1-1 數列

本節中，我們將認識更多有規律的數列，並試著找出這些數列的規律

數列的概念

定義：將一系列的數依照順序排列，就構成一個數列，用符號 $\langle a_n \rangle$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

首項：數列中的每一個數稱為它的項，第一個數稱為第一項或首項

第二項：第二個數稱為第二項

第 n 項：其中 a_n 是此數列的第 n 項

例題 1 --

寫出下列兩數列的前五項：

(1) $\langle 2n-1 \rangle$　　　　(2) $\left\langle \dfrac{n}{2n+1} \right\rangle$

隨堂練習 --

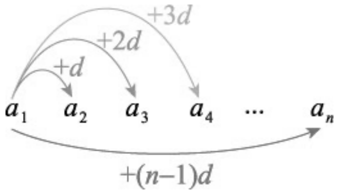
寫出下列兩數列的前五項：

(1) $\langle 1-n^2 \rangle$　　　　(2) $\left\langle \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rangle$

等差數列的一般項

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1，公差為 d，

則其一般項為　$a_n = a_1 + (n-1)d$.



例題 2 --

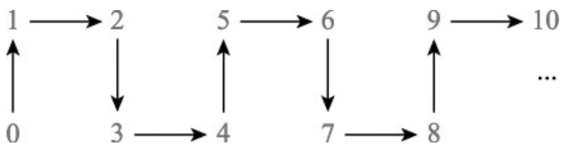
某年二月有四天是星期三，而且這四天日期的數字和為 50，問：

(1)該年二月的第一個星期三是幾日？

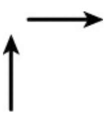
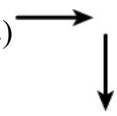
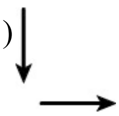
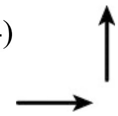
(2)該年的元旦是星期幾？

隨堂練習 --

從 0 開始，依照先向上、再向右、再向下、再向右的規律將所有整數依序排列如下圖：



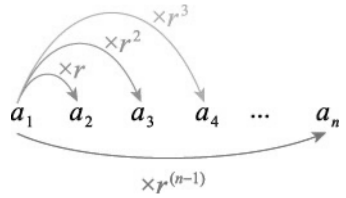
問下列哪一個選項是由 199 經 200 到 201 的圖形：

(1)  (2)  (3)  (4) 

等比數列的一般項

若等比數列$\langle a_n \rangle$的首項為a_1（$a_1 \neq 0$），

公比為r（$r \neq 0$），則其一般項為　$a_n = a_1 r^{n-1}$



例題 3

已知 3，$3\sqrt{3}$，9，⋯，243 是一個等比數列，求

(1)首項a_1及公比r．　(2)第 6 項的值．　(3)243 是第幾項?

隨堂練習

已知 3，-6，12，⋯，-384是一個等比數列，求

(1)首項a_1及公比r．　(2)第 5 項的值．　(3) -384是第幾項?

例題 4

在等比數列$\langle a_n \rangle$中，$a_1 + a_3 = 20$，$a_2 + a_4 = -10$，求a_5的值．

隨堂練習 --

已知等比數列$\langle a_n \rangle$中，每項均為正數，且$a_1 \cdot a_3 = 1$，$a_4 = 4$，求a_1的值

例題 5 --

已知a，2，b三數是等比數列，a，2，$b-1$三數是等差數列，求a的值

隨堂練習 --

已知$\langle a_n \rangle$是公差為 2 的等差數列，且　a_2，$a_1 + a_3$，$a_3 + a_4$三數構成一個等比數列，求數列$\langle a_n \rangle$之首項a_1的值

等差數列的遞迴關係式

首項為 a，公差為 d 的等差數列 $\langle a_n \rangle$ 可用式子

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \ (n \geq 2) \end{cases}$$ 表示

例題 6 --

伸出你的左手，從大拇指開始，如右圖所示那樣數數字：　1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，⋯．

設 a_n 是第 n 次指到大拇指時所數到的數字．

(1)求 a_1， a_2， a_3．

(2)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式

隨堂練習 --

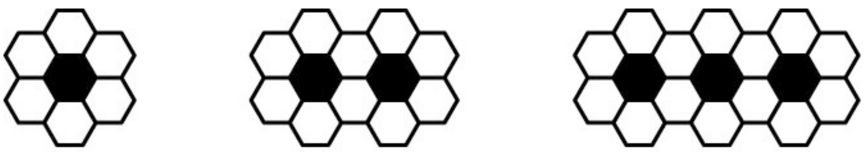
1. 在例題 6 中，當你數到 999 時，所指的是哪根手指頭？

   (1)大拇指　(2)食指　(3)中指　(4)無名指　(5)小指．

2. 用黑白兩種顏色的正六邊形地磚依照如下的規律，黑色地磚每次增加一塊，拼成若干圖形：設 a_n 為第 n 圖中白色地磚的總數（如圖可知： $a_1 = 6$， $a_2 = 10$， $a_3 = 14$）．

   (1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

   (2)求 a_{50}．



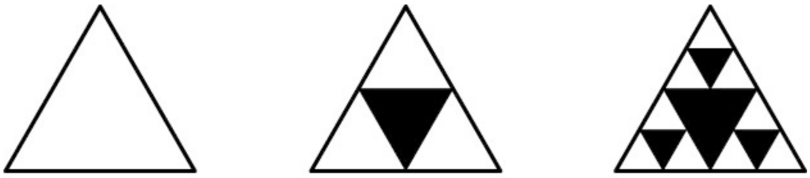
第1圖　　第2圖　　第3圖

等比數列的遞迴關係式為

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = ra_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

例題 7 --

取一個白色正三角形，將其等分成4個相同的小正三角形，然後將中間的那一個三角形塗成黑色；接著再將剩下的3個白色小正三角形，分別等分成4個相同的更小正三角形，並將中間更小的正三角形塗成黑色．重複這樣的步驟，如下圖所示：



第1圖　第2圖　第3圖

設 a_n 為第 n 圖中白色三角形的總數．　(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．(2)求 a_6．

隨堂練習 --

取一個白色矩形，將其等分成 3 個相同的小矩形，然後將中間的那一個矩形塗成黑色；接著再將剩下的 2 個白色小矩形，分別等分成 3 個相同的更小矩形，並將中間更小的矩形塗成黑色．重複這樣的步驟，如下圖所示：

第1圖　第2圖　第3圖

設 a_n 為第 n 圖中白色矩形的總數．(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．(2)求 a_8．

例題 8 --

設平面上 n 條直線（其中任兩條均不平行，任三條均不共點）可以將平面分割成 a_n 個區域．
(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．
(2)求 a_6

思考：

因為一條直線將平面分割成兩個區域，所以 $a_1 = 2$．接下來，我們從比較「$n=1$ 與 $n=2$」及「$n=2$ 與 $n=3$」的情形開始，討論數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

在圖(a)中，平面被兩條相交直線分割成 4 個區域，即 $a_2 = 4$．在圖 4(b)中，將圖 4(a)補上第三條直線，此時第三條直線與前兩條直線會產生兩個交點．

(a) $n=2$　　　(b) $n=3$　　　(c) $n=4$

隨堂練習 --

將所有的正整數依序排列如右圖所示：
第一列為 1，第二列為 2，3，4，第三列為 5，6，7，8，9，每後一列均較前一列增加 2 個數字，以此類推．設 a_n 為中間那行數列 1，3，7⋯中第 n 個數字．
(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．
(2)求 a_6．

1
2　3　4
5　6　7　8　9
...

例題 9 --

國王依照請求，在西洋棋盤上放置小麥，規則如下：

①第一格放入 1 粒小麥，第二格放入 3 粒小麥．

②每一格所放入的小麥剛好比前一格的兩倍還多出 1 粒．

設 a_n 為第 n 格所放入小麥的數目．

(1)寫出 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2)求國王在第 5 格內放入了幾粒小麥？

在前面的課程中，我們練習經由觀察來尋找數列的規律，而在本單元，則將進一步的猜測數列的一般項，並驗證我們的猜測是正確的．為了驗證猜測是正確的，底下介紹一種證明的方法：數學歸納法．

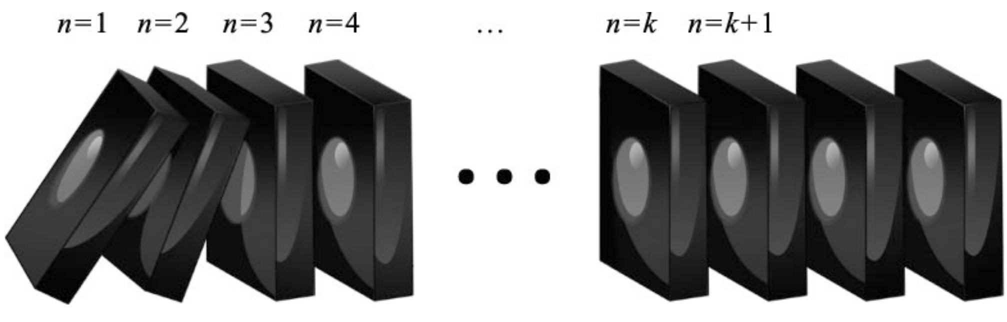
數學歸納法原理

與骨牌遊戲的原理一樣，可以藉由兩個原則依序推倒所有的骨牌：

(1)推倒第一個骨牌．

(2)當一張骨牌被推倒時，必然能接續推倒下一張骨牌．

如果能做到上面的兩件事，就可以保證所有的骨牌都將被推倒



數學歸納法 (證明的方法)

對於某一個與正整數有關的數學命題，只要滿足下面兩件事：

(1)驗算 $n=1$ 時命題成立．

(2)設 $n=k$ 時命題成立，可推得 $n=k+1$ 時命題亦成立．

即能證明此命題對於所有的正整數 n 都成立．

例題 10--

設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n = \dfrac{1}{2-a_{n-1}} \ (n \ge 2) \end{cases}$．

(1)寫出 a_2， a_3．

(2)猜測一般項 a_n．

(3)使用數學歸納法驗證你的猜測．

隨堂練習 --

設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1} \ (n \ge 2) \end{cases}$．

(1)寫出 a_2, a_3．

(2)猜測一般項 a_n．

(3)使用數學歸納法驗證你的猜測

例題 11--

使用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n， 4^n+2恆為 6 的倍數

隨堂練習 --

使用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n， 9^n+3恆為 12 的倍數．

1-1 習題

一、基礎題

1. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$滿足 $a_{10}=20$， $a_{20}=10$，選出正確的選項：
   (1)公差為 -1 ．
   (2)首項 $a_1=30$ ．
   (3) $a_{15}=15$ ．
   (4) 0是數列 $\langle a_n \rangle$中的一項．
   (5)數列 $\langle a_n \rangle$中共有 30 項的值大於 0 ．

2. 已知一等比數列的第 3 項為 -3，第 6 項為 $9\sqrt{3}$，求公比及首項．

3. 在等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_2 - a_1 = 2$，$a_1 + a_3 = 10$，求 a_4 的值．

4. 人類的大拇指自指尖到腕骨是由三塊骨頭所組成的，令自指尖到腕骨的這三塊骨頭的長度分別為 a_1，a_2，a_3．據統計，當 a_1，a_2，a_3 是等比數列且滿足 $a_3 = a_2 + a_1$ 時，大拇指的型態被認為是最完美．求完美大拇指之三塊骨頭長度的公比．

5. 用黑白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律，黑色地磚每次增加一塊，拼成若干圖形：

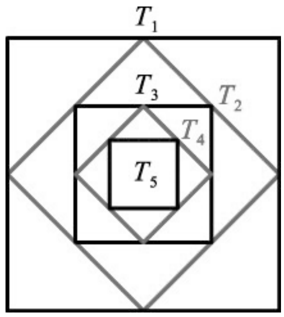
第1圖　　第2圖　　第3圖

設 a_n 是第 n 圖中白色地磚的塊數．

(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2)求 a_{40}．

6. 已知一正方形 T_1 的周長為 16，以其各邊中點為頂點連成的四邊形 T_2 也是正方形，如此繼續下去，得到一序列的正方形 T_1，T_2，T_3，⋯，如右圖所示．設 a_n 是正方形 T_n 的周長．



(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2)求 a_{10}．

7. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} + 4 \ (n \geq 2) \end{cases}$．使用數學歸納法證明，對於所有的正整數 n，$a_n = 3^n - 2$．

8. 使用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n，$8^n + 6$ 恆為 14 的倍數．

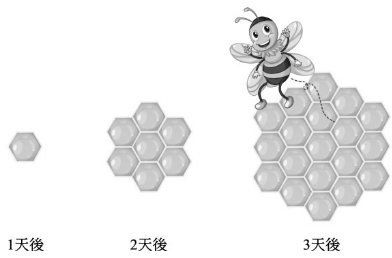
二、進階題

9. 設三正數成等差數列，其和為 30，若三數依序加上 $1,6,47$，則成為等比數列，求此三數中最小的數．

10. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (2n-1)\ (n \ge 2) \end{cases}$．

(1)寫出 a_2， a_3．　　(2)猜測一般項 a_n．　　(3)使用數學歸納法驗證你的猜測．

11. 蜜蜂蓋蜂巢的速度，1 天後蓋了 1 個正六邊形蜂巢，2 天後蓋了 7 個正六邊形蜂巢，3 天後蓋了 19 個正六邊形蜂巢，如下圖所示：按照這樣的速度與規律，設 a_n 是 n 天後蜜蜂所完成的正六邊形蜂巢總數．



(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2)求 a_5 ．

12. 跳蝨依下列的規律，從 1 號位置往順時針方向開始跳動：
(1)如果跳蝨所在的位置是奇數，那麼牠下一次將跳動 1 格，如由 1 號跳動一下到 2 號；
(2)如果跳蝨所在的位置是偶數，那麼牠下一次將跳動 3 格，如由 2 號跳動一下到 5 號．
問：跳蝨在跳動 99 下後，其所在位置的號碼是幾號？