

## 2-2 排列

計數問題的核心有四類問題，分別是排列、重複排列、組合、重複組合。

我們先舉一個簡單的例子說明它們之間的不同。假設要在 1, 2, 3, 4 中選兩個數出來：

A. **排列**：選兩個數（不能重複）排成一列。有 12 種方法：

12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43。

B. **重複排列**：選兩個數（可以重複）排成一列。有 16 種方法：

11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34,  
41, 42, 43, 44。

C. **組合**：選兩個數（順序不計）。有 6 種方法：

12, 13, 14, 23, 24, 34。

D. **重複組合**：選兩個數（可以重複，但順序不計）。有 10 種方法：

11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44。

以上問題實際上都可以窮舉或用樹狀圖解決，但我們可以發展有系統的計數。本節討論排列與重複排列。

排列

※ $n$  個不同物品的排列  $P_k^n = n!$ 。

將  $n$  個不同物品排成一列有  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$  種方法。

規定  $0! = 1$

隨堂練習

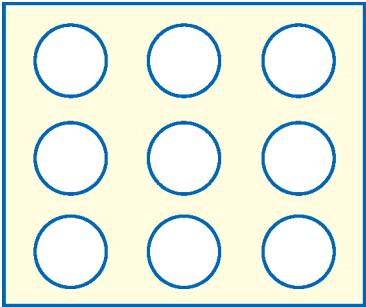
將 1, 2, 3, 4 排成一列有多少種方法？並將所有方法寫出來。

例題 1

打地鼠遊戲有九格，每格有一隻地鼠，小芬連敲九次把所有地鼠都敲回洞裡。試問：

(1) 有幾種敲的順序？

(2) 如果位於中間的地鼠必須在第五個敲，那這樣有幾種敲的順序？



-----

※ $n$  個不同物品選出  $k$  個排列

令  $P_k^n$  表示從  $n$  個不同物品中選出  $k$  個 ( $0 \leq k \leq n$ ) 排成一系列的方法數，則

$$P_k^n = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}。$$

隨堂練習-----

在 1, 2, 3, 4, 5 中選出 3 個來排成一系列的方法數有幾種？

-----

隨堂練習-----

試求下列的排列數：

(1)  $P_3^5$ 。

(2)  $P_2^7$ 。

(3)  $P_6^6$ 。

-----

例題 2-----

從  $a, b, c, d, e, f$  之中任取 4 個不同的字母排成一系列，求有多少種排法？

-----

隨堂練習-----

小芬到臺南觀光，書上推薦了 7 個景點。她想在早上、中午、下午等 3 個時段各前往 1 個

景點參觀，景點選取不重複，請問有多少種可能的方法？

-----

例題 3-----

從 1, 2, 3, 4, 5, 6 等數字中，任取四個不同的數字排成一個四位數。

(1)試問可排出多少種不同的四位數？

(2)其中有多少個是 4 的倍數？

-----

隨堂練習-----

從 5, 6, 7, 8, 9 中，任取三個不同的數字排成一個三位數。其中有多少個是 4 的倍數？

-----

例題 4-----

六人排成一列拍團體照，但是其中甲、乙、丙三人感情太好，一定要站在相鄰的三個位置。

試問這六人排成一列有幾種方式？

-----

隨堂練習-----

四對夫婦排成一列共同照相。夫婦必須相鄰站在一起，試問有幾種方式？

-----

## 例題 5-----

甲、乙、丙、丁、戊五人排成一行進遊樂場的鬼屋，但戊不願意走最前面，丙堅決不要走最後面。試問這五人進鬼屋的方法有多少種？

-----

## 隨堂練習-----

保險箱號碼鎖的密碼是六位數，且六個數字是 2, 3, 4, 5, 7, 8，但只記得第一個數字不是 3，第二個數字不是 8。試問在最糟糕的情況下要試多少次才能開鎖？

-----

## ※含有相同物品的排列

設  $n$  個物品分成  $k$  類，每類各有  $m_1, m_2, \dots, m_k$  個

(每類中的物品相同且  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ )。

則這  $n$  個物品排成一行有  $\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$  種方法。

## 隨堂練習-----

將  $A, A, B$  排成一行有幾種方法？

-----

隨堂練習

---

寫出  $AAABB$  排成一系列的 10 種方法。

---



例題 6-----

小璿連續擲一顆骰子七次，已知出現兩次 2，四次 4，一次 6。試問這些數字出現的順序共有幾種？

-----

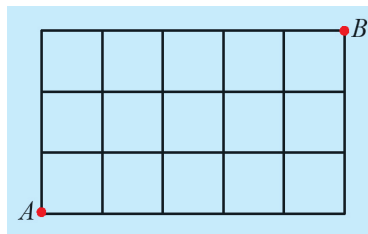
隨堂練習-----

小芬連續擲一枚硬幣五次，其中出現三次正面。試問硬幣正、反面出現的順序有幾種？

-----

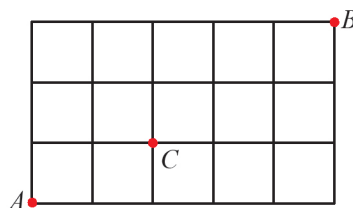
例題 7-----

如圖 的棋盤街道，要從角落  $A$  走到角落  $B$  的最短路徑有幾條？



隨堂練習-----

如圖，由  $A$  點走最短路徑到達  $B$  點，且一定要經過  $C$  點，共有幾條不同的路線？



-----

**※重複排列**

從  $n$  種物品中取出  $k$  個（每種物品都至少有  $k$  個），物品可以重複出現的排列有  $n^k$  種方法。

**隨堂練習**-----

五種不同物品取出兩個的重複排列有多少種方法？並列出其所有方法。

**例題 8**-----

小璿腳踏車上的密碼鎖如圖 所示，有 4 個滾輪，每一個滾輪上都有 0, 1, 2,  $\dots$ , 9 等 10 個數字可供選擇。試問密碼有多少種設定方法？

**隨堂練習**-----

四個好朋友揪團去吃冰，店裡有 7 種不同口味的剉冰可選，每人吃一碗，試問有多少種不同的方法？

**例題 9**-----

小芬想將圖 33 的各圓著色，一共有紅、藍、黃、白、黑、綠六種顏色可以使用，但是規定有線段相鄰的兩圓不可以同色，顏色可以重複使用，共有幾種方法？



-----

## 隨堂練習

許多國家的國旗都是由三條直條區域排列而成，如圖 所示。小芬想設計這樣的一面旗子當班旗，共有 7 種不同的顏色可用。若相鄰區域顏色不能相同，有多少種可能的樣式？



## 例題 10

有七個人要同時乘小船渡河，共有  $A$ ， $B$ ， $C$  三艘小船可選擇。

- (1) 若每艘小船限乘六人，試問有多少種可行的渡河方法？
- (2) 若每艘小船限乘五人，試問有多少種可行的渡河方法？

## 隨堂練習

一共有多少個五位數？

(提示：即自 0123456789 中重複選五個數字，但是萬位數字不能為 0)

-----

**習題 2-2**

1. 將一盒 12 枝不同顏色的彩色筆放回盒子裡，有幾種可能的排法？

2. (1) 將○，○，○，○，○，○，+，+共八個符號排成一列，有多少種排法？

(2) 將 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 等八個數字排成一列，有多少種排法？

3. 在電子看板上有一排方格，



每個方格可以出現紅、黃、綠三種顏色之一，則有多少種可能的圖案？

4. 某金融卡的提款密碼規定為四碼，每一碼可以選用數字或英文字母，但密碼不能全部都只有數字或全部都只有英文字母，試求共有幾組不同的密碼可選用？

5. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 這六個數字中，任取四個不同的數字排成一個四位數，其中比 2000 大的數有多少個？

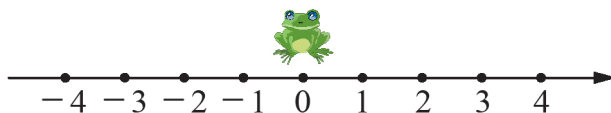
6. (1) 4 個元素的集合有多少部分集合？試全部列出來。

(2)  $n$  個元素的集合有多少個部分集合？

7. 某記者要為四名志工和兩位老夫婦拍照，要求這六個人排成一列。若兩位老夫婦相鄰，但不排在兩端，試求有幾種可能的排法？

8. 甲、乙、丙、丁、戊五人在墾丁同坐一艘五人座香蕉船，但甲不願意坐最前面，乙堅決不要坐最後面，戊一定要坐最中間。試問這五人坐船的方法有多少種？

9. 一隻青蛙站在原點，每一步往左或往右跳一個單位長。已知青蛙跳了六步之後回到原點。



試問青蛙跳的方法有幾種？