1-2　級數

級數

定義：將數列 a_1，a_2，…，a_n，…，的各項依序用加號連結起來，形如 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$，稱為一個**級數**。

1. a_1 稱為此級數的**首項**（或第一項），a_k 是第 k 項。
2. 以 S_n 表示級數的**前 n 項和**，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。

隨堂練習--

試寫出數列〈n^2〉所形成的級數，並求此級數的前 5 項和。

※等差級數求和公式

首項為 a_1，公差為 d 的等差級數，前 n 項和為

(1) $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)\times n}{2}$　　（也類似梯形面積公式：$\dfrac{\text{高（上底＋下底）}}{2}$）

(2) $S_n=a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+(n-1)d)$

$=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$。

例題 1--

試求下列等差級數的和：

(1) $1+3+5+\cdots+19$。

(2) $100+97+94+\cdots+31$。

隨堂練習--

試求下列等差級數的和：

(1) $7+11+15+\cdots+39$。

(2) $17+12+7+\cdots+(-18)$。

例題 2--

試求等差級數 $1+2+3+\cdots+n$ 的和。

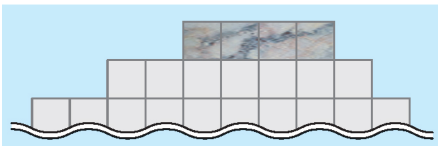
隨堂練習---

試求等差級數 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ 的和。

例題 3--

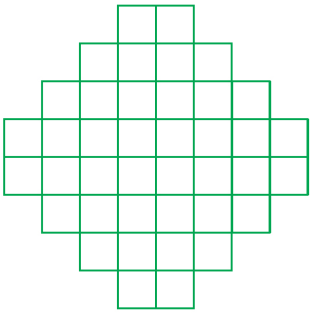
某建築物外牆側面共有 40 層，最上面的 3 層如圖所示，每一小方塊代表面積為一平方公尺的正方形；每往下一層時，左方多兩塊小方塊、右方多一塊小方塊。

建商要用每塊面積為一平方公尺的正方形大理石板覆蓋外牆。請問建商要準備多少塊大理石板？



隨堂練習---

如圖 ，有多少個單位正方形？



※等比級數求和公式

首項為 a_1（$a_1 \neq 0$），公比為 r（$r \neq 0$） 的等比級數之前 n 項和為

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} = \begin{cases} n a_1, & \text{當 } r = 1 \text{ 時，} \\ \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, & \text{當 } r \neq 1 \text{ 時。} \end{cases}$$

例題 4---

試求下列等比級數的和：

(1) $3+6+12+\cdots+3072$。

(2) $54-36+24+\cdots-\dfrac{64}{9}$。

(3) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$。

隨堂練習---

試求下列等比級數的和：

(1) $1+3+9+\cdots+729$。

(2) $2^{10}-2^9+2^8+\cdots+1$。

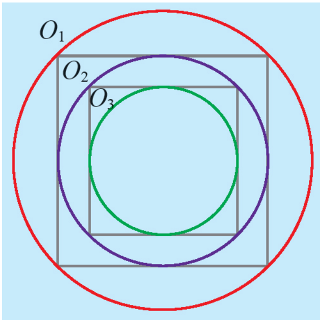
(3) $5+30+180+\cdots+5\cdot 6^{n-1}$。

例題 5--

如圖 13，單位圓記為 O_1。作 O_1 內接正方形的內切圓，記為 O_2。作 O_2 內接正方形的內切圓，記為 O_3，以此類推。試求：

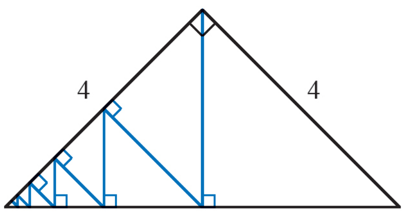
(1) O_2 的半徑。

(2) O_1，O_2，O_3，⋯，O_8 的圓周長總和。



隨堂練習--

如圖 15，從腰長為 4 的等腰直角三角形的直角頂出發，連續往底邊和一腰作垂線，得到一個之字行折線。求出此折線的前十段線段長度和。



由部分和反求數列

$$a_n=S_n-S_{n-1}，(n\geq 2)。$$

可以利用前 n 項和的通式 S_n 求第 n 項的通式 a_n。

例題 6--

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$，試求第 n 項 a_n。

隨堂練習--

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n=\frac{n(3n+13)}{2}$，試求第 n 項 a_n。

$\sum$ 的意義

級數可以用符號 $\sum$（讀作 *sigma*，是相加的意思）

符號 $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ 的意義是將 $k=m$ 變動到 $k=n$（m，n 是整數，且 $m\leq n$），逐漸代入 a_k 後，全部加起來。

(1) $\sum\limits_{k=1}^{6} k^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$。

(2) $\sum\limits_{k=3}^{6} \frac{1}{k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$。

隨堂練習--

試展開下列各式：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{4} a_k$。　(2) $\sum\limits_{k=1}^{4} k$。　(3) $\sum\limits_{k=2}^{7} k^3$。

例題 7--

展開下列級數，並求其值：

(1) $\sum_{k=1}^{6}(2k-1)$。　(2) $\sum_{k=1}^{5}7$。　(3) $\sum_{k=2}^{5}k^2$。

隨堂練習--

展開下列級數，並求其值：

(1) $\sum_{k=1}^{5}2k$。　(2) $\sum_{k=2}^{5}(k^2+2k)$。　(3) $\sum_{k=1}^{6}4$。

例題 8--

(1) 一等差級數首項為 2，公差為 3。已知共有十項，試將其表為 $\sum$ 的 型式。

(2) 一等比級數首項為 5，第二項為 10，最後一項為 320，試將其表為 $\sum$ 的型式。

隨堂練習--

(1) 將等差級數 $4+9+14+\cdots+64$ 表為 $\sum$ 的型式。

(2) 將等比級數 $11+22+44+\cdots+11264$ 表為 $\sum$ 的型式。

∑ 的運算性質

※∑ 的運算性質

(1) 若 c 為常數，則 $\sum_{k=1}^{n} c = nc$。

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$；

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} b_k$。

(3) 若 c 為常數，則 $\sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k$。

例題 9--

已知 $\sum_{k=1}^{7} a_k=55$，$\sum_{k=1}^{7} b_k=66$，試求下列各值：

(1) $\sum_{k=1}^{7} 2a_k$。

(2) $\sum_{k=1}^{7}(2a_k-3b_k+4)$。

隨堂練習--

已知 $\sum_{k=1}^{20} a_k=10$，$\sum_{k=1}^{20} b_k=-4$，試求 $\sum_{k=1}^{20}(-a_k+4b_k-2)$ 之值。

※求和公式

(1) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$。

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$。

例題 10 --

試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{66} k$。　(2) $\sum_{k=1}^{20} k^2$。　(3) $\sum_{k=1}^{18} k^3$。

隨堂練習 --

試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=27}^{95} k$。

(2) $30^2+29^2+28^2+\cdots+20^2$。

例題 11 --

試求下列各級數的和：

(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100$。

(2) $1\times3+3\times5+5\times7+\cdots+(2n-1)(2n+1)$。

隨堂練習 --

試求下列各級數的和：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{100} 2k(k+1)$。

(2) $1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+n(n+2)$。

例題 12 --

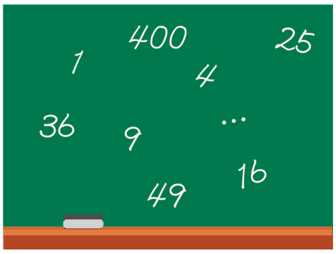
試求級數 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ 的和。　　(分項對消法)

隨堂練習 --

試求級數 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和。

例題 13 --

黑板上散布著以白色粉筆所寫的 20 個連續的平方數 1，4，9，…，400。小璿任選一數，將其減去 1 後，用紅色粉筆寫下結果，然後擦掉這個白色的數。重覆作 20 次後，黑板上剩下 20 個紅色的數。試求除了 0 以外的 19 個數的倒數和。



隨堂練習 --

承例題 13，若小璿每一步是減去 4 後才寫下紅色的數，則紅數中有 18 個正數。求這些正數的倒數和。（不需通分，寫出算式即可）

習　題　1-2

一、基本題

1. 將下列級數用 $\sum$ 符號表示：

(1) $3+6+9+\cdots+30$。

(2) $1\cdot1+2\cdot4+3\cdot9+4\cdot16+\cdots+10\cdot100$。

(3) $2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+5\cdot7+\cdots+16\cdot18$。

2. 試求下列各級數的和：

(1) 等差級數 $2+5+8+\cdots+602$。

(2) 等比級數 $8+40+200+\cdots+8\cdot5^{n-1}$。

3.(1) 已知 $\langle a_n\rangle$ 是等差數列，$a_{10}=10$，其前 10 項和 $S_{10}=70$，求其公差。

(2) 已知 $\langle a_n\rangle$ 是等比數列，$a_3=12$，$a_4=24$，求此數列的前 10 項和。

4. 試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{n}(5k-4)$。　　(2) $\sum_{k=1}^{n}(2\cdot3^{k-1})$。

5. 試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{20}k(2k+3)$。　　(2) $11^3+12^3+13^3+\cdots+20^3$。

二、進階題

6. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和 $S_n=n^2-9n$，第 k 項滿足 $5<a_k<8$，試求 k 之值。

7. 若一等差數列的前 3 項的和為 34，最後 3 項的和為 146，且所有項的和為 390，則此數列共有幾項？

8. 試求級數 $\sum_{k=1}^{28} \dfrac{1}{k(k+2)}$ 的和。

9. 下圖表示長方形垛的疊法：

某水果販將橘子堆成長方形垛。若最底層長邊有 10 個橘子，短邊有 5 個，則此長方形垛有幾個橘子？

三、挑戰題

10. 將自然數按照下列方式排列：

1	2	5	10	⋯
4	3	6	11	⋯
9	8	7	12	⋯
16	15	14	13	⋯

………………

對角線所成的數列〈a_n〉為 1，3，7，13，⋯，試求：

(1)　a_n 的一般項。

(2)　數列〈a_n〉的前 n 項和。