一、数学模型基础认知

1. 定义与建模意义

- **定义**：数学模型是 “关于所研究系统行为的科学假设”，是对系统特性的抽象描述。
- **核心目的**：涵盖五大维度 —— 科学理解系统本质、实现未来状态预测、开展仿真实验、支撑管理与运营规划、助力控制系统设计。
- **实践示例**：文档提及 Matlab/Simulink 温室模型，可模拟阀门位置与空气温度的关系，且需通过对比模型输出与真实数据（如不同时段空气温度拟合曲线及误差）验证模型有效性。

2. 模型的核心分类（树状维度拆解）

文档通过树状图明确模型的四大分类维度，各维度特征与实例如下：

（1）按空间参数分布：集总参数模型 vs 分布参数模型

类型	核心特征	数学工具	实例
分布参数模型	描述变量在**时间与空间全范围**的变化	偏微分方程	计算流体动力学（CFD）通风模型，需刻画 3D 空间内气流速度（大小 + 方向）的时间变化
集总参数模型	描述变量在**固定空间点间**的时间变化	常微分方程	传递函数模型，如通风系统进出口气流关系模型

（2）按系统特性：线性模型 vs 非线性模型

- **线性模型**：遵循叠加原理，稳定性是系统固有属性，与外部输入的性质和幅值无关。
- **非线性模型**：不服从叠加原理，对不同幅值的相似输入可能产生差异极大的响应，甚至出现复杂混沌行为。例如洛伦兹吸引子模型（含三个耦合微分方程），系统演化会趋向特定吸引子集合，且受扰动后仍能维持稳定趋势。

（3）按建模依据：机理模型 vs 黑箱模型

- **机理模型**：基于已知物理定律构建，可解释系统内部机制。例如基于牛顿运动定律推导的车辆速度模型 $\tau\dot{x}+x=Ku(t)$。
- **黑箱模型**：不关注内部机理，仅通过简化方式关联输入与输出，参数需通过图形或统计方法从数据中估算。例如通过气流与电压数据建立的风扇通风率模型。

（4）按时间维度：连续时间模型 vs 离散时间模型

- **连续时间模型**：描述变量**连续变化**的系统（模拟系统），用微分方程表示。
- **离散时间模型**：描述变量在**离散时间间隔**变化的系统（数字系统），用差分方程表示。
- **关联关系**：连续时间系统常通过数字计算机控制，需定期采样输出数据实现离散化调控。

二、典型模型案例分析

1. 河流流量动态模型（练习案例）

- **模型形式**：$y(t)=\frac{0.01706s^2+0.1578s+0.001680}{s^2+0.3299s+0.001768}u(t)$，其中$y(t)$为河流流量输出，$u(t)$为有效降雨输入，$s$为微分算子（$s=d/dt$），通过小时实测数据统计估算得到。
- **模型分类**：集总参数模型（常微分方程形式）、线性模型（传递函数结构）、黑箱模型（基于数据估算）、连续时间模型（含微分算子）。

2. 数据驱动机理（DBM）模型

- **核心特性**：融合数据与机理的优势 —— 用统计分析识别模型结构并估算参数，同时需具备物理意义解释能力。
- **实例解析**：河流流量模型经部分分式展开为并联路径形式：$y(t)=\left\{0.0171+\frac{0.1496}{s+0.3244}+\frac{0.002573}{s+0.00545}\right\}u(t)$，对应三类物理过程：
  - 瞬时效应：1 小时内影响河流流量的少量有效降雨；
  - 快速流效应：与地表及近地表过程相关，含稳态增益与时间常数；
  - 慢速流效应：与地下水过程相关，含稳态增益与滞留时间。

三、一阶系统建模实践：车辆速度模型

1. 物理量关系基础

- 位移的变化率为速度（$v=\dot{y}$），速度的变化率为加速度（$\dot{v}=\ddot{y}$），三者通过微分关系关联。

2. 建模推导（基于牛顿定律）

- **受力假设**：车辆质量为m，发动机力为输入$u(t)$，摩擦力与速度成正比（摩擦力$=bv$，b为摩擦系数），忽略车轮转动惯量。
- **二阶模型（位移相关）**：由牛顿第二定律（力 = 质量 × 加速度）得$u(t)-b\dot{y}=m\ddot{y}$，整理为$m\ddot{y}+b\dot{y}=u(t)$。
- **一阶模型（速度相关）**：若聚焦速度v（$v=\dot{y}$，$\dot{v}=\ddot{y}$），模型简化为**一阶微分方程**：$m\dot{v}+bv=u(t)$。

3. 与标准一阶系统的对应

- **标准形式**：$\tau\dot{x}+x=Ku(t)$，其中x为输出，$u(t)$为输入，τ为时间常数，K为稳态增益。
- **车辆模型匹配**：将$m\dot{v}+bv=u(t)$整理后，可对应标准形式中的参数（后续课程深入解析）。

四、一阶系统阶跃响应初探

- **输入设定**：发动机力为阶跃输入，从 0 突变为 100%（0% 对应零力，100% 对应满功率）。
- **响应特征**：给定质量与摩擦系数的典型值，通过 Matlab/Simulink 求解微分方程，得到车辆速度随时间变化的响应曲线，展现了速度从 0 逐步趋近稳态的动态过程。

一、一阶系统深度解析（CNENGR115_L5_First_order (2), v1.pdf）

1. 一阶系统核心模型与参数定义

（1）标准微分方程及参数释义

一阶系统的通用数学表达为 **$\tau\dot{x} + x = Ku(t)$**，该方程是所有一阶系统分析的基础，各参数的物理意义与工程价值如下：

- **输出变量**x：系统对外呈现的可测量物理量，如车辆速度、风扇通风率、液压系统流量等。
- **输入变量**$u(t)$：驱动系统产生响应的外部作用，如发动机力、输入电压、流体 inlet 流量等。
- **时间常数**τ：表征系统动态响应速度的核心参数，τ越小，系统响应越迅速，达到稳态的时间越短。
- **稳态增益**K：描述系统达到稳态后输出与输入的比例关系，反映系统对输入信号的放大或衰减特性。

（2）参数的物理本质与推导逻辑

以车辆速度系统为例，其原始模型基于牛顿第二定律推导：车辆在发动机力$u(t)$与摩擦力（与速度成正比，即bv）作用下，运动方程为$m\dot{v} + bv = u(t)$（m为车辆质量，b为摩擦系数，v为速度）。通过标准化整理，将其转化为一阶系统标准形式，可得参数对应关系：$\tau = \frac{m}{b}$（质量与摩擦系数的比值决定响应速度）、$K = \frac{1}{b}$（摩擦系数的倒数决定稳态放大效应）。

2. 阶跃响应：动态特性的核心表征

（1）单位阶跃响应的数学表达与规律

当输入为**单位阶跃信号**（从 0 突变为 1）时，一阶系统的输出响应表达式为：
$x(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)u(t)$
该式揭示了输出随时间的演化规律：从初始值 0 开始，以指数形式逐步趋近稳态值K，无超调现象（一阶系统典型特征）。

（2）关键时间节点的输出特征

通过数学计算可明确不同时刻的输出状态，为参数识别提供依据：

时间t	**输出**$x(t)$	**物理意义**
$t = 0$	0	阶跃输入刚作用时，系统输出尚未响应
$t = \tau$	$0.6321K$	输出达到稳态值的 63%，是定义时间常数的核心依据
$t = 2\tau$	$0.8647K$	输出达到稳态值的 86.47%
$t = 3\tau$	$0.9502K$	输出达到稳态值的 95.02%，工程上可认为已达稳态
$t \to \infty$	K	系统完全稳定，输出与输入满足稳态增益关系

3. 核心参数识别方法（基于实验数据 / 响应曲线）

（1）稳态增益K的计算

无论是单位阶跃还是非单位阶跃输入，稳态增益均通过**稳态时输出与输入的比值**确定，公式为：

$K = \frac{x(t\to\infty)}{u(t\to\infty)}$

- 车辆速度实例：当发动机功率（输入）为 100%，稳态速度（输出）为 80 mph 时，$K = \frac{80}{100} = 0.8$。
- 风扇通风率实例：当输入电压为 40 V，稳态气流为 60 m³/h 时，$K = \frac{60}{40} = 1.5$。

（2）时间常数τ的识别

时间常数通过响应曲线的特征点直接读取：在阶跃响应图中，**输出达到稳态值 63% 所对应的时间即为τ。**

- 车辆速度实例：稳态速度为 80 mph，63% 稳态值为$0.63 \times 80 = 50.4$ mph，对应响应曲线上该速度的时间为 5 s，故$\tau = 5$ s。
- 风扇通风率实例：稳态气流为 60 m³/h，63% 稳态值为$0.63 \times 60 = 37.8$ m³/h，对应时间为 10 s，故$\tau = 10$ s。

4. 多领域工程实例与模型普适性

一阶系统的模型结构具有极强的普适性，可描述机械、液压、通风等多种工程系统，以下为典型实例解析：

（1）车辆速度系统

- 标准模型：$5\dot{x} + x = 0.8u(t)$（$\tau = 5$ s，$K = 0.8$）。
- 物理意义：发动机功率变化时，速度以 5 s 为特征时间，逐步趋近于输入功率的 0.8 倍稳态值。

（2）轴向风扇通风率系统

- 标准模型：$10\dot{x} + x = 1.5u(t)$（$\tau = 10$ s，$K = 1.5$）。
- 扩展验证：当输入电压为 20 V（非 40 V 基准）时，稳态气流为$1.5 \times 20 = 30$ m³/h，63% 稳态值为 18.9 m³/h，对应时间仍为 10 s，验证了参数的稳定性。

（3）单 tank 液压系统

- 建模假设：流量与水头成正比、无能量损耗、流体不可压缩。
- 推导过程：
  1. 由流量 - 水头关系得$Q_o = Kh$（Q_o为出口流量，h为水头，K为系数），进而$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dQ_o}{dt}$；
  2. 由体积守恒（$\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt} = Q_i - Q_o$，$A$为 tank 横截面积，$Q_i$为 inlet 流量），代入上式得 $\frac{A}{K}\frac{dQ_o}{dt} + Q_o = Q_i$；
  3. 模型对应：$\tau = \frac{A}{K}$，$K = 1$（稳态增益为 1），输出为Q_o，输入为Q_i。

（4）模型普适性的价值

机械、热、电、液压等不同领域的系统虽物理本质不同，但均满足一阶系统微分方程结构，使得**同一套分析方法（阶跃响应、参数识别、稳态分析）可跨领域应用**，大幅简化工程问题求解。