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u \tag{2}$$

где $\beta(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$.
Подставим (1) в (2). Тогда:

$$\Delta y = f'(b) \cdot (g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) + \beta(\Delta u)\,(g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) =$$
$$= f'(b) \cdot g'(a)\Delta x + \Delta x\,(f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)) = \Delta F$$

Обозначим: $\gamma(\Delta x) = f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(x)$. В итоге получаем $\Delta F = f'(b)g'(a)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x$.
$f(b)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ (как производная постоянной на б.м.ф.). Т.к. $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = a \implies$ по определению непрерывности $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ или при $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$. $g'(a)\beta(\Delta u)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ как производная на б.м.ф. $\beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ (как производная двую б.м.ф). Следовательно, $\gamma(x)$ – б.м.ф при $x \to 0$ как сумма конечного числа б.м.ф.
Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(b)g'(a) + \gamma(\Delta x)) = f(b)g'(a) + 0 = f'(b)g'(a).$$

$\square$

Теорема 2.6. *Производная обратной функции.*
Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = 0$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)$ и пусть для неё существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $b = f(a)$. Тогда существует производная обратной функции и она равна:

$$\boxed{g'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

Доказательство. Т.к. функция $x = g(y)$ однозначно определена, то соответственно при $\Delta y \neq 0$, $\Delta x \neq 0$. Т.к. функция $x = g(y)$ непрерывна в соответствующей точке b, то $\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ или $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

$$g'(b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$
$$= \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Пример.

$$y = \arcsin(x), \quad x = \sin(y), y' = \frac{1}{x'}$$
$$y' = (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$x' = \cos(y)$$
$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$$
$$\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$$
$$\cos(y) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(y)}$$
$$y = \arcsin(x)$$
$$D_f = [-1, 1], E_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$y \in [-\frac{\pi}{2}]$$

2.2 Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда $\forall x \in (a, b)$ существует производная $y' = f'(x)$.
Функция:

$$y'' = (y')' = f''(x)$$

называется *производной второго порядка* или *второй производной*.

Определение 2.3. Производной n-ого порядка или n-производной функции $y = f(x)$ называется производная от (n - 1)-ой производной функции $y = f(x)$.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

$C[a, b]$ – множество непрерывных функций на [a,b]
$C^1[a, b]$ – множество функций непрерывных вместе со своей производной на $[a, b]$ или *непрерывно-дифференцируемых* функций.

Определение 2.4. Производная порядка выше первого называется *производной высшего порядка.*

2.3 Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Тогда по определению дифференцируемой функции приращение:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$. Если $f'(x_0) \neq 0$, то $f'(x_0)\Delta X$ – имеет один порядок малости, то $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – б.м.ф более высокого порядка малости, чем $f'(x_0)\Delta x$. Тогда по теореме о сумме б.м.ф разного порядка малости $\implies$ $\Delta y \sim f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$. По определению главной части $\implies$ $f'(x_0)\Delta x$ – главная часть равенства (1) приращения функции Δy.

Определение 2.5. *Дифференциалом функции* $y = f(x_0)$ называется главная часть приращения функции Δy или первое слагаемое в равенстве (1).

$$dy = f'(x_0)\Delta x \tag{2}$$

Если $f'(x_0) = 0$, то $dy = 0$, но $f'(x_0)\Delta x$ уже не является главной частью приращения функции Δy.

Пусть $y = x$. Тогда по определению дифференциала получится $\implies$ $dy = (x)'\Delta x = 1\Delta x$. С другой стороны, $y = x \implies dx = \Delta x$. Отсюда получаем вывод, что дифференциал независимой переменной равен её приращению.

Подставляем $\Delta x = dx$ в (2) $\implies$

$$\boxed{dy = f'(x_0)dx} \tag{3}$$

Если $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), тогда:

$$\forall x \in (a, b) : \boxed{dy = f'(x)dx} \tag{4}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}} \tag{5}$$

Вывод: производная функции представима в виде отношения дифференциалов функции и независимой переменной.

2.4 Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке.

$$M(x_0, y_0), \quad M(x, y), \quad \Delta x \text{ – приращение аргумента}$$
$$MK = \Delta y, \quad M_0K = \Delta x$$
$$PK = dy$$
$$dy = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$
$$\alpha(\Delta x) \text{ – б.м.ф. при } \Delta x \to 0$$
$$dy = f'(x_0)\Delta x$$
$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)} \text{ – уравнение касательной}$$
$$y - y_0 = \Delta y$$
$$f'(x_0)(x - x_0) - f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx = dy$$
$$dy = \Delta y$$

2.5 Инвариантность формы первого дифференциала

Формула первого дифференциала

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \tag{3}$$

x - независимая переменная.

Докажем, что формула (3) верна и в том случае, когда x – функция от некоторой другой переменной.

Теорема 2.7. *Инвариантность формы записи первого дифференциала.* Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией другого аргумента.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$. Тогда можно задать сложную функцию:

$$F(t) = y = f(\varphi(t))$$

По определению дифференциала функции:

$$dy = F'(t)dt \tag{6}$$

По теореме о производной сложной функции:

$$F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t) \tag{7}$$

Подставим (7) в (6):

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt \tag{8}$$

По определению дифференциала функции $dx = \varphi'(t)dt \quad (9)$. Подставим (9) в (8):

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Получили формулу (3). □

2.6 Дифференциалы высшего порядка

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b), тогда $\forall x \in (a, b) \implies dy = f'(x)dx$. Дифференциал – это функция:

$$dy = y(x)$$

Вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка называется дифференциал от первого дифференциала.

$$d^2y = d(dy)$$

Определение 2.6. *n-ым дифференциалом* или *дифференциалом n-ого порядка* называется дифференциал от дифференциала $n - 1$ порядка.

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right), \quad n = 2, 3 \dots$$

Вывод. Свойством инвариантности обладает только первый дифференциал

2.7 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 2.8. *Теорема Ферма* или *теорема о нулях производной.* Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и во внутренней точке C этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = c$ принимает наибольшее значение на промежутке X. Тогда $\forall x \in X \implies f(x) \leq f(c)$. Дадим приращение Δx точке $x = c$. Тогда $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Пусть

$$\exists f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \Delta x > 0, \Delta x \to 0+, x \to c+$$

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \leq 0$$

$$2) \Delta x < 0, \Delta x \to 0-, x \to c-$$

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{-}\right) \geq 0$$

По теореме о существовании производной функции в точке:

$$f'_+(c) = -f'_-(c) = 0$$

□

Геометрический смысл

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $M(c, f(c))$ параллельна оси абсцисс. $f(c)$ – наибольшее значение функции.

Теорема 2.9. *Теорема Ролля.* Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке (a, b)
2. Дифференцируема на интервале (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b), то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Возможны два случая:

1. Наибольше и наименьшее значение достигаются на границе, т.е. в точке a и в точке b. Это означает, что $m = M$, где m – наименьшее значение, а M – наибольшее. Из этого следует, что функция $y = f(x) = const$ на (a, b). Соответственно $\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$
2. Когда наибольшее или наименьшее значение достигаются во внутренней точке (a, b). Тогда для функции $y = f(x)$ справедлива теорема Ферма, согласно которой $\exists c \in (a, b), f'(c) = 0$.

□

Вывод. Между двумя нулями функции существует хотя бы один нуль производной.

Теорема 2.10. *Теорема Лагранжа.*
Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных функций. Существует конечная производная функции $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

следовательно по необходимому и достаточному условию дифференцируемости будет верно $F(x)$ – дифференцируема на (a, b). Покажем, что $F(a) = F(b)$:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \\ F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

Значит функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда по теореме Ролля $\exists c \in (a, b), F'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} &F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \\ &f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \end{aligned}$$

□

Геометрический смысл

$$\begin{aligned} A(a, f(a)), &\quad B(b, f(b)) \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} &\quad \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Теорема 2.11. *Теорема Коши.*
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) f'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(a) - \varphi(b)}(\varphi(x) - \varphi(a))$$

Докажем применимость Теоремы Ролля:

1. $F(x)$ непрервына на $[a, b]$ как линейная комбинация непрерывных

функций.

2. $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ как линейная комбинация дифференцируемых функций.

3. $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} (\varphi(a) - \varphi(a)) = 0$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{\varphi(b) - \varphi(a)}} \cancel{(\varphi(b) - \varphi(a))} = 0$$

Значит, функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля, $\implies \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$. Вычислим:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(x)$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = f'(c)$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

□

3 Правило Лопиталя-Бернулли

Теорема 3.1. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

- Определены и дифференцируемы в $\mathring{S}(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$
- $\forall x \in \mathring{S}(x_0) \quad \varphi'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 нулём:

$$f(x_0) = 0 \quad \varphi(x_0) = 0$$

По условию:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 = \varphi(x_0)$$

$f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0.
По условию функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в точке $\mathring{s}(x_0) \implies$ по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности $\implies f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $\mathring{s}(x_0)$. Таким образом $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $S(x_0)$.

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию т.Коши на $[x_0, x]$. Тогда по теореме Коши $\implies$

$$\exists c \in [x_0, x] : \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{*}$$

Т.к. $f(x_0) = 0$ и $\varphi(x_0) = 0 \implies$

$$(*) \quad \boxed{\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi(c)}}$$

Т.к. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \implies$ правая часть (*):

$$\lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Левая часть (*):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Получаем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

□

Теорема 3.2. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

- Определены и дифференцируемы в $\mathring{S})(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$
- $\forall x \in \mathring{S}(x_0) \quad \varphi'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

3.1 Сравнение показательной, степенной и логарифмической функции на бесконечности

Пусть:

$$f(x) = x^n$$
$$g(x) = a^x$$
$$h(x) = \ln x$$

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{a^x\ln a}$$
$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 1}{a^x(\ln a)^n} =$$
$$= \frac{n!}{\ln^n a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x} = \frac{n!}{\ln^n a} = 0.$$

Значит a^x растёт быстрее, чем x^n при $x\to\infty$ или $x^n = o(a^x)$ при $x\to+\infty$.

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0$$

Значит, x^n растёт быстрее, чем $\ln x$ при $x\to+\infty$ $\ln x = o(x^n)$ при $x\to+\infty$.

Вывод: на бесконечности функции расположены в таком порядке:

1. $g(x) = a^x$ – самая быстрорастущая функция

2. $f(x) = x^n$

3. $h(x) = \ln x$

4 Формула Тейлора. Многочлен Тейлора

Теорема 4.1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0 и определена в некоторой окрестности этой точки. Тогда $\forall x\in S(x_0)$ имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Или кратко: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где:

$$P_n(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

- $P_n(x)$ называют *многочленом* или *полиномом Тейлора.*
- $R_n(x)$ называют *остаточным членов формулы Тейлора.*

Доказательство. Покажем, что многочлен $P_n(x)$ существует. Будем искать многочлен Тейлора в виде:

$$P_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n \quad (2)$$

где $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ – некоторые константы.

Пусть выполнены условия:

$$P_n(x_0) = f(x_0) \quad P_n'(x) = f'(x) \quad \ldots \quad P_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \qquad (3)$$

$f'(x_0), f''(x_0), \ldots f^{(n)}(x)$ существуют т.к. $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0.

Вычислим $P_n'(x), P_n''(x), \ldots P_n^{(n)}(x)$:

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2(x - x_0) + a_3 \cdot 3(x-0)^2 + \ldots + a_n \cdot n(x-x_0)^{(n-1)}\\
P_n''(x) &= a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 3 \cdot 2(x-x_0)\\
&\quad + a_4 \cdot 4 \cdot 3(x-0)^2 + \ldots + a_n \cdot n \cdot (n-1)(x-x_0)^{(n-2)}\\
&\ldots\\
P_n^{(n)}(x) &= a_n n(n-1)(n-2)\ldots 1 = a_n \cdot n!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 = f(x_0)\\
P_n'(x_0) &= 1 \cdot a_1 = f'(x_0)\\
P_n''(x_0) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 = 2f''(x_0)\\
&\ldots\\
P_n^{(n)}(x_0) &= n!a_n = n! \cdot f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

Выразим $a_0, a_1, a_2, \ldots a_3$:

$$a_0 = f(x_0) \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad \ldots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Подставим значения $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ в (2):

$$P_n(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

□

Теорема 4.2. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0, тогда $x \to x_0$:

$$\boxed{R_n(x) = o((x - x_0)^n)}$$

– *форма Пеано.*

Доказательство. Формула Тейлора:

$$f(x) = P_n(x) - R_n(x)$$
$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

В силу условия (3):

$$R_n(x) = f(x_0) - P_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$
$$R'_n(x) = f'(x_0) - P'_n(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$
$$\dots$$
$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0$$

Вычислим:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$
$$\dots$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n)}}{n(n-1)(n-2)\dots 1}$$
$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} R_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot 0 = 0$$

Вывод: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. □

Теорема 4.3. Пусть функция $y = f(x)$ $(n + 1)$ дифференцируема в $\mathring{S}(x_0)$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0)$ $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

$$\boxed{R_n(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$$

где $c \in \mathring{S}(x_0)$. Такая форма записи остаточного члена называется *формой Лагранжа.*

Доказательство.

$$f(x) = P - n(x) + R_n(x)$$

Будем считать $R_n(x) = \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $\varphi(x)$ – неизвестная функция.

Введём вспомогательную функцию:

$$\begin{aligned}F(t) &= P_n(t) + R_n(t) - f(x)\\ &= f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots\\ &+ \frac{f^{(n)(t)}}{n!}(x-t)^n + \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\end{aligned}$$

$\square$

ДОДЕЛАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО!

4.0.1 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!} + o((x-x_0)^n)$$

4.0.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лангранжа

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!} + \frac{f^{(n+1)}\left(x_0\theta(x-x_0)\right)}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

4.1 Формулы Маклорена

Частный случай формулы Тейлора при $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + R_n(x)$$

Остаточный член в форме Пеано:

$$R_n(x) = o(x^n)$$

Остаточный член в формет Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

4.2 Разложение основных элементарных функций по формулам Маклорена

1) $y = e^x$, $x_0 = 0$

$$f'(x) = f''(x) = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$$
$$f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$
$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Вывод.

$$e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + R_n(x)$$

Вывод.

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n-1)}x^{2n-1} + R_{2n}$$

Вывод.

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{2n}x^{2n} + R_{2n+1}(x)$$

Вывод.

$$a^x = 1 + \frac{\ln(a)}{1!}x + \frac{\ln^2(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^{n+1}}{n!}x^n$$

Вывод.

$$\operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} 2x - 1\right)$$

Вывод.

$$\operatorname{ch} x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} 2x + 1\right)$$

2) $y = f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + 1\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''''(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x\right)$$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(x) &= 1 \\
f''(x) &= 0 \\
f'''(x) &= -1 \\
f''''(x) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \ldots + \frac{\left(\sin \frac{2n}{2}\right)}{n!}x^n + R_n(x) \\
\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^k + 1}{(\frac{2k-1}{!}}x^{2k-1} + R_{2k}(x)
\end{gathered}
$$

Остаточны член в форме Лагранжа

$$
\begin{gathered}
y = f(x) = \sin(x), x_0 = 0 \\
R_{2k}(x) = \frac{f^{(2k-1)}(\theta x)}{(2k+1)}x^{2k+1} = \\
= \frac{\sin(\theta x + (2k+1))\frac{\pi}{2}}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \\
= \frac{\sin(\theta x - \pi k + \frac{\pi}{2})}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{(-1)^k \cos\theta x}{(2k+1)!}x^{2k+1}
\end{gathered}
$$

3) $y = f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x = \cos\left(x + 1\frac{\pi}{2}\right) \\
f''(x) &= -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \\
f'''(x) &= \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \\
f''''(x) &= \cos x = \cos\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= 0 \\
f''(0) &= -1 \\
f'''(0) &= 0 \\
f''''(0) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{0}{5}x^5 + \ldots + \frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n!}x^n + R_n(x) \\
\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^2k
\end{gathered}
$$

Остаточный член в форме Лагранжа

$$R_{2k+1}(x) = \frac{f^{(2k+2)}(\theta x)}{(2k+1)!}x^{2n+1} == \frac{-\cos(\theta x + \pi k)}{(2k+2)!}x^{2k+2} =$$
$$= \frac{(-1)(-1)\cos\theta x}{(2k+2)!}x^{2k+2} == \frac{(-1)^{k+1}\cos\theta x}{(2k+2)!}x^{2k+2}$$

4.3 Лекция 13.12.23

4. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$
$$\dots$$
$$f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$$
$$f^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$$

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = \alpha$$
$$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$
$$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$
$$\dots$$
$$f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + R_n(x)$$
$$R_n(x) = o(x^n)$$
$$R_n(x) = \{\frac{f^{(n+1)}\theta x}{(x+1)!}x^{(n+1)}\}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha+1}x^{n+1}$$

5. $y = f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$
$$f''(x) = -1 \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = -1 \cdot (1+x)^{-2}$$
$$f'''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(1+x)^3} = -1 \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3}$$
$$\dots$$
$$f^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(1-x)^{-n}$$

$$f'(0) = 1 = 0!$$
$$f''(0) = -1 = (-1)1!$$
$$f'''(0) = 2 = 2!$$
$$f''(0) = (-1)3!$$
$$\dots$$
$$f^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{0!}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} + R_n(x)$$
$$\ln(1+x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_n(x)$$
$$R_n(x) = o(x^n)$$
$$R_n(x) = \{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}n!(1+\theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+2}(1+\theta x)^{-(n+1)}}{n+1}x^{n+1}$$

5 Вертикальные, наклонные, горизонтальные ассимптоты

Определение 5.1. *Ассимптотой* графика функции $y = f(x)$ называется прямая расстояние до которой от точки, лежащей на графике, стремится к нулю при удалении от начала координат.

Определение 5.2. Прямая $x = a$ называется *вертикальной ассимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$ равен ∞.

Пример.

$$y = \frac{1}{x-a}$$
$$\lim_{x\to a-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$
$$\lim_{x\to a+} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

$x = a$ – вертикальная ассимптота.

Пример.

$$y = \ln x, \quad D_f = (0, +\infty)$$
$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$

$x = 0$ – вертикальная ассимптота правая.

Вывод: вертикальные ассимптоты ищем среди точек разрыва функции и граничных точек.

Определение 5.3. Прямая $y = kx+b$ называется наклонной ассимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если сама функция представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф при $x \to \pm\infty$.

Теорема 5.1. *Необходимое и достаточной условие существования наклонной ассимптоты.*
График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to \pm\infty$ наклонную ассимптоту тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела:

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) \end{cases} \tag{*}$$

Доказательство. *Необходимость.*
Дано $y = kx + b$ наклонная ассимптота. Доказать $\exists$ пределы (*).
По условию $y = kx + b$ – наклонная ассимптота $\implies$ по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \pm\infty$. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{kx+b+\alpha(x)}{x} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} (k + b\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\alpha(x)) \\ &= k + b \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\alpha(x) \\ &= k + b\cdot 0 + 0 = k \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение:

$$f(x) - kx = kx + b + \alpha(x) - kx = b + \alpha(x)$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(b + \alpha(x)) = b$$

Достаточность.
Дано $\exists$ конечные пределы (*). Доказать $y = kx+b$ – наклонная ассимптота.

$\exists$ конечный предел $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$ По теореме о связи функции, её предела и б.м.ф. $\implies$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

при $x \to \pm\infty$. Выразим $f(x)$:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ б.м.ф при $x \to \pm\infty$. По определению $\implies$ $y = kx + b$ – наклонная ассимптота к графику функции $y = f(x)$ $\square$

Определение 5.4. Прямая $y = b$ нельзя горизонтальной ассимптотой графика функции $y = f(x)$ х, если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

Вывод. Горизонтальные ассимптоты являются частным случаем наклонных при $k = 0$.

6 Исследование по первой производной

Определение 6.1. Функция $y = f(x)$, определённая на интервале (a, b) *возрастает* (*убывает*) на этом интервале, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких что $x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1))$.

Определение 6.2. Функция $y = f(x)$, определённая на интервале (a, b) *не убывает* (*не возрастает*) на этом интервале, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких что $x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1) \quad (f(x_2) \leq f(x_1))$.

Определение 6.3. Возрастающая + убывающая функция – называются *строго монотонными* .

Определение 6.4. Невозрастающая + неубывающая функция – называются *монотонными*.

Теорема 6.1. *Необходимое и достаточное условие невозрастания (неубывания) дифференцируемой функции.*
Дифференцируемая на интервале (a, b) не возрастает (не убывает) на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) \le 0$ $(f'(x) \ge 0)$ $\forall x \in (a, b)$.

Доказательство. *Необходимость.*
Дано: $y = f(x)$ не возрастает на (a, b).
Доказать: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \le 0$.

$$\forall x \in (a, b)$$

Δx – приращение аргумента

$$x \to x + \Delta x$$
$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

– приращение функции.
1 случай: $\Delta x > 0$:
т.к. $y = f(x)$ не возрастает на a, b.

$$y(x + \Delta x) \le y(x)$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \le 0.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{+}{-}\right) \le 0$.

2 случай: $\Delta x < 0$: т.к. $y = f(x)$ не возрастает на a, b.

$$y(x + \Delta x) \ge y(x)$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \ge 0.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{+}{-}\right) \le 0$.

По теореме о предельном перехорде в неравенстве:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$$

По определению производной $f'(x) \le 0$
Достаточность.
Дано: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \le 0$. Доказать: $y = f(x)$ не возрастает на a, b.

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_2 > x_1$$

Рассмотрим $[x_1, x_2]$. Функция на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывность на $[x_1, x_2]$.
   По условию $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). По теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\implies y = f(x)$ – непрерывна на $[x_1, x_2]$.

2. дифференцируемость на (x_1, x_2) т.к. функция по условию дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Т.к. $x_2 > x_1 \implies x_2 - x_1 > 0$. По условию $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b) \implies f'(c) \leq 0$.
Тогда:

$$\begin{gathered} f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \\ \implies f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \text{ при } x_2 > x_1 \\ f(x_2) \leq f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1 \end{gathered}$$

$\implies$ по определению функция $y = f(x)$ не возрастает на (a, b). □

Для неубывающей функции:

Доказательство. *Необходимость.*
Дано: $y = f(x)$ не убывает на (a, b).
Доказать: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$.

$$\forall x \in (a, b)$$

Δx – приращение аргумента

$$x \to x + \Delta x \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

– приращение функции.
1 случай: $\Delta x > 0$:
т.к. $y = f(x)$ не убывает на a, b.

$$y(x + \Delta x) \geq y(x)$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \leq 0.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \geq 0$.

2 случай: $\Delta x < 0$: т.к. $y = f(x)$ не возрастает на a, b.

$$y(x + \Delta x) \leq y(x)$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \leq 0.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \geq 0$.

По теореме о предельном перехорде в неравенстве:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

По определению производной $f'(x) \leq 0$

Достаточность.

Дано: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$. Доказать: $y = f(x)$ не убывает на a, b.

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_2 > x_1$$

Рассмотрим $[x_1, x_2]$. Функция на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывность на $[x_1, x_2]$.
   По условию $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). По теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\implies y = f(x)$ – непрерывна на $[x_1, x_2]$.

2. Дифференцируемость на (x_1, x_2) т.к. функция по условию дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Т.к. $x_2 > x_1 \implies x_2 - x_1 > 0$. По условию $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \implies f'(c) \geq 0$.

Тогда:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$
$$\implies f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \text{ при } x_2 > x_1$$
$$f(x_2) \geq f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1$$

$\implies$ по определению функция $y = f(x)$ не убывает на (a, b). $\square$

Теорема 6.2. *Необходимое условиве строгой монотонности.*
Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на это м интервале, то $\forall x \in (a, b)$ верно неравенство $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$.

Теорема 6.3. *Достаточное условие строгой монотонности.*
Если для дифференцируемой на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ выполнены условия:

1. $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ $\forall x \in (a, b)$.

2. $f'(x)$ не обращается в ноль ни на каком промежутке $I \subseteq (a, b)$, то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b).

6.1 Экстремумы функции

Определение 6.5. Пусть $y = f(x)$ определана на интервале (a, b), $\quad x_0 \in (a, b)$. Тогда:

1. Если $\exists \mathring{S}(x_0), \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0), \quad f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 – точка локального максимумаю $y = y(x_0)$ – локальный максимум.
2. Если $\exists \mathring{S}(x_0) : \forall x \in \mathring{S}(x_0), f(x) \geq f(x_0)$, то x_0 – точка локального минимума. $y = y(x_0)$ – локальный максимум.

Определение 6.6. Точки локального максимума и минимума называются *точками экстремума.*

Определение 6.7. Локальный максимум и локальный минимум называются *экстремума.*

Теорема 6.4. *Необходимое условие существования экстремума.*
Если $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ существует экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Пример.

$$y = x^2, \quad x_0 = 0$$
$$y' = 2x \quad y'(0) = 0$$

Пример.

$$y = x^3, \quad x_0 = 0 \text{ – не явл. т. экстремума!}$$
$$y' = 3x^2 \quad y'(0) = 0$$

Определение 6.8. Точки, в которых производная функции обращается в ноль называются *стационарными.*

$$f'(x_0) = 0 \implies x_0 \text{ – стационарная точка}$$

Определение 6.9. Точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует, называются *критическими точками первого порядка.*

Пример.

$$y = |x|, x_0 = 0 - \text{точка минимума}$$
$$\text{но} \quad \nexists y'$$

Пример.

$$y = x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 0 - \text{точка минимума}$$
$$y' = \frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt{x}}, \quad \nexists y'(x_0)$$

Вывод: точки экстремума могут быть двух видов:

1. $f'(x) = 0$ – гладкий экстремум.
2. $\nexists f'(x)$ – острый экстремум.

Теорема 6.5. *Первый достаточный признак локального экстремума.* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в $S(x_0)$, где x_0 – критическая точка первого порядка; функция дифференцируема в $\mathring{S}(x_0)$. Тогда если проивзодная функции меняет свой знак при переходе черех точку x_0, то эта точка x_0 – точка экстремума. Причём:

1. Если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимума.
2. Если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Доказательство. $\forall x \in S(x_0)$. Пусть $x > x_0$, тогда рассматриваем отрезок $[x_0, x]$. Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывна на $[x_0, x]$, т.к. по условию функция непрерывна в $S(x_0)$, а следовательно $y = f(x)$ будет непрерывна и на меньшем промежутке $[x_0, x]$.
2. Дифференцируема на (x_0, x), т.к. по условия функция непрерывна в $\mathring{S}(x_0) \implies y = f(x)$ дифференцируема на (x_0, x)

   По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_0, x)$

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При $x > x_0$ $x - x_0 > 0$. По условию
1) при $x > x_0$ $\quad f'(x) < 0 \quad \implies f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \quad \implies f(x) < f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального максимума. 2) при $x < x_0$ $\quad f'(x) > 0 \quad \implies f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \implies f(x) > f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального минимума.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x, x_0)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Т.к. $x < x_0$, то $x - x_0 < 0 \implies x_0 - x > 0$. По условию
1) при $x < x_0$ $f'(x) > 0 \implies f'(c) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} > 0 \implies f(x_0) > f(x)$ по определению строгого x_0 – точка локального максимума. 2) при $x > x_0$ $f'(x) > 0 \implies f'(c) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} <$ ‘$0 \implies f(x) < f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального минимума. □

Теорема 6.6. *Второй достаточный признак локального экстремума.* Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строго максимума.
2. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строго минимума.

Доказательство. Разложим функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Т.к. $f'(x_0) = 0$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$
$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Знак $f(x) - f(x_0)$ определяет $f''(x_0)$, т.к. $o((x - x_0)^2)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$. Если $f(x) - f(x_0) < 0$ то $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in S(x_0)$ По определению x_0 – точка локального максимума.

Если $f(x) - f(x_0) > 0$ то $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in S(x_0)$ По определению x_0 – точка локального минимума. □

7 Исследование по второй производной

Определение 7.1. Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпуклый (выпуклый вверх) на этом интервале, если касательная к нему в любой точке этого интервала (кроме точки касания) лежит выше графика функции.

Определение 7.2. Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) вогнутый (выпуклый вниз) на этом интервале, если касательная к нему в любой точке этого интервала (кроме точки касания) лежит ниже графика функции.

Теорема 7.1. *Достаточное условие выпуклости функции.*
Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b). Тогда:

1. Если $f''(x) < 0 \forall x \in (a,b)$, то график функции *выпуклый вверх* на этом интервале
2. Если $f''(x) > 0 \forall x \in (a,b)$, то график функции *выпуклый вниз* на этом интервале

Доказательство.

$$x_0 \in (a,b), y_0 = f(x_0) \implies M_0(x_0,y_0)$$

Построим в точке M_0 касательную к графику функции $y = f(x)$. Запишем уравнение касательной:

$$y = y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Преобразуем:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{0}$$

Представим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \quad c \in S(x_0) \tag{2}$$

Вычтем (1) из (2):

$$f(x) - y_k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)^2$$
$$f(x) - y_k = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

1) По условию $f''(x) < 0 \forall x \in (a,b)$, то $f''(c) < 0 \implies f(x) - y_0 < 0 \implies f(x) < y_k$, а значит по определению выпуклой функции $\implies$ график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх. 2) По условию $f''(x) > 0 \forall x \in (a,b)$, то $f''(c) > 0 \implies f(x) - y_0 > 0 \implies f(x) > y_k$, а значит по определению выпуклой функции $\implies$ график функции $y = f(x)$ выпуклый вниз. □

Теорема 7.2. *Необходимое условие существование точки перегиба.*
Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет *непрерывную* вторую производную и $M(x_0,y_0)$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Докажем методом от противного. Предположим, что $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ $\exists S(x_0) \forall x \in S(x_0) : f''(x) > 0$. Это противоречит тому, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка перегиба. Предположим, что $f''(x_0) < 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ $\exists S(x_0) \forall x \in S(x_0) : f''(x) < 0$. Это противоречит тому, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка перегиба. $\square$

Определение 7.3. Точки из области определения функции, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками* второго порядка.

Теорема 7.3. *Достаточное условие существования точки перегиба.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, дважды дифференцируема в $S(x_0)$ и вторая производная меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0. Тогда $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Доказательство. По условию $\exists S(x_0)$ в которой вторая производная функции $y = f(x)$ меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0 (даёт достаточное условие выпуклости функции). Это означает, что график функции $y = f(x)$ имеет различные направление выпуклости по разные стороны от точки x_0. По определению точки перегиба $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$. $\square$