1-2 級數

本節中，我們將認識更多有規律的數列，並試著找出這些數列的規律

級數的概念

將數列 $\langle a_n \rangle$ 中的前 n 項依序用「 + 」號連接起來的算式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

稱為**級數**．數列前 n 項的和常用 S_n 來表示，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$．

當數列 $\langle a_n \rangle$ 是等差數列時，我們稱 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 為等差級數

當數列 $\langle a_n \rangle$ 是等比數列時，我們稱 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 為等比級數

等差級數與等比級數的和公式

設 S_n 表示數列 $\langle a_n \rangle$ 前 n 項的和：

(1)若 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且公差為 d，則　$S_n=\dfrac{n\left(2a_1+(n-1)d\right)}{2}$ 或 $S_n=\dfrac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}$．

(2)若 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，且公比為 r，則

①當 $r\neq 1$ 時，$S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$．

②當 $r=1$ 時，$S_n=na_1$．

例題 1 --

(1)求等差級數 $3+7+\cdots+47$ 的和

(2)求等比級數 $3+6+\cdots+384$ 的和

隨堂練習 --

(1)求首項 58，公差 -3 之等差數列的前13項的和．

(2)求首項3，公比 $\sqrt{2}$ 之等比數列的前12項的和

例題 2 --

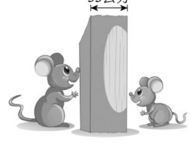
已知一等差數列的前兩項和為 15，末兩項和為 75，且所有項的和為 270，求此數列的項數．

隨堂練習 --

已知 $\langle a_n \rangle$是滿足 $a_1+a_2+a_3=3$， $a_2+a_3+a_4=-6$的等比數列，求此等比數列的公比及其前 8 項的和．

例題 3 --

有一面厚度為 33 公分的木頭牆，大小兩隻老鼠面對面穿牆．已知第一日大老鼠穿牆 1 公分，小老鼠穿牆 $\frac{1}{2}$公分，接下來，大老鼠每日都比前一日多穿牆 $\frac{1}{2}$公分，而小老鼠每日僅比前一日多穿牆 $\frac{1}{4}$公分，求幾日後，大小兩隻老鼠會恰好將牆穿通而相逢．

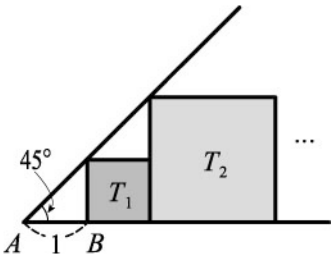


隨堂練習 --

一位寶石收藏家擁有若干顆寶石，其中最大顆的寶石重 70 公克，最小顆的寶石重 10 公克，同時這些寶石的重量恰好形成一個等差數列，且總重量超過 500 公克．問：收藏家最少擁有幾顆寶石？

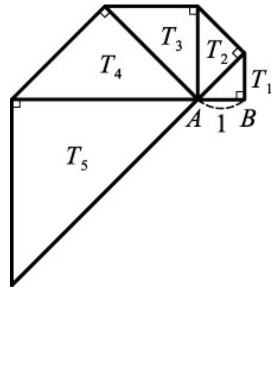
例題 4 --

右圖中，已知 $\angle A = 45°$， $\overline{AB} = 1$， T_1， T_2， T_3，…都是正方形，求前6個正方形的面積總和．



隨堂練習 --

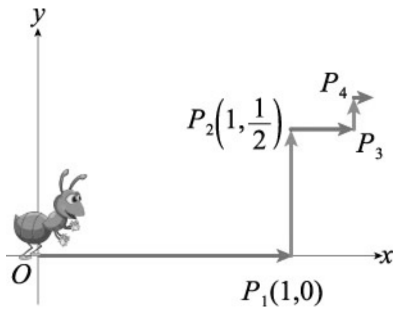
右圖中，已知 $\overline{AB} = 1$， T_1， T_2， T_3， T_4， T_5為 5 個相似的等腰直角三角形，求這 5 個三角形的面積總和．



例題 5 --

在坐標平面上，螞蟻由原點出發，如右圖所示．牠第一次向右移動1單位，到達點$P_1(1,0)$，第二次向上移動$\frac{1}{2}$單位，到達點$P_2\left(1,\frac{1}{2}\right)$，而後依照先向右再向上的方式移動，而且每次移動的距離都是前一次距離的$\frac{1}{2}$，如此依序移動到點P_3，P_4，P_5，…．

求(1)點P_4的坐標．　　　　(2)點P_{10}的坐標．

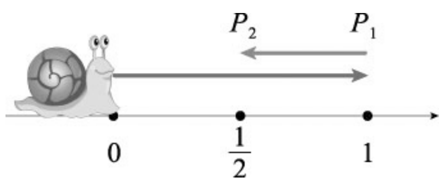


隨堂練習 --

在數線上，蝸牛由原點出發，如右圖所示．牠第一次向右移動 1 單位，到達點 P_1，第二次向左移動$\frac{1}{2}$單位，到達點 P_2，而後依照先向右再向左的方式移動，而且每次移動的距離都是前一次距離的$\frac{1}{2}$，如此依序移動到點 P_3， P_4， P_5，…．求

(1)點 P_3的坐標．

(2)點 P_7的坐標．



例題 6 --

等比級數$1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$的和是幾位數？最高位數字為何？（$\log 2\approx 0.3010$）

例題 7 --

已知數列$\langle a_n\rangle$之前 n 項的和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2$，求 a_1,a_5及 a_n .

隨堂練習 --

已知數列$\langle a_n\rangle$之前 n 項的和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=2n^2+6n$，求 a_1，a_4 及 a_n .

$\sum$的表示方法

關於級數，有一個簡便的符號「$\sum$」，念做 *sigma* 或 *summation*，是連加或是求和的意思．

利用這一個符號可以將級數 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 簡寫成 $\sum_{k=1}^{n} a_k$，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

例如：$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$．

例題 8

將下列各式寫成連加式，並求出其和：

(1) $\sum_{k=1}^{4} (2k+1)$．　(2) $\sum_{k=1}^{5} 3$．　(3) $\sum_{k=2}^{5} 2^k$．

隨堂練習

將下列各式寫成連加式，並求出其和：

(1) $\sum_{k=1}^{5} (3k-1)$．　(2) $\sum_{k=2}^{6} (-2)^k$．　(3) $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k$．

例題 9 --

將下列各級數用$\sum$表示：

(1) $2+5+8+\cdots+62$（等差級數）．

(2) $4-2+1-\cdots+\dfrac{1}{64}$（等比級數）．

(3) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$（共$n$項）．

隨堂練習 --

將下列各式寫成連加式，並求出其和：

(1) $\sum_{k=1}^{5}(3k-1)$．　(2) $\sum_{k=2}^{6}(-2)^k$．　(3) $\sum_{k=1}^{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$．

使用 $\sum$ 表示級數時，可以有不同的表示方式．例如：

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$= a_{2-1} + a_{3-1} + a_{4-1} + a_{5-1} + a_{6-1} = \sum_{k=2}^{6} a_{k-1},$$

因此 $\sum_{k=1}^{5} a_k$ 可以用 $\sum_{k=2}^{6} a_{k-1}$ 來表示，又例如：

$$\sum_{k=1}^{5}(k+2)^2 = (1+2)^2 + (2+2)^2 + (3+2)^2 + (4+2)^2 + (5+2)^2$$

$$= 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \sum_{k=3}^{7} k^2 .$$

隨堂練習 --

關於級數的表示法，選出正確的選項：

(1) $\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=3}^{6} a_k$　　(2) $\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=2}^{5} a_{k-1}$

(3) $\sum_{k=2}^{5} k^2 = \sum_{k=3}^{6} k^2$　　(4) $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{k=1}^{5}(k+1)^2$.

級數和公式

(1) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

例題 10--

使用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n， $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^2$.

隨堂練習 --

設 $S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}$.

(1)求出 S_1， S_2， S_3的值 .

(2)猜測 S_n的值 .

(3)使用數學歸納法驗證你的猜測 .

例題 11

(1)求 $11^2+12^2+\cdots+20^2$ 的值．

(2)求 $2^2+4^2+\cdots+18^2$ 的值．

隨堂練習

關於正整數 $N=\sum_{k=1}^{19}k^3=1^3+2^3+\cdots+19^3$，選出正確的選項：

(1) N 是一個完全平方數　　(2) $N=(1+2+\cdots+19)^2$

(3) N 是 3 的倍數　　(4) N 是 5 位數．

$\sum$的運算性質

(1) $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$.

(2) $\sum_{k=1}^{n}\left(ca_k\right)=c\sum_{k=1}^{n}a_k$（$c$ 是常數）.

例題 12--

(1)求 $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\left(n+1\right)$的和 .

(2)求(1)中的級數前 20 項的和 .

隨堂練習 --

(1)求 $1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+3^2\cdot 4+\cdots+n^2\left(n+1\right)$的和 .

(2)求(1)中的級數前 10 項的和 .

例題 13---

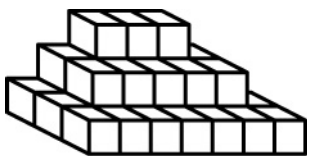
右圖是使用高腳杯往上堆疊而成的 4 層高腳杯垛．其最底層為每邊有 4 杯的正三角形，每往上一層，正三角形每邊的杯數少 1 杯，以此類推．

試問：如果仿照上面的方式，堆疊成最底層為每邊有 10 杯的正三角形，共堆高 10 層的高腳杯垛，那麼需要準備多少個高腳杯呢？

隨堂練習 ---

右圖是 3 層的積木堆。最上層有 3×1塊積木，每往下一層，長邊增加 2 塊積木，寬邊增加 1 塊積木，即第二層有 5×2塊積木，第三層有 7×3塊積木．

試問：如果仿照上面的方式，由上往下堆疊成 10 層的積木堆，那麼需要準備多少塊積木呢?



1-2　習題

一、基礎題

1. 已知一等差數列共有 10 項，其奇數項的和為 25，偶數項的和為 45，求此數列的公差 .

2. 關於等比級數 $1+2+4+\cdots+1024$，選出正確的選項：
   (1)公比為 2
   (2)共有 10 項
   (3)此級數可表為 $\sum_{k=0}^{10} 2^k$
   (4)此級數的和大於 2^{10}
   (5)此級數的和小於 2^{11} .

3. 將下列各式寫成連加式，並求出其和：

(1) $\sum_{k=3}^{10}(3k-2)$

(2) $\sum_{k=1}^{6} 3$

(3) $\sum_{k=1}^{4} 2\cdot 3^k$

(4) $\sum_{k=1}^{9} 3\cdot(-1)^k$

(5) $\sum_{k=1}^{4}\left(k+\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right)$

4. 將下列各級數用 $\sum$ 表示：
   (1) $5+9+13+\cdots+93$（等差級數）.

(2) $9+7+5+\cdots+(-101)$（等差級數）.

(3) $1-1+1-1+1-1+1-1$（等比級數）.

(4) $16+8+4+2+\cdots+\dfrac{1}{64}$（等比級數）.

5. (1)已知等差數列$\langle a_n\rangle$的首項-15，公差 5，和 735，求此等差數列的末項與項數 .

(2)已知等比數列$\langle a_n\rangle$的首項 2，末項 512，和 682，求此等比數列的公比與項數 .

6. 已知數列$\langle a_n\rangle$之前 n 項的和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=-2n^2+n$，求 a_1及 a_n .

7. 求下列各級數的和：

(1) $1\cdot100+2\cdot99+\cdots+99\cdot2+100\cdot1$.　　　(2) $1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6+\cdots+(2n-1)2n$.

8. 已知級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{199}{200}$，求正整數 n 的值．（提示：$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$）

9. 使用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n，

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$ ．

二、進階題

10. 已知等差數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=4$， $a_7+a_{12}=0$，且設 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ．選出正確的選項：

(1) $\langle a_n\rangle$ 的公差大於 0

(2) $a_8+a_{11}=0$

(3) $a_{10}>0$

(4) $S_{20}<0$ ．

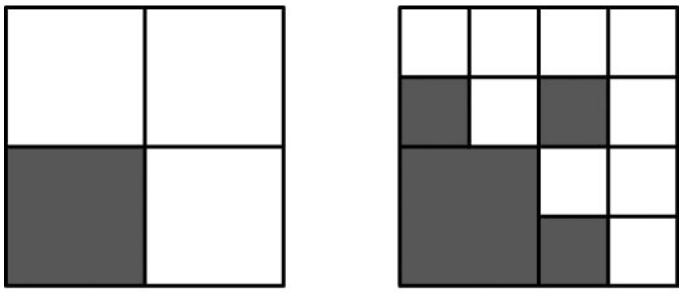
11. 設等比級數 $S=1+2+2^2+\cdots+2^{99}$ ．問：

(1) S 是幾位數?

(2) S 的最高位數字為何?（ $\log 2\approx 0.3010$ ）

12. 一隻大烏龜背著兩隻中烏龜，這兩隻中烏龜的重量都是大烏龜的 $\frac{1}{8}$，又每隻中烏龜又背著兩隻小烏龜，這兩隻小烏龜的重量也都是中烏龜的 $\frac{1}{8}$，如此堆疊上去，共堆了 5 層．已知大烏龜有 96 公斤重，求所有烏龜重量的總和．

13. 已知一個正方形，我們依以下的步驟將其分割著色．
第一步驟：將其等分成 4 個小正方形，並將其左下角的正方形塗上黑色，如第 1 圖所示．
第二步驟：將剩下的 3 個正方形再分別等分成 4 個小的正方形，並將其左下角的正方形塗上黑色，如第 2 圖所示．



第1圖　　　　第2圖

依照這樣的規律，繼續分割與著色下去，並設 a_n 表示第 n 步驟後塗上所有黑色正方形的總數，可知 $a_1=1$， $a_2=4$．求
(1) a_3．
(2) a_n．