算子谱理论的基本概述
以及 Hamiltonian 算子的谱

李永伟　　指导教师: 李金仙

摘要

算子谱理论是现代数学物理方程中极为重要的工具, 本文的工作主要分为两部分, 第一部分主要归纳了算子谱理论的基本概念, 罗列了一些简单算子的谱集结构, 并补充了一些基本证明; 第二部分则基于国内 Hamiltonian 算子谱的发展现状, 总结了一些该算子重要的成果, 同时也对论文中的一些简略证明予以补充.

关键词: 算子谱理论;Hamiltonian 算子; 泛函分析

1 绪论

无论在任何时期, 数学方程问题永远是人们最关注的领域之一, 有关数学方程理论的任何进步都有着不可忽视的潜力, 这些进步有些会极大促进应用领域的技术, 有些则会在数学理论领域攀登高峰. 算子谱理论是为了解决应用领域的数学物理方程而发展的一种理论, 但时至今日, 算子谱理论也已经成为泛函分析领域中不可或缺的基石, 极大地促进了泛函分析理论的进程. 正是因为算子谱理论不仅在物理和工程领域中大放光彩, 也对数学理论起了很大的作用, 很多人为之投入毕生心血. 算子谱理论之所以在应用领域很受欢迎, 就是因为很多经典的物理学或工程学问题都可以转换成数学方程来求解, 而在这个过程中, 不可避免的需要用到算子的谱理论.

事实上, 很多算子谱理论的概念都是由于实际的需要才被研究的, 例如无界算子的谱理论是 Von Neumann 为了适应量子力学的发展才开始研究的.Hilbert 在 1913 年前就建立了一个谱理论的基本框架, 这为后来的 Riesz 用另一角度建立谱理论提供了方便. 书籍 [6] 和 [7] 给出了完善的算子谱理论.

国内阿拉坦仓教授主持的无穷维 Hamiltonian 系统讨论班在 Hamiltonian 算子的谱的研究处于领先地位, 文献 [11], [10], [9] 均来自其团队.

基于前人的工作, 本文主要做了以下工作:

1. 对算子谱理论的概念做了一个基本的阐述, 同时给出了算子谱理论中一些重要的定理的另一种证明, 其中包括 [7] 中没有给出的证明.

2. 国内外 Hamiltonian 算子谱的理论取得了很多显著性的成果, 但这些成果过于零散, 本文力求对这些成果进行整理归纳, 为 Hamiltonian 算子谱理论的入门者提供一个可以快速略读理论重要成果的方式, 同时对一部分定理补足了其证明过程.

2 线性算子的谱

线性算子的谱的一系列结论是作为研究算子 $\lambda I - T$ 可逆时 (I 为单位算子,T 为线性算子),$\lambda \in \mathbb{C}$ 在复平面上分布问题而出现的. 在高等代数中我们知道矩阵 A 的特征值满足 $Ax = \lambda x$, 全部移至等式一端可得 $(\lambda I - A)x = 0$, 这也是算子 $\lambda I - T$ 的来源. 有限维的情况下 $\lambda \in \mathbb{C}$ 在复平面上分布问题很简单, 要么是特征值, 要么是正则值; 而无限维情况下, 情况就变得复杂多了, 由此也引出了许多新的概念,λ 也不再非黑即白. 我们将正则值的补集分为了点谱, 连续谱和剩余谱三个独立的集合, 为了与有限维的情况相对比, 我们把这三个集合的并集称为谱集. 算子谱理论的主要工作就是找到对于算子谱集的刻划, 并就各类特殊的算子给出谱集更进一步的描述.

2.1 有界线性算子

有界线性算子是一类基础算子, 关于它有一个很重要的定理, 就是对于线性算子来说, 有界和连续是等价的.

定义 2.1.1. *设 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,D 是 X 的线性子空间,$T: D \to \mathscr{Y}$, 若 $\forall x, x_1, x_2 \in D$,$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, 有*

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2, T(\alpha x) = \alpha Tx$$

则称 T 是 $D \to \mathscr{Y}$ 的一个线性算子. 记 $D(T), R(T)$ 分别是 T 的定义域, 值域.

当 $D = \mathscr{X}$ 时, 称 T 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的一个线性算子. 我们记 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 上所有的线性算子构成的集合为 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，若 $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$, 则简记为 $\mathcal{L}(\mathscr{X})$.

定义 2.1.2. *当 $\mathscr{Y}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 时，我们称该线性算子为线性泛函.*

定义 2.1.3. *设 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 都是赋范线性空间,$T \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$,$T$ 是有界线性算子, 若 $\underset{\|x\|<1}{sup} \|Tx\| < \infty$. 令 $\|T\| = \underset{\|x\|<1}{sup} \|Tx\|$. 同样, 我们设 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 上所有的有界线性算子构成的集合为 $\mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 若 $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$, 则缩写为 $\mathcal{B}(\mathscr{X})$.*

定义 2.1.4. *$T \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 对于 $\forall x \in \mathscr{X}$, 若 $\forall \{x_n\} \in \mathscr{X} \to x$, 都有 $\{Tx_n\} \to Tx$, 那么我们称 $T : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是连续线性算子.*

在给出有界和连续的线性算子的定义后, 接下来我们给出本小节最重要的定理 [7]:

定理 2.1.5. *T 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续线性算子 $\Longleftrightarrow$$T$ 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的有界线性算子.*

证明. 充分性, 已知 T 为有界线性算子, 要证 T 为连续线性算子.$\|T\| = \underset{\|x\|<1}{sup} \|Tx\|$, 不妨设存在常数 $M > 0$, 使得 $\forall x \in \mathscr{X}$, 存在 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$. 取 $\{x_n\} \to 0$, 即得 $\|Tx\| \to 0$, 故 T 在 $x = 0$ 处连续. 对于任意的 $y \in \mathscr{X}$, 可以找到 $z \in \mathscr{X}$, 使得 $\|y - z\| \leqslant \delta$, 令 $x = y - z$, 则 $\|Tx\| = \|Ty - Tz\| \leqslant \epsilon$, 即当 $z \to y$ 时, 有 $Tz \to Ty$, 又因为 z 是任取的, 因此,T 在 $\mathscr{X}$ 上连续, 故 T 为连续线性算子.

必要性, 已知 T 为连续线性算子, 若 $x_n \to 0$, 由定义 2.1.4可知,$Tx_n \to 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $\|x\| < \delta$ 时, 有 $\|Tx\| < 1$, 任给 $u \in \mathscr{X}$, 令 $u = ax$, 其中 $\|x\| = \delta, a = \delta^{-1}\|u\|$, 我们有

$$\|Tu\| = a\|Tx\| \leqslant a = \delta^{-1}\|u\|$$

因此由定义 2.1.3, 显然 T 为有界线性算子. □

得出上述定理后, 我们就可以不加区分的看待有界和线性算子了. 下面讨论有界线性算子的结构, 即

定理 2.1.6. *设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 分别为赋范线性空间, 巴拿赫空间. 证明 $\mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是巴拿赫空间.*

证明. 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 中的柯西列, 即满足当 $n_1,n_2\to\infty$ 时,$\|T_{n_1}-T_{n_2}\|\to\infty$. 对于任意给定的 $x\in\mathscr{X}$, 当 $n_1,n_2\to\infty$ 时, 有

$$\|T_{n_1}x-T_{n_2}x\|\leqslant\|T_{n_1}-T_{n_2}\|\|x\|\to 0$$

故我们得到了一个 $\mathscr{Y}$ 空间上的柯西列, 又因为 $\mathscr{Y}$ 是完备的, 故该柯西列是收敛列, 即 $T_nx\to Tx(n\to\infty)$, 而且 $Tx\in\mathscr{Y}$. 这样我们得到了一个算子 T, 容易知道这个算子为线性算子. 对于 $\forall\epsilon>0,\exists N$, 使得当 $n,m>N$ 时, 有 $\|T_m-T_n\|\leqslant\epsilon$. 不妨取 $x\in\mathscr{X}$ 满足 $\|x\|\leqslant 1$, 我们有

$$m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow\|T_mx-T_nx\|\leqslant\epsilon$$

固定 n, 令 $m\to+\infty$, 可以得到

$$n\in\mathbb{N}\Rightarrow\|Tx-T_nx\|\leqslant\epsilon$$

又因为 x 是任取的, 最后可以得到

$$n\in\mathbb{N}\Rightarrow\|T-T_n\|\leqslant\epsilon$$

即 $\{T_n\}$ 是收敛列, 故我们证明了 $\mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是完备的. □

2.2 稠定闭线性算子

由于本文第二部分 Hamiltonian 算子的定义需要用到稠定闭线性算子, 所以在这里罗列其定义.

定义 2.2.1. *$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$, 若对于任意的 $\{x_n\}\in D(T),x_n\to x$ 以及 $Tx_n\to y$ 可以推出 $x\in D(T),y=Tx$. 则称 T 为闭的线性算子.*

定义 2.2.2. *设 $T\in\mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则称 T 为稠密线性算子, 当 $D(T)$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密. 如果 T 同时满足定义 2.2.1, 则称 T 为稠定闭线性算子.*

2.3 线性算子的谱的一些结论

定义 2.3.1. *设 $\mathscr{H}$ 为 Hilbert 空间,$T\in B(H)$, 我们称集合 $\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T_\lambda^{-1}\in\mathcal{B}(H)\}$ 为算子 T 的预解集, 其中,$T_\lambda=\lambda I-T,\lambda\in\rho(T)$ 称为 T 的正则值.$R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}$ 称为 T 的预解算子.*

根据定义 2.3.1可知, 当 *Hilbert* 空间 $\mathscr{H}$ 为有限维情况时,$\lambda\in\mathbb{C}$ 要么属于 $\rho(T)$, 要么是 $\mathscr{H}$ 的特征值, 这是在高等代数中已经论述过的. 关键是 $\mathscr{H}$ 为无限维的情况, 我们可以简单的分为这几种情况:

$$\rho(T)=\{Ker(T_\lambda)=0,R(T_\lambda)=H\};$$

$$\sigma_p(T)=\{Ker(T_\lambda)\neq 0\};$$

$$\sigma_c(T)=\{Ker(T_\lambda)=0,R(T_\lambda)\neq H,\overline{R(T_\lambda)}=H\};$$

$$\sigma_r(T)=\{Ker(T_\lambda)=0,\overline{R(T_\lambda)}\neq H\}.$$

设 $\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash\rho(T)$, 我们称 $\sigma(T)$ 为算子 T 的谱集, 显然可以看出谱集还能表示为

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$$

由此, 定义 $\sigma_p(T)$ 为点谱,$\sigma_c(T)$ 为连续谱,$\sigma_r(T)$ 为剩余谱.

容易看出, 若 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是算子 T 的特征值, 则存在元素 $x\in\mathscr{H}$ 使得 $Tx=\lambda x$, 即 $\lambda\in Ker(\lambda I-T)$. 因此,$\sigma_p(T)=\{\lambda|\lambda\text{为 T 的特征值}\}$.

当 λ 是矩阵 A 的特征值时,$p(\lambda)$ 都是矩阵 $p(A)$ 的特征值. 同样的, 在谱集中也有类似的定理, 若 $T\in\mathcal{B}(H)$, 则 $p(T)$ 也是该空间的有界线性算子. 也就是下面的定理:

定理 2.3.2. *如果 $T\in B(H)$,$p(x)$ 是任一多项式, 那么*

$$\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$$

证明. 设 $p(x)$ 是任一多项式, 且最高项系数为 1. 对于任意的 $\mu\in\mathbb{C}$, 我们令 $p(x)-\mu=(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_n)$, 代入算子可得 $p(T)-\mu I=(T-b_1I)(T-b_2I)...(T-b_nI)$. 如果每一项 $(T-b_iI)(i=1,2...n)$ 都可逆的话, 显然 $p(T)-\mu I$ 可逆. 因此如果有 $\mu\in\sigma(p(T))$, 一定存在 $b\in\sigma(T)$, 使得 $u=p(b)$. 即 $\sigma(p(T))\subseteq p(\sigma(T))$.

若是已知 $p(T)-\mu I$ 可逆, 即 $Ker(p(T)-\mu I)$ 为空集,$R(p(T)-\mu I)=H$. 于是由 $Ker(p(T)-b_iI)\subseteq Ker(p(T)-\mu I)$ 可知 $Ker(p(T)-b_iI)(i=1,2...n)$ 都为空集. 又由 $H=R(p(T)-\mu I)\subseteq R(p(T)-b_iI)$ 可知 $T-b_iI$ 为满射, 于是 $b_i]\notin\sigma(T)$. 即 $p(\sigma(T))\subseteq\sigma(p(T))$

因此,$\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$. □

下面我们研究谱集的结构, 由 [7](32-33) 可知对于任意的有界线性算子, 谱集非空, 且当设谱半径为谱集中 λ 的绝对值的上确界时, 我们可以给出谱半径的表达公式, 即

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

由此可知谱集被包含在一个闭球中, 谱半径的名称也因此而来. 在谱集中, 有几个特殊的子集需要了解一下:

定义 2.3.3. *设 $T\in B(H)$, 设*

$$A=\{dim(Ker(T))<\infty,R(T)\text{是闭的}\}$$

$$B=\{R(T)\text{是闭的},dim(H/R(T))<\infty\}$$

则当 $T\in A(B)$ 时, 称算子 T 为上 (下) 半 Fredholm 算子; 当 $T\in A\bigcap B$ 时称为 Fredholm 算子.

定义上 (下) 半 Fredholm 谱为:

$$\sigma_{SF_+}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不是上半 Fredholm 算子}\}$$

$$\sigma_{SF_-}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不是下半 Fredholm 算子}\}$$

定义 2.3.4. *称 T 为下有界算子, 如果存在正数 k 使得对于任给的 $x\in H$, 都成立 $\|Tx\|\geqslant k\|x\|$. 我们定义逼近点谱为:*

$$\sigma_a(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{不是下有界算子}\}$$

定义 2.3.5. 定义本质谱为:

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是 } Fredholm \text{ 算子}\}$$

定义 2.3.6. 定义 $n(T) = dim(Ker(A)), d(A) = dim(K/R(A))$ 为算子 T 的零度和亏数, 我们把 $ind(T) = n(T) - d(T)$ 称为 T 的指标, 若 *Fredholm* 算子 T 满足 $ind(T) = 0$, 则称为 *Weyl* 算子, 定义 *Weyl* 谱为:

$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是 } Weyl \text{ 算子}\}$$

3 一些简单算子的谱

上述结论给出了有界线性算子的基本轮廓, 但有界这个概念还是太过于宽泛, 因此我们在有界线性算子中找出一些具有特殊的条件的算子来重点讨论. 从而从特殊到一般, 整体把握线性算子的谱集.

3.1 共轭算子

定义 3.1.1. 设 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 为两个 *Hilbert* 空间,$T \in \mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 若有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, (x \in \mathscr{X}, y \in \mathscr{Y})$$

其中 $T^* \in \mathcal{B}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$ 是唯一确定的, 那么我们称 T^* 为 T 的共轭算子.

从共轭算子可以衍生出几类算子, 如下, 设以下定义中的 $T \in \mathcal{B}(\mathscr{X})$, 那么

定义 3.1.2. 若 $T = T^*$, 则称 T 为自伴算子.

定义 3.1.3. 若 $TT^* = T^*T$, 则称 T 为正规算子.

定义 3.1.4. 若 $TT^* = T^*T = I$, 则称 T 为酉算子.

3.2 紧算子

定义 3.2.1. 如果对于任意的有界数列 $\{x_n\} \in H$, 在数列 $\{Tx_n\}$ 中都存在收敛子列, 那么我们称算子 T 为紧算子. 用 $\mathfrak{C}(H, K)$ 表示 H 到 K 的紧算子的全体.

定义 3.2.2. 设 B 为 H 中的单位球, 如果 $\overline{T(B)}$ 在 K 中是紧的, 那么我们也称 T 是紧算子.

命题 3.2.3. 以下为紧算子的一些性质:

1. $\mathfrak{C}(H, K) \subseteq B(H, K)$;
2. $\mathfrak{C}(H, K)$ 关于数乘与加法封闭;
3. $T \in \mathfrak{C}(H, K)$ 当且仅当 $T^* \in \mathfrak{C}(H, K)$

证明. 1. 已知 $T \in \mathfrak{C}(H, K)$, 那么对于任意的 $x \in H$, 有

$$M \triangleq \underset{x \in B}{sup}\|Tx\| = \underset{y \in A(B)}{max}\|y\| < \infty \Rightarrow \|Tx\| \leqslant M\|x\|$$

故 $T \in B(H,K)$.

2. 设 $A,B \in \mathfrak{C}(H,K)$,$\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, 只需证明 $\alpha A+\beta B \in \mathfrak{C}(H,K)$ 即可. 对于任意的有界数列 $\{x_n\}$, 由定义 3.2.1可知,$\{Ax_n\},\{Bx_n\}$ 中都有收敛的子列, 显然对于任意的 $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$,$\{\alpha Ax_n\},\{\beta Bx_n\}$ 中仍有收敛子列, 不妨设为 $\{\alpha Ax_{n_k}\},\{\beta Bx_{n_k}\}$, 我们知道收敛数列的和仍收敛, 故 $\{\alpha Ax_{n_k}+\beta Bx_{n_k}\}$ 仍为收敛数列, 因此 $\alpha A+\beta B \in \mathfrak{C}(H,K)$, 即 $\mathfrak{C}(H,K)$ 关于数乘与加法封闭.

3. 必要性: 已知 $T \in \mathfrak{C}(H,K)$, 要证 $T^* \in \mathfrak{C}(H,K)$, 根据定义 3.2.1可知, 只需证明对于 K 中的有界数列 x_n,T^*x_n 中有收敛的子列即可. 由定义 3.1.1可知,$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$, 构造函数 $f_n(y)=\langle y,y_n\rangle$, 其中 $y \in \overline{T(B)}$, 显然其等价于 $\langle x,T^*y_n\rangle$, 其中 $x \in B$,B 为 H 中的单位球. 故若给定一个有界的数列 y_n, 只需证明 $f_n(y)$ 有一致收敛的子列即可. 实际上

$$|f_n(y)| \leqslant \|y\|\|y_n\| \leqslant \|T\|(\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \overline{T(B)})$$

即 $f_n(y)$ 是一致有界的, 又有

$$|f_n(y)-f_n(z)| \leqslant \|y_n\|\|y-z\| \leqslant \|y-z\|(\forall y,z \in \overline{T(B)})$$

由此我们知道 $f_n(y)$ 是等度连续的, 故 f_n 中存在收敛的子列, 从而 T^*x_n 中也有收敛的子列.

充分性: 由必要性可知,$T^{**} \in \mathfrak{C}(H,K)$, 而显然在 H 内,$T=T^{**}$, 故 $T \in \mathfrak{C}(H,K)$. □

定理 3.2.4. *从 H 到 H 的紧算子的谱集只有三种情形:*

(1) $\sigma(T)=\{0\}$;

(2) $\sigma(T)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$;

(3) $\sigma(T)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,0\}$, 其中 $\{\lambda_n\}$ 以 0 为聚点.

证明. 已知 H 为无限维 Hilbert 空间, 故紧算子 T 不可逆, 容易看出 $0 \in \sigma(T)$. 由紧算子的定义 3.2.1可知 $\sigma(T)$ 为一个紧集, 故对于任意的 $\lambda>0, \sigma(T)\bigcap\{\lambda:|\lambda| \geqslant r\}$ 也是一个紧集, 故这个集合只有有限个孤立的特征值, 即这个集合有限. 又因为 r 是任取的, 故可知 $\sigma(T)$ 至多为可数集.

如果存在 $\lambda_n \in \sigma(T)$ 使得 $\lambda_n \neq 0$, 且对于任意的 n,λ_n 都不相同, 那么存在 $x_n \in Ker(T-\lambda_n I)\backslash\{0\}(n=1,2,...)$.

接下来说明 $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 是线性无关的.$n=1$ 时结论显然成立, 不妨假设结论对 n 成立, 证明对 $n+1$ 同样成立. 反证法, 设 $x_{n+1} \in Ker(T-\lambda_n I)\backslash\{0\}$, 那么

$$\lambda_{n+1}x_{n+1}=Tx_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i x_i$$

因此 $\sum_{i=1}^{n}a_i(\lambda_{n+1}-\lambda_n)x_i=0$. 又因为 $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 是线性无关的, 故可知系数全为 0, 即 $a_i(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0(i=1,2,...,n)$, 由此得 $a_i=0(i=1,2,...,n)$, 这与 $x_{n+1}\neq 0$ 矛盾, 故 $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 是线性无关的.

由上述结论可知, 如果 $E_n=span\{x_1,x_2,...,x_n\}$, 那么 $E_n \subseteq E_{n+1}$, 根据 Riesz 引理, 有 $y_{n+1} \in E_{n+1}$, 使得 $\|y_{n+1}\|=1$ 且 y_{n+1} 到 E_n 的距离大于等于 $\frac{1}{2}$. 因此对于 $\forall n,p \in \mathbb{N}$,

$$\|\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ty_{n+p}-\frac{1}{\lambda_n}Ty_n\| = \|y_{n+p}-(y_{n+p}-\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ty_{n+p}+\frac{1}{\lambda_n}Ty_n)\| \geqslant \frac{1}{2}$$

又因

$$y_{n+p} - \frac{1}{\lambda_{n+p}} T y_{n+p} + \frac{1}{\lambda_n} T y_n \in E_{n+p-1}$$

与 T 是紧算子矛盾. 因此 0 是该谱集的唯一聚点. $\square$

3.3 自伴算子

定义 3.3.1. 设 $\mathscr{X}$ 为内积空间,T 为 $\mathscr{X}$ 上的一个算子, 如果满足

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

其中 $x, y \in \mathscr{X}$, 那么我们称 T 为对称算子. 如果 $\mathscr{X}$ 为一个复空间, 那么我们称 T 为 *Hermite* 算子.

根据定义 3.1.2我们可以发现自伴算子为对称算子, 事实上, 如果对称算子 T 满足 $T \in \mathcal{B}(\mathscr{X})$, 那么自伴算子和对称算子是等价的.

定理 3.3.2. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathscr{X})$, 则 T 为自伴算子 $\Longleftrightarrow$ 对于任给的 $x \in \mathscr{X}, \langle Tx, x \rangle$ 为实数.

证明. 设 $x \in \mathscr{X}$, 则

$$\langle Tx, x \rangle - \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle Tx, x \rangle - \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle - \langle T^* x, x \rangle = \langle (T - T^*) x, x \rangle$$

如果 T 是自伴算子, 那么显然等式右端为 0, 因此可得 $\langle Tx, x \rangle - \overline{\langle Tx, x \rangle} = 0$, 又由于 x 是任取的, 故对于任给的 $x \in \mathscr{X}, \langle Tx, x \rangle$ 为实数.

反之, 若对于任给的 $x \in \mathscr{X}, \langle Tx, x \rangle$ 为实数, 则等式左端为 0, 因此 $\langle (T - T^*) x, x \rangle = 0$ 对于任意的 x 成立, 由此 $T - T^*$ 是零算子, 即 T 为自伴算子. $\square$

定理 3.3.3. 设 T 是自伴算子, 定义

$$m(T) = \underset{\|x\|=1}{inf} \langle Tx, x \rangle, M(T) = \underset{\|x\|=1}{sup} \langle Tx, x \rangle$$

则算子 T 的谱集 $\sigma(T)$ 满足 $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$, 并且 $m(T), M(T) \in \sigma(T)$.

证明. 首先证明 $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$, 即对于任意的 $\lambda \in \sigma(T)$, 可以推出 $\lambda \in [m(T), M(T)]$. 将其逆否, 即证明对于任意的 $\lambda \notin [m(T), M(T)]$, 可以推出 $\lambda \in \rho(T)$. 令 l 是 λ 到区间 $[m(T), M(T)]$ 的距离, 当 $\|x\| = 1$ 时, 我们有

$$l \leqslant |\lambda - \langle Tx, x \rangle| = |\langle (T - \lambda I), x \rangle| \leqslant \|Tx - \lambda x\|$$

因此, 我们有 $l\|x\| \leqslant \|Tx - \lambda x\|$, 故 $(T - \lambda I)^{-1}$ 存在, 同时有 $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{l}\|y\|$ $(y \in R(T - \lambda I))$. 所以 λ 要么属于 T 的预解集, 要么属于 T 的剩余谱. 我们只需证明不属于剩余谱即可, 反证法, 如果 $\lambda \in \sigma_r(T)$, 有 $\overline{R(T_\lambda)} \neq \mathscr{X}$, 容易知道 $R(T - \lambda I)^\perp$ 不是空集, 又因为 $Ker(T^* - \lambda I) = R(T - \lambda I)^\perp$, 因此得出 λ 是 T^* 的特征值. 取 $\|x\| = 1$ 且 $T^* x = \lambda x$, 而 T 是自伴算子, 有

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^* x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda$$

根据 $m(T), M(T)$ 的定义可知 λ 也属于 $[m(T), M(T)]$, 与之前的假设矛盾, 故 $\lambda \in \rho(T)$. 因此得出 $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$.

接下来只需证明 $m(T),M(T)$ 都属于 $\sigma(T)$. 令 $\lambda=m(T)$, 显然 $\langle T_\lambda x,x\rangle\geqslant 0$, 故 T_λ 是正算子, 由 $|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$ 可以证明正算子满足 $|\langle Tx,y\rangle|^2\leqslant\langle Tx,x\rangle\cdot\langle Ty,y\rangle$. 所以, 我们有

$$\begin{aligned}\|T_\lambda x\|^4&\leqslant\langle T_\lambda x,x\rangle\langle T_\lambda^2x,T_\lambda x\rangle\\&\leqslant\langle T_\lambda x,x\rangle\|T_\lambda\|^3\|x\|^2\end{aligned}$$

如果 $\|T_\lambda\|$ 为零的话, 可以得出结论 $\lambda\in\sigma(T)$. 而从之前的结论能得到

$$\underset{\|x\|=1}{inf}\|T_\lambda x\|=0\Rightarrow\underset{\|x\|=1}{inf}\langle T_\lambda x,x\rangle=0\Rightarrow\lambda\in\sigma(T)$$

$M(T)\in\sigma(T)$ 的情况同理. □

定理 3.3.4. *设 T 是自伴算子, 则有 $r_\sigma(T)=\|T\|$, 其中 $r_\sigma(T)$ 为算子 T 的谱半径.*

证明. 由范数的定义可知 $\|T\|=\underset{\|x\|=1}{sup}|\langle Tx,x\rangle|$, 有

$$\|T\|=\underset{\|x\|=1}{sup}|\langle Tx,x\rangle|=max\{|m(T)|,|M(T)|\}$$

根据谱半径的定义即得 $r_\sigma(T)=\|T\|$. □

4 Hamiltonian 算子的谱

无限维 Hamiltonian 算子的谱由于其与应用领域, 特别是物理, 生命科学方面的联系紧密, 一直以来都是一个热门话题, 其来源于哈密尔顿在 19 世纪创建的 Hamiltonian 体系.

Hamiltonian 系统从产生到成熟历经了三个时期, 最开始是哈密尔顿一人建立的正则方程如下

$$\begin{cases}\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q}\\ \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p}\end{cases}$$

接下来 Pauli 进一步建立了广义的 Hamiltonian 系统, 到了现在,Hamiltonian 系统为了用来解决物理力学发展成为无限维系统, 其在偏微分方程理论, 流体力学... 中得到了大量的应用. 随着无限维 Hamiltonian 系统开始展示它在数学和物理领域的威力, 从系统中抽象出来的一种特殊的线性算子也得到了重点关注, 也就是接下来的小节中的 Hamiltonian 算子.

4.1 Hamiltonian 算子

定义 4.1.1. *设稠定闭线性算子 H 满足 $D(H)\subset\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}\times\mathscr{X}$, 其中 $\mathscr{X}$ 是完备的内积空间. 令 $J=\left(\begin{smallmatrix}0&I\\-I&0\end{smallmatrix}\right)$, 如果满足 $(JH)^*=JH$, 那么称 H 为无限维 Hamiltonian 算子. 接下来如无必要, 均以 H 代表 Hamiltonian 算子.*

不妨设 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, 则由 $(JH)^*=JH$ 得

$$\left(\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)^*=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}C^* & -A^*\\ D^* & -B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & D\\ -A & -B\end{pmatrix}$$

故 H 可以表示为 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}$, 其中 A 为稠定闭线性算子,B,C 为自伴算子.

4.2 主要结果

定理 4.2.1. *如果 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中的稠定闭线性算子, 则*

1. $\lambda\in\sigma_p(T)\Rightarrow\bar{\lambda}\in\sigma_pT^*\bigcup\sigma_r(T^*)$;
2. $\lambda\in\sigma_r(T)\Rightarrow\bar{\lambda}\in\sigma_pT^*$;
3. $\lambda\in\sigma_c(T)\Leftrightarrow\bar{\lambda}\in\sigma_c(T^*)$.

证明. 文献 [8] 证明了结论 1 和 2. 由于 T 是闭的, 有 $\sigma_{pr}(T)=\overline{\sigma_{pr}(T^*)}$, 又 $\sigma(T)=\overline{\sigma(T^*)}$, 有 $\sigma_c(T)=\overline{\sigma_c(T^*)}$. 因此 $\lambda\in\sigma_c(T)\Leftrightarrow\bar{\lambda}\in\sigma_c(T^*)$. □

定理 4.2.2. *H 的特征值与 H^* 的特征值互为相反数.*

证明. 由 $(JH)^*=JH\Rightarrow H^*J^*=JH\Rightarrow -H^*J=JH$ 得,

$$Hx=\lambda x\Leftrightarrow JHx=\lambda Jx\Leftrightarrow -H^*Jx=\lambda Jx\Leftrightarrow H^*(Jx)=-\lambda Jx$$

x 为特征值. 从而 $-\lambda$ 为 H^* 的特征值, 二者可以互推. □

定理 4.2.3. *$\forall\lambda\in\sigma_rH\Rightarrow-\lambda\in\sigma_rH^*$.*

证明. 若设 $\lambda\in\sigma_rH$, 则 $\overline{R(\lambda I-H)}\neq\mathscr{X}\times\mathscr{X}$, 故 $\exists y\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}\setminus\overline{R(\lambda I-H)}$, 使得 $\langle(\lambda I-H)x,y\rangle=0$, 而

$$\langle(\lambda I-H)x,y\rangle=\langle(\lambda I-JH^*J)x,y\rangle=\langle J(-\lambda I-H^*)Jx,y\rangle$$

故有

$$\langle(-\lambda I-H^*)Jx,J^*y\rangle=0$$
$$\langle(-\lambda I-H^*)Jx,Jy\rangle=0$$

由 [11] 中公式 $D(H^*)=JD(H),D(H)=JD(H^*)$ 得到

$$\langle(-\lambda I-H^*)x^*,y^*\rangle=0,x^*=Jx\in D(H^*)$$

由此得到 $\overline{R(-\lambda I-H^*)}\neq\mathscr{X}\times\mathscr{X}$, 因此 $-\lambda\in\sigma_rH^*$. □

定理 4.2.4. *H 的剩余谱中没有纯虚数, 即 $\alpha i\notin\sigma_r(H),\forall\alpha\in\mathbb{R}$*

证明. 反证法, 如果 $\exists \alpha i \in \sigma_r(H)$, 由 [6](175) 的结论得 $-\alpha i \in \sigma_p(H^*)$, 从而 $\alpha i \in \sigma_p(H)$, 矛盾, 故 $\alpha i \notin \sigma_r(H)$. □

定理 4.2.5. *$\sigma_p(H) \bigcup \sigma_r(H)$ 在虚轴上对称.*

证明. 见文献 [11]. □

定理 4.2.6. *$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$, 当 H 满足 B, C 全部为正算子时, 它的特征值满足 $Re(\lambda) \neq 0$, 并且有*

$$|Re(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}(m_B + m_C)$$

$m_B = \underset{\|x\| \leqslant 1}{inf} \langle Bx, x \rangle, m_C = \underset{\|x\| \leqslant 1}{inf} \langle Cx, x \rangle$.

证明. 设 H 的关于 λ 的特征向量为 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, 且 $\|f\| = 1$, 即

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

写成式子为

$$\begin{cases} Af_1 + Bf_2 = \lambda f_1 \\ Cf_1 - A^* f_2 = \lambda f_2 \end{cases} \tag{1}$$

令 (1) 式与 f 做内积运算, 得

$$\langle Af_1, f_2 \rangle + \langle Bf_2, f_2 \rangle = \lambda \langle f_1, f_2 \rangle \tag{2}$$

$$\langle f_1, Cf_2 \rangle - \langle f_1, A^* f_2 \rangle = \langle f_1, \lambda f_2 \rangle \tag{3}$$

因为 $\langle x, Cx \rangle = \langle Cx, x \rangle$, 故对 (3) 式变换, 得

$$\langle Cf_1, f_2 \rangle - \langle Af_1, f_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle f_1, f_2 \rangle \tag{4}$$

令 (2)+(4) 可得

$$\langle Bf_2, f_2 \rangle + \langle Cf_1, f_1 \rangle = 2Re(\lambda) \langle f_1, f_2 \rangle$$

又 $\langle Bf_1, f_2 \rangle > 0, \langle Cf_1, f_2 \rangle > 0$, 且 $\|f\| = 1$, 故 $Re(\lambda) \neq 0, \langle f_1, f_2 \rangle \neq 0, |\langle f_1, f_2 \rangle| \leqslant 1$. 因此

$$\begin{aligned} |Re(\lambda)| &\geqslant \frac{1}{2}(\langle Bf_2, f_2 \rangle + \langle Cf_1, f_1 \rangle) \\ &\geqslant \frac{1}{2}(m_B + m_C) \end{aligned}$$

□

5 结语

本篇论文对算子谱理论基本概念和 Hamiltonian 算子的谱进行了概述, 在阐述一些基本定义及定理的基础上, 给出了一些重要定理的证明, 比如整体有界线性算子是巴拿赫空间,Hamiltonian 算子的剩余谱中没有纯虚数等.

限于作者的知识水平, 本文难免有些粗糙, 恳请各位老师批评指正, 不吝赐教.

参考文献

[1] T. Y. Azizov, Dijksma Aad, and I. V. Gridneva. On the boundedness of hamiltonian operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131(2):563–576, 2003.

[2] W. Deng, W. Han, and Q. Wang. The existence of periodic solution for infinite dimensional hamiltonian systems. 2018.

[3] W. U. DEYU ALATANCANG. Symplectic self-adjointness of infinite dimensional hamiltonian operator. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 34(9):1473–1484, 2011.

[4] J. 迪斯米埃 and 姚一隽. 谱理论讲义. 高等教育出版社, 2009.

[5] Jie LIU, Junjie Huang, and Alatancang CHEN. Symmetry of numerical range and semigroup generation of infinite dimensional hamiltonian operators. *TURKISH JOURNAL OF MATHEMATICS*, 42:49–56, 01 2018.

[6] 孙泂 and 王忠. 线性算子的谱分析. 科学出版社, 2005.

[7] 孟彬 and 曹小红. 算子与框架教程. 高等教育出版社, 2010.

[8] 范小英. 无穷维 hamilton 算子的谱. 硕士论文, 内蒙古大学, 4 2001.

[9] 范小英 and 阿拉坦仓. 一类非负 hamilton 算子的谱分布及其可逆性. 应用数学学报, 32(1):14–18, 2009.

[10] 闫利君, 吴德玉, and 阿拉坦仓. 一类无穷维 hamilton 算子的谱. 数学的实践与认识, 46(10):242–247, 2016.

[11] 黄俊杰, 阿拉坦仓, and 范小英. 无穷维 hamilton 算子的谱结构. 中国科学, (1):71–78, 2008.

Abstract

Operator spectrum theory is an extremely important tool in modern mathematical physics equations.The work of this paper is mainly divided into two parts.The first part mainly summarizes the basic concepts of operator spectrum theory,lists the spectrum set structure of some simple operators,and added some basic proof;the second part is based on the development of domestic Hamiltonian operator spectrum,summarizes some important results of this operator,and also supplements some simple proofs in the paper.

Keywords: Operator spectrum theory; Hamiltonian operator; functional analysis