

### 3-4 對數函數

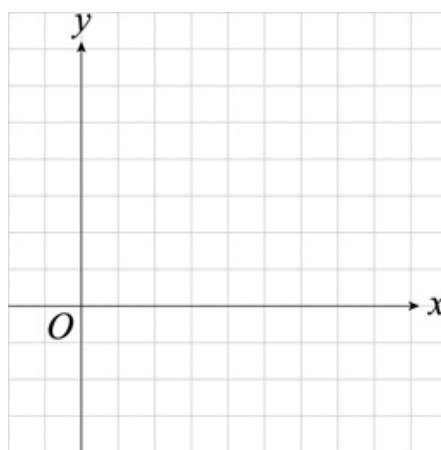
一般而生活中有許多計量的方法與對數有關。例如表示物質酸鹼度的 pH 值，描述星星亮度的視星等，表示人類眼睛對環境感應的亮度感覺...等，這類型的函數就是本節要討論的對數函數。

#### ※指數函數的定義

設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $x > 0$ ，我們將函數  $y = f(x) = \log_a x$  稱為以  $a$  為底數的對數函數  
將底數  $a$  分成  $a > 1$  與  $0 < a < 1$  兩種情形討論

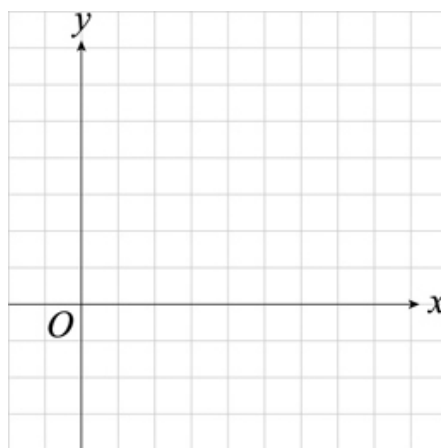
#### 例題 1

用描點的方式作出  $y = \log_2 x$  的圖形



#### 例題 2

用描點的方式作出  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  的圖形

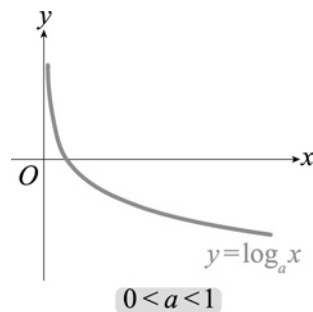
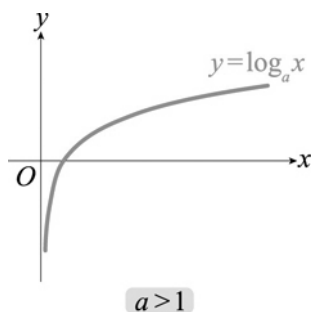


#### 隨堂練習

哪一個函數的圖形與  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  對稱於  $x$  軸？

## ※對數函數的圖形

設  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , 對數函數  $y = \log_a x$  圖形如下：



對數函數  $y = \log_a x$  之圖形的特色：

(1) 圖形都在  $y$  軸右方。也就是當  $x$  是正實數時， $\log_a x$  才有意義。

(2) 圖形都通過點  $(1, 0)$ 。這是因為  $\log_a 1 = 0$ 。

(3) 平行  $x$  軸的每一條水平線和  $y = \log_a x$  的圖形都恰好交於一點。

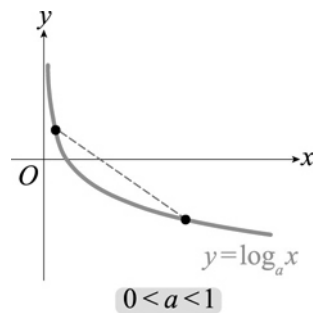
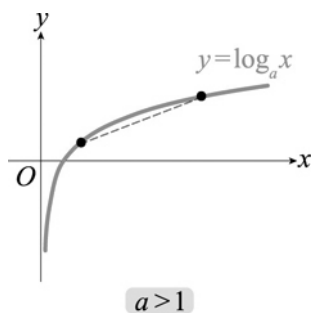
也就是說，方程式  $\log_a x = b$  恰有一個實根，即當  $\log_a \alpha = \log_a \beta$  時， $\alpha = \beta$ 。

(4) 當  $a > 1$  時， $y = \log_a x$  為嚴格遞增函數，即當  $\alpha < \beta$  時， $\log_a \alpha < \log_a \beta$ 。

當  $0 < a < 1$  時， $y = \log_a x$  為嚴格遞減函數，即當  $\alpha < \beta$  時， $\log_a \alpha > \log_a \beta$ 。

(5) 當  $a > 1$  時， $y = \log_a x$  圖形上任相異兩點所連成的線段必在函數圖形的下方，

即函數的凹口向下；當  $0 < a < 1$  時， $y = \log_a x$  的凹口向上。

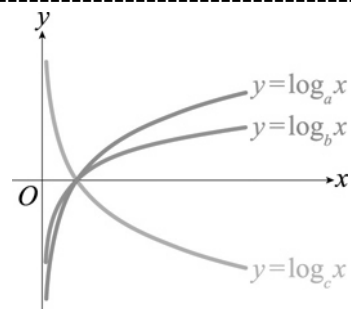


(6) 函數  $y = \log_a x$  和  $y = \log_{\frac{1}{a}} x$  的圖形對稱於  $x$  軸。

(7) 對數函數  $y = \log_a x$  的定義域是所有正實數，而值域是所有實數。

右圖為函數  $y = \log_a x$ ,  $y = \log_b x$ ,  $y = \log_c x$  的圖形。選出正確的選項：

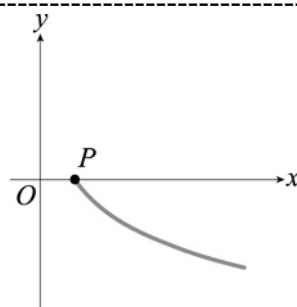
- (1)  $a > 1$  (2)  $b > 1$  (3)  $c > 1$  (4)  $a > b$  (5)  $b > c$



隨堂練習

右圖為函數  $y = \log_a x$  的部分圖形，選出正確的選項：

- (1)  $\overline{OP} = 1$   
 (2)  $0 < a < 1$   
 (3)  $y = \log_a x$  的圖形與每一條水平線均相交  
 (4) 若  $\alpha < \beta$ ，則  $\log_a \alpha < \log_a \beta$ 。



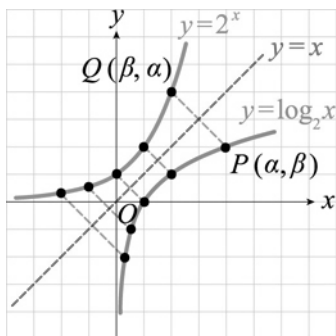
例題 4

利用  $y = \log_2 x$  的圖形，描繪函數  $y = \log_2 8x$  的圖形

隨堂練習

試利用  $y = \log_2 x$  的圖形，描繪函數  $y = \log_2(x-2)$  的圖形

將  $y = \log_2 x$  和  $y = 2^x$  兩個圖形畫在同一個坐標平面上，如圖：



一般而言，當  $a > 0$ ， $a \neq 1$  時，函數  $y = \log_a x$  與  $y = a^x$  的圖形對稱於直線  $y = x$

以下利用對數函數圖形的特性，來解對數方程式。要特別注意的是：真數必須是正數

例題 5

解方程式  $\log_{10} x + \log_{10}(x-1) = 1 + \log_{10} 2$

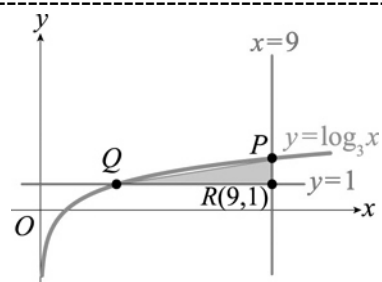
隨堂練習

解方程式  $\log_5 3x + \log_5 (x-3) = \log_5 12$

例題 6

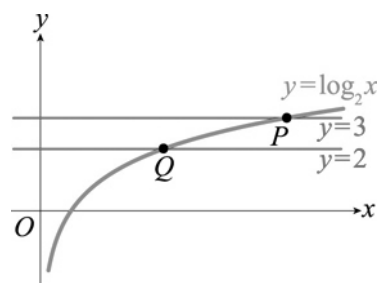
圖為  $y = \log_3 x$  的圖形。設  $P$ ， $Q$  分別為直線  $x=9$ ， $y=1$  與  $y = \log_3 x$  的交點， $R$  為點  $(9,1)$ 。

求  $\triangle PQR$  的面積



隨堂練習

圖為  $y = \log_2 x$  的圖形。設  $P$ ， $Q$  分別為直線  $y=3$ ， $y=2$  與  $y = \log_2 x$  的交點，求  $\overline{PQ}$  的長



根據對數函數遞增或遞減的特性，可以比較數的大小

例題 7

比較  $a = \log_3 5$ ， $b = \log_9 16$ ， $c = \log_3 \frac{1}{4}$ ， $d = 1$  四數的大小關係

隨堂練習

比較  $a = \log_2 7$ ,  $b = \log_4 25$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} 3$ ,  $d = 2$  四數的大小關係

例題 8

求滿足下列不等式之  $x$  值的範圍：

(1)  $\log_3 (x-1) < 1$  .

(2)  $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (x-2) > -1$

隨堂練習

求滿足下列不等式之  $x$  值的範圍：

(1)  $\log_3 (x-3) + \log_3 (x-5) < 1$  .

(2)  $\log_2 x^2 > 0$

例題 9

設  $b \geq a > 0$ ，利用  $y = \log x$  的圖形，比較  $\frac{\log a + \log b}{2}$  與  $\log\left(\frac{a+b}{2}\right)$  兩數的大小

隨堂練習

關於函數  $y = 10^x$ ，

(1) 其圖形是凹口向上還是凹口向下？

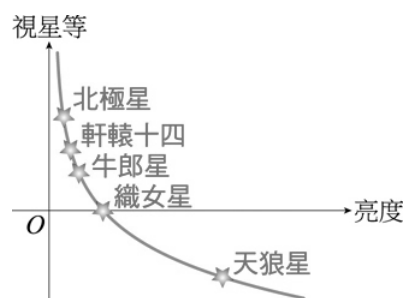
(2) 利用  $y = 10^x$  的圖形，比較  $\frac{10^{10} + 10^{20}}{2}$  與  $10^{15}$  兩數的大小關係

對數函數的例子

天文學家以織女星的亮度為標準，令织女星的亮度為  $I_0$ ，

被觀察的星星的亮度為  $I$ ，將其星等定義為  $m = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ 。

如此可得天空中最亮的恆星天狼星為  $-1.4$  星等，牛郎星為  $0.8$  星等，軒轅十四為  $1.3$  星等，北極星為  $2$  星等。星等與亮度以對數函數的圖形如圖。





## 例題 10-----

在星空中，人類肉眼可見最暗的星星為 6 星等。已知天蠍座的 心宿二為 1 星等，求心宿二的亮度是 6 星等星星之亮度的多少倍？

-----

## 隨堂練習 -----

已知星空中天狼星為  $-1.4$  星等，而另一顆恆星  $M$  的亮度為天狼星的  $\frac{1}{1000}$ ，求恆星  $M$  的星等

-----

## 3-4 習題

## 一、基礎題

1. 設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，關於函數  $f(x) = \log_a x$ ，選出正確的選項：

- (1)  $f(x)$  的圖形恆過點  $(1, 0)$
- (2)  $f(x)$  的圖形與任一條水平線相交
- (3)  $f(x)$  的圖形與任一條鉛垂線相交
- (4)  $f(x)$  的圖形與  $g(x) = a^x$  的圖形對稱於直線  $y = x$
- (5)  $f(x)$  的圖形與  $h(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$  的圖形對稱於  $y$  軸。

2. 解下列方程式：

(1)  $\log_{10} x + \log_{10} 2 = 2$

(2)  $\log_2 (x+3) - \log_2 (x-1) = 1$

3. 比較下列各組數的大小關係：

$$(1) a = \log_3 2, \quad b = 1, \quad c = \log_3 \sqrt{5}, \quad d = \log_{\sqrt{3}} 2$$

$$(2) a = \log_{\frac{1}{5}} 3, \quad b = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}, \quad c = \log_5 \frac{1}{3}$$

4. 解下列不等式：

$$(1) -1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 0$$

$$(2) \log_3 (x^2 + 2x) > 1$$

$$(3) \log_{\frac{1}{2}} (x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x-3) \geq -3$$

5. 坐標平面上，直線  $x=2$  分別交函數  $y = \log_{10} x, y = \log_2 x$  的圖形於  $P、Q$  兩點；直線  $x=10$

分別交函數  $y = \log_{10} x, y = \log_2 x$  的圖形於  $R、S$  兩點。試問四邊形  $PQSR$  的面積最接近下

列哪一個選項？（ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ）

(1)10

(2)11

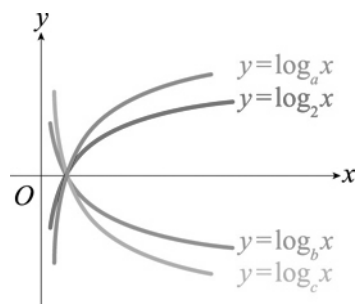
(3)12

(4)13

(5)14

二、進階題

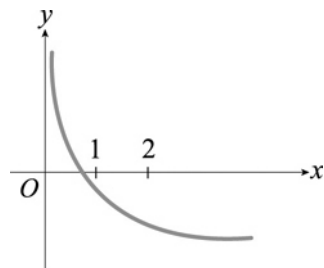
$$6. \text{ 解方程式 } \log_{10} (10^x + 100) = \frac{x}{2} + 1 + \log_{10} 2 .$$



7. 右圖為  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_a x$ ,  $y = \log_b x$ ,  $y = \log_c x$  四個函數的圖形，比較 1, 2,  $a$ ,  $b$  與  $c$  五數的大小關係。

8. 右圖為函數的部分圖形，其中  $a$ ,  $b$  皆為常數。選出正確的選項：

- (1)  $a < 0$ ,  $b > 1$   
 (2)  $a > 0$ ,  $b > 1$   
 (3)  $a = 0$ ,  $b > 1$   
 (4)  $a > 0$ ,  $0 < b < 1$   
 (5)  $a < 0$ ,  $0 < b < 1$ 。



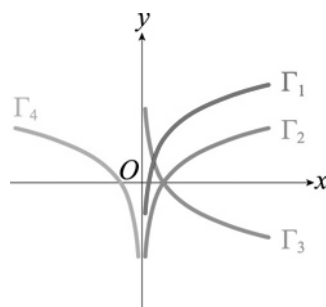
9. 連連看：將下列各函數連到所對應的函數圖形：

$y = \log_2 x$  • •  $\Gamma_1$

$y = -\log_2 x$  • •  $\Gamma_2$

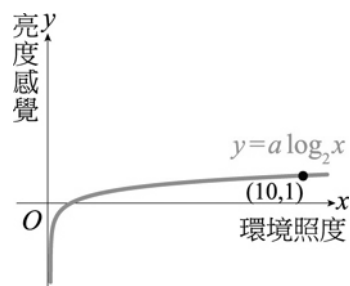
$y = \log_2(-x)$  • •  $\Gamma_3$

$y = \log_2 4x$  • •  $\Gamma_4$



10. 已知當「環境照度」為  $x$  勒克斯時，眼睛對於環境的「亮度感覺」為函數  $f(x) = a \log_2 x$ ，其中  $a$  是常數。右圖是  $y = f(x)$  的部分圖形。

- (1) 求  $a$  的值。  
 (2) 若現在眼睛的亮度感覺為 1，並希望將亮



度感覺提升為 2，則需將環境照度提高為  
原照度的多少倍？