

### 3-2 指數函數

在池塘中種植 1 平方公尺的布袋蓮，觀察布袋蓮蔓延的面積（ $y$  平方公尺）與種植時間（ $x$  月），並將其記錄繪製，發現  $x$  與  $y$  呈現  $y = 2^x$  的關係。我們稱之為指數函數。

※指數函數的定義

(1) 設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $x$  是任意實數，我們將函數  $f(x) = a^x$  稱為以  $a$  為底數的指數函數

(2)  $f(x) = 2^x$ ，我們稱之為「以 2 為底數的指數函數」

例題 1 -----

用描點的方式作出  $y = 2^x$  的圖形

-----

隨堂練習 -----

用描點的方式作出  $y = 3^x$  的圖形

-----

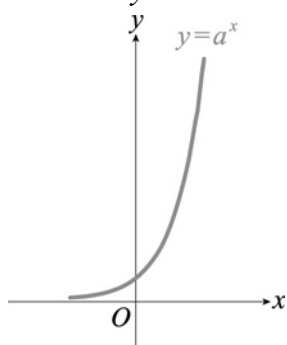
例題 2 -----

用描點的方式作出  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形

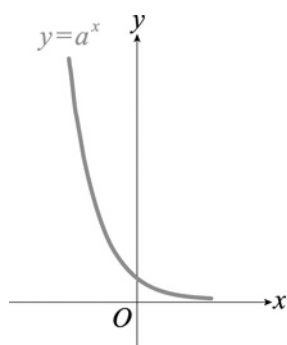
-----

## 指數函數的圖形

設  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , 指數函數  $y = a^x$  的圖形如下：



$a > 1$



$0 < a < 1$

(1) 圖形都在  $x$  軸上方。也就是對任意實數  $x$ ,  $a^x$  的值恆大於 0。

(2) 圖形都通過點  $(0, 1)$ 。這是因為  $a^0 = 1$ 。

(3) 在  $x$  軸上方的每一條水平線和  $y = a^x$  的圖形都恰好交於一點。

也就是說，方程式  $a^x = b$  ( $b > 0$ ) 恰有一個實根，即當  $a^\alpha = a^\beta$  時， $\alpha = \beta$ 。

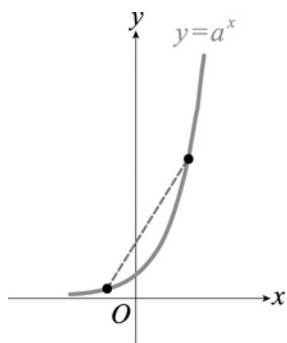
(4) 當  $a > 1$  時，圖形由左向右逐漸上升，即當  $\alpha < \beta$  時， $a^\alpha < a^\beta$ 。

我們稱這樣的函數為嚴格遞增函數。

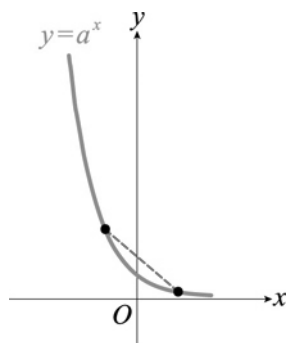
當  $0 < a < 1$  時，圖形由左向右逐漸下降，即當  $\alpha < \beta$  時， $a^\alpha > a^\beta$ 。

我們稱這樣的函數為嚴格遞減函數。

(5) 函數圖形上任相異兩點所連成的線段必在函數圖形的上方（即函數圖形的凹口向上）



$a > 1$



$0 < a < 1$

(6) 函數  $y = a^x$  和  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  的圖形對稱於  $y$  軸。

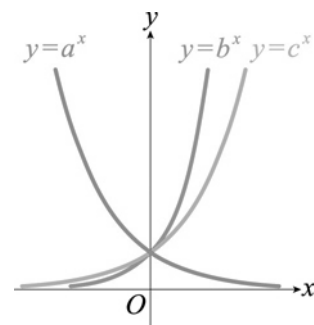
(7) 定義域：在函數關係中， $x$  的取值範圍稱作函數的定義域

(8) 值域：將其對應值  $f(x)$  的範圍稱作該函數的值域

(9) 指數函數  $y = a^x$  的定義域是所有實數，而值域是所有正實數。

例題 3

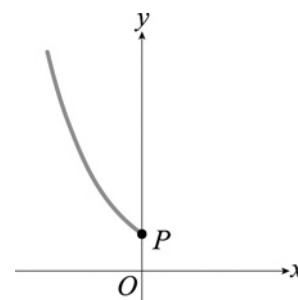
右圖為函數  $y = a^x$ ,  $y = b^x$ ,  $y = c^x$  的圖形。選出正確的選項：



- (1)  $a > 1$
- (2)  $b > 1$
- (3)  $c > 1$
- (4)  $a > b$
- (5)  $b > c$ .

隨堂練習

右圖為函數  $y = a^x$  的部分圖形，選出正確的選項：



- (1)  $\overline{OP} = 1$
- (2)  $0 < a < 1$
- (3)  $y = a^x$  的圖形與每一條水平線均相交
- (4) 若  $(100, k)$  為  $y = a^x$  函數上一點，則  $k > 0$

## 例題 4

利用  $y = 2^x$  的圖形，描繪下列函數的圖形：

(1)  $y = 2^{x-2}$  .

(2)  $y = 2^x + 1$  .

## 隨堂練習

將  $y = 2^x$  的圖形，向左平移 1 單位，再向下平移 2 單位，會得到哪一個函數的圖形？

## 指數函數的應用

指數函數圖形的特性，其解法其實與多項方程式的解法類似，特別注意： $a^x$  的值恆大於 0

## 例題 5

解下列方程式：(1)  $(\sqrt{3})^{3x+1} = 27\sqrt{3}$

(2)  $9^x + 3^{x+1} - 18 = 0$  .

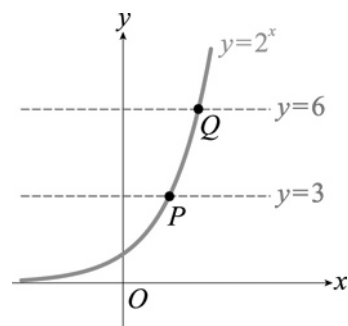
隨堂練習

解下列方程式：(1)  $4^{3x^2} = 2^{10x+4}$  .

(2)  $4^{x+1} = 9 \cdot 2^x - 2$  .

例題 6

圖為  $y = 2^x$  的圖形。設  $P$ ， $Q$  分別為直線  $y = 3$ ， $y = 6$  與  $y = 2^x$  的交點，求  $\overline{PQ}$  的長。



根據指數函數遞增或遞減的特性，可以比較數的大小

例題 7

比較  $a = \sqrt{0.3}$ ， $b = (0.09)^{0.3}$ ， $c = \left(\frac{10}{3}\right)^{-0.4}$  三數的大小關係

隨堂練習

比較  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt[3]{4}$ ,  $c = 1$  三數的大小關係

例題 8

已知  $(0.7)^{x^2} > (0.49)^x$ , 求  $x$  的範圍

隨堂練習

已知  $\frac{1}{2} < 2^{2x+1} < 8$ , 求  $x$  的範圍

例題 9

解不等式  $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$

隨堂練習

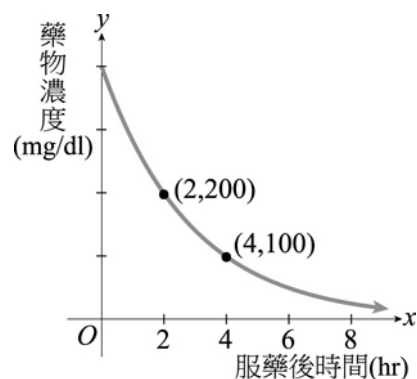
解不等式  $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 \leq 0$

例題 10

已知藥物在人體血液中的剩餘量隨著時間遞減，且經過  $x$  小時後，血液中的藥物濃度為指數函數  $f(x) = k \cdot a^x$ （毫克 / 分升），其中  $k, a$  是常數。圖是  $y = f(x)$  的部分圖形。

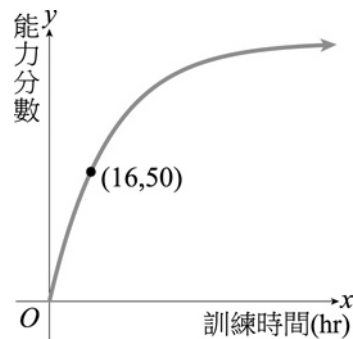
(1) 求  $k, a$  的值。

(2) 若人體中的藥物濃度低於 25 毫克 / 分升時就必須再進行服藥，則應每隔多少個小時服藥一次？



## 隨堂練習

游泳訓練機構統計發現，經過  $x$  小時的訓練，學員掌握自由式游泳技巧的「能力分數」為函數  $f(x) = 100(1 - a^x)$ ，其中  $a$  是常數。圖是  $y = f(x)$  的部分圖形。當能力分數為 75 時，表示此學員可以游完 100 公尺的距離，試問：一名學員應該接受幾小時的訓練，才能游完 100 公尺呢？



## 3-2 習題

## 一、基礎題

1. 設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，關於函數  $f(x) = a^x$ ，選出正確的選項：

- (1)  $f(x)$  的圖形恆過點  $(0,1)$
- (2)  $f(x)$  的圖形與  $x$  軸不相交
- (3)  $f(x)$  的圖形與任一條水平線相交
- (4)  $f(x)$  的圖形與任一條鉛垂線相交
- (5) 若  $\alpha < \beta$ ，則  $f(\alpha) < f(\beta)$ 。

2. 解下列方程式：(1)  $9^x = (3\sqrt{3})^3$

(2)  $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ 。

3. 比較下列各組數的大小關係：

(1)  $a = \sqrt[4]{8}$ ， $b = \sqrt{2}$ ， $c = \sqrt[3]{16}$ ， $d = \frac{1}{2}$ 。

(2)  $a = (0.7)^{1.5}$ ， $b = (0.7)^{\sqrt{2}}$ ， $c = (0.7)^{-1}$ ， $d = 1$ 。



4. 解下列不等式：

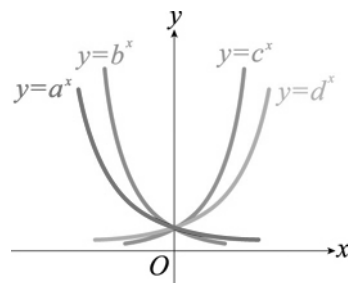
$$(1) \left(\frac{4}{5}\right)^{x+2} > 1.$$

$$(2) (0.1)^x < 100.$$

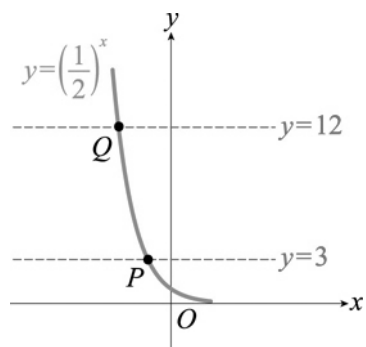
$$(3) 4 \cdot 2^{x^2} > 8^x.$$

$$(4) 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0.$$

5. 右圖為  $y = a^x$ ,  $y = b^x$ ,  $y = c^x$ ,  $y = d^x$  四個函數的圖形，試比較  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  四數的大小關係。



6. 右圖為  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形。設  $P$ ,  $Q$  分別為直線  $y = 3$ ,  $y = 12$  與  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的交點，求  $\overline{PQ}$  的長。



二、進階題

7. 設  $f(x) = 4^x - 4 \cdot 2^x + 3$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , 求

(1)  $2^x$  的範圍 .

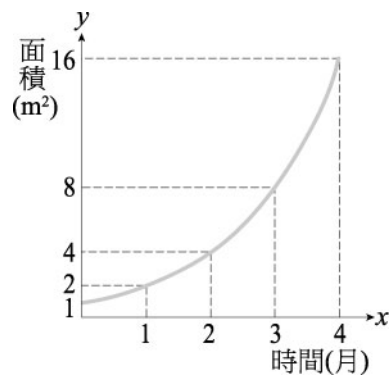
(2)  $f(x)$  的最小值與最大值 .

8. 右圖為某池塘中布袋蓮蔓延面積( $y$ )與時間( $x$ )的關係圖, 設其關係為指數函數  $y = k \cdot a^x$ ,  $k$  是常數 .

(1) 求此函數 .

(2) 布袋蓮從  $4\text{m}^2$  蔓延到  $32\text{m}^2$  需要多少個月 ?

(3) 設布袋蓮蔓延到  $2\text{m}^2$ ,  $3\text{m}^2$ ,  $6\text{m}^2$  所需要的時間分別為  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , 證明:  $t_1 + t_2 = t_3$  .



9. 連連看: 將下列各函數連到所對應的函數圖形:

$y = 2^x$  •

•  $\Gamma_1$

$y = 2^{-x}$  •

•  $\Gamma_2$

$y = -2^x$  •

•  $\Gamma_3$

$y = 8 \cdot 2^x$  •

•  $\Gamma_4$

