

Аналитическая геометрия. Лекции

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранным на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**. Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два вектора называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 5. Вектор, длина которого равна 1 называется **единичным вектором** или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 7. Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется \vec{c} , который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора \vec{a} совмещают с началом вектора \vec{b}

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора \vec{a} к концу вектора \vec{b} и будет вектором \vec{c} .

Определение 8. Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов \vec{a} и \vec{b}
2. Дистраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором \vec{c} .

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

Определение 9. Произведение вектора \vec{a} на число λ называется вектор \vec{c} , который будет коллинеарен вектору \vec{a} , длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\lambda > 0$, и противоположен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad (3)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{b} = \vec{a} \quad (4)$$

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (5)$$

$$\lambda (p\vec{a}) = (\lambda p) \vec{a} \quad (6)$$

$$(\lambda + q) \vec{a} = \lambda \vec{a} + q \vec{a} \quad (7)$$

Определение 10. Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала векторов \vec{a} и \vec{b}
2. Вектор, который идёт из конца вектора \vec{b} в начало вектора \vec{a} и есть искомый вектор \vec{c} .

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точки A на прямую L** .

Определение 12. Пусть имеем вектор \overrightarrow{AB} . Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора \overrightarrow{AB} на прямую L , а O_b - это ортогональная проекция конца вектора \overrightarrow{AB} на прямую L . Тогда вектор $\overrightarrow{O_a O_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L , называется **ортогональной проекцией вектора \overrightarrow{AB} на прямую L** .

Определение 13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\overrightarrow{O_a O_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L , и со знаком $-$, если нет.

Определение 14. Длину вектора $\overrightarrow{O_a O_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, называют **ортогональной проекцией вектора \overrightarrow{AB} на ось \vec{l}** .

$$pr_{\vec{l}} \overrightarrow{AB}.$$

Определение 15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор \vec{l} называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора \vec{l}** .

Замечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1. Ортогональная проекция вектора \vec{a} на направление ненулевого вектора \vec{l} равна произведению длины вектора \vec{l} на $\cos \phi = \widehat{\vec{a} \vec{l}}$

Теорема 2. Ортогональная проекция суммы векторов \vec{a} и \vec{b} на направление ненулевого вектора \vec{l} равна сумме ортогональных проекций вектора \vec{a} и \vec{b} на направление ненулевого вектора \vec{l} .

$$pr_{\vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{l}} \vec{a} + pr_{\vec{l}} \vec{b}.$$

Теорема 3. Ортогональная проекция вектора произведения \vec{a} и числа λ на направление ненулевого вектора \vec{l} равна произведению числа λ на

ортогональную проекцию вектора \vec{a} .

$$np_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\vec{l}}\vec{a}.$$

2 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 16.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$$

где λ_i — произвольные числа

называется линейной комбинацией системы векторов \vec{a} , а числа λ — коэффициентами линейной комбинации.

Если $\forall \lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *тривиальной*.
Если $\neg \forall \lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *нетривиальной*.

Определение 17. Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейной комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned}\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n &= \vec{0} \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 &= 0\end{aligned}$$

Определение 18. Система векторов называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

Теорема 4. Система векторов линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

Доказательство. 1). Пусть система векторов линейно-зависима. Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\neq 0 \\ \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n &= \vec{0} \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n\end{aligned}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$.

Получаем:

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$$

Что и требовалось доказать. \square

Доказательство. 2) Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов системы (возьмем \vec{a}_1 . Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a}_1 - \lambda_2 \vec{a}_2 - \lambda_3 \vec{a}_3 - \dots - \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой*. \square

2.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

Теорема 5. Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

Доказательство. 1) Необходимость.

Пусть система векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2 линейно-зависима. Тогда по определению \exists нетривиальная линейная зависимость $= \vec{0}$ этих векторов. Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2$. Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тогда $\vec{a}_1 = \beta \vec{a}_2$. По определению произведение вектора на число \vec{a}_1 и \vec{a}_2 коллинеарны. 2) Достаточность.

Пусть $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Тогда $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ (по определению произведения вектора на число). Перенесем все влево:

$$\vec{a}_1 - \lambda \vec{a}_2 = \vec{0}$$

По определению \vec{a}_1 и \vec{a}_2 являются линейной зависимостью. \square

Теорема 6. Три вектора линейной зависимости тогда и только тогда, когда они *копланарны*.

Доказательство. (1) Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq 0 \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 \end{aligned}$$

Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3$$

Совместим начала \vec{a}_2 и \vec{a}_3 и построим $\beta_2 \vec{a}_2$ и $\beta_3 \vec{a}_3$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$. Т.к. \vec{a}_3 лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

(2) Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим A_i . Проведём через A_1 прямую, параллельную \vec{a}_3 .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA'_2} &\parallel \overrightarrow{OA_2} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA'_2} &= \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} \\ \overrightarrow{OA'_3} &\parallel \overrightarrow{OA_3} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA'_3} &= \lambda_3 \overrightarrow{OA_3} \end{aligned}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов:

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA'_2} = \overrightarrow{OA'_3}, \text{ то } \vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$$

□

Теорема 7. Любые 4 вектора линейно зависимы.

3 Базис

Определение 19. Базис - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- V_1 - пространство всех коллинеарных векторов
- V_2 - пространство всех компланарных векторов
- V_3 - пространство всех свободных векторов

Пространство V_1

Пусть $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$, тогда $\forall \vec{x} \in V_1$ ($\vec{x} = \lambda \vec{e}$, т.к. $\vec{x} \parallel \vec{e}$). Тогда $\vec{x} = \lambda \vec{e}$ называется разложением \vec{x} по базису \vec{e} в V_1 , а λ - координаты \vec{x} в этом базисе.

Пространство V_2

Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в V_2 является базисом V_2 .

Пусть в V_2 $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$, тогда эти вектора можно рассматривать как базис V_2 , $\vec{x} \in V_2 \Rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}$ - линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

- разложение вектора \vec{x} по базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 . λ_1 и λ_2 называются координатами \vec{x} в этом базисе. Базис в V_2 называется ортогональным, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

Пространство V_3

Любая упорядоченная тройка некопланарных векторов в V_3 называется базисом в V_3 .

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - упорядоченная тройка векторов в V_3 , $\vec{x} \in V_3$. Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 7). По теореме 4:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

Данное выражение называется разложением \vec{x} по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в V_3 , а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами \vec{x} в базисе.

Базис в V_3 , если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Определение 20. Ортонормированный базис - ортогональный базис из \vec{e} векторов.

Теорема 8. О разложении вектора по базису

Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Доказательство. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Возьмём вектор \vec{x} . Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - линейно зависима, если вектор \vec{x} можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \quad (1)$$

Предположим, что разложение вектора \vec{x} - не единственное.

$$\vec{x} = \rho \vec{e}_1 + \rho \vec{e}_2 + \rho \vec{e}_3 \quad (2)$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \rho_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 - \rho_3) \vec{e}_3 \quad (3)$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \rho_1 &= 0 & \lambda_1 &= \rho_1 \\ \lambda_2 - \rho_2 &= 0 & \Rightarrow \lambda_2 &= \rho_2 \\ \lambda_3 - \rho_3 &= 0 & \lambda_3 &= \rho_3 \end{aligned}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать. \square

Пример. Пусть в пространстве V_2 зафиксирован базис \vec{i}, \vec{j} .

$$\begin{aligned} |\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1 \\ \vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OA} \parallel \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x_a \vec{i} \\ \overrightarrow{OB} \parallel \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = y_a \vec{j} \\ \Rightarrow \vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} \end{aligned}$$

Пример. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \end{aligned}$$

Задание

Разложить \vec{a} по векторам \vec{b}, \vec{c} .

Дано:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 3\vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{b} &= 2\vec{i} - \vec{j} \\ \vec{c} &= -\vec{i} - 5\vec{j} \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \\ 3\vec{i} - 4\vec{j} &= \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j}) \\ 3\vec{i} - 4\vec{j} &= (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \Rightarrow \\ \begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

4 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{b} &= \{x_b, y_b, z_b\} \end{aligned}$$

Замечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\} \\ k\vec{a} &= \{kx_a, ky_a, kz_a\}\end{aligned}$$

Замечание. $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$ - так записывать нельзя!

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где $\lambda = \text{const}$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_a \end{cases} \Rightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

Пример. В V_2 :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \\ \cos \alpha &= \frac{x_a}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{y_a}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Пример. Для V_3 :

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x_a}{|\vec{a}|} & x_a &= |\vec{a}| \cos \alpha \\ \cos \beta &= \frac{y_a}{|\vec{a}|} & y_a &= |\vec{a}| \cos \beta \\ \cos \gamma &= \frac{z_a}{|\vec{a}|} & z_a &= |\vec{a}| \cos \gamma\end{aligned}$$

Возведём в квадрат:

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 \cos^2 \alpha + |\vec{a}|^2 \cos^2 \beta + |\vec{a}|^2 \cos^2 \gamma &= x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2 \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1\end{aligned}$$

В результате получаем орт вектора \vec{a} :

$$\vec{e}_a = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

4.1 Скалярное произведение векторов

Определение 21. Скалярным произведением векторов \vec{a}, \vec{b} называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

4.1.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

- 2.

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 &\geq 0 \\ \vec{a}^2 = 0 &\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a}^2 &= |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

3. Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

4.1.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &> 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &< 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Пусть в пространстве V_3 с заданным ортонормированным базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы вектора \vec{a}, \vec{b} :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \\ \vec{b} &= x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{i}^2 &= \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{j} &\Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 &= \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 &= \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1 & \vec{j} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) \\
 &= x_a x_b \vec{i}^2 + x_a y_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_a z_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) \\
 &\quad + y_a x_a (\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_a y_b \vec{j}^2 + y_a z_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\
 &\quad + z_a x_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) + z_a y_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_a z_b \vec{k}^2 \\
 &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

4.1.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$, то:

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\
 &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
 &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \\
 \cos \varphi &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}
 \end{aligned}$$

4.2 Векторное произведение векторов

Определение 22. Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора \vec{a} к \vec{b} осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора \vec{c}).

Определение 23. Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора \vec{a} к \vec{b} осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора \vec{c}).

Определение 24. Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который удовлетворяет следующему условию:

1. \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \vec{a} и \vec{b});
2. $\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \phi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

4.2.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикоммутативность

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Дистрибутивность

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$

3. Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

4.2.2 Геометрическое приложение векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_a y_a, x_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b y_b, z_b\}$. Совместим начала этих векторов и построим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

Пример.

$$A(1, 2, -1), \quad B(-1, 1, 0), \quad C(0, -1, 2)$$

$$\vec{AB} = \{-2, -1, 1\}$$

$$\vec{AC} = \{-1, -3, 3\}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0, 5, 5\} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

4.3 Смешанное произведение

Определение 25. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение первых двух векторов \vec{a} и \vec{b} на третий вектор \vec{c} .

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

4.3.1 Свойства смешанных произведений

1. Свойство перестановки (кососимметричности)

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

Замечание. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.
 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка векторов.

3. Свойство ассоциативности

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

Доказательство.

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\lambda\vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

□

Замечание. Примечание: это работает для любого положения λ .

4. Свойство коммутативности

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{d} \\ &= \vec{a}_1\vec{d} + \vec{a}_2\vec{d} \\ &= \vec{a}_1(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a}_2(\vec{b}\vec{c}) \\ &= \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c} \end{aligned}$$

□

Замечание. Работает не только для \vec{a} , но и векторов \vec{b} и \vec{c} .

4.3.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{b} &= \{x_b, y_b, z_b\} \\ \vec{c} &= \{x_c, y_c, z_c\}\end{aligned}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\} \cdot \vec{c} = \\ &= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c = \\ &= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

4.3.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Совместим начала этих векторов и построим до параллелипипеда. Тогда $V_{\text{paral}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Замечание.

$$V_{\text{pyramid}} = \frac{1}{6} V_{\text{paral}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

5 Прямая на плоскости

5.1 Способы задания прямой

5.1.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и задана направляющим вектором $\vec{S} = \{m, n\}$ (т.е. вектор параллелен прямой). Выберем на прямой l произвольную точку M . Составим $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

5.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через t . Тогда:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

5.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Выберем на прямой l произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$. Составим два вектора $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \{x - x_0, y - y_0\} \\ \overrightarrow{M_0M_1} &= \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\} \end{aligned}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

5.1.4 В отрезках

Пусть прямая l отсекает от координатного угла отрезки a и b . Тогда прямая l проходит через точки $A(0, a)$ и $B(b, 0)$.

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

5.1.5 С угловым коэффициентом

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда из прямоугольного треугольника $\triangle M_0AM$:

$$\triangle M_0AM : \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Пусть $\operatorname{tg} \varphi = k$

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = kx - x_0$$

$$y = kx - kx_0 + y_0$$

$$-kx_0 + y_0 = \operatorname{const} = b$$

$$y = kx + b$$

5.1.6 Общего вида

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, а также дан перпендикулярный ей вектор $\vec{n} = \{A, B\}$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \{A, B\} \quad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} &\Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) &= 0 \\ Ax + By + (-Ax_0 - By_0) &= 0\end{aligned}$$

Обозначим: $-Ax_0 - By_0 = \text{const} = C$. Получаем:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

5.2 Угол между прямыми

5.2.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

$$\begin{aligned}l_1 : \frac{x - 0}{m_1} &= \frac{y - y_0}{n_1} \\ l_2 : \frac{x - \tilde{x}_0}{m_2} &= \frac{y - \tilde{y}_0}{n_2}\end{aligned}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между направляющими векторами \vec{S}_1, \vec{S}_2 для соответствующих прямых.

$$\begin{aligned}(\widehat{l_1, l_2}) &= (\widehat{\vec{S}_1, \vec{S}_2}) = \varphi \\ \cos \varphi &= \frac{|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}}$$

5.2.2 Прямые, заданные общими уравнениями

$$\begin{aligned}l_1 : A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ \vec{n}_1 &= \{A_1, B_1\} \\ \vec{n}_2 &= \{A_2, B_2\}\end{aligned}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между нормальными \vec{n}_1, \vec{n}_2 к соответствующим прямым.

$$\begin{aligned}(\widehat{l_1, l_2}) &= (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \varphi \\ \cos \varphi &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

5.2.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

$$\begin{aligned} \begin{cases} l_1 : y = k_1 x + b_1, & k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \\ l_2 : y = k_2 x + b_2, & k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 \end{cases} &\Rightarrow \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \\ \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \\ &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \\ \Rightarrow \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \end{aligned}$$

5.3 Условие параллельности прямых

5.3.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Rightarrow$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

5.3.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

5.3.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \Rightarrow$

$$k_2 = k_1$$

5.4 Условие перпендикулярности прямых

5.4.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \Rightarrow$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

5.4.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow$

$$\frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} = 0$$

5.4.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

Если $l_1 \perp l_2$, то:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nexists \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = -1 \Rightarrow$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

5.5 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана общим уравнением:

$$l: Ax + By + C = 0 \Rightarrow \vec{n} = \{A, B\}$$

Требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l .

Возьмём на прямой l произвольную точку M . Тогда расстояние от точки M_0 будет равно проекции вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на направление вектора нормали прямой l .

$$\rho(M_0, l) = np_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0}$$

$$\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} &= |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{MM_0}| \cdot \cos \varphi = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0} \\ \Rightarrow np_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0} &= \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + (-Ax - By)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Из общего уравнения прямой l :

$$-Ax - By = C$$

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1, -2)$ до прямой $l: y = 3x - 1$.

$3x - y - 1 = 0$ - общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

$$\rho(M_0, l) = \frac{|3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

6 Уравнение плоскости

6.1 Способы задания плоскости

6.1.1 Через три точки

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, которые принадлежат плоскости α .

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$

$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Выберем точку на плоскости α точку $M(x, y, z)$.

Составим вектора:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ - компланарны, а значит:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

6.1.2 Через две точки с направляющим вектором

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\} \in \beta$$

$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}\end{aligned}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{S}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

6.1.3 Проходящей через точку с двумя направляющими векторами

Пусть даны:

$$\begin{aligned} M_1(x_1, y_1, z_1) &\in \alpha \\ \vec{S}_1 &= \{m_1, n_1, p_1\} \in \beta \\ \vec{S}_2 &= \{m_2, n_2, p_2\} \in \beta \\ \alpha &\parallel \beta \end{aligned}$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1M}, \vec{S}_1, \vec{S}_2$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

6.1.4 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость α отсекает от координатного угла отрезки a, b, c на осях x, y, z соответственно. Обозначим точки пересечения A, B, C . Тогда:

$$A(a, 0, 0) \quad B(0, b, 0) \quad C(0, 0, c)$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \{x - a, y, z\} \\ \overrightarrow{AB} &= \{-a, b, 0\} \\ \overrightarrow{AC} &= \{-a, 0, c\} \end{aligned}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ - компланарны, а следовательно:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ (x-a) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ (x-a)bc - y(-ac) + zab = 0 \\ xbc + yac + zab = abc \\ \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \end{aligned}$$

6.1.5 Общее уравнение

Пусть даны:

$$\begin{aligned} M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \\ \vec{n} = \{A, B, C\} - \text{вектор нормали} \end{aligned}$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} &\Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \\ \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) &= D \\ \boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \end{aligned}$$

6.2 Угол между плоскостями

Пусть заданы плоскости общими уравнениями:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : A_1x + B_1y + Cz_1 + D_1 = 0 &\Rightarrow \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + Cz_2 + D_2 = 0 &\Rightarrow \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \end{aligned}$$

Угол между плоскостями α_1, α_2 равен углу между нормальными n_1, n_2 к этим плоскостям.

Тогда можно найти:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \\ &= \boxed{\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \end{aligned}$$

6.2.1 Условие перпендикулярности

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

6.2.2 Условие параллельности

Если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Замечание. Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **совпадают**.

Замечание. Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **не совпадают**.

6.3 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть задана некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Возьмём некоторую точку $M(x, y, z) \in \alpha$. Составим вектор $\overrightarrow{M_0 M} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$. Тогда модуль проекции $\overrightarrow{M M_0}$ на вектор на направление вектора нормали и есть искомое расстояние. Найдём:

$$\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0 M}| \underbrace{|\vec{n}| \cdot \cos \varphi}_{np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M}}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M} &= A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \end{aligned}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\rho(M_0, \alpha) = |np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

7 Прямая в пространстве

7.1 Способы задания прямой в пространстве

7.1.1 Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$. Возьмём на прямой l произвольную точку $M(x, y, z)$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

7.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = (t)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \\ \frac{z - z_0}{p} = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}}$$

7.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Возьмём на прямой l точку $M(x, y, z)$. Составим два вектора:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \\ \overrightarrow{M_0M_1} &= \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{M_0M_1} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

7.1.4 Общее уравнение

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы общими уравнениями:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

Если $\alpha_1 \nparallel \alpha_2$, то они пересекаются по прямой l . Тогда $\forall M(x, y, z) \in l$ будет выполняться система:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Пример. Составить уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей:

$$\alpha_1 : 2x + y - z + 4 = 0$$

$$\alpha_2 : 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Для того, чтобы содать уравнение прямой l , нужно знать $M_0(x_0, y_0, z_0)$ направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$.

$$\text{Из (1)} \Rightarrow \vec{n}_1 = \{2, 1, -1\}$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow \vec{n}_2 = \{3, 2, 1\}$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

Найдем точку M_0 . Пусть $z_0 = 0$ (прямая обязательно пересечёт плоскость oXY):

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 + 2y_0 + 8 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -14 \\ y_0 = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0(-14, 24, 0)$$

Найдем направляющий вектор \vec{S}

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \{-3, 5, 1\}$$

Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x + 14}{-3} = \frac{y - 24}{5} = \frac{z}{-1}$$

7.2 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}$$

Задаана точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Построим на векторах \vec{S} и $\overrightarrow{M_0M_1}$ параллелограмм. Тогда высота этого параллелограмма из точки M_1 и есть искомое расстояние от точки M_1 до прямой l .

$$S_{par} = h \cdot |\vec{S}|$$

$$h = \frac{S_{par}}{|\vec{S}|}$$

$$S_{par} = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \Rightarrow \\ \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} &= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2} \Rightarrow$$

$$\rho(M_1, l) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} =$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

7.2.1 Расстояние между параллельными прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned} l_1 : \frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{p_1} &\Rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\} \\ l_2 : \frac{x-x_0}{m_2} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{p_2} &\Rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\} \\ l_1 \parallel l_2 &\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

Построим параллелограмм на векторах \vec{S}_1 и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет высота данного параллелограмма.

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{S}_1|}{|\vec{S}_1|} =$$

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & p_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}$$

7.2.2 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned} l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} &\Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1), \quad \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\} \\ l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} &\Rightarrow M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\} \end{aligned}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Вектора \vec{S} и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны. Поэтому на этих векторах можно построить параллелепипед. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет равно высоте этого параллелепипеда.

$$\begin{aligned} V &= |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2| \\ V &= h \cdot S \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} S &= |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(l_2, l_1) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

7.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \Rightarrow M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

7.3.1 Совпадают

Если прямые l_1 и l_2 **совпадают**, то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

7.3.2 Параллельны

Если прямые l_1 и l_2 **параллельны** то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

И **не** выполняется условие:

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

7.3.3 Пересекаются

Если прямые l_1 и l_2 **пересекаются**, они лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ - компланарны:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

7.3.4 Скрещиваются

Если прямые l_1 и l_2 **скрещиваются**, то они не лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ - некопланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

7.4 Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

Обозначим угол φ - между прямой плоскостью, и β - между прямой и нормалью. Тогда:

$$\cos \beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\beta = 90 - \varphi$$

$$\cos(90 - \varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

7.4.1 Условие параллельности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{s} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$$

$$Am + Bn + Cp = 0$$

7.4.2 Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{s} \Rightarrow \boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

7.4.3 Примеры задач

Пример. Задача: составить уравнение прямой l_2 симметричной прямой l_1 , которая задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{0} \quad \vec{s} = \{2, 1, 0\}$$

относительно плоскости α :

$$\alpha : x - y + 2z - 1 = 0 \quad \vec{n} = \{1, -1, 2\}$$

Решение: (1) Проверим, является ли прямая l_1 параллельной плоскости α :

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow l_1 \not\parallel \alpha$$

(2) Находим точку пересечения прямой l с плоскостью α - пусть это точка $A(x_2, y_2, z_2)$. Из канонического уравнения прямой l_1 получим параметрическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{0} = t \\ \begin{cases} \frac{x-1}{2} = t \\ \frac{y}{1} = t \\ \frac{z+1}{0} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Т.к. точка A принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$\begin{aligned} 2t + 1 - t - 2 - 1 &= 0 \\ t = 2 &\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 2 \\ z_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(5, 2, -1) \end{aligned}$$

(3) Из канонического уравнения прямой возьмем точку $M_1(1, 0, -1) \in l_1$. Найдем ей симметричную относительно плоскости α точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Составим уравнение прямой l_3 , проходящей через точку M_1 и с направляющим вектором \vec{n} .

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Найдём точку пересечения $O(x_3, y_3, z_3)$ прямой l_3 с плоскостью α . Составим параметрическое уравнение прямой l_3 :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2} = t \\ \begin{cases} \frac{x-1}{1} = t \\ \frac{y}{-1} = t \\ \frac{z+1}{2} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Т.к. точка O принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$t + 1 + t + 4t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{4}{3} \\ y_3 = -\frac{1}{3} \\ z_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Составляем вектор $\overrightarrow{M_1O}$:

$$\overrightarrow{M_1O} = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Пусть $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\} \\ \overrightarrow{M_1O} = \overrightarrow{OM_2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \\ y_2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \\ z_2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \\ z_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

4) Составляем уравнение прямой, проходящей через точки $A(5, 2, -1)$

и $M_2 \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_a}{x_1 - x_a} &= \frac{y - y_a}{y_2 - y_a} = \frac{z - z_a}{z_2 - z_a} \\ \frac{x - 5}{\frac{5}{3} - 5} &= \frac{y - 2}{-\frac{2}{3} - 2} = \frac{z + 1}{\frac{1}{3} + 1} \\ \frac{x - 5}{-\frac{10}{3}} &= \frac{y - 2}{-\frac{8}{3}} = \frac{z + 1}{\frac{4}{3}} \\ \boxed{\frac{x - 5}{-5} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z + 1}{4}} \end{aligned}$$

Пример. Задача: Составить каноническое уравнение общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2 , заданными параметрическими уравнениями:

$$l_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 4 \\ z = -2t - 2 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

Решение:

1) Составим канонические уравнения прямых для l_1 и l_2 :

$$l_1 : \begin{cases} t = \frac{x-2}{1} \\ t = \frac{y-4}{3} \\ t = \frac{z+2}{-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow$$

$$M_1(2, 4, -2) \quad \vec{s}_1 = \{1, 3, -2\}$$

$$l_2 : \begin{cases} t = \frac{x-2}{-3} \\ t = \frac{y}{1} \\ t = \frac{z+4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow$$

$$M_2(2, 0, -4) \quad \vec{s}_2 = \{-3, 1, 3\}$$

Найдём вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{0, -4, -2\}$$

Проверим, являются ли прямые l_1 и l_2 скрещивающимися или параллельными. Найдём смешанное произведение $\overrightarrow{M_1M_2} \vec{s}_1 \vec{s}_2$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \vec{s}_1 \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

Значит, прямые не лежат в одной плоскости, следовательно, они скрещивающиеся.

2) Найдём направляющий вектор общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{s} \perp \vec{s}_1 \\ \vec{s} \perp \vec{s}_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$$

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 11\vec{k} \Rightarrow \vec{s} = \{1, 0, 1\}$$

3) Составим уравнение плоскости α_1 , проходящей через точки M_1 и вектора \vec{s}_1, \vec{s} . Возьмём произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha_1$. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - 2, y - 4, z + 2\}$$

Вектора $\overrightarrow{M_1M}, \vec{s}_1, \vec{s}$ - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \vec{s}_1 \vec{s} = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} \vec{s}_1 \vec{s} = \begin{vmatrix} x - 2 & y - 4 & z + 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 4y + 3z - 4$$

$$\boxed{\alpha_1 : -3x + 4y + 3z - 4 = 0}$$

4) Составим плоскость α_2 через точку M_2 и вектора \vec{s}_1 и \vec{s}_2 . Возьмём произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha_2$. Составим вектор $\overrightarrow{M_2M}$:

$$\overrightarrow{M_2M} = \{x - 2, y, z + 4\}$$

Вектора $\overrightarrow{M_2M}, \vec{s}_2, \vec{s}$ - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_2M} \vec{s}_2 \vec{s} = 0$$

$$\overrightarrow{M_2M} \vec{s}_2 \vec{s} = \begin{vmatrix} x - 2 & y & z + 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 6y - z - 6$$

$$\boxed{\alpha_2 : x + 6y - z - 6 = 0}$$

5) Для начала, определим одну из координат точек. Прямая l пересекает плоскость OXU , т.е. можем взять $z = 0$. Тогда в системе уравнений:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 3z - 4 = 0 \\ x + 6y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Полагаем, что $z = 0$:

$$\begin{cases} -3x + 4y - 4 = 0 \\ x + 6y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0, 1, 0)$$

где точка $A \in \alpha_1, \alpha_2, l$.

Составляем каноническое уравнение прямой l , проходящей через точку A , и с направляющим вектором \vec{s} .

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-0}{1}$$

$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}}$$

8 Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка:

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

где:

$$A, B, C, D, E, F = \text{const}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

8.1 Эллипс

Определение 26. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна и равна $2a$.

F_1, F_2 - фокусы эллипса

Расстояние между фокусами называется *фокальным расстоянием*.

Расстояние от каждой точки эллипса до фокуса называется *фокальным радиусом*

Прямая, которая проходит через фокусы, и прямая, которая проходит через середину этой прямой и перпендикулярна ей, являются *осями симметрии данного эллипса*. Первая прямая называется *большой осью*, а вторая – *малой осью*.

Точка пересечения осей эллипса называется *центром эллипса*, а точки пересечения эллипса с осями называются *вершинами эллипса*.

Уравнение эллипса

Расположим прямоугольную систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром эллипса, а фокусы лежали на оси абсцисс.

O – центр эллипса

F_1, F_2 – фокусы эллипса

A_1, A_2, A_3, A_4 – вершины эллипса

$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние

Возьмём точку $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, и составим векторы:

$$\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}$$

$$\overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xc \\
 a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\
 x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
 x^2a^2 + x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
 x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1
 \end{aligned}$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$. Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

где a – большая полуось эллипса, а b – малая полуось эллипса.

Отношение фокусного расстояния эллипса к большой оси называется *центриситетом* эллипса.

$$\begin{aligned}
 \frac{F_1F_2}{A_3A_1} &= \frac{2c}{2a} = \varepsilon \\
 \boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}
 \end{aligned}$$

Замечание. Т.к. $a < c$, то $0 < \varepsilon < 1$

Центриситет показывает степень "сжатия" эллипса.

Отношение фокального радиуса точки эллипса к расстоянию до некоторой прямой, называемой *директрисой*, постоянно и равно *эксцентриситету*.

Уравнение директрис:

$$\begin{aligned}
 d_1 : x &= -\frac{a}{\varepsilon} \\
 d_2 : x &= \frac{a}{\varepsilon}
 \end{aligned}$$

Замечание. 1. Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

2. Уравнение мнимого эллипса с центром в точке $O(0, 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

3. Если $a = b = R$, то это уравнение окружности:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} &= 1 \\ x^2 + y^2 &= R^2\end{aligned}$$

Для окружности в точке $O(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

4. Если $a < b$, то изображение эллипса "переворачивается" на 90:

8.2 Гипербола

Определение 27. Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянно и равно $2a$.

Прямая, на которой лежат фокусы, и прямая, которая проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы и перпендикулярная ей, называются *осями симметрии гиперболы*. Первая прямая называется *действительной осью*, а вторая – *мнимой осью*.

F_1, F_2 – фокусы

$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние

Точки пересечения действительной и мнимой оси гиперболы называется *центром гиперболы*, а точка пересечения с действительной осью называются *вершинами гиперболы*.

Уравнение гиперболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром гиперболы, а фокусы лежали на оси абсцисс.

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0).$$

Возьмём произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащей гиперболе.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{F_1 M} &= \{x + c, y\} \\
 \overrightarrow{F_2 M} &= \{x - c, y\} \\
 |\overrightarrow{F_1 M}| - |\overrightarrow{F_2 M}| &= 2a \\
 \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\
 (x + c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \\
 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 4xc - 4a^2 \\
 a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= xc - a^2 \\
 x^2 a^2 - 2a^2 xc + a^2 y^2 &= x^2 c^2 - 2a^2 xc + a^4 \\
 x^2 a^2 + x^2 c^2 + a^2 y^2 &= a^4 - a^2 c^2 \\
 x^2(a^2 + c^2) + a^2 y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1
 \end{aligned}$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$. Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Центриситетом эллипса называется:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Замечание. Т.к. $c > a$, то $\varepsilon > 1$

Замечание. Уравнение сопряжённой гиперболы:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ или } \boxed{\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Уравнение гиперболы с центром в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Если $a = b$, то гипербола становится *равносторонней*.
Если:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

то получается вырожденной уравнение – две пересекающиеся прямые:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \Rightarrow (bx - ay)(bx + ay) = 0$$

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

Эти же уравнения и являются *уравнениями асимптот*.

Если центр гиперболы $O(x_0, y_0)$, то:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + (y_0 + \frac{b}{a}x_0)$$

8.3 Парабола

Определение 28. *Параболой* называется геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до некоторой точки, называемой *фокусом*, и фиксированной прямой, называемой *директрисой*, равно.

Уравнение параболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы начало координат совпадало с вершиной параболы.

$$A(-\frac{p}{2}), \quad F(\frac{p}{2}, 0)$$

$$\overrightarrow{AM} = \{x + \frac{p}{2}, a\}, \quad \overrightarrow{FM} = \{x - \frac{p}{2}, y\}$$

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{FM}|$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$$

Тогда получаем каноническое уравнение параболы с вершиной в $O(0, 0)$:

$$y^2 = 2px$$

Если $p > 0$, то ветви параболы направлены *вправо*, если $p < 0$, то ветви направлены *влево*.

Если вершина в точке $M(x_0, y_0)$, тогда:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$$

Уравнение директрисы:

$$d: x = -\frac{p}{2}$$