3-3 條件機率與貝氏定理

條件機率的定義

設 A，B 為兩事件且 $P(A)>0$．在事件 A 發生的情況下，事件 B 發生的機率稱為條件機率，

以 $P(B\mid A)$ 表示，且定義 $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$．

依機率的定義，得　$P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$．

符號 $P(B\mid A)$ 讀作「在 A 發生的情況下，B 發生的機率」.

例題 1--

擲一粒骰子一次，若已知出現的點數為偶數，則所擲出的點數小於 5 的機率為多少？　2/3

隨堂練習--

丟一個硬幣三次，已知三次中只出現一次正面，求第二次丟出正面的機率．

條件機率的乘法原理：$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)$

例題 2--

高一甲班的學生登記訂購校慶紀念商品，有 30 人買徽章，有 10 人買背包，有 5 人兩種都買．今自班上任選一人，

(1)若已知此人買徽章，則他也買背包的機率為多少？ 1/6

(2)若已知此人買背包，則他也買徽章的機率為多少？ 1/2

隨堂練習--

班上有男生 30 人，女生 20 人，男生中戴眼鏡的有 24 人，女生中戴眼鏡的有 16 人．今自班上任選一人，

(1)若已知此人是男生，則他戴眼鏡的機率為多少？

(2)若已知此人戴眼鏡，則他是男生的機率為多少？

例題 3--

高一新生健康檢查的結果：體重超重者占 40%，血壓異常者占 10%，兩者都有的占 8%．今任選一人檢驗，

(1)若已知此人體重超重，則他血壓異常的機率為多少？ 1/5

(2)若已知此人血壓異常，則他體重超重的機率為多少？ 4/5

隨堂練習--

學期結束，教務處公告：全校學生中，有$\dfrac{1}{4}$英文不及格，有$\dfrac{1}{5}$數學不及格，有$\dfrac{1}{8}$兩科都不及格．今任選一學生，

(1)若已知他數學不及格，那麼他英文也不及格的機率為何？

(2)若已知他英文不及格，那麼他數學也不及格的機率為何？

例題 4--

籤筒的 10 支籤中 3 支有獎，甲乙兩人先後各抽 1 支籤，抽完後不放回，求

(1)兩人都中獎的機率．　　(2)只有乙中獎的機率．

隨堂練習--

承上例，求(1)甲中獎的機率．(2)乙中獎的機率．

條件機率的乘法定理

設 A，B，C 是三事件．

(1) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)$．（其中 $P(A)>0$）

(2) $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)$．（其中 $P(A\cap B)>0$）

例題 5--

設袋中有 3 紅球，2 白球．今從袋中每次取一球連取三次，取出的球不再放回袋中．求第一次取出紅球，第二次取出白球而第三次取出紅球的機率．

隨堂練習--

設甲袋內有紅球 1 個，白球 1 個；乙袋內有白球 2 個．今從甲袋中取出一球放入乙袋，再從乙袋中取出一球放回甲袋．求操作完後甲袋恰有 2 白球的機率．

貝氏定理

設 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 為樣本空間 S 的一組分割，B 為 S 的任一個事件．若 $P(B)>0$，$P(A_i)>0$（$i=1,2,\cdots,n$），則在事件 B 發生的情況下，事件 A_k 發生的機率為

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}，\quad 1\le k\le n\ .$$

例題 6--

設甲袋內有紅球 2 個，白球 1 個；乙袋內有紅球 3 個，白球 3 個．今任選一袋，再從袋中取出一球．

(1)求取出紅球的機率．　7/12

(2)已知取出的是紅球，求此球是取自甲袋的機率．　4/7

例題 7--

某工廠有甲、乙、丙三機器，其產量分別占總產量的$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$．依過去經驗知甲機器產品中的 6%，乙機器產品的 4%，丙機器產品的 3%為不良品．今任選一產品，

(1)求選出的產品為不良品的機率．　9/200

(2)已知該產品為不良品，求此產品為甲機器所製造的機率．　4/9

隨堂練習--

某校高一、二、三學生人數各占全校總人數的$\frac{1}{3}$．依該校學務處統計知：高一學生中的 28%，高二學生中的 34%，高三學生中的 43%持有智慧型手機．今從全校學生中任抽一人，

(1)求抽到的學生持有智慧型手機的機率．

(2)已知抽到的學生持有智慧型手機，該生是高一學生的機率．

例題 8--

一種檢驗某傳染病的儀器，依過去的經驗得知：患此病的人，有 90%的機率經此儀器檢驗會呈陽性反應；不患此病的人，也有 5%的機率會被誤檢而呈現陽性反應．假設某地區有 6%的人罹患此病．從此地區中任選一人接受檢驗．

(1)求檢驗結果此人呈陽性反應的機率． 101/1000

(2)若檢驗結果呈陽性反應，求此人確實罹患該病的機率． 54/101

隨堂練習--

承上例，若此人檢驗結果為陰性，則他確實沒有染病的機率為多少？

獨立事件定義

當兩事件 A 與 B 滿足　　$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$

時，稱 A 與 B 為**獨立事件**，否則稱為**相關（或相依）事件**．

例題 9--

擲一個骰子，考慮下列三事件：

A：出現奇數點，B：出現偶數點，C：出現 1 點或 6 點．

(1)A 與 C 是否為獨立事件？

(2)A 與 B 是否為獨立事件？

隨堂練習---

承上例，判斷事件 B 與 C 是否為獨立事件．

例題 10 ---

根據保險公司數據顯示，20 歲的人可以活過 70 歲的機率為 0.7．設甲乙兩人都是 20 歲，且兩人能活多久是獨立的．求

(1)兩人都活過 70 歲的機率．　0.49

(2)至少有一人活過 70 歲的機率．　0.91

隨堂練習---

已知 A， B 是兩獨立事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{2}$， $P(A\cup B)=\dfrac{2}{3}$，求(1) $P(B)$ ．(2) $P(B|A)$ ．

例題 11 ---

甲、乙二人射擊同一靶，設甲、乙射擊的命中率各為 $\dfrac{1}{4}$， $\dfrac{1}{3}$，且兩人命中靶面的事件為獨立事件．今兩人各射擊 1 發，求(1)兩人都沒打中的機率．　(2)靶面恰中 1 發的機率．　1/2, 5/12

隨堂練習--

承上例，靶面至少中 1 發的機率是多少？

三事件獨立

對任意三事件 A，B，C，當下列條件均成立時，稱 A，B，C 三事件獨立．

(1) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

(2) $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

(3) $P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

(4) $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

看起來好像(1)(2)(3)式同時成立（即 A，B，C 兩兩獨立）的話，(4)式就會成立，但事實不是如此，看看下面這個例子：

例題 12 --

袋中有編號為 1 到 9 的球各一個，自袋中任取一球．設 A 為取到球號為 1，5，9 的事件，B 為取到球號為 2，5，8 的事件，C 為取到球號為 3，5，7 的事件．

試問 A，B，C 三事件是否獨立？

隨堂練習--

袋中有編號為 1 到 30 的球各一個，自袋中任取一球．設 A 為取到球號為 2 的倍數的事件，B 為取到球號為 3 的倍數的事件，C 為取到球號為 5 的倍數的事件．試問 A，B，C 三事件是否獨立？

例題 13 --

為推廣民眾騎乘自行車作為短程接駁交通工具，臺北市政府交通局辦理 U-bike 租賃服務．設甲、乙、丙三人獨立租賃自行車上學的機率分別為 0.6，0.5 與 0.4，且三人租賃與否為獨立事件，求

(1)三人都租賃自行車上學的機率為多少？ 0.12

(2)至少有一人租賃自行車上學的機率為多少？ 0.88

隨堂練習 --

已知病人對某種藥物會有副作用的機率為 0.2．今有三位病人服用此藥，設三人是否有副作用為獨立事件，求

(1)至少有一位病人有副作用的機率．

(2)恰一人有副作用的機率．

3-3　習題

一、基礎題

1. 設生男或生女的機率均為 $\frac{1}{2}$，對一個有 3 個小孩的家庭而言．下列敘述何者正確？

    (1)若已知 3 個都是男孩，則老三是男孩的機率為 1

    (2)若已知老大和老二都是男孩，則老三是男孩的機率為 $\frac{1}{2}$

    (3)若已知 3 個小孩性別相同，則老三是男孩的機率為 $\frac{1}{2}$

    (4)若已知 3 個小孩中只有一個男生，則老三是男孩的機率為 $\frac{1}{3}$ ．

2. 設 A 與 B 為獨立事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$， $P(B)=\frac{1}{3}$ ．選出正確的選項：

    (1) $P(A\cap B)=\frac{5}{6}$　　(2) $P(B\mid A)=\frac{1}{3}$　　(3) $P(A\mid B)=\frac{1}{3}$

    (4) $P(B\mid A')=\frac{1}{3}$　　(5) $P(B'\mid A')=\frac{2}{3}$ ．

3. 已知事件 A 與 B 滿足 $P(A)=\frac{1}{2}$， $P(B)=\frac{1}{3}$， $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$，求下列各機率：

(1) $P(B\mid A)$.　　(2) $P(B'\mid A)$.　　(3) $P(A'\mid B')$.

4. 甲、乙兩人解同一問題，甲解出這個問題的機率是 0.4，乙解出這個問題的機率是 0.5．在兩人解題互不影響下，求
(1)兩人都解出此問題的機率．
(2)恰有一人解出此問題的機率．
(3)至少有一人解出此問題的機率．
(4)已知兩人中恰有一人解出此問題，求此題是由甲解出的機率．

5. 某電視臺舉辦過關遊戲，每位參賽者要依序過三關，過關者才能繼續參加下一關挑戰，設任一人在每一關被淘汰的機率是 $\frac{2}{3}$，且此三關過關與否為獨立事件．
(1)小明被淘汰的機率為多少？
(2)若已知小明被淘汰了，則他是在最後一關被淘汰的機率為多少？

6. 根據統計，5%的男性及 0.3%的女性為色盲，且臺灣地區的新生兒中男女比率為 1.1：1，求臺灣地區新生兒色盲者中男女的比率．

二、進階題

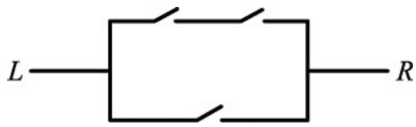
7. 設兩事件 A 與 B 滿足 $P(A)=0.5$， $P(A\cup B)=0.8$.

(1)已知 A 與 B 為互斥事件，求 $P(B)$.　　(2)已知 A 與 B 為獨立事件，求 $P(B)$.

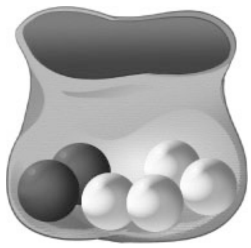
8. 已知 A， B 是兩獨立事件，且 A 和 B 都不發生的機率是 $\frac{5}{14}$， $P(B)=\frac{1}{7}$，求 $P(A)$.

9. 黑箱中有七枚硬幣，其中一枚兩面皆是人頭，一枚兩面皆是字，其餘五枚一面是人頭一面是字．將手伸入箱中握住一枚硬幣，取出後打開手掌，發現一面是人頭，試問另一面也是人頭的機率是多少？

10. 下列電路圖中有 3 個開關，電流通過各開關的機率均為 $\frac{3}{5}$，且各開關的操作獨立．求電流從左端流到右端的機率．



11. 袋中有 2 個紅球 4 個白球，甲、乙兩人依序輪流取球，每次取一球，約定先取到紅球者勝．
(1)若球取出後均再放回，則乙在第二次取球時獲勝的機率為多少？
(2)若球取出後不放回，則甲獲勝的機率為多少？



12. 籤筒的 5 支籤中 2 支有獎，甲、乙、丙三人先後各抽 1 支籤，抽完後不放回，求
(1)甲中獎的機率．
(2)乙中獎的機率．
(3)丙中獎的機率．

13. 有甲、乙、丙三個袋子，甲袋內有 3 白球 5 黑球；乙袋內有 3 白球 1 黑球；丙袋內有 2 白球 3 黑球．今任選一袋，然後再由袋中取出一球．
(1)求此球是白球的機率．
(2)已知取出的是白球，求此球是取自乙袋的機率．

14. 許多國家的法庭通常設有陪審團制度．假設被選中參加一項刑案審判的陪審團，不論被告有罪或無罪，都有 95%的機會做出正確的判決．另外，當地警方執法嚴謹，在接受法庭審判的被告當中有 99%是真正有罪的．若已知陪審團判某被告無罪，則該名被告真的無罪的機率為多少？