

3-3 對數

一般而言，由於指數函數 $y = a^x$ 的圖形與 x 軸上方任意一條水平線 $y = b$ ($b > 0$) 都恰交於一點，可知：當 $a > 0$ ， $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 時，方程式 $a^x = b$ 有唯一實數解，我們將此實數解 x 以符號 $\log_a b$ 來表示，並有如下的定義。

※指數函數的定義

當 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $b > 0$ 時，方程式 $a^x = b$ 有唯一實數解 $x = \log_a b$ 。

$\log_a b$ 稱為「以 a 為底數時 b 的對數」，其中 b 稱為真數， a 稱為底數

舉例如下：

(1) 當 $3^x = 5$ 時， $x = \log_3 5$ 。

(2) $\log_2 8 = 3$ (因為 $8 = 2^3$)。

$$\log_a b$$

例題 1 -----

求下列各對數的值：(1) $\log_3 81$. (2) $\log_3 \frac{1}{9}$. (3) $\log_7 1$. (4) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$.

隨堂練習 -----

求下列各對數的值：(1) $\log_{10} 100$. (2) $\log_5 \frac{1}{125}$. (3) $\log_{10} 1$. (4) $\log_7 \frac{\sqrt{7}}{49}$.

例題 2 -----

設 $x = \log_2 3$ ，求 $4^x + 2^{-x}$ 的值

隨堂練習 -----

(1)求 $3^{\log_3 2}$ 的值。(2)設 $x = \log_3 5$ ，求 $3^x + 9^{-x}$ 的值

※ 對數的運算性質

若 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， r, s 均 > 0 ，則

(1) $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$

(2) $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$

(3) $\log_a r^t = t \log_a r$ ， t 是任意實數

例題 3 -----

求下列各式的值：

(1) $\log_6 4 + \log_6 9$

(2) $\log_2 20 - \log_2 5$

(3) $2 \log_{10} 5 + 3 \log_{10} 4 - 4 \log_{10} 2$

(4) $4^{\log_2 3}$

隨堂練習 -----

求下列各式的值：

(1) $\log_4 2 + \log_4 8$

(2) $\log_6 24 - \log_6 \frac{2}{3}$

(3) $2 \log_6 9 + 4 \log_6 2$

(4) $9^{\log_3 5}$

例題 4 _____

設 $\log_{10} 2 = a$ ，將下列各數用 a 表示：

(2) $\log_{10} 40$.

(3) $\log_{10} 5$

隨堂練習

設 $\log_{10} 3 = b$ ，將下列各數用 b 表示：

$$(2) \log_{10} 27\sqrt{3} .$$

$$(3) \log_{10} \sqrt[3]{30}$$

※ 換底公式

1. 設 a, b, c 均 > 0 , 且 $a \neq 1, c \neq 1$, 則

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

2.習慣上，將以 10 為底數的對數 $\log_{10} x$ 寫成 $\log x$ （省略底數 10）

例題 5 -----

設 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$, 將下列各式用 a, b 表示：

$$(2) \log_2 6$$

(3) $\log_5 12$

隨堂練習

設 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$. 將下列各式用 a, b 表示：

(1) $\log_4 6$

(2) $\log_3 5$

(3) $\log_3 180$

例題 6

利用換底公式，求下列各式的值： (1) $\log_4 5 \times \log_5 4$

(2) $\log_4 8$

隨堂練習

求下列各式的值： (1) $\log_3 11 \times \log_{11} 9$

(2) $\log_{25} \sqrt{5}$

(3) $\log_{a^2} a^5$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

例題 7

求下列各式的值：

(1) $\log \frac{5}{9} - \log \frac{3}{7} + \log \frac{27}{35}$

(2) $\frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_5 10}$

(3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

隨堂練習

求下列各式的值：

$$(1) \log 2 - \log \frac{5}{2} + 2\log \sqrt{125} \quad (2) \frac{3}{2} \log \sqrt[3]{4} + \log_{100} 25 \quad (3) (\log_2 5 + \log_4 25)(\log_5 8 + \log_{25} 16)$$

人類對於刺激的反應，包括視覺、聽覺、嗅覺、味覺與觸覺，都和對數有關。
科學家發現：人類對於各種刺激的反應與這些刺激強度的對數值成正比

例題 8

測量聲音大小的分貝(s)與聲音的強度(w)有下列關係式：

$$s = 10 \cdot \log w$$

如果一般人的交談音量約為 60 分貝，演唱會中的音量約為 120 分貝，那麼演唱會音量的強度是一般交談聲音強度的幾倍？

隨堂練習

如果一般人的交談音量約為 60 分貝，那麼當 100 個人同時以此音量發聲時，被測得的聲音約為多少分貝？（設 n 個人的聲音強度是一個人的 n 倍）

3-3 習題

一、基礎題

1. 求出下列各式的 x 值：

(1) $\log_3 x = -1$.

(2) $\log_3 x = 3$.

(3) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$.

(4) $\log_x 5 = -1$.

(5) $2^x = 3$.

2. 選出正確的選項：

(1) $\log_{10}(8 \times 9) = \log_{10} 8 + \log_{10} 9$

(2) $\log_{10} \frac{2}{3} = \log_{10} 2 \div \log_{10} 3$

(3) $\log_2 3^2 = (\log_2 3)^2$

(4) $\log_4 9 = \log_2 3$

(5) $2^{\log_3 2} = 3$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_3 \left(\frac{1}{243} \right)$.

(2) $\log_{25} \frac{1}{5}$.

(3) $\log_8 16$.

4. 化簡下列各式：

(1) $\log_3 54 + \log_3 6 - 2 \log_3 2$

(2) $\log_{10} \frac{4}{7} - \frac{4}{3} \log_{10} \sqrt{8} + \frac{2}{3} \log_{10} \sqrt{343}$

$$(3) \frac{\log_9 16}{\log_3 2}$$

$$(4) \log_2 5 \times \log_5 7 \times \log_7 4$$

$$(5) (\log_3 4 - \log_{27} 16)(\log_4 9 - \log_{16} 3) .$$

5. 設 $\log_{10} 2 = a$ ， $\log_{10} 3 = b$ ，用 a ， b 表示出下列各式：

$$(1) \log_{10} 20 .$$

$$(2) \log_{10} 0.6 .$$

$$(3) \log_5 12 .$$

6. 已知 $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$ ，且 $f(a) - f(b) = 6$ ，求 $\frac{a}{b}$ 的值。

二、進階題

7. 設 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 5 = b$ ，選出正確的選項：

$$(1) \log_2 5 = ab$$

$$(2) \log_5 2 = \frac{1}{ab}$$

$$(3) \log_2 10 = 1 + ab$$

$$(4) \log_6 5 = \frac{b}{1+a} .$$

8. 某物理學家在計算繁雜的數值 a, b, c, d, e 時，以某數為底數，將這五個數分別取對數，結果得到 5.5, 7.5, 13, 18.5, 26 這五個對數值。請選出正確的選項：

$$(1) c = a + b$$

$$(2) c = ab$$

$$(3) d = a^2 b$$

$$(4) e^2 = c .$$

9. 目前國際上使用芮氏規模來表示地震的強度，設 E （單位：爾格）為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量，其中 M 與 E 的關係如下：

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M .$$

- (1) 集集大地震的芮氏規模為 7.3，試問其震央所釋放的能量為多少爾格？
(2) 當地震的芮氏規模增加 2 時，其釋放的能量是原來的幾倍？