

3-1 指數

※正整數指數

(1) a^n 讀作「 a 的 n 次方」，其中 a 稱為底數， n 稱為指數。

(2) 將 a^2 讀作 a 的平方， a^3 讀作 a 的立方

※正整數指數的指數律

設 a, b 為實數， m, n 為正整數，則

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $a^n b^n = (ab)^n$

例題 1 -----

利用指數律求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^5$.

(2) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$.

(3) $(-6)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

隨堂練習 -----

(1) $2^3 \times 4^2 = 2^\square$.

(2) $(-3)^3 \times (-3)^5 = 9^\square$.

(3) $(4^\square)^2 = 2^{20}$.

(4) $(-2)^{10} \times 3^5 = \square^5$

※ 整數指數

設 a 是實數， $a \neq 0$ ， n 是正整數，定義

(1) $a^0 = 1$.

(2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

※ 整數指數的指數律

設 $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ， m, n 是整數，則

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(3) $a^n b^n = (ab)^n$

例題 2

求下列各式的值：

$$(1) 3^3 \times 3^{-4} . \quad (2) (3^6 + 3^2)^0 . \quad (3) (\sqrt{3} - 1)^{-2} \times (\sqrt{3} + 1)^{-2} . \quad (4) \frac{(\sqrt{3})^{-2}}{(\sqrt{3})^4}$$

隨堂練習

求下列各式的值：

$$(1) (\sqrt{3} - 1)^0 . \quad (2) (-2)^5 \times (-2)^{-8} . \quad (3) (3 - \sqrt{3})^{-3} (3 + \sqrt{3})^{-3} . \quad (4) \frac{(-2)^5}{(-2)^{-2}} .$$

例題 3

設 $a \neq 0$ ，化簡下列各式：

$$(1) \left[a^3 \cdot (a^2)^{-3} \right]^{-1} . \quad (2) (a + a^{-1})^2 . \quad (3) (a + a^{-1})(a^2 - 1 + a^{-2}) .$$

隨堂練習

設 $a \neq 0$ ，化簡下列各式：

$$(1) \left[a^4 \cdot (a^{-2})^3 \right]^2 . \quad (2) (a + a^{-1})^2 (a - a^{-1})^2 . \quad (3) (a - a^{-1})(a^2 + 1 + a^{-2}) .$$

例題 4 -----

今以燈泡照射物體，設燈泡與被照明物的距離為 d （公尺）時，被照明物表面的照度為 E （勒克斯），且 E 與 d 的關係式為

$$E = 5 \times 10^4 \times d^{-2}.$$

(1) 當距離 d 為 10 公尺時，求 E 的值。

(2) 如果距離為 a 公尺時，照度為 E 勒克斯，那麼距離要調整為多少時照度可以提升為 100 倍？

隨堂練習 -----

例題 4 中，若要求照度為 1.25 勒克斯，則距離 d 應為多少公尺？

有理數指數

設 $a > 0$ ， n 是正整數， m 是整數，定義

$$(1) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

$$(2) a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

例題 5 -----

關於風力分級，國際氣象組織採用蒲福風級法（Beaufort scale），分級的公式如下：

$$V = 0.836 \cdot B^{\frac{3}{2}}, \text{ 其中 } V \text{ 是風速（公尺 / 秒），} B \text{ 是風級。}$$

現在有一颶風，氣象組織公告其風力為 9 級風（稱為烈風），問：此颶風的風速最接近下列哪一個選項：

(1)6 (2)14 (3)18 (4)22 (5)28 公尺 / 秒。

有理數指數的指數律

設 $a > 0$, $b > 0$, p, q 都是有理數, 則

$$(1) a^p a^q = a^{p+q}$$

$$(2) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(3) a^p b^p = (ab)^p$$

例題 6

利用有理數指數的指數律, 求下列各式的值:

$$(1) \sqrt[5]{2^{20}} \times \sqrt{\sqrt{2^{12}}}.$$

$$(2) \frac{3^{1.4} \times 3^{1.2}}{3^{0.6}}.$$

$$(3) \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

隨堂練習

求下列各式的值:

$$(1) \sqrt{3\sqrt[3]{3}}.$$

$$(2) \frac{10^{-1.1} \times 10^{0.9}}{10^{-1.2}}.$$

$$(3) 1000 \times 8^{\frac{2}{3}}$$

例題 7

設 $a > 0$ ，且 $a + a^{-1} = 3$ ，求下列各式的值：

(1) $a^2 + a^{-2}$.

(2) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$

隨堂練習

設 $a > 0$ ，且 $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 4$ ，求下列各式的值：

(1) $a + a^{-1}$.

(2) $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}$

實數指數的指數律

設 $a > 0$ ， $b > 0$ ， r ， s 是任意實數，則

(1) $a^r a^s = a^{r+s}$

(2) $(a^r)^s = a^{rs}$

(3) $a^r b^r = (ab)^r$

例題 8

求下列各式的值：

(1) $10^{\sqrt{2}} \times 100^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$.

(2) $(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$.

(3) $\frac{36^{\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{12}}}$.

隨堂練習

求下列各式的值：

(1) $2^{1+\sqrt{3}} \times 2^{1-\sqrt{3}}$.

(2) $\left(9^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

(3) $\frac{3^{\sqrt{18}}}{27^{\sqrt{2}}}$.

例題 9

已知 $2^x = 3$ ，求下列各式的值：

(1) 4^{x-1} .

(2) $9 \cdot 8^{-x+1}$.

隨堂練習

已知 $9^x = 5$ ，求下列各式的值：

(1) 3^{x+1} .

(2) $5 \cdot 27^{-x-1}$

自然界中許多的現象，如人口與生物的成長、細菌的繁殖、放射性元素的衰變、音階的頻率等，都呈現指數的變化類型。例如生物的成長模式，都依循「無論從何時算起，經過相同時間後，繁殖的倍率均相同」的原則

例題 10-----

根據聯合國統計，西元 1987 年世界人口總數達 50 億。假設每年人口數都增加為原來的 r 倍，

(1) 西元 1999 年的人口數為多少？（以 r 表示）

(2) 已知西元 1999 年人口數已增至 60 億。求西元 2011 年的世界人口數約為多少人？

隨堂練習 -----

臺灣在黑面琵鷺的保育上有卓越成就。根據統計：民國 98 年飛來臺灣的黑面琵鷺數量大約是 1100 隻。假設每年飛來臺灣的黑面琵鷺數量增加為原來的 r 倍。

(1) 求民國 102 年飛來臺灣的黑面琵鷺的數量。（以 r 表示）

(2) 已知民國 102 年飛來臺灣的黑面琵鷺的數量大約是 1650 隻，試估計民國 106 年飛來臺灣的黑面琵鷺數量大約是多少隻？

3-1 習題

一、基礎題

1. 選出正確的選項：

(1) $2^0 = 0$ (2) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ (3) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (4) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{4}$ (5) $2^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2$

2. 求下列各式的值：

(1) $64^{\frac{2}{3}}$ (2) $\left((\sqrt{5})^3\right)^{-2}$ (3) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3(\sqrt{5} + \sqrt{2})^3$ (4) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-0.5} \times \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5}$

3. 設 $a > 0$ ，化簡下列各式：

(1) $(a^3 \cdot a^{-2})^{-3}$ (2) $\frac{(3a^{-1})^{\frac{1}{3}}}{(9a)^{-\frac{4}{3}}}$ (3) $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)$

4. 已知 $4^x = 5$ ，求 $8^x - 2^{x+2}$ 的值。

二、進階題

5. 設 $2^{0.3} = a, 2^{0.01} = b$ ，選出正確的選項：

(1) $a^{10} = 8$ (2) $b^{30} = a$ (3) $2^{1.32} = 2ab^2$ (4) $2^{0.28} = \frac{a}{2b}$.

6. 已知 $2^x + 2^{-x} = 3$ ，求下列各式的值：

(1) $4^x + 4^{-x}$. (2) $8^x + 8^{-x}$.

7. 已知 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值。

8. 已知在合適的環境下，草履蟲平均每 6 小時就可以分裂成原來數量的 2 倍。問：

(1) 一天後草履蟲的個數是原來的多少倍？

(2) 如果目前草履蟲的個數為 10000 個，那麼大約多少天前草履蟲的個數少於 40 個？

9. 統計學家克利夫蘭詳細研究人體的眼睛後發現：眼睛看到的圖形面積與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。今觀察地圖上大小兩國，感覺大國面積是小國面積的 128 倍，那麼實際上大國面積是小國面積的幾倍？