

1-2 數線上的幾何

前一節介紹過，有理數和無理數都可以在數線上找到對應的點；同樣的，數線上每一點 P 也對應到一個實數 x 。有了數線之後，可以藉由數線更了解實數的性質。例如，把數線上的點往右移 1 單位，它的坐標會多 1，往左移則坐標會變小。除此之外，數線上的點還有哪些幾何特性呢？

兩點距離公式與分點公式

設點 A 與點 B 的坐標分別為 a 與 b ， m ， n 為正數。

(1) A 與 B 的距離 $\overline{AB} = |a - b|$ 。

(2) 若 P 點在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，則 P 點坐標為 $\frac{mb + na}{m + n}$ 。

例題 1-----

例 1. 數線上兩點 $A(-1)$ ， $B(15)$ 。

(1) 求 \overline{AB} 的長。

(2) 已知 $P(x)$ 點在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 5$ ，求 x 。

(3) 已知 $Q(y)$ 點為 \overline{AB} 外一點，且 $\overline{AQ} : \overline{BQ} = 3 : 5$ ，求 y 。

隨堂練習-----

數線上兩點 $A(12)$ ， $B(-6)$ 。求

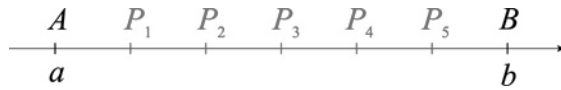
(1) \overline{AB} 的長。

(2) 已知 P ， Q 點在 A ， B 之間，且 $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$ ，求 P 點與 Q 點坐標。

(3) 已知 R 點為 \overline{AB} 外一點，且 $\overline{AR} : \overline{BR} = 7 : 1$ ，求 R 點坐標。

例題 2-----

設 $a < b$ ， P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 分別是 a, b 間的 5 個等分點，如圖所示。



(1) $\frac{a+5b}{6}$ ， $\frac{a+b}{2}$ ， $\frac{2a+b}{3}$ 分別是哪些點的坐標？

(2) 比較 $\frac{a+5b}{6}$ ， $\frac{a+b}{2}$ ， $\frac{2a+b}{3}$ 三數的大小。

隨堂練習-----

設 $a < b$ ，比較下列各數的大小：

$$P = \frac{a+b}{2}, \quad Q = \frac{a+3b}{4}, \quad R = \frac{3a+5b}{8}.$$

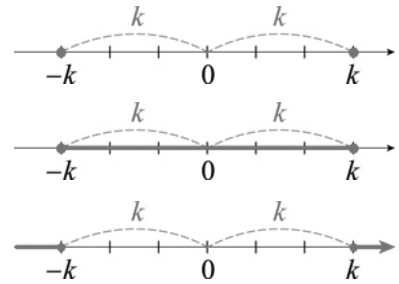
含絕對值的一次方程式與不等式

設 k 是正實數。

(1) 若 $|x| = k$ ，則 $x = k$ 或 $x = -k$ 。

(2) 若 $|x| \leq k$ ，則 $-k \leq x \leq k$ 。

(3) 若 $|x| \geq k$ ，則 $x \geq k$ 或 $x \leq -k$ 。



例題 3-----

解下列各式，並在數線上標示其解。

(1) $|x - 2| = 3$. (2) $|x + 1| \leq 3$. (3) $|2x - 1| > 5$.

$x > 3$ 或 $x < -2$

隨堂練習-----

解下列各式，並在數線上標示其解。

(1) $|x - 1| = 5$. (2) $|x - 1| > 5$. (3) $|2x + 3| \leq 2$.

例題 4-----

解下列各不等式：

$$(1) \begin{cases} |x-3| < 2 \\ |-x+1| < 1 \end{cases} . \qquad (2) 1 \leq |2x-1| < 5 .$$

隨堂練習-----

解下列各不等式：

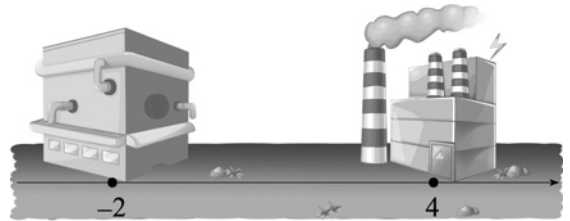
$$(1) \begin{cases} |3-x| \geq 2 \\ |x-2| < 4 \end{cases} . \qquad (2) 3 < |2x+1| < 7 .$$

例題 5-----

解不等式 $|x-5| > |2x-4|$.

例題 6-----

郊區一筆直的路段設有水廠與電廠各一座，其坐標如下圖所示：為了回饋沿路居民，水電的基本費計算方式為：「住戶到電廠距離的 2 倍加上住戶到水廠的距離為該用戶的水電基本費。」試求該路段基本費不超過 15 元的區域範圍。



隨堂練習-----

設在尖峰時段， A ， B ， C 三間電腦教室的網路入流量分別為 2.5，1 與 x Mbytes。若 A ， C 入流量的差不到 B ， C 入流量差的一半，則 x 的範圍為何？

例題 7-----

設 a ， b 為實數，試證明 $|a+b| \leq |a|+|b|$

隨堂練習

設 a, b 為實數，試證明 $|a-b| \leq |a|+|b|$ 並求等號成立的條件。

隨堂練習

(1) 設 x 為實數，求 $|x-6|+|x+1|$ 的最小值。

(2) 解不等式 $|x-6|+|x+1| \leq 5$ 。

1-2 習題

一、基礎題

1. 數線上， O 為原點， A 點的坐標為 a ， B 點的坐標為 b ，若已知 $a+b < 0$ ， $a-b > 0$ ， $ab > 0$ ，

則 O, A, B 三點在數線上的位置由左到右依序為

(1) O, B, A (2) A, O, B (3) B, A, O (4) A, B, O 。

2. 數線上兩點 $A(-5)$, $B(7)$. (1)求 \overline{AB} 的長 . (2)已知 \overline{AB} 的中點為 $M(m)$, 求 m .
(3)已知 $P(x)$ 點在 \overline{AB} 上 , 且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$, 求 x .
(4)已知 $Q(y)$ 點為 \overline{AB} 外一點 , 且 $\overline{AQ}:\overline{BQ}=3:2$, 求 y .

3. 設 a , b 為實數 , 且 $a < b$, 下列各數何者最大 ?

(1) $\frac{a+b}{2}$ (2) $\frac{a+2b}{3}$ (3) $\frac{2a+b}{3}$ (4) $\frac{3a+2b}{5}$.

4. 解下列各式 :

(1) $|x| = \frac{1}{2}$. (2) $\left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$. (3) $|x-2| \leq 1$.

(4) $|x+2| > 1$. (5) $\begin{cases} |x-2| < 3 \\ |x| > 2 \end{cases}$. (6) $1 < |2x+3| < 3$.

5. 設 a 為實數 , 已知 $|x-11| \leq a$ 的解為 $5 \leq x \leq 17$, 求 a 的值 .

二、進階題

6. 設 a , b 為實數 , 已知 $|2x - a| \leq b$ 的解為 $-3 \leq x \leq 11$, 求 a , b 的值 .

7. 解不等式 $|x + 1| + |x - 3| \geq 6$.

8. 已知數線上有相異四點 $A(x)$, $B(2x)$, $C(-1)$, $D(3)$, 滿足 $\overline{AC} + \overline{BD} = 7$, 求 x 的值 .

9. 已知 $a > 1$, 數線上相異三點坐標分別為 $A(a)$, $B\left(1 + \frac{2}{a}\right)$, $P(2)$. 選出正確的選項 :

(1) 當 B 點的坐標為 $\frac{3}{2}$ 時 , A 點坐標為 4

(2) 當 A 點在 P 點左方時 , B 點會在 P 點右方

(3) 當 A 點在 P 點右方時 , B 點會在 P 點左方

(4) B 點到 P 點的距離為 $\left|1 - \frac{2}{a}\right|$

(5) B 點到 P 點的距離小於 A 點到 P 點的距離。