## 二、传递函数模型：高阶系统的核心分析工具（CNENGR115_L6_Transfer_function, v2.pdf）

### 1. 传递函数的引入背景与核心价值

#### （1）传统方法的局限性

- 一阶系统可通过积分法求解响应，但**高阶系统（如二阶车辆位移模型$m\ddot{y}+b\dot{y}=u(t)$、风力涡轮机扭矩模型）**的微分方程求解复杂；
- 面对正弦波、脉冲等非阶跃输入时，积分法效率极低，且难以实现标准化分析。

#### （2）传递函数的核心优势

基于拉普拉斯变换，将时域中的微分方程转化为复频域（$s$域）中的代数方程，实现：

- 简化高阶微分方程的求解过程；
- 统一不同输入信号（阶跃、正弦、脉冲等）下的响应分析方法；
- 为 Matlab/Simulink 等仿真工具提供数学基础；
- 支持系统的模块化分析（如串联、并联模块的增益计算）。

### 2. 传递函数的基础理论与推导规则

#### （1）核心符号与变换规则

- 导数的拉普拉斯变换表示：在零初始条件下，$\frac{d^n x}{dt^n}\rightarrow s^n X(s)$（$X(s)$为$x(t)$的拉普拉斯变换，$s$为复频域变量）。
  - 一阶导数：$\dot{x}\rightarrow sX(s)$；
  - 二阶导数：$\ddot{x}\rightarrow s^2X(s)$；
  - $n$阶导数：$\frac{d^n x}{dt^n}\rightarrow s^n X(s)$。

#### （2）通用微分方程与传递函数转换

线性系统的通用微分方程为：$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+...+a_n x=b_0\frac{d^m u}{dt^m}+...+b_m u$

通过拉普拉斯变换转化为传递函数（定义为$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}$）：$G(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+...+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+...+a_n}$

### 3. 传递函数推导实例（从低阶到高阶）

#### （1）一阶系统传递函数（通用模型）

已知一阶系统标准方程$\tau\dot{x}+x=Ku$，按变换规则推导：

1. 拉普拉斯变换：$\tau sX(s)+X(s)=KU(s)$；
2. 整理得传递函数：$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{K}{\tau s+1}$。

#### （2）车辆速度系统传递函数（具体实例）

车辆速度模型为$5\dot{x}+x=0.8u$，推导过程：

1. 拉普拉斯变换：$5sX(s)+X(s)=0.8U(s)$；
2. 传递函数：$G(s)=\frac{0.8}{5s+1}$。

**（3）三阶系统传递函数（高阶示例）**

已知三阶微分方程$a_0\dddot{x}+a_1\ddot{x}+a_2\dot{x}+a_3x=b_0\ddot{u}+b_1\dot{u}+b_2u$，推导：

1. 拉普拉斯变换：$(a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3)X(s)=(b_0s^2+b_1s+b_2)U(s)$；
2. 传递函数：$G(s)=\frac{b_0s^2+b_1s+b_2}{a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$。

### 4. 传递函数视角下的稳态增益计算

**（1）核心规则**

稳态增益是系统在恒定输入下的最终输出与输入比值，通过**传递函数中令**$s=0$ 计算（本质是拉普拉斯变换的终值定理应用）。

**（2）不同系统的稳态增益实例**

- 一阶通用系统：$G(0)=\frac{K}{\tau\times0+1}=K$，与一阶系统原有定义一致；
- 车辆速度系统：$G(0)=\frac{0.8}{5\times0+1}=0.8$，对应稳态速度$0.8\times100=80$ mph，与响应曲线结果吻合；
- 三阶系统：$G(0)=\frac{b_2}{a_3}$，仅由分子常数项与分母常数项决定。

### 5. 工程应用：风力涡轮机系统的传递函数分析

**（1）系统控制目标**

- 高阶目标：减小载荷瞬变以延长组件寿命、平滑功率输出、最大化能量捕获；
- 低阶目标：保证系统稳定性、维持发电机反扭矩、抵抗风扰动。

**（2）传递函数的模块化应用**

风力涡轮机系统由执行器、气动增益、感应滞后、动力传动系等串联模块组成，总稳态增益为各模块稳态增益的乘积：

1. 执行器传递函数：$\frac{25.9}{s+25.9}$，稳态增益$G_1(0)=1.0$；
2. 气动增益： scalar 常数 8090，稳态增益$G_2(0)=8090$；
3. 感应滞后传递函数：$\frac{1}{7.5s+1}$，稳态增益$G_3(0)=1.0$；
4. 动力传动系传递函数：$\frac{2123.38}{s^4+33.39s^3+7566.13s^2+6421.3s+80900}$，稳态增益$G_4(0)=\frac{2123.38}{80900}\approx0.026$；
5. 总稳态增益：$G_{总}(0)=1.0\times8090\times1.0\times0.026\approx212$。

**（3）物理意义**

总稳态增益为 212 意味着：在恒定风速（无扰动）下，**发电机反扭矩的稳态值 = 212× 转子桨距角输入值**，为系统控制参数的设定提供了量化依据。

## 三、两大模型体系的关联与工程价值

### 1. 核心关联逻辑

- 一阶系统是传递函数的基础特例：当传递函数分母为一阶多项式（$\tau s+1$）时，即为一阶系统的传递函数；
- 参数一致性：一阶系统的$\tau$和$K$与传递函数中的时间常数、稳态增益完全对应，且传递函数将参数分析扩展至高阶系统；
- 分析方法递进：一阶系统的阶跃响应分析是时域基础，传递函数则实现了时域与频域分析的衔接。

### 2. 工程应用价值

- 标准化建模：无论是简单的车辆速度系统，还是复杂的风力涡轮机系统，均可通过统一的模型框架（一阶方程 / 传递函数）描述；
- 高效参数识别：结合阶跃响应曲线与传递函数，可快速从实验数据中提取系统关键参数；
- 控制设计支撑：传递函数为控制系统的稳定性分析、控制器设计（如 PID 控制）提供了核心数学工具，是工程控制领域的基石。