1-1　數列

※數列的定義

將一些數字依序地排成一列，就成一個數列。

一般而言，數列可以寫成　$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的樣子，

或者用符號 $\langle a_n \rangle$ 表示，其中 a_n 是此數列的第 n 項，又稱為一般項。

例題 1 --

(1) 試寫出數列 $\langle 2n-1 \rangle$ 的前五項

(2) 設數列的 $\langle a_n \rangle$ 的一般項為 $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$，試寫出此數列的前五項

隨堂練習 --

(1) 試寫出數列 $\langle 2n+1 \rangle$ 的前五項

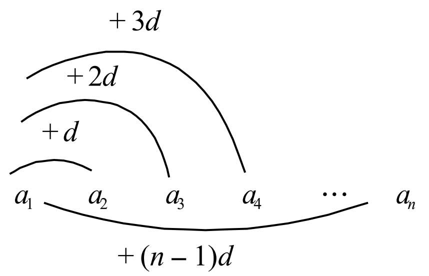
(2) 設數列的 $\langle a_n \rangle$ 的一般項為 $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，試寫出此數列的前五項

※等差數列

若等差數列$\langle a_n \rangle$的首項為a_1，公差為d，

則其一般項為

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$



隨堂練習--

試寫出下列數列的前五項，並求出其一般項a_n

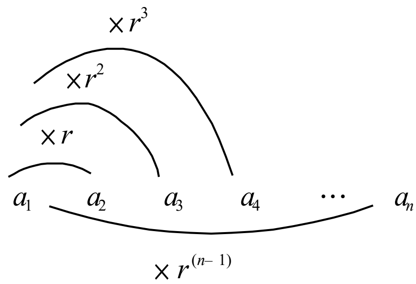
(1)等差數列首項為 2，公差為 3

※等比數列

若等比數列$\langle a_n \rangle$的首項為a_1（$a_1 \neq 0$），公比為r（$r \neq 0$），

則其一般項為

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$



隨堂練習--

試寫出下列數列的前五項，並求出其一般項a_n

(1)等比數列首項為 1，公比為$\frac{1}{2}$

※遞迴數列

尋找數列的規律

(1) 對於首項為a，公差為d的等差數列$\langle a_n\rangle$中，可改寫成

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

(2) 對於首項為a（$a \neq 0$），公比為r（$r \neq 0$）的等比數列$\langle a_n\rangle$可改寫成

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = r a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

一般而言，若一數列的後項可以由前面的項，根據某個規則而推得，這樣的數列稱為遞迴數列。

隨堂練習--

試將下列數列寫成遞迴式：

(1) 已知等差數列的首項為 3，公差為 4

(2) 已知等比數列的首項為 1，公比為$-\dfrac{2}{3}$

例題 2 --

試寫出下列遞迴數列的前五項：

(1) $a_1 = 1$，且$a_n = a_{n-1} + n^2 (n \geq 2)$。

(2) $a_1 = 1$，且 $a_n = 2a_{n-1} + 1(n \geq 2)$。

隨堂練習

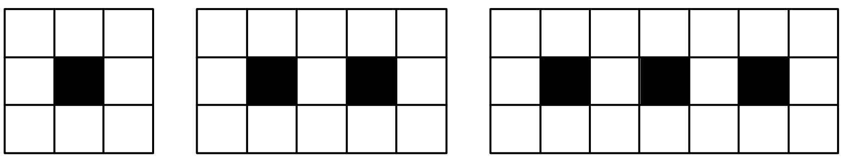
試寫出下列遞迴數列的前五項：

(1) $a_1 = 1$，且 $a_n = a_{n-1} + n(n \geq 2)$。

(2) $a_1 = 1$，且 $a_n = na_{n-1}(n \geq 2)$。

例題 3

用黑白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律，黑色地磚每次增加一塊，拼成若干圖形：



第 1 圖　　第 2 圖　　第 3 圖

設 a_n 是第 n 圖中白色地磚的塊數．

(1) 試求 a_1、a_2、a_3、a_4．

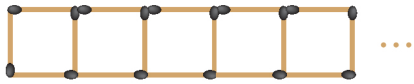
(2) 求出 a_n 和 a_{n-1} 之間的關係．

(3) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(4) 試求 a_n．

隨堂練習

用火柴棒排成 n 個相鄰的正方形，如圖。



令 a_n 表示需要用到的火柴棒數，則：

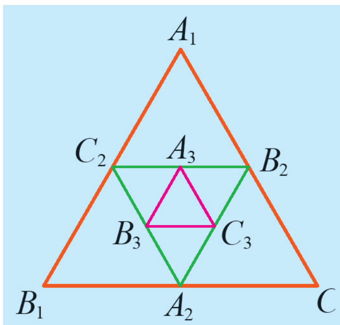
(1) 試求 a_1，a_2，a_3，a_4。

(2) 設 $n \geq 2$，求出 a_n 與 a_{n-1} 之間的關係。

(3) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式，並求出 a_n。

例題 4

已知正三角形 $A_1B_1C_1$ 的邊長為 1，如圖，依次連接$\triangle A_1B_1C_1$ 三邊 $\overline{A_1B_1}$，$\overline{B_1C_1}$，$\overline{C_1A_1}$ 的中點 C_2，A_2，B_2 而成$\triangle A_2B_2C_2$，又再次連接$\triangle A_2B_2C_2$ 的三邊 $\overline{A_2B_2}$，$\overline{B_2C_2}$，$\overline{C_2A_2}$ 的中點 C_3，A_3，B_3 而成$\triangle A_3B_3C_3$，依此類推而得一系列的三角形。



設 a_n 是$\triangle A_nB_nC_n$ 的周長，則：

(1) 試求 a_1，a_2，a_3。

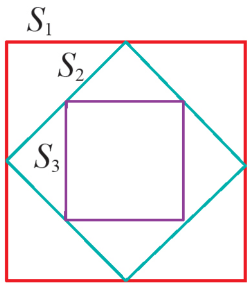
(2) 設 $n \geq 2$，求出 a_n 與 a_{n-1} 之間的關係。

(3) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式。

(4) 試求 a_n。

隨堂練習

已知正方形 S_1 的邊長為 2，連接 S_1 四邊的中點得正方形 S_2，依此規律得一系列正方形 S_3，S_4，⋯，如圖 5。設 a_n 表示 S_n 的面積，則：

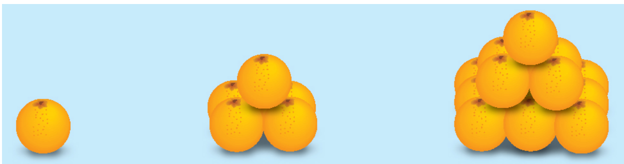


(1) 寫出數列〈a_n〉的遞迴式。

(2) 試求 a_n。

例題 5

小瑢在水果攤打工，把橘子堆成金字塔形：底盤是正方形，每四個橘子的空隙上方再放一個橘子，如圖。



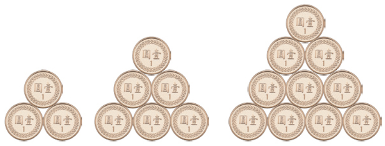
設 a_n 表示疊了 n 層所需的橘子數，則：

(1) 寫出數列〈a_n〉的遞迴式。

(2) 若要疊七層，100 個橘子夠不夠？

隨堂練習--

小璿的弟弟將一元硬幣鋪成三角形，如圖 8。設 a_n 表示排成每邊 n 個一元的三角形所需的硬幣數。



(1) 寫出數列〈a_n〉的遞迴式。

(2) 試求 a_{20}。

例題 6--

實驗室中的某種細菌以下列的方式繁殖：在第一秒時有 3 隻細菌。每過一秒，會先死去一隻細菌，然後剩下的細菌每一隻都會分裂成兩隻。因此第二秒時有 4 隻細菌，第三秒時有 6 隻細菌。令 a_n 表示第 n 秒時的細菌數目。

(1) 寫出數列〈a_n〉的遞迴式。

(2) 試求第七秒時的細菌數目。

隨堂練習--

承例題 6，試問：

(1) 第九秒和第十秒時有多少隻細菌？

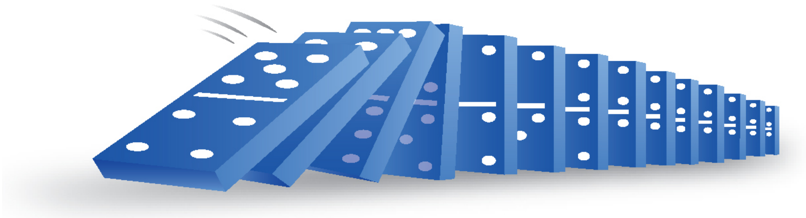
(2) 若第一秒時只有 2 隻細菌，則第九秒和第十秒時有多少隻細菌？

數學歸納法原理

　　數學歸納法原理就是骨牌效應的原理。

1. 第 1 張骨牌倒下。
2. 假設第 k 張骨牌倒下，會導致第（$k+1$）張骨牌倒下。

因此，所有的骨牌都會倒。



※數學歸納法

如果一個與正整數 n 有關的命題滿足下列兩個條件：

(1) 當 $n=1$ 時命題成立。

(2) 設 $n=k$ 時命題成立，由此可以推出 $n=k+1$ 時命題也成立。

則此命題對於所有自然數 n 都成立。

例題 7--

細菌的隻數所成的數列〈a_n〉滿足遞迴式 $\begin{cases} a_1=3, \\ a_n=2(a_{n-1}-1), & n \quad 2。\end{cases}$

試推測此數列的一般項 a_n，並用數學歸納法證明之。

隨堂練習--

設數列〈a_n〉滿足遞迴式 $\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=2a_{n-1}+1, & n \quad 2。\end{cases}$

試推測此數列的一般項 a_n，並用數學歸納法證明之。

例題 8--

設數列〈a_n〉滿足遞迴式$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2}, \\ a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{n^2+n},\ \ n\geq 2。\end{cases}$

試求一般項 a_n。

隨堂練習--

設數列〈a_n〉滿足遞迴式$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2}, \\ a_n=\dfrac{1}{2-a_{n-1}},\ \ n\geq 2。\end{cases}$

試求一般項 a_n。

例題 9

試證明：對任意正整數 n，$a_n=2^{2n-1}+5^{2n-1}$ 是 7 的倍數。

隨堂練習

試證明：對任意正整數 n，25^n+2 是 3 的倍數。

例題 10

利用數學歸納法證明：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 對所有正整數 n 均成立。

隨堂練習

利用數學歸納法證明：$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **對所有正整數 n 均成立**。

習　題　1-1

一、基本題

1. (1) 數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般項為 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$，試寫出這個數列的前七項。

   (2) 數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般項為 $a_n=(-1)^{n+1}(3n-2)$，試寫出這個數列的前 七項。

   (3) 數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1$，$a_2=1$，且 $n\geq 3$ 時 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，試寫出 這數列的前八項。

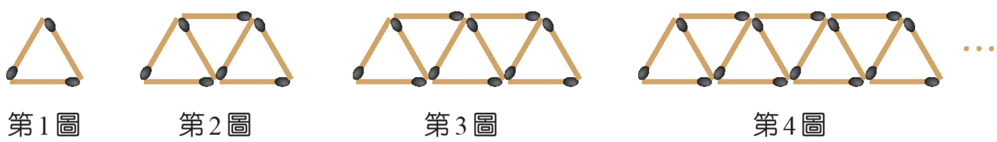
2. (1) 等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 8，公差為 -3，求其第 n 項。

   (2) 等差數列 $\langle a_n\rangle$ 中，$a_3=3$，$a_6=18$，求其首項與公差。

3. (1) 等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項是 2，公比是 -3，求其第 n 項。

   (2) 等比數列 $\langle a_n\rangle$ 中，$a_1+a_3=10$，$a_4+a_6=\dfrac{5}{4}$，求其首項與公比。

4. 用火柴棒拼成以下的圖形，



試問：

(1) 第 5 個圖需要幾根火柴棒？

(2) 令 a_n 表示要拼成第 n 個圖所需的火柴棒的支數。求出 a_n 和 a_{n-1} 之間的關係。

(3) 寫出數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴式。

5. 試證明：對所有正整數 n，

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

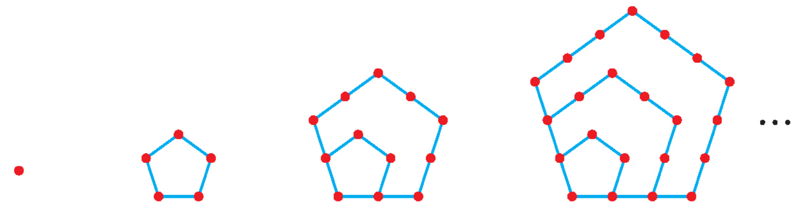
   均成立。

二、進階題

6. 在等差數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=30$，求 a_3 的值。

7. 試證明：對任意正整數 n，$2^{2n-1}+3^{2n-1}$ 是 5 的倍數。

8. 觀察下列圖形，



第 1 圖　　第 2 圖　　第 3 圖　　第 4 圖

設 a_n 表示第 n 個圖形中的點數，

(1) 求 a_1，a_2，a_3，a_4。

(2) 求出 a_n 和 a_{n-1} 之間的關係。

(3) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式。

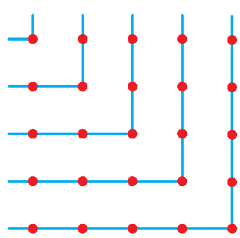
9. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式為 $\begin{cases} a_1=3, \\ a_n=2a_{n-1}-1,\ n\geq 2 \end{cases}$。

試推測這數列的一般項 a_n，並用數學歸納法加以證明。

三、挑戰題

10. 觀察右方圖形，可以直觀說明 $1+3+5+7+9=5^2$。

一般化之後可以得到等式 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。



(1) 設計一個方法，可以直觀說明 $1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$。

(2) 寫出一般化之後的等式。