

Математический анализ. Лекции

1 Основы математического анализа

Математический анализ - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

1.1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

Определение 1. Высказывание - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Пример. $2 + 3 = 5$ - истинно, $3 < 0$ - ложно

1.1.1 Логические символы

- \wedge - конъюнкция (логическое "И")
- \vee - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")
- \Rightarrow - импликация ("если A то B")
- \Leftrightarrow - эквивалентность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

- \exists - существует
- \nexists - не существует
- $!\exists$ - существует единственный элемент
- \forall - для каждого

1.2 Теория множеств

Определение 2. Множество - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

1.2.1 Символы теории множеств

- \in - принадлежит
- \notin - не принадлежит
- \subset - включает
- \subseteq - включает, возможно равенство
- \equiv - тождественное равенство (для любого значения переменной)
- \emptyset - пустое множество

1.2.2 Операции со множествами

- \cup - объединение множеств
- \cap - пересечение множеств

Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Определение 3. Подмножество - множество A называется подмножеством B , если каждый элемент множества A является элементом множества B .

Определение 4. Универсальное множество - такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества.

1.2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

1.2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2}, \dots\}$ - множество иррациональных чисел
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ - множество действительных чисел

Замечание. Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Промежутки

Определение 5. Промежуток - подмножество X множества \mathbb{Q} , где $\forall x_1, x_2 \in X$ этому множеству принадлежат все x , где $x_1 < x < x_2$.

1.2.5 Виды промежутков

1. Отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2. Интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. Полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

1.2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, δ и ε - малые положительные величины

Определение 6. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку

Определение 7. δ - окрестностью $(S(x_0, \delta))$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2δ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 8. ε - окрестностью $(S(x_0, \varepsilon))$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε .

$$S(x_0; \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

Определение 9. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 10. Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 11. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

2 Числовая последовательность

Определение 12. Числовая последовательность - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой $\forall n \in \mathbb{N}$ можно записать соответствующий элемент последовательности.

Замечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример.

$$1, -1, 1, -1, 1 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности два

Пример.

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

$$2, 2, 2, 2, 2 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности одно

Пример.

$$x_n = 2 * 1^n$$

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5 ...

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется *убывающей*, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются *строгими монотонными*.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

Пример. 1, 2, 3, 2, 1...

Постоянная последовательность

Пример. 1, 1, 1, 1, 1...

2.1 Предел последовательности

Определение 13. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Замечание. Т.е. начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε -окрестность точки a .

2.1.1 Геометрический смысл

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon &< x_n < a + \varepsilon \\ \forall n &> N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Какой бы малый ε мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε -окрестность точки a , причем чем $\varepsilon \downarrow$, тем $N(\varepsilon) \uparrow$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть $\varepsilon = 0.3$, $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, т.е. $(-0.3; 0.3)$

Получается два элемента $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$

$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$

$$x_3, x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

Определение 14. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Определение 15. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу (сверху)*, если $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ ($x_n \leq M$)

Определение 16. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ \exists свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 1. Критерий Коши существования предела последовательности

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} - \text{сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{фундаментальная.}$$

2.2 Свойства сходящихся последовательность

Теорема 2. О существовании единственности предела последовательности

Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Аналитическое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - сходя-

шаяся последовательность.

Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} &= b \\ a &\neq b\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N})(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N})(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем $N = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$$

$$\begin{aligned}3\varepsilon &= |b - a| = |b - a + x_n - x_n| = \\ &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon \\ 3\varepsilon &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

Противоречие. Значит, предположение не является верным \Rightarrow последовательность x_n имеет единственный предел. \square

Доказательство. Геометрическое доказательство

Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности x_n в две непересекающиеся окрестности. \square

Теорема 3. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$.

Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ - это и означает, что последовательность x_n - ограниченная. \square

Теорема 4. *Признак сходимости Вейерштрасса.*

Ограниченная монотонная последовательность сходится.

2.2.1 Предел последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})$

Теорема 5. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ имеет предел равный e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

3 Предел функции

Определение 18. Окрестностью, из которой исключена точка x_0 называется *проколотой окрестностью*.

$$\mathring{S}(x_0; \delta) = S(x_0; \delta) \setminus x_0$$

Определение 19. *Определение функции по Коши* или на языке ε и δ . Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если $\forall \varepsilon > 0$ найдется δ , зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Эквивалентные записи определения

$$\begin{aligned} \dots \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) &\Rightarrow \dots \\ \dots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta &\Rightarrow \dots \\ \dots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta &\Rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \\ \dots &\Rightarrow f(x) \in \mathring{S}(a, \varepsilon) \end{aligned}$$

Геометрический смысл предела функции

Если для $\forall \mathring{S}(a; \varepsilon)$ найдется $\mathring{S}(x_0; \delta)$, то соответствующее значение функции лежат в $\mathring{S}(a; \varepsilon)$ (полоса 2ε):

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x_1) - a| < \varepsilon$$

Определение 20. *Определение предела функции по Гейне* или на языке последовательностей.

Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0 , если эта функция определена в окрестности точки a и \forall последовательности x_n из об-

ласти определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \right)$$

Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек x , достаточно близких к точке x_0 (на языке математики $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$) соответствующие значения $f(x_n)$ достаточно близко расположены к a (на языке математики $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$)

Теорема 6. Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

3.1 Ограниченная функция

Определение 21. Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента x , если $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$.

Если $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$, то функция $f(x)$ называется **неограниченной**.

Определение 22. Функция называется **локально ограниченной** при $x \rightarrow x_0$, если существует проколота окрестность с центром в точке x_0 , в которой данная функция ограничена.

3.2 Основные теоремы о пределах

Теорема 7. О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \\ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{aligned} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Выберем $M = \max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Что и требовалось доказать. \square

Теорема 8. *О единственности предела функции.*

Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что функция имеет более одного предела, например 2 - a и b . Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = b \quad (2)$$

$a \neq b$, пусть $b > a$

$$(1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon_1)$$

$$(2) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon_2)$$

Распишем:

$$(1) \Rightarrow a - \varepsilon_1 < f(x) < a + \varepsilon_1, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1)$$

$$(2) \Rightarrow b - \varepsilon_2 < f(x) < b + \varepsilon_2, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2)$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ будет верно (1) и (2) одновременно.

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{b-a}{2}$:

$$(1) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$(2) \Rightarrow f(x) > b - \varepsilon_2 = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Мы получили противоречие. Это означает, что предположение не является верным. Функция имеет единственный предел. \square

Теорема 9. *О сохранении функцией знака своего предела*

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$, то $\exists \dot{S}(x_0, \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.

Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.

Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ \square

Следствие. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 и знакопостоянна в $\dot{S}(x_0, \delta)$, тогда её предел не может иметь с ней противоположные знак.

Теорема 10. О предельном переходе в неравенстве.

Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$.

Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0 , соответственно и функция $F(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из предыдущей теоремы $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

\square

Пример. Пусть $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ и $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \quad 0 < x^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &\leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x)\end{aligned}$$

В теореме знак **строгий** переходит в **нестрогий**!

Теорема 11. *О пределе промежуточной функции.*

Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon) \quad (2)$$

Выберем $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$.

$$(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$\begin{aligned}f(x) &\leq h(x) \leq g(x) \\ \Rightarrow a - \varepsilon_1 &< f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon_2 \\ \Rightarrow \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \quad a - \varepsilon &< h(x) < a + \varepsilon\end{aligned}$$

В итоге:

$$\begin{aligned}(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon) \\ \Rightarrow \text{по определению предела} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) &= a\end{aligned}$$

□

Теорема 12. *О пределе сложной функции.*

Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a , то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a , равный C , тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0 , равный C .

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \\ \lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) = C \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \dot{S}(a, \delta_1) \Rightarrow |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1) \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = c$$

□

4 Бесконечно малые функции

Определение 23. Функция называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, если предел функции в этой точке равен 0. Кратко - **б.м.ф.** или **б.м.в.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= 0 \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Замечание. Стремление аргумента может быть *любое*, главное, чтобы предел был равен нулю.

Бесконечно малые функции обозначаются $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \dots$

Пример.

$$y = x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$$

$y = x - 2$ при $x \rightarrow 2$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$y = \sin(x)$ при $x \rightarrow 0$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$ является бесконечно малой.

4.1 Свойства бесконечно малых функций

Теорема 13. *О сумме конечного числа бесконечно малых функций.*
Конечная сумма бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Доказательство. Пусть дано конечное число бесконечно малых функций, например две: $\alpha(x), \beta(x)$. Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$$

Нужно доказать, что:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

Распишем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \end{aligned} \quad (2)$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (1) и (2) верны одновременно. Получаем:

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \\ &\Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon) \end{aligned}$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

□

Теорема 14. *О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную.*

Произведение бесконечно малой функции на локально ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, а функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \\ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{R}, M > 0 \\ \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x)| < M \end{aligned} \quad (2)$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow \\ &|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon \end{aligned}$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Т.к. $\sin(x)$, при $x \rightarrow \infty$ является локально ограниченной $\sin(x) \leq 1$.

Теорема 15. О связи функции, её предела и бесконечно малой.

Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство. Необходимость.

Дано:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Достаточность.

Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

□

Следствие. Т.к. любая бесконечно малая функция локально ограничена, то произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Следствие. Произведение бесконечно малой функции на константу есть величина бесконечно малая.

5 Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0 .

Теорема 16. Предел суммы (разности) двух функций, имеющих конечные пределы равен сумме (разности) пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Теорема 17. О пределе отношения функций.

Предел отношения двух функций, имеющих конечный предел, равен частному их пределов при условии, что предел в знаменателе отличен от нуля.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Теорема 18. О пределе произведения функций.

Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \quad (2)$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф.}$$

$$(2) \Rightarrow g(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) - \text{б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a + \alpha(x))(b + \beta(x)) \\ &= ab + \underbrace{a \cdot \beta(x) + b \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\gamma(x)} \\ &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы 15:

$$a \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

$$b \cdot \alpha(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

$$\alpha(x) \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} ab + \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) \\ &= ab + 0 \\ &= ab \end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

6 Односторонние пределы

Определение 24. Число A_1 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 **слева**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = A_1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon)$$

Определение 25. Число A_2 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 **справа**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = A_2 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon)$$

Пределы справа и слева называют *односторонними пределами*.

Теорема 19. О существовании предела функции в точке.

Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существуют пределы справа и слева и они равны между собой.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$$

6.1 Пределы на бесконечности

Определение 26. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где N - большое число, $N > 0, N \in \mathbb{R}$.

Определение 27. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где N - большое число, $N > 0, N \in \mathbb{R}$.

Замечание.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a &\Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a &\Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a &\Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathbb{R} : |x| > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\end{aligned}$$

6.2 Бесконечные пределы

Определение 28. Функция $y = f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \rightarrow x_0$, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| > M)$$

где M - большое число, $M > 0, M \in \mathbb{R}$, а δ - малое число.

Замечание.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > M)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < -M)$$

Пример.

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{arctg}(x), \quad x \rightarrow \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x) &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}y &= \ln(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} &= \nexists \\ \lim_{x \rightarrow 0+} &= -\infty\end{aligned}$$

Пример.

$$y = \sqrt{-x}, \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} = 0$$

Пример.

$$y = \frac{1}{|x-2|}, \quad x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

Определение 29. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой функцией** (далее - **б.б.ф.** если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Бесконечный предел на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N(M) > 0)(\forall x \in |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M)$$

6.3 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Теорема 20. О связи бесконечно малой и бесконечно большой функции.

Если $\alpha(x)$ - бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. По условию $\alpha(x)$ - б.б.ф при $x \rightarrow x_0$. По определению:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| > M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{M}$.

$$\begin{aligned} |\alpha(x) > M| &\Rightarrow \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M} \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \frac{1}{M} < \varepsilon \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\forall x \in \mathring{s}(x_0, \delta) \Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией. \square

1-ый замечательный предел

Теорема 21.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Доказательство. Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Потом $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Пусть α - угол в радианах, $x \rightarrow 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Тут должен быть рисунок, но его пока нет :(.

Окружность $R = 1$.

Отложим луч OK под углом к оси OX равным x , где $O(0,0), K \in$ окружности.

$KH \perp OA$.

Рассмотрим $\triangle OKH$. $OA = 1$ как радиус. $\sin(x) = \frac{KH}{OA} = KH$.

Рассмотрим $\triangle OLA$. $OA = 1$ как радиус. $\operatorname{tg}(x) = \frac{LA}{OA} = LA$.

Из геометрических построений (да будут они когда-нибудь...):

$$S_{\triangle OKA} < S_{\text{sec}OKA} < S_{\triangle OLA}$$

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} OA \cdot KH = \frac{1}{2} \sin(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$

$$S_{\text{sec}OKA} = \frac{1}{2} OA \cdot OK \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OLa} = \frac{1}{2} OA \cdot LA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{tg}(x)}{2}$$

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x)$$

$$x \rightarrow 0+ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) > 0 \\ \operatorname{tg}(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) \quad | : \sin(x)$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

По теореме о промежуточной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Аналогично для $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Т.к. односторонние пределы равны:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \left| \begin{array}{l} t = \arcsin(x) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg}(t) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\operatorname{tg}(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg}(t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \left| \begin{array}{l} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos(x)}{2} \\ 1 - \cos(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{array} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Второй замечательный предел

Теорема 22.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \\ &= e\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{x} \log_a(1+x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_a e = \frac{1}{\ln a} \end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ x = \ln(t+1) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = t \\ x = \log_a(1+t) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a\end{aligned}$$

□

7 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть даны функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, которые являются б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Рассмотрим варианты:

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

$\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$.

$$\boxed{\alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$$

$\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$.

$$\boxed{\beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - эквивалентны.

$$\boxed{\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const}$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - одного порядка малости.

$$\begin{cases} \alpha(x) = O(\beta(x)) \\ \beta(x) = O(\alpha(x)) \end{cases} \quad \text{при } x \rightarrow x_0$$

•

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - несравнимы.

Определение 30. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются одного порядка малости, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$$

Определение 31. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми*, если:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Определение 32. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Определение 33. Если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$.

Определение 34. Б.м.ф. $\alpha(x)$ имеет порядок малости k относительно функции б.м.ф. $\beta(x)$, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = \text{const} \neq 0$$

где k – порядок малости.

7.1 Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

Теорема 23. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, а $\beta(x) \sim \gamma(x)$, при $x \rightarrow x_0$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x)}{\gamma(x) \cdot \beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1 \cdot 1 = 1 \\ &\Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

□

Теорема 24. Необходимое и достаточное условие эквивалентных бесконечно малых функций.

Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\begin{aligned} \alpha(x), \beta(x) &\text{ - б.м.ф при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) \sim \beta(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{cases} \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Доказательство. Необходимость.

Дано:

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

Достаточность.

Дано:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \\ &\Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

□

Теорема 25. О суммы бесконечно малых разного порядка.

Сумма бесконечно малых функций разных порядков малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

□

Следствие. Сумма б.б.ф. разного порядка роста эквивалентна слагаемому высшего порядка роста.

Теорема 26. О замене функции на эквивалентную под знаком предела.

Предел **отношения** двух б.м.ф. (б.б.ф.) не изменится, если заменить эти функции на эквивалентные.

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) \sim \alpha_0(x) \\ \beta(x) \sim \beta_0(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned}$$

□

Таблица 1: Таблица эквивалентных б.м.ф

1-ый замечательный предел 2-ой замечательный предел

$$\begin{array}{ll} \sin(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & \ln(1+x) \sim x \\ \operatorname{tg}(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \\ \arcsin(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & e^x - 1 \sim x \\ \operatorname{arctg}(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & a^x - 1 \sim x \ln a \\ 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 & \\ 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 & \end{array}$$

Сумма б.м.ф. и б.б.ф.

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \sim a_nx^n \text{ при } x \rightarrow \infty \\ a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \sim a_1x \text{ при } x \rightarrow 0 \end{array}$$

8 Непрерывность функции. Точки разрыва

Определение 35. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0 , называется непрерывной в этой точке если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Множество непрерывных функций в точке x_0 обозначается $C(x_0)$

$$f(x) \in C(x_0) \Leftrightarrow \text{ - функция непрерывна в точке } x_0$$

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \sin(0) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) \in C(0)$$

Пример.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sgn} \notin C(0)$$

Определение 36. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0 , называется непрерывной в этой точке, если в достаточно малой окрестности точки x_0 значение функции близко к $f(x_0)$.

$$y = f(x) \in C(x_0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Определение 37. Функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 называется непрерывной в этой точке, если выполняются условия:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x)$

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой точке в окрестности x_0 . Выберем произвольный x в этой окрестности. Тогда:

$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ - соответствующее приращение функции

Определение 38. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

8.1 Односторонняя непрерывность

Определение 39. Функция $y = f(x)$ определённая в правосторонней окрестности точки x_0 (математическим языком - $[x_0, x_0 + \delta)$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Определение 40. Функция $y = f(x)$ определённая в левосторонней окрестности точки x_0 (математическим языком - $(x_0 - \delta, x_0]$) называется непрерывной слева в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$$

Теорема 27. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева.

Определение 41. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 42. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если:

1. Непрерывна на интервале (a, b)
2. Непрерывна в точке a справа
3. Непрерывна в точке b слева

- $C(a, b)$ - множество функций, непрерывных на интервале.
- $C[a, b]$ - множество функций, непрерывных на отрезке.
- $C(X)$ - множество функций, непрерывных на промежутке X .

8.2 Классификация точек разрыва

Определение 43. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке проколотой окрестности точки x_0 непрерывна в любой точке этой окрестности (за исключением самой точки x_0). Тогда точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Пусть точка x_0 - точка разрыва. Её можно классифицировать как:

- I-ого рода

– Основное условие

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + -}$$

– Точка конечного разрыва

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} \neq \lim_{x \rightarrow x_0 -}$$

– Точка устранимого разрыва

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} = \lim_{x \rightarrow x_0 -} \neq f(x_0) \text{ или } \nexists f(x_0)$$

- II рода

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0 + -}$$

Определение 44. Если точка x_0 - точка разрыва функции $y = f(x)$ и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$, то x_0 называется точкой I-го рода.

Определение 45. Если точка x_0 - точка разрыва функции $y = f(x)$ и не существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, то x_0 называется точкой разрыва II-го рода.

Определение 46. Если точка x_0 – точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$, и предел $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, то x_0 называется точкой конечного разрыва или точкой *скачка*.

Определение 47. Если точка x_0 – точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$, и предел $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, но $\neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Примеры

Пример.

$$y = \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$x = 1$ – точка разрыва

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

$\Rightarrow x = 1$ – т.р. I рода, точка скачка

$$\Delta f = \left| \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \right| = |1 - (-1)| = 2$$

Пример.

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

$\Rightarrow x = 0$ – т.р. I рода, устранимая точка разрыва

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \notin C(0)$$

$$g(x) \in C(0)$$

Пример.

$$\begin{aligned}
y &= e^{\frac{1}{x}} \\
D_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty \\
\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \infty \\
\Rightarrow x = 0 &\text{ - т.р. II рода}
\end{aligned}$$

8.3 Свойства непрерывных функций в точке

Теорема 28. Пусть функции:

$$\left. \begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= g(x) \end{aligned} \right\} \in C(x_0)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &\in C(x_0) \\
(f \cdot g)(x) &\in C(x_0)
\end{aligned}$$

Доказательство. По определению непрерывной функции:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) \\
\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= g(x_0)
\end{aligned}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) \\
&\Rightarrow f(x) + g(x) \in C(x_0) \\
\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) \\
&\Rightarrow (f \cdot g)(x) \in C(x_0) \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}
\end{aligned}$$

□