

面向 21 世纪全国高职高专机电类规划教材

自动控制原理与系统

姜春瑞 槐春晶 刘丽 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书从简明实用的角度,对自动控制原理作了深入浅出的介绍,通过各个具有代表性的实例对自动控制原理的基本概念、线性系统的数学建模、控制系统的时域分析、根轨迹法、控制系统的频域分析和自动控制系统的校正进行了详细、透彻的分析与总结。同时,本书简要介绍了作为控制理论知识前沿的智能控制理论。

本书为大专(高职高专)和低层次的本科自动化专业教材,同时也可作为电气工程及其自动化、检测技术与自动化装置等自动化控制类专业教学用书。同时,本书适合相关专业人士自学。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理与系统/姜春瑞,槐春晶,刘丽编著. —北京:北京大学出版社,2005.9
(面向21世纪全国高职高专机电类规划教材)
ISBN 7-301-08942-2

I. 自… II. ①姜… ②槐… ③刘… III. 自动控制理论—专业学校—教材 IV. TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第031824号

书 名: 自动控制原理与系统

著作责任者: 姜春瑞 槐春晶 刘丽 编著

责任编辑: 吕冬明

标准书号: ISBN 7-301-08942-2/TP • 0787

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765013

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电子信箱: xxjs@pup.pku.edu.cn

印刷者:

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787毫米×980毫米 16开本 13.25印张 270千字

2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷

定 价: 24.00元

前 言

为了适应大专（高职高专）等技术性人才的培养工作，笔者作为在工业自动控制领域工作学习多年的教学科研人员，特编写了这本具有一般方法论特点的技术基础课程——《自动控制原理与系统》教材。

自动控制原理作为一门基础课程，它同时同工程实践紧密相连，在日常的工业生产当中随处可见其应用。然而，很多理论课的学习往往让人进入“理论”的陷阱当中去，仅仅能够就“理论”而论“理论”，在实际的生产实践当中遇到各种障碍，很难能够将所学到的理论应用到实际当中去。本书特别针对这一现象，在编写的过程中注重理论和实际的紧密相连，同时注重传输分析问题与解决问题的思路、方法。一个好的例子，往往能够使人更容易将所学的知识融会贯通，同时也能够增强人们学习的兴趣。本书在每一章节的最后，通过一个设计实例将本章的重点知识融会其中，既增强了可读性，同时对本章的内容也作了很好的总结。“实用”是本书的特点之一。

本书在编写的过程中，特别注重语言的简明，尽量用朴实的语言介绍书中的专业知识。同时，在文中注重方法的总结，对于重点的理论知识，都有对应的简明的使用方法。本书在编写的过程中，注重突出重点。作为自动控制理论中的重点知识，即线性系统的时域分析与频域分析，分析得比较透彻，而不是过分追求面面俱到。

智能控制在近代也取得了飞速的发展，本书在第7章作了简单的介绍。

考虑到计算机技术的发展对控制系统发展的促进作用，本书中的图表和大量的计算工作都由计算机通过 **MATLAB** 仿真给出。考虑到篇幅的原因，本书没有介绍计算机仿真方面的知识。

本书是姜春瑞、刘丽、槐春晶同志共同辛苦努力工作的结晶。在本书的编写过程中，受到了北大出版社的大力支持，在此由衷地表示感谢。同时也感谢给予我们关心和帮助的家人和朋友们。

本书在匆忙之中编写完成，其中难免有疏漏和错误之处，恳请读者对本教材提出批评与指正，以便进一步修改和完善。

编 者

2005 年 1 月

目 录

第 1 章 自动控制的一般概念.....	1
1.1 概述.....	1
1.2 自动控制系统的构成.....	1
1.3 开环控制与闭环控制.....	3
1.4 自动控制系统的分类.....	5
1.4.1 按系统输入信号的变化规律不同分类.....	5
1.4.2 按描述系统的数学模型不同分类.....	6
1.4.3 按系统传输信号的性质分类.....	7
1.4.4 其他分类方法.....	8
1.5 自动控制系统的发展阶段.....	8
1.6 自动控制的基本要求.....	9
1.7 习题.....	11
第 2 章 系统的数学模型.....	13
2.1 自动控制系统的微分方程.....	13
2.1.1 系统微分方程式建立的一般步骤.....	13
2.1.2 系统微分方程建立举例.....	14
2.2 拉普拉斯变换.....	18
2.2.1 拉普拉斯变换.....	18
2.2.2 拉氏逆变换.....	20
2.3 控制系统的传递函数.....	21
2.3.1 传递函数的基本概念.....	22
2.3.2 几种典型的传递函数.....	25
2.4 框图及其化简方法.....	28
2.4.1 结构图的基本概念.....	28
2.4.2 结构图的化简.....	31
2.4.3 传递函数的几个基本概念.....	37
2.5 信号流图.....	40
2.5.1 信号流图中的术语及信号流图性质.....	40
2.5.2 信号流图的绘制.....	42

2.5.3 梅逊公式.....	43
2.6 设计实例.....	44
2.7 习题.....	49
第3章 线性系统的时域分析.....	51
3.1 典型输入信号.....	51
3.2 一阶系统的时域响应.....	54
3.2.1 一阶系统的数学模型.....	54
3.2.2 单位阶跃响应.....	54
3.2.3 单位斜坡响应.....	56
3.2.4 单位脉冲响应.....	57
3.3 二阶系统的时域响应.....	58
3.3.1 二阶系统的数学模型.....	58
3.3.2 二阶系统的阶跃响应.....	59
3.3.3 二阶系统的瞬态性能指标.....	64
3.4 系统的稳定性分析.....	67
3.4.1 稳定的充要条件.....	68
3.4.2 劳斯稳定判据.....	69
3.5 系统的稳态误差分析.....	74
3.5.1 稳态误差的定义.....	74
3.5.2 系统类型数.....	75
3.5.3 参考输入信号作用下的稳态误差.....	76
3.5.4 扰动输入信号作用下的稳态误差.....	80
3.6 设计实例.....	83
3.7 习题.....	85
第4章 根轨迹法.....	88
4.1 根轨迹的基本概念.....	88
4.2 根轨迹绘制的基本规则.....	90
4.3 控制系统根轨迹分析.....	103
4.4 设计实例.....	108
4.5 习题.....	110
第5章 频域分析.....	112
5.1 频率特性.....	112
5.1.1 频率特性的基本概念.....	112
5.1.2 频率特性与传递函数的关系.....	114
5.1.3 频率特性图形表示.....	114

5.2 典型环节的频率特性.....	115
5.2.1 比例环节.....	115
5.2.2 积分环节.....	117
5.2.3 微分环节.....	118
5.2.4 惯性环节.....	119
5.2.5 一阶微分环节.....	121
5.2.6 振荡环节.....	122
5.2.7 二阶微分环节.....	125
5.2.8 延迟环节.....	125
5.3 系统开环频率特性.....	126
5.3.1 系统开环幅相频率特性.....	126
5.3.2 系统开环对数频率特性曲线.....	131
5.4 奈奎斯特稳定判据.....	135
5.4.1 最小相位系统与非最小相位系统.....	136
5.4.2 闭环系统的稳定性.....	136
5.4.3 奈奎斯特稳定判据.....	138
5.4.4 奈奎斯特曲线与开环对数频率特性曲线的关系.....	140
5.5 系统的稳定裕度.....	143
5.6 闭环频率特性.....	148
5.6.1 闭环系统的频域性能指标.....	148
5.6.2 一阶系统的频域性能指标.....	149
5.6.3 二阶系统的频域性能指标.....	149
5.6.4 高阶系统的频域性能指标.....	151
5.7 设计实例.....	152
5.8 习题.....	154
第6章 控制系统的校正.....	158
6.1 控制系统的基本概念.....	158
6.2 基本控制规律分析.....	160
6.3 串联超前校正.....	164
6.3.1 超前校正装置.....	165
6.3.2 超前校正装置参数的确定.....	166
6.4 串联滞后校正.....	171
6.4.1 滞后校正装置.....	171
6.4.2 滞后校正装置参数的确定.....	173
6.5 串联滞后-超前串联校正.....	178

6.5.1 串联滞后-超前校正装置	178
6.5.2 串联滞后-超前校正参数的确定	180
6.6 反 馈 校 正	186
6.6.1 反馈校正的特点	186
6.6.2 反馈校正系统的设计	186
6.6.3 串联校正与反馈校正比较	187
6.7 设计实例	187
6.8 习题	191
第 7 章 智能控制系统	194
7.1 智能控制系统发展状况	194
7.1.1 智能控制系统定义	194
7.1.2 智能控制系统的特点	195
7.1.3 智能控制系统的分支	195
7.1.4 智能控制系统发展状况	196
7.2 简单智能控制系统的构成	197
7.2.1 一般自动控制系统的构成	197
7.2.2 简单智能自动控制系统的构成	197
7.3 设计实例	198
附录 常用拉氏变换表	201
参考文献	202

第 1 章 自动控制的一般概念

1.1 概 述

自动控制（Automatic control）是一个非常有吸引力的研究领域，在过去的几十年中发展起来的理论和实践解决了大量的自动化问题，使这个领域发展成为综合性的学科，它涉及到电气工程、计算机应用、机电一体化、过程控制等各种专业，应用领域极为广泛。

自动控制在我们日常生活中随处可见，人本身就是一个非常智能的自动控制系统。人体的许多功能可以在不需要有意识干涉的情况下完成，从而维持人们的生命：人的体温保持在 37℃ 左右的自动温控系统、心跳控制系统、眼球聚焦系统等等都属于自动控制系统。在我们的周围有更多的自动控制系统。在一个现代化的居室内，温度由温度调节装置自动控制，类似的还有水箱中热水的温度。导航控制系统使汽车自动保持在设定车速，刹车防抱死系统自动防止汽车在湿滑的路面上打滑，数控车床按预定程序自动切削，人造卫星准确进入预定轨道并回收等。

所谓**自动控制**，就是在没有人直接参与的情况下，利用外加的设备或装置（控制装置），使机器、设备或生产过程（控制对象）的某个工作状态或参数（被控量）自动地按照预定的规律运行。

自动控制系统（Automatic control system），是指能够对被控对象的工作状态进行自动控制的系统。它一般由控制装置和被控对象组成。**被控制对象**是指那些要求实现自动控制的机器、设备或生产过程。**控制装置**是指对被控对象起控制作用的设备总体。

自动控制系统的功能和组成是多种多样的，其结构有简单也有复杂。它可以只控制一个物理量，也可以控制多个物理量甚至一个企业机构的全部生产和管理过程；它可以是一个具体的工程系统，也可以是比较抽象的社会系统、生态系统或经济系统。

1.2 自动控制系统的构成

为了更好地理解自动控制系统的构成，我们将自动控制系统与人类的决策过程作比较，如图 1-1 和图 1-2 所示。

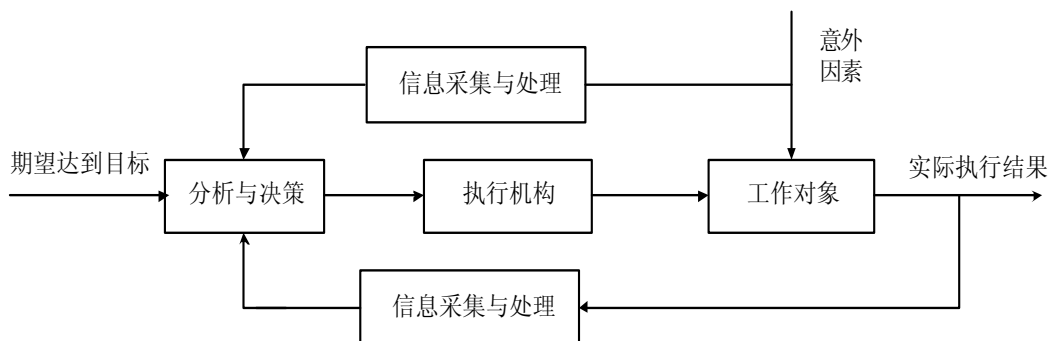


图 1-1 人工控制系统方框图

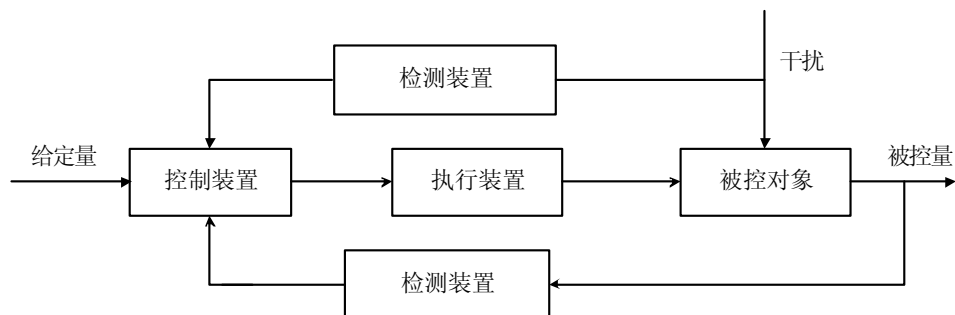


图 1-2 自动控制系统方框图

从图 1-1 和图 1-2 的比较中可以看出，自动控制系统应该具有测量、控制和执行单元，这些功能分别由相应的元器件来完成。

- 检测装置（检测元件）。它代替人眼或其他感官的功能，去测量被控参数，并转换成便于处理的信号。
- 控制装置（调节装置）。它代替人的大脑对检测装置送来的信号进行比较、分析、运算、判断等计算工作，并按计算结果发出控制信号。
- 执行装置。它代替人手和脚的功能，起到接受控制装置发出的控制信号去操纵被控对象的控制量以达到对被控参数实施控制的目的。

自动控制系统的实现过程是：在系统的给定量确定，即期望达到的目标确定，同时在干扰信号的作用下，通过检测输出信号的值进行数据处理计算，得到的结果经过执行器件输出作用到被控对象，对被控量进行新的调整。

下面以直流电动机速度自动控制为例来说明自动控制各部分的构成。结构如图 1-3 所示。图中，电位器电压为输入信号。电位器动点的位置一定，电动机速度就有一定值，故

电位器电压的变化称为**参考输入量**或**给定量**。测速发电机是电动机转速的**监测装置**，功率放大器为**控制装置**，也称为**控制器**。图 1-3 中，代表电动机转速变化的测速发电机电压送到输入端与电位器电压进行比较，两者的差值（又称**偏差信号**）控制功率放大器（控制装置），控制装置的输出控制电动机的转速，这就形成了电动机转速自动控制系统。

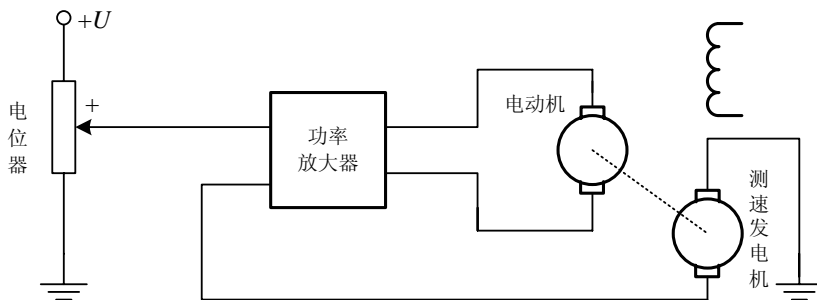


图 1-3 直流电动机速度自动控制的原理结构图

当电源变化、负载变化等引起转速变化，称为**干扰**。电动机被称为**被控对象**，转速称为**被控量**，当电动机受到扰动后，转速（被控量）发生变化，经检测装置（测速发电机）将转速信号（又称为**反馈信号**）反馈到控制装置（功率放大器），使控制装置的输出（称为**控制量**）发生相应的变化，从而可以自动地保持转速不变或使偏差保持在允许的范围内，也即使被控量自动地保持为给定值或在给定值附近的一个允许的很小范围内变动。

1.3 开环控制与闭环控制

自动控制系统有两种最基本的形式，即开环控制和闭环控制。

开环控制（Open-loop Control）是一种最简单的控制方式，其特点是，在控制器与被控对象之间只有正向控制作用而没有反馈控制作用，即系统的输出量对控制量没有影响。开环控制系统示意框图如图 1-4 所示。

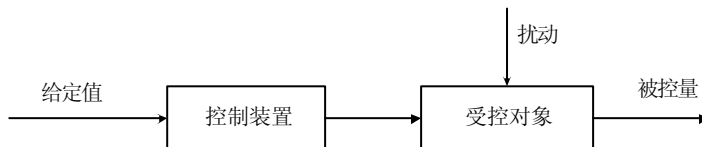


图 1-4 开环控制系统结构框图

传统的洗衣机就是一个开环的例子，浸湿、洗涤和漂清过程，在洗衣机中是依次进行的，在洗涤过程中，无需对其输出信号即衣服的清洁程度进行测量。

在任何开环控制中，系统的输出量都不需要与参考输入进行比较，对应于每一个参考输入量，便有一个相应的固定工作状态与之对应，这样，系统的精度便决定于校准的精度（为了满足实际应用的需要，开环控制系统必须精确地予以校准，并且在工作工程中保持这种校准值不发生变化）。当出现扰动时，开环控制系统就不能实现既定任务了，如果输入量与输出量之间的关系已知，并且不存扰动，则可以采用开环控制。沿时间坐标轴单向运行的任何系统，都是开环系统。

下面以一简单液面系统为例，来说明开环控制的原理与特点。

如图 1-5 所示为一简单的液面控制系统，要求其液面高度 h 能够保持在允许偏差的范围内。 V_1 和 V_2 是单位时间流出和流入此水槽的液体体积。要达到对液体高度控制的目的，首先应该根据要求的液面高度 h 及 V_1 的值，确定 V_2 的值，以达到期望的液面的高度。显然，这个目标是难以达到的，并且是十分不精确的。特别是在 V_1 和 V_2 的值受到温度、液体浓度、压强等因素影响而偏移了期望值的情况下，很难实现对液面高度的精确控制。可见开环控制的特点是结构简单、精度低、自调整能力差。开环控制一般只能用于对控制性能要求不高的场合。

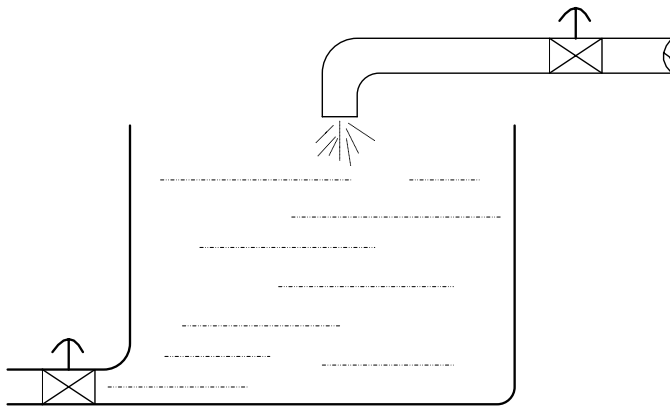


图 1-5 液面开环系统

如果此液面控制系统能够将液面的高度检测出来，通过液面的高度来调整 V_2 的值，即可对此液面实现精确的控制。此种思想即为**闭环控制**（Closed-loop Control）的思想。液面闭环系统示意图如图 1-6 所示。

图中浮子的位置就是测量出来的液面实际高度，将它与电位器相连接，在期望高度 h 的位置，此电位器的电压值为零。若水槽中的液体的液面高度偏离期望值 h ，就使电位器输出一个电压值 u ，此电压值经过放大后，作用于电动机，调整 V_2 的值，改变流入水槽中的液体

的速度，直到液面高度恢复到期望高度的值，由于电压输出为零，电动机不转动，液面就能维持在 h 附近而不超过允许误差的范围。从而实现了液面系统的自动控制。

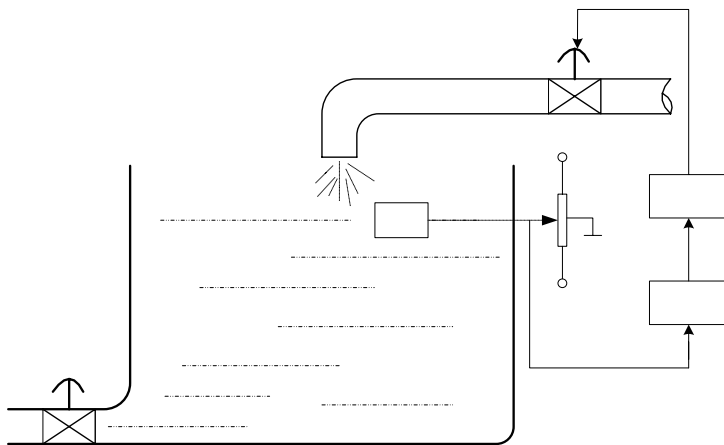


图 1-6 液面闭环系统示意图

从上面的例子可以看出，闭环系统是将输出的测量值与预期的输出值相比较，产生偏差信号并将偏差信号作用于执行机构。闭环控制也称为**反馈控制**，就是在输出与输入之间存在反馈通道，通过反馈通道将输出量反馈到输入端。

闭环控制方式比较复杂，但对于外界干扰，控制装置与控制对象参数发生变化引起的内部干扰，系统都能自动补偿。因此，闭环系统的控制精度比较高。闭环控制系统是自动控制系统中的最基本的控制方式，也是自动控制理论的基础。

1.4 自动控制系统的分类

自动控制系统种类繁多，上节我们所讲的开环控制和闭环控制是按照控制方式而分的，在这里介绍其他几种常见的分类方法。

1.4.1 按系统输入信号的变化规律不同分类

1. 恒值控制系统（或称自动调节系统）

这类系统的特点是输入信号是一个恒定的数值。工业生产中的恒温、恒速等自动控制系统都属于这一类型。恒值控制系统主要研究各种干扰对系统输出的影响以及如何克服这

些干扰，把输入、输出量尽量保持在希望数值上。

2. 过程控制系统（或称程序控制系统）

这类系统的特点是输入信号是一个已知的时间函数，系统的控制过程按预定的程序进行，要求被控量能迅速准确地复现，如化工中反应的压力、温度、流量控制。恒值控制系统也认为是过程控制系统的特例。

3. 随动控制系统（或称伺服系统）

这类系统的特点是输入信号是一个未知的函数，要求输出量跟随给定量变化。在随动系统中，扰动的影响是次要的，系统分析、设计的重点是研究被控制量跟随的快速性和准确性。函数记录仪、高炮自动跟踪系统便是典型的随动系统的例子。在随动系统中，如果被控制量是机械位置（角位置）或其导数时，这类系统称之为**伺服系统**。

1.4.2 按描述系统的数学模型不同分类

1. 线性系统

由线性元件构成的系统叫**线性系统**（Linear system）。其运动方程为线性微分方程。若各项系数为常数，则称为**线性定常系统**。其运动方程一般形式为

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_0 c(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} r(t) + b_0 r(t) \end{aligned}$$

式中： $r(t)$ ——系统的输入量； $c(t)$ ——系统的输出量。

线性系统的主要特点是具有叠加性和齐次性，即当系统的输入分别为 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$ 时，对应的输出分别为 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ ，则当输入为 $r(t) = a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t)$ 时，输出量为 $c(t) = a_1 c_1(t) + a_2 c_2(t)$ ，其中 a_1, a_2 为常系数。

2. 非线性系统

在构成系统的环节中有一个或一个以上的非线性环节时，则称此系统为**非线性系统**（non-linear system）。典型的非线性特性有饱和特性、死区特性、间隙特性、继电特性、磁滞特性等，如图 1-7 所示。

非线性理论研究远不如线性系统那么完整，一般只能近似地定性描述和数值计算。在自然界中，严格来说，任何物理系统的特性都是非线性的。但是，为了研究问题的方便，许多系统在一定的条件下，一定的范围内，可以近似地看成为线性系统来加以分析研究，其误差往往在工业生产允许的范围之内。

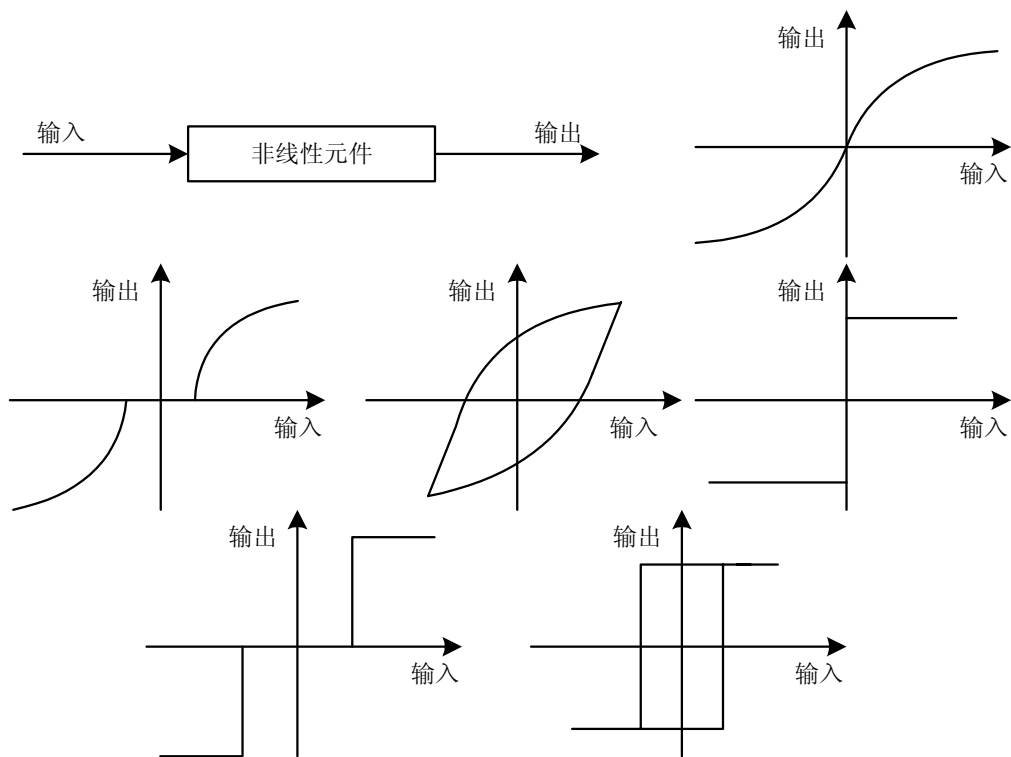


图 1-7 非线性特性举例

1.4.3 按系统传输信号的性质分类

1. 连续系统

系统各部分的信号都是模拟的连续函数。图 1-3 所示的电动机速度自动控制系统就属于这一类型。

2. 离散系统

系统的某一处或几处，信号以脉冲序列或数码的形式传递的控制系统。其主要特点是：系统中用脉冲开关或采样开关，将连续信号转变为离散信号。若离散信号为脉冲的系统又叫脉冲控制系统。若离散信号以数码形式传递的系统，又叫采样数字控制系统或数字控制系统。如数字计算机控制系统就属于这一类型。

1.4.4 其他分类方法

自动控制系统还有其他的分类方法,如按系统的输入/输出信号的数量来分,有单输入/单输出系统和多输入/多输出系统;按控制系统的功能来分:有温度控制系统、速度控制系统、位置控制系统等。按系统元件类型来分:有机电系统、液压系统、气动系统、生物系统。综合这些分类,可以全面反映控制系统。本书主要讲述线性定常系统,线性定常系统可用输入量与输出量的微分方程表示,且微分方程的系数是常数;反之,如果微分方程的系数随时间变化,称为时变系统。

对控制系统进行分类,可以在分析和设计系统前,对系统有初步的研究和认识,这样就可以选择适当的方法,有针对性地分析和设计系统。

1.5 自动控制系统的发展阶段

自动控制理论是研究自动控制共同规律的技术科学。既是一门古老的、已臻成熟的学科,又是一门正在发展的、具有强大生命力的新兴学科。控制理论的发展初期,是以反馈理论为基础的自动调节原理,主要用于工业控制。第二次世界大战期间,为了设计和制造飞机及船用自动驾驶仪、火炮定位系统、雷达跟踪系统等基于反馈原理的军用装备,进一步促进和完善了自动控制理论的发展。从1868年马克斯威尔(J.C.Maxwell)提出低阶系统稳定性判据至今一百多年里,自动控制理论的发展可分为三个主要阶段:

1. 第一阶段:经典控制理论(或古典控制理论)的产生、发展和成熟

经典控制理论的基本特征为:

- 主要用于线性定常系统的研究,即用于常系数线性微分方程描述的系统的分析与综合;
- 只用于单输入、单输出的反馈控制系统;
- 只讨论系统输入与输出之间的关系,而忽视系统的内部状态,是一种对系统的外部描述方法。

18世纪,James Watt 为控制蒸汽机速度设计的离心调节器,是自动控制领域的第一项重大成果。在控制理论发展初期,做出过重大贡献的众多学者中有迈纳斯基(Minorsky)、黑曾(Hezen)和奈奎斯特(Nyquist)。1922年,Minorsky 研制船舶操纵自动控制器,并证明了从系统的微分方程确定系统的稳定性。1932年,Nyquist 提出了一种相当简便的方法,根据对稳态正弦输入的开环响应,确定闭环的稳定性。1934年,Hezen 提出了用于位置控制系统的伺服机构的概念,讨论了可以精确跟踪变化的输入信号的继电式伺服机构。19世纪40年代,频率响应法为闭环控制系统提供了一种可行方法,从20世纪40年代末到50年代初,伊凡思(Evans)提出并完善了根轨迹法。频率响应法和根轨迹法是古典控制理论

的核心。由这两种方法设计出来的系统是稳定的，并且或多或少地满足一些适当的性能要求。一般来说，这些系统是令人满意的，但它不是某种意义上的最佳系统。

本书重点讲解经典控制理论的内容。

2. 第二阶段：现代控制理论的兴起和发展

由于航天事业和电子计算机的迅速发展，20世纪60年代初，在原有“经典控制理论”的基础上，又形成了所谓的“现代控制理论”。现代控制系统解决的是多输入多输出问题，通常采用状态空间的时域分析法。数字计算机的出现为复杂系统的时域分析提供了可能。因此，利用状态变量、基于时域分析的现代控制理论应运而生，从而适应了现代设备日益增加的复杂性，同时也满足了军事、空间技术和工程应用领域对精确度、重量和成本方面的严格要求。

为现代控制理论的状态空间法的建立作出开拓性贡献的有：1954年贝尔曼(R.Bellman)的动态规划理论，1956年庞特里雅金(L.S.Pontryagin)的极大值原理和1960年卡尔曼(R.E.Kalman)的多变量最优控制和最优滤波理论。状态空间方法的核心是最优化技术。它以状态空间描述（实质上是一阶微分或差分方程组）作为数学模型，利用计算机作为系统建模分析、设计乃至控制的手段，适应于多变量、非线性、时变系统。它不但在航空、航天、制导与军事武器控制中有成功的应用，在工业生产过程控制中也得到逐步应用。

3. 第三阶段：智能控制发展阶段

智能控制是近年来新发展起来的一种控制技术，是人工智能在控制上的应用。智能控制的概念和原理主要是针对被控对象、环境、控制目标或任务的复杂性提出来的，它的指导思想是依据人的思维方式和处理问题的技巧，解决那些目前需要人的智能才能解决的复杂的控制问题。被控对象复杂性体现为：模型的不确定性，高度非线性，分布式的传感器和执行器，动态突变，多时间标度，复杂的信息模式，庞大的数据量，以及严格的特性指标等。而环境的复杂性则表现为变化的不确定性和难以辨识。智能控制是从“仿人”的概念出发的，智能控制的方法包括模糊控制，神经网络控制，专家系统控制等方法，以解决传统控制系统不能解决的问题。由于传统的控制系统建立在精确的数学模型基础上，不能解决具有不确定性的系统，并且传统控制系统输入信息比较单一，而现代的复杂系统必须处理多种形式的信息，进行信息融合。所以具有自适应、自学习和自组织的功能，能处理不确定性问题的智能控制系统应运而生。

1.6 自动控制的基本要求

当自动控制系统受到各种干扰（扰动）或者人为要求给定值（参考输入量）发生改变

时,被控量就会发生变化,偏离给定值。通过系统的自动控制作用,经过一定的过渡过程,被控量又恢复到原来的稳定值或者稳定到一个新的稳定值。这时系统从原来的平衡状态过渡到一个新的平衡状态,称为**过渡过程**,也称为**动态过程**(即随时间而变的过程),而把被控量处于平衡状态称为**静态或稳态**。自动控制系统的基本要求可以归结为稳定性、准确性和快速性。

- **稳定性**:是指对于恒值系统,要求当系统受到扰动后,经过一定时间的调整能够回到原来的期望值;对于随动系统,被控制量始终跟随输入量的变化。稳定性是对系统的基本要求,不稳定的系统不能实现预定任务。**稳定性通常由系统的结构决定,与外界因素无关**。稳定系统如图 1-8。不稳定的系统无法进行正常工作,如图 1-9 (a) 为在给定信号作用下,被控量振荡发散的情况;图 1-9 (b) 为受扰动作用后,被控量不能恢复平衡的情况;另外,若系统出现等幅振荡,即处于临界稳定的状态,这种情况也视为不稳定。

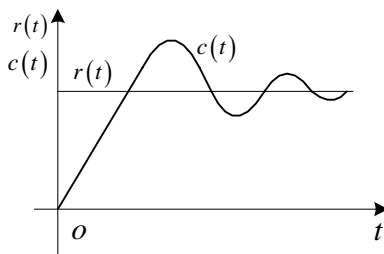


图 1-8 稳定系统的动态过程

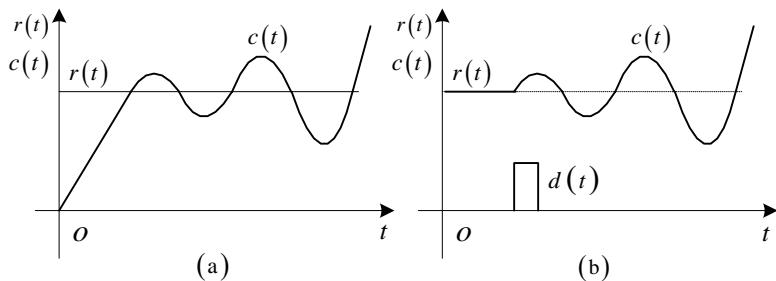


图 1-9 不稳定系统的动态过程

- **快速性**:快速性是通过动态过程时间长短来表征,如图 1-10 所示,它是对过渡过程的形式和快慢提出要求,一般称为**动态性能**。通常希望过渡过程越快越好。快速性表明了系统输出对输入响应的快慢程度。系统响应越快,说明系统的输出复现输

入信号的能力越强。

- **准确性**：用稳态误差来表示。如果在参考输入信号作用下，当系统达到稳态后，其稳态输出与参考输入所要求的期望输出之差叫做**给定稳态误差**，如图 1-11 所示。显然，这种误差越小，表示系统的输出跟随参考输入的精度越高。它反映了系统的稳态精度。若系统的最终误差为零，则称为**无差系统**，否则称为**有差系统**。

由于被控对象具体情况的不同，各种系统对上述三方面性能要求的侧重点也有所不同。例如随动系统对快速性和稳态精度的要求较高，而恒值系统一般侧重于稳定性能和抗扰动的能力。在同一个系统中，上述三方面的性能要求通常是相互制约的。例如为了提高系统动态响应的快速性和稳态精度，就需要增大系统的放大能力，而放大能力的增强，必然促使系统动态性能变差，甚至会使系统变为不稳定。反之，若强调系统动态过程平稳性的要求，系统的放大倍数就应较小，从而导致系统稳态精度的降低和动态过程的缓慢。由此可见，系统动态响应的快速性、高精度与动态稳定性之间是一对矛盾。

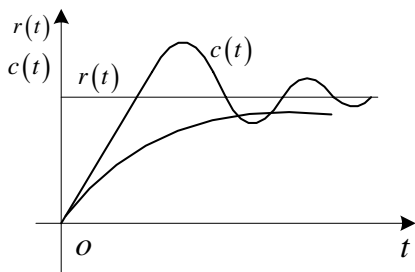


图 1-10 控制系统的快速性

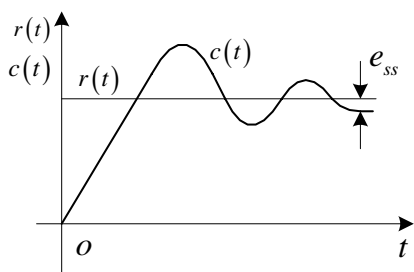


图 1-11 控制系统的稳态精度

1.7 习 题

1. 设热水电加热器如图 1-12 所示。为了保持希望的温度，由温控开关接通或断开电加热器的电源。在使用热水时，水箱中流出热水并补充冷水。试说明系统工作原理并画出原理方框图。
2. 生产机械的恒速控制系统的工作原理图如图 1-13 所示。画出系统的原理图，指出各部分分别为控制系统的哪个装置。
3. 液位控制系统的控制图如图 1-14 所示，试绘制出液位控制系统的原理方框图。

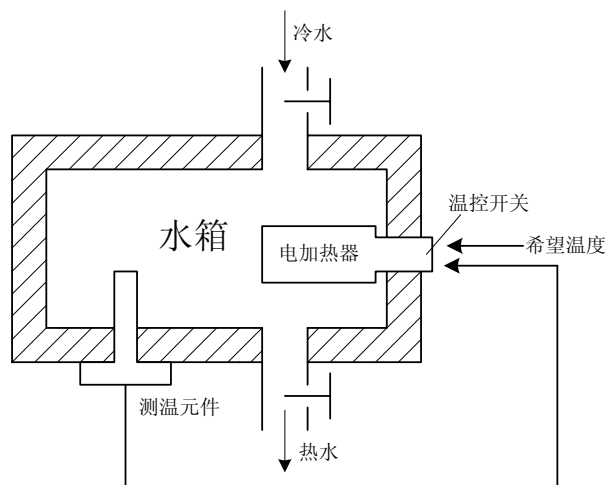


图 1-12 电加热器系统

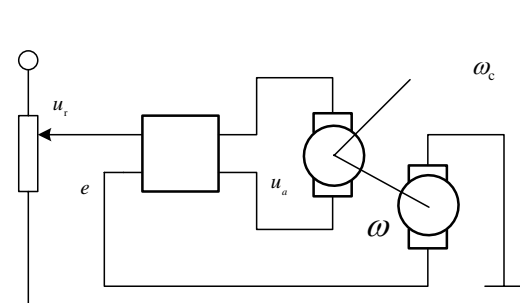


图 1-13 恒速控制系统

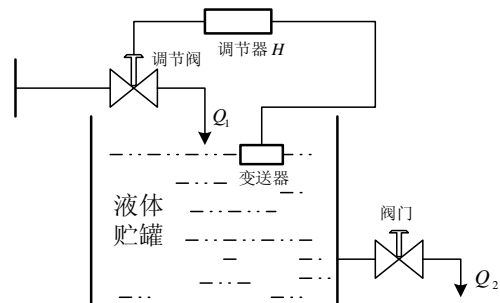


图 1-14 液位控制系统

第 2 章 系统的数学模型

系统的数学模型（Mathematical Models）是分析和设计控制系统的前提基础，所谓**数学模型**是指描述系统输入变量、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式。在古典控制理论中，主要研究系统输入—输出之间的关系，因此采用输入—输出描述。在本章主要介绍单输入单输出控制系统中三种常用的数学模型，微分方程、传递函数、方块图。

建立系统的数学模型有两种方法：解析法和实验法。**解析法**就是根据系统或元件各变量间所遵循的物理、化学等各种科学规律，用数学形式推导变量间的关系而建立系统的数学模型。**实验法**是指对实际系统或元件加入一定形式的输入信号，根据输入信号与输出信号间的关系建立系统的数学模型。实际上，只有部分系统的数学模型能根据机理用解析推导的方法求得，另外相当多的数学模型要通过实验的方法得到。本章，只讨论解析法建立数学模型。

2.1 自动控制系统的微分方程

描述系统的输入量与输出量之间关系的最直接的数学方法是列写系统的微分方程（Differential Equation）。当系统的输入量和输出量都是时间 t 的函数时，其微分方程可以确切地描述系统的运动过程。微分方程是系统最基本的数学模型。

2.1.1 系统微分方程式建立的一般步骤

系统微分方程式建立的一般步骤如下：

- （1）根据要求，确定系统和各元件的输入量和输出量；
- （2）一般从系统的输入端开始，根据各元件或环节所遵循的物理、化学规律，列写方程组；
- （3）将各元件或环节的微分方程联立起来消去中间变量，求取一个仅含有系统的输入、输出及其导数的方程，它就是系统的微分方程；
- （4）将该方程整理成标准形式。即把与输入量有关的各项放在方程的右边，把与输出量有关的各项放在方程的左边，各导数项按降幂排列，并将方程中的系数化为具有一定物

理意义的形式，如时间常数。

2.1.2 系统微分方程建立举例

例 1 列写图 2-1 所示的 RC 网络的微分方程。

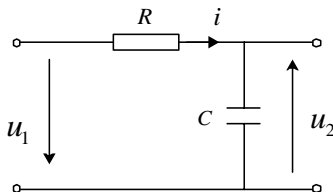


图 2-1 RC 网络结构

解

(1) 确定电路的输入量和输出量。设 u_1 为输入量， u_2 为输出量。

(2) 列出原始微分方程式。根据电路理论得

$$u_1 = iR + u_2$$

电容两端电压与电流的关系可表示为：

$$i = C \frac{du_2}{dt}$$

(3) 消去中间变量 i ，可得

$$RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

(4) 令 $T=RC$ ，则为微分方程可表示为：

$$RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

该式为一阶方程，从该微分方程中我们可以看出，微分方程的系数是常数，并且是线性方程，这样的方程称为线性定常系统。

例 2 列写图 2-2 所示的 RLC 串联网络的微分方程。

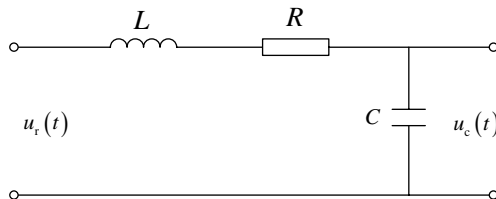


图 2-2 RLC 串联网路

解

(1) 令 $u_r(t)$ 为输入量, $u_c(t)$ 为输出量

(2) 根据基耳霍夫定律可列写方程:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_r(t)$$

(3) i 为中间变量, 它与输出 $u_c(t)$ 有如下关系

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i dt$$

(4) 消去中间变量 i 后, 便得输入输出微分方程式

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

令 $T_1 = L/R$, $T_2 = RC$ 为该电路的两个时间常数, 则上式可表示为:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + T_2 \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

该式为二阶微分方程。

例3 一个弹簧-质量-阻尼器系统, 如图 2-3 所示。

当外力 $f(t)$ 作用时, 系统产生位移 $y(t)$, 要求写出系统在外力 $f(t)$ 作用下的微分方程式。

解

(1) $f(t)$ 是系统的输入, $y(t)$ 是系统的输出。

(2) 列出原始方程式。根据牛顿第二定律, 有

$$f(t) - f_1(t) - f_2(t) = M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

式中 $f_1(t)$ ——阻尼器阻力;

$f_2(t)$ ——弹簧力;

M ——运动部件的质量。

(3) $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为中间变量。由于阻尼器是一种产生粘性摩擦或阻尼的装置, 活塞杆和缸体发生相对运动时, 其阻力与运动方向相反, 与运动速度成正比, 故有

$$f_1(t) = B \frac{dy(t)}{dt}$$

式中 B ——阻尼系数。

设弹簧为线性弹簧, 则有

$$f_2(t) = Ky(t)$$

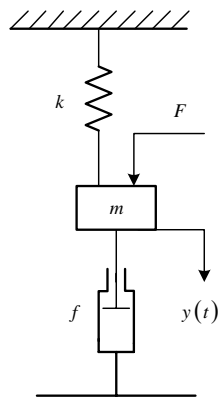


图 2-3 弹簧-质量-阻尼器结构图

式中 K ——弹性系数。

整理后得到系统的微分方程式

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

式中 M 、 B 、 K 均为常数，故上式为二阶微分方程式。

例 4 列写电枢控制的他激直流电动机的微分方程式。

解

(1) 确定输入量和输出量。取输入量为电动机的电枢电压 u_d ，取输出量为电动机的转速 n 。

(2) 列写微分方程式。电动机的运动微分方程式由该装置的电枢回路（图 2-4）的微分方程式和转动部分的机械运动微分方程式所决定。电枢回路的微分方程式：

$$e_d + i_d R_d + L_d \frac{di_d}{dt} = u_d$$

式中 e_d ——电动机电枢反电势，V；

R_d ——电动机电枢回路电阻， Ω ；

L_d ——电动机电枢回路电感，H；

i_d ——电动机电枢回路电流，A。

因为反电势 e_d 与电动机的转速成反比，故

$$e_d = c_e n$$

式中 c_e ——电动机电势常数，V/r/min；

n ——电动机转速，r/min。

因此上式可以改写为

$$c_e n + i_d R_d + L_d \frac{di_d}{dt} = u_d$$

当不考虑电动机的负载力矩和粘性摩擦力矩时，电动机机械运动微分方程式为

$$M = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt}$$

式中 M ——电动机的转矩，单位 kg·m；

GD^2 ——电动机的飞轮惯量，单位 kg·m²；

t ——时间，单位 s。

由于电动机的转矩是电枢电流的函数，当电动机的激磁不变时，电机转矩为

$$M = C_m i_d$$

式中 C_m ——电动机转矩常数，kg·m/A。

代入上式可以得到：

$$i_d = \frac{GD^2}{375C_m} \frac{dn}{dt}$$

上述三个方程式为电动机暂态过程的方程组，其中，电枢电流和电动机转矩是中间变量。

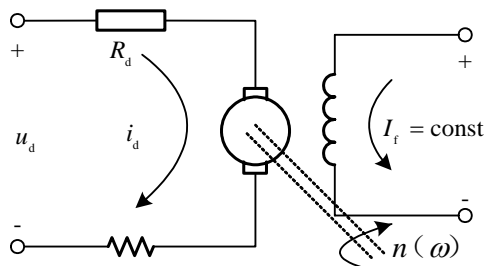


图 2-4 电枢控制回路

(3) 消去中间变量。得

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{GD^2}{375C_m} \frac{d^2n}{dt^2}$$

因此电枢回路的微分方程可以写为

$$c_e n + R_d \frac{GD^2}{375C_m} \frac{dn}{dt} + L_d \frac{GD^2}{375C_m} \frac{d^2n}{dt^2} = u_d$$

整理之后可以得到

$$\frac{L_d}{R_d} \frac{GD^2}{375C_m} \frac{R_d}{C_m C_e} \frac{d^2n}{dt^2} + \frac{GD^2}{375C_m} \frac{R_d}{C_m C_e} \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e}$$

令

$$\frac{L_d}{R_d} = T_d \quad \text{——电动机的电磁时间常数}$$

$$\frac{GD^2}{375} \frac{R_d}{C_m C_e} = T_m \quad \text{——电动机的机电时间常数}$$

则得电动机的微分方程

$$T_d T_m \frac{d^2n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e}$$

可以看出此方程是二阶线性微分方程。

从例 2、例 3、例 4 可以看出它们都是二阶微分方程，但是表示的物理模型的意义却完全不同，例 2 是电气系统，例 3 是机械系统，例 4 是电机系统，可见系统的数学模型由系统的结构、参数及其基本运动定律决定，但是不同的系统模型可以有相同或相似的数学模

型结构。

2.2 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换也称为拉氏变换，它是一种函数变换，可将微分方程式变换成代数方程式，并且变换的同时将初始条件引入，避免了经典解法关于求积分常数的麻烦，因此这种方法可以使解题的过程大为简化。拉氏变换是自动控制理论的数学基础，以后所要讲的传递函数的概念是建立在拉氏变换基础之上的。

2.2.1 拉普拉斯变换

1. 拉氏变换（Laplace transform）的定义

定义 设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时有定义，且广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

在 s 的某一区域内收敛，则由此积分确定的参数为 s 的函数

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉氏变换。函数 $F(s)$ 也可叫做 $f(t)$ 的像函数。

2. 拉氏变换的性质

性质 1 线性性质

若 a 、 b 是常数，且

$$L[f_1(t)] = F_1(s), \quad L[f_2(t)] = F_2(s)$$

则

$$\begin{aligned} L[af_1(t) + bf_2(t)] &= aL[f_1(t)] + bL[f_2(t)] \\ &= aF_1(s) + bF_2(s) \end{aligned}$$

性质 1 表明，函数的线性组合的拉氏变换等于各函数的拉氏变换的线性组合。性质 1 可以推广到有限个函数的线性组合的情形。

性质 2 平移性质

若 $L[f(t)] = F(s)$ ，则

$$L[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

性质2表明,像原函数乘以 e^{at} ,等于其像函数作位移 a ,因此性质2称为平移性质。

性质3 延滞性质

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则

$$L[f(t-a)] = e^{-as}F(s) \quad (a > 0)$$

函数 $f(t-a)$ 与 $f(t)$ 相比,滞后了 a 个单位,若 t 表示时间,性质3表明,时间延迟了 a 个单位,相当于像函数乘以指数因子 e^{-as} 。

性质4 微分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

性质4表明,一个函数求导后取拉氏变换,等于这个函数的拉氏变换乘以参数 s 再减去这个函数的初值。

性质5 积分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则

$$L\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(s)}{s}$$

性质5表明,一个函数积分后取拉氏变换,等于这个函数的拉氏变换除以参数 s 。性质5也可以推广到有限次积分的情形。

3. 例题

例5 求指数函数 $f(t) = e^{at}$ ($a \geq 0$, a 是常数)的拉氏变换。

解 根据拉氏变换定义,得

$$L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

此积分在 $s > a$ 时收敛,有

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

所以

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

例6 求单位阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

的拉氏变换。

解

$$L[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

此积分在 $s > 0$ 时收敛, 且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

所以

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

例 7 求 $f(t) = at$ (a 为常数) 的拉氏变换。

$$\begin{aligned} L[at] &= \int_0^{+\infty} ate^{-st} dt = -\frac{a}{s} \int_0^{+\infty} tde^{-st} \\ &= -\frac{a}{s} \left[te^{-st} \right]_0^{+\infty} + \frac{a}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{a}{s^2} \left[e^{-st} \right]_0^{+\infty} = \frac{a}{s^2} \end{aligned}$$

2.2.2 拉氏逆变换

1. 拉氏逆变换的定义

定义 若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉氏变换, 则称 $f(t)$ 是 $F(s)$ 的拉氏逆变换 (或叫做 $F(s)$ 的像原函数), 记作

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

2. 拉氏逆变换的性质

设 $L[f_1(t)] = F_1(s)$, $L[f_2(t)] = F_2(s)$, $L[f(t)] = F(s)$

性质 1 线性性质

$$\begin{aligned} L^{-1}[aF_1(s) + bF_2(s)] &= aL^{-1}[F_1(s)] + bL^{-1}[F_2(s)] \\ &= af_1(t) + bf_2(t) \quad (a, b \text{ 为常数}) \end{aligned}$$

性质 2 平移性质

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} L^{-1}[F(s)] = e^{at} f(t)$$

性质 3 迟滞性质

$$L^{-1}[e^{as} F(s)] = f(t-a)u(t-a)$$

常用的拉氏变换可以在拉氏变换表 (附录) 中查得, 在求拉氏逆变换的时候, 可以结合拉氏逆变换的性质, 在拉氏变换表中直接查得。在用拉氏变换解决工程技术中的应用问

题时，经常遇到的像函数是有理分式，一般可将其分解为部分分式之和，然后再利用拉氏变换表求出像原函数

3. 例题

例8 求 $F(s) = \frac{2s-5}{s^2}$ 的拉氏逆变换。

解 由性质1及附录中的2、3

$$\text{得} \quad f(t) = L^{-1} \left[\frac{2s-5}{s^2} \right] = 2L^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - 5L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = 2 - 5t$$

例9 求 $F(s) = \frac{2s+3}{s^2-2s+5}$ 的拉氏逆变换。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(t) &= L^{-1} \left[\frac{2s+3}{s^2-2s+5} \right] = L^{-1} \left[\frac{2s+3}{(s-1)^2+4} \right] \\ &= 2L^{-1} \left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4} \right] + \frac{5}{2} L^{-1} \left[\frac{2}{(s-1)^2+4} \right] \end{aligned}$$

查表可得：

$$f(t) = 2e^t \cos 2t + \frac{5}{2} e^t \sin 2t = e^t \left(2 \cos 2t + \frac{5}{2} \sin 2t \right)$$

例10 求 $F(s) = \frac{s+9}{s^2+5s+6}$ 的拉氏逆变换。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(t) &= L^{-1} \left[\frac{s+9}{s^2+5s+6} \right] = L^{-1} \left[\frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3} \right] \\ &= 7L^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] - 6L^{-1} \left[\frac{1}{s+3} \right] \end{aligned}$$

查表可得：

$$f(t) = 7e^{-2t} - 6e^{-3t}$$

2.3 控制系统的传递函数

第一节所讲过的微分方程虽然可以很好地表示输出和输入之间的关系，但是微分方程

的求解比较困难。以拉普拉斯变换为基础得到传递函数，能把时域中以线性微分方程对系统进行描述的数学模型转化为控制系统在复频域 s 的数学模型。传递函数不是直接求取微分方程的解，而是间接地分析系统结构、参数对系统动态响应的影响。

2.3.1 传递函数的基本概念

1. 传递函数（Transfer function）定义

线性定常系统在零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比称为传递函数。

若线性定常系统由下述 n 阶微分方程描述

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_0 c(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} r(t) + b_0 r(t) \end{aligned}$$

上式中 $c(t)$ 是系统输出量， $r(t)$ 是系统输入量， $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ 是与系统结构参数有关的常系数。令 $C(s) = L[c(t)]$ ， $R(s) = L[r(t)]$ ，在初始条件为零时，对上式进行拉氏变换，可得到关于 s 的代数方程

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] C(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] R(s)$$

根据传递函数的定义得到上式的传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

令 $M(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0$ 为传递函数的分子多项式；

$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ 为传递函数的分母多项式。

则

$$G(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$$

如 2.1 节例 1 所讲述的 RLC 串联电路，其微分方程为

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

零初始条件下取拉氏变换

$$LCs^2 U_c(s) + RCs U_c(s) + u_c(s) = U_r(s)$$

则其传递函数为

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

系统的传递函数也可写成如下零极点表示形式：

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

式中 z_i 为分子多项式等于零时的根，称为系统的零点；

p_j 为分母多项式（或称特征方程式）等于零时的根，称为系统的极点；

K 为系统增益。

零、极点的数值完全取决于系统的结构参数系数，即 a_0, a_1, \dots, a_n 及 b_0, b_1, \dots, b_m 。 z_i, p_j 可为实数，也可为复数，若为复数，必共轭成对出现。

将零、极点标在复平面上，则得传递函数的零、极点分布图。如传递函数为如下表达式：

$$G(s) = \frac{s + 2}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}$$

图中零点用“○”表示，极点用“×”表示，如图 2-5 所示即为零、极点分布图，也是系统的数学模型。

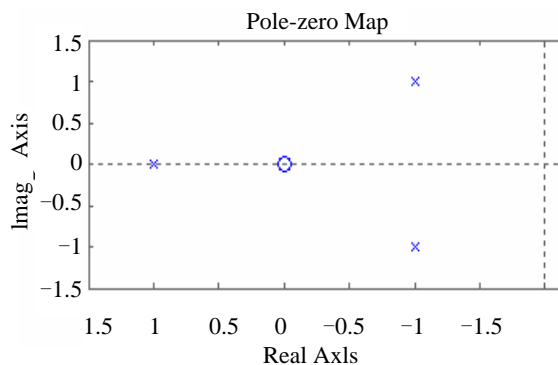


图 2-5 所得零极点分布图

2. 传递函数的性质

(1) 传递函数是复变量的 s 有理真分式函数，分子的阶数 m 一般低于或等于分母的阶数 n ，且所有系数均为实数。

(2) 传递函数只取决于系统和元件的结构和参数，与外作用及初始无关。

(3) 传递函数与微分方程有相通性，可经简单置换而转换。

(4) 传递函数的拉氏反变换是系统的脉冲响应。

(5) 传递函数是在零初始条件下定义的，它只反应系统的零状态特性，零初始条件含义要明确。控制系统的零初始条件有两方面的含义：一是指输入作用是在 $t=0$ 以后才作用于系统，因此，系统输入量及其各阶导数在 $t=0$ 时的值均为零；二是指系统在输入作用加入前是相对静止的，因此，系统输出量及其各阶导数在 $t=0$ 时的值也为零。现实的控制系统多属此类情况，这时，传递函数可以完全表征系统的动态性能。

3. 例题

例 11 求如图 2-6 所示 RL 串联电路传递函数。

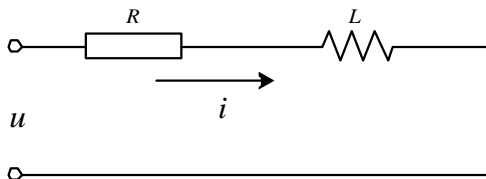


图 2-6 RL 串联回路图

解

取电路的输入量为 u ，取输出量为 i ，根据电路理论可以写出微分方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u$$

当初始条件为零时，拉氏变换为：

$$(Ls + R)I(s) = U(s)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ls + R} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{L}{R}s + 1}$$

令 $T_L = \frac{L}{R}$ —— RL 电路的时间常数，则传递函数的表达式也可表示为：

$$G(s) = \frac{1}{T_L s + 1}$$

例 12 试求如图 2-7 所示运算放大器电路的传递函数 $E_o(s)/E_i(s)$ 。

解 根据电压关系，可写出

$$E_A(s) = E_i(s) \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{Cs}} = E_i(s) \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1}$$

$$E_B(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_o(s)$$

根据理想放大器的性质，有

$$E_A(s) = E_B(s)$$

最后我们可以得到电路的传递函数

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1} = \frac{(1 + R_2/R_3)s}{s + 1/R_1 C}$$

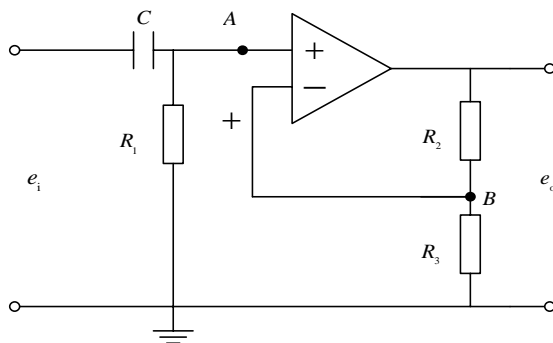


图 2-7 运算放大器电路

2.3.2 几种典型的传递函数

1. 比例环节 (Proportion loop)

如图 2-8 所示的比例环节示意图，输出量和输入量的关系由下面的代数方程式来表示

$$u_c = K u_r$$

式中 K ——放大系数，常数。

两边取拉氏变换得

$$u_c(s) = K u_r(s)$$

传递函数为

$$G(S) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = K$$

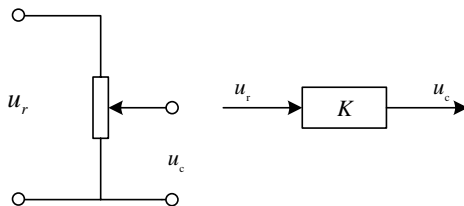


图 2-8 比例环节图

2. 惯性环节 (Inertia loop)

自动控制系统中经常包含有这种环节, 这种环节具有一个储能元件。前面叙述的 RC 电路就是惯性环节的例子。这类环节的特点是, 当输入量 $u_r(t)$ 阶跃变化时, 其输出量 $u_c(t)$ 不是立刻到达相应的平衡状态, 而要经过一定的时间。

前面 RC 网络的微分方程:

$$\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

经过拉氏变换其传递函数可以写成:

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

RC 网络即是一个惯性环节的典型例子。

惯性环节的微分方程可表示为:

$$T \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = Ku_r(t)$$

惯性环节的传递函数可以写成:

$$G(s) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

式中 K —— 环节的比例系数;

T —— 环节的时间常数。

3. 积分环节 (Integral loop)

积分环节的动态方程为

$$r(t) = \int c(t) dt$$

由拉氏变换可得到积分环节的传递函数

$$G(s) = \frac{R(s)}{C(s)} = \frac{1}{s}$$

4. 微分环节 (Differential loop)

作为基本因子, 微分环节有三种传递函数类型。即理想微分环节、一阶微分环节和二阶微分环节。它们的微分方程分别为:

$$c(t) = K \frac{dr(t)}{dt}$$

$$c(t) = K[\tau \frac{dr(t)}{dt} + r(t)]$$

$$c(t) = K[\tau^2 \frac{d^2t}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dr(t)}{dt} + r(t)]$$

相应的传递函数分别为

$$G(s) = Ks$$

$$G(s) = K(\tau s + 1)$$

$$G(s) = K(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1)$$

5. 振荡环节 (Oscillation loop)

这种环节有两个储能元件, 当输入量发生变化时, 储能元件的能量相互交换。在阶跃函数作用下, 其暂态响应可能作周期性的变化。以 RLC 电路为例加以说明。由 2.1 节例 2 我们已经得到

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

$$\text{令 } \frac{L}{R} = T_L, \quad RC = T_c$$

初始条件为零时的拉氏变换为

$$(T_L T_c s^2 + T_c s + 1)U_c(s) = U_r(s)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{T_L T_c s^2 + T_c s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ —— 振荡环节的自然振荡角频率;}$$

$$\xi = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ —— 振荡环节的阻尼比。}$$

6. 延迟环节 (Delay loop)

延迟环节的输出是经过一个延迟时间后, 完全复现输入信号, 其输出输入关系是

$$c(t) = r(t - \tau)$$

根据拉氏变换, 可得传递函数为

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

最后应指出的是, 对于同一元件 (或系统), 根据所研究的问题的不同, 可以取不同的量作为输出量和输入量, 这时所得到的传递函数是不同的。

2.4 框图及其化简方法

在上一节中讨论了一些基本环节的传递函数。为了得到系统传递函数, 常采用系统动态结构图这一图形化的分析和运算方法。

2.4.1 结构图的基本概念

1. 结构图 (Configuration graph) 组成

系统动态结构图, 是将系统中所有的环节用方框图表示, 图中标明其传递函数, 并且按照在系统中各环节之间的联系, 将各方框图连接起来。用这一动态结构图来描述系统具有明显的优点, 可形象而明确地表达动态过程中系统各环节的数学模型及其相互关系, 也就是系统图形化的动态模型。结构图具有数学性质, 可以进行代数运算和等效变换, 是计算系统传递函数的有力工具。

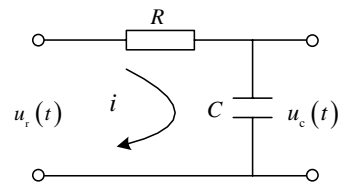
结构图包含以下四部分:

(1) **信号线**。带有表示信号传递方向箭头的直线。一般在线上标明信号的拉氏变换表达式。

(2) **综合点**。完成信号的加减运算, 以 \otimes 表示。如果输入信号带加号, 就执行加法; 带减号就执行减法。

(3) **引出点**。在信号线上, 表示信号引出的位置, 用 \bullet 表示。同一位置引出的信号相同。

(4) **方框**。方框中为元件或系统的传递函数, 方框的输出量等于方框的输入量与方框内的传递函数的乘积。



下面以 RC 网络为例说明结构图的一般特点。 RC 网络如图 2-9 所示。

图 2-9 RC 串联网路结构图

网络的微分方程式为

$$u_r = Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

也可写为

$$u_r - u_c = Ri \quad (2-1)$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2-2)$$

对上面二式进行拉氏变换, 得

$$U_r(s) - U_c(s) = RI(s) \quad (2-3)$$

$$U_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (2-4)$$

将式(2-3)表示成 $\frac{1}{R}[U_r(s) - U_c(s)] = I(s)$ 并用图 2-10(a)形象描绘这一数学关系。图中, 符号 \otimes 表示信号的代数和, 箭头表示信号的传递方向。因为是 $U_r(s) - U_c(s)$, 故在代表 $U_c(s)$ 信号的箭头附近标以负号, 在代表 $U_r(s)$ 信号的箭头附近标以正号(为了简化, 正号可以省略)。而由 \otimes 输出的信号为 $\Delta U(s) = U_r(s) - U_c(s)$, $\Delta U(s)$ 经 $1/R$ 又转换为电流 $I(s)$, 图中方框表明了这种关系。符号 \otimes 常称作“加减点”或“综合点”。

式(2-4)可用图 2-10(b)表示, 流经电容器上的电流 $I(s)$ 经 $1/Cs$ 转换为输出电压 $U_c(s)$ 。将图 2-10(a)、图 2-10(b)合并, 并将输入量置于图的左端, 输出量置于右端, 同一变量的信号连接在一起, 如图 2-10(c)所示, 即得 RC 网络的结构图。

图中由 $U_c(s)$ 线段上引出的另一线段仍为 $U_c(s)$, 该点称为引出点。需要注意, 由引出点引出的信号是一样的, 而不能理解为只是其中的一部分。

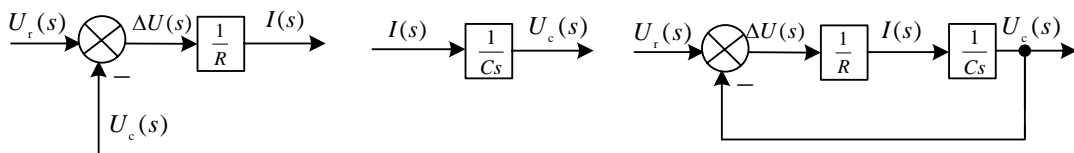


图 2-10 RC 网络的结构图

2. 动态结构图的绘制步骤

(1) 按照系统的结构和工作原理, 分解出各环节并写出它的传递函数。

(2) 绘出各环节的动态方框图, 方框图中标明它的传递函数, 并以箭头和字母符号表明其输入量和输出量, 按照信号的传递方向把各方框图依次联接起来, 就构成了系统结构

图。

3. 例题

例 13 对前面 RC 网络结构图进行结构变换，求出 RC 网络的传递函数。

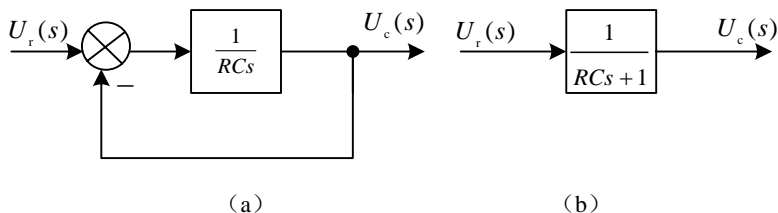


图 2-11 RC 电路结构图等效变换

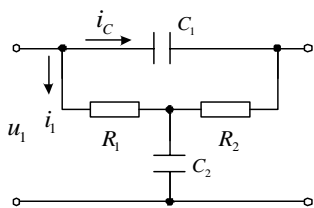


图 2-12 RC 网络

解 利用串联法则，求得前向通路的等效传递函数

$$G(s) = 1/RCs$$

则 RC 网络结构图可简化为如图 2-11 (a) 所示。再由反馈法则变换得图 2-11(b)，方框中即为网络传递函数。

例 14 RC 网络如图 2-12 所示，其中 u_1 为网络输入量， u_2 为网络输出量。

- (1) 画出网络结构图；
- (2) 求传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 。

解

(1) 用复阻抗写出原始方程组。

$$\text{输入回路} \quad U_1 = R_1 I_1 + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2 s}$$

$$\text{输出回路} \quad U_2 = R_2 I_2 + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2 s}$$

$$\text{中间回路} \quad I_1 R_1 = (R_2 + \frac{1}{C_1 s}) \cdot I_2$$

(2) 整理成因果关系式：

$$I_1 = \frac{1}{R_1} \left[U_1 - (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2 s} \right]$$

$$I_2 = I_1 R_1 \left[\frac{C_1 s}{R_2 C_1 s + 1} \right]$$

$$U_2 = R_2 I_2 + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2 s}$$

即可画出结构图如图 2-13 所示:

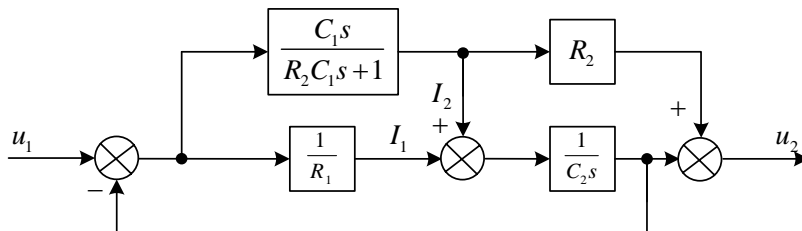


图 2-13 网络方框图

2.4.2 结构图的化简

1. 结构图的基本组成形式

(1) **串联连接** 方框与方框首尾相连。前一个方框的输出，作为后一个方框的输入。

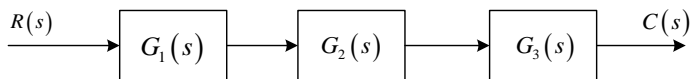


图 2-14 串联连接

(2) **并联连接** 两个或多个方框，具有同一个输入，而以各方框输出的代数和作为总输出，这种结构称为**并联连接**，如图 2-15 所示。

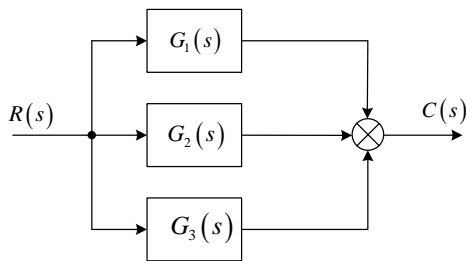


图 2-15 并联连接

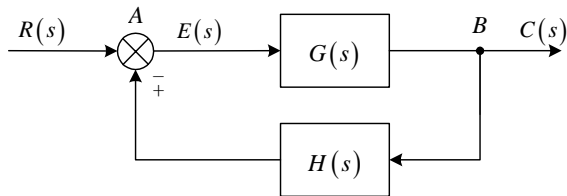


图 2-16 反馈连接

(3) **反馈连接** 一个方框的输出，输入到另一个方框，得到的输出再返回作用于前一个方框的输入端，这种结构称为**反馈连接**，如图 2-16 所示。

图中由 B 点引出的信号均为 $C(s)$ ，而不能理解为只是 $C(s)$ 的一部分，这是应该注意的。结构图中引出信息的点（位置）常称为**引出点**。任何复杂系统的结构图，都不外乎由串联、并联和反馈三种基本结构交织组成。

2. 结构图的化简规则

(1) 串联方框的等效变换

两个传递函数分别为 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 的环节，以串联方式连接，如图 2-17(a)所示。现欲将二者合并，用一个传递函数 $G(s)$ 代替，并保持 $R(s)$ 与的 $C(s)$ 关系不变。

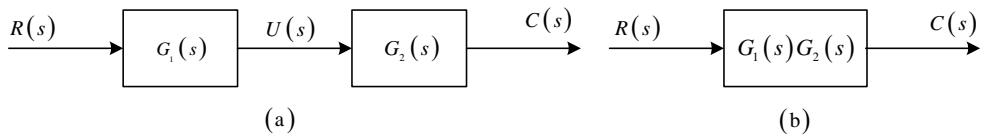


图 2-17 串联结构的等效变换

由图 2-17(a)可写出

$$U(s) = G_1(s)R(s)$$

$$C(s) = G_2(s)U(s)$$

消去 $U(s)$ ，则有

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)R(s) = G(s)R(s)$$

所以

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

等效结构如图 2-17(b)所示。

由上式可以得出，两个传递函数串联的等效传递函数，等于这两个传递函数的乘积。

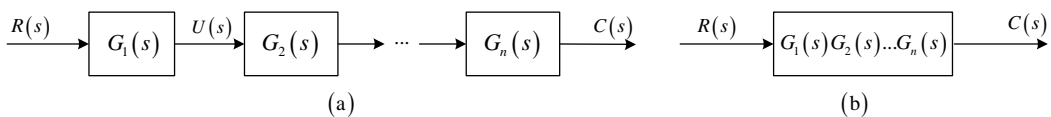


图 2-18 n 个方框串联的等效变换

上述结论可以推广到多个传递函数的串联，如图 2-18 所示。 n 个传递函数依次串联的等效传递函数，等于 n 个传递函数的乘积。

(2) 并联连接的等效变换

传递函数分别为 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 两个环节并联连接，其等效传递函数等于这两个传递函数的代数和，即

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$$

等效变换结果见图 2-19(b):

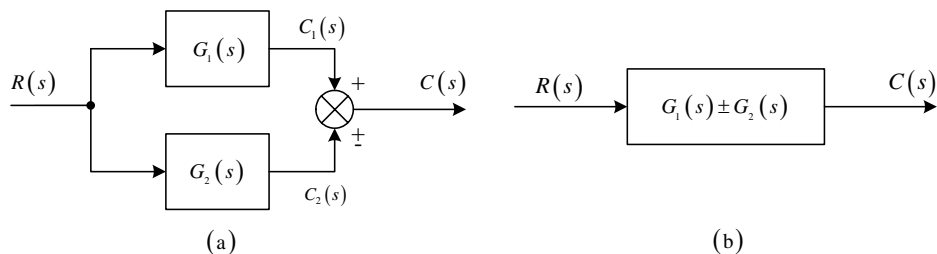


图 2-19 两个方框并联的等效变换

由图 2-19(a)可写出

$$C_1(s) = G_1(s)R(s)$$

$$C_2(s) = G_2(s)R(s)$$

$$C(s) = C_1(s) \pm C_2(s)$$

经代换得

$$C(s) = G_1(s)R(s) \pm G_2(s)R(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)]R(s) = G(s)R(s)$$

所以可以得出结论, 两个传递函数并联的等效传递函数, 等于各传递函数的代数和。

同样, 可将上述结论推广到 n 个传递函数的并联。图 2-20 (a) 为 n 个方框并联, 其等效传递函数应等于该 n 个传递函数的代数和, 如图 2-20(b)所示。

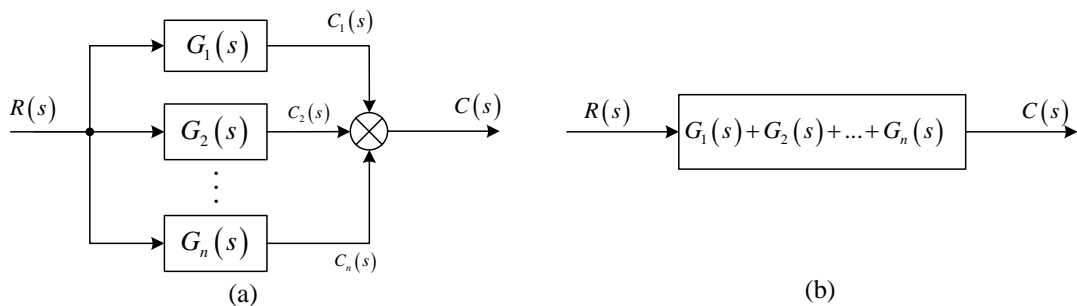


图 2-20 n 个方框并联的等效变换

(3) 反馈连接的等效变换

图 2-21 (a) 为反馈连接的一般形式, 其等效变换结果如图 2-21 (b) 所示。

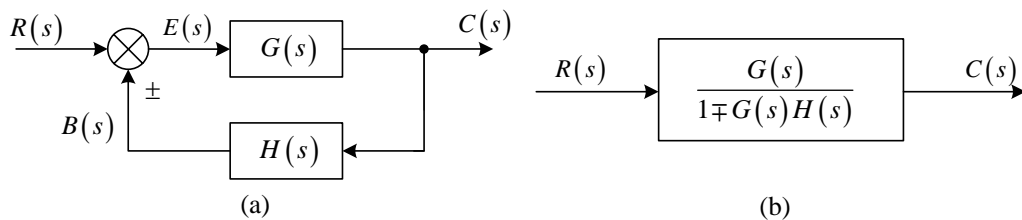


图 2-21 反馈连接的等效变换

由图 2-21(a)按照信号传递的关系可写出

$$C(s) = G(s)E(s), \quad B(s) = H(s)C(s), \quad E(s) = R(s) \pm B(s)$$

消去 $E(s)$ 和 $B(s)$, 得

$$C(s) = G(s)[R(s) \pm H(s)C(s)]$$

$$[1 \pm H(s)G(s)]C(s) = G(s)R(s)$$

因此

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_B(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

若反馈通路的传递函数 $H(s) = 1$, 常称作单位反馈, 此时

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)}$$

(4) 综合点与引出点的移动

在保证总的传递函数不变的条件下适当地挪动综合点或引出点的位置, 可以消除回路间的交叉联系, 在此之后再进一步变换, 原有的变量之间的关系不改变。

① 综合点前移

图 2-22 表示了综合点前移的等效变换。如果欲将图 2-22(a)中的综合点前移到 $G(s)$ 方框的输入端, 而且仍要保持信号之间的关系不变, 则必须在被挪动的通路上串一 $G(s)$ 的倒数函数方框, 如图 2-22(b)所示。

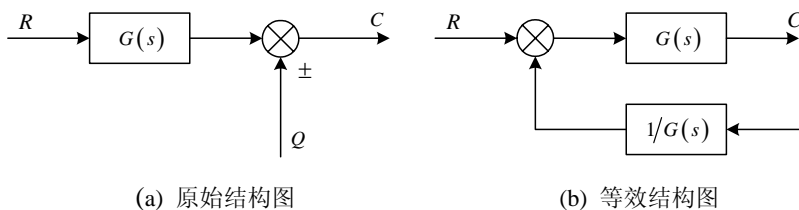


图 2-22 综合点前移的变换

挪动前的结构图中, 信号关系为

$$C = G(s)R \pm Q$$

挪动后, 信号关系为

$$C = G(s)[R \pm G(s)^{-1}]Q = G(s)R \pm Q$$

二者是完全等效的。

② 综合点之间的移动

图 2-23 为相邻两个综合点前后移动的等效变换。因为总输出 C 是 R , X , Y 三个信号的代数数和, 故更换综合点的位置, 不会影响总的输入输出关系。

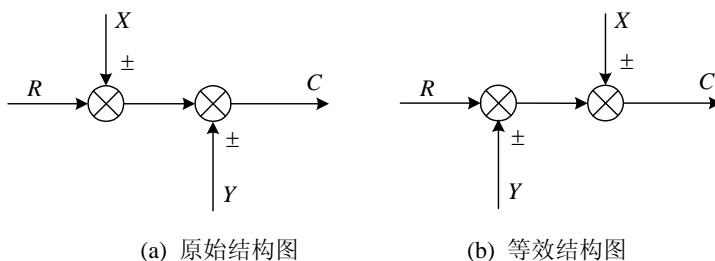


图 2-23 相邻综合点的移动

移动前, 总输出信号

$$C = R \pm X \pm Y$$

移动后, 总输出信号

$$C = R \pm Y \pm X$$

二者完全相同。因此, 多个相邻综合点之间, 可以随意调换位置。

③ 引出点后移

在图 2-24 中给出了引出点后移的等效变换。

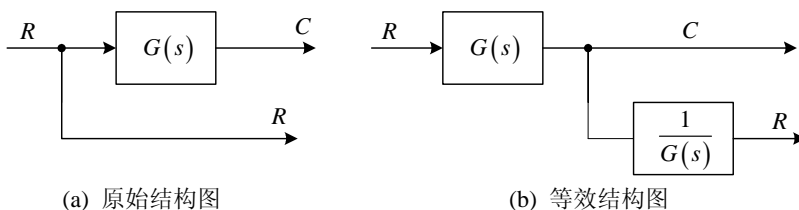


图 2-24 引出点后移的变换

将 $G(s)$ 方框输入端的引出点, 移到 $G(s)$ 的输出端, 仍要保持总的信号关系不变, 则在被挪动的通路上应该串入 $G(s)$ 倒数的方框图, 如图 2-24(b) 所示。如此, 挪动后的支路上的信号为

$$R = \frac{1}{G(s)}G(s)R = R$$

④ 相邻引出点之间的移动

若干个引出点相邻, 这表明是同一个信号输送到许多地方去。因此, 引出点之间相互交换位置, 完全不会改变引出信号的性质。亦即这种移动不需作任何传递函数的变换, 如图 2-25 所示。

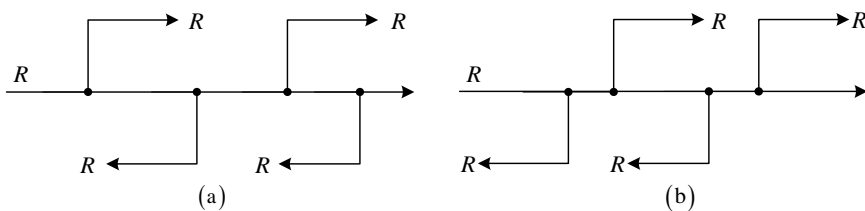


图 2-25 相邻引出点的移动

3. 例题

例 15 简化图 2-26 所示系统的结构图, 并求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

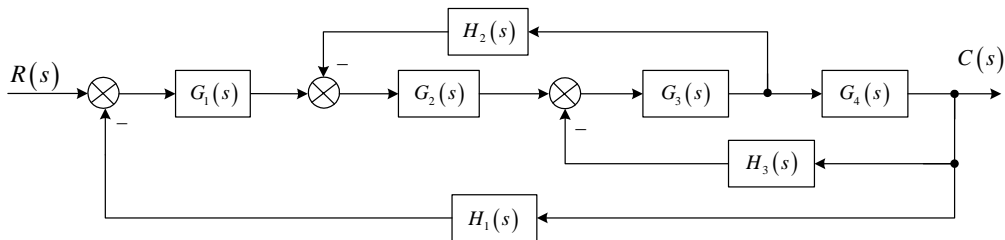


图 2-26 多回路系统结构图

解 这是一个多回路结构图, 且有引出点、综合点的交叉。为了从内回路到外回路逐步化简, 首先要消除交叉连接。方法之一是将综合点后移, 然后交换综合点的位置, 将图 2-26 化为图 2-27(a)。然后, 对图 2-27(a)中由 G_2 、 G_3 、 H_2 组成的小回路实行串联及反馈变换, 进而简化为图 2-27(b)。其次, 对内回路再实行串联及反馈变换, 则只剩一个主反馈回路, 如图 2-27(c)。最后, 再变换为一个方框, 如图 2-27(d), 得系统总传递函数

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1}$$

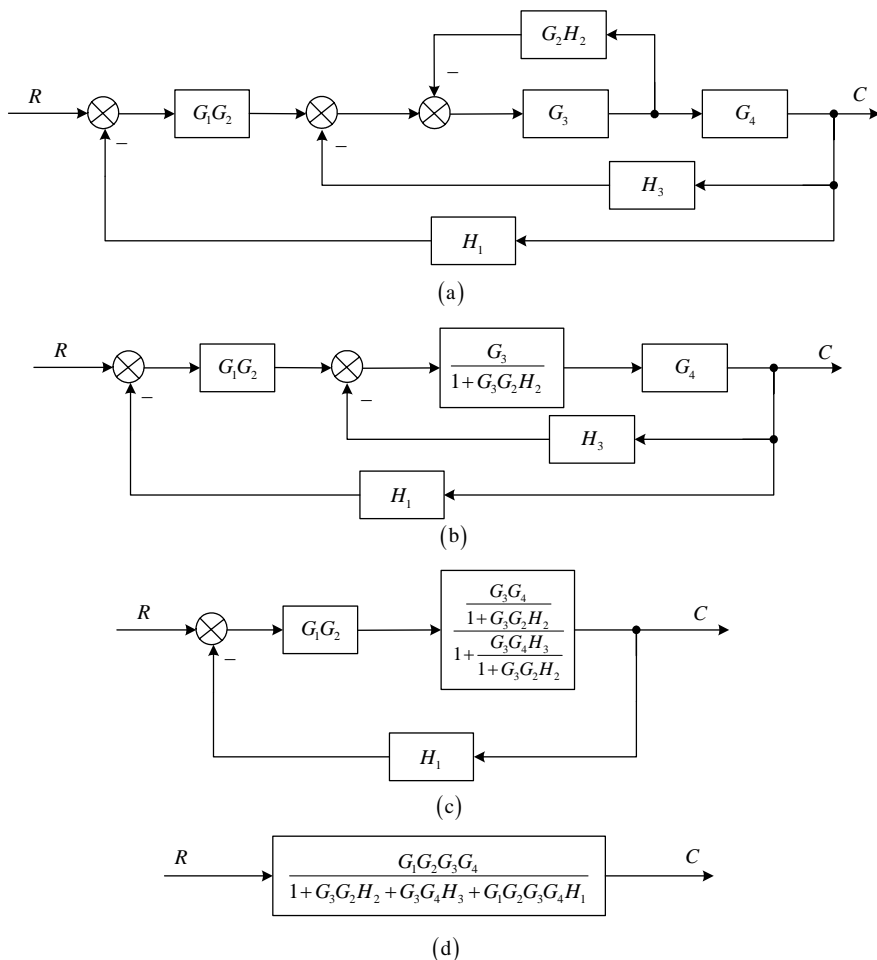


图 2-27 图 2-26 的系统结构图的变换

2.4.3 传递函数的几个基本概念

控制系统在实际工作中会受到两类信号的作用。一类是**有用信号**，一般称为**参考输入**、**控制输入**、**指令值**等；另一类是**扰动信号**或称之为**干扰信号**。参考输入通常是加在控制装置的输入端，即系统的输入端。干扰信号一般是作用在受控对象上，也可能出现在其他元部件中，甚至夹杂在指令信号中。

如图 2-28 所示是模拟实际情况的典型控制系统方框图。图中 $R(s)$ 为参考输入信号。 $F(s)$ 为扰动输入信号，代表实际系统存在干扰。 $Y(s)$ 为反馈信号， $E(s)$ 为偏差信号。

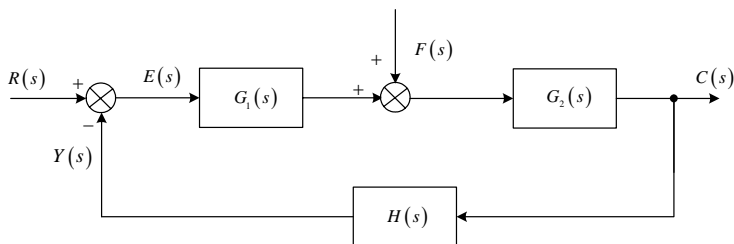


图 2-28 典型控制系统方框图

1. 系统开环传递函数

在反馈控制系统中，定义前向通道的传递函数与反馈通道的传递函数之积为开环传递函数。

如图 2-28 所示系统的开环传递函数等于 $G_1(s)G_2(s)H(s)$ 。在方框图中，将反馈信号 $Y(s)$ 在相加点前断开后，反馈信号与偏差信号之比 $\frac{Y(s)}{E(s)}$ 就是系统的开环传递函数。

2. 输出对于参考输入的闭环传递函数

扰动为零时，输出对于参考输入的闭环传递函数为输出与参考输入之比，即

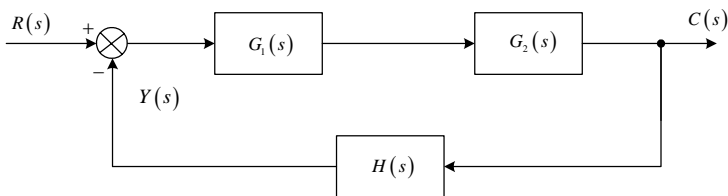
$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

根据图 2-29

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)\end{aligned}$$

当 $H(s) = 1$ 时，称为单位反馈，这时有，

$$\Phi(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

图 2-29 $F(s) = 0$ 时闭环传递函数方框图

3. 输出对于扰动输入的闭环传递函数

令 $R(s) = 0$, 称 $\Phi_f(s) = C(s)/F(s)$ 为输出对于扰动输入的闭环传递函数 (图 2-30)。

$$\Phi_f(s) = C(s)/F(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$C(s) = \Phi_f(s)F(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} F(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G(s)H(s)} F(s)$$

根据叠加定理, 系统总的输出等于输入与扰动作用之和, 即

$$C(s) = \Phi(s)R(s) + \Phi_f(s)F(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G(s)H(s)} F(s)$$

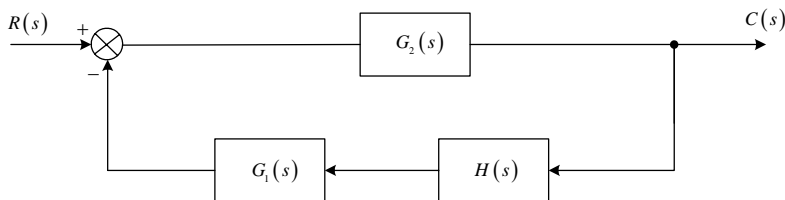


图 2-30 $R(s)$ 为零时的方框图

4. 偏差信号对于参考输入的闭环传递函数

偏差信号的大小反映了系统的控制精度, 设 $F(s) = 0$, 可得如图 2-31 所示的结构图。

偏差信号对于参考输入的传递函数为:

$$\Phi_e(s) = E(s)/R(s)$$

$$\Phi_e(s) = E(s)/R(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

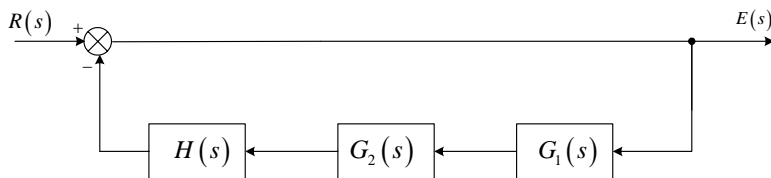


图 2-31 $F(s) = 0$ 偏差信号对于参考输入的方框图

5. 偏差信号对于扰动输入的闭环传递函数

系统在扰动量 $f(t)$ 的作用下, 设 $r(t)=0$, 方框图如图 2-32 所示。

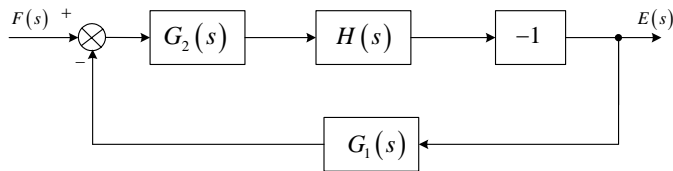


图 2-32 $r(t)=0$ 偏差信号对于扰动输入的方框图

此时误差信号对于扰动输入的闭环传递函数为:

$$\Phi_{ef} = E(s)/F(s)$$

$$\Phi_{ef} = E(s)/F(s) = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

根据叠加定理, 我们可以得到, 系统的总偏差等于 $r(t)$ 与 $f(t)$ 共同作用下产生的偏差, 即 $E(s) = \Phi_e(s)R(s) + \Phi_{ef}(s)F(s)$ 。

2.5 信号流图

方块图是一种很有用的图示法。对于复杂的控制系统, 方块图的简化过程仍较复杂, 且易出错。梅逊提出的信号流图, 既能表示系统的特点, 而且还能直接应用梅逊公式方便地写出系统的传递函数。因此, 信号流图 (Signal-flow graph) 在控制工程中也广泛地应用。

2.5.1 信号流图中的术语及信号流图性质

1. 信号流图中的术语

输入节点: 具有输出支路的节点。图 2-33 中的 x_1 。

输出节点 (阱, 坑): 仅有输入支路的节点。有时信号流图中没有一个节点是仅具有输入支路的。我们只要定义信号流图中任一变量为输出变量, 然后从该节点变量引出一条增益为 1 的支路, 即可形成一输出节点, 如图 2-33 中的 x_6 。

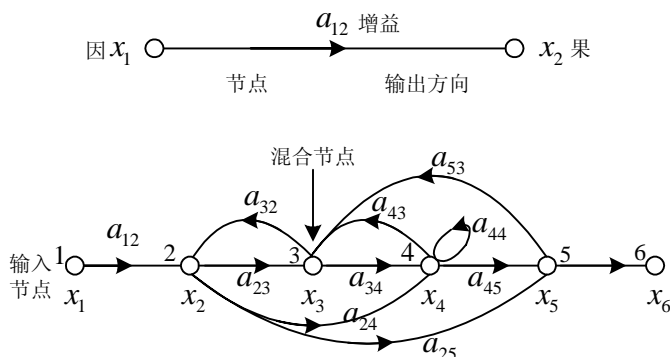


图 2-33 信号流图

混合节点：既有输入支路又有输出支路的节点。如图 2-30 中的 x_2 , x_3 , x_4 。

前向通路：开始于输入节点，沿支路箭头方向，每个节点只经过一次，最终到达输出节点的通路称之为前向通路。

- | | |
|---|----------------------------------|
| ① $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$ | $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45} = p_1$ |
| ② $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$ | $a_{12}a_{24}a_{45} = p_2$ |
| ③ $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5$ | $a_{12}a_{25} = p_3$ |

前向通路上各支路增益之乘积，称为**前向通路总增益**，用 p_k 表示。

回路：起点和终点在同一节点，并与其他节点相遇仅一次的通路。

$$\begin{aligned}
 &x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, \quad x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, \quad x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \\
 &L_1 = a_{23}a_{32} \quad L_2 = a_{24}a_{43}a_{32} \quad L_3 = a_{34}a_{43} \\
 &x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, \quad x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, \\
 &x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3, \quad x_4 \rightarrow x_4
 \end{aligned}$$

回路中所有支路的乘积称为**回路增益**，用 L_a 表示。

不接触回路：回路之间没有公共节点时，这种回路叫做不接触回路。

在信号流图中，可以有两个或两个以上不接触回路。

例如 $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ 和 $x_4 \rightarrow x_4$
 $x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ 和 $x_4 \rightarrow x_4$

2. 信号流图中的性质

- (1) 信号流图适用于线性系统。
- (2) 支路表示一个信号对另一个信号的函数关系，信号只能沿支路上的箭头指向传递。
- (3) 在节点上可以把所有输入支路的信号叠加，并把相加后的信号送到所有的输出支

路。

(4) 具有输入和输出节点的混合节点，通过增加一个具有单位增益的支路把它作为输出节点来处理。

(5) 对于一个给定的系统，信号流图不是惟一的，这是由于描述同一个系统的方程可以表示为不同的形式。

2.5.2 信号流图的绘制

绘制信号流图的步骤：

(1) 由微分方程绘制 $\Rightarrow s$ 方程，这与画方块图差不多。

(2) 由系统方块图绘制。

例 16 绘制图 2-34 所示系统方块图的信号流图。

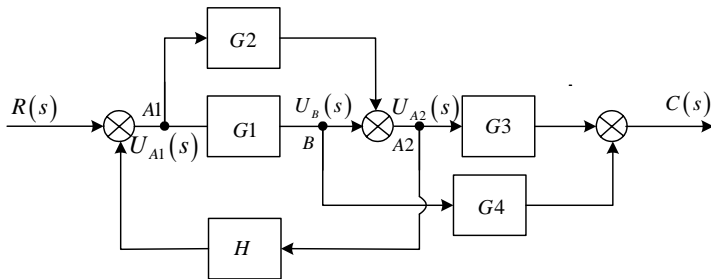


图 2-34 系统方块图

解：

第一步，用小圆圈表示各变量对应的节点；

第二步，在比较点之后的引出点 A_1, A_2 ，只需在比较点后设置一个节点便可。也即可以与它前面的比较点共用一个节点；

第三步，在比较点之前的引出点 B ，需设置两个节点，分别表示引出点和比较点，注意图中的 e_1 与 e_2 。信号流图如 2-35 所示。

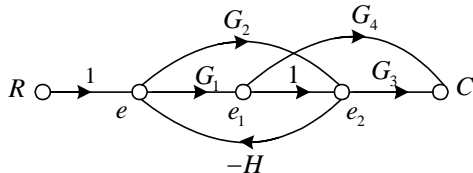


图 2-35 信号流图

2.5.3 梅逊公式

1. 梅逊定义

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k$$

式中 P —— 系统总增益（总传递函数）；

k —— 前向通路数；

P_k —— 第 k 条前向通路总增益；

Δ —— 信号流图特征式，它是信号流图所表示的方程组的系数矩阵的行列式。

在同一个信号流图中不论求图中任何一对节点之间的增益，其分母总是 Δ ，变化的只是其分子。

$$\Delta = 1 - \sum L_{(1)} + \sum L_{(2)} - \sum L_{(3)} + \cdots + (-1)^m \sum L_{(m)}$$

式中 $\sum L_{(1)}$ —— 所有不同回路增益乘积之和；

$\sum L_{(2)}$ —— 所有任意两个互不接触回路增益乘积之和；

...

$\sum L_{(m)}$ —— 所有任意 m 个不接触回路增益乘积之和。

Δ_k 为不与第 k 条前向通路相接触的那一部分信号流图的 Δ 值，称为第 k 条前向通路特征式的余因子。

2. 例题

例 17 已知系统的信号流图如图 2-36 所示，试求传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

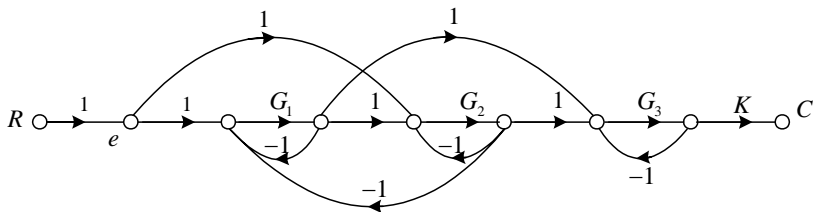


图 2-36 信号流图

解

单独回路 4 个，即

$$\sum L_a = -G_1 - G_2 - G_3 - G_1 G_2$$

两个互不接触的回路有 4 组, 即

$$\sum L_b L_c = G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3$$

三个互不接触的回路有 1 组, 即

$$\sum L_d L_e L_f = -G_1 G_2 G_3$$

于是, 得特征式为

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f \\ &= 1 + G_1 + G_2 + G_3 + 2G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 + 2G_1 G_2 G_3\end{aligned}$$

从源点 R 到输出点 C 的前向通路共有 4 条, 其前向通路总增益以及余因子式分别为

$$\begin{aligned}P_1 &= G_1 G_2 G_3 K & \Delta_1 &= 1 \\ P_2 &= G_2 G_3 K & \Delta_2 &= 1 + G_1 \\ P_3 &= G_1 G_3 K & \Delta_3 &= 1 + G_2 \\ P_4 &= -G_1 G_2 G_3 K & \Delta_4 &= 1\end{aligned}$$

因此, 传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4}{\Delta} = \frac{G_2 G_3 K(1 + G_1) + G_1 G_3 K(1 + G_2)}{1 + G_1 + G_2 + G_3 + 2G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 + 2G_1 G_2 G_3}$$

2.6 设计实例

——一阶直线倒立摆数学建模

倒立摆作为一种实验设备, 在教学和科研过程中发挥着重要的作用。它以其自身的非线性、强耦合、多变量和自然不稳定特性, 成为检验各种控制理论和方法的理想模型, 是长期以来国内外控制领域研究的一个典型问题。

倒立摆仿真与实物控制实验是控制领域中用来检验某种控制理论或方法的典型方案。它对一类不稳定系统的控制以及对于深入理解反馈控制理论具有重要的意义。对倒立摆的研究最初始于 20 世纪 50 年代, 麻省理工学院 (MIT) 的控制论专家根据火箭发射助推器原理设计出一级倒立摆实验设备, 而后世界各国都将一级倒立摆控制作为验证某种控制理论或方法的典型方案。

倒立摆系统以其自身的不稳定性为系统平衡提出了难题, 因此成为自动控制实验中验证控制算法优劣的极好的实验装置。从 20 世纪 60 年代起各国从事控制理论及工程研究的专家学者就开始关注倒立摆系统的稳定控制问题。作为受控对象的倒立摆系统是检验各种控

制理论的理想模型。在控制过程中倒立摆系统能有效地反映诸如可镇定性、鲁棒性、随动性以及跟踪性能等许多控制中的关键问题。迄今，人们已经利用经典控制论、现代控制理论以及各种智能控制方法实现了多种倒立摆系统的稳定控制。

倒立摆系统的控制方法在军工、航天、机器人等领域和一般工业过程中都有着广泛的用途，如机器人行走过程中的平衡控制、火箭发射中的垂直度控制（如图 2-37）、卫星飞行中的姿态控制、海上钻井平台的稳定控制（如图 2-38）、卫星发射架的稳定控制、飞机安全着陆控制、化工过程控制等均涉及到“倒立摆问题”



图 2-37 托载“神五”升空的长征火箭



图 2-38 海上钻井平台

对倒立摆系统的研究在理论上和方法论上均有着深远意义。多年来，人们对倒立摆的研究越来越感兴趣，这其中的原因不仅在于倒立摆系统在高科技领域的广泛应用，而且由于新的控制方法不断出现，特别是近些年，随着计算机和信息技术的飞速发展，新的控制理论和算法层出不穷，人们试图通过倒立摆这样一个严格的控制对象，检验新的控制方法是否有较强的处理多变量、非线性和绝对不稳定系统的能力。

倒立摆系统控制技术的研究不仅具有很大的理论和科研价值，在我们的日常生活中也有许多的实际应用，我们在日常生活中所见的从任何重心在上、支点在下的控制问题，到空间飞行器和各类伺服云台的稳定，都和倒立摆的控制有很大的相似性，故其稳定控制技术在实际中有很多应用场合，从小的方面来说杂技演员在台上的精彩表演，完成高难度的动作，无不令人喝彩；继而可以开发出来含有高科技的电动玩具供人们娱乐，也是具有十分广泛的市场前景。

1. 机械系统设计与实现

一阶直线倒立摆实验装置由机械机构及其电控系统组成。机械部分采用封闭结构，增加了操作的安全性和机构外观的美感。机械机构外形如图2-39所示，主要由直线导轨、同步带、伺服电机、护板、摆杆、传感器等组成，图2-39是实际一阶倒立摆装置的等比例缩小模型。

摆体包括摆杆、配重及装有摆角检测电位器的滑块，摆体刚性连接到水平直线导轨的滑块上，导轨滑块与同步带轮连接并与其同步运动。在伺服电机的驱动下，滑块可沿水平导轨在水平方向上往复运动。

伺服电机采用松下 MINAS A 系列的 MSMA 小惯量交流伺服电机，额定功率 200W、额定转矩 0.64 N·m、额定转速 3000 rpm，同步带轮直径为 4.2 cm。

系统设计参数为：水平导轨有效行程：0.9 米；摆杆长度：0.42 米；摆杆质量：0.085 千克；滑块质量：0.6 千克。

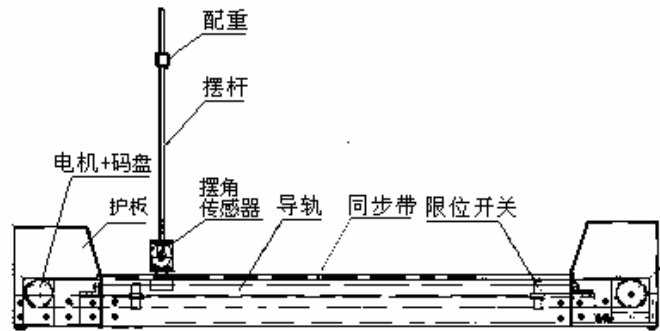


图 2-39 一阶倒立摆机械系统组成

2. 物理模型的抽象

为研究一阶倒立摆控制问题，首先需对实际问题进行简化、抽象，得到系统的物理模型。一阶倒立摆系统运动的物理模型可抽象为如图 2-40 所示的情况。其中，滑块的质量为 M ，受到水平方向的外力 $f(t)$ 的作用，摆杆的质量为 m ，摆杆的长度为 $2L$ 。

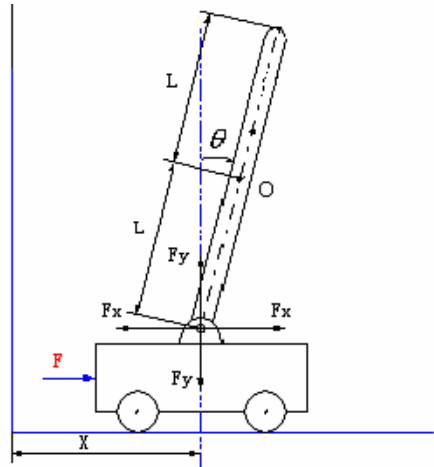


图 2-40 一阶倒立摆系统的物理抽象模型

实际的 $f(t)$ 作用，摆杆的质量为 m ，摆杆的长度为 $2L$ 。

实际的一阶倒立摆系统比较复杂，除了元件的非线性外，还受到各种干扰：如滑块与导轨之间的摩擦、空气阻尼的影响等。为了分析其本质，必须对实际系统进行简化。因而在建立一阶倒立摆系统的数学模型时先提出几点基本假设：

- (1) 将摆杆视为质量分布均匀的刚体细杆；
- (2) 各部分的摩擦力（力矩）与相对速度（角速度）成正比；
- (3) 施加在滑块上的驱动力与加在功率放大器上的输入电压成正比，并且无延时地施加到滑块上；
- (4) 皮带轮与传送带之间无滑动，转送带无

伸长现象，除滑块与导轨之间的摩擦及摆杆转轴的摩擦外其他摩擦及阻尼的影响认为很小而忽略。

设小车的质量为 M ，倒立摆的质量为 m ，摆长为 $2L$ ，摆的偏角为 θ ，小车的位移为 x ，作用在小车上的水平方向的力为 F ， O 为摆杆的质心。

根据刚体绕定轴转动的微分方程，转动惯量与加速度乘积等于作用于刚体主动力对该轴的力矩的代数和。则摆杆绕其重心的转动方程为：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = F_y L \sin \theta - F_x L \cos \theta \quad (2-5)$$

摆杆重心的水平运动可描述为：

$$F_x = m \frac{d^2}{dt^2} (x + L \sin \theta) \quad (2-6)$$

摆杆重心在垂直方向上的运动可描述为：

$$F_y - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \theta) \quad (2-7)$$

小车水平方向运动可描述为：

$$F - F_x = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2-8)$$

由式 (2-6) 和 (2-8) 得到：

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + mL(\cos \theta \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \sin \theta \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2) = F \quad (2-9)$$

由式 (2-5) 和 (2-7) 得到：

$$(J + mL^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mL \cos \theta \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = mLg \cdot \sin \theta \quad (2-10)$$

整理式 (2-9) 和 (2-10)：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(J + mL^2)F + Lm(J + mL^2)\sin \theta \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2 - m^2 L^2 g \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{(J + mL^2)(M + m) - m^2 L^2 \cos^2 \theta} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{mL \cdot \cos \theta \cdot F + m^2 L^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2 - (M + m)m \cdot L \cdot g \cdot \sin \theta}{m^2 L^2 \cos^2 \theta - (M + m)(J + mL^2)} \end{cases} \quad (2-11)$$

3. 模型的简化

若只考虑 θ 在其工作点 $\theta_0 = 0$ 附近 ($-10^\circ < \theta < 10^\circ$) 的细微变化，可近似认为：

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} \approx 0 \\ \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{cases}$$

在这样的简化思想下，系统精确模型：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(J + mL^2)F + Lm(J + mL^2)\sin \theta \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2 - m^2 L^2 g \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{(J + mL^2)(M + m) - m^2 L^2 \cos^2 \theta} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{mL \cdot \cos \theta \cdot F + m^2 L^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2 - (M + m)m \cdot L \cdot g \cdot \sin \theta}{m^2 L^2 \cos^2 \theta - (M + m)(J + mL^2)} \end{cases}$$

可简化为：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(J + mL^2)F - m^2 L^2 g \theta}{J(M + m) + mL^2} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{(M + m)mLg\theta - mLF}{J(M + m) + mL^2} \end{cases} \quad (2-12)$$

给定倒立摆-台车系统参数为：

小车的质量 $M=1\text{kg}$ ；倒摆振子的质量 $m=1\text{kg}$ ，倒摆长度 $2L=0.6\text{ m}$ ，重力加速度取 $g=10\text{m/s}^2$ 得：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{0.12F + 0.036\sin \theta \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2 - 0.9\sin \theta \cdot \cos \theta}{0.24 - 0.09\cos^2 \theta} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{0.3\cos \theta \cdot F + 0.09\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2 - 6\sin \theta}{0.09\cos^2 \theta - 0.24} \end{cases} \quad (2-13)$$

简化为近似模型：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\theta + 0.8F \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 40\theta - 2.0F \end{cases} \quad (2-14)$$

经过拉氏变换得系统传递函数为：

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-2.0}{s^2 - 40} \\ G_2(s) = \frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-0.4s^2 + 10}{s^2} \end{cases} \quad (2-15)$$

得到系统的结构如图 2-41 所示。

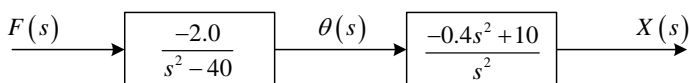


图 2-41 系统结构图

2.7 习 题

1. 设质量—弹簧—摩擦系统如图 2-42 所示， f 为粘性摩擦系数， k 为弹簧弹性系数，系统的输入量为 $p(t)$ ，系统的输出量为物体的位移 $x(t)$ 。试列写系统的输入输出微分方程。

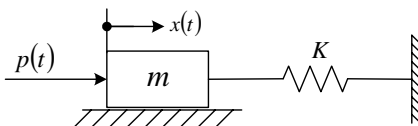


图 2-42 质量—弹簧—摩擦系统

2. RC 网络如图 2-43 所示，其中 u_1 、 u_2 分别为网络的输入量和输出量。绘制网络的结构图并求相应的传递函数。

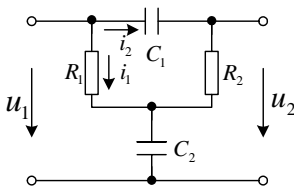


图 2-43 RC 网络图

3. 设机械系统如图 2-44 所示，其中 x_i 为输入位移， x_o 为输出位移。试分别列写各系统的微分方程式。
4. 求图 2-45 所示的有源网络的微分方程及传递函数。
5. 设无源网络如图 2-46 所示。已知初始条件为零，求网络传递函数，并说明该网络是否等于 RC 和 RL 网络的串联。

6. 设有源网络如图 2-47 所示。试求传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。

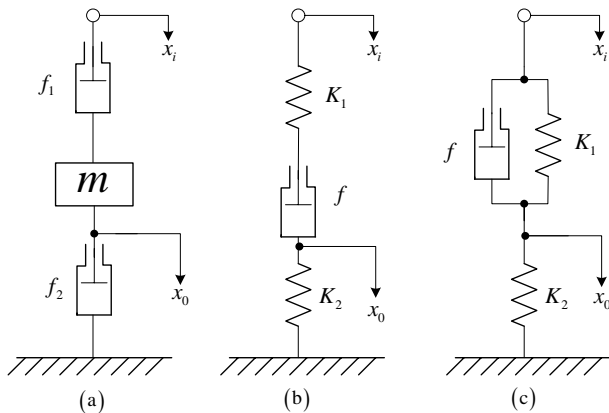


图 2-44 机械系统

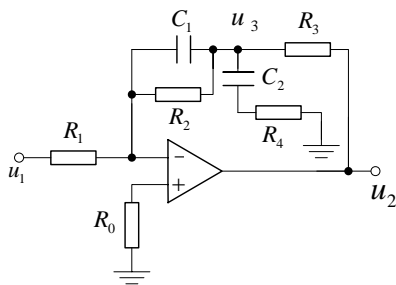


图 2-45 有源网络

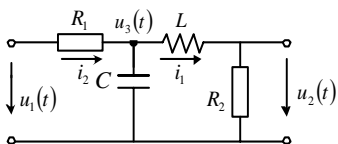


图 2-46 无源网络

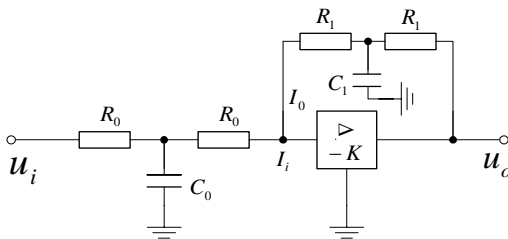


图 2-47 有源网络

7. 化简如图 2-48 所示的系统结构图，并求传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

8. 设控制系统结构图如图 2-48 所示，试绘制系统的信号流图，并利用梅逊公式求系统的传递函数。

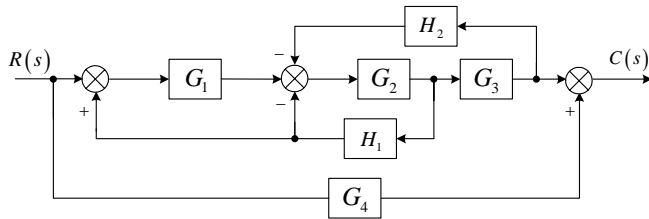


图 2-48 系统结构图

第 3 章 线性系统的时域分析

第 2 章讲解了如何建立系统的数学模型，这是我们分析和设计控制系统的首要任务。一旦获得合理的数学模型，就可以采用多种分析方法来分析系统的性能。本章重点介绍线性系统时域分析的一般方法和时域性能指标。

由于多数控制系统是以时间作为独立变量，所以人们往往关心随时间变化的状态和输出值。对系统外加给定的特定的输入信号，通过研究系统的时间响应来评价系统的性能，这就是控制系统的**时域分析**。

控制系统随时间变化的状态，即时域响应取决于系统本身的参数和结构，同时还受系统的初始状态以及输入信号的影响。在本章的分析中，给定典型和理想化的输入信号，使问题简单化的同时更加具有代表性。本章主要介绍控制系统时域分析的基本内容和基本方法，主要内容有控制系统的稳定性分析、二阶系统的动态性能分析、反馈控制系统的稳态误差计算等。

3.1 典型输入信号

1. 单位阶跃信号 $1(t)$

其数学定义为

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

如图 3-1 所示，其拉式变换为

$$R(s) = L[r(t)] = L[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (3-2)$$

2. 单位斜坡函数 $t \cdot 1(t)$ （速度函数）

其数学定义为

$$t \cdot 1(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

在数学关系上，斜坡函数的导数为阶跃函数，阶跃函数的积分为斜坡函数。

如图 3-2 所示，其拉氏变换为

$$R(s) = L[r(t)] = L(t) = \frac{1}{s^2} \quad (3-4)$$

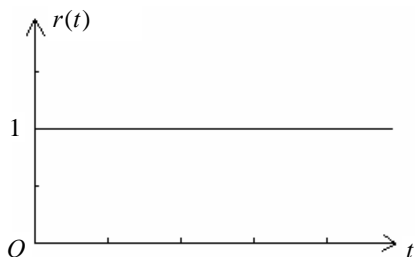


图 3-1 单位阶跃信号

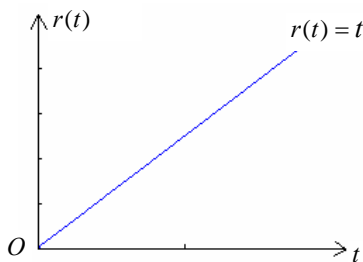


图 3-2 单位斜坡函数

3. 单位抛物线函数（加速度函数）

其数学定义为：

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

在数学关系上，抛物线函数的导数为斜坡函数，斜坡函数的积分为抛物线函数。

如图 3-3 所示，其拉氏变换为

$$R(s) = L[r(t)] = L\left(\frac{1}{2}t^2\right) = \frac{1}{s^3} \quad (3-6)$$

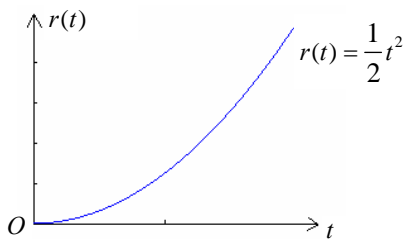


图 3-3 单位抛物线函数

4. 单位脉冲函数 $\delta(t)$

其数学定义为：

$$\begin{cases} r(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (3-7)$$

在数学关系上, $\delta(t)$ 冲值很大, 脉冲的时间无限小, 且理想单位脉冲的积分面积为 1。如图 3-4 所示, 其拉氏变换为

$$R(s) = L[r(t)] = L(\delta(t)) = 1 \quad (3-8)$$

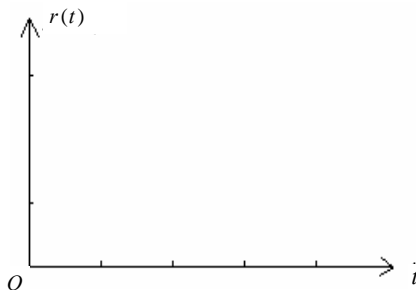


图 3-4 单位脉冲函数

5. 正弦函数 $\sin \omega t$

如图 3-5 所示, 正弦函数的拉氏变换式为

$$R(s) = L[r(t)] = L(\sin \omega t) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3-9)$$

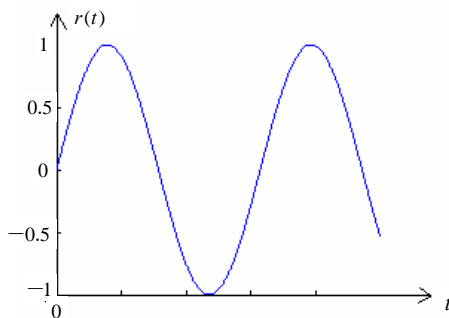


图 3-5 正弦函数

实际控制中, 电源及振动的噪声等均可看作为正弦信号。

由于上述典型输入信号的数学表达式比较简单, 对系统的实际输入都具有一定的代表性, 在进行系统分析时经常被用到。同时, 在对系统分析时, 应该根据实际输入信号的性质选择相应的典型输入信号。例如, 当系统的输入信号为突变信号且其幅值基本保持恒定时, 应该选择阶跃函数信号为典型输入信号; 当系统的输入信号随着时间的增长而线性变化时, 可选择斜坡函数信号为典型输入信号; 当系统的输入信号具有周期性值的变化时, 可选择正弦函数为输入信号。

对于同一系统, 给定不同的输入信号, 其相应的输出响应也不同。通常以单位阶跃函数为典型输入信号, 以此来通过对各系统的特性进行分析来表征系统的性能。本章主要讨论控制系统在阶跃函数、斜坡函数、脉冲函数等输入信号作用下的输出响应。

3.2 一阶系统的时域响应

3.2.1 一阶系统的数学模型

由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统, 典型闭环控制一阶系统如图 3-6 所示。其中 $\frac{1}{Ts}$ 是积分环节, T 为它的时间常数。

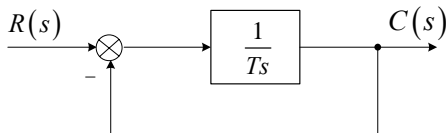


图 3-6 一阶系统的结构图

系统的传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

可见, 典型的一阶系统是一个惯性环节, 而 T 也是闭环系统的惯性时间常数。

系统输入、输出之间的关系为:

$$C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{1}{Ts + 1} R(s)$$

对应的微分方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

在零初始条件下, 利用拉氏反变换或直接求解微分方程, 可以求得一阶系统在典型输入信号作用下的输出响应。

3.2.2 单位阶跃响应

设系统的输入为单位阶跃函数 $r(t) = 1(t)$, 其拉氏变换为 $\frac{1}{s}$, 则输出的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \quad (3-10)$$

对上式进行拉氏反变换, 求得单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \quad (3-11)$$

上式表明, 当初始条件为零时, 一阶系统单位阶跃响应的变化曲线是一条单调上升的指数曲线。式中 1 为稳态分量, $-e^{-\frac{t}{T}}$ 为瞬态分量, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 瞬态分量衰减为零。在整个工作时间内, 系统的响应都不会超过其稳态值。由于该响应曲线具有非振荡特征, 故也称为非周期响应。一阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3-7 所示。

图 3-7 中指数响应曲线的初始 ($t=0$ 时) 斜率为 $\frac{1}{T}$ 。因此, 如果系统保持初始响应的变化速度不变, 则当 $t=T$ 时, 输出量就能达到稳态值。实际上, 响应曲线的斜率是不断下降的, 经过 T 时间后, 输出量 $c(T)$ 从零上升到稳态值的 63.2%。经过 $3T \sim 4T$ 时, $c(t)$ 将分别达到稳态值的 95%~98%。可见, 时间常数 T 反应了系统的响应速度, T 越小, 输出响应上升越快, 响应过程的快速性也越好。

由式 (3-11) 可知, 只有当 t 趋于无穷大时, 响应的瞬态过程才能结束, 在实际应用中, 常以输出量达到稳态值的 95% 或 98% 的时间作为系统的响应时间 (即调节时间), 这时输出量与稳态值之间的偏差为 5% 或 2%。

系统单位阶跃响应曲线可用实验的方法确定, 将测得的曲线与图 3-7 的曲线作比较, 就可以确定该系统是否为一阶系统或等效为一阶系统。此外, 用实验的方法测定一阶系统的输出响应由零值开始到达稳态值的 63.2% 所需的时间, 就可以确定系统的时间常数 T 。

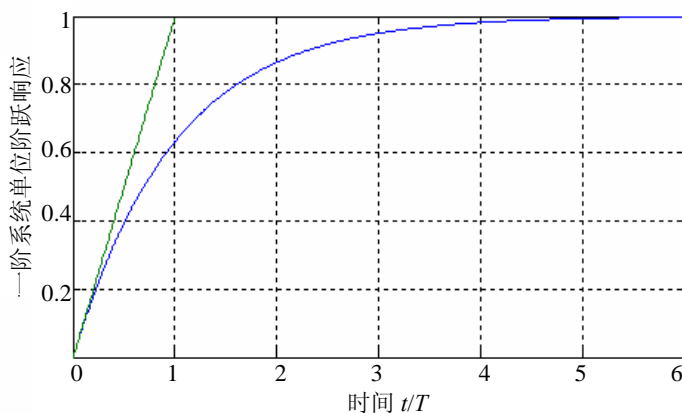


图 3-7 一阶系统的单位阶跃响应

3.2.3 单位斜坡响应

设系统的输入为单位斜坡函数 $r(t) = t$ ，其拉氏变换为 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 。则输出的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + 1/T} \quad (3-12)$$

对上式进行拉氏反变换，求得单位斜坡响应为

$$c(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} = t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (t \geq 0) \quad (3-13)$$

式中， $t - T$ 为稳态分量， $Te^{-\frac{t}{T}}$ 为瞬态分量，当 $t \rightarrow \infty$ 时，瞬态分量衰减到零。一阶系统的单位斜坡响应曲线如图 3-8 所示。

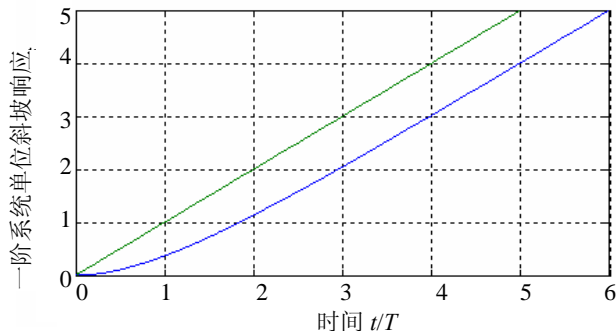


图 3-8 一阶系统的单位斜坡响应

显然，系统的响应从 $t=0$ 时开始跟踪输入信号而单调上升，在达到稳态后，它与输入信号同速增长，但它们之间存在跟随误差。即

$$e(t) = r(t) - c(t) = T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (3-14)$$

且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T \quad (3-15)$$

可见，当 t 趋于无穷大时，误差趋近于 T ，因此系统在进入稳态以后，在任一时刻，输出量 $c(t)$ 将小于输入量 $r(t)$ 一个 T 的值，时间常数 T 越小，系统跟踪斜坡输入信号的稳态误差也越小。

3.2.4 单位脉冲响应

设系统的输入为单位脉冲函数 $r(t) = \delta(t)$ ，其拉氏变换为 $R(s) = 1$ 。则输出的拉氏变换为：

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T} \quad (3-16)$$

对上式进行拉氏反变换，求得单位脉冲响应为

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \quad (3-17)$$

由此可见，系统的单位脉冲响应就是系统闭环传递函数的拉氏变换。一阶系统的单位脉冲响应曲线如图 3-9 所示。

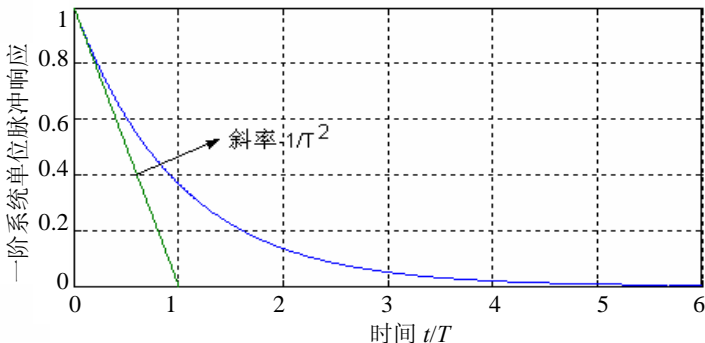


图 3-9 单位脉冲响应

一阶系统的单位脉冲响应是单调下降的指数曲线，曲线的初始斜率为 $1/T^2$ ，输出量的初始值为 $1/T$ 。当 t 趋于 ∞ 时，输出量 $c(\infty)$ 趋于零，所以它不存在稳态分量。在实际中一般认为在 $t = 3T \sim 4T$ 时过渡过程结束，故系统过渡过程的快速性取决于 T 的值， T 越小系统响应的快速性也越好。

由上面的分析可见，一阶系统的特性由参数 T 来决定，响应时间为 $(3 \sim 4)T$ ；在 $t=0$ 时，单位阶跃响应的斜率和单位脉冲响应的幅值均为 $1/T$ ；单位斜坡响应的稳态误差为 T 。 T 值越小，系统响应的快速性越好，精度越高。

在数学关系上，阶跃函数是脉冲函数的积分，斜坡函数是阶跃函数的积分；脉冲函数是阶跃函数的导数，阶跃函数是斜坡函数的导数。比较一阶系统对上述信号的输出响应可以发现，脉冲响应、阶跃响应、斜坡响应之间也存在同样的对应关系。这表明，系统对某

种输入信号导数的响应，等于对该输入信号响应的导数。反之，系统对某种输入信号积分的响应，等于系统对该输入信号响应的积分。这是线性定常系统的一个重要特征，它不仅适用于一阶线性定常系统，也适用于高阶线性定常系统。因此，在后面的分析中，我们将主要研究系统的单位阶跃响应。

3.3 二阶系统的时域响应

3.3.1 二阶系统的数学模型

由二阶微分方程描述的系统称为二阶系统。在控制工程实践中，二阶系统应用极为广泛，此外，许多高阶系统在一定的条件下可以近似为二阶系统来研究，因此，详细讨论和分析二阶系统的特征具有极为重要的实际意义。

假设一个二阶系统的结构图如图 3-10 所示。系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

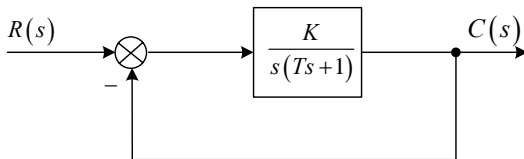


图 3-10 二阶系统方框图

其中 K 为系统的开环放大系数， T 为时间常数。相对应的微分方程为

$$T \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t)$$

其中 $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$ 称为无阻尼自然振荡角频率（简称为无阻尼自振频率）， $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}}$ 称为阻尼系数（或阻尼比）。

系统的闭环特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

它的两个根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

二阶系统特征根（即闭环极点）的形式随着阻尼比取值的不同而不同。

3.3.2 二阶系统的阶跃响应

设系统的输入为单位阶跃函数, 则系统输出响应的拉氏变换表达式为

$$C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (3-18)$$

对上式取拉氏反变换, 可得二阶系统的单位阶跃响应。

1. 过阻尼 ($\zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}} > 1$) 的情况

当 $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}} > 1$ 时, 系统具有两个不相等的负实数极点

$$P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

它们在 S 平面上的位置如图 3-11 所示。此时, 式 (3-18) 可写成

$$C(s) = \frac{\omega_n}{s(s - P_1)(s - P_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - P_1} + \frac{A_2}{s - P_2} \quad (3-19)$$

式中

$$\begin{aligned} A_0 &= [C(s) \cdot s]_{s=0} = 1 \\ A_1 &= [C(s) \cdot (s - P_1)]_{s=P_1} = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot P_1} \\ A_2 &= [C(s) \cdot (s - P_2)]_{s=P_2} = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot P_2} \end{aligned} \quad (3-20)$$

将 A_0 、 A_1 、 A_2 代入式 (3-19), 并进行拉氏反变换, 得

$$C(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{P_1 t}}{P_1} + \frac{e^{P_2 t}}{P_2} \right) \quad (3-21)$$

式 (3-21) 表明, 系统的单位阶跃响应由稳态分量和瞬态分量组成, 其稳态分量为 1, 瞬态分量包含两个衰减指数项, 随着 t 增加, 指数项衰减, 响应曲线单调上升, 其响应曲线如图 3-12 所示。

当 $\zeta \gg 1$ 时, 闭环极点 P_1 比 P_2 距虚轴远的多, 故 $e^{P_1 t}$ 比 $e^{P_2 t}$ 衰减快的多。因此, 可以忽略 P_2 对系统输出的影响, 从而把二阶系统近似看作一阶系统来处理。在工程上, 当 $\zeta \geq 1.5$ 时, 这种近似处理方法具有足够的准确度。

通常, 称阻尼比 $\zeta > 1$ 时二阶系统的运动状态为过阻尼状态。

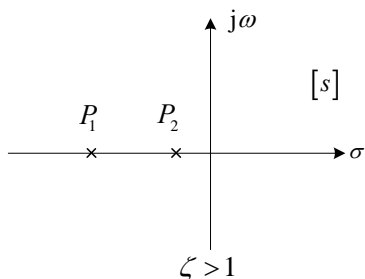


图 3-11 过阻尼极点分布图

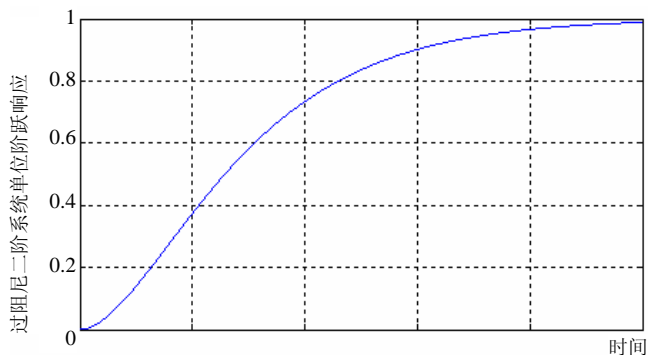


图 3-12 过阻尼二阶系统单位阶跃响应

2. 欠阻尼 $\left(0 < \zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}} < 1\right)$ 的情况

当 $0 < \zeta < 1$ 时, 系统具有一对共轭复数极点, 且在 S 平面的左半部分, 如图 3-13 所示。

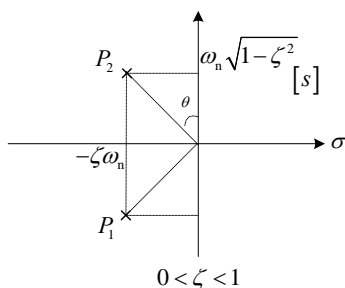


图 3-13 欠阻尼极点分布

$$P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

此时, 式 (3-18) 可写成

$$C(s) = \frac{\omega_n}{s(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1s + A_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (3-22)$$

式中 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 称为阻尼自振频率。

求得

$$\begin{aligned} A_0 &= [C(s) \cdot s]_{s=0} = 1 \\ A_1 &= [C(s) \cdot (s - P_1)]_{s=P_1} = -1 \\ A_2 &= [C(s) \cdot (s - P_2)]_{s=P_2} = -2\zeta\omega_n \end{aligned} \quad (3-23)$$

将 A_0 、 A_1 、 A_2 代入 (3-22) 式, 得

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (3-24)$$

$$\text{由 } L^{-1}\left(\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right) = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$L^{-1}\left(\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right) = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$\text{得 } c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right) \quad (3-25)$$

令 $\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}$, $\cos \theta = \zeta$, 其中 θ 角如图 3-13 所示, 于是可得

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad t \geq 0 \quad (3-26)$$

$$\text{其中 } \theta = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arcsin \sqrt{1-\zeta^2},$$

于是, 可以得到如图 3-14 所示的系统响应曲线图。

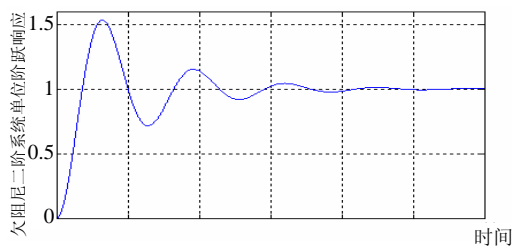


图 3-14 欠阻尼二阶系统单位阶跃响应

系统的稳态响应为 1, 瞬态分量是一个随时间 t 的增大而衰减的正弦振荡过程。振荡的角频率为 ω_d 它取决于阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_n 。衰减速度取决于 $\xi\omega_n$ 的大小。

3. 临界阻尼 $\left(\zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}} = 1\right)$ 的情况

当 $\zeta=1$ 时, 系统具有两个相等的负实数极点, $P_{1,2} = -\omega_n$, 如图 3-15 所示, 有

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + \omega_n} + \frac{A_2}{(s + \omega_n)^2} \quad (3-27)$$

求得

$$\begin{aligned} A_0 &= [C(s) \cdot s]_{s=0} = 1 \\ A_1 &= \left\{ \frac{d}{ds} [C(s) \cdot (s + \omega_n)^2] \right\}_{s=-\omega_n} = -1 \\ A_2 &= [C(s) \cdot (s + \omega_n)^2]_{s=-\omega_n} = -\omega_n \end{aligned} \quad (3-28)$$

将 A_0 、 A_1 、 A_2 代入 (3-27) 式, 并进行反拉氏变换得

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad t \geq 0 \quad (3-29)$$

该式表明, 当临界阻尼时, 系统的输出响应由零开始单调上升, 最后达到稳态值 1, 其响应曲线如图 3-16 所示。

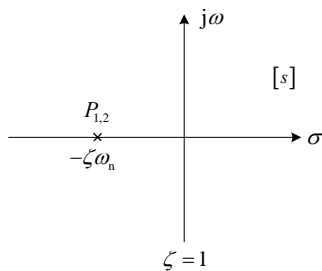


图 3-15 临界阻尼极点分布

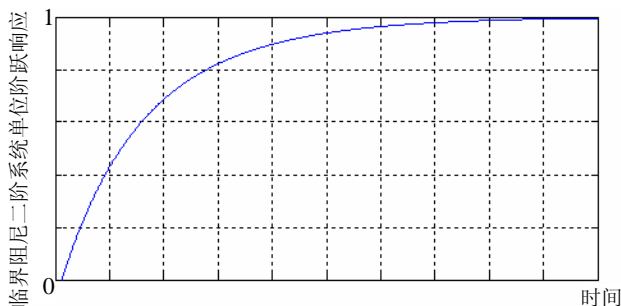


图 3-16 临界阻尼二阶系统单位阶跃响应

4. 无阻尼 $\left(\zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}} = 0 \right)$ 的情况

当 $\zeta = 0$ 时, 系统具有一对共轭纯虚数极点 $P_{1,2} = \pm j\omega_n$, 它们在 S 平面上的位置如图 3-17 所示。将 $\zeta = 0$ 代入式 (3-26)

得

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (3-30)$$

其响应曲线如图 3-18 所示。

可见, 系统的输出响应是无阻尼的等幅振荡过程, 其振荡频率为 ω_n 。所以, 称 ω_n 为无阻尼自然振荡频率, 此时系统输出为等幅振荡; 称 ω_d 为阻尼振荡频率, 系统输出为衰减正弦振荡过程。

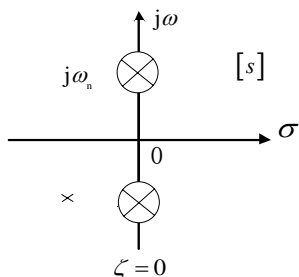
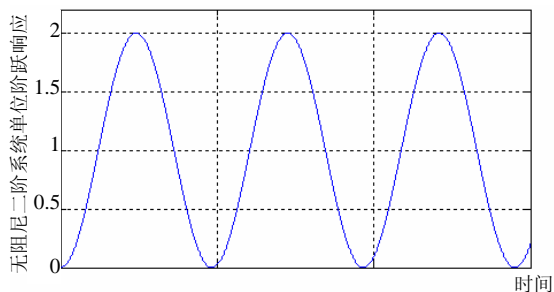


图 3-17 无阻尼极点分布

图 3-18 无阻尼二阶系统单位阶跃响应 ω_n

当 $\zeta < 0$ 时, 系统具有实部为正的极点, 输出响应是发散的, 此时系统已无法正常工作。

根据上面的分析可知, 在不同的阻尼比时, 二阶系统的响应具有不同的特点。因此阻尼比 ζ 是二阶系统的重要特征参数。选取 $\omega_n t$ 为横坐标, 可以作出不同阻尼比时二阶系统单位阶跃响应曲线, 如图 3-19 所示。

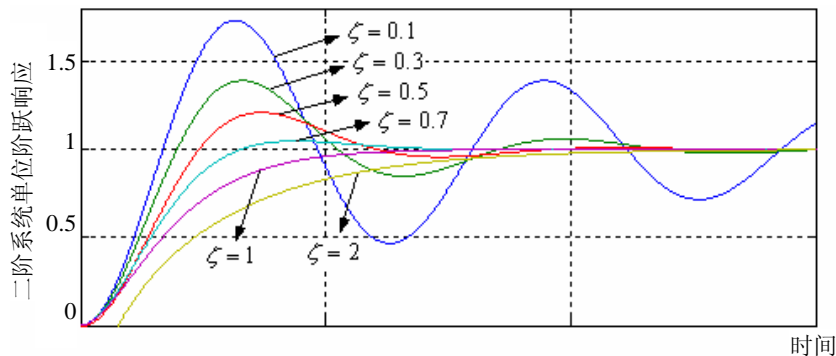


图 3-19 二阶系统的阶跃响应

此时曲线只和阻尼比 ζ 有关。由图可见, ζ 越小, 响应特性振荡得越厉害, 随着 ζ 增大到一定程度后, 响应特性变成单调上升的。从过渡过程持续的时间看, 当系统无振荡时, 在临界阻尼时过渡过程的时间最短, 此时, 系统具有最快的响应速度。当系统在欠阻尼状态时, 若阻尼比 ζ 在 $0.4 \sim 0.8$ 之间, 则系统的过渡过程时间比临界阻尼时更短, 而且此时的振荡特性也并不严重。一般希望二阶系统工作在 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 的欠阻尼状态下, 在工程实际中, 通常选取 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 作为设计系统的依据。

3.3.3 二阶系统的瞬态性能指标

在实际应用中,控制系统性能的好坏是通过系统的单位阶跃响应的特征量来表示的。为了定量地评价二阶系统的控制质量,必须进一步分析 ζ 和 ω_n 对系统单位阶跃响应的影响,并定义二阶系统单位阶跃响应的一些特征量作为评价系统的性能指标。

1. 动态性能指标定义

时域性能指标是对系统进行时域分析的标准。控制系统的响应,从时间上看,可分为动态和稳态两个过程。**动态过程**又称为**暂态过程**或**过渡过程**,是指系统从初始状态到稳态的响应过程;**稳态过程**是指在过渡过程结束后,系统达到平衡状态,其输入输出间的关系不再变化的响应部分,它反映了系统的稳态性能或误差。

时域性能指标中动态性能指标主要包括如下几种:

最大超调量(Overshoot) σ_p :指暂态过程中输出响应的最大值超过稳态值的百分数,即

$$\sigma_p = \frac{c_{\text{Max}} - c_{\infty}}{c_{\infty}} \times 100\%$$

上升时间(Rise time) t_r :指暂态过程中的输出响应第一次达到稳态值所用的时间。

峰值时间 t_p :指暂态过程中的输出响应超过稳态值而达到第一个峰值所用的时间。

过渡过程时间(或调整时间(Setting time)) t_s :指暂态过程中的输出响应 $c(t)$ 和 c_{∞} 之间的误差达到规定允许值,一般为 c_{∞} 的 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$,并且以后不再超过此值所需的最小时间。

从图 3-20 中可以更为形象地理解上述指标。除了一些不允许产生振荡的系统外,通常希望二阶系统工作在 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 的欠阻尼状态下。

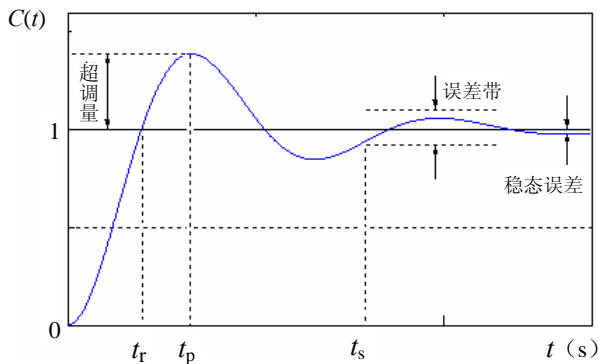


图 3-20 性能指标图

此时,系统在具有适度振荡特性的情况下,能有较短的过渡过程时间,因此下面有关

性能指标的定义和定量关系的推导,主要是针对二阶系统的欠阻尼工作状态进行的。控制系统的单位阶跃响应一般来说是与初始条件有关的,为了便于比较各种系统的控制质量,通常假设系统的初始条件为零。

2. 二阶系统性能指标 (Performance index)

系统在欠阻尼情况下的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad t \geq 0 \quad (3-31)$$

对应的响应曲线如图 3-14 所示。下面就根据式 (3-31) 和图 3-14 所示曲线来定义系统的瞬态性能指标,同时讨论性能指标与特征量之间的关系。

(1) 上升时间 t_r

根据定义,当 $t = t_r$ 时, $c(t) = 1$, 由式 (3-31) 可得

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

即

$$\sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

所以

$$\omega_d t_r + \theta = k\pi \quad k = 1, 2, \dots$$

由于上升时间 t_r 是 $c(t)$ 第一次到达稳态值的时间,故取 $k = 1$, 所以

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-32)$$

由式(3-32)可以看出,当 ω_n 一定时,阻尼比 ζ 越大,上升时间 t_r 越长,当 ζ 一定时, ω_n 越大,上升时间 t_r 越小。

(2) 峰值时间 t_p

由定义,将式 (3-31) 对时间求导,并令其等于零,即

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$$

得

$$\zeta\omega_n \sin(\omega_d t_p + \theta) - \omega_d \cos(\omega_d t_p + \theta) = 0$$

变换得

$$\operatorname{tg}(\omega_d t_p + \theta) = \frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \operatorname{tg} \theta$$

所以

$$\omega_d t_p + \theta = k\pi + \theta$$

得

$$\omega_d t_p + k\pi \quad k=1,2,\dots$$

因为峰值时间 t_p 是 $c(t)$ 到达第一个峰值的时间, 故取 $k=1$, 所以

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-33)$$

可见, 当 ζ 一定时, ω_n 越大, t_p 越小, 反应速度越快。当 ω_n 一定时, ζ 越小, t_p 也越小。由于 ω_d 是闭环极点虚部的数值, ω_d 越大, 则闭环极点到实轴的距离越远, 因此, 也可以说峰值时间 t_p 与闭环极点到实轴的距离成反比。

(3) 超调量 σ_p

由定义

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

将前面所求得的 t_p 代入 (3-31) 式, 可得

$$c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \theta)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta = -\sqrt{1-\zeta^2}$$

所以

$$c(t_p) = 1 + e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

因为 $c(\infty)=1$

得

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (3-34)$$

该式表明, σ_p 只是阻尼比 ζ 的函数, 而与 ω_n 无关, ζ 越小, 则 σ_p 越大。当二阶系统的阻尼比 ζ 确定后, 即可求得对应的超调量 σ_p 。反之, 如果给出了超调量的要求值, 也可求得相应的阻尼比 ζ 的数值。一般当 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 时, 相应的超调量 $\sigma_p = 25\% \sim 1.5\%$ 。

(4) 调节时间 t_s

由定义应有下式成立

$$|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta \cdot c(\infty) \quad (t \geq t_s)$$

式中 $\Delta = 0.05$ （或 0.02），将式（3-31）及 $c(\infty) = 1$ 代入上式得

$$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right| \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

近似可得

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

由此可得

若取 $\Delta = 0.05$ ，则

$$t_s \geq \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}$$

若取 $\Delta = 0.02$ ，则

$$t_s \geq \frac{4 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}$$

在 $0 < \zeta < 0.9$ 时，上面两式可分别近似为

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (3-35)$$

和

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (3-36)$$

上两式表明，调节时间 t_s 近似与 $\zeta\omega_n$ 成反比。由于 $\zeta\omega_n$ 是闭环极点实部的数值， $\zeta\omega_n$ 越大，则闭环极点到虚轴的距离越远，因此，可以近似地认为调节时间 t_s 与闭环极点到虚轴的距离成反比。在设计系统时， ζ 通常由要求的超调量所决定，而调节时间 t_s 则由自然振荡频率 ω_n 所决定。也就是说，在不改变超调量的条件下，通过改变 ω_n 的值可以改变调节时间。

3.4 系统的稳定性分析

时域性能指标中稳态性能指标主要包括如下两种：

1. 稳定性（Stability）

控制系统能够正常工作的首要条件是系统必须稳定，在此基础上，对系统的性能进行

分析才有意义。任何一个系统在实际运行中，总会受到外部环境或内部参数变化的影响，这些变化对正常工作的系统是一种扰动作用，它会使系统的工作状态偏离原来的平衡工作点。

系统在受到扰动作用后自动返回原来的平衡状态的能力称为**稳定性**。如果系统受到扰动作用（系统内或系统外）后，能自动返回到原来的平衡状态，则该系统是稳定的。反之，系统是不稳定系统。如图 3-21 给出了稳定和不安定的系统。

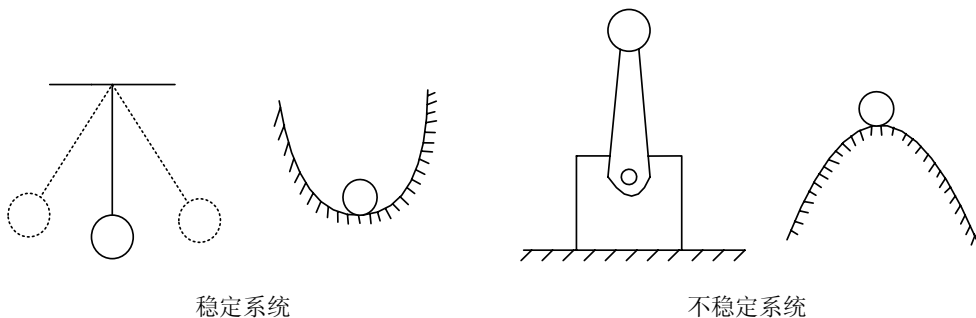


图 3-21 稳定系统与不稳定系统

2. 稳态误差 (Stability state error)

如图 3-20 可以看出，**稳态误差**是指稳定系统在完成过渡过程后的稳态输出偏离希望值的程度。开环控制系统的稳态误差通常与系统的增益或放大倍数有关，而反馈控制系统（闭环系统）的控制精度主要取决于它的反馈深度。稳态误差越小，系统的精度越高。

3.4.1 稳定的充要条件

根据稳定性的概念，可以将 $\delta(t)$ 函数作为扰动输入来分析系统的稳定性。设线性定常系统在初始条件为零时，输入一个理想单位脉冲函数，这相当于系统在零输入时，受到扰动信号的作用，若当时间 $t \rightarrow \infty$ 时，系统的输出响应 $c(t)$ 能收敛到原平衡状态，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

则称该系统是稳定的。于是，可根据单位脉冲响应，来分析系统稳定的充分必要条件。

设 n 阶系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3-37)$$

闭环特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-38)$$

如果系统特征方程的根互不相同, 且有 q 个实数根 p_i ($i=1,2,\dots, q$) 和 r 对共轭复数根 $\sigma_j + j\omega_j$ ($j=1,2,\dots, r$), $q+r=n$, 则在 $\delta(t)$ 函数作用下, 系统输出响应的拉氏变换

$$C(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^q (s - p_i) \prod_{j=1}^r (s - \sigma_j \pm j\omega_j)} \quad (3-39)$$

对上式进行部分分式并取拉氏反变换得

$$c(t) = \sum_{i=1}^q A_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r e^{\sigma_j t} (B_j \cos \omega_j t + C_j \sin \omega_j t) \quad (3-40)$$

式中系数 A_i 、 B_j 、 C_j 由初始条件确定。

分析式 (3-40) 可知:

- 若 $p_i < 0$, $\sigma_j < 0$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 指数项 e^{p_i} 和 e^{σ_j} 都趋于零, 系统是稳定的, 但由于共轭复数根的存在 ($\omega_j \neq 0$), 响应是衰减振荡的。当 $\omega_j = 0$ 时, 特征方程的根皆为负实数, 则系统输出是按指数衰减的, 系统也是稳定的。
- 若 p_i 或 σ_j 中有一个或一个以上是正实数, 则当 $t \rightarrow \infty$, e^{p_i} 和 e^{σ_j} 都越来越大, 系统输出是发散的, 则系统不稳定。
- 若 p_i 中存在一个或一个以上的零根, 其余的 p_i 及 σ_j 都小于零, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统输出趋于一稳态值, 此时, 系统的输出虽然是稳定的, 但是不能恢复到原来的平衡状态, 根据定义, 这样的系统是不稳定的。
- 若 σ_j 中有一个或一个以上为零, 即特征方程有纯虚根, 其余的 σ_j 及 p_i 都小于零, 则系统输出存在等幅振荡, 这时系统处于临界稳定状态, 在经典控制论中, 认为系统是不稳定的。

由以上分析可知, 式 (3-37) 描述的系统稳定的充分必要条件是, 系统特征方程的根 (闭环传递函数的极点) 都具有负实部。

由于特征方程的解或为实数根, 或为复数根, 故可用复平面上的点来表示特征根的位置。因此, 线性系统稳定的充要条件又可叙述为, 若系统特征方程的根均在 s 平面的左半部, 则该系统是稳定的。

3.4.2 劳斯稳定判据

1. 劳斯稳定判据 (Routh-Hurwitz criterion)

根据线性系统稳定的充要条件, 为了判别系统稳定与否, 就要求出系统特征方程的根, 并检验它们是否都具有负实部。但是, 这种求解系统特征方程的方法, 对低阶系统尚可以

进行, 而对于高阶系统, 其特征方程是高阶代数方程, 其求解往往是非常困难的, 一般需借助计算机求解。另一方面, 在判断系统稳定性的时候, 只需知道有无特征根分布在右半 s 平面就可以了, 无需得到特征根的精确数值。因此, 人们希望寻求一种不要求解特征方程就能判别系统稳定性的间接方法, 劳斯判据就是其中的一种。劳斯判据是利用特征方程的各项系数进行代数运算, 得出全部特征根具有负实部的条件, 以此作为判别系统是否稳定的依据, 因此, 这种判据又称为**代数稳定判据**。

应用劳斯稳定判据时, 必须借助特征方程式的系数写出一个劳斯阵列。现以六阶系统的特征方程为例, 说明劳斯阵列的编制方法。

给定六阶系统的特征方程 $a_0s^6 + a_1s^5 + a_2s^4 + a_3s^3 + a_4s^2 + a_5s + a_6 = 0$, 其劳斯阵列如下:

s^6	a_0	a_2	a_4	a_6
s^5	a_1	a_3	a_5	0
s^4	$(a_1a_2 - a_0a_3)/a_1 = b_1$	$(a_1a_4 - a_0a_5)/a_1 = b_2$	$(a_1a_6 - a_0 \times 0)/a_1 = b_3$	0
s^3	$(b_1a_3 - a_1b_2)/b_1 = c_1$	$(b_1a_5 - a_1b_3)/b_1 = c_2$	0	0
s^2	$(c_1b_2 - b_1c_2)/c_1 = d_1$	$(c_1b_3 - b_1 \times 0)/c_1 = d_2$	0	0
s^1	$(d_1c_2 - c_1d_2)/d_1 = e_1$	0	0	0
s^0	$(e_1d_2 - d_1 \times 0)/e_1 = f_1$	0	0	0

劳斯阵列中的第一行和第二行各元素, 用特征方程式直接按照奇偶次幂由低到高写入。第三行各元素, 是根据第一行和第二行的元素按照一定的方程式计算得到的, 以下各行同理, 是根据其上面两行的元素的方程式得到的。

列元素 $(a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1)$ 是劳斯阵列的第一列, 劳斯阵列就是根据这一列元素符号的性质判定特征方程根是否全分布在 s 平面左半部, 从而判定系统是否稳定。

将系统的特征方程写成如下标准形式

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n = 0, \quad a_0 > 0$$

并将该方程各项系数组成如下排列的劳斯表:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots	
\vdots					
s^2	d_1	d_2	d_3		
s^1	e_1	e_2			
s^0	f_1				

其中

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \dots$$

系数 b_i 的计算一直进行到其余的 b 值全部等于零为止。用同样的前两行系数交叉相乘的方法, 可以计算 $c, d, e, f \dots$ 各行的系数。

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \dots, \quad d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad e_1, \quad e_2, \quad e_3$$

$$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 e_2}{e_1}$$

劳斯稳定判据的内容为: 如果劳斯表中的第一列系数都具有相同的符号, 则系统是稳定的, 否则系统是不稳定的, 且不稳定根的个数等于劳斯表第一列系数符号改变的次数。

2. 例题

例 1 系统的特征方程为 $a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$, 求系统的稳定条件

解 根据劳斯判据

$$\begin{array}{rcl} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

可得判据条件为:

(1) $a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0$

(2) $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$

例 2 已知系统的特征方程为 $s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 15s^2 + 10s + 2 = 0$, 判断系统的稳定性。

解 根据劳斯判据可得

$$\begin{array}{rcll} s^5 & 1 & 12 & 10 \\ s^4 & 6 & 15 & 2 \\ s^3 & \frac{6 \times 12 - 1 \times 15}{6} = \frac{19}{2} & \frac{6 \times 10 - 1 \times 2}{6} = \frac{29}{3} & 0 \\ s^2 & \frac{\frac{19}{2} \times 15 - 6 \times \frac{29}{3}}{\frac{19}{2}} = \frac{507}{57} & \frac{\frac{29}{3} \times 2 - 6 \times 0}{\frac{29}{2}} = 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 s^1 & \frac{\frac{507 \times \frac{29}{3} - 19}{\frac{507}{57}}}{\frac{507}{57}} = \frac{3818}{507} & 0 \quad 0 \\
 s^0 & 2 & 0 \quad 0
 \end{array}$$

劳斯阵列第一列系数符号相同，故系统是稳定的。

例 3 已知系统的结构框图如图 3-22 所示，试确定使系统稳定的 k 的取值范围。

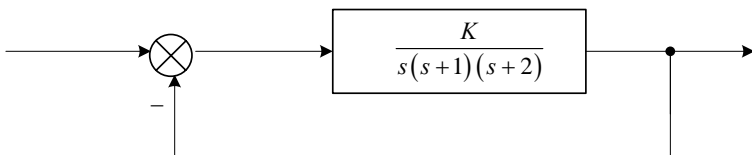


图 3-22 系统结构图

解 闭环系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s^2 + K}$$

特征方程为 $s^3 + 3s^2 + 2s^2 + K = 0$

劳斯阵列为

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & 1 & 2 \\
 s^2 & 3 & K \\
 s^1 & (6-K)/3 & 0 \\
 s^0 & K & 0
 \end{array}$$

根据劳斯判据可得，为使系统稳定必须满足：(1) $K > 0$ ，(2) $6 - K > 0$ ，因此可得 K 的取值范围为 $0 < K < 6$ 。

例 4 已知系统特征方程为

$$s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 5 = 0$$

试判断系统稳定性。

解 本例是应用劳斯判据判断系统稳定性的一种特殊情况。如果在劳斯行列表中某一行的第一列项等于零，但其余各项不等于零或没有，这时可用一个很小的正数 ε 来代替为零的一项，从而可使劳斯行列表继续算下去。

劳斯行列表为

$$\begin{array}{ccc}
 s^5 & 1 & 2 & {}^3R(s) \\
 s^4 & 1 & 2 & {}^5
 \end{array}$$

s^3	$\varepsilon \approx 0$	-2
s^2	$\frac{2\varepsilon + 2}{\varepsilon}$	5
s^1	$\frac{-4\varepsilon - 4 - 5\varepsilon^2}{2\varepsilon + 2}$	
s^0	5	

由劳斯行列表可见, 第三行第一列系数为零, 可用一个很小的正数 ε 来代替; 第四行第一列系数为 $(2\varepsilon+2)/\varepsilon$, 当 ε 趋于零时为正数; 第五行第一列系数为 $(-4\varepsilon-4-5\varepsilon^2)/(2\varepsilon+2)$, 当 ε 趋于零时为-2。由于第一列变号两次, 故有两个根在右半 s 平面, 所以系统是不稳定的。

例5 已知系统特征方程为

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

试求: (1) 在 s 右半平面的根的个数; (2) 虚根。

解 如果劳斯行列表中某一行所有系数都等于零, 则表明在根平面内存在对原点对称的实根, 共轭虚根或(和)共轭复数根。此时, 可利用上一行的系数构成辅助多项式, 并对辅助多项式求导, 将导数的系数构成新行, 以代替全部为零的一行, 继续计算劳斯行列表。对原点对称的根可由辅助方程(令辅助多项式等于零)求得。

劳斯行列式为

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	2	12	16	
s^3	0	0		

由于 s^3 行中各项系数全为零, 于是可利用 s^4 行中的系数构成辅助多项式, 即

$$P(s) = 2s^4 + 12s^2 + 16$$

求辅助多项式对 s 的导数, 得

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 24s$$

原劳斯行列式中 s^3 行各项, 用上述方程式的系数, 即8和24代替。此时, 劳斯行列表变为

s^6	1	8	20
s^5	2	12	16
s^4	2	12	16
s^3	8	24	
s^2	6	16	
s^1	2.67		
s^0	16		

新劳斯行列式中第一列没有变号，所以没有根在右半平面。

对原点对称的根可解辅助方程求得。令

$$2s^4 + 12s^2 + 16 = 0$$

得到

$$s = \pm j\sqrt{2} \text{ 和 } s = \pm j2$$

即为所求虚根。

3.5 系统的稳态误差分析

在系统的分析、设计中，稳态误差是一项重要的性能指标，它与系统本身的结构、参数及外作用的形式有关，也与元件的不灵敏、零点漂移、老化及各种传动机械的间隙、摩擦等因素有关。这里只讨论由于系统结构、参数及外作用等因素所引起的稳态误差。

为了分析方便，通常把系统的稳态误差分为给定值稳态误差（即由给定输入引起的稳态误差）和扰动值稳态误差（即由扰动输入引起的稳态误差）。对于随动系统，由于给定输入是变化的，要求系统输出量以一定的精度跟随输入量的变化，因而用给定稳态误差来衡量系统的稳态性能。而对恒值系统，其给定输入通常是不变的，这时需要分析输出量在扰动作用下所受到的影响，因而用扰动稳态误差来衡量系统的稳态性能。

3.5.1 稳态误差的定义

系统的误差 $e(t)$ 一般定义为输出量的希望值与实际值之差。对图 3-23 所示的典型系统，其误差定义有两种形式：

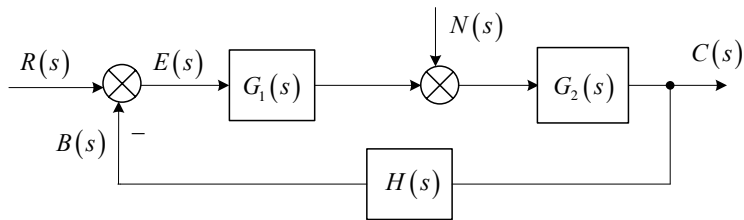


图 3-23 反馈控制系统结构图

1. 从系统输出端来定义

$$e(t) = c_0(t) - c(t) \quad (3-41)$$

式中， $c_0(t)$ 为系统输出量的希望值， $c(t)$ 为输出量的实际值。

进行拉氏变换可得

$$E(s) = C_0(s) - C(s) \quad (3-42)$$

2. 从系统的输入端来定义

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (3-43)$$

式中，系统输出量的希望值是给定输入 $r(t)$ ，而输出量的实际值为系统主反馈信号 $b(t)$ 。

进行拉氏变化可得

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C_0(s) \quad (3-44)$$

稳定系统误差信号的稳态分量称为系统的稳态误差，以 e_{ss} 表示，其定义为：当 $t \rightarrow \infty$ 时，稳定系统误差的终值，即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - b(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

由拉氏终值定理得

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

3.5.2 系统类型数

在给定输入作用下，系统的稳态误差与系统的结构、参数和输入信号形式有关，对于一个给定的系统，当给定输入的形式确定后，系统的稳态误差将取决于以开环传递函数描述的系统结构。为了分析稳态误差与系统结构的关系，可以根据开环传递函数 $G(s)H(s)$ 中串联的积分环节来规定控制系统的类型。

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^V \prod_{i=1}^{n-V} (T_i s + 1)} \quad (3-45)$$

式中 $K = \lim_{s \rightarrow 0} s^V G(s)H(s)$ 称为系统的开环放大系数或开环增益。

式 (3-45) 分母中的 s^V 表示开环传递函数在原点处有 V 重极点，或者说有 V 个积分环节串联。当 $V=0$ ， $V=1$ ， $V=2$ ， \cdots 时，分别称系统为 0 型、I 型、II 型……系统。显然，分类是以开环传递函数中串联的积分环节数目为依据的，而 $C(s)$ ， $H(s)$ 中其他零、极点对分类没有影响。

3.5.3 参考输入信号作用下的稳态误差

如图 3-24 所示的控制系统，参考输入作用下的稳态误差（又称为跟随稳态误差）为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] \quad (3-46)$$

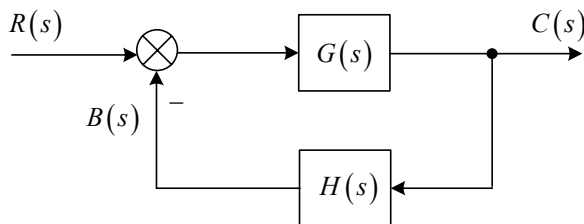


图 3-24 反馈控制系统

1. 阶跃输入时的稳态误差与静态位置误差系数

在单位阶跃输入下， $R(s) = \frac{1}{s}$ ，由输入信号引起的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{1 + G(0)H(0)} \quad (3-47)$$

令 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$ ， K_p 称为静态位置误差系数，则稳态误差可写成

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3-48)$$

对于不同类型的系统，相应的位置误差系数 K_p 和稳态误差 e_{ss} 为：

0 型系统： $K_p = K$ ， $e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$ ；

I 型系统： $K_p = \infty$ ， $e_{ss} = 0$ ；

II 型系统： $K_p = \infty$ ， $e_{ss} = 0$ 。

2. 斜坡（等速）输入时的稳态误差与静态速度误差系数

在单位斜坡输入下， $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ，由输入信号引起的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} \quad (3-49)$$

令 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$ ， K_v 称为静态速度误差系数，则稳态误差可写成

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (3-50)$$

对于不同类型的系统，相应的位置误差系数 K_v 和稳态误差 e_{ss} 为：

0 型系统： $K_v = 0$ ， $e_{ss} = \infty$ ；

I 型系统： $K_v = K$ ， $e_{ss} = \frac{1}{K}$ ；

II 型系统： $K_v = \infty$ ， $e_{ss} = 0$ 。

3. 抛物线（加速度）输入时的稳态误差与静态加速度误差系数

在单位抛物线输入下， $R(s) = \frac{1}{s^3}$ ，由输入信号引起的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^3} \right] = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} \quad (3-51)$$

令 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$ ， K_a 称为静态加速度误差系数，则稳态误差可写成

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad (3-52)$$

对于不同类型的系统，相应的位置误差系数 K_a 和稳态误差 e_{ss} 为：

0 型系统： $K_a = 0$ ， $e_{ss} = \infty$ ；

I 型系统： $K_a = 0$ ， $e_{ss} = \infty$ ；

II 型系统： $K_v = K$ ， $e_{ss} = \frac{1}{K}$ 。

4. 例题

例 6 单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{20}{(0.5s+1)(0.04s+1)}$ ，试给出系统在输入单位阶跃函数 $r(t) = 1(t)$ 和单位斜坡函数 $r(t) = t$ 时，系统的稳态误差 e_{ss} 。

解

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(0.5s+1)(0.04s+1)}{(0.5s+1)(0.04s+1) + 20} R(s)$$

单位阶跃信号：

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(0.5s+1)(0.04s+1)}{(0.5s+1)(0.04s+1)+20} = \frac{1}{21}$$

单位斜坡信号:

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(0.5s+1)(0.04s+1)}{(0.5s+1)(0.04s+1)+20} \frac{1}{s} = \infty$$

例 7 I 型单位反馈系统的开环增益 $K = 600s^{-1}$ ，系统最大跟踪速度 $\omega_{\max} = 24^\circ /s$ ，求系统在最大跟踪速度下的稳态误差。

解 单位速度输入下的稳态误差 $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$

I 型系统

$$K_v = K$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \times \omega_{\max} = \frac{1}{600} \times 24 = 0.04^\circ$$

例 8 阀控油缸伺服工作台要求定位精度为 0.05 cm，该工作台最大移动速度 $V_{\max} = 10 \text{ cm/s}$ ，若系统为 I 型，试求系统开环增益。

解 单位速度输入下的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{0.05}{10} = 0.005s$$

系统的开环增益

$$K = K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.005} = 200s^{-1}$$

例 9 单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(as+1)(bs^2+cs+1)}$$

- 试求： (1) 位置误差系数，速度误差系数和加速度误差系数；
(2) 当参考输入为 $r \times 1(t)$ ， $rt \times 1(t)$ 和 $rt^2 \times 1(t)$ 时系统的稳态误差。

解

根据误差系数公式，有

位置误差系数为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s(as+1)(bs^2+cs+1)} = \infty$$

速度误差系数为

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(as+1)(bs^2+cs+1)} = K$$

加速度误差系数为

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{K}{s(as+1)(bs^2+cs+1)} = 0$$

对应于不同的参考输入信号，系统的稳态误差有所不同。

参考输入为 $r \times 1(t)$ ，即阶跃函数输入时系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{r}{1+K_p} = \frac{r}{1+\infty} = 0$$

参考输入为 $rt \times 1(t)$ ，即斜坡函数输入时系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{r}{K_v} = \frac{r}{K}$$

参考输入为 $rt^2 \times 1(t)$ ，即抛物线函数输入时系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{2r}{K_a} = \frac{2r}{0} = \infty$$

例 10 单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

输入信号为 $r(t) = A + \omega t$ ， A 为常量， $\omega = 0.5$ 弧度/秒。试求系统的稳态误差。

解

实际系统的输入信号，往往是阶跃函数、斜坡函数和抛物线函数等典型信号的组合。此时，输入信号的一般形式可表示为

$$r(t) = r_0 + r_1 t + \frac{1}{2} r_2 t^2$$

系统的稳态误差，可应用叠加原理求出，即系统的稳态误差是各部分输入所引起的误差的总和。所以，系统的稳态误差可按下式计算：

$$e_{ss} = \frac{r_0}{1+K_p} + \frac{r_1}{K_v} + \frac{r_2}{K_a}$$

对于本例，系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{\omega}{K_v}$$

本题给定的开环传递函数中只含一个积分环节，即系统为 I 型系统，所以

$$K_p = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} = 10$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{\omega}{K_v} = \frac{A}{1+\infty} + \frac{\omega}{10} = \frac{\omega}{10} = \frac{0.5}{10} = 0.05$$

3.5.4 扰动输入信号作用下的稳态误差

扰动作用下的稳态误差又称为扰动误差。如图 3-25 所示的系统结构框图， $D(s)$ 为扰动量。

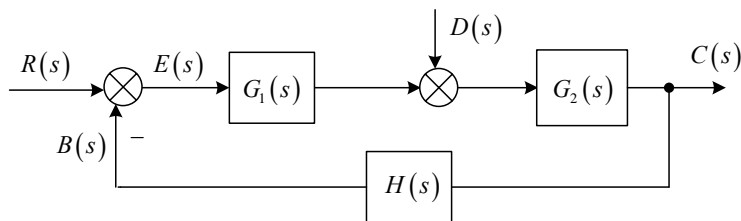


图 3-25 有扰动的控制系统

扰动误差信号为

$$E_d(s) = -C(s)H(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot D(s) \quad (3-53)$$

引起的扰动误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{sG_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot D(s) \right] \quad (3-54)$$

对于图 3-25 所示的系统，如果给定的输入信号和扰动信号同时作用时，则系统总的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} \right] + \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{sG_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot D(s) \right] \quad (3-55)$$

例 11 在如图 3-26 所示的系统结构图中，求系统在单位斜坡输入 $r(t)=t$ 和单位阶跃扰动 $n(t)=-1[t]$ 作用下的稳态误差。

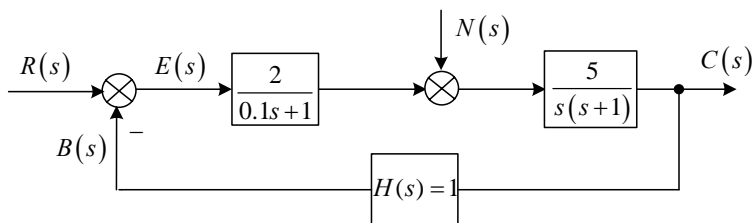


图 3-26 方框图

解 在控制信号作用下 ($N(s)=0$)

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s(0.1s+1)(s+1)}{s(0.1s+1)(s+1)+10}$$

$$e_{ssR} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(0.1s+1)(s+1)}{s(0.1s+1)(s+1)+10} \frac{1}{s^2} = 0.1$$

在扰动信号作用下 ($R(s)=0$)

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-5(0.1s+1)}{s(0.1s+1)(s+1)+10}$$

$$e_{ssN} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-5(0.1s+1)}{s(0.1s+1)(s+1)+10} \frac{-1}{s} = 0.5$$

所以

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssN} = 0.6$$

例 12 设控制系统如图 3-27 所示, 其中

$$G_1(s) = \frac{K_1}{1+T_1s}, \quad G_2(s) = \frac{K_2}{s(1+T_2s)}$$

给定输入 $r(t) = R_r 1(t)$, 扰动输入 $n(t) = R_n 1(t)$ (R_r 和 R_n 均为常数), 试求系统的稳态误差。

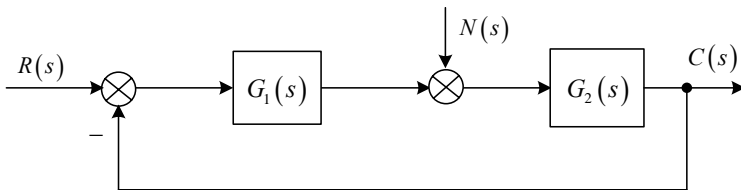


图 3-27 控制系统结构图

解

当系统同时受到给定输入和扰动输入的作用时，其稳态误差为给定稳态误差和扰动稳态误差的叠加。

令 $n(t)=0$ 时，求得给定输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{eR}(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

所以给定稳态误差为

$$e_{ssR} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K_1K_2} \cdot \frac{R_r}{s} = 0$$

令 $r(t)=0$ 时，求得扰动输入作用下的误差传递函数为

$$\Phi_{eN}(s) = -\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

所以扰动稳态误差为

$$e_{ssN} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_2(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sK_2(1 + T_1s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K_1K_2} \frac{R_n}{s} = -\frac{R_n}{K_1}$$

由以上计算可以看出， $r(t)$ 和 $n(t)$ 同是阶跃信号，但由于在系统中的作用点不同，故它们产生的稳态误差也不相同。此外，由扰动稳态误差的表达式可见，提高系统前向通道中扰动信号作用点之前环节的放大系数（即 K_1 ），可以减小系统的扰动稳态误差。

该系统总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssN} = -\frac{R_n}{K_1}$$

为了分析系统中串联的积分环节对稳态误差的影响，我们假设图 3-27 中

$$G_1(s) = \frac{K_2}{s(1 + T_2s)}, \quad G_2(s) = \frac{K_1}{1 + T_1s}$$

给定输入和扰动输入保持不变。这时，系统的稳态误差可按上述相同的方法求出，即

$$e_{ssR} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = 0$$

$$e_{ssN} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_2(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s^2K_1(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K_1K_2} \frac{R_n}{s} = 0$$

所以，该系统总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssN} = 0$$

比较以上两次计算的结果可以看出,若要消除系统在输入信号作用时的稳态误差,可增加系统前向通道中串联积分环节的个数。若要消除系统的扰动稳态误差,则在系统前向通道中只有扰动输入作用点之前的积分环节才起作用。因此,若要消除由给定输入和扰动输入同时作用于系统所产生的稳态误差,则积分环节应串联在前向通道中扰动输入作用点之前。对于非单位反馈系统,当 $H(s)$ 为常数时,以上分析的有关结论同样适用。

3.6 设计实例

——英吉利海峡海底隧道钻机

连接法国和英国的英吉利海峡海底隧道于 1987 年 12 月开工建造,1990 年 11 月,从两个国家分头开钻的隧道首次对接成功。隧道长 23.5 英里,位于海平面以下 200 英尺。隧道于 1992 年完工,共花费 14 亿美元,每天能通过 50 趟列车,这个工程把英国同欧洲大陆连接起来,将伦敦到巴黎的火车行车时间缩短为 3 个小时。

钻机分别从海峡两端向中间推进,并在海峡的中间对接。为了使对接达到必要的精度,施工时使用了一个激光导引系统以保持钻机的直线方向。钻机的控制模型如图 3-28 所示,其中:

$Y(s)$ 是钻机向前的实际角度;

$R(s)$ 是预期的角度;

$D(s)$ 是负载对机器的影响。

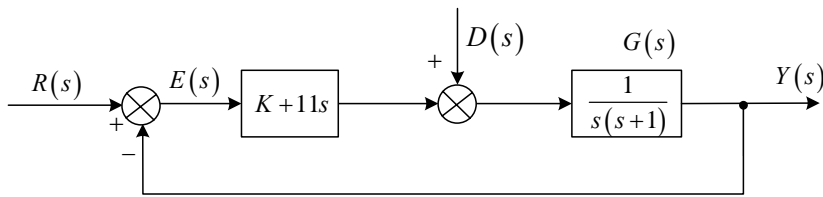


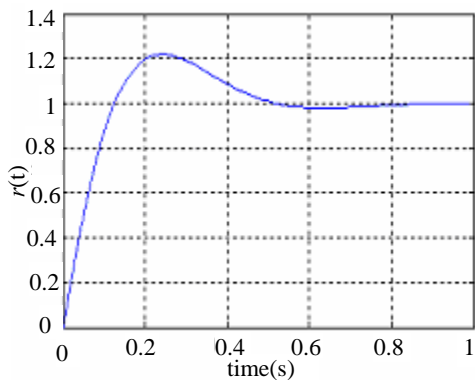
图 3-28 钻机控制系统模型图

设计的目标是选择增益 K ,使得对输入角度的响应满足工程要求,并且使干扰 $D(s)$ 引起的误差最小。从上面的系统框图中,得到对于两个输入的输出为:

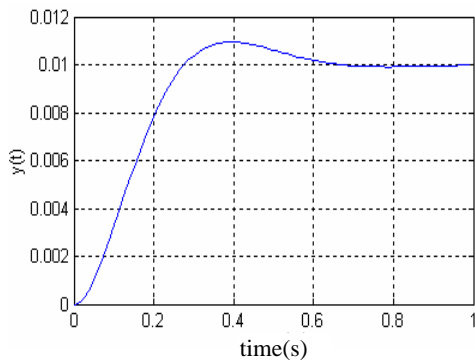
$$Y(s) = G(s)R(s) + G_d(s)D(s) = \frac{K + 11s}{s^2 + 12s + K}R(s) + \frac{1}{s^2 + 12s + K}D(s)$$

为了减小干扰的影响,我们希望增益大于 10。当设置增益 $K = 100$,并令 $d(t) = 0$ 时,

可得到系统对单位阶跃输入 $r(t)$ 的响应, 如图 3-29 (a) 所示; 令 $r(t)=0$, 则可以确定系统对单位阶跃干扰的响应 $y(t)$, 如图 3-29 (b) 所示。由此可见干扰的影响是很小的。如果设置增益 $K=20$, 可得到系统对单位阶跃 $r(t)$ 和 $d(t)$ 的响应曲线如图 3-30 所示。

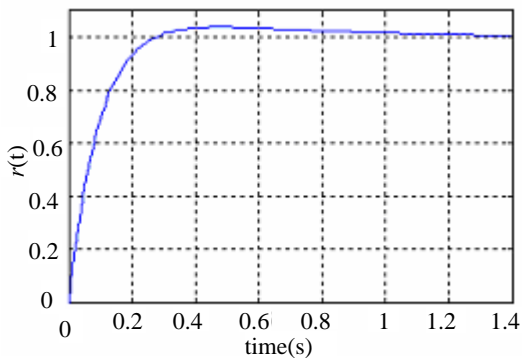


(a) 单位阶跃输入 $r(t)$ 的响应

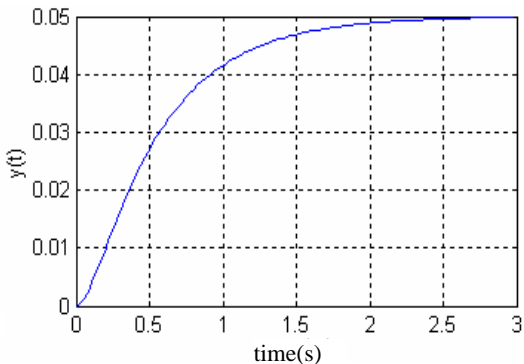


(b) 单位阶跃干扰 $d(t)$ 的响应

图 3-29 $K=100$ 时系统的响应曲线



(a) 单位阶跃输入 $r(t)$ 的响应



(b) 单位阶跃干扰 $d(t)$ 的响应

图 3-30 $K=20$ 时系统的响应曲线

从响应曲线中, 很容易看出, 此时系统相应的超调量较小 (小于 4%), 且在 2s 之内即达到稳态, 所以选择 $K=20$ 。

系统对单位阶跃输入 $R(s)=1/s$ 的稳态误差为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot T(s) \cdot R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K+11s}{s(s+1)}} \frac{1}{s} = 0$$

当干扰为单位阶跃, 即 $D(s)=1/s$ 时, 输入 $r(t)=0$, $y(t)$ 的稳态误差为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_d(s) \cdot D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s(s+12)+K} \right] = \frac{1}{K}$$

所以可得:

$$K=100, \quad y(t)=0.01$$

$$K=20, \quad y(t)=0.05$$

将 $K=100$ 与 $K=20$ 的系统的一些特性列于下表 3-1, 以便进行比较。

表 3-1 系统特性表

增益 k	$r(t)$ 为阶跃输入时的超调量	$r(t)$ 为阶跃输入时调节时间	$d(t)$ 为阶跃干扰 $r(t)=0$ 时的稳态响应 $y(t)$	$r(t)$ 为阶跃输入 $d(t)=0$ 时的稳态误差
100	22%	0.7 s	0.01	0
20	4%	1.0 s	0.05	0

3.7 习 题

1. 设系统的初始条件为零, 其微分方程如下

$$(1) \quad 0.2 \frac{dc(t)}{dt} = 2r(t)$$

$$(2) \quad 0.04 \frac{d^2c(t)}{dt^2} + 0.24 \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

求系统的脉冲响应以及单位阶跃响应。

2. 二阶系统的单位阶跃响应 $c(t)=10[1-1.25e^{-1.2t}\sin(1.6t+0.93)]$, 求 σ_p 、 t_p 和 t_s 。

3. 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$ 。求上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 、超调量 σ_p 和调整时间 t_s 。

4. 如图 3-31 所示的二阶系统, 其中 $\zeta=0.5$, $\omega_n=4\text{rad/s}$ 。当输入信号为单位阶跃信号时, 求系统的瞬态响应。

5. 系统的结构图如图 3-32 所示。已知传递函数 $G(s)=\frac{10}{0.2s+1}$, 今欲采用加反馈的办法, 将调节时间 t_s 减小为原来的 0.1 倍, 并保证总放大倍数不变。试确定参数 K_h 和 K_o 的数值。

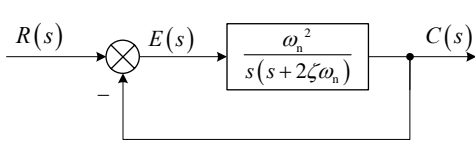


图 3-31 二阶系统

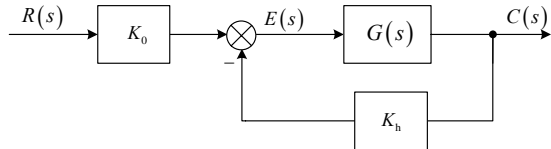


图 3-32 系统结构图

6. 系统的特征方程为 $s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$ ，求在右半平面的特征根数目，并求出特征根。
7. 系统特征方程为 $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$ ，试求系统稳定条件。
8. 已知系统的结构图如图 3-33 所示。试确定系统稳定的 K 值范围。

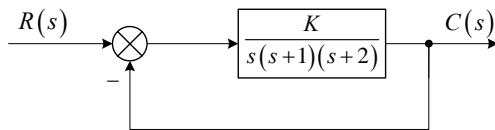


图 3-33 系统结构图

9. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$ ，要求系统闭环时稳定，试确定 K 和 T 的范围。
10. 如图 3-34 所示系统，求：
 - (1) 当 $r(t) = 0$, $n(t) = 1(t)$ 时，系统的稳态误差 e_{ss} 。
 - (2) 当 $r(t) = 1(t)$, $n(t) = 1(t)$ 时，系统的稳态误差 e_{ss} 。
 - (3) 若要减小稳态误差，则应如何调整 K_1 , K_2 。
 - (4) 如分别在扰动点之前或之后加入积分环节，对稳态误差有何影响。

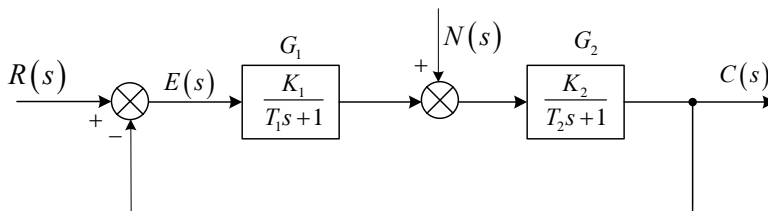


图 3-34 系统结构图

11. 对于图 3-35 所示的系统，求 $r(t) = 1(t)$, $r(t) = 10t$, $r(t) = 3t^2$ 时的稳态误差终值 $e_{ss}(\infty)$ 。

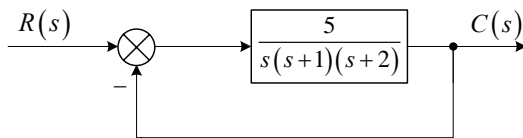


图 3-35 系统结构图

12. 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ ，其中， $T_1 = 0.1$ ； $T_2 = 0.5$ ，输入信号为 $r(t) = 2 + 0.5t$ 。试求系统的稳态误差。
13. 系统结构图如图 3-36(a)所示，其单位阶跃响应如图 3-36 (b) 所示，系统的静态位置误差 $e_{ss} = 0$ ，试确定 K ， ν 和 T 的值。

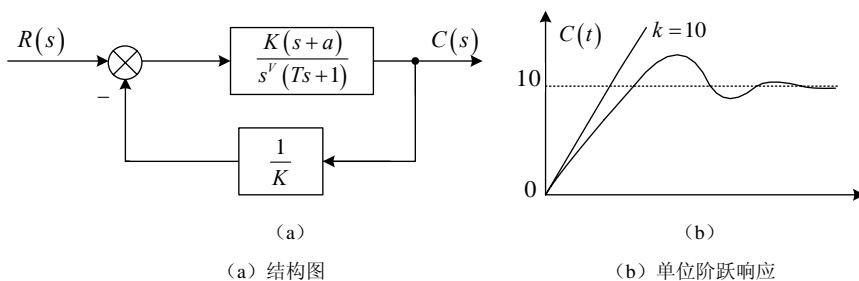


图 3-36 第 13 题图

第4章 根轨迹法

闭环系统特征方程的根决定闭环系统的稳定性及主要动态性能。特征方程通常是高阶方程，求根的过程比较复杂，尤其是当系统参数发生变化时，系统特征方程的根也随之变化。如果用解析的方法直接求解特征方程就需要进行反复大量的运算，求解烦琐、费时。根轨迹法是分析和设计线性定常系统非常有效的图解方法。这一方法不直接求解特征方程，用作图的方法表示特征方程的根与系统某一参数的数值关系，当这一参数取特定值时，对应的特征根可在上述关系图中找到。在设计线性控制系统时，可以根据对系统性能指标的要求确定可调整参数以及系统开环零极点的位置，即根轨迹法可以用于系统的分析与综合。

4.1 根轨迹的基本概念

1. 根轨迹定义

根轨迹简称**根迹**，是开环系统某一参数从零变化到无穷时，闭环系统特征方程根在 s 平面上变化的轨迹。

2. 根轨迹增益

设系统的开环传递函数有如下形式

$$G(s)H(s) = K \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad (4-1)$$

或写成

$$G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (4-2)$$

(4-1) 式中的 K 是系统的开环增益。 z_j 和 p_i 分别是开环传递函数的零点和极点， K^* 是将分子和分母分别写成因子相乘的形式提取的系数，称作**根轨迹增益**，它与系统的开环增益的关系为

$$K = K^* \frac{\prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)} \quad (4-3)$$

3. 根轨迹方程

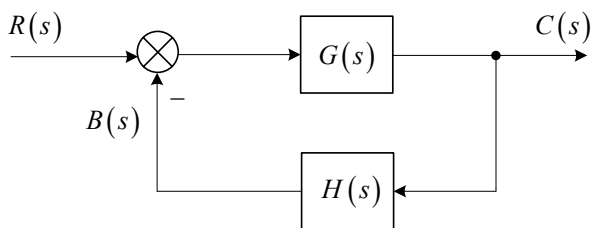


图 4-1 控制系统结构图

如图 4-1 所示的闭环系统，系统闭环特征方程的根满足：

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (4-4)$$

可得

$$G(s)H(s) = -1 \quad (4-5)$$

代入可以得到

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1 \quad (4-6)$$

称上式为系统的根轨迹方程。它是一复数方程，由于复数方程两边的幅值和相角应相等，因此可将上式用两个方程描述，即

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|} \quad (4-7)$$

和

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \quad (4-8)$$

我们将上面两个方程称作幅值条件和相角条件，满足幅值条件和相角条件的 s 值，就

是特征方程的根，即系统的闭环极点。当 K^* 从零变化到无穷，特征方程的根在复平面上变化的轨迹就是根轨迹。

4.2 根轨迹绘制的基本规则

由上节我们知道，当 K^* 从零到无穷变化时，依据相角条件，可以在复平面上找到满足 K^* 变化时的所有闭环极点，即绘制出系统的根轨迹。但是在实际中，通常我们并不需要按相角条件逐点确定该点是否为根轨迹上的点，而是依据一定的规则，找到某些特殊的点，绘制出闭环极点随参数变化的大致轨迹，在感兴趣的范围内，再用幅值条件和相角条件确定极点的准确位置。

下面以变参数 K^* 为例，讨论绘制根轨迹的基本规则。

1. 根轨迹的分支数

由前面的幅值条件

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

可以得到系统的闭环特征方程：

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0 \quad (4-9)$$

可以看出特征根的数目等于 m 和 n 中的较大者，由传递函数的性质可以知道 $n \geq m$ ，可以看出特征根的数目等于 n 。由于根轨迹是开环系统某一参数从零变化到无穷时，闭环特征方程的根在 s 平面上变化的轨迹，所以根轨迹的分支数与闭环特征方程的根的数目一样。

规则一 根轨迹在 $[S]$ 平面上的分支数等于控制系统特征方程的阶次，即等于闭环极点数目，亦等于开环极点数目。

2. 根轨迹的起点和终点

对于物理可实现系统，开环传递函数分母多项式的阶次 n 与分子多项式的阶次 m 满足不等式 $n \geq m$ 。由上面的关系表达式可以得出：

当 $K^* = 0$ 时，有

$$s = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

满足幅值条件，说明根轨迹的起点是开环极点。

当 $K^* = \infty$ 时, 有

$$s = z_j, j = 1, 2, \dots, m$$

满足幅值条件, 说明根轨迹的终点是开环零点。

当 $n = m$ 时, 根轨迹起点的个数与根轨迹终点的个数相等。

当 $n > m$ 时, 根轨迹的终点数少于起点数, 当 $K^* = \infty$ 时,

$$\frac{1}{K^*} = \lim_{\substack{j=1 \\ i=1}}^m \frac{|s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{|s|^{n-m}} = 0$$

说明有 $n - m$ 个终点在无穷远处。我们将这些终点称作**无限零点**, 把有限数值的零点称作**有限零点**。

规则二 根轨迹起于开环极点, 终止于开环零点。如果开环零点数目 n 小于开环极点数目 m , 则有 $n - m$ 条根轨迹终止于 $[S]$ 平面无穷远处。

3. 根轨迹的连续性与对称性

由幅值条件

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

可知, 参变量 K^* 无限小增量与 s 平面上的长度 $|s - p_i|$ 和 $|s - z_j|$ 的无限小增量相对应, 此时, 复变量 s 在 n 条根轨迹上就各有一个无穷小的位移, 因此, K^* 从零到无穷连续变化时, 根轨迹在 s 平面上一定是连续的。

由于闭环特征方程是实系数多项式方程, 其根或为实数位于实轴上, 或为共轭复数成对出现在复平面上。因此, 根轨迹是对称于实轴的。在绘制根轨迹时, 只要作出 s 平面上半部的轨迹, 就可根据对称性得到下半平面的根轨迹。

规则三 根轨迹是连续的, 并且对称于实轴。

4. 实轴上的根轨迹

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1)(s - z_2)(s - z_3)(s - z_4)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)(s - p_5)} \quad (4-10)$$

其中 P_1 、 P_2 、 P_3 、 Z_1 、 Z_2 为实极点和实零点, P_4 、 P_5 、 Z_3 、 Z_4 为共轭复数零、极点, 它们在 s 平面上的分布如图 4-2 所示, 试分析实轴上的根轨迹与开环零点和极点的关系。

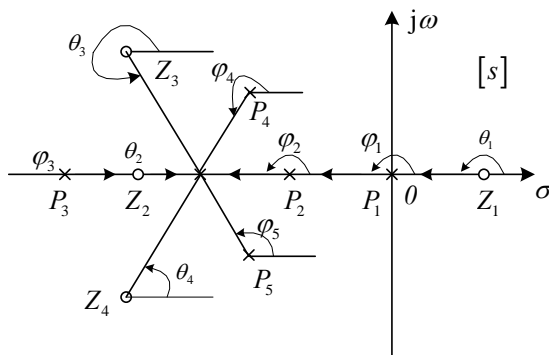


图 4-2 式 (4-10) 零极点分布图

实轴上的根轨迹必须满足绘制根轨迹的相角条件, 即

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

为确定实轴上的根轨迹, 选择 s_0 作为试验点。开环极点 p_i 到 s_0 点的向量的相角为 φ_i ($i=1,2,3,4,5$), 开环零点 z_j 到 s_0 点的向量的相角为 θ_j ($j=1,2,3,4$)。共轭复数极点 p_4 和 p_5 到 s_0 点的向量的相角和为 $\varphi_4 + \varphi_5 = 2\pi$, 共轭复数零点到 s_0 点的向量的相角和也为 2π , 因此, 当我们在确定实轴上的某点是否在根轨迹上时, 可以不考虑复数开环零、极点对相角的影响。下面分析位于实轴上的开环零、极点对相角的影响。实轴上, s_0 点左侧的开环极点和开环零点 z_2 构成的向量的夹角 φ_3 和 θ_2 均为零度, 而 s_0 点右侧的开环极点 p_1 、 p_2 和开环零点 z_1 与 s_0 构成的向量的夹角 φ_1 、 φ_2 和 θ_1 均为 π 。若 s_0 为根轨迹上的点, 必满足相角条件。由以上分析知, 只有 s_0 点右侧实轴上的开环极点和开环零点的个数之和为奇数时, 才满足相角条件。所以, 在图中, 实轴上的 p_1 至 z_1 , p_2 至 z_2 和 p_3 至 $-\infty$ 这三段是实轴上的根轨迹。

规则四 实轴上的根轨迹是那些在其右侧开环实数极点、实数零点总数为奇数的区间。共轭复数开环极点、零点对确定实轴上的根轨迹无影响。

5. 根轨迹渐近线

系统开环零点数目 m 小于极点数 n , 当 $K^* \rightarrow \infty$ 时, 有 $n-m$ 条根轨迹趋向于无穷远处。渐近线就是决定这 $n-m$ 条根轨迹趋向于无穷远处的方位。渐近线包含两个参数, 即渐近线倾角和渐近线与实轴的交点。

(1) 渐近线的倾角

假设在无穷远处有特征根 s_∞ , 则在平面上所有开环有限零点 z_j 和极点 p_i 的向量相角相等, 即 $\angle(s_\infty - z_j) = \angle(s_\infty - p_i) = \varphi_a$, 用它代入相角条件式

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

可以得到

$$\sum_{j=1}^m \angle(s_\infty - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s_\infty - p_i) = m\varphi_a - n\varphi_a = (2k+1)\pi$$

所以渐近线的倾角为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)}{m-n} \pi, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-m-1 \quad (4-11)$$

当 $k=0$ ，渐近线的倾角最小， k 增大时，倾斜值重复出现，故独立的渐近线只有 $n-m$ 条。

(2) 渐近线与实轴的交点 σ_a

假设在无穷远处有特征根 s_∞ ，则在平面上所有开环有限零点 z_j 和极点 p_i 的向量长度相等。所以可以认为，对于无限远闭环极点 s_∞ ，所有开环零点、极点都汇集在一起，其位置为 σ_a 。所以渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad (4-12)$$

由于极点和零点必为实数或共轭复数，所以它们的虚部是互相抵消的，所以 σ_a 为实数。

规则五 控制系统的开环零点数目 m 小于开环极点数目 n 时，当 $k \rightarrow \infty$ 时，趋向无穷远处根轨迹的渐近线共有 $n-m$ 条。这些渐近线在实轴上交于一点，其坐标是

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (p_i) - \sum_{j=1}^m (z_j)}{n-m}, j0 \right), \text{ 而渐近线与实轴正方向的夹角分别 } \varphi_a = \frac{(2k+1)}{m-n} \pi,$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-m$ 。

6. 根轨迹的分离点

两条或两条以上的根轨迹分支在 s 平面上某点相遇又立即分开，则称该点为分离点。

闭环系统的特征方程可表示为

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

根轨迹在 s 平面有相交，说明闭环特征方程有重根，设重根为 d 。根据代数方程中有重根的条件，有 $D(s) = 0$ ， $\dot{D}(s) = 0$

即

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left[\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) \right] = 0$$

或

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (s - p_i) &= -K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) \\ \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) &= -K^* \frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j) \end{aligned}$$

上两式相除，得

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

即

$$\frac{d \ln \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{ds} = \frac{d \ln \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{ds}$$

因为

$$\begin{aligned} \ln \prod_{i=1}^n (s - p_i) &= \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i) \\ \ln \prod_{j=1}^m (s - z_j) &= \sum_{j=1}^m \ln(s - z_j) \end{aligned}$$

所以可以得到

$$\sum_{i=1}^n \frac{d \ln(s - p_i)}{ds} = \sum_{j=1}^m \frac{d \ln(s - z_j)}{ds}$$

计算得到

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j} \quad (4-13)$$

解方程，得到根轨迹的分离点 d 。应该注意，所得的 d 应能满足 $K^* > 0$ 。若开环传递函数无有限零点，则在分离点的方程应取 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j} = 0$ 。一般，若两个开环极点之间有根轨迹，

则至少存在一个分离点；若两个开环零点之间有根轨迹，则至少存在一个分离点。

规则六 分离点的坐标可由以下方程求得：

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

7. 根轨迹与虚轴交点

根轨迹与虚轴相交, 说明虚轴上有控制系统的闭环极点, 此时特征方程含有纯虚数根, 将 $s = j\omega$ 代入特征方程, 可以得到

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

或

$$\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] + j \operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

分别列写实轴和虚轴的两个方程, 即

$$\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \quad (4-14)$$

$$\operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \quad (4-15)$$

联立解上面二方程, 即可求出与虚轴交点处的 K^* 值和 ω 值。

8. 根轨迹的起始角和终止角

当开环传递函数中有复数极点或零点时, 根轨迹离开开环复数极点或进入开环复数零点的方向, 就是所谓的起始角和终止角问题。先给出定义, **起始角** θ_p 为根轨迹离开开环复数极点处在切线方向与实轴正方向的夹角。**终止角** θ_z 为根轨迹进入开环复数零点处的切线方向与实轴正方向的夹角。

如图 4-3 所示 θ_{p1} , θ_{p2} 为起始角, θ_{z1} , θ_{z2} 为终止角。

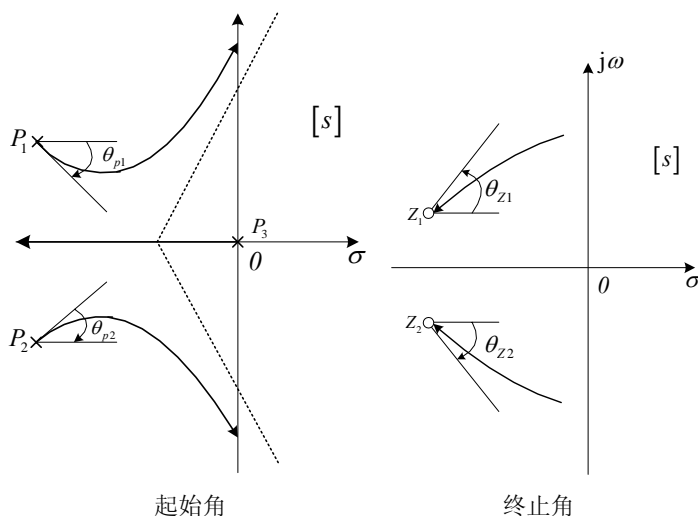


图 4-3 起始角、终止角示意图

设系统的传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(s+2.73)(s^2+2s+2)}$$

其零极点分布如图 4-4 所示, 为求根轨迹从 p_3 点处的起始角, 在其附近找一个实验点 s_a , 并认为该点在根轨迹上, 则它应满足幅角条件:

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi$$

所以可以得到

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = -(2k+1) \cdot 180^\circ$$

由传递函数的表达式我们可以得出

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -2.73, \quad p_3 = -1 + j, \quad p_4 = -1 - j。$$

如果 s_a 无限靠近 p_3 , 并且根据复数极点分布的对称性, 可以得出

$$\theta_4 = 90^\circ, \quad \theta_1 = 135^\circ, \quad \theta_2 = 30^\circ$$

可以得出 $\theta_3 = -75^\circ$ 。

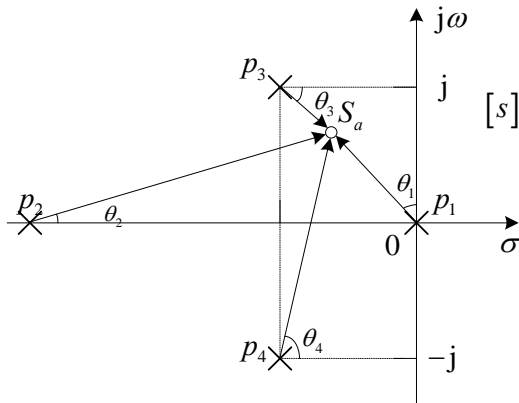


图 4-4 零极点分布图

因为 s_a 无限靠近 p_3 , 所以除了 p_3 点之外, 其他开环零点和极点到 s_a 点向量的相角都可用它们到点 p_3 的相角来代替, 而 p_3 点到 s_a 的相角即是起始角。所以 θ_3 可以看作 p_3 的起始角。

根据上面的计算我们可以得出规则七。

规则七 根轨迹的起始角可由下式计算

$$\theta_{pl} = \pm 180^\circ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \angle(p_l - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \angle(p_l - p_i)$$

根轨迹的终止角可由下式计算

$$\theta_{zl} = \pm 180^\circ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \angle(z_l - z_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \angle(z_l - p_i)$$

根据以上 7 条规则, 就可以大致绘制控制系统平面上的根轨迹。

9. 例题

例 1 已知 $G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$, 试绘制根轨迹。

解 $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$

(1) 根轨迹的分支数等于 3;

(2) 根轨迹的起点分别是 P_1, P_2, P_3 终点是无穷远处。

(3) 实轴上的根轨迹 $(-1, 0)$, $(-\infty, -2)$ 。

(4) 根轨迹的渐近线, 共有 3 条。渐近线在实轴上的交点是 $(-1, j0)$, 渐近线与实轴正方向的夹角分别是 $(30^\circ, 180^\circ, 300^\circ)$ 。

(5) 分离点

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a - p_i} = 0$$

解方程得

$$a_1 = -0.423, a_2 = -1.577$$

当 $a_2 = -1.577$ 时, 带入闭环特征方程

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

可知 $K^* < 1$, 所以 a_2 舍去, 因此分离点为 -0.423 。

(6) 根轨迹与虚轴交点

将 $s = j\omega$ 代入闭环特征方程 $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$

$$\text{得 } (K_1 - 2\omega^2) + j(-\omega^3 + 2\omega) = 0$$

由此得到两个方程: $(K_1 - 2\omega^2) = 0$

$$(-\omega^3 + 2\omega) = 0$$

解方程, ω 取正数, 得 $\omega = \sqrt{2}$, $K_1 = 8$ 。

绘制系统的根轨迹如图 4-5 所示。

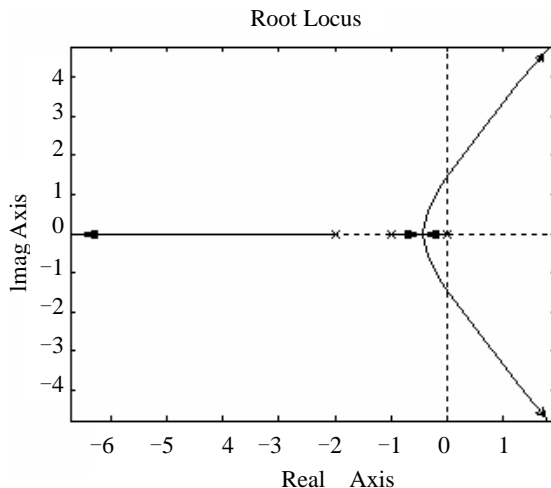


图 4-5 根轨迹图

例 2 闭环系统的特征方程为 $s(s+4)(s^2+4s+20)+K^*=0$, 绘制控制系统的大致根轨迹。

解 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

(1) 开环极点为

$$p_1 = 0, p_2 = -4, p_3 = -2 + j4, p_4 = -2 - j4$$

(2) 实轴上的根轨迹位于 $0 \sim -4$ 之间。

(3) 分离点方程由 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i}$ 得

$$d^3 + 6d^2 + 18d + 20 = 0$$

解得

$$d_1 = -2, d_2 = -2 + j2.45, d_3 = -2 - j2.45$$

(4) 渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{0 - 4 - 2 + j4 - 2 - j4}{4} = -2$$

渐近线与实轴的夹角为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3$$

得 $\varphi_{a1} = 45^\circ$, $\varphi_{a2} = -45^\circ$, $\varphi_{a3} = 135^\circ$, $\varphi_{a4} = -135^\circ$

(5) 与虚轴交点, 将 $s = j\omega$ 代入特征方程,

$$j\omega(j\omega + 4)[(j\omega)^2 + 4j\omega + 20] + K^* = \omega^4 - 36\omega^2 + K^* + j\omega(-8\omega^2 + 80) = 0$$

令上式实部和虚部分别为零, 有

$$\omega^4 - 36\omega^2 + K^* = 0$$

$$\omega(-8\omega^2 + 80) = 0$$

得

$$\omega = \pm\sqrt{10} = \pm 3.16$$

将 $\omega = 3.16$ 代入, 得到 K^* 值

$$K^* = 260$$

系统的根轨迹如图 4-6 所示。

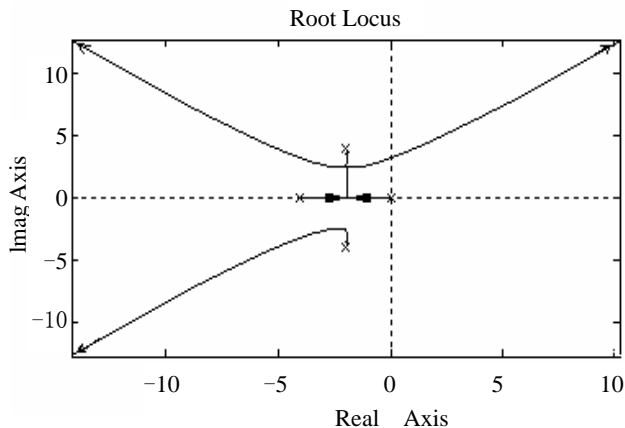


图 4-6 根轨迹图

例 3 已知控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

试绘制系统的根轨迹, 并确定系统稳定时 K 值的范围。

解

(1) 系统的开环极点为 0, 1 和 $-2 \pm j3.46$, 开环零点为 -1。

(2) 确定根轨迹的渐近线

渐近线的倾斜角为

$$\varphi_a = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1) \times 180^\circ}{4-1}$$

取式中的 $l=0,1,2$ ，得 $\varphi_a = \pi/3, \pi, 5\pi/3$ 。

渐进线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left[\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right] = \frac{(0+1-2+j3.46-2-j3.46)-(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

(3) 实轴上的根轨迹位于 1 和 0 之间以及 -1 与 $-\infty$ 之间。

(4) 确定根轨迹的分离点

$$\theta \text{ 由 } \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i}$$

化简可得

$$3d^4 + 10d^3 + 21d^2 + 24d - 16 = 0$$

解之可得，分离点 $d_1 = 0.46$, $d_2 = -2.22$ 。

(5) 确定根轨迹与虚轴的交点

系统的特征方程式为

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K-16)s + K = 0$$

劳斯行列表为

s^4	1	12	K
s^3	3	$K-16$	
s^2	$\frac{52-K}{3}$	K	
s^1	$\frac{-K^2+59K-832150K}{52-K}$	0	
s^0	K		

若阵列中的 s^1 行全等于零，即

$$\frac{-K^2 + 59K - 832150K}{52 - K} = 0$$

系统临界稳定。解之可得 $K = 35.7, K = 23.3$ 。对应于 K 值的频率由辅助方程

$$\frac{52-K}{3}s^2 + K = 0$$

确定。当 $K = 35.7$ 时， $s = \pm j2.56$ ；当 $K = 23.3$ ， $s = \pm j1.56$ 。

根轨迹与虚轴的交点处的频率为 $\omega = 2.56, \omega = 1.56$ 。

(6) 确定根轨迹的出射角（自复数极点 $-2 + j3.46$ 出发的起始角）

根据绘制根轨迹基本法则，有

$$106^\circ - 120^\circ - 130.5^\circ - 90^\circ - \theta = \pm(2k+1) \times 180^\circ$$

因此, 开环极点 $-2 \pm j3.46$ 的出射角为 $\theta_{1,2} = \pm 54.5^\circ$ 。系统的根轨迹如图 4-7 所示。

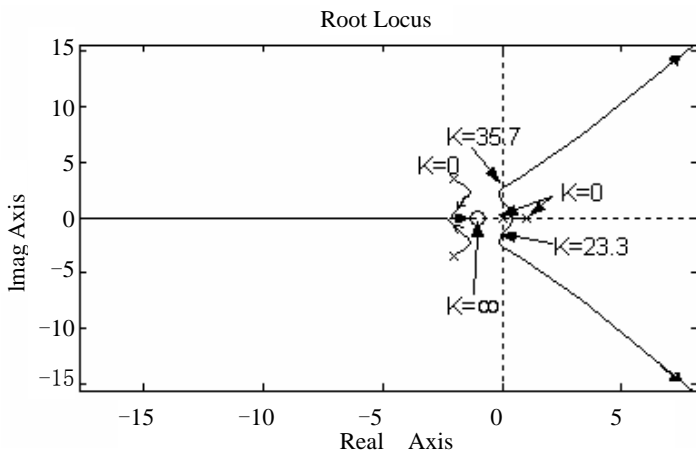


图 4-7 系统根轨迹

例 4 设控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{3K(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试绘制系统的根轨迹。

解

(1) 系统的开环极点为 0, -3, $(-1+j)$ 和 $(-1-j)$, 它们是根轨迹上各分支的起点。共有四条根轨迹分支。有一条根轨迹分支终止在有限开环零点 -2, 其他三条根轨迹分支将趋向于无穷远处。

(2) 确定根轨迹的渐近线

渐近线的倾斜角为

$$\varphi_a = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1) \times 180^\circ}{3-0}$$

取式中的 $l=0,1,2$, 得 $\varphi_a = \pi/3, \pi, 5\pi/3$, 或 $\pm 60^\circ, 180^\circ$ 。

三条渐近线如图 4-14 中的虚线所示。

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left[\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right] = \frac{(0-3-1+j-1-j)-(-2)}{4-1} = -1$$

(3) 实轴上的根轨迹位于原点与零点 -2 之间以及极点 -3 的左边, 如图 4-8 中所示。

从复数极点 $(-1 \pm j)$ 出发的两条根轨迹分支沿 $\pm 60^\circ$ 渐近线趋向无穷远处。

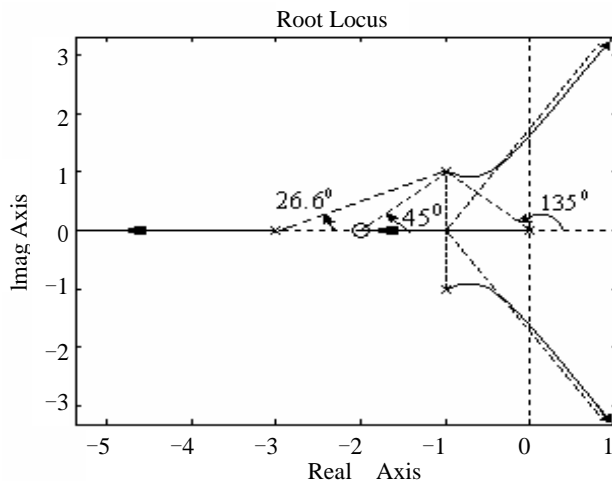


图 4-8 系统根轨迹

(4) 在实轴上无根轨迹的分离点。

(5) 确定根轨迹与虚轴的交点

系统的特征方程式为

$$s(s+3)(s^2+2s+2)+3K(s+2)=0$$

即

$$s^4+5s^3+8s^2+(6+3K)s+6K=0$$

劳斯行列表

s^4	1	8	$6K$
s^3	5	$6+3K$	
s^2	$\frac{40-(6+3K)}{5}$	$6K$	
s^1	$6+3K-\frac{150K}{34-3K}$	0	
s^0	6		

若阵列中的 s^1 行等于零, 即 $(6+3K)-150K/(34-3K)=0$, 系统临界稳定。解之可得 $K=2.34$ 。相应于 $K=2.34$ 的频率由辅助方程

$$[40-(6+3 \times 2.34)]s^2+30 \times 2.34=0$$

确定。解之得根轨迹与虚轴的交点为 $s = \pm j6.14$ 。根轨迹与虚轴交点处 $\omega = 1.614$ 。

(6) 确定根轨迹的起始角

根据绘制根轨迹的基本规则，自复数极点 $p_1 = -1 + j$ 出发的根轨迹的出射角为

$$\theta = 180^\circ (2k + 1) + \angle(p_1 + 2) - \angle p_1 - \angle(p_1 + 3) - \angle(p_1 + 1 - j)$$

取 $k = 0$ ，则得到 $\theta = -26.6^\circ$ 系统的根轨迹如图 4-8 所示。

4.3 控制系统根轨迹分析

自动控制系统闭环极点确定系统的稳定性，控制系统动态性能与系统的闭环极点和零点在 s 平面上的分布有关。因此确定控制系统闭环极点和零点在 s 平面上的分布，是对控制系统进行分析之前首先要解决的问题。根轨迹法是在已知系统的开环传递函数零、极点分布的基础上，研究某一个和某些参数的变化对系统闭环极点分布影响的一种图解方法。由于根轨迹图直观、完整地反映系统特征方程的根在 s 平面上分布的大致情况，通过一些简单的作图和计算，就可以看到系统参数的变化对系统闭环极点的影响趋势。这对分析研究控制系统的性能和提出改善系统性能的合理途径都具有重要意义。下面通过示例简要介绍用根轨迹分析控制系统的方法。

例 5 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{k^*}{s(s+2)}$ ，试用跟轨迹方法分析系统的动态性能。

解 首先绘制系统的根轨迹

系统的开环极点： $p_1 = 0$ ， $p_2 = -2$ 系统有两条根轨迹。

根轨迹起始于 $p_1 = 0$ ， $p_2 = -2$ ，终止于无穷远处。

实轴上的根轨迹 $(-2, 0)$ 一段。根轨迹的分离点： $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = 1$ ，解得 $d = -1 + \sqrt{2}$

根轨迹的渐近线在实轴上的交点坐标为 $(-1, j0)$ ，渐近线与实轴正方向的夹角为 $90^\circ, -90^\circ$ 根轨迹与虚轴的交点： $k^* = 0$ ， $\omega = 0$ 。

根轨迹的起始角，终止角为零度和 180° 。

绘制系统的根轨迹如图 4-9 所示。

按根轨迹分析， k^* 为任意值时，系统都是稳定的。 $0 < k^* < 1$ ，系统具有两个不相等的复实根，当 $k^* = 1$ 时，系统具有两个相等的实根。当 $1 < k^* < +\infty$ 时，系统的动态响应是振荡的。

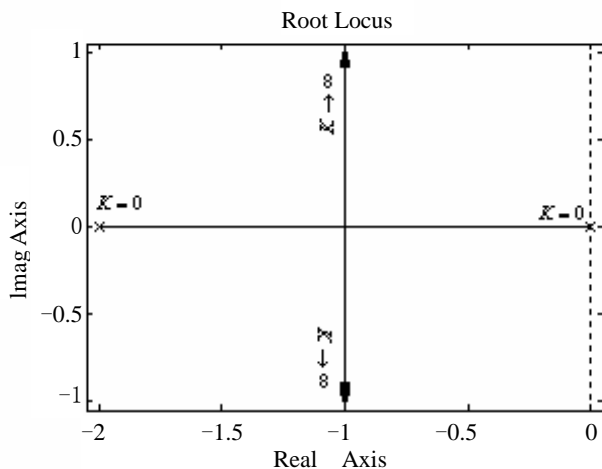


图 4-9 系统根轨迹

当 $k^* = 10$ 时, $s_{1,2} = -1 \pm j3$, $\omega_n = 3.16$

由此求得阻尼比为 $\zeta = \cos \theta = \frac{1}{3.16} = 0.316$

这样就可以求得系统的性能指标如下:

$$\text{超调量 } \varphi_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 35\%$$

$$\text{上升时间 } t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.63\text{s}$$

$$\text{峰值时间 } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 1.05\text{s}$$

$$\text{过渡过程时间 } t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} = 3\text{s}$$

例 6 已知负反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{k^*(s+1)}{s(s+1)(s^2+4s+16)}$, 用根轨迹分析系统的动态性能。

解

首先绘制系统的根轨迹

系统的开环极点: $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_{3,4} = -2 \pm j2\sqrt{3}$; 开环零点 $z_1 = -1$ 。

根轨迹有四条分支数。

根轨迹起始于 $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_{3,4} = -2 \pm j2\sqrt{3}$, 终止于 $z_1 = -1$ 已无穷远处。

根轨迹的渐近线有 3 条, 渐近线与实轴正方向的夹角 60° , 180° , -60° , 与实轴的交点坐标为 $\left(-\frac{2}{3}, j0\right)$ 。

实轴上的根轨迹区间为 $(0, 1) \cup (-\infty, -1)$

根轨迹的分离点

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} + \frac{1}{d+2+j2\sqrt{3}} + \frac{1}{d+2-j2\sqrt{3}} = \frac{1}{d}$$

如果我们此时展开上式将得到四阶方程, 难以求解。所以在这里介绍一下闭环主导极点的概念。离虚轴最近的闭环极点对系统的动态过程的性能影响最大, 起着决定的主导作用, 称之为**主导极点**。通常, 若主导极点离虚轴的距离比其他极点离虚轴距离的 1/5 还小, 而且附近又没有闭环零点存在, 则其他极点可以忽略。在工程计算中, 采用主导极点代替系统的全部闭环极点来估算系统性能指标的方法称为**主导极点法**。

根据判断, 分离点将在 $(0, 1)$ 和 Z_1 附近, 相比之下 d 距 p_3, p_4 较远, 所以 $\frac{1}{d+3}, \frac{1}{d+4}$ 较小, 忽略不计, 那么求分离点的近似方程为

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} = \frac{1}{d+1}$$

$$d^2 + 2d - 1 = 0$$

$$d_1 = 0.414, \quad d_2 = -2.414$$

起始角: $\theta_{p_3} = -54.5^\circ$, $\theta_{p_4} = 54.5^\circ$ 。

根轨迹与虚轴交点: $\omega_{1,2} = \pm 1.56(k^* = 23.3)$, $\omega_{3,4} = \pm 2.56(k^* = 35.7)$ 。

所得的根轨迹如图 4-10 所示。

系统动态分析: 此系统是条件稳定的系统, 当 $23.3 < k^* < 35.7$ 时, 四条根轨迹都位于 s 平面的左侧, 系统稳定。 k^* 在其他的范围内, 系统不稳定。

通过上面两个例题, 可将用根轨迹法分析系统性能的步骤归纳如下:

(1) 根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则绘制系统的根轨迹图;

(2) 由根轨迹在复平面上的分布分析系统的稳定性。若所有的根轨迹分支都位于 s 平面的左半部, 则说明无论系统的开环增益 (或根轨迹增益) 取何值, 系统始终都是稳定的; 若有一条 (或一条以上的) 根轨迹始终位于 s 平面的右半部, 则系统是不稳定的; 若当开环增益在某一范围取值, 系统的根轨迹都在 s 平面左半部, 而当开环增益在另一范围取值时, 有根轨迹分支进入 s 平面右半部, 则系统为有条件稳定系统, 系统根轨迹穿过虚轴, 由左半 s 平面进入右半 s 平面所对应的 K^* 值, 称为**临界稳定的根轨迹增益** K_c^* 。

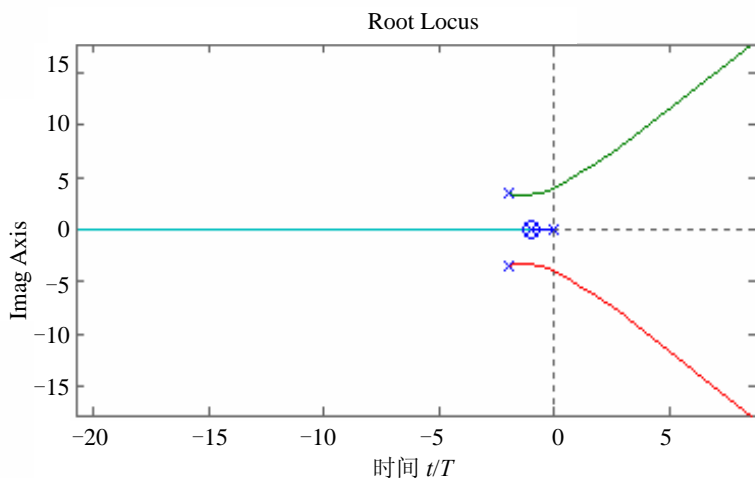


图 4-10 根轨迹图

(3) 根据对系统的要求和系统的根轨迹图分析系统的瞬态性能, 对于低阶系统, 可以很容易地在根轨迹上确定对应参数的闭环极点, 对于高阶系统, 通常是用简单的作图法求出系统的主导极点 (若存在主导极点), 然后将高阶系统简化为由主导极点 (通常是一对共轭复数极点) 决定的二阶系统, 来分析系统的性能。

例 7 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s^2(s+a)}, \quad (a > 0)$$

试用根轨迹法分析系统的稳定性, 如果使系统增加一个开环零点, 试分析附加开环零点对根轨迹的影响。

解

(1) 系统的根轨迹如图 4-11(a)所示。由于根轨迹全部位于 s 平面的右半部, 所以该系统无论 K^* 取何值, 系统都是不稳定的。

(2) 如果给原系统增加一个负开环实零点 $z = -b$, $b > 0$, 则开环传递函数为

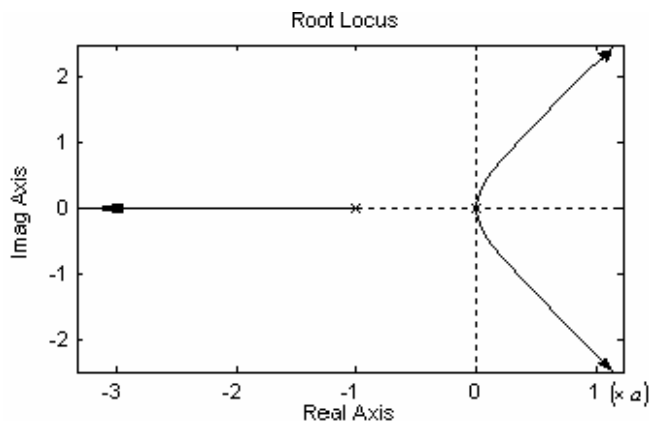
$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+b)}{s^2(s+a)}$$

当 $b < a$ 时, 根轨迹的渐近线与实轴的交点为 $-\frac{a-b}{2} < 0$, 它们与实轴正方向的夹角分别为 $90^\circ, -90^\circ$, 三条根轨迹均在 s 平面左半部, 如图 4-11(b)所示。这时, 无论 K^* 取何值, 系统始终都是稳定的。

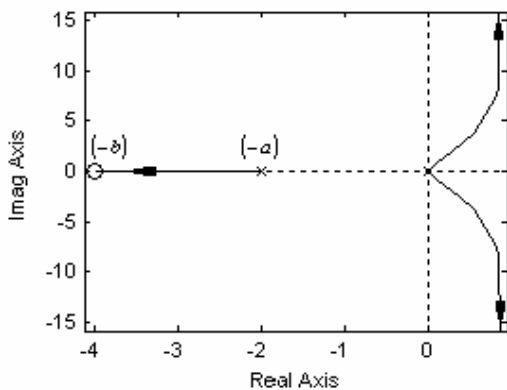
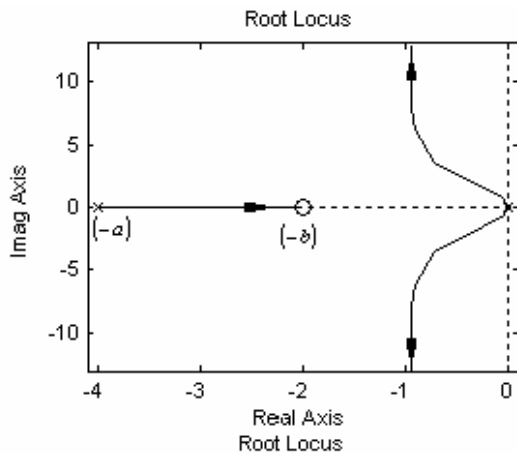
当 $b > a$ 时, 根轨迹的渐近线与实轴的交点为 $-\frac{a-b}{2} > 0$, 根轨迹如图 4-11 (c) 所示, 与原系统相比, 虽然根轨迹的形状发生了变化, 但仍有两条根轨迹位于 s 平面的右半部, 系统仍不稳定。

当 $b = a$ 时, 根轨迹的渐近线与实轴的交点为零, 根轨迹位于虚轴上, 以及 $(-a, 0)$ 一段, 如果把零点、极点对消, 则实轴上的根轨迹将不存在。

由以上例子可知, 选择合适的开环零点, 可使原来不稳定的系统变为稳定的。但是如果选择不当, 对系统的性能不会有改进。当开环传递函数中有零极点相消时, 由此求出的根轨迹并不能反映系统所有的闭环极点, 消去的开环极点也是闭环极点, 应该将其增加进去。因为在消去的开环零极点处, 有一支根轨迹的起点与终点重合, 且根轨迹的变化与 K^* 值无关。



(a)



(b)

(c)

图 4-11 系统根轨迹

4.4 设计实例

——激光操纵控制系统

激光技术在现代社会得到广泛的应用，比如说将激光应用于外科手术中。而此时，就要求激光操纵系统必须有高度精确的位置和速度响应。考虑如图 4-12 所示的系统，用直流电机来操纵激光。本例中，通过调整增益 K ，使系统响应斜坡输入 $r(t) = At$ ($A = 1\text{mm/s}$) 的稳态误差小于 0.1mm 。

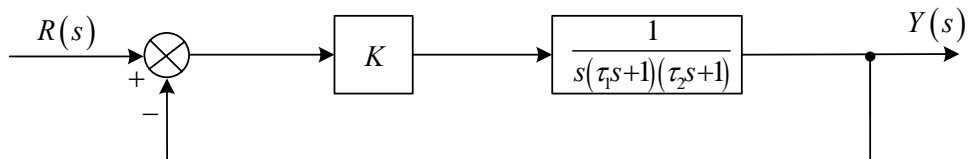


图 4-12 激光操纵控制器

为获得所要求的稳态误差和瞬态响应，电机参数选为：励磁磁场时间常数 $\tau_1 = 0.1\text{s}$ ，电机和载荷组合的时间常数 $\tau_2 = 0.2\text{s}$ 。于是有：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{KG_1(s)}{1 + KG_1(s)} = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + K} \\ &= \frac{K}{0.02s^3 + 0.3s^2 + s + K} = \frac{50K}{s^3 + 15s^2 + 50s + 50K} \end{aligned}$$

系统响应斜坡输入信号 $R(s) = A/s^2$ 的稳态误差为：

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{A}{K}$$

要求 $e_{ss} \leq 0.1\text{mm}$ ， $A = 1\text{mm/s}$ ，因此 $K \geq 10$ 。

为保证系统稳定，根据系统的特征方程

$$s^3 + 15s^2 + 50s + 50K = 0$$

可得对应的劳斯判定表为

s^3	1	50
s^2	15	50K
s^1	$\frac{750 - 50K}{15}$	0
s^0	50K	

于是系统稳定条件是： $0 \leq K \leq 15$ 。

由此，选取 $K = 10$ ，即能满足稳态误差要求，又能使系统稳定。考察 $K > 0$ 时的根轨迹，得到如图 4-13 所示的结果。图中，共有 3 条根轨迹，渐进中心为 $\sigma = -5$ ，分离点为 $s = -2.11$ 。与 $K = 10$ 对应的闭环特征根为 $r_{1,2} = -0.5 \pm j5.96$ ， $r_3 = -13.98$ 。可以认为此复数根为主导极点。

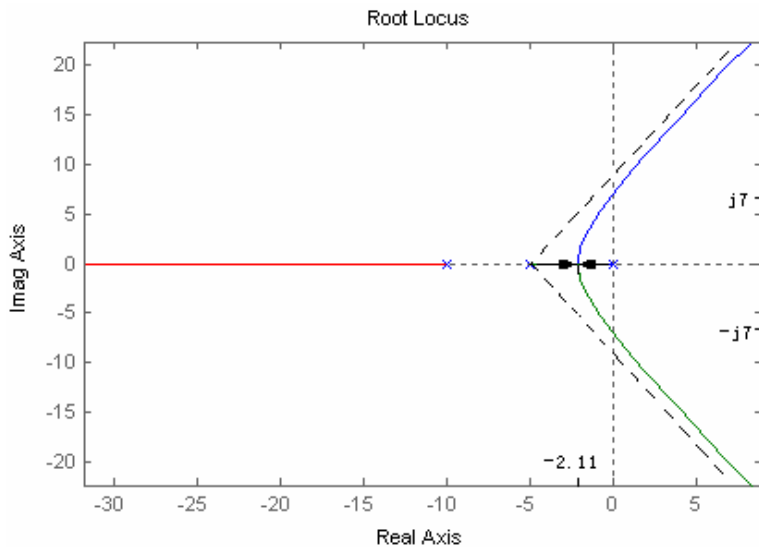


图 4-13 激光控制系统的根轨迹

由 $\tan\zeta = \frac{0.5}{5.96}$ ，得 $\zeta = 0.085$

因为

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

得

$$t_s \approx \frac{4}{0.5} = 8s$$

因为

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

得

$$\sigma_p = 76\%$$

由此得到的系统，其主导极点为一对共轭复数，其在单位阶跃输入的作用下必然是高度振荡的。通过给定单位阶跃信号可以很清楚地看到这一点。如图 4-14 所示，所以在实际的应用中，必须采用低速斜坡信号作为给定信号。系统对单位斜坡信号的响应如图 4-15 所示。

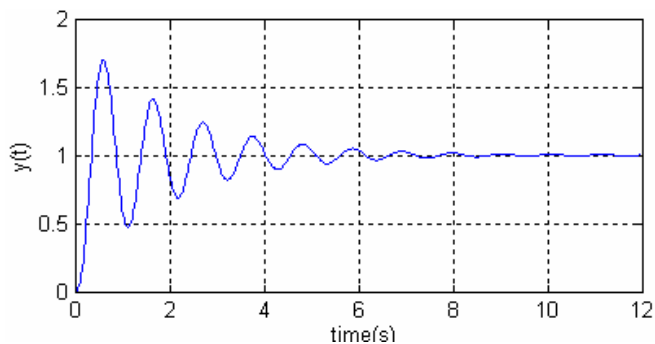


图 4-14 系统对单位阶跃信号的响应

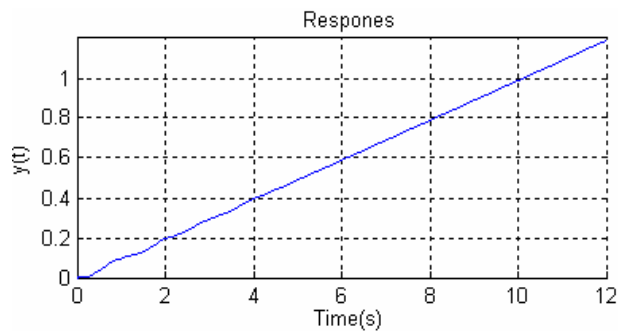


图 4-15 系统对单位斜坡信号的响应

4.5 习 题

1. 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$ ，试绘制闭环控制系统的根轨迹。
2. 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s^2+6s+13)}$ ，试概略绘制系统的根轨迹。
3. 单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(1-s)}{s(s+2)}$ ， K 的变化范围为 $0 \sim +\infty$ ，试绘制系统的根轨迹。

4. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$, 试从数学上证明复数根轨迹部分是以 $(-2, j0)$

为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的一个圆。

5. 设反馈控制系统中

$$G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}, \quad H(s) = 1$$

绘制系统的概略根轨迹, 并判断系统的稳定性。

6. 已知单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{as}{s^2 + as + 16} \quad a > 0$$

要求:

- (1) 绘制闭环系统的根轨迹
- (2) 判断 $(-\sqrt{3}, j)$ 点是否在根轨迹上;
- (3) 由根轨迹求出使闭环系统阻尼比 $\varepsilon = 0.5$ 时的 a 值。

7. 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{s^2(0.2s+1)^2}$$

画出 K 从 $0 \sim \infty$ 变化时闭环系统的根轨迹, 并确定闭环系统稳定时 K 的取值范围。

8. 设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)}$$

- (1) 画出系统的根轨迹。
- (2) 当 $K = 10$ 时, 求出系统的超调量和过渡过程时间。

第5章 频域分析

本章介绍线性系统的频域分析方法。该方法与时域分析法和根轨迹分析法不同，它不是通过系统的闭环极点和闭环零点来分析系统的时域性能，而是通过控制系统对正弦函数的稳态响应来分析系统性能的。虽然频率特性是系统对正弦函数的稳态响应，但它不仅能反映系统的稳态性能，也可用来研究系统的稳定性和动态性能。它以控制系统的频率特性作为数学模型，以 Bode 图作为主要分析工具来研究、分析控制系统的动态性能与稳态性能。

本章将介绍频率特性的基本概念、频率特性的图形表示、奈奎斯特稳定判据、系统的相对稳定性。

5.1 频率特性

5.1.1 频率特性的基本概念

下面以一个简单的 RC 网络为例，说明频率特性的概念。如图 5-1 所示的电路，其微分方程为

$$RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$$

令 $RC = T$ ，网络的传递函数为

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{1}{Ts + 1}$$

若在网络输入正弦电压，即 $u_i = A \sin \omega t$ ，则上式有

$$u_o(s) = \frac{1}{Ts + 1} u_i(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

经反拉氏变换，得到电容两端的电压为

$$u_o = \frac{A\omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega T)$$

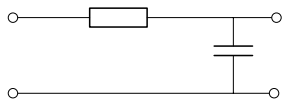
式中，第一项为瞬态分量，第二项为稳态分量，当时间趋于无穷时，第一项趋于零，所以有：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega T - \arctg \omega T) \quad (5-1)$$

由式(5-1)可知,网络的稳态输出仍然是与输入电压同频率的正弦电压,输出电压的幅值是输入电压的 $\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ 倍,相角比输入迟后了 $\arctg \omega T$ 弧度。 $\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ 称为 RC 网络的幅频特性,而把 $\arctg \omega T$ 称作相频特性。显然,它们都是频率 ω 的函数。函数 $\frac{1}{1 + j\omega T}$ 可表示为

$$\frac{1}{1 + j\omega T} = \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| e^{j\angle\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j\arctg \omega T}$$

它能完整地描述 RC 网络在正弦函数作用下,稳态输出电压的幅值和相角随输入电压频率 ω 变化的情况,因此,将 $\frac{1}{1 + j\omega T}$ 称作网络的频率特性。对于任何线性定常系统,都可得到类似的结论。

图 5-1 RC 网络

对于稳定的线性定常系统,在正弦信号的作用下,系统输出的稳态分量为和输入同频率的正弦函数,其振幅与输入正弦信号的振幅之比 $A(\omega)$ 称为幅频特性,它反映了系统在不同频率的正弦信号作用下,稳态输出的幅值与输入信号幅值之比;其相位与输入正弦信号的相位之差 $\varphi(\omega)$ 称为相频特性,它反映了系统在不同频率的正弦信号作用下,输出信号相对输入信号的相移。系统的幅频特性和相频特性统称为系统的频率特性,如图 5-2 所示。

频率特性可表示为:

$$G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

写成复数形式为:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

其中

$$P(\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$$

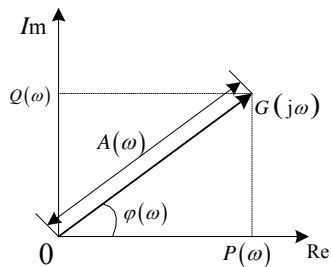


图 5-2 频率特性示意图

$$Q(\omega) = \operatorname{Im}[G(j\omega)] = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

5.1.2 频率特性与传递函数的关系

不过从概念上看, 系统的传递函数和频率特性函数还是有一定区别的。严格地说, 系统传递函数的自变量 $s = \sigma + j\omega$, 其中 σ 和 ω 都是实数; 事实上, 频率特性函数就相当于传递函数的自变量 s 直沿复数坐标平面的虚轴变化。正因为如此, 传递函数和频率特性函数习惯上总是用同一字母 G 表示。

设系统的传递函数为 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$, 则系统的频率特性与传递函数有如下的关系:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

这表明频率响应法和利用传递函数的时域法在数学上是等价的。

对于稳定的系统, 可以由实验的方法确定系统的频率特性, 即在系统的输入端作用不同频率的正弦信号, 在输出端测得相应的稳态输出的幅值和相角, 根据幅值比和相位差, 就可得到系统的频率特性。这是频率特性显著的优点之一。同时, 频率响应法的优点之二在于它可以用图形来表示。

5.1.3 频率特性图形表示

在实际应用中, 常常把频率特性画成曲线, 根据这些频率特性曲线对系统进行分析和设计。常用的曲线有幅相频率特性曲线和对数频率特性曲线。下面分别介绍这些曲线的绘制方法。

1. 幅相频率特性曲线

绘制幅相频率特性曲线时, 把 ω 看作参变量, 令 ω 由 0 变到 ∞ 时, 在复平面上绘制 $G(j\omega)$ 的端轨迹, 即得 $G(j\omega)$ 幅相频率特性曲线。向量的长度表示 $G(j\omega)$ 的幅值 $|G(j\omega)|$, 由正实轴方向沿反时针方向绕原点转到向量方向的角度称为**相位角**, 即 $\angle G(j\omega)$ 。

2. 对数频率特性曲线

对数频率特性曲线又称**对数坐标图**或**波特 (Bode) 图**, 包括对数幅频和对数相频两条曲线。在实际应用中, 经常采用这种曲线来表示系统的频率特性。

对数幅频特性曲线的横坐标是频率 ω ，按对数分度，单位是[rad/s]。纵坐标表示对数幅频特性的函数值，采用线性分度，单位是[dB]。对数幅频特性用 $L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|$ 表示。

对数相频特性曲线的横坐标也是频率 ω ，按对数分度，单位是[rad/s]。纵坐标表示相频特性的函数值，记作 $\varphi(\omega)$ ，单位是度。采用对数分度的横轴如图 5-3 所示。

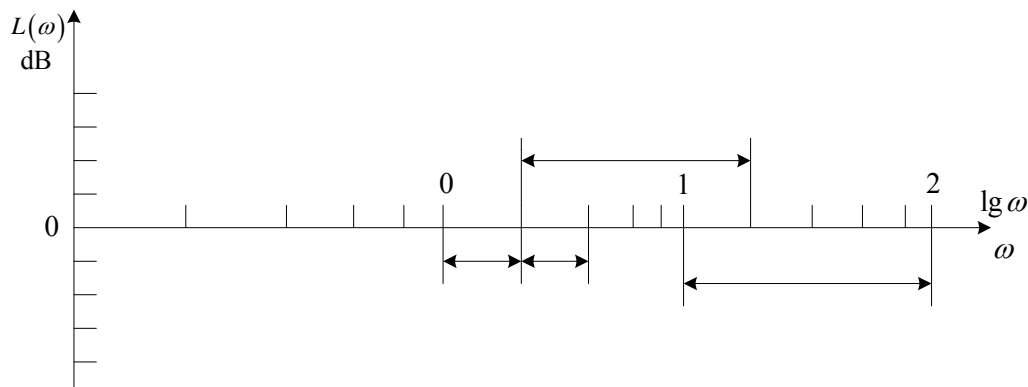


图 5-3 对数分度

对数相频特性曲线横坐标用对数分度，能在极宽的频率范围内同时表示系统的低频特性与高频特性。但应注意，零频率即 $\omega = 0$ ，不能在横坐标上表示出来。横坐标表示的最低频率一般由需要的频率来确定。

5.2 典型环节的频率特性

通常，控制系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的分子和分母多项式都可以分解成若干个因子相乘的形式，这些常见的形式称为**典型环节**。根据这些典型环节的频率特性曲线可以很容易得到系统的频率特性曲线。

5.2.1 比例环节

传递函数为

$$G(s) = K$$

频率特性为

$$G(j\omega) = K$$

40

20

1. 幅相频率特性曲线

幅频特性为

$$A(\omega) = K$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$

其极坐标图如图 5-4 所示。

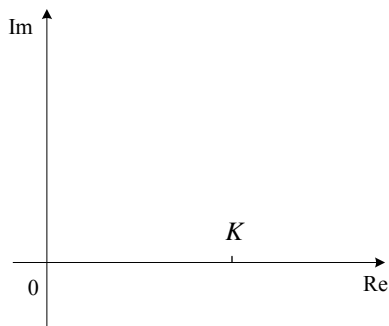


图 5-4 比例环节的极坐标图

2. 对数频率特性曲线

对数幅频特性表达式为

$$L(\omega) = 20 \lg K$$

对数相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$

其波特图如图 5-5 所示。

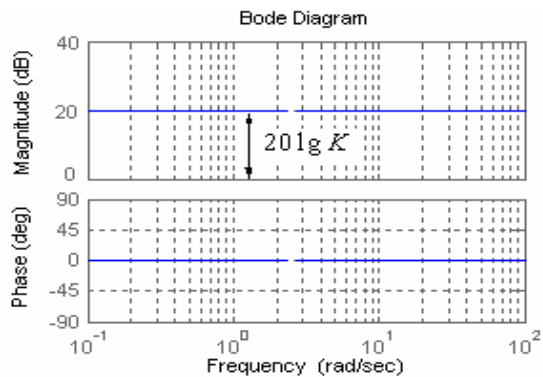


图 5-5 比例环节的波特图

5.2.2 积分环节

传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

1. 幅相频率特性曲线

幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$

其极坐标图如图 5-6 所示。

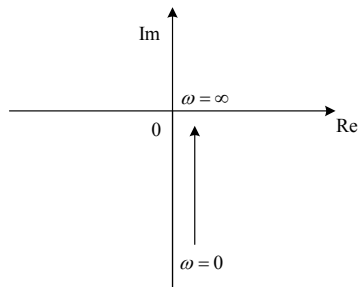


图 5-6 积分环节的极坐标图

2. 对数频率特性曲线

对数幅频特性表达式为

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \omega$$

对数相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$

其波特图如图 5-7 所示。

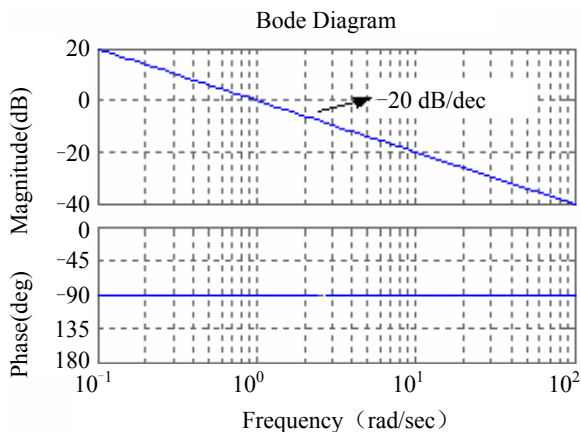


图 5-7 积分环节的波特图

5.2.3 微分环节

传递函数为

$$G(s) = s$$

频率特性为

$$G(j\omega) = j\omega$$

1. 幅相频率特性曲线

幅频特性为

$$A(\omega) = \omega$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = 90^\circ$$

其极坐标图如图 5-8 所示。

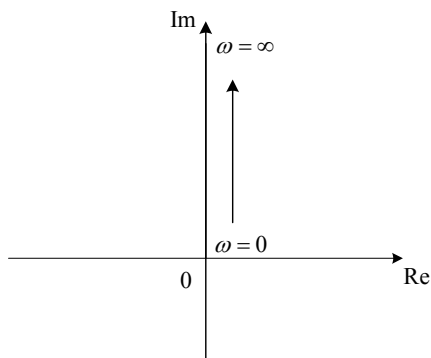


图 5-8 微分环节的极坐标图

2. 对数频率特性曲线

对数幅频特性表达式为

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \omega$$

对数相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = 90^\circ$$

其波特图如图 5-9 所示。

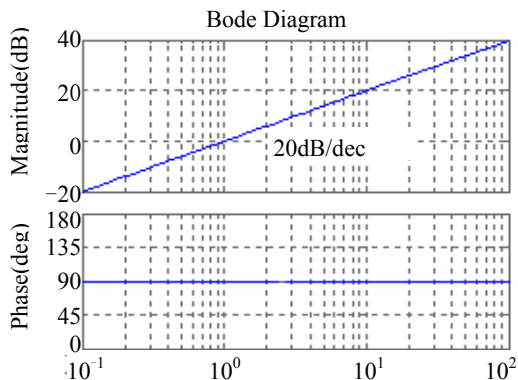


图 5-9 微分环节的波特图

5.2.4 惯性环节

传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

1. 幅相频率特性曲线

将其表达式写成实部与虚部的和的形式，得

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

写成幅相表达式为

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\arctg \omega T$$

幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

所以

$$A(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = 1, \quad A(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

所以

$$\varphi(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = 0^\circ, \quad \varphi(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -90^\circ$$

其极坐标图如图 5-10 所示。

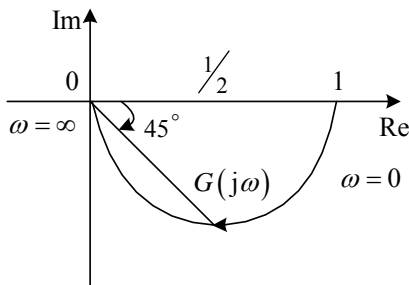


图 5-10 惯性环节的极坐标图

2. 对数频率特性曲线

对数幅频特性表达式为

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

当 ω 由零至无穷大时, 直接计算出其相应的对数值比较困难, 通常采用如下方法进行:

(1) 当 $\omega \ll 1/T$ 时, 对数幅频特性可近似为

$$L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 0, \quad \text{即频率很低时, 约为零分贝。}$$

(2) 当 $\omega \gg 1/T$ 时, 对数幅频特性可近似为

$L(\omega) \approx -20 \lg \omega T$, 即频率很高时, 近似为一条直线, 直线斜率为 -20 dB/dec , 与零分贝线交于 $\omega T = 1$ 。

此两部分直线交于 $\omega T = 1$ 或 $\omega = 1/T$ 处, 并将 $\omega = 1/T$ 称为惯性环节的转折频率或交接频率。可以证明, 采用此法所得的频率特性曲线的最大误差为 -3 dB , 且为交接频率处, 一般可以根据渐近线进行修正得到。

对数相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

所以, $\varphi(\omega)|_{\omega=0} = 0^\circ$, $\varphi(\omega)|_{\omega=1/T} = -45^\circ$, $\varphi(\omega)|_{\omega=\infty} = -90^\circ$, 根据这三点的值可以近似得到对数相频特性曲线。由此得到其波特图如图 5-11 所示。

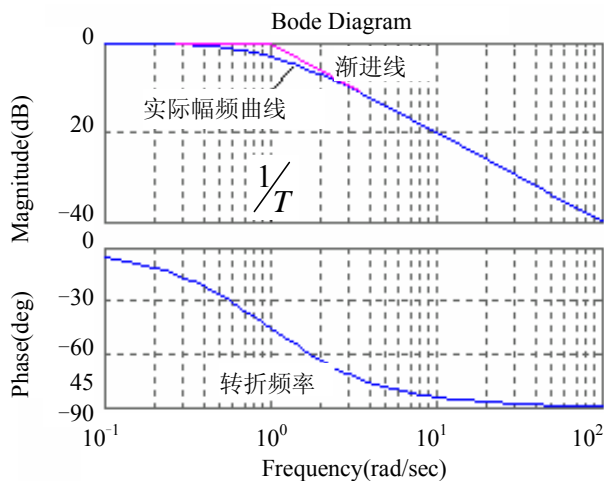


图 5-11 惯性环节的波特图

5.2.5 一阶微分环节

传递函数为

$$G(s) = 1 + Ts$$

频率特性为

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

1. 幅相频率特性曲线

幅频特性为

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T$$

其极坐标图如图 5-12 所示。

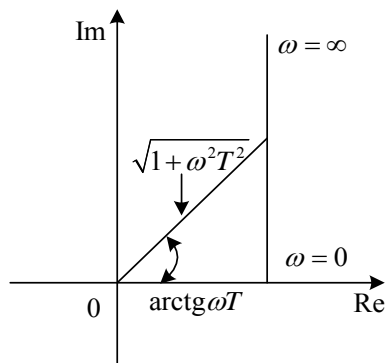


图 5-12 一阶微分环节的极坐标图

2. 对数频率特性曲线

对数幅频特性表达式为

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

对数相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T$$

从表达式上很容易看出，一阶微分环节和惯性环节的对数幅相频率特性对称，根据一阶微分环节很容易得到惯性环节的对数幅相频率特性曲线图。由此得到其波特图如图 5-13 所示。

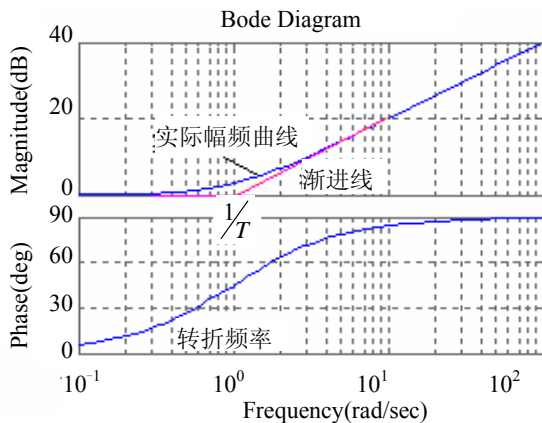


图 5-13 一阶微分环节的波特图

5.2.6 振荡环节

传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

1. 幅相频率特性曲线

幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

得

$$A(\omega)|_{\omega=0} = 1, \quad A(\omega)|_{\omega=\omega_n} = 1/(2\xi), \quad A(\omega)|_{\omega=\infty} = 0$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

得

$$\begin{aligned}\varphi(\omega)|_{\omega=0} &= 0^\circ \\ \varphi(\omega)|_{\omega=\omega_n} &= -90^\circ \\ \varphi(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} &= -180^\circ\end{aligned}$$

其极坐标图如图 5-14 所示。

从图中可以看出, 频率特性的最大值随 ξ 减小而增大, 其值可能大于 1。可以求得在系统参数所对应的条件下, 在某一频率 $\omega = \omega_r$ (谐振频率) 处, 振荡环节会产生谐振峰值 M_r 。

在谐振峰值处, 有

$$\left. \frac{d}{d\omega} A(\omega) \right|_{\omega=\omega_r} = 0$$

由此可得谐振频率为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

代入幅值表达式, 得到其谐振峰值为

$$M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

可以看出:

- (1) $\xi > 0.707$ 时, 没有峰值, $A(\omega)$ 单调衰减;
- (2) $\xi = 0.707$ 时, $M_r = 1$, $\omega_r = 0$, 为幅频特性曲线的初始点;
- (3) $\xi < 0.707$ 时, $M_r > 1$, $\omega_r > 0$, $A(\omega)$ 出现峰值。 ξ 越小, 峰值 M_r 及谐振频率 ω_r 越高;
- (4) $\xi = 0$ 时, 峰值 M_r 趋于无穷, 谐振频率 ω_r 趋于 ω_n 。这表明外加正弦信号的频率和自然振荡频率相同, 引起环节的共振。环节处于临界稳定的状态。

2. 对数频率特性曲线

对数幅频特性表达式为

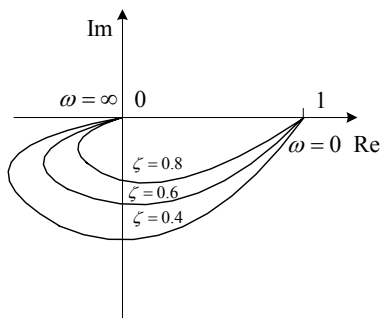


图 5-14 振荡环节的极坐标图

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

当 $\omega \ll \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx 0$;

当 $\omega \gg \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \lg \frac{\omega}{\omega_n}$ 。

斜率为 -40dB/dec 的直线, 和零分贝线交于 $\omega = \omega_n$ 。其对数频率特性如图 5-15 所示。对数相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

得

$$\varphi(\omega)|_{\omega=0} = 0^\circ, \quad \varphi(\omega)|_{\omega=\omega_n} = -90^\circ, \quad \varphi(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -180^\circ。$$

由此可得振荡环节的波特图如图 5-15 所示。

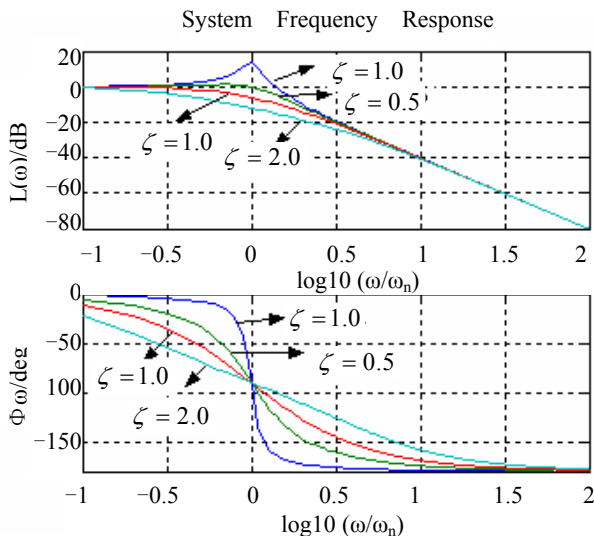


图 5-15 振荡环节的波特图

5.2.7 二阶微分环节

传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

频率特性为

$$G(s) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$$

由此可以看出，二阶微分环节与振荡环节的传递函数互为倒数，因此，其波特图可以由振荡环节的波特图翻转得到。

5.2.8 延迟环节

传递函数为

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

频率特性为

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

幅频特性为

$$A(\omega) = |e^{-j\omega\tau}| = 1$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau (\text{rad}) = -57.3\omega\tau (^\circ)$$

由此得到其极坐标图如图 5-16，波特图如图 5-17 所示。

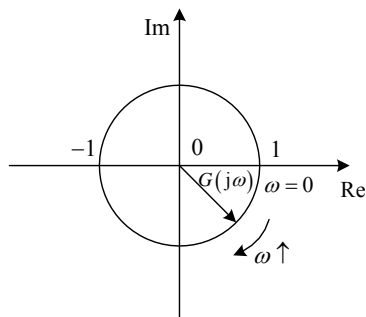


图 5-16 延迟环节的极坐标图

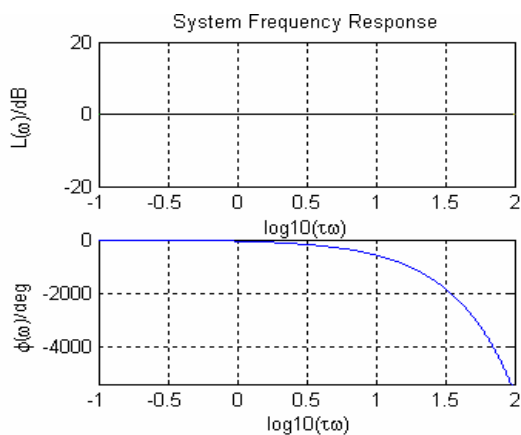


图 5-17 延迟环节的波特图

5.3 系统开环频率特性

在实际应用中,常常把频率特性画成曲线,掌握了典型环节的频率特性曲线的画法,可以很方便地绘制开环系统的开环极坐标图和对数频率特性曲线(Bode图),进而利用这些图形对所研究的系统进行分析。常用的曲线有幅相频率特性曲线和对数频率特性曲线。由于波特图在系统的分析中非常有用,本节重点介绍系统开环对数频率特性曲线的画法。幅相曲线主要用于判定闭环系统的稳定,故只需概略地绘制,而对于对数频率特性曲线,工程上采用简便作图法,即利用对数运算的特点和典型环节的频率特性绘制系统开环对数幅频渐进特性。

5.3.1 系统开环幅相频率特性

1. 定义

对于单位负反馈系统,其开环传递函数 $G(s)$ 为回路中各串联环节传递函数之积,即

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega) = \prod_{i=1}^n G_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n M_i(\omega) e^{j\sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)}$$

得其开环幅频特性为

$$M(\omega) = \prod_{i=1}^n M_i(\omega)$$

开环相频特性为

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)$$

从上面两个式子可以看出:系统的开环幅频特性等于各串联环节的幅频特性之积;系统的开环相频特性等于各串联环节的相频特性之和。

2. 绘制步骤

在绘制开环幅相频率特性时,根据特殊的 ω 值,计算得到系统在该点的坐标值,将各点连成曲线,即为该系统的开环幅相频率特性曲线。绘制概略开环幅相曲线,根据稳定性判别的条件,幅相曲线应能体现系统开环频率特性的起点、终点、与负实轴的交点以及总的变化趋势。绘制步骤如下:

(1) 开环传递函数按典型环节分解

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^V} \prod_{i=1}^l G_i(s)$$

其中 K 为系统的开环增益, V 为系统所含积分环节 ($V > 0$) 或微分环节 ($V < 0$) 的个数, $G_i(s)$ ($i=1, \dots, l$) 为其他典型环节。

(2) 确定幅相曲线的起点和终点。幅相曲线的起点为 $G(j0^+)H(j0^+)$, 终点为 $G(j\infty)H(j\infty)$ 。

(3) 确定幅相曲线与负实轴的交点。开环幅相曲线与负实轴的交点是判定系统闭环稳定的重要因素。设 ω_g 为交点对应的频率, 则有

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = (2k+1)\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

或

$$\operatorname{Im}[G(j\omega_g)H(j\omega_g)] = 0$$

应该注意的是后一方程的解中含有与正实轴的交点对应的频率。由交点频率可求得与负实轴的交点为 $(\operatorname{Re}(G(j\omega_g)H(j\omega_g)), 0)$ 或 $(G(j\omega_g)H(j\omega_g), 0)$ 。

(4) 根据上述确定的特征点, 结合开环频率特性的变化趋势作图。若开环传递函数具有虚极点 $\pm j\omega_p$, 则幅相曲线应反映 ω 在 ω_p 附近变化时, 开环幅相曲线的变化情况。由于 $\omega \rightarrow \omega_p$ 时, $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| \rightarrow \infty$, 因此应确定 $\varphi(\omega_p^-)$ 和 $\varphi(\omega_p^+)$, 并由此作图。

3. 例题

例 1 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10(Ts+1)}{s(s-10)}, \quad T > 0$$

试绘制开环系统的大致幅相频率特性曲线。

解

系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(j\omega T + 1)}{j\omega(j\omega - 10)}$$

幅相频率特性分别为

$$\begin{aligned} |G(j\omega)H(j\omega)| &= \frac{10\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 100}} \\ \angle G(j\omega)H(j\omega) &= \arctg \omega T - 90^\circ - \left(180^\circ - \arctg \frac{\omega}{10}\right) \end{aligned}$$

计算得到特殊的 ω 点, 及其坐标值为

$$\omega = 0, \quad |G(j\omega)H(j\omega)| = \infty, \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) = -270^\circ$$

$$\omega = \infty, \quad |G(j\omega)H(j\omega)| = 0, \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ$$

曲线与实轴的交点为

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{10\omega(10T+1) + j10(T\omega^2 - 10)}{\omega(100 + \omega^2)} = U(\omega) + jV(\omega)$$

式中 $U(\omega)$ 与 $V(\omega)$ 分别为开环系统的实频和虚频特性。

$$\text{令 } V(\omega) = 0, \text{ 解得 } \omega = \sqrt{\frac{10}{T}}$$

将 $\omega = \sqrt{\frac{10}{T}}$ 代入 $U(\omega)$, 得幅相频率特性曲线与实轴的交点为 $-T$ 。

于是可得幅相频率特性曲线如图 5-18 所示。

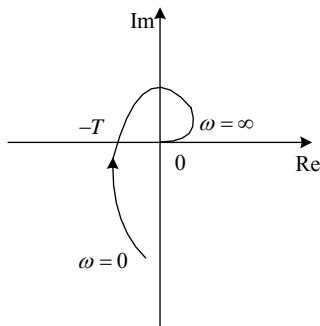


图 5-18 幅相频率特性曲线图

例 2 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

试绘制系统概略幅相特性曲线。

解

(1) 组成系统的环节为两个积分环节、两个惯性环节和比例环节。

(2) 确定起点和终点

$$G(j\omega) = \frac{-k(1 - T_1T_2\omega^2) + jk(T_1 + T_2)\omega}{\omega^2(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \infty$$

由于 $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$ 趋于 $-\infty$ 的速度快, 故初始相角为 -180° 。终点为

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = -360^\circ$$

(3) 求幅相曲线与负实轴的交点。由 $G(j\omega)$ 的表达式知, ω 为有限值时, $\operatorname{Im}[G(j\omega)] > 0$, 故幅相曲线与负实轴无交点。

(4) 组成系统的环节都为最小相位环节, 并且无零点, 故 $\varphi(\omega)$ 单调地从 -180° 递减至 -360° 。作系统的概略幅相特性曲线如图 5-19 所示。

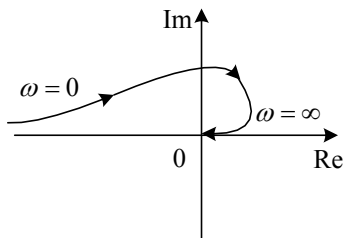


图 5-19 幅相频率特性曲线

例 3 已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{10(s^2 - 2s + 5)}{(s + 2)(s - 0.5)}$$

试绘制系统的大致幅相特性曲线。

解

(1) 传递函数按典型环节分解

$$G(s) = \frac{-50(\frac{1}{5}s^2 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s}{\sqrt{5}}) + 1)}{(\frac{s}{2} + 1)(-\frac{s}{0.5} + 1)}$$

(2) 计算起点和终点

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -50$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 10$$

相角变化范围。

不稳定比例环节 -50 : $-180^\circ \sim -180^\circ$

惯性环节 $1/(0.2s+1)$: $0^\circ \sim -90^\circ$

不稳定惯性环节 $1/(-2s+1)$: $0^\circ \sim +90^\circ$

不稳定二阶微分环节 $0.2s^2 - 0.4s + 1$: $0^\circ \sim -180^\circ$

(3) 计算与实轴的交点

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10(5 - \omega^2 - 2j\omega)(-\omega^2 - 1 - 1.5j\omega)}{(\omega^2 + 1)^2 + (1.5\omega)^2} \\ &= \frac{10[-(5 - \omega^2)(\omega^2 + 1) + 3\omega^2 + j\omega(-5.5 + 3.5\omega^2)]}{(\omega^2 + 1)^2 + (1.5\omega)^2} \end{aligned}$$

令 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$, 得

$$\omega_x = \sqrt{5.5/3.5} = 1.254$$

$$\text{Re}[G(j\omega_x)] = -4.037$$

(4) 确定变化趋势 根据 $G(j\omega)$ 的表达式, 当 $\omega < \omega_x$ 时, $\text{Im}[G(j\omega)] < 0$; 当 $\omega > \omega_x$ 时, $\text{Im}[G(j\omega)] > 0$ 。作系统大致幅相曲线如图 5-20 所示。

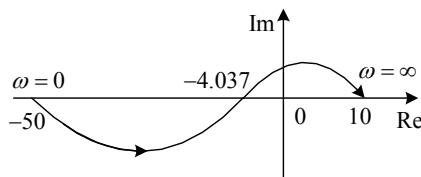


图 5-20 系统大致幅相曲线

4. 频率特性特点

下面定性地讨论控制系统开环频率特性曲线的一些特点。 $G(j\omega)$ 可表示为

$$G(s) = \frac{K}{s^V} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \cdot \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\xi_l \tau_l s + 1)}{\prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \cdot \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\xi_j T_j s + 1)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (5-2)$$

(1) 极坐标曲线的起点

极坐标曲线的起点是 $\omega \rightarrow 0$ 时 $G(j0_+)$ 在复平面的位置。由式 (5-2) 得

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{(j\omega)^V} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{\omega^V} \angle -V \times 90^\circ$$

所以, 对于不同的 V 值, 特性征曲线的起点将来自极坐标轴的不同方向, 如图 5-21 所示。

- 0 型系统, $V = 0$, $G(j\omega)$ 特性曲线起始于点 $(K, 0)$ 处;
- I 型系统, $V = 1$, $G(j\omega)$ 特性曲线起始于 -90° 处 (负虚轴的 ∞ 处);

- II 型系统, $V=2$, $G(j\omega)$ 特性曲线起始于 -180° 处 (负实轴的 ∞ 处);
- III 型系统, $V=3$, $G(j\omega)$ 特性曲线起始于 -270° 处 (正实轴的 ∞ 处);
- 当 $V>3$ 时, 写成 $V=3k+v$ 的形式, 再按照上面的规律进行分析。

(2) 极坐标曲线的终点

因为 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -(n-m) \times 90^\circ$

由此可以得到极坐标曲线趋向于坐标远点的规律, 图形如图 5-22 所示。

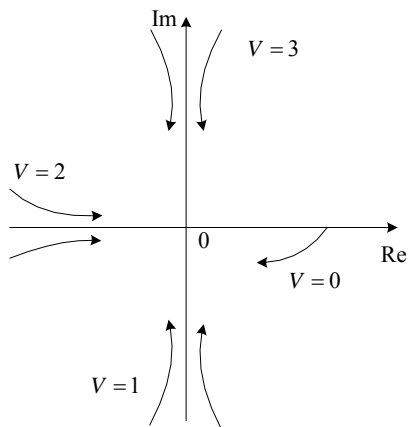


图 5-21 开环频率特性曲线的起始点

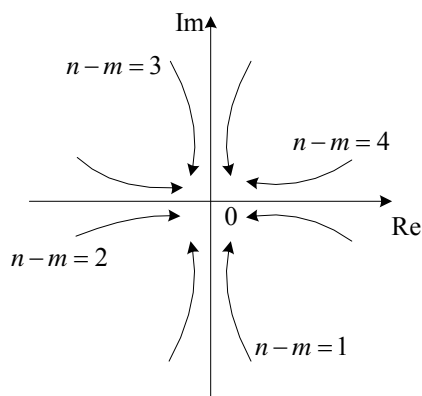


图 5-22 开环幅相频率特性的终点

5.3.2 系统开环对数频率特性曲线

1. 定义

同开环幅相频率特性一样, 通过将开环传递函数分解为各个典型环节, 由此可方便地得到系统开环对数频率特性曲线。

对于单位负反馈系统, 其开环传递函数 $G(s)$ 为回路中各串联环节传递函数之积, 即

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega) = \prod_{i=1}^n G_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n M_i(\omega) e^{j \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)}$$

其开环对数频率特性为

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \left| \prod_{i=1}^n G_i(j\omega) \right| = 20 \sum_{i=1}^n \lg |G_i(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)$$

从中可以看出：系统的开环对数频率特性等于各串联环节的幅频特性之代数和；相频特性等于组成系统的各典型环节的相频特性之代数和。

根据此性质，利用典型环节的对数频率特性曲线的画法，可以很容易得到系统对数频率特性曲线。

2. 对数频率特性曲线画法步骤：

- (1) 求出比例微分、惯性环节和振荡环节的转折频率，并将它们标在 Bode 图的 ω 轴上；
- (2) 确定 $L(\omega)$ 渐近线起始段的斜率和位置。在 $L(\omega)$ 的起始段， $\omega \ll 1$ ，则

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg K - 20 \lg |j\omega|^V \quad (5-3)$$

根据式 (5-3) 右端的第二项，可以确定渐近线起始段的斜率为 $-V \times 20 \text{dB/dec}$ ，第一项确定了在 $\omega=1$ 时，渐近线起始段的高度为 $20 \lg K$ 。因此，过 $\omega=1$ ， $L(\omega) = 20 \lg K$ 这一点画一条斜率为 $-V \times 20 \text{dB/dec}$ 的直线，该直线从低频段开始向高频段延伸，直至第一个转折频率处，该条直线就是 $L(\omega)$ 渐近线的起始段。

(3) 将 $L(\omega)$ 向高频段延伸，且每过一个转折频率，将渐近线的斜率相应地改变一次，就可得到 $L(\omega)$ 的渐近线。

相应的典型环节的种类，变化情况见表 5-1。同样在后面的各交接频率处，渐近线斜率都相应地改变，每两个相邻交接频率间，渐近线为一直线。

表 5-1 渐近线斜率在交接频率处的变化

交接频率对应的典型环节	斜率的变化
惯性环节	减小 20dB/dec
振荡环节	减小 40dB/dec
一阶微分环节	增大 20dB/dec
二阶微分环节	增大 40dB/dec

由此便可获得系统开环对数幅频特性曲线。

3. 例题

例 4 绘制下面开环系统频率特性的对数频率特性曲线

$$G(s)H(s) = \frac{1000(0.5s+1)}{s(2s+1)(s^2+10s+100)}$$

解 首先作出的 $L(\omega)$ 对数幅频特性渐近线, 再画出精确曲线。

(1) 确定有关环节的转折频率

$$\text{惯性环节 } \omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ (rad/s)}$$

$$\text{微分环节 } \omega_2 = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ (rad/s)}$$

$$\text{振荡环节 } \omega_3 = \frac{10}{1} = 10 \text{ (rad/s)}$$

(2) 确定 $L(\omega)$ 起始段的高度及斜率。因为 $v=1$, 渐近线起始段的斜率为 -20dB/dec 。过 $\omega=1$, 高度为 $20\lg 10 = 20\text{dB}$ 的点做斜率为 -20dB/dec 的低频斜线。过 $\omega=0.5$ 点向低频段画斜率为 -40dB/dec 的直线。

(3) 当 $\omega=2$ 时, 斜率变为 -20dB/dec 。

(4) 当 $\omega=10$ 时, 斜率变为 -60dB/dec 。根据以上讨论, 可作出对数幅频特性曲线如图 5-23 所示。

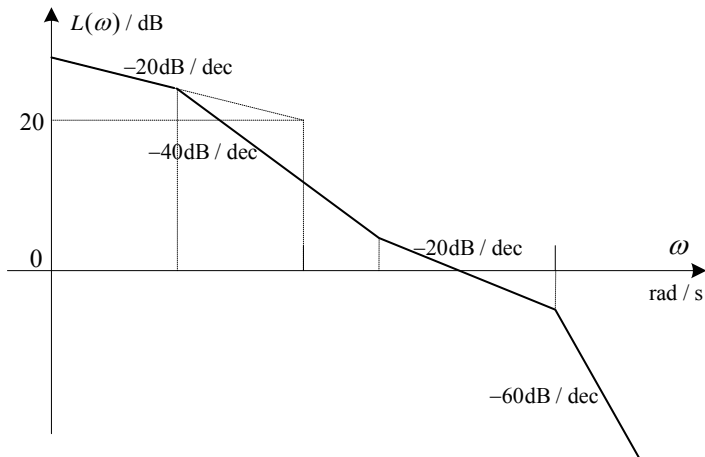


图 5-23 对数幅频特性曲线

例 5 最小相位系统对数幅频渐近特性如图 5-24 所示, 请确定系统的传递函数。

解

由图可知在低频段渐近线斜率为 0, 故系统为 0 型系统。渐近特性为分段线性函数, 在各交接频率处, 渐近特性斜率发生变化。

在 $\omega=0.1$ 处, 斜率从 0dB/dec 变为 20dB/dec , 属于一阶微分环节。

在 $\omega=\omega_1$ 处, 斜率从 20dB/dec 变为 0dB/dec , 属于惯性环节。

在 $\omega=\omega_2$ 处, 斜率从 0dB/dec 变为 -20dB/dec , 属于惯性环节。

在 $\omega=\omega_3$ 处, 斜率从 -20dB/dec 变为 -40dB/dec , 属于惯性环节。

在 $\omega=\omega_4$ 处,斜率从 -40 dB/dec 变为 -60 dB/dec ,属于惯性环节。

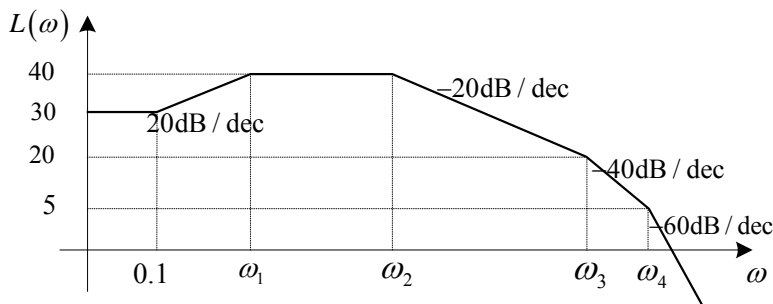


图 5-24 最小相位系统对数幅频特性

因此系统的传递函数具有下述形式

$$G(s) = \frac{K(s/0.1+1)}{(s/\omega_1+1)(s/\omega_2+1)(s/\omega_3+1)(s/\omega_4+1)}$$

式中 K , ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 待定。

由 $20\lg K = 30$ 得 $K = 31.62$ 。

$$\text{确定 } \omega_1: 20 = \frac{40 - 30}{\lg \omega_1 - \lg 0.1} \quad \text{所以 } \omega_1 = 0.316$$

$$\text{确定 } \omega_2: -60 = \frac{-5 + 0}{\lg 100 - \lg \omega_4} \quad \text{所以 } \omega_2 = 82.54$$

$$\text{确定 } \omega_3: -40 = \frac{5 - 20}{\lg \omega_4 - \lg \omega_3} \quad \text{所以 } \omega_3 = 34.81$$

$$\text{确定 } \omega_4: -20 = \frac{20 - 40}{\lg \omega_3 - \lg \omega_2} \quad \text{所以 } \omega_4 = 3.481$$

于是, 所求的传递函数为

$$G(s) = \frac{31.62(s/0.1+1)}{(s/0.316+1)(s/3.481+1)(s/34.81+1)(s/82.54+1)}$$

例 6 绘制下面开环系统频率特性的对数幅频特性曲线

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(1+j0.4\omega)}{j\omega(1+j\omega)(1+j0.2\omega)[1+j0.008\omega+(j0.04\omega)^2]}$$

解

(1) 确定有关环节的转折频率

惯性环节 1 $\omega_1 = 1(\text{rad/s})$

微分环节 $\omega_2 = 1/4 = 0.25(\text{rad/s})$

惯性环节 2 $\omega_3 = 1/0.2 = 5(\text{rad/s})$

振荡环节 $\omega_4 = 1/0.04 = 25(\text{rad/s})$

(2) 确定 $L(\omega)$ 起始段的高度及斜率。因为 $v=1$ ，渐近线起始段的斜率为 -20dB/dec ，在 $\omega=1$ 时，起始线段的高度为 $20\lg 10 = 20\text{dB}$ 。过 $\omega=1$ 和 $L(\omega) = 20\text{dB}$ 一点向低频段画斜率为 -20dB/dec 的直线。

(3) 将直线向高频段延伸。在 $\omega=1$ 时，斜率变为 -40dB/dec ；在 $\omega=2.5$ 时，斜率应增加 20dB/dec ，变为 -20dB/dec ；在 $\omega=5$ 时，斜率改变为 -40dB/dec ；在 $\omega=25$ 时，斜率变为 -80dB/dec 。根据以上讨论，可作出渐近对数幅频特性曲线如图 5-25 所示。

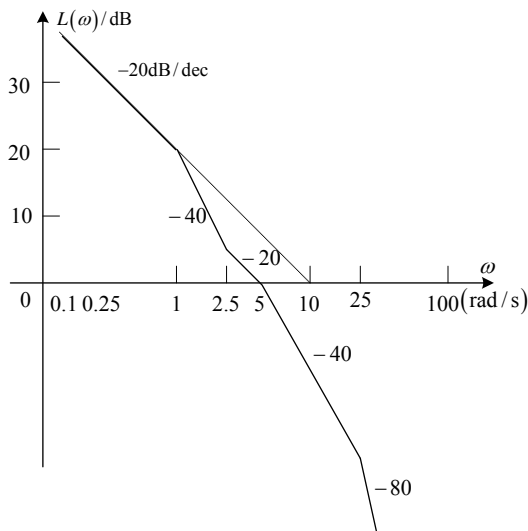


图 5-25 对数幅频特性曲线

5.4 奈奎斯特稳定判据

奈奎斯特稳定判据（简称为奈氏判据）是根据系统的开环频率特性对闭环系统的稳定性进行判断的一种方法。它把开环频率特性与复变函数 $1+G(s)H(s)$ 位于右半 s 平面的零点和极点联系起来，用图解的方法分析系统的稳定性。应用奈氏判据不仅可判断线性系统是否稳定，还可指出系统不稳定根的个数。

5.4.1 最小相位系统与非最小相位系统

前面的分析中表明，闭环系统稳定的充分必要条件是所有的闭环特征根（闭环极点）都在根平面（ s 平面）的左边。在右半 s 平面内既无极点也无零点的传递函数，称为**最小相位传递函数**；反之，在右半 s 平面内有极点和（或）零点的传递函数，称为**非最小相位传递函数**。具有最小相位传递函数的系统称为**最小相位系统**，反之，具有非最小相位传递函数的系统，称为**非最小相位系统**。

在具有相同幅值特性的系统中，最小相位传递函数（系统）的相角范围，在所有这类系统中是最小的。任何非最小相位传递函数的相角范围，都大于最小相位传递函数的相角范围。

对于最小相位系统，其传递函数由单一的幅值曲线惟一确定。对于非最小相位系统则不是这种情况。

5.4.2 闭环系统的稳定性

设单位负反馈系统如图 5-26 所示，其开环传递函数为 $G(s)$ ，则闭环传递函数为

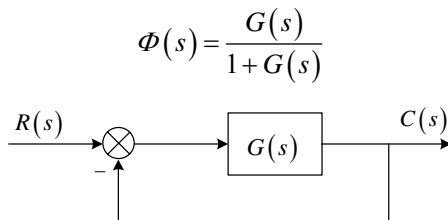


图 5-26 单位负反馈系统

设辅助函数

$$F(s) = 1 + G(s)$$

设

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

则闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{M(s) + N(s)}$$

所以

$$F(s) = 1 + \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s) + N(s)}{N(s)} = \frac{D(s)}{N(s)}$$

式中, $N(s)$ 为系统的开环特征式; $D(s)$ 为系统的闭环特征式

$$D(s) = M(s) + N(s)。$$

闭环系统的稳定性, 取决于辅助函数 $F(s)$ 零点在根平面上的位置。

因为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= 1 + G(j\omega) = \frac{M(j\omega) + N(j\omega)}{N(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{N(j\omega)} \\ &= \frac{K(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)} = \frac{\prod_{i=1}^n (j\omega - s_i)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} \cdot k \end{aligned} \quad (5-4)$$

式中, s_i 为 $F(s)$ 的零点, 即系统的闭环极点; p_i 为 $F(s)$ 的极点即系统的开环极点; K 为闭环特征式与开环特征式最高阶数项的系数之比。

由于复数相乘, 其幅角为相加; 复数相除, 其幅角为相减。对于式 (5-4) 中的式子, 当 ω 从零到无穷大时, 矢量 $F(s)$ 的幅角变化为

$$\Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle[1 + G(j\omega)] = \sum_{i=1}^n \Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle(j\omega - s_i) - \sum_{i=1}^n \Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle(j\omega - p_i) \quad (5-5)$$

式中幅角增量的大小, 取决于特征根 s_i 、 p_i 在复平面上的位置。由此得到以下结论:

(1) 如果特征根 α_i 为负实根, 则当 ω 从零到无穷大时, 矢量 $j\omega - \alpha_i$ 将逆时针旋转 90° 。设逆时针方向的转角为正, 则

$$\Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle(j\omega - \alpha_i) = +90^\circ \quad (5-6)$$

(2) 如果特征根 $\alpha_i \pm j\omega_i$ 为具有负实部的共轭复根, 则当 ω 从零到无穷大时, 有

$$\Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle[j\omega - (\alpha_i + j\omega_i)] + \Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle[j\omega - (\alpha_i - j\omega_i)] = +2 \times 90^\circ \quad (5-7)$$

从式 (5-6) 和式 (5-7) 中可以看出, 当特征根具有负实部, 无论是实根还是共轭复根的情况下, 各子因式的幅角增量平均为 $+90^\circ$; 同理, 当特征根具有正实部 (即不稳定根), 无论是实根还是共轭复根的情况下, 各子因式的幅角增量平均为 -90° 。

由此得出结论: 如果系统具有 p 个开环右极点, q 个闭环右极点, 由式 (5-5) 得

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle[1 + G(j\omega)] &= \sum_{i=1}^n \Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle(j\omega - s_i) - \sum_{i=1}^n \Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle(j\omega - p_i) \\ &= [(n - q) \times 90^\circ - q \times 90^\circ] - [(n - p) \times 90^\circ - p \times 90^\circ] \\ &= (p - q) \times 180^\circ \end{aligned}$$

$$=(p-q) \cdot \pi \quad (5-8)$$

从(5-8)中可知,如系统开环传递函数 $G(j\omega)$ 有 p 个右极点,当 ω 从零到无穷大时,辅助函数 $1+G(j\omega)$ 在复平面上的幅角增量为 $p\pi$ 时,系统稳定;否则,系统不稳定。

5.4.3 奈奎斯特稳定判据

奈奎斯特稳定判据(Nyquist stability criterion)是建立在复变函数的幅角原理基础上的,它揭示了系统的开环幅相特性与闭环系统稳定性的本质关系,由式(5-8)得

$$\Delta_{\omega: \omega \rightarrow \infty} \angle [1+G(j\omega)] = (p-q)\pi = \frac{p-q}{2} \times 2\pi = N \times 2\pi \quad (5-9)$$

式中, $N = \frac{p-q}{2}$ 为矢量 $1+G(j\omega)$ 的幅角变化圈数。

上式表明,当 ω 从零到无穷大时,矢量 $1+G(j\omega)$ 端点轨迹逆时针方向围绕原点转 $\frac{p-q}{2}$ 圈。

如果系统有 p 个开环右极点,若使闭环系统稳定,则右闭环极点数 $q=0$ (即所有根都在 s 面的左边),则由式(5-9)得

$$N = \frac{p-q}{2} = \frac{p-0}{2} = \frac{p}{2}$$

即当 ω 从零到无穷大时,矢量 $1+G(j\omega)$ 在复平面上逆时针绕原点 $\frac{p}{2}$ 圈,则闭环系统稳定。

同样,根据式(5-9)知,如果系统是开环稳定的,即开环右极点个数为零, $p=0$, 则闭环系统稳定的条件是 $N=0$ 。(5-9)式表明,当 ω 从零到无穷大时,矢量 $1+G(j\omega)$ 在复平面上不包围原点。

辅助函数 $F(j\omega)=1+G(j\omega)$ 在复数平面上的坐标原点,相当于 $G(j\omega)$ 在复数平面上的 $(-1, j0)$ 点。所以,矢量 $1+G(j\omega)$ 包围坐标原点的圈数,就等于开环传递函数矢量 $G(j\omega)$ 曲线围绕点 $(-1, j0)$ 的圈数。由此可得奈奎斯特稳定判据。

奈奎斯特稳定判据可表述为:

(1) 若开环传递函数 $G(j\omega)$ 的右极点个数为 p , 则系统稳定的充要条件是,当 ω 从零到无穷大时,系统开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)$ 逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数为 $\frac{p}{2}$;

(2) 若开环系统稳定($p=0$), 则闭环系统稳定的充要条件为系统开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)$ 不包围 $(-1, j0)$ 点。

(3) 若 $N \neq \frac{p}{2}$, 则闭环系统不稳定, 闭环系统的右极点 (具有不稳定的正实部特征根) 的个数为 $q = p - 2N$ 。

(4) 当 ω 推广到从负无穷大到正无穷大时, 系统开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)$ 逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数为 $N = p$ 。

图 5-27 表示了系统开环幅相频率特性在开环系统稳定条件下的三种情况: 开环相频率特性曲线 $G(j\omega)$ 不包围 $(-1, j0)$ 点, 则闭环系统稳定, 如图 5-27 (a) 所示; 开环相频率特性曲线 $G(j\omega)$ 恰好经过 $(-1, j0)$ 点, 则闭环系统临界稳定, 如图 5-27 (b) 所示; 开环相频率特性曲线 $G(j\omega)$ 包围 $(-1, j0)$ 点的圈数 $N = -1$ (顺时针方向包围一次), 则 $q = p - 2N = 2$, 即闭环系统有 2 个右极点, 则该系统不稳定, 如图 5-27 (c) 所示。

从上面可以看出, 奈奎斯特稳定判据是利用系统的开环幅相频率特性曲线来判断系统的闭环稳定性的非常简单实用的方法。

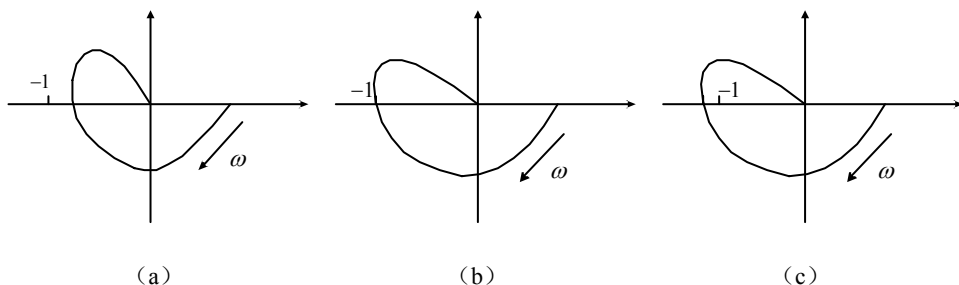


图 5-27 系统开环幅相频率特性曲线

例 7 系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(-0.2s^2 - 0.8s + 1)}$$

试用奈氏判据判断系统的稳定性。

解 将传递函数按典型环节分解

$$G(s) = \frac{-10}{s(0.2s + 1)(-s + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{-10[0.8\omega - j(1 + 0.2\omega^2)]}{\omega(1 + \omega^2)(1 + 0.04\omega^2)}$$

幅相曲线的起点和终点

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty \angle -270^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -270^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = -8$$

当 ω 为有限值时, $\operatorname{Im}[G(j\omega)] \neq 0$, 幅相曲线与负实轴无交点。由于惯性环节的时间常数 $T_1 = 0.2$, 小于不稳定性环节的时间常数 $T_2 = 1$, 故 $\varphi(\omega)$ 呈现先增大后减小的变化。作系统开环幅相曲线如图 5-28 所示。

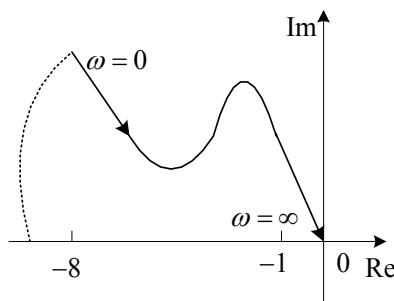


图 5-28 系统开环幅相曲线

由于 $\nu=1$, 故需从幅相曲线上 $\omega=0$ 的对应点起, 逆时针补画半径为无穷大的 $\pi/2$ 圆弧。由系统开环传递函数知, s 右半平面系统的开环极点数 $p=1$, 而幅相曲线起于负实轴, 且当 ω 增大时, 逐渐离开负实轴, 故为半次负穿越, $N=-1/2$ 。于是 s 右半平面的闭环极点数

$$z = p - 2N = 2$$

表明系统闭环不稳定。

5.4.4 奈奎斯特曲线与开环对数频率特性曲线的关系

在工程计算中, 经常采用开环对数频率特性曲线来表征系统的开环频率特性。下面将前面讨论的奈奎斯特曲线与开环对数频率特性曲线的对应关系给出, 从而可以得出利用开环对数频率特性曲线来判断闭环系统的稳定性的方法。

开环频率特性的极坐标图与波特图的对对应关系为:

(1) 极坐标图中的单位圆相当于波特图上的 0dB 线, 即对数幅频特性图上的 ω 轴。

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg 1 = 0 \text{ (dB)}$$

则单位圆外的区域对应于波特图中 $L(\omega) > 0\text{dB}$ 的区域, 单位圆内的区域对应于伯德图中 $L(\omega) < 0\text{dB}$ 的区域。

(2) 极坐标图上的负实轴相当于波特图中的 -180° 线, 因为此时 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ 。

则极坐标图上负实轴下方的区域对应于波特图中 -180° 线上方的区域。

图 5-29 显示了极坐标图与波特图的对应关系。

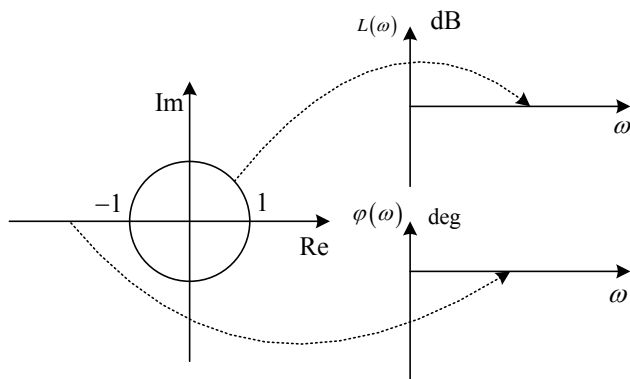


图 5-29 极坐标图与波特图的对应关系

由于极坐标图上的单位圆相当于波特图幅频特性图中的 0dB 线（即 ω 轴），负实轴相当于波特图相频特性图上的 -180° 线。在奈奎斯特图上，幅相特性 $G(j\omega)$ 曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈，则 $G(j\omega)$ 曲线必然在实轴的 $(-1, j0)$ 点左边的区域，自下而上的穿越一次，称这种穿越为**负穿越**，如图 5-30 (a) 所示。反之，自上而下的穿越称为**正穿越**。在奈奎斯特图上，负穿越用 “-” 表示，负穿越的次数用 “ N_- ” 表示；正穿越用 “+” 表示，正穿越的次数用 “ N_+ ” 表示。在波特图上，在 $L(\omega) > 0\text{dB}$ 的频段区域内，随着 ω 的增加，相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 自上而下穿越 -180° 线，称为**负穿越**；反之称为**正穿越**。如图 5-30 (b) 所示。

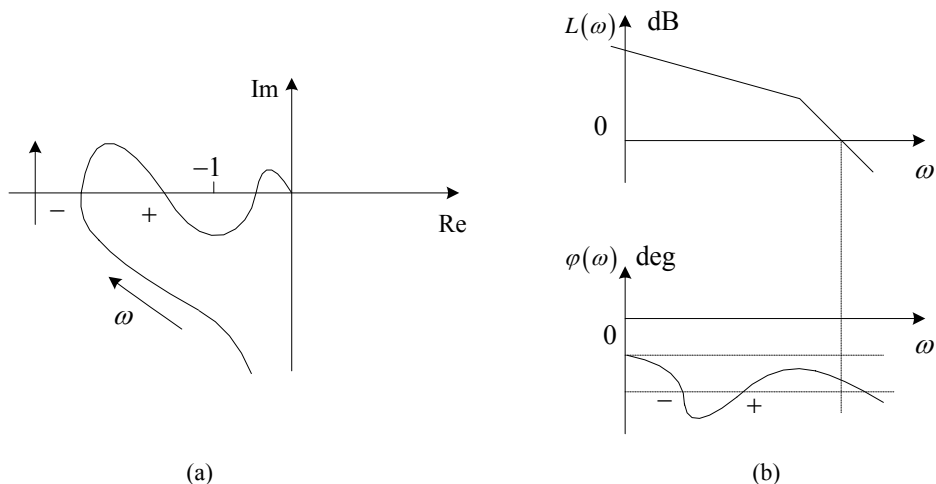


图 5-30 极坐标与波特图的正负穿越对应关系

因此, 可得对数频率特性判据的表述为: 设开环系统有 p 个右极点, 则闭环系统稳定的充要条件是, 当 ω 从零到无穷大时, 在开环对数频率特性 $L(\omega) > 0\text{dB}$ 的频段内, 对数频率特性 $\varphi(\omega)$ 穿越 -180° 线的正、负穿越次数之差应等于 $\frac{p}{2}$, 即 $N = N_+ - N_- = \frac{p}{2}$ 。若系统不稳定, 则闭环右极点个数为 $q = p - 2N$ 。

例 8 已知系统的开环对数幅相频率特性曲线如图 5-31 所示, 判断其闭环稳定性。

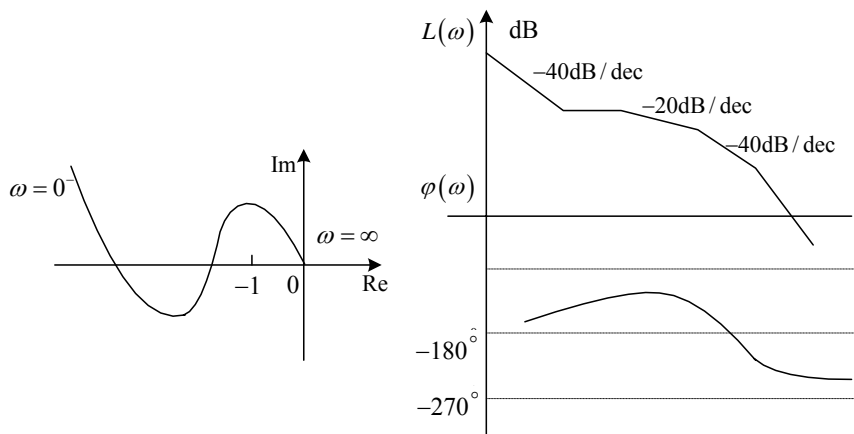


图 5-31 系统开环幅相曲线

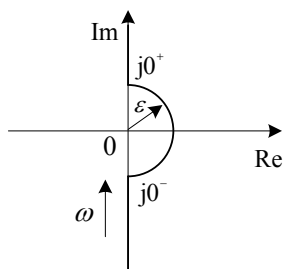


图 5-32 ε 为无穷小时极坐标

当系统的开环特征方程有零根的情况时, 此时系统处于临界稳定的情况下, 不妨将零根看作为稳定根。因为对于左极点构成的子因式 $(j\omega - \alpha_i)$, 当 ω 从零到无穷大时其幅角增量为 90° 。为使零根的子因式 $(j\omega - 0)$ 与 $(j\omega - \alpha_i)$ 的幅角增量相同, 现假设: 零根子因式 $(j\omega - 0)$ 沿虚轴变化的路径在原点的附近, 通过以坐标原点为圆心, 无穷小量 ε 为半径, 在 s 平面的原点右半平面画一个小半圆, 如图 5-32 所示。这样就将 s 平面原点处的零极点划分到了根平面的左边。

小圆的极坐标表达式为

$$s = \varepsilon e^{j\theta}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 小圆缩小为原点。

若 ω 从 $0^- \rightarrow 0^+$, 幅角 θ 从 $-90^\circ \rightarrow +90^\circ$, 此时系统的传递函数为

$$G(s) \Big|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K(\tau_1 s + 1) \cdots}{s^V (T_1 s + 1) \cdots} \Big|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}} = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{s^V} \right) e^{-jV\theta} = \infty e^{-jV\theta} = \infty \angle -V\theta \quad (5-10)$$

式中, V 为开环传递函数中的积分个数。

所以, 当开环传递函数中有 V 个积分环节时, 相角 $\varphi(\omega)$ 增量为 $-V \times 90^\circ$, 即

$$G(j\omega)\Big|_{\omega:0 \rightarrow 0^+} = \infty \angle -V \times 90^\circ \quad (5-11)$$

由式 (5-10) 可知, 当开环传递函数中有 V 个积分环节时, 先绘制 ω 从 $0 \rightarrow 0^+$ 的补充虚线圆弧, 其半径为 ∞ , 圆心角为 $-V \times 90^\circ$, 从而使 $G(j\omega)$ 的曲线完整。最后, 根据奈奎斯特稳定判据, 判断闭环系统稳定与否。

5.5 系统的稳定裕度

控制系统能正常工作的前提条件是系统必须稳定, 除此之外, 还要求稳定的系统具有适当的稳定裕度, 即有一定的相对稳定性。用奈氏判据分析系统的稳定性时, 是通过系统的开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线绕 $(-1, j0)$ 点的情况来进行稳定性判断的。当系统的开环传递函数在右半 s 平面无极点时, 若 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线通过 $(-1, j0)$ 点, 则控制系统处于临界稳定。这时, 如果系统的参数发生变化, 则 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线可能包围 $(-1, j0)$ 点, 系统变为不稳定的。因此, 在 GH 平面上, 可以用奈氏曲线与 $(-1, j0)$ 的靠近程度来表征系统的相对稳定性, 即奈氏曲线离 $(-1, j0)$ 点越远, 系统的稳定程度越高, 其相对稳定性越好, 反之, 奈氏曲线离 $(-1, j0)$ 点越近, 稳定程度越低。反映系统稳定程度高低的观念就是系统相对稳定性的概念。下面, 对系统的相对稳定性进行定量分析。

以图 5-33 为例说明相对稳定性的概念。

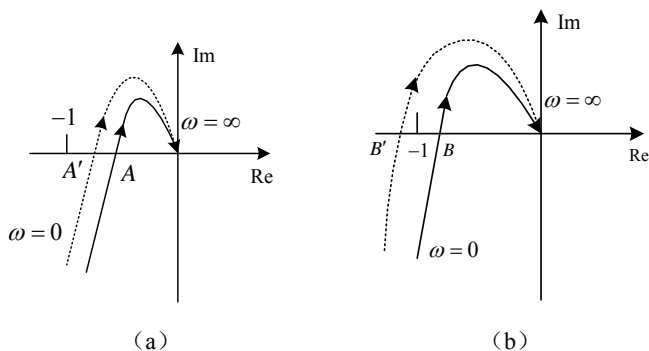


图 5-33 系统的相对稳定性

图 5-33 (a) 和 (b) 所示为两个最小相位系统, 但图 5-33 (a) 所示系统的频率特性曲

线与负实轴的交点 A 距离 $(-1, j0)$ 点较远, 图中的两个开环频率特性曲线 (实线) 由于没有包围 $(-1, j0)$ 点, 由奈氏判据知它们都是稳定的。图 5-33 (b) 所示系统的频率特性曲线与负实轴的交点 B 距离 $(-1, j0)$ 点较近。假定系统的开环放大系统由于系统参数的改变比原来增加了 50%, 则图 5-34 (a) 中的 A 点移到 A' 点, 仍在 $(-1, j0)$ 点右侧, 开环频率特性曲线如图 5-33 (a) 虚线所示。而图 5-33 (b) 中的 B 点则移到 $(-1, j0)$ 点的左侧 (B' 点), 如图 5-33 (b) 虚线所示, 系统便不稳定了。可见, 前者较能适应系统参数的变化, 即它的相对稳定性比后者好。

通常用稳定裕度来衡量系统的相对稳定性或系统的稳定程度, 其中包括系统的相角裕度 γ 和幅值裕度 K_g 。

1. 相角裕度 (Phase margin) γ

如图 5-34 所示, 把 GH 平面上的单位圆与系统开环频率特性曲线的交点频率 ω_c 称为幅值穿越频率或剪切频率, 它满足

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \quad 0 \leq \omega_c \leq +\infty \quad (5-12)$$

所谓相角裕度 γ 是指幅值穿越频率 ω_c 所对应的相移 $\varphi(\omega_c)$ 与 -180° 角的差值, 即

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = \varphi(\omega_c) + 180^\circ \quad (5-13)$$

对于最小相位系统, 如果相角裕度 $\gamma > 0^\circ$, 系统是稳定的, 如图 5-34 (a), 且 γ 值愈大, 系统的相对稳定性愈好。如果相角裕度 $\gamma < 0^\circ$, 系统则不稳定, 如图 5-34 (b)。当 $\gamma = 0^\circ$ 时, 系统的开环频率特性曲线穿过 $(-1, j0)$ 点, 是临界稳定状态。

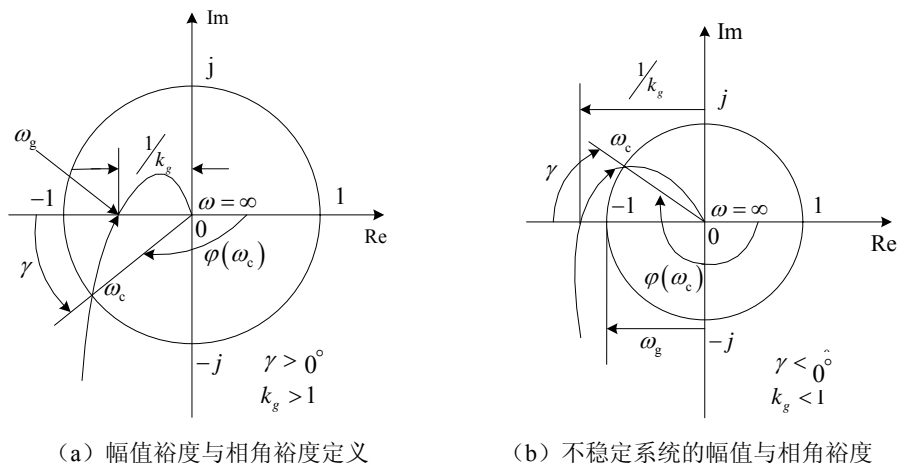


图 5-34 相角裕度定义

相角裕度的含义是,使系统达到临界稳定状态时开环频率特性的相角 $\varphi(\omega_c) = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$ 减小(对应稳定系统)或增加(对应不稳定系统)的数值。

2. 幅值裕度 (Gain margin) K_g

如图 5-35 所示,我们把系统的开环频率特性曲线与 GH 平面负实轴的交点频率 ω_g 称为**相位穿越频率**,显然它应满足

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ \quad 0 \leq \omega_g \leq +\infty \quad (5-14)$$

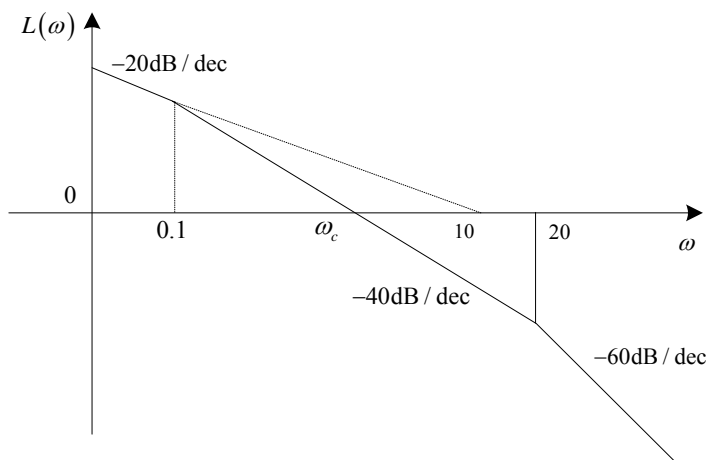


图 5-35 开环对数幅频特性图

幅值裕度 K_g 是指相位穿越频率 ω_g 所对应的开环幅频特性的倒数值,即

$$K_g = \frac{1}{G(j\omega_g)H(j\omega_g)} \quad (5-15)$$

对于最小相位系统,如果幅值裕度 $K_g > 1$ (即 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| < 1$),系统是稳定的,且 K_g 值愈大,系统的相对稳定性愈好。如果幅值裕度 $K_g < 1$ (即 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| > 1$),系统则不稳定。当 $K_g = 1$ 时,系统的开环频率特性曲线穿过 $(-1, j0)$ 点,是临界稳定状态。可见,求出系统的幅值裕度 K_g 后,便可根据 K_g 值的大小来分析最小相位系统的稳定性和稳定程度。

幅值裕度的含义是,使系统到达临界稳定状态时开环频率特性的幅 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$ 增大(对应稳定系统)或缩小(对应不稳定系统)的倍数,即

$$\left| G(j\omega_g)H(j\omega_g) \right| \cdot K_g = 1 \quad (5-16)$$

幅值裕度也可以用分贝数来表示, 即

$$20 \lg K_g = -20 \lg \left| G(j\omega_g)H(j\omega_g) \right| \quad (5-17)$$

因此, 可根据式 (5-17) 来判断最小相位系统是稳定、临界稳定或不稳定。这里要指出的是, 系统相对稳定性的好坏不能仅从相角裕度或幅角裕度的大小来判断, 必须同时考虑相角裕度和幅角裕度。

3. 例题

例 9 单位反馈控制系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

试确定使相位裕度 $\gamma = 45^\circ$ 的 a 值。

$$\text{解 } L(\omega) = 20 \lg \frac{\sqrt{(a\omega_c)^2 + 1}}{\omega_c^2} = 0$$

$$1 \quad \omega_c^4 = a^2 \omega_c^2 + 1$$

$$1 \quad \gamma = 180^\circ + \arctan(a\omega_c) - 180^\circ = 45^\circ$$

$$a\omega_c = 1$$

联立求解得

$$\omega_c = \sqrt[4]{2} \quad a = 1/\sqrt[4]{2} = 0.84$$

例 10 某最小相位系统的开环对数幅频特性如图 5-35 所示。要求:

- (1) 写出系统开环传递函数;
- (2) 利用相位裕度判断系统稳定性。

解 (1) 由系统开环对数幅频特性曲线可知, 系统存在两个交接频率 0.1 和 20, 故

$$G(s) = \frac{k}{s(s/0.1+1)(s/20+1)}$$

且

$$20 \lg \frac{k}{10} = 0$$

得

$$k = 10$$

所以

$$G(s) = \frac{10}{s(s/0.1+1)(s/20+1)}$$

(2) 系统开环对数幅频特性为

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg \frac{10}{\omega} & \omega < 0.1 \\ 20\lg \frac{1}{\omega^2} & 0.1 \leq \omega < 20 \\ 20\lg \frac{20}{\omega^3} & \omega \geq 20 \end{cases}$$

从而解得

$$\omega_c = 1$$

系统开环对数相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{0.1} - \arctan \frac{\omega}{20}$$

$$\varphi(\omega_c) = -177.15^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 2.85^\circ$$

故系统稳定。

例 11 已知最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{40}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

试求出该系统的幅值裕度和相角裕度。

解

系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{40}{j\omega(25 - \omega^2 + j2\omega)}$$

其幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \frac{40}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{25 - \omega^2}$$

$$\text{令 } |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$$

$$\text{得 } \omega_c = 1.82$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2 \times 1.82}{25 - 1.82^2} = 80.5^\circ$$

令

$$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -180^\circ$$

得 $\omega_g = 5$

所以幅值裕度

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega_g)|} = 1.25$$

或

$$K_g(\text{dB}) = 20\lg K_g = 1.94\text{dB}$$

5.6 闭环频率特性

系统的开环频率特性对分析系统的稳定性和稳定程度（即相对稳定性）具有十分重要的意义。但稳定性是系统能否正常工作的一个基本条件，为了研究自动控制系统的其他性能指标，仅知道系统的开环频率特性是不够的。为此有必要进一步研究系统的闭环频率特性。

5.6.1 闭环系统的频域性能指标

典型闭环幅频特性如图 5-36 所示，特性曲线随着频率 ω 变化的特征可用下述一些特征量加以概括：

- (1) 闭环幅频特性的零频值 $A(0)$ ；
- (2) 谐振频率 ω_r 和谐振峰值 M_r ；

$$M_r = \frac{A_{\max}}{A(0)}$$

- (3) 带宽频率 ω_b 和系统带宽 $(0 \sim \omega_b)$ 。

系统的频域性能指标与时域性能指标相关。大致可以认为，频域响应的谐振峰值 M_r 较大，则时域阶跃响应的超调量 σ_p 必然也较大； ω_r 较高时，相应的峰值时间 t_p 可能较小；而带宽频率 ω_b 愈高，则系统快速反应性能愈好，相应于时域响应的调整时间 t_s 愈短。

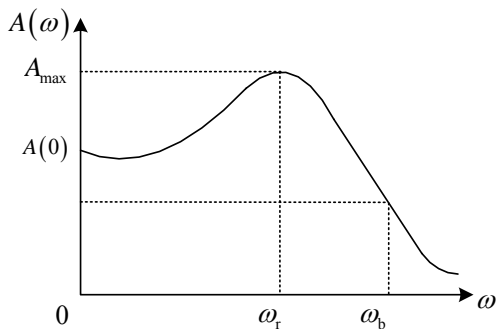


图 5-36 典型闭环幅频特性

5.6.2 一阶系统的频域性能指标

具有单位反馈的一阶系统的开环和闭环传递函数分别是

$$G(s) = \frac{1}{\tau s}$$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

相应的闭环幅频特性为

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

所以, $M(\omega)$ 将随 ω 的增大而单调衰减, 即对于一阶系统而言, 不存在 M_r 和 ω_r 。

令 $M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即可求得 ω_b

$$M(\omega_b) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega_b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

则有 $\omega_b = \frac{1}{\tau}$

一阶系统的调整时间为 $t_s = 3\tau$ (达到稳态值的 95% 的时间), 可以看出 t_s 与 ω_b 成反比关系。

5.6.3 二阶系统的频域性能指标

二阶系统的开环传递函数和闭环传递函数是

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)}$$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

将 $s = j\omega$ 代入上式, 可得闭环频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$$

式中

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\alpha(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

当 $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 频域特性 $M(\omega)$ 将出现峰值。现将 $M(\omega)$ 对 ω 求导, 并令其为零, 即

$$\frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0$$

得

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (5-18)$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5-19)$$

从 (5-18) 式中可以看出, 当 $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, ω_r 无实数解, 说明此时 $M(\omega)$ 不存在峰值。

令 $M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 可求得其带宽频率为

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \quad (5-20)$$

至此, 已求得二阶系统的频域性能指标与系统参量间的解析关系。但是, 系统的频域性能指标在使用上往往不如时域性能指标那样直观, 最好能将两者联系起来以便于应用。在第三章中, 求得系统时域性能指标域参量间的解析关系为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100^\circ = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100^\circ$$

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

现在只需将两者对应起来。

使用频域性能指标的另一个问题是需先求得系统闭环幅频特性。但在二阶系统中，可以直接通过系统开环频率特性，求得系统的相角稳定裕量 γ 及剪切频率 ω_c 与系统参量间的解析关系。系统的开环幅频特性和相频特性为

$$A(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega \sqrt{\omega^2 + (2\zeta\omega_n)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega}{2\zeta\omega_n}$$

令开环幅频特性 $A(\omega)=1$ ，可求得剪切频率 ω_c

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \quad (5-21)$$

将此式代入相频特性 $\varphi(\omega)$ 的表达式中，可得

$$\varphi(\omega_c) = -\pi + \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}} \quad (5-22)$$

于是求得系统的相角裕度为

$$\gamma(\omega) = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}} \quad (5-23)$$

5.6.4 高阶系统的频域性能指标

控制系统的频域和时域响应可由傅立叶积分进行变换，即

$$C(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \cdot R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (5-24)$$

式中 $C(t)$ 为系统的被控信号， $\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$ 和 $R(j\omega)$ 分别是系统的闭环频率特性和控制信号

的频率特性。一般情况下，直接应用式(5-24)求解高阶系统的时域响应是很困难的。在前面的章节中介绍了主导极点的概念，对于具有一对主导极点的高阶系统，可用等效的二阶系统来近似进行分析。实践证明，只要满足主导极点的条件，分析的结果是令人满意的。若高阶系统不存在主导极点，则可采用以下两个近似估算公式来得到频域指标和时域指标

的关系:

$$\sigma = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right), 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ \quad (5-25)$$

$$t_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_c} \quad (5-26)$$

其中,

$$K_0 = 2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2, 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

一般, 高阶系统实际的性能指标比用近似公式估算的指标要好, 因此, 采用近似公式 (5-25) 和 (5-26) 对系统进行初步设计, 可以保证实际系统满足要求且有一定的余量。

5.7 设计实例

——雕刻机控制系统

雕刻机在工作的过程中需要两个电机来驱动雕刻针的运动, 使之到达指定的位置, 其中一个用于 x 方向, 另一个用于 y 、 z 方向。图 5-37 给出了 x 方向位置控制系统的框图。

本例设计的目标是: 应用频率响应法选择增益 K 的值, 使系统阶跃响应的各项指标保持在允许的范围。设计的基本思想是: 首先选择增益 K 的初始值, 绘制系统的开环和闭环 bode 图, 然后利用所得的 bode 图来估算系统时间响应的各项指标; 若得到的系统不能满足设计要求, 则调整 K 的值, 再重复前面的设计过程; 最后, 利用实际计算来检验设计结果。

为此, 首先选取 K 的初值为 $K = 2$, 给出系统的开环对数频率特性曲线, 见图 5-37。

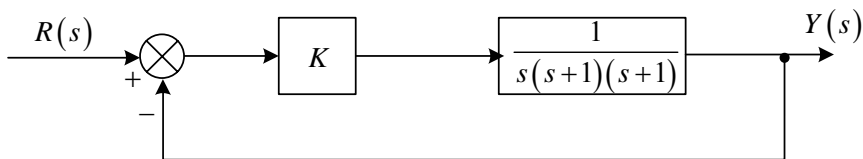


图 5-37 x 方向位置控制系统的框图

系统的闭环传递函数为:

$$T(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2}$$

令 $s = j\omega$ ，同样按照开环对数频率特性曲线的画法可以得到系统的闭环频率特性曲线，如图 5-38 所示。

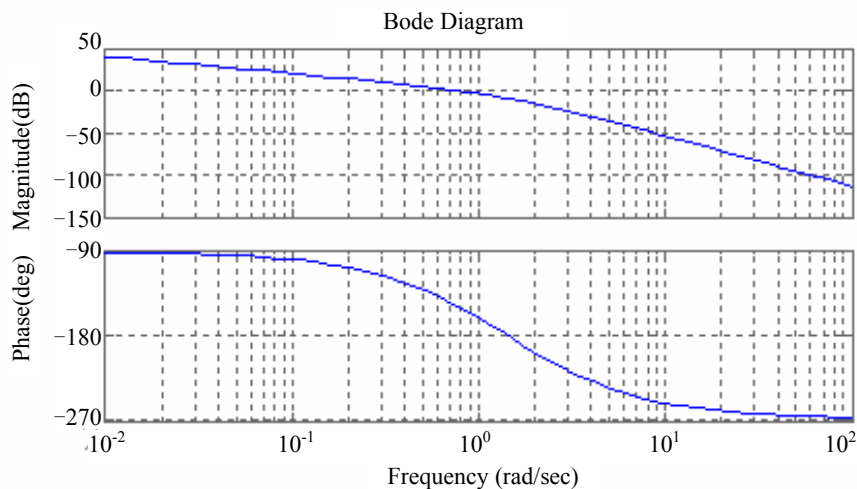


图 5-38 $K=2$ 时系统开环对数频率特性曲线

从图中可以看出，或者根据对数幅频特性公式可以很容易地求得，当 $\omega_r = 0.8$ 时，对数幅频增益达到最大，因此可得

$$20 \lg M_r = 5 \text{ 或 } M_r = 1.78$$

$$\sigma_p = 37\%$$

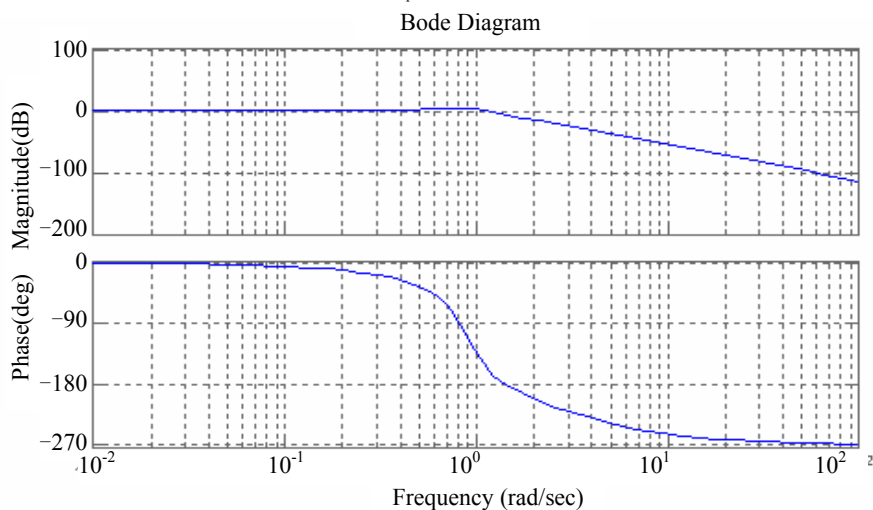


图 5-39 $K=2$ 时系统闭环对数频率特性曲线

根据

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

系统的二阶极点为主导极点, 则系统可近似二阶系统。根据共轭复数极点的频率响应中, 谐振峰值 M_r 、谐振频率 ω_r 与阻尼系数 ζ 的关系

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

由 M_r 估计对应的阻尼系数 $\zeta = 0.29$ 。

根据公式

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

进一步估计 $\omega_r/\omega_n = 0.9$ 。取 $\omega_r = 0.8$, 则有

$$\omega_n = \frac{0.8}{0.9} = 0.89$$

于是, 雕刻机控制系统的二阶近似模型应为

$$G(s) \cong \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.79}{s^2 + 0.52s + 0.79}$$

系统的调节时间 (2%) 为

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.29 \times 0.89} = 15.6s$$

如果系统需要更小的超调, 可以减小 K 的值, 同样按照上述的步骤进行设计。当然本例中, 也可首先求出其相角裕量 $\gamma(\omega)$, 根据公式

$$\gamma(\omega) = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}}$$

估计出 ζ 的值。其他与上同。

5.8 习 题

1. 系统结构图如图 5-40 所示, 试写出系统的频率特性, 并根据频率特性, 求下列信号作用时系统的稳态输出。

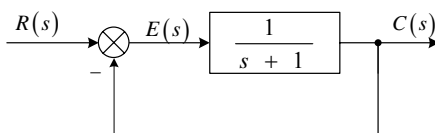


图 5-40 系统结构图

2. 系统的传递函数为 $G(s) = \frac{10}{s(2s+1)}$ ，试绘制开环系统的幅相频率特性曲线。
3. 设系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{(s+1)(2s+1)}$ ，试绘制该系统的开环幅相频率特性曲线。
4. 绘制系统的幅相频率特性曲线，其开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)}$ ($T_1 > T_2$)。
5. 试绘制开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{(s+1)(2s+1)}$ 的开环对数频率特性图。
6. 设系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{5}{s(0.1s+1)}$ ，试绘制该系统的开环对数频率特性图。
7. 设最小相位系统，其开环对数幅频特性如图 5-41 所示。试写出该系统的传递函数。
8. 设系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+\omega_2)}{s(s+\omega_1)(s+\omega_3)(s+\omega_4)}$ ，式中 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ ； $K^* = \omega_4\omega_c^2$ ， ω_c 为开环对数幅频特性的截止频率，试绘制系统的开环对数幅频特性曲线。
9. 最小相位系统对数幅频特性渐进特性如图 5-42 所示，确定系统的开环传递函数。

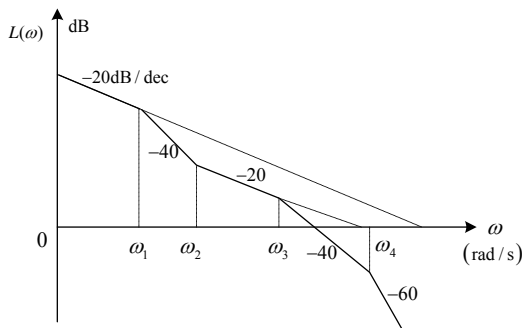


图 5-41 系统开环对数幅频特性

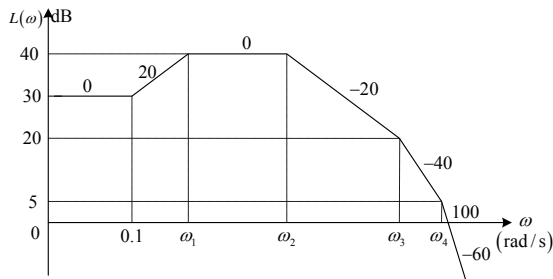


图 5-42 最小相位系统频率特性曲线

10. 已知四个单位负反馈系统的开环幅相频率特性曲线如图 5-43 所示，判断其闭环系统的稳定性。

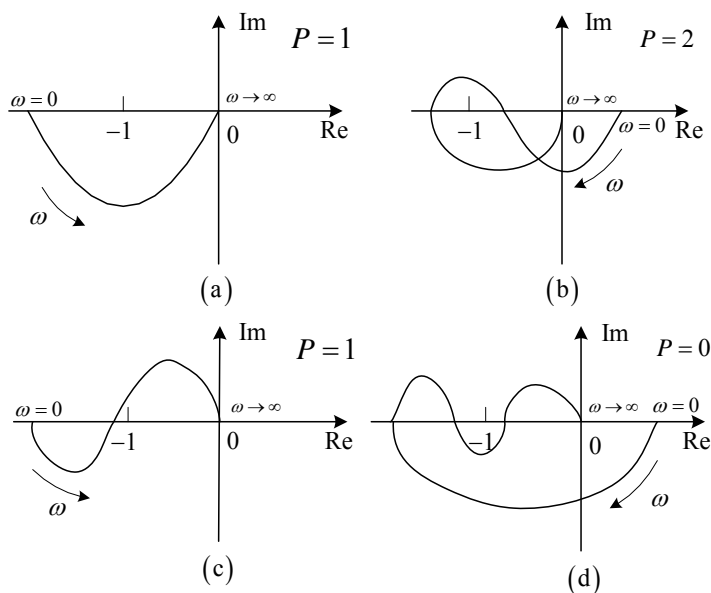


图 5-43 开环幅相频率特性曲线

11. 已知单位反馈系统，其开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s-1}$ ，用奈氏判据判断系统稳定性。
12. 已知单位反馈系统，其开环传递函数为 $G(s) = \frac{L}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ ，用奈氏判据判断系统稳定性。
13. 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{1000(s+1)}{s^2(s+100)}$ ，计算系统的稳定裕量，判断系统的稳定性。
14. 已知系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(0.2s+1)}$ ，
求：
(1) 相角裕度与幅值裕度；
(2) 临界稳定时的开环放大倍数。
15. 已知系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{k}{s(s^2+s+100)}$ ，试求幅值裕度为 10dB 时，系统的开环放大倍数。
16. 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100(\frac{s}{2} + 1)}{s(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{20} + 1)(s + 1)}$$

试求系统的相角裕度与幅值裕度。

17. 已知系统方框图如图 5-44 所示, 试用相角裕度来确定 K_h 的临界值。

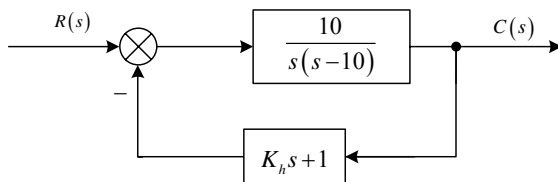


图 5-44 系统方框图

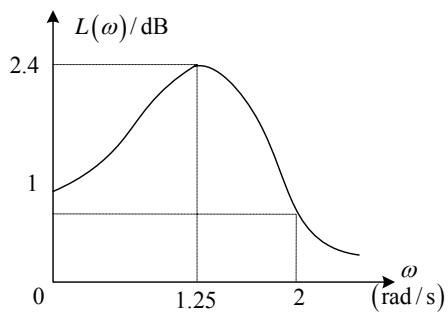


图 5-45 二阶系统闭环幅频特性

18. 如图 5-45 给出二阶系统的闭环幅频特性, 试求:

- (1) 相对谐振峰值 M_r 及谐振频率;
- (2) 求系统的带宽频率 ω_b ;
- (3) 求系统的动态性能指标。

第 6 章 控制系统的校正

在前面的章节中，介绍了对控制系统进行分析的基本理论和基本方法，涉及到的都是系统分析的问题，即在系统的结构和参数已知的情况下，求出系统的性能指标，并分析性能指标与系统参数之间的关系。在对系统进行分析后，常常发现已知系统不满足性能指标的要求，需要对系统进行改进，或是在原有系统的基础上加入其他装置，这就是本章将要介绍的系统校正的方法，也就是根据系统预先给定的性能指标，去设计一个能满足性能要求的控制系统。一个控制系统可视为由控制器和被控对象两大部分组成，当被控对象确定后，对系统的设计实际上归结为对控制器的设计，这项工作称为对控制系统的校正。所谓**校正（Compensation）**，就是在系统中加入一些机构或装置，其参数可以根据需要而改变，使系统整个特性发生变化，从而满足给定的各项性能指标。

目前工程实践中常用的三种校正方法，即串联校正、反馈校正和复合校正。串联校正按校正装置不同又可分为三种情况，超前校正、滞后校正、滞后-超前校正。本章主要介绍控制系统校正的基本概念及几种常见的校正方法，主要阐述利用频率特性进行串联超前、滞后、滞后-超前校正和反馈校正的原理和基本方法。

6.1 控制系统的基本概念

当构成的系统不能满足设计要求的性能指标时，就必须增加合适的元件，按一定的方式连接到原系统中，使重新组合起来的系统满足设计的要求。这些能使系统的控制性能满足设计要求所增添的元件称为**校正元件（或校正装置）**。把由控制器和控制对象组成的系统叫做**原系统（或系统的不可变部分）**，把加入了校正装置的系统称为**校正系统**。为了使原系统的性能指标得到改善，按照一定的方式接入校正装置和选择校正元件参数的过程就是控制系统设计中的校正问题。

按校正装置与原系统的连接方式来分，控制系统的校正可分为串联校正、反馈校正（并联校正）、复合校正三种。

串联校正装置一般接在系统的前向通道中，接在系统误差测量点之后和放大器之前，如图 6-1 所示。

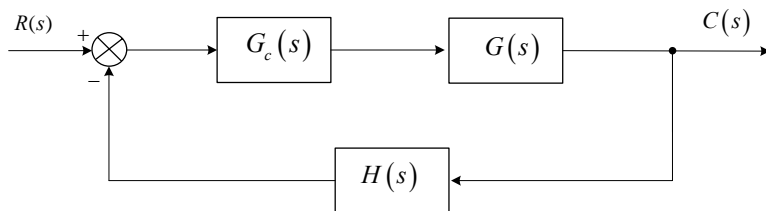


图 6-1 串联校正

反馈校正就是将校正装置反并接在系统前向通道中的一个或几个环节两端，形成局部反馈回路，如图 6-2 所示。

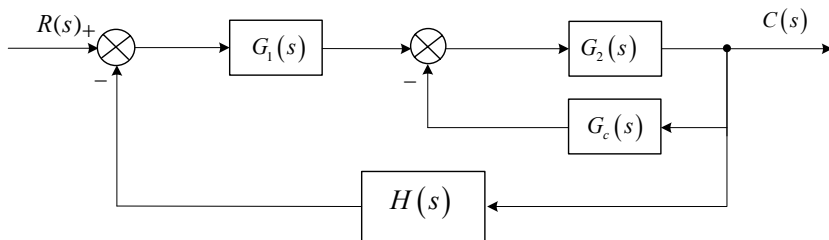


图 6-2 反馈校正

复合校正是在反馈控制回路中，加入前馈校正通路，如图 6-3 所示。

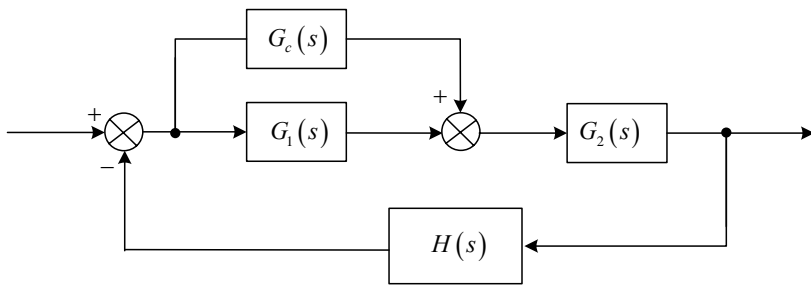


图 6-3 复合校正

在工程应用中，需要采用哪一种连接方式，要根据具体情况而定。通常需要考虑的因素有：系统的物理结构、信号的性质、系统中各点功率的大小、可用元件、还有设计者的经验和经济条件等。一般来讲，串联校正比反馈校正设计简单，也比较容易对系统信号进行变换。由于串联校正通常是由低能量向高能量部位传递信号，加上校正装置本身的能量损耗，必须进行能量补偿。因此，串联校正装置通常由有源网络或元件构成，即其中需要

有放大元件。反馈校正装置的输入信号通常由系统输出端或放大器的输出级供给, 信号是从高功率点向低功率点传递, 因此, 一般不需要放大器。反馈校正可以消除校正回路中元件参数的变化对系统性能的影响, 因此, 若原系统随着工作条件的变化, 它的某些参数变化较大时, 采用反馈校正效果会更好些。在性能指标要求较高的系统中, 常常兼用串联校正与反馈校正两种方式。这些校正装置实现的控制规律有比例、微分、积分等基本规律, 或这些基本规律的组合, 如比例加微分控制规律、比例加积分控制规律、比例加积分加微分控制规律。

6.2 基本控制规律分析

控制系统中基本控制规律有如下几类:

1. 比例控制规律 (P)

比例控制器是放大倍数可调整的放大器, 控制器的输出信号 $m(t)$ 成比例地反应输入信号 $e(t)$, 即

$$m(t) = K_p e(t) \quad (6-1)$$

提高控制器的开环增益, 可以减小系统的稳态误差, 提高系统的精度。但是同时, 控制系统的稳定性却随之降低, 甚至可以造成系统的不稳定。所以在控制系统中, 常将比例控制规律与其他控制规律结合使用, 以提高系统的稳态性能和动态性能。比例控制器的方框图如图 6-4 所示。

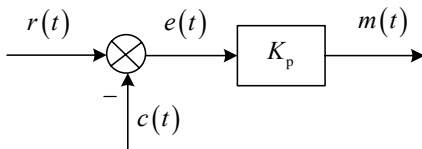


图 6-4 比例控制器方框图

2. 比例-微分控制规律(PD)

比例-微分控制规律的输出信号 $m(t)$ 既与输入信号 $e(t)$ 成比例, 又与输入信号的导数成比例, 即

$$m(t) = K_p e(t) + K_p \tau \frac{de(t)}{dt} \quad (6-2)$$

K_p 为比例系数, τ 为时间常数, 这两个参数均可调。具有 PD 控制器的方框图如图 6-5 所示。

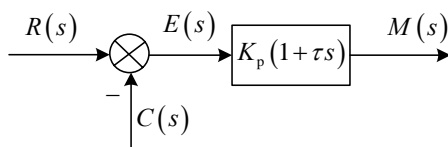


图 6-5 PD 控制器的方框图

由于偏差信号变化率所起的作用，比例-微分控制规律能给出使系统提前制动的信号，有预见性，从而改善系统的动态特性。应该注意的是微分控制规律不能单独作用，因为它只在暂态过程中起作用，当系统进入稳态时，偏差信号不变化，微分控制规律不起作用。单独使用微分控制规律，稳态时相当于信号断路，控制系统无法正常工作。微分控制器的缺点是容易放大噪声。

3. 积分控制规律 (I)

具有积分控制规律的控制器的输出信号 $m(t)$ 成比例地反映输入信号 $e(t)$ 的积分，即

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (6-3)$$

式中 K_i 是比例系数，可调。积分控制器的方框图如图 6-6 所示。

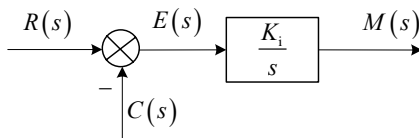


图 6-6 积分控制器的方框图

在串联校正中，采用积分控制器可以提高系统的类型数（无差度），有利于提高系统的稳态性能，但积分控制增加了一个位于原点的开环极点，使信号产生 90° 的相角滞后，不利于系统的稳定。所以不宜采用单一的积分控制器。

4. 比例-积分控制规律 (PI)

比例-积分控制规律的输出信号 $m(t)$ 与输入信号 $e(t)$ 和它的积分成比例。

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (6-4)$$

式中 K_p 为比例系数， T_i 为时间常数，这两个参数均可调。具有比例积分控制规律的系统方框图如图 6-7 所示。

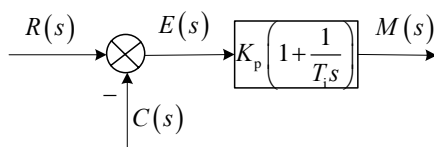


图 6-7 具有比例-积分控制规律的系统方框图

PI 控制使系统增加了一个位于原点的开环极点，同时增加了一个位于左半 s 平面的开环零点 $z = -1/T_i$ 。增加的极点可提高系统的类型数，减小或消除稳态误差，改善系统的稳态性能；增加的负实零点可减小系统的阻尼程度，克服 PI 控制器对系统稳定性及动态过程产生的不利影响。只要积分时间常数 T_i 足够大，就可大大减小 PI 控制器对系统稳定性的不利影响。所以，PI 控制器主要用来改善系统的稳态性能。

5. 比例-积分-微分控制规律 (PID)

比例-积分-微分控制规律的输出信号 $m(t)$ 与输入信号 $e(t)$ 及其积分微分同时成比例。即

$$m(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_P \tau e(t) \quad (6-5)$$

比例-积分微分控制规律的方框图如图 6-8 所示。

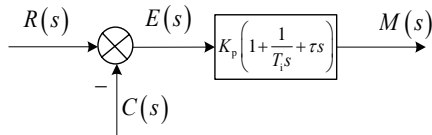


图 6-8 比例-积分-微分控制规律的方框图

PID 控制器除了使系统的类型数提高以外，还可使系统增加两个负实零点，更有利于改善系统的动态性能。所以 PID 控制规律在控制系统中得到广泛应用。

6. 例题

例 1 设具有 PD 控制器的控制系统方框图如图 6-9 所示。试分析比例-微分控制规律对系统性能的影响。

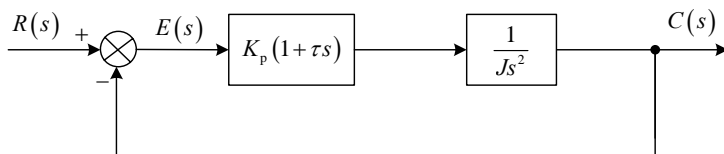


图 6-9 PD 控制方框图

解

无 PD 控制器时，系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + \frac{1}{Js^2}} = \frac{1}{Js^2 + 1}$$

则系统的特征方程为

$$Js^2 + 1 = 0$$

可以看出阻尼比等于零，输出信号具有不衰减的等幅振荡形式。

加入 PD 控制器后，系统的闭环传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + \tau s) \frac{1}{Js^2}}{1 + K_p(1 + \tau s) \frac{1}{Js^2}} = \frac{K_p(1 + \tau s)}{Js^2 + K_p(1 + \tau s)}$$

系统的特征方程为

$$Js^2 + K_p(1 + \tau s) = 0$$

阻尼比

$$\zeta = \tau \sqrt{K_p} / 2\sqrt{J} > 0$$

此时系统是闭环稳定的。

由此例可以看出 PD 控制规律可以改善系统的稳定性，提高系统的动态特性。

例 2 设具有 PI 控制器的控制系统方框图如图 6-10 所示。试分析比例-积分控制规律对系统性能的影响。

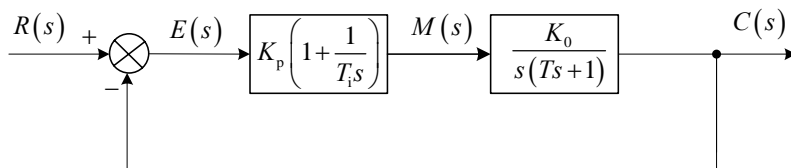


图 6-10 PI 控制方框图

解

没有加入 PI 控制器时, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_0}{s(Ts + 1)}$$

加入 PI 控制器后, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_0 K_p (T_i s + 1)}{T_i s^2 (Ts + 1)}$$

可见, 系统由原来的 I 型系统变为 II 型系统, 故对于斜坡函数输入信号 $r(t) = Rt$, 原系统的稳态误差为 R/K_0 , 加入 PI 控制器后, 稳态误差为零。可见, PI 控制器提高了系统的控制精度, 改善了系统的稳态性能。采用 PI 控制后, 系统的特征方程为

$$T_i Ts^3 + T_i s^2 + K_p K_0 T_i s + K_p K_0 = 0$$

劳斯判据

s^3	$T_i T$	$K_p K_0 T_i$
s^2	T_i	$K_p K_0$
s^1	$\frac{K_p K_0 T_i^2 - K_p K_0 T_i T}{T_i}$	0
s^0	$K_p K_0$	

由劳斯判据知, 只要满足 $T_i > T$, 就可满足系统稳定的条件。

由以上分析知, 只要合适选择 PI 控制器的参数, 就可在满足系统稳定性要求的前提下, 改善系统的稳态性能。

6.3 串联超前校正

如果设计的系统要满足的性能指标属于频域特征量, 则通常采用频率特性校正方法。用频率法对系统进行校正的基本思路是: 通过加入校正装置, 改变系统开环频率特性的形状。超前校正的主要作用是在中频段产生足够大的超前相角, 以补偿原系统过大的滞后相角。常用的超前校正网络有有源网络和无源网络, 我们以无源网络为例来说明超前网络的特性。

6.3.1 超前校正装置

典型的无源超前网络如图 6-11 所示。

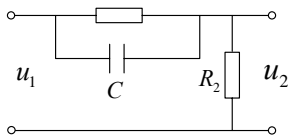


图 6-11 无源超前网络

校正系统的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + R_1 // \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{R_1Cs + 1}} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} (R_1Cs + 1)}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} Cs + 1}$$

$$\text{令 } T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C, \quad a = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

可得装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

由于 $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$ ，所以无源超前装置具有幅值衰减的作用，衰减系数为 $\frac{1}{a}$ 。给无源

校正装置接一放大系数为 a 的比例放大器，可补偿校正装置的幅值衰减作用，这时，传递函数可写为

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

可以看出，超前校正是一种带惯性的 PD 控制器，能提供正的相角。

将 $s = j\omega$ 代入

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\omega aT}{1 + j\omega T}$$

超前校正网络所提供的相角

$$\phi = \arctg a\omega T - \arctg \omega T = \arctg \frac{\omega aT - \omega T}{1 + a\omega^2 T^2}$$

由于 $a > 1$ ，可以看出超前校正网络所提供的相角为正。

令 $\frac{d\phi}{d\omega} = 0$ ，求得产生的最大相角及最大相角处的频率。

$$\phi_m = \sin^{-1} \frac{a-1}{a+1}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T_c}$$

最大超前相角 ϕ_m 的大小取决于 a 值的大小。当 a 值趋于无穷大时，得单个超前装置的最大超前相角 $\phi_m = 90^\circ$ 。超前相角 ϕ_m 随 a 值的增加而增大，但并不成比例。超前装置本质上是高通电路，它对高频噪声的增益较大，对频率较低的控制信号的增益较小。因此 a 值过大会降低系统的信噪比， a 值较小则校正装置的相位超前作用不明显。一般情况下， a 值的选择范围在 5~10 之间比较合适。

超前校正装置的对数频率特性图如图 6-12 所示，由对数幅频特性更能清楚看到超前装置的高通特性，其最大的幅值增益为

$$|G_c(j\omega_m)| = 20 \lg \sqrt{1 + (a\omega_m T_c)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega_m T_c)^2} = 20 \lg \sqrt{a} = 10 \lg a$$

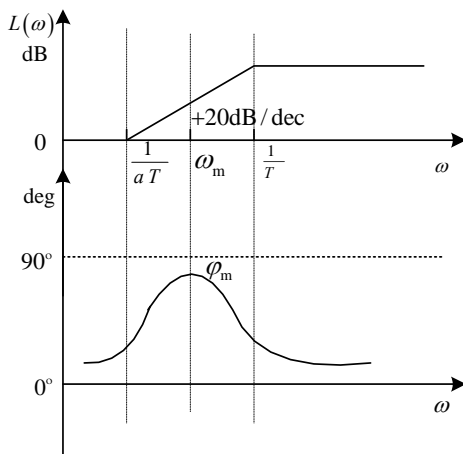


图 6-12 超前校正装置频率特性图

6.3.2 超前校正装置参数的确定

超前校正的主要作用是在中频段产生足够大的超前相角，以补偿原系统过大的滞后相角。超前网络的参数应根据相角补偿条件和稳态性能的要求来确定。

1. 超前校正设计步骤

超前校正装置设计的步骤如下:

- (1) 根据稳态误差的要求, 确定开环增益 K ;
- (2) 根据所确定的开环增益 K , 画出未校正系统的 bode 图, 计算未校正系统的相位裕度 γ ;
- (3) 由给定的相位裕度值 γ , 计算超前校正装置提供的相位超前量 φ , 即

$$\varphi = \varphi_m = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{校正后}}}{\gamma''} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{校正前}}}{\gamma} + \varepsilon \leftarrow \text{补偿角度}$$

ε 是追加的一个角度, 由于超前校正装置的引入, 使原系统截止频率增大, 造成所提供的相角裕度减小, ε 的加入是为了弥补这个减小的相角。 ε 值通常是这样估计的: 如果未校正系统的开环对数幅频特性在截止频率处的斜率为 -40dB/dec , 一般取 $\varepsilon = 5^\circ \sim 10^\circ$; 如果为 -60dB/dec 则取 $\varepsilon = 15^\circ \sim 20^\circ$ 。

- (4) 根据所确定的最大相位超前角 φ_m 按

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

算出 a 的值。

- (5) 计算校正装置在 ω_m 处的幅值 $10\lg a$ 。由未校正系统的对数幅频特性曲线, 求得其幅值为 $-10\lg a$ 处的频率, 该频率 ω_m 就是校正后系统的开环截止频率 ω_c'' , 即 $\omega_c'' = \omega_m$ 。

$$L(\omega_c'') = L(\omega_c'') + 10\lg a = 0$$

- (6) 确定校正网络的转折频率 ω_1 和 ω_2 。

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}}, \quad \omega_2 = \omega_m \sqrt{a}$$

- (7) 画出校正后系统的 bode 图, 并演算相位裕度是否满足要求。如果不满足, 则需增大 ε 值, 从第 3 步开始重新进行计算。

2. 超前校正参数确定例题

例 3 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$, 设计一个超前校正装置, 需

要满足的性能指标如下:

- 校正后系统的静态速度误差系数 20s^{-1} ;
- 相位裕度 $\gamma \geq 50^\circ$;
- 幅值裕度不小于 1dB 。

解

(1) 根据对静态速度误差系数的要求, 确定系统的开环增益 K 。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4K}{s(s+2)} = 20, \quad K = 10$$

当 $K = 10$ 时, 未校正系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{\omega \sqrt{1 + (\frac{\omega}{2})^2}} \angle -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{2}$$

(2) 绘制未校正系统的波特图。

计算未校正情况下的相角裕度

$$\begin{aligned} 20 \lg \frac{20}{\omega \sqrt{1 + (\frac{\omega}{2})^2}} &= 0 \\ \frac{20}{\omega \sqrt{1 + (\frac{\omega}{2})^2}} &= 1 \end{aligned}$$

解得

$$\omega = 6.17, \quad \gamma = 17.96^\circ$$

可见相角裕度不满足要求, 需要校正。

(3) 根据相位裕度的要求确定超前校正网络的相位超前角

$$\phi = \gamma - \gamma_1 + \varepsilon = 50^\circ - 17^\circ + 5^\circ = 38^\circ$$

$$(4) \quad a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 38^\circ}{1 - \sin 38^\circ} = 4.2$$

(5) 超前校正装置在 ω_m 处的幅值为

$$10 \lg a = 10 \lg 4.2 = 6.2 \text{ dB}$$

校正系统的开环对数幅值为 -6.2 dB 时所对应的频率就是校正后系统的截止频率 ω_c 。

当 $20 \lg 20 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}} = -6.2$ 时, 可以计算出截止频率 $\omega = \omega_m = 8.93 \approx 9 \text{ rad/s}$

(6) 计算超前校正网络的转折频率

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = \frac{9}{4.2} = 4.4 \\ \omega_2 &= \omega_m \sqrt{a} = 9 \sqrt{4.2} = 18.4 \\ G_c(s) &= \frac{s + 4.4}{s + 18.2} = 0.238 \frac{1 + 0.227s}{1 + 0.054s} \end{aligned}$$

为了补偿因超前校正网络的引入而造成系统开环增益的衰减, 必须使附加放大器的放大倍数为 $a = 4.2$ 。

(7) 校正后系统的 bode 图如图 6-13 所示, 其开环传递函数为

$$G_c(s)G_o(s) = \frac{4.2 \times 40(s + 4.4)}{(s + 18.2)s(s + 2)} = \frac{20(1 + 0.227s)}{s(1 + 0.5s)(1 + 0.0542s)}$$

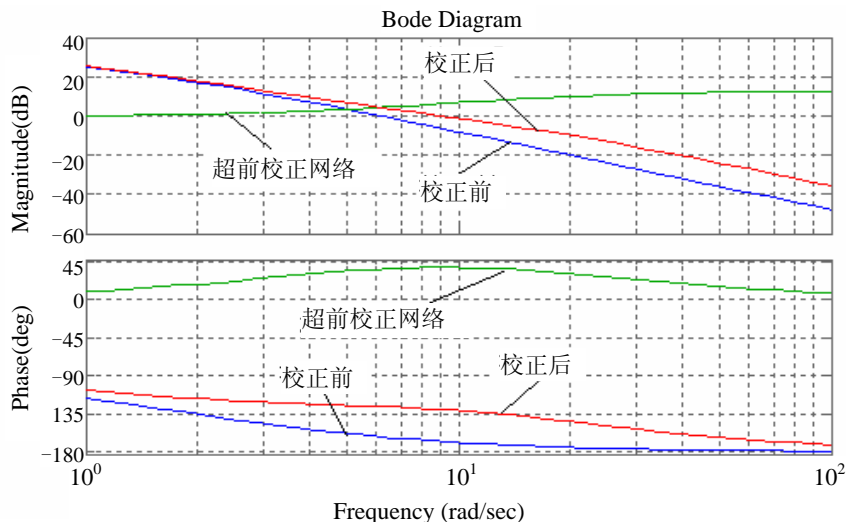


图 6-13 系统校正前后 bode 图

(8) 检验性能指标。

由系统的 bode 图可以看出相角裕度、幅值裕度均满足条件。如不满足条件, 需要重新设计参数。也可以通过计算检验性能指标。

例 4 为满足要求的稳态性能指标, 一单位反馈伺服系统的开环传递函数为

$$G(j\omega) = \frac{200}{j\omega(0.1j\omega + 1)}$$

试设计一个无源校正网络, 使已校正系统的相位裕度不小于 45° , 截止频率不低 50 rad/s 。

解

(1) 绘制系统的 bode 图如图 6-14 所示。

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg \frac{200}{\omega} & \omega < 10 \\ 20\lg \frac{200}{\omega \cdot 0.1\omega} & \omega > 10 \end{cases}$$

$$20\lg |L(\omega)| = 0$$

解得

$$\omega_c = 44.7$$

$$\lambda = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c) = 12.6^\circ$$

稳定裕度不满足性能指标要求, 需串联一超前校正网络。

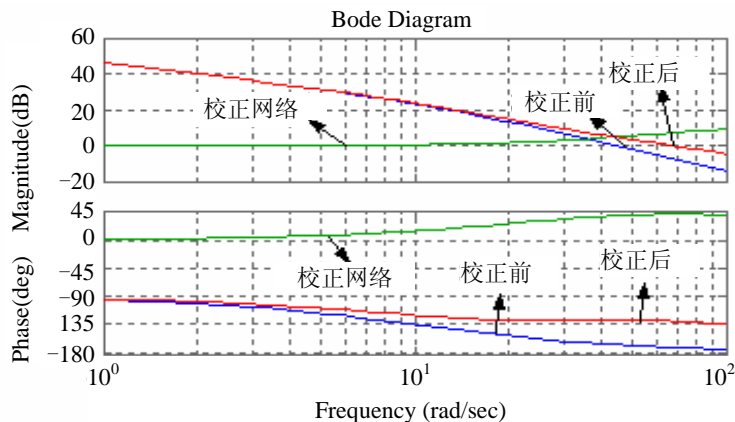


图 6-14 校正前后系统 Bode 图

(2) 计算超前网络提供的相角, 取 $\varepsilon = 10^\circ$

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma + \varepsilon = 45^\circ - 12.6^\circ + 10^\circ = 42.4^\circ$$

(3) 求 α :

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 5$$

(4) 解 ω_c'' :

$$L(\omega_c'') = L(\omega_c') + 10 \lg \alpha = 0$$

$$\omega_m = \omega_c'' = 67$$

(5) $\omega_m = 1/(T\sqrt{a})$, $T = 0.0067$

由

$$G_C(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

得

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.033s}{1 + 0.0067s}$$

(6) 验算, 绘制校正后系统的 bode 图如图 6-14 所示。

$$\gamma'' = 180^\circ + \varphi_m + \varphi(\omega_c'') = 180^\circ + 42.4^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c'') = 50.8^\circ > 45^\circ$$

$$\omega_c'' = 67 > 50$$

所以接入校正装置后, 满足系统的性能指标要求。

3. 串联超前校正系统的特点

通过上面的例题, 我们可看到串联超前校正对系统性能有如下影响:

- (1) 增加开环频率特性在剪切频率附近的正相角, 从而提高了系统的相角裕度;
- (2) 减小对数幅频特性在幅值穿越频率上的负斜率, 从而提高了系统的稳定性;
- (3) 提高了系统的频带宽度, 从而可提高系统的响应速度;

(4) 不影响系统的稳态性能, 但若原系统不稳定或稳定裕量很小, 且开环相频特性曲线在幅值穿越频率附近有较大的负斜率时, 不宜采用相位超前校正。因为随着幅值穿越频率的增加, 原系统负相角增加的速度将超过超前校正装置正相角增加的速度, 超前网络就不能满足要求。

6.4 串联滞后校正

串联滞后校正装置的主要作用, 是在高频段上造成显著的幅值衰减, 当在控制系统中采用串联滞后校正时, 其高频衰减特性可以保证系统在有较大开环放大系数的情况下获得满意的相角裕度或稳态性能。

6.4.1 滞后校正装置

典型的无源滞后装置如图 6-15 所示。

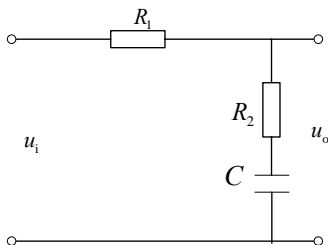


图 6-15 无源滞后装置

滞后校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs}$$

令

$$T = (R_1 + R_2)C$$

$$b = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

可得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$

将 $s = j\omega$ 代入得到滞后校正的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega bT}{1 + j\omega T}$$

按照超前校正网络的推导方法, 可得到滞后装置所得最大相角处的频率。

$$\omega_m = \frac{1}{T_c \sqrt{b}}$$

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-b}{1+b}$$

对数幅频特性的高频衰减量为:

$$20 \lg |G_c(j\omega_m)| = 20 \lg \sqrt{1 + (b\omega_m T_c)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega_m T_c)^2} = 20 \lg b$$

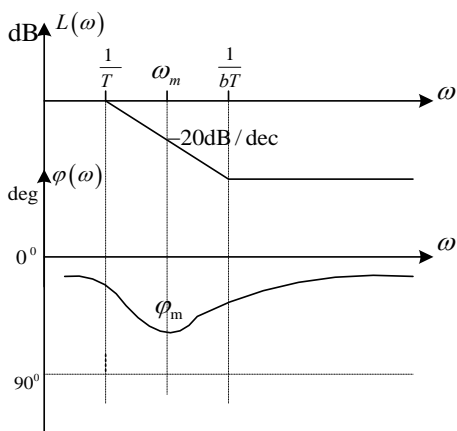


图 6-16 无源滞后网络的 bode 图

最大滞后相角与 b 值有关, 当 b 趋于零时, 最大滞后相角为 -90° , 当 $b=1$ 时, 校正装置实际是一个比例环节。滞后校正电路是一低通滤波网络, 它对高频噪声有一定的衰减作用。图 6-16 是滞后校正装置的 bode 图。

从图 6-16 所示的对数频率特性图中可清楚地看到, 最大的幅值衰减为 $20 \lg b$, 频率范围是大于 $1/(bT)$ 范围。在实际应用中, b 值的选取范围约为 $0.06 \sim 0.2$, 通常取 $b=1$ 。

6.4.2 滞后校正装置参数的确定

当系统的动态性能指标满足要求，而稳态性能达不到预定指标时，可采用滞后校正。其作用是提高系统的开环放大倍数。

1. 滞后校正系统设计的步骤

滞后校正系统设计的步骤如下：

(1) 根据稳态性能要求，确定开环增益 K ；
 (2) 利用已确定的开环增益，画出未校正系统对数频率特性曲线，确定未校正系统的截止频率 ω_c 、相位裕度 γ 和幅值裕度 $h(\text{dB})$ ；

(3) 选择不同的 ω_c'' ，计算或查出不同的 γ 值，在波特图上绘制 $\gamma(\omega_c'')$ 曲线；根据相位裕度 γ'' 要求，选择已校正系统的截止频率 ω_c'' ；考虑滞后网络在新的截止频率 ω_c'' 处会产生一定的相角滞后 $\varphi_c(\omega_c'')$ ，所以有下面的等式： $\omega_c(\omega_c'')$

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma'' & = & \gamma(\omega_c'') & + & \varphi_c(\omega_c'') \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{给定相角裕度} & & \text{未校正系统相角裕度} & & \text{校正装置提供的滞后相角} \end{array}$$

根据上式的计算结果，可以得出 $\gamma(\omega_c'')$ 的方程，计算出满足相位裕度的 ω_c'' 值，也可以在 $\gamma(\omega_c'')$ 曲线上可查出相应的 ω_c'' 值。 $\varphi_c(\omega_c'')$ 一般取值在 $-6^\circ \sim -14^\circ$ 之间。

(4) 计算滞后网络参数；

要保证已校正系统的截止频率为上一步所选的 ω_c'' 值，就必须使滞后网络的衰减量 $20\lg b$ 在数值上等于未校正系统在新截止频率 ω_c'' 上的对数幅频值 $20\lg|G(j\omega_c'')|$ ，该值在未校正系统的对数幅频曲线上可以查出，也可以计算得出。根据下面的方程可以算出 b 值。

$$20\lg b + 20\lg|G(j\omega_c'')| = 0$$

由 b 值，可以根据下式算出滞后网络的 T 值。

$$\frac{1}{bT} = (0.1 \sim 0.2)\omega_c''$$

(5) 验证各项性能指标。

2. 例题

例5 控制系统如图 6-17 所示。设计滞后校正装置，以满足如下要求：

- 校正后的静态速度误差系数等于 30s^{-1} ；
- 相位裕度不低于 40° ；
- 幅值裕度不小于 10 dB ；
- 截止频率不小于 2.3 rad/s 。

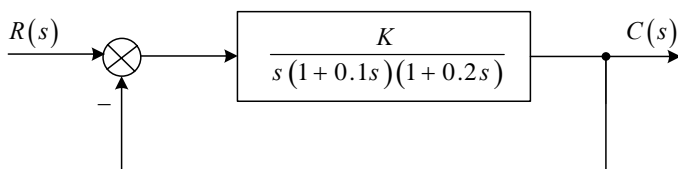


图 6-17 方框图

解

(1) 首先确定开环增益 K

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K = 30$$

(2) 未校正系统开环传递函数应取

$$G(s) = \frac{30}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

画出未校正系统的对数幅频渐进特性曲线, 如图 6-18 所示。由图可得 $\omega_c = 12\text{rad/s}$, 也可以通过下面的计算得到。

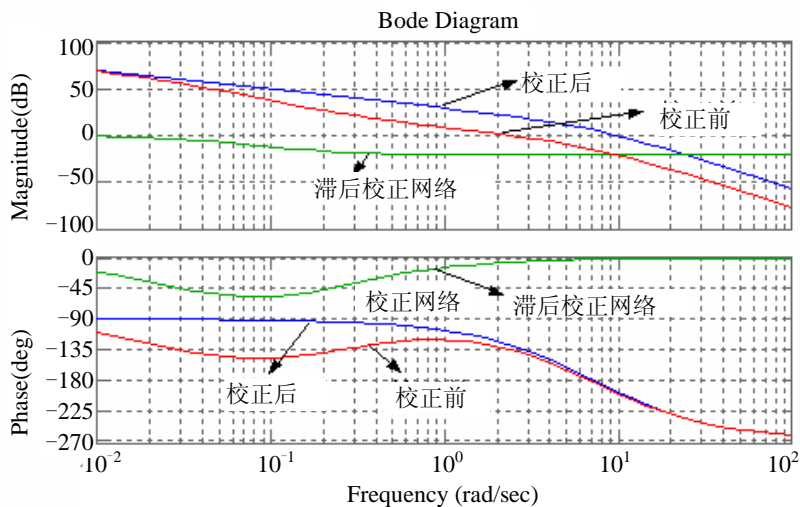


图 6-18 校正前后系统 bode 图

未校正系统的频率特性可写为:

$$G(j\omega) = \frac{30}{j\omega(j0.1\omega + 1)(j0.2\omega + 1)}$$

当 $\omega = \omega_c$ 时, $20\lg|G(j\omega)| = 0$, 可以算出 $\omega_c = 12\text{rad/s}$ 。

$\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ 时, $\omega_g = 7.07 \text{ rad/s}$, $\omega_g < \omega_c$, 所以系统不稳定。

未校正系统的幅值裕度:

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \arctg \omega_c \times 0.1 - \arctg \omega_c \times 0.2 \\ &= 90^\circ - 50.19^\circ - 67.38^\circ = -27.6^\circ\end{aligned}$$

从上面可以看出, 未校正系统不稳定, 且截止频率远大于要求值。在这种情况下, 采用串联超前校正无效的。所以本题考虑选用滞后校正。

(3) 设校正后截止频率为 ω_c'' 。则未校正系统在 ω_c'' 处的相角裕度为:

$$\gamma(\omega_c'') = 90^\circ - \arctg(0.1\omega_c'') - \arctg(0.2\omega_c'')$$

校正后的相角裕度为 $\gamma'' = 40^\circ$ 。考虑到滞后网络在新的截止频率 ω_c'' 处, 会产生一定的相角滞后, 设其为 $\varphi_c(\omega_c'')$, 可以得到下面的关系式:

$$\gamma'' = \gamma(\omega_c'') + \varphi(\omega_c'')$$

在此题中选择 $\varphi_c(\omega_c'') = -6^\circ$, 所以可以得到下面的方程:

$$\gamma(\omega_c'') = 90^\circ - \arctg(0.1\omega_c'') - \arctg(0.2\omega_c'') \gamma'' - \varphi(\omega_c'') = 40^\circ - (-6^\circ) = 46^\circ$$

解此方程, 可以得到满足要求的相角裕度的剪切频率值。也可以通过画图得到, 绘制 $\gamma(\omega_c'')$ 与 ω_c'' , 可查得 $\omega_c'' = 2.7 \text{ rad/s}$ 时, $\gamma(2.7) = 46.5^\circ$ 可满足要求。由于指标要求 $\omega_c'' \geq 2.3 \text{ rad/s}$, 故 ω_c'' 值可在 $2.3 \sim 2.7 \text{ rad/s}$ 范围内任取。考虑到 ω_c'' 取值较大时, 已校正系统响应速度较快, 滞后网络时间常数 T 值较小, 便于实现, 故选取 $\omega_c'' = 2.7 \text{ rad/s}$ 。

(4) 计算滞后网络参数

$$20 \lg b + 20 \lg |G(j\omega_c'')| = 0$$

可以解出: $b = 0.09$

由 b 值, 可以根据下式算出滞后网络的 T 值。

$$\frac{1}{bT} = (0.1 \sim 0.2)\omega_c'', \text{ 此处我们取系数为 } 0.1。$$

$$T = \frac{1}{0.1\omega_c''b} = 41.1 \text{ s}, \quad bT = 3.7 \text{ s}$$

则滞后网络的传递函数

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} = \frac{1 + 3.7s}{1 + 41s}$$

(5) 验算指标(相位裕度和幅值裕度)

$$\varphi_c(\omega_c'') = \arctg bT\omega_c'' - \arctg T\omega_c'' = \arctg \frac{(b-1)T\omega_c''}{1 + b(T\omega_c'')^2} = -5.2^\circ$$

$$\gamma'' = \gamma(\omega_c'') + \varphi(\omega_c'') = 46.5^\circ - 5.2^\circ = 41.3^\circ > 40^\circ, \text{ 满足要求。}$$

校正后的相位穿越频率: $\varphi(\omega'_g) = -180^\circ$, $\omega'_g = 6.8 \text{ rad/s}$ 。

幅值裕度 $h(\text{dB}) = -20 \lg |G_c(j\omega'_g)G_o(j\omega'_g)| = 10.5 \text{ dB} > 10 \text{ dB}$

此时满足系统要求的性能指标。

例 6 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

试设计串联校正装置, 满足 $K_v = 8 \text{ rad/s}$, 相位裕度 40° 。

解

$$(1) K = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_v = 8$$

(2) 未校正系统的频域表达式如下, 绘制系统的 bode 图如图 6-19 所示。

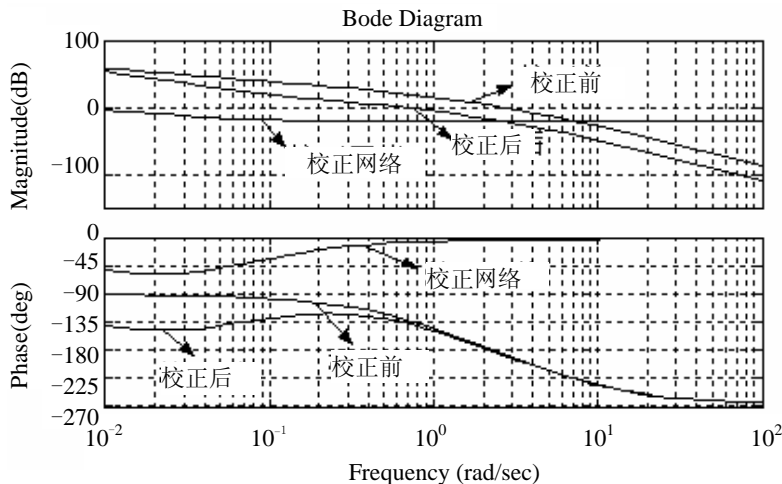


图 6-19 系统 Bode 图

$$G(j\omega) = \frac{8}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{8}{\omega} & \omega < 1 \\ 20 \lg \frac{8}{\omega \cdot \omega} & 1 < \omega < 5 \\ 20 \lg \frac{8}{\omega \cdot \omega \cdot 0.2\omega} & \omega > 5 \end{cases}$$

令 $L(\omega)=0$, 可得

$$\omega_c = 2.8$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan(0.2\omega_c) = -9.5^\circ < 40^\circ$$

不满足性能要求，需加以校正。选用滞后网络校正。

(3) 设

$$\varphi_c(\omega_c'') = -6^\circ$$

则

$$\varphi(\omega_c'') = \gamma^* + 6^\circ = 46^\circ$$

得

$$-90^\circ - \arctan \omega_c'' - \arctan(0.2\omega_c'') = 46^\circ$$

$$\arctan \omega_c'' + \arctan(0.2\omega_c'') = 44^\circ$$

所以

$$\omega_c'' = 0.72$$

(4) 根据

$$20\lg b + L(\omega_c'') = 0$$

得

$$b = 0.09$$

由

$$\frac{1}{bT} = 0.1\omega_c'' \quad (\text{系数取为 } 0.1)$$

得

$$T = 154.3$$

故选用的串联滞后校正网络为

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} = \frac{1 + 13.9s}{1 + 154.3s}$$

(5) 验算，校正后系统的 bode 图如图 6-19 所示。

$$\begin{aligned} \gamma'' &= 180^\circ + \varphi_c(\omega_c'') + \varphi(\omega_c'') \\ &= 180^\circ + \arctan(13.9\omega_c'') - \arctan(154.3\omega_c'') - 90^\circ - \arctan \omega_c'' - \arctan(0.2\omega_c'') \\ &= 40.9^\circ > 40^\circ \end{aligned}$$

满足系统的性能指标。

3. 滞后串联校正的特点

(1) 在保持系统开环放大系数不变的情况下，减小剪切频率，从而增加了系统的相角裕度，结果是提高了系统的相对稳定性；

(2) 在保持系统相对稳定性不变的情况下, 可以提高系统的开环放大系数, 改善系统的稳态性能;

(3) 由于降低了幅值穿越频率, 系统带宽变窄, 使系统的响应速度降低, 但系统抗干扰能力增强。

6.5 串联滞后-超前串联校正

实际中, 当未校正系统不稳定, 且对校正后的系统的动态和静态性能(响应速度、相位裕度和稳态误差)均有较高要求时, 单独采用超前校正或单独采用滞后校正都不能获得满意的动态和稳态性能。在这种情况下, 可考虑采用滞后-超前校正方式。串联滞后-超前校正, 综合应用了滞后和超前校正各自的特点, 即利用校正装置的超前部分来增大系统的相位裕度, 以改善其动态性能; 利用它的滞后部分来改善系统的静态性能。

6.5.1 串联滞后-超前校正装置

典型的阻容滞后-超前电路如图 6-20 所示。

传递函数为

$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2}} \\
 &= \frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1} = \frac{(T_as+1)(T_bs+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}
 \end{aligned}$$

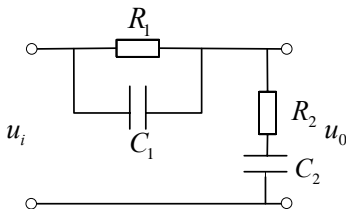


图 6-20 无源滞后-超前网络

令

$$T_a = R_1 C_1, \quad T_b = R_2 C_2$$

则有

$$\begin{aligned} T_a T_b &= T_1 T_2 \\ T_1 + T_2 + R_1 C_2 &= T_a + T_b \end{aligned}$$

令

$$\frac{T_a}{T_1} = \frac{T_2}{T_b} = a$$

则有

$$\begin{aligned} T_1 &= a T_a, \quad T_2 = T_b / a \\ a T_a + \frac{T_b}{a} &= T_a + T_b + R_1 C_2, \end{aligned}$$

a 是该方程的解。

所以传递函数也可以写为

$$G_c(s) = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{(a T_a s + 1)(\frac{T_b}{a} s + 1)}$$

写成转折频率的关系为：

$$G_c(s) = \frac{(s + \omega_a)(s + \omega_b)}{(s + \omega_a / a)(s + a \omega_b)}$$

设 $T_b > T_a$, $a > 1$

则上式分别与滞后装置和超前装置的传递函数形式相同，故具有滞后-超前的作用。

将 $s = j\omega$ 代入得到系统的频率特性

$$G_c(j\omega) = \frac{(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1)}{(a T_a j\omega + 1)(\frac{T_b}{a} j\omega + 1)}, \quad \text{滞后-超前校正的 bode 图如图 6-21 所示。}$$

求相角为零时的角频率 ω_0

$$\varphi(\omega_0) = \arctg T_a \omega_0 + \arctg T_b \omega_0 - \arctg a T_a \omega_0 - \arctg \frac{T_b}{a} \omega_0 = 0$$

$$\varphi(\omega_0) = \arctg \frac{(T_a + T_b)\omega_0}{1 - T_a T_b \omega_0^2} - \arctg \frac{(a T_a + \frac{T_b}{a})\omega_0}{1 - a T_a \frac{T_b}{a} \omega_0^2} = 0$$

$$T_a T_b \omega_0^2 = 1$$

最后可以得出： $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_a T_b}}$

当 $\omega < \omega_0$ 的频段，校正网络具有相位滞后特性；

$\omega > \omega_0$ 的频段，校正网络具有相位超前特性。

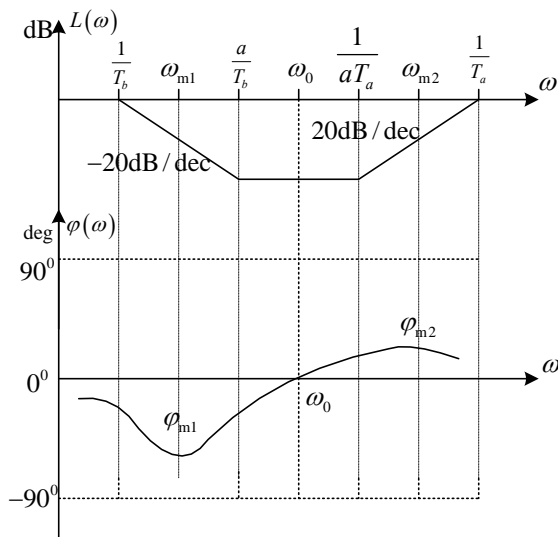


图 6-21 滞后-超前网络的 bode 图

6.5.2 串联滞后-超前校正参数的确定

前面介绍的串联超前校正主要是利用超前装置的相角超前特性来提高系统的相角裕量或相对稳定性，而串联滞后校正则是利用滞后装置在高频段的幅值衰减特性来提高系统的开环放大系数，从而改善系统的稳态性能。当对系统的动态性能及稳态性能均有要求时，可以考虑应用串联滞后-超前校正。

1. 滞后-超前校正装置的设计步骤

从频率响应的角度来看，串联滞后校正主要用来校正开环频率的低频区特性，而超前校正主要用于改变中频区特性的形状和参数。因此，在确定参数时，两者基本上可独立进行。滞后校正与超前校正独立设计时的设计步骤如下：

(1) 根据稳态性能要求，确定开环增益 K ；

(2) 绘制未校正系统的对数幅频特性, 求出未校正系统的截止频率 ω_c 、相位裕度 γ 及幅值裕度 $h(\text{dB})$ 等;

(3) 根据超前校正的方法设计超前校正装置参数。超前部分的设计也可以根据经验, 选择频率从 -20dB 变为 -40dB 的交接频率为网络超前部分的转折频率。

(4) 根据滞后校正的方法设计滞后校正装置的参数。

(5) 校验已校正系统开环系统的各项性能指标。

在设计中也经常采取经验的方法, 下面介绍一种常见的根据经验设计滞后-超前校正参数的方法, 步骤如下:

(1) 根据要求确定开环增益 K ;

(2) 绘制校正系统对数频率特性, 确定剪切频率、相角裕度、幅值裕度;

(3) 在对数幅频特性上, 选频率从 -20dB 变为 -40dB 的交接频率为网络超前部分的转折频率 (ω_b)。

(4) 响应速度选择校正后的剪切频率 (ω_c''), 并由下式确定 a :

$$20\lg a = L(\omega) + 20\lg(\omega_c'') - 20\lg \omega_b$$

(5) 由相角裕度要求估算网络滞后部分转折频率 ω_a , 于是

$$G_c(s) = \frac{(s + \omega_a)(s + \omega_b)}{(s + \omega_a/a)(s + a\omega_b)}$$

(6) 绘制校正后系统的频率特性, 验证系统的性能指标。

2. 例题

例7 单位反馈系统其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(\frac{s^2}{37^2} + \frac{2 \times 0.57}{37}s + 1)}$$

设计滞后-超前校正装置, 满足下面的性能指标。

(1) 稳态误差系数 $K_v \geq 375$;

(2) 相角裕度 $\gamma \geq 48^\circ$;

(3) 剪切频率 $\omega_c = 25\text{s}^{-1}$ 。

解

(1) 根据给定的稳态误差系数, 确定系统的开环增益。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK}{s(\frac{s^2}{37^2} + \frac{2 \times 0.57}{37}s + 1)} = 375$$

$$K = 375$$

$$G(s) = \frac{375}{s(\frac{s^2}{37^2} + \frac{2 \times 0.57}{37}s + 1)}$$

(2) 确定未校正系统的相位裕度, 系统的 bode 图如图 6-22。

$$\omega_c = 25, \gamma = 35^\circ$$

系统稳定, 但是稳态性能和动态性能都需要改进。需要加入校正装置。

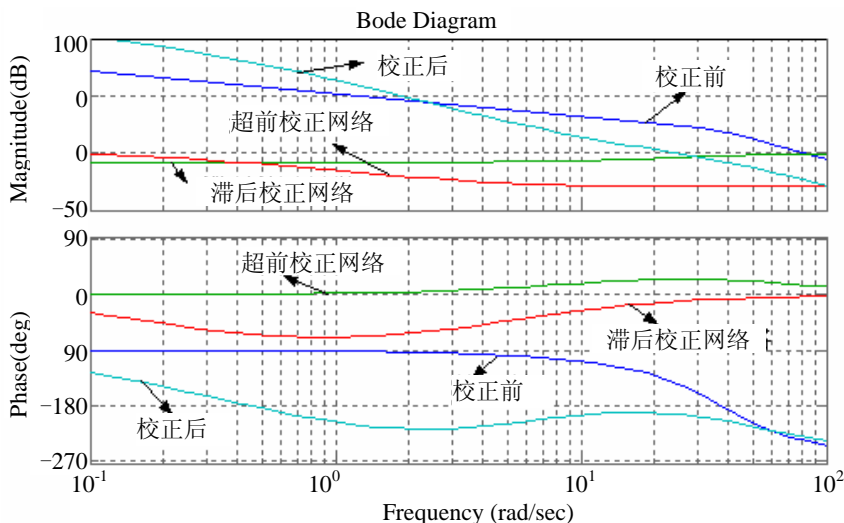


图 6-22 系统校正前后 bode 图

(3) 超前校正环节的确定

选择斜率从 -20dB/dec 变为 -40dB/dec 的转折频率作为校正网络超前部分的转折频率。

所以有 $\omega_m = \omega_c = 25$

$$\phi_m = 48^\circ - 35^\circ + 12^\circ = 25^\circ$$

$$a_2 = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 25^\circ}{1 - \sin 25^\circ} = 2.5$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{\omega_m} = \frac{\sqrt{2.5}}{25} = 0.063$$

$$\frac{T_2}{a_2} = 0.025$$

$$G_{c2}(s) = \frac{1}{a_2} \left[\frac{T_2 s + 1}{\frac{T_2}{a_2} s + 1} \right] = \frac{1}{2.5} \frac{0.063s + 1}{0.025s + 1}$$

(4) 滞后校正环节参数的确定

$$20 \lg a_1 = \Delta L(\omega_c) = 20 \lg |G(j\omega)| - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{超前校正}}}{20 \lg a_2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{附加放大器}}}{20 \lg K}$$

$$= 25.5 - 4 + 8 = 29.5 \text{ dB}$$

$$a_1 = 29.7$$

取 $\frac{1}{T_1} = 0.2\omega_c''$, $T_1 = 0.2$

$$a_1 T_1 = 5.85$$

$$G_{c1}(s) = \frac{T_1 s + 1}{a_1 T_1 s + 1} = \frac{0.2s + 1}{5.85s + 1}$$

$$G_c(s) = 2.5 \times \frac{1}{2.5} \frac{0.2s + 1}{5.85s + 1} \frac{0.063s + 1}{0.025s + 1}$$

(5) 校验

校正后系统的参数:

相角裕度: $\gamma'' = 48^\circ$

截止频率: $\omega_c = 25 \text{ s}^{-1}$

例 7 所设计的校正, 采用的方法是滞后、超前部分分别设置。

例 8 设单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{126}{s(0.1s + 1) \left(\frac{1}{60}s + 1 \right)}$$

要求设计滞后-超前校正装置, 使系统满足:

- (1) 输入输出速度为 1 rad/s , 稳态误差速度不大于 $(1/126) \text{ rad/s}$;
- (2) 许可放大增益不变;
- (3) 相位裕量不小于 30° , 截止频率为 20 rad/s 。

解

(1) 绘制校正前系统的 bode 图, 如图 6-23 所示, 对于校正前的系统

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{126}{\omega}, & \omega < 10 \\ 20 \lg \frac{126}{0.1\omega}, & 10 < \omega < 60 \\ 20 \lg \frac{126}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{60} \omega^2}, & \omega > 60 \end{cases}$$

解得

$$\omega_c = 35.5$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{10} - \arctg \frac{\omega_c}{60} = 90^\circ - 76.7^\circ - 30.6^\circ = -17.3^\circ$$

相角裕度不满足要求。

(2) 根据已知条件, $\omega_c'' = 20 \text{ rad/s}$,

则有如下等式

$$-20 \lg a + 20 \lg |G(j\omega_c'')| + 20 \lg T_b \omega_c'' = 0$$

将 $T_b = \frac{\sqrt{a}}{\omega_c''}$ 代入, 得

$$a = 10$$

超前校正网络的转折频率

$$\frac{1}{T_b} = \frac{\omega_c''}{\sqrt{a}} = 6.33$$

$$\frac{a}{T_b} = 6.33 \times 10 = 63.3$$

滞后校正网络的转折频率, 选取

$$\frac{1}{T_a} = 0.1 \omega_c'' = 2$$

$$\frac{1}{aT_a} = \frac{2}{10} = 0.2$$

故滞后-超前校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{6.33} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{63.3} + 1\right)}$$

校正网络的 Bode 图, 如图 6-23 所示。

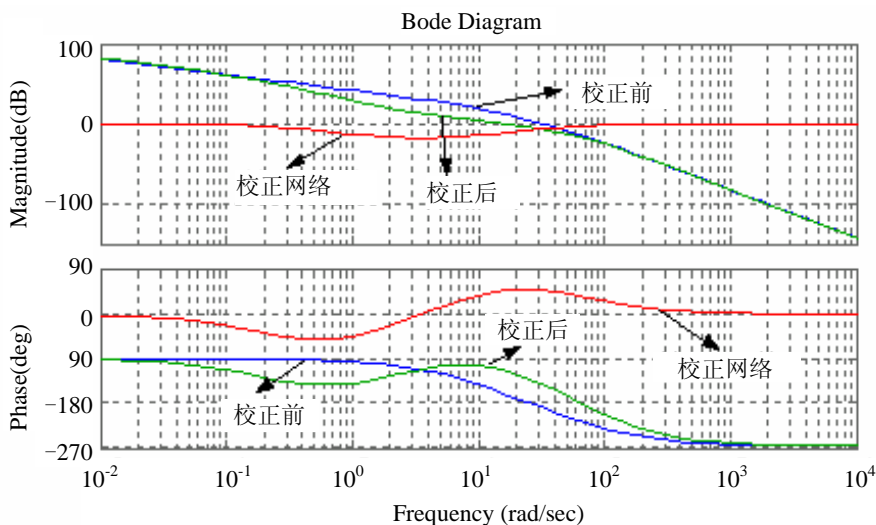


图 6-23 滞后-超前校正系统 Bode 图

(3) 验算。校正后系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = G_c(s)G(s) = \frac{126\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{6.33} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{60} + 1\right)\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{63.3} + 1\right)}$$

校正后系统在 $\omega_c'' = 20$ 处的相角裕度为

$$\begin{aligned} \gamma(\omega_c'') &= 180^\circ - 90^\circ + \arctg \frac{\omega_c''}{2} + \arctg \frac{\omega_c''}{6.33} - \arctg \frac{\omega_c''}{10} - \arctg \frac{\omega_c''}{60} - \arctg \frac{\omega_c''}{0.2} - \arctg \frac{\omega_c''}{63.3} \\ &= 58^\circ > 45^\circ \end{aligned}$$

满足设计要求。

6.6 反馈校正

当控制系统对控制性能要求较高时,经常采用反馈校正(如图 6-24 所示)。在控制系统中,对环节和元件进行局部反馈,利用不同的反馈元件和反馈方式,可以使环节的性质和性能发生变化。适当地运用反馈的方法可以简单而且有效地改善环节以及系统的各方面性能。反馈校正除了可获得与串联校正相似的效果外,还可改变被其包围的被控对象的特性,特别是在一定程度上抵消了参数波动对系统的影响。但一般它要比串联校正略显复杂。

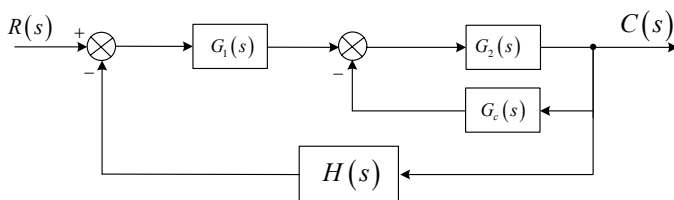


图 6-24 反馈校正

6.6.1 反馈校正的特点

反馈校正的校正环节对原系统的某些环节进行包围,不同形式的反馈环节对系统有不同的影响。比例反馈包围惯性环节,校正后的系统时间常数下降,惯性减弱,过渡过程时间缩短,系统增益下降,可以改善稳态性能,但增加系统的稳态误差。比例反馈包围积分环节,环节由积分性质转变为惯性环节,可以提高系统稳定性,但是降低了系统的稳态精度。微分反馈包围惯性环节,增大时间常数可以使系统各环节的时间常数拉开,从而改善系统的动态平稳性。

6.6.2 反馈校正系统的设计

在设计反馈系统时,经常利用反馈校正取代局部结构,以改造不希望有的某些环节,消除非线性、变参数的影响,抑制干扰。如图所示的局部反馈回路,前向通道传递函数为 $G_1(s)$,反馈为 $H(s)$,则回路的传递函数为:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$$

在一定的频率范围内,如果选择结构参数,使

$$|G_1(j\omega)H(j\omega)| \approx 1$$

则

$$G(j\omega) \approx \frac{1}{H(j\omega)}$$

此时反馈回路的传递函数等效为:

$$G(s) \approx \frac{1}{H(s)}$$

可见被包围环节与传递函数无关, 利用此特性可以在感兴趣的频段, 只要满足 $|G_1(j\omega)H(j\omega)| \approx 1$, 就可以利用反馈环节取代原来的特性。我们称感兴趣的频段为接受频段。当 $|G_1(j\omega)H(j\omega)| \approx 1$ 时, 等效传递函数为原有环节, 反馈环节不起作用, 称此频段为不接受校正频段。

6.6.3 串联校正与反馈校正比较

(1) 串联校对比反馈校正简单, 但串联校正对系统元件特性的稳定性有较高的要求。反馈校正对系统元件特性的稳定性要求较低, 因为其减弱了元件特性变化对整个系统特性的影响。

(2) 反馈校正需由一些昂贵而庞大的部件所构成, 对某些系统可能难以应用。

(3) 反馈校正可以在需要的频段内, 消除不需要的特性, 抑制参数变化对系统性能的影响, 串联校正无此特性。

所以在需要的控制系统结构简单、成本低无特殊要求的时候, 可采用串联校正。若有特殊要求, 特别是被控对象参数不稳定时, 可以考虑采用反馈校正。但是当系统低频扰动比较大时, 反馈校正的作用不明显, 可以引入误差补偿通路, 与原来的反馈控制一起进行复合控制。

复合控制通过在系统中引入输入或扰动作用的开环误差补偿通路(顺馈或前馈通路), 与原来的反馈控制回路一起实现系统的高精度控制。关于复合控制的基本原理本书不再讲述, 可以参考有关控制系统方面的书籍。

6.7 设计实例

——转子绕线机控制系统

本例的设计目标是用机器代替手工操作, 为小型电机的转子缠绕铜线。每个小型电机

都有 3 个独立的转子线圈，上面需要绕几百圈的铜线。绕线用直流电机来缠绕铜线，它应该能快速准确地绕线，并使线圈连贯坚固。采用自动绕线机后，操作人员只需从事插入空的转子、按下启动按钮和取下绕线转子等简单操作。控制系统设计的目标是：使绕线速度和缠绕位置都有很高的稳态精度。绕线机的控制系统框图如图 6-25 所示。

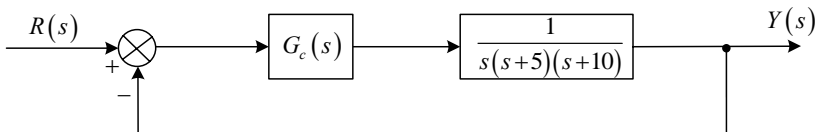


图 6-25 绕线机控制系统框图

所以，本例中系统设计的目标也可表述为：使绕线机系统对斜坡输入有很高的稳态精度。系统对单位斜坡输入 $R(s) = 1/s^2$ 的误差为：

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

其中

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_c(s)}{50}$$

设计绕线机的控制系统时，在考虑稳态跟踪误差的同时，还应兼顾超调量和调节时间等性能指标，因此，简单的增益放大无法满足实际要求。在这种情况下，决定采用超前校正网络或滞后校正网络来校正系统。本文主要讲解采用 Bode 图方法来设计超前校正网络。首先考虑简单的增益放大器 $G_c(s)$ ，此时有

$$G_c(s) = K$$

系统的稳态误差为：

$$e_{ss} = \frac{50}{K}$$

由此可见， K 的取值越大，稳态误差 e_{ss} 越小，但增加 K 的取值将对系统的瞬态响应产生不利的影响，图 6-26 给出了不同 K 值下的系统响应，从中可以看出，当 $K = 500$ 时，系统对斜坡输入的稳态误差为 10%，而系统对阶跃输入的超调量则高达 70%，调节时间长达 8s。这样的系统根本不能满足实际要求，因此，必须为系统引入较为复杂的校正网络，即超前校正网络或者滞后校正网络。

超前网络能够改善系统的瞬态响应性能，因此本文采用它来校正系统，并采用 Bode 图方法进行校正网络设计，超前网络的传递函数为：

$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{s+p}$$

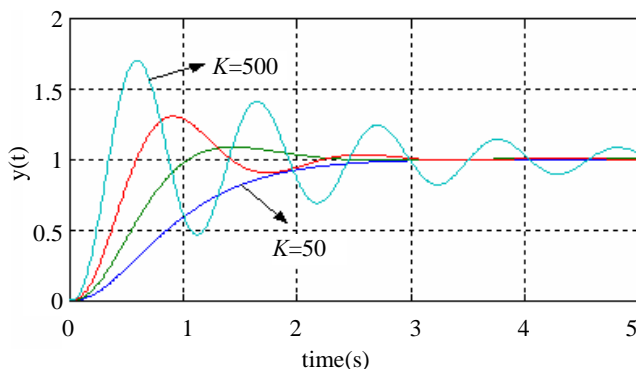


图 6-26 简单控制增益的瞬态响应

其中 $|z| < |p|$ 。给定的系统设计的要求是：

- (1) 系统对斜坡输入响应的稳态误差小于 10%， $K_V=10$ ；
- (2) 系统对阶跃输入的超调量小于 10%；
- (3) 2% 准则的调节时间 t_s 不超过 3s。

根据给定的设计要求，有关的近似公式可以写成：

$$\sigma_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 10\% \quad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 3$$

求解上述方程可得：

$\zeta = 0.59$ ， $\omega_n = 2.26$ 。由此可得系统的相角裕量为：

$$\gamma'' = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}} \approx 60^\circ$$

在明确了频率域内的要求之后，就可以按照下面的步骤设计超前校正网络。

- (1) 绘制 $K = 500$ 时未校正系统的 Bode 图，并计算相角裕度。
从图中可以读出，或者根据前面的公式进行计算，得到相角裕度 $\gamma \approx 12^\circ$ 。

- (2) 确定系统的附加超前相角

$$\varphi_m = \gamma'' - \gamma + \varepsilon = 60^\circ$$

- (3) 根据所确定的最大相位超前角 φ_m 算出 a 的值

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 14$$

(4) 超前校正装置在 ω_m 处的幅值为

$$10\lg a = 10\lg 14 = 11.46\text{dB}$$

校正系统的开环对数幅值为 -11.46dB 时所对应的频率就是校正后系统的截止频率 ω_c 。

从图中同样可以读出, 或者根据前面的公式进行计算 $\omega_m = \omega_c = 12\text{rad/s}$ 。

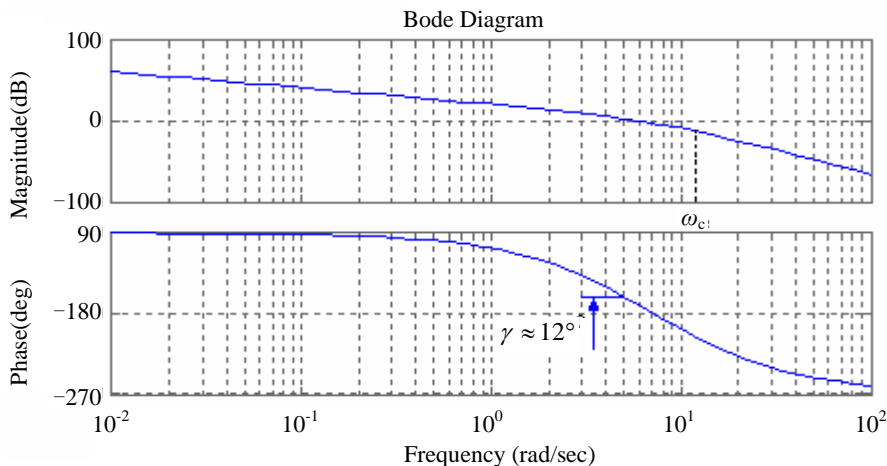


图 6-27 $K=500$ 时未校正系统的 Bode 图

(5) 计算超前校正网络的转折频率

由 $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$, 得

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = \frac{1}{12 \times \sqrt{14}} = 0.0223, \quad aT = 0.3122$$

$$G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts} = 0.0714 \frac{1 + 0.3122s}{1 + 0.0223s}$$

(6) 校正后系统的开环传递函数为

$$G_c(s)G_o(s) = \frac{35.7(1 + 0.3122s)}{s(1 + 0.0223s)(s + 5)(s + 10)} = \frac{500(s + 3.2)}{s(s + 5)(s + 10)(s + 44.8)}$$

(7) 检验性能指标

绘制校正后系统的 bode 图如图 6-28 所示。由系统的 bode 图可以看出相角裕度等均满足条件。如不满足条件, 需要重新设计参数。也可以通过计算检验性能指标。从图中可以看出, 校正后的系统裕度 $\gamma \approx 89^\circ$, 满足要求。

给出校正后系统在阶跃信号作用下的响应, 观察其瞬态性能指标, 如图 6-29 所示。

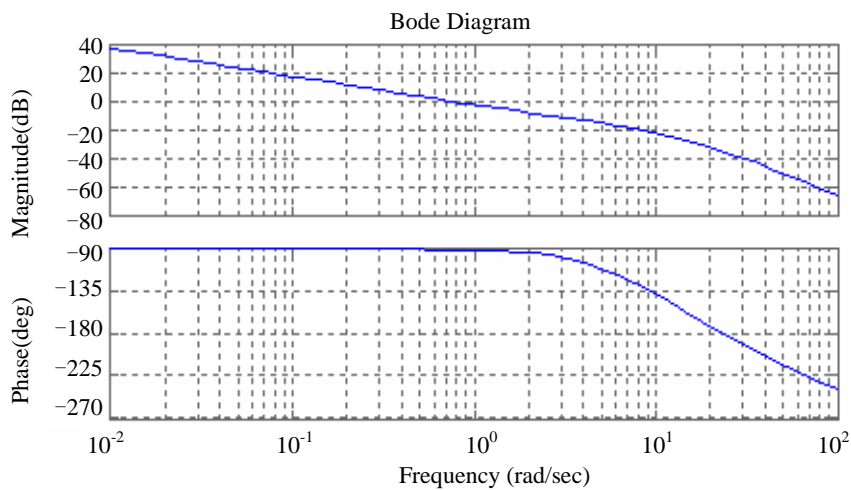


图 6-28 校正后系统 Bode 图

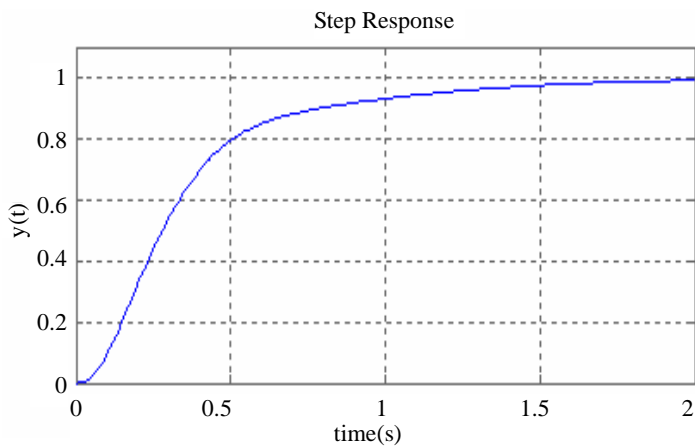


图 6-29 校正后系统的瞬态响应

可以看出, 系统的调节时间 $t_s \approx 2\text{s}$, 无超调, 稳态误差小于 10%, 满足设计要求。

6.8 习 题

1. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{200}{s(0.1s + 1)}$, 设计超前校正网络, 使校正后的系统相角

裕度不小于 45° ，截止频率不低于 50。

2. 已知反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.05s+1)(0.25s+1)}$$

试设计校正环节，使校正后系统的相角裕度大于 50° ，截止频率大于 10。

3. 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_0(s) = \frac{K_0}{s(Ts+1)}$ ，要求该系统在 $r(t) = Rt$ 信号作用下

稳态误差 $e_{ss}(\infty) = 0$ ，试设计校正环节。

4. 设开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.01s+1)}$$

单位斜坡函数 $r(t) = t$ ，输入产生稳态误差 $e \leq 0.0625$ 。若使校正后相位裕量不低于 45° ，截止频率不低于 2rad/s，试设计串联超前校正系统。

5. 单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)}$$

若要求校正后系统的相位裕量为 30° ，幅值裕量为 10 ~ 20dB，试设计串联校正网络。

6. 已知单位反馈系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

设计一串联滞后校正网络，使校正后开环增益 $K = 5$ ，相位裕量大于 40° ，幅值裕量大于 10dB。

7. 设单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{7}{s \left(\frac{1}{2}s+1 \right) \left(\frac{1}{6}s+1 \right)}$$

设计串联滞后校正网络，使校正后 $\gamma = 40^\circ \pm 2^\circ$ ，开环增益不变，截止频率大于 1rad/s。

8. 单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

输入信号 $r(t) = 10\text{rad/s}$ 时，稳态误差为 0.04rad/s，对系统进行校正，使满足截止频率大于 30rad/s，相角裕度大于 45° 。

9. 如图 6-30 所示三种串联校正网络特性，它们均由最小相角环节组成，若控制系为单位反馈控制系统，其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{400}{s^2(0.01s+1)}$$

问：

- (1) 在这些网络特性中，哪些校正程度最好？
- (2) 为了将 12Hz 的正弦噪声削弱 10 倍左右，应采用哪种校正网络特性。

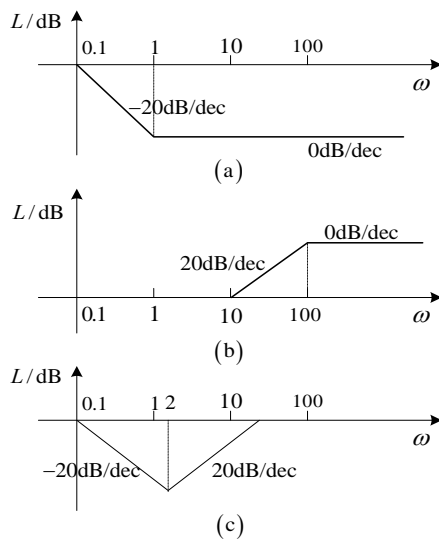


图 6-30 习题 9 图

10. 设单位反馈控制系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

设计一串联校正装置，使得

- (1) 静态速度误差系统大于 256rad/s；
- (2) 截止频率大于 30rad/s；
- (3) 相位裕量大于 45°。

第 7 章 智能控制系统

传统控制器都是基于系统的数学模型建立的，因此，控制系统的性能好坏很大程度上取决于模型的精确性，这正是传统控制的本质。现代控制理论可以解决多输入、多输出（MIMO）控制系统的分析和控制设计问题，但其分析与综合方法也都是在取得控制对象数学模型基础上进行的，而数学模型的精确程度对控制系统性能的影响很大，往往由于某种原因，对象参数发生变化使数学模型不能准确地反映对象特性，从而无法达到期望的控制指标，为解决这个问题，自适应控制、鲁棒控制的研究便成为控制理论的研究热点。20 世纪 80 年代由加拿大学者 Zames 等人创始的 H_∞ 控制理论是鲁棒控制理论的重要发展。但这些方法本质上还是没有摆脱基于数学模型的定量化思想。传统控制，包括经典反馈控制、现代控制理论等，在应用中遇到不少难题。机理建模所不可避免的模型误差将导致估计器工作效果时好时坏，难以设计可靠、稳定的控制系统。

基于上述问题，控制科学界多年来一直在探索着新的方法，寻求更加符合实际的“发展轨迹”。近十年来，人工智能学科新的进展给人们带来了希望。由于得益于计算机科学技术和智能信息处理的高速发展，智能控制逐渐形成一门学科，并在实际应用中显示出强大的生命力。与此同时，许多控制学科领域的工作者也开始认识到，在许多系统中，复杂性不只是表现在高维性上，更多的则是表现在系统信息的模糊性、不确定性、偶然性和不完全性上。能否用人工智能的人工神经网络、模糊逻辑推理、启发式知识、专家系统等理论去解决难以建立精确数学模型的控制问题一直是我们十多年来追求的目标。

智能控制系统是在控制论、信息论、人工智能、仿生学、神经生理学及计算机科学发展的基础上逐渐形成的一类高级信息与控制系统。结合具体的工业生产过程，各种智能控制系统正在发挥巨大的经济和社会效益。

7.1 智能控制系统发展状况

7.1.1 智能控制系统定义

智能控制系统（Intelligent control system）是指具备一个智能行为的系统，利用人工智能的方法，它能够解决难以用数学的方法精确描述的复杂的、随机的、模糊的、柔性的控

制问题，具有自学习、自适应、自组织的能力。智能控制系统是一门新兴学科，以下是一种粗略的定义方式：

(1) 智能控制系统是智能机自动地完成其目标的控制过程。其中智能机可在熟悉或不熟悉的环境中自动地或人机交互地完成拟人任务。

(2) 由智能机参与生产过程自动控制的系统称**智能控制系统**。

根据上述定义，带有模糊控制规则和带有知识控制规则所构成的自动控制系统一般称为智能控制系统。

7.1.2 智能控制系统的特点

(1) 容错性。对复杂系统（如非线性、快时变、复杂多变量和环境扰动等）能进行有效的全局控制，并具有较强的容错能力。

(2) 多模态性。定性决策和定量控制相结合的多模态组合控制。

(3) 全局性。从系统的功能和整体优化的角度来分析和综合系统。

(4) 混合模型和混合计算。对象是以知识表示的非数学广义模型和以数学模型表示的混合控制过程，人的智能在控制中起着协调作用，系统在信息处理上既有数学运算，又有逻辑和知识推理。

(5) 学习和联想记忆能力。对一个过程或未知环境所提供的信息，系统具有进行识别记忆、学习，并利用积累的经验进一步改善系统的性能和能力。

(6) 动态自适应性。对外界环境变化及不确定性的出现，系统具有修正或重构自身结构和参数的能力。

(7) 组织协调能力。对于复杂任务和分散的传感信息，系统具有自组织和协调能力，体现出系统的主动性和灵活性。

智能控制系统是一门新兴学科，在理论上还不成熟，不完善，需要进一步探索。

7.1.3 智能控制系统的分支

智能控制的基础技术包括模糊控制技术、神经网络控制技术、专家控制技术、学习控制技术、分层递阶控制技术。

(1) **模糊控制 (Fuzzy control)** 技术。模糊控制技术就是以模糊集合理论为基础的智能控制技术。模糊集合理论为控制技术摆脱建立精确数学模型提供了手段，使控制系统像人一样基于定性的模糊的知识进行控制决策成为可能。在模糊控制系统中，能够将人的控制经验和知识包含进来，从这个意义上说，模糊控制是一种智能控制。模糊控制既可以面向简单的被控对象，也可以用于复杂的控制过程。

(2) **神经网络控制 (Neural network control)** 技术。神经网络控制技术就是基于人工神

神经网络的控制技术。神经网络具有高速并行处理信息的能力,这种能力适于实时控制和动力学控制;神经网络具有很强的自适应能力和信息综合能力,这种能力适用于复杂系统、大系统和多变量系统的控制;神经网络的非线性特性适用于非线性控制。神经网络具有学习能力,能够解决那些用数学模型或规则描述难以处理的控制过程。

(3) **专家控制 (Expert control)** 技术。专家控制技术是基于人工智能中专家系统的控制技术。专家系统是一种基于知识的系统,它主要面向各种非结构化问题,尤其能处理定性的、启发式或不确定的知识信息,经过各种推理过程到达系统的任务目标。这种控制技术能够适用于模型不充分、不精确甚至不存在的复杂过程。

(4) **学习控制 (Study control)** 技术。学习控制技术是基于人工智能中机器学习理论的控制技术。学习的意义主要是指自动获取知识、积累经验、改善知识性能。学习控制能够解决由于被控对象的非线性和建模不良所造成的不确定性问题。

(5) **分层递阶控制技术**。智能控制系统除了实现传统的控制功能外,还要实现规划、决策、学习等智能功能。因此智能控制往往需要将智能的控制方法与常规的控制方法加以有机的结合。分层递阶控制是实现这一目的的有效方法。在分层递阶控制中,上层的作用主要是模仿人的行为功能,因而主要是基于知识的系统。它所实现的规划、决策、学习、数据的存取、任务的协调等,主要是对知识进行处理。下层的作用是执行具体的控制任务,主要是进行数值操作和计算。

7.1.4 智能控制系统发展状况

随着许多复杂的社会经济与生态问题和全球网络信息安全问题的出现及对许多复杂系统“涌现”机理的研究,许多科学家对传统的控制理论与非线性分析、随机系统、统计学习、人工智能、认知科学等学科的结合产生了极大兴趣,特别是将人工神经网络、模糊逻辑、遗传计算、专家系统、混沌和其他常规信号信息处理相结合,在新的层次上实现控制的自适应和反馈。

20 世纪 70 年代,傅京孙教授提出把人工智能的直觉推理方法用于机器人控制和学习控制系统,并将智能控制概括为自动控制和人工智能的结合。傅京孙、Glorioso 和 Sardi 等人从控制理论的角度总结了人工智能技术与自适应、自学习和自组织控制的关系,正式提出了建立智能控制理论的构想。1967 年,Leondes 和 Mendel 首次正式使用“智能控制”一词。1985 年 8 月在美国纽约 IEEE 召开的智能控制专题讨论会,标志着智能控制作为一个新的学科分支正式被控制界公认。智能控制不同于经典控制理论和现代控制理论的处理方法,它研究的主要目标不仅仅是被控对象,同时也包含控制器本身。控制器不再是单一的数学模型,而是数学解析和知识系统相结合的广义模型,是多种知识混合的控制系统。

7.2 简单智能控制系统的构成

7.2.1 一般自动控制系统的构成

在介绍智能控制系统之前，首先回顾一下前面自动控制系统的构成。

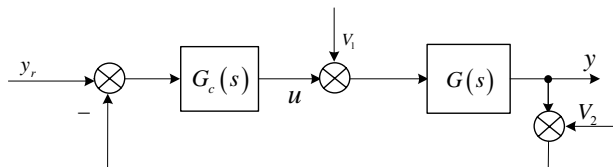


图 7-1 一般控制系统的构成

从图 7-1 中可以看出：该系统的输出量反馈到输入端组成闭环反馈自动控制系统。控制的目的是希望该系统通过控制器 $G_c(s)$ 的操作使其输出不断跟踪给定值的变化。这一目的的实现与控制器设计复杂程度密切相关。事实上，由于对象本身的非线性、时变性和分布参数等因素的影响，系统在运行中又要受到各种因素干扰的影响。因此往往设计好的自动控制系统不能按照人们预想的目标运行。所以人们在设计自动控制系统时，总是力图设计一个性能最佳的控制器，或者希望设计的控制器能跟踪被控对象特性的变化，但是这种设计方法都离不开被控对象的数学模型，若对象数学模型简单，则控制器很容易设计出来。若对象数学模型复杂或根本无法建立数学模型，则这种控制器设计十分复杂，甚至无法实现。因而人们设想如何改造这种控制器的设计，使控制器能模仿经验丰富的专家操作该系统，即把原来的控制器改造为仿人控制器。这就是智能控制系统。

7.2.2 简单智能自动控制系统的构成

简单的智能控制系统是由被控对象和仿人控制器组成的负反馈闭环控制系统，其结构图如图 7-2 所示。设想把人的经验和知识赋予控制器，这种控制器就是仿人控制器，或智能控制器，或专家控制器。

这种控制器借助计算机按照人的意志和愿望实现对生产过程的控制。因而问题归结为如何设计智能控制器。这需要解决如何根据人的经验和知识控制生产过程的问题。最简单的智能控制包括知识库和推理机。通常人们把人的经验和知识表达成计算机能够识别、理解和执行的语言，即事实和规则。然后把这些事实（自动控制系统原始数据、中间运行状况和中间结果，以及性能指标）和规则送入计算机，建立一个软件模块，这就是人们所称为的**知识库**。接着对知识库内容进行修改、删除和精炼，使这个知识库能真正代表人对生产过程控制的**最佳方案**。规则就是人们根据经验对控制系统的操作，例如如果“偏差增大”

则“增大积分强度”。**推理机**实质上是一个知识控制软件模块，它根据系统当前的运行状态，选择一条事实，在知识库中从上到下搜索可用规则，若这条事实和知识库中某条规则左部相匹配，则执行规则的右部，对系统施加控制，控制策略就惟一被确定。

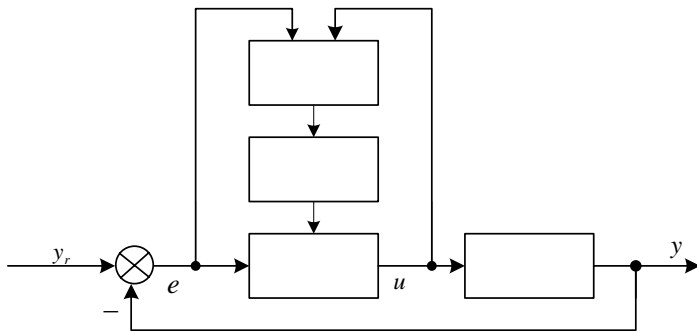


图 7-2 简单智能控制系统结构

由此可以看出，智能控制器是由知识库、推理机和**控制策略**组成的，它完全模仿人的经验和知识对系统实施控制，它完全可以不了解对象的数学模型，仅凭人的知识和经验借助计算机来实现对生产过程的自动控制。智能控制的控制器可以采用不同的控制方法，常见的三种是专家控制、神经网络控制、模糊控制，也有这几种控制的结合。

7.3 设计实例

——产品质量自动化智能控制系统

在产品的制造过程中，产品质量特性值总是在波动。这种波动可以分成两类，偶然波动与异常波动。**偶然波动**是由偶然因素造成的，偶然因素是生产过程中所必有的，在过程中始终存在，是不可避免的，但对产品质量影响微小，相当于噪音，可以忽略。**异常波动**是由异常因素引起的，这是在生产过程中必须注意的。当生产过程中存在异常波动时，控制图的点的分布不是随机的，呈现某种异常模式，此时生产过程处于失控状态。对于失控的过程，操作者或技术人员应及时查找、确定引起失控的系统原因，及时采取必要的改正措施使生产过程恢复到统计控制状态。我们以生产螺丝为例，螺丝的直径便是生产过程中的一种质量特性，用质量控制图衡量螺丝质量特性的优劣。质量控制图是对过程质量加以

测定、记录并从而进行控制管理的一种用统计方法设计的图。图中有中心线、上控制界限、下控制界限，并有按时间顺序抽取的样本统计量数值的描点序列。期望的螺丝直径作为质量控制图的中心线，上控制界限和下控制界限表示允许的偏差，如图 7-3 所示。如果偏差在控制界限范围之外则表明生产过程存在异常干扰，需要修正。即使偏差在控制范围之内，如果偏差的排列呈现出某种异常模式，比如说突然上升，突然下降等等，也表明生产过程中存在干扰，需要修正。该设计是要设计一个能自动检测干扰、自动修正生产过程的自动化控制系统，在整个系统中不需要人的参与。如果生产过程正常，则螺丝的直径数据应该是随机的，在控制范围内随机波动，但是如果生产过程不正常，则螺丝的直径呈现不正常的分布，正常模式图与异常模式图如 7-4 所示，如果出现异常模式图，则表明生产过程存在干扰，需要修正。

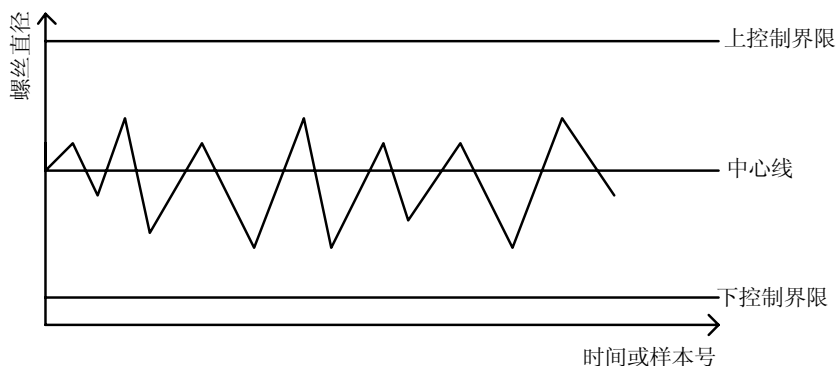


图 7-3 质量控制图

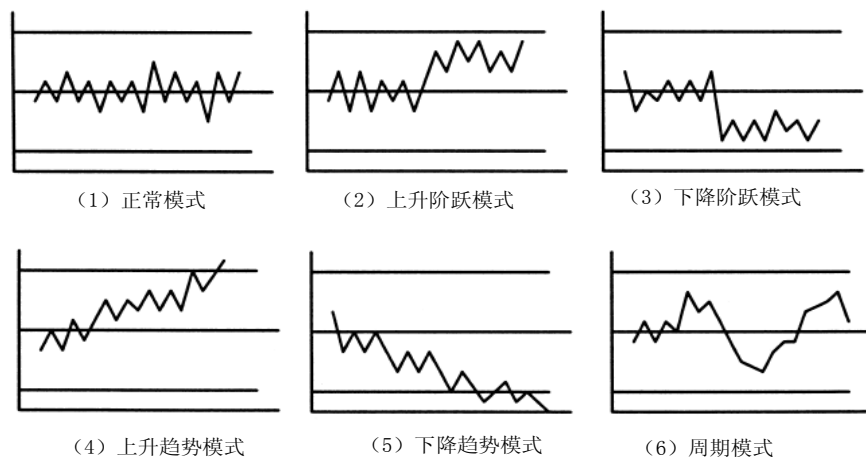


图 7-4 螺丝质量控制图模式示意图

这里所采用的智能控制方法是专家系统与神经网络结合的方法。智能控制系统的控制如下：首先利用数据采集回路采集生产中的零件直径的尺寸，形成零件直径的控制图，通过神经网络识别控制图是否正常，如果质量控制图不正常，神经网络输出偏离的程度、趋势等参数，输入到专家系统；随后通过专家系统进行诊断，判断生产过程中存在的问题，发出控制信号对生产过程实施控制，智能控制的结构图如 7-5 所示。

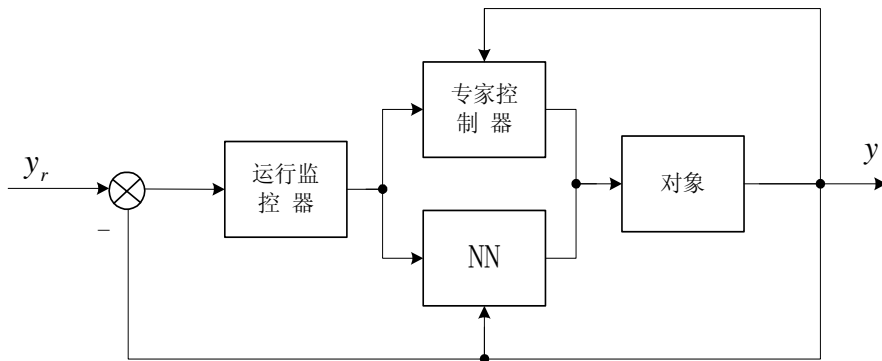


图 7-5 NN 和专家混合控制系统框图

由于在本章中只是简单介绍一下智能控制系统的基本原理及发展，如果了解更多的智能控制方面的知识，以及各种控制方法及具体技术，请参考智能控制类书籍，此处不作详细地介绍。所以，该例中神经网络控制器（NN）与专家控制器的具体设计不再作详细介绍，通过本例，同学们对智能控制的应用有一个简单的了解即可。一般自动控制系统与智能控制系统的区别也即在于控制器的设计，一般的控制系统，控制器具有精确的数学模型，而对于智能控制系统，控制器更类似于人类的思维方式，此例中控制器是通过软件实现，神经网络与专家系统都是通过软件来实现。

附录 常用拉氏变换表

编 号	$F(s)$	$f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$1(t)$	$1/s$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n (n=1,2,3\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} (n=1,2,3\cdots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{(b-a)}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
13	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
14	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

参 考 文 献

1. Kuo B.C. Automatic Control Systems. 8th ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.2002
2. 夏德铃 翁贻方. 自动控制理论 (第 2 版). 北京: 机械工业出版社, 2004
3. 孙林荣. 自动控制原理. 上海: 上海交通大学出版社, 2001
4. 康晓明. 自动控制原理. 北京: 国防工业出版社, 2004
5. 鄢景华. 自动控制原理. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001
6. 薛定宇 陈阳泉. 基于 MATLAB/SIMULINK 的系统仿真技术与应用. 北京: 清华大学出版社, 2003
7. 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计—MATLAB 语言及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996
8. 王炎 赵昌颖等译. 自动控制系统 (第 4 版). 北京: 北京科学技术出版社, 1987
9. 傅佩琛. 自动控制原理. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1988
10. 史忠科 卢京潮. 自动控制原理常见题型解析及模拟题. 西安: 西北工业大学出版社, 2000
11. 徐丽娜. 神经网络控制. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002
12. 田盛丰等. 人工智能原理与应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1993
13. 胡寿松. 自动控制原理习题集 (第 2 版). 北京: 科学出版社, 2003
14. 王诗宓 杜继宏 窦曰轩. 自动控制原理例题习题集. 北京: 清华大学出版社, 2002
15. 李友善. 自动控制原理. 北京: 国防工业出版社, 1989 修订版
16. 蔡尚峰. 自动控制理论. 北京: 机械工业出版社, 1980
17. 孙虚章. 自动控制原理 (第 11 版). 北京: 中央广播电视大学出版社, 1994
18. 任兴权. 控制系统计算机仿真. 北京: 机械工业出版社, 1988
19. <http://202.114.4.28/jpkc/zdkz/ac/sche1.htm>