3-5 指數與對數的應用

如果一家銀行存款的年利率為 2%，那麼在這家銀行存入 100 萬元，幾年後可以領回 200 萬元呢？生活中有許多事物與指、對數相關，例如銀行存款、放射性物質的衰變等．我們將在本節中學習使用對數表，並對實際問題進行估算

※對數表、內插法與科學記號

使用數表查 $\log 1.36 \approx$________________

常用對數表　$y = \log x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	**1335**	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298

例題 1 --

利用對數表，查出 $\log 1.38$ 的值

隨堂練習 --

利用對數表，查出下列各值：(1) $\log 1.58$　　　(2) $\log 2.61$

例題 2 --

已知 $\log x = 0.3892$，利用對數表反查真數 x 的值

隨堂練習 --

利用對數表，查出下列各真數 x 的值：

(1) $\log x = 0.7050$．　　　　　　　　(2) $\log x = 0.9159$

※ 科學記號

定義：任意一個正實數 a，可表示成 $a = b \times 10^n$，其中 $1 \le b < 10$，而 n 是一個整數

稱 $b \times 10^n$ 為 a 的科學記號

幫助：對於不是介於 1 和 10 之間的正數，可先將其以科學記號表示，再根據對數的性質及對數表求其對數值

例題 3 --

利用對數表，求下列各值：

(1) $\log 12300$．　　　　　　　　(2) $\log 0.00123$

隨堂練習 --

利用對數表，求下列各值：

(1) $\log 156000$．　　　　　　　　(2) $\log 0.00789$

例題 4

利用對數表反查，求下列各真數 x 的值：

(1) $\log x = 3.6702$ 　　(2) $\log x = -1.3990$

隨堂練習

利用對數表，求下列各真數 x 的值：

(1) $\log x = 2.4886$ 　　(2) $\log x = -2.1290$

內差法應用

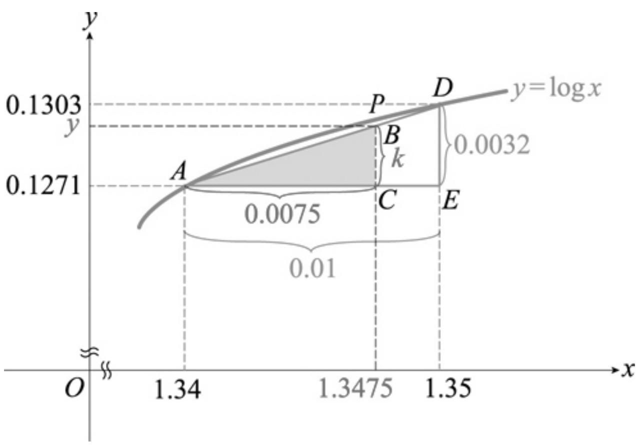
對數表中出現的數字畢竟有限，在對數表上就查不到了，此時可使用內插法來估算。

以 $\log 1.3475$ 為例來說明：

由於 $1.34 < 1.3475 < 1.35$，

先查表得知 $\log 1.34 \approx 0.1271$，

$\log 1.35 \approx 0.1303$



將 k 當作 $\overline{PC}$ 的近似值，

因為 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 相似，

所以 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$

即 $\dfrac{0.0075}{0.01} = \dfrac{k}{0.0032}$ ，得 $k = 0.0024$

例題 5

已知 $\log 5.47 \approx 0.7380$， $\log 5.48 \approx 0.7388$，用內插法求 log5.4745 的近似值

隨堂練習

已知 $\log 6.43 \approx 0.8082$， $\log 6.44 \approx 0.8089$，用內插法求 $\log 6.436$ 的近似值

利用對數，求值與估算

例題 6

利用對數表，求 $\sqrt{123 \times 345}$ 的值

隨堂練習

利用對數表，求下列各數的近似值． (1) $\dfrac{2.11\times 3.34}{4.46}$　　(2) $\sqrt[3]{614}$

根據對數函數遞增或遞減的特性，可以比較數的大小

例題 7

已知 $\log 2\approx 0.3010$， $\log 3\approx 0.4771$，且正整數 n 滿足 $\log n\approx 1.23$．問 n 可能為右列哪一個數：
(1)15　(2)16　(3)17　(4)18　(5)19

隨堂練習

已知 $\log 2\approx 0.3010$， $\log 3\approx 0.4771$，且正整數 n 滿足 $\log n\approx 1.49$．問 n 可能為右列哪一個數：
(1)29　(2)31　(3)33　(4)35　(5)37

對數的首數和尾數

對任一正數 a，表示成科學記號 $a=b\times10^n$（其中 $1\le b<10$，n 是整數），

再取對數得 $\log a=\log\left(b\times10^n\right)=n+\log b$（其中 n 是整數，$0\le\log b<1$）

稱 n 為首數，$\log b$ 為尾數，即 對數 $=$ 首數 $+$ 尾數，

其中首數是一個整數，尾數是一個大於或等於 0 但小於 1 的數

隨堂練習 --

已知 $\log1.38\approx0.1399$，求下列各對數的首數和尾數：

(1) $\log1380$．　　　　(2) $\log0.00138$

首數的特性

設 a 是一個正數，則

(1)若 $\log a$ 的首數為 n（$n\ge0$），則 a 的整數部分為 $n+1$ 位．

(2)若 $\log a$ 的首數為 $-n$（$n>0$），則 a 是純小數且自小數點後第 n 位開始不為0

例題 8 --

已知 $\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$．

(1)將 2^{30} 乘開後是幾位數？

(2)將 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

隨堂練習 --

已知 $\log 2 \approx 0.3010$， $\log 7 \approx 0.8451$．

(1)將 7^{40} 乘開後是幾位數？

(2)將 $\left(\frac{2}{7}\right)^{100}$ 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

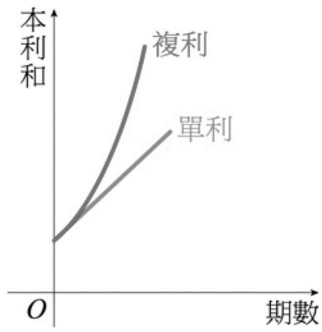
指數與對數的應用

愛因斯坦曾說：「複利的威力勝過原子彈！」不少信用卡的循環利率也是複利計算，指數型成長的複利，其威力不容小覷．

一般而言，設本金為 P 元，每期的利率為 $r\%$

關於本利和的計算方法如下：

本利和	以單利計算	以複利計算
n 年後	$P(1+r\%\cdot n)$	$P(1+r\%)^n$



例題 9 --

小華上高中後，父親為他在銀行存入 100 萬元當就學基金，已知銀行的年利率是 2%，以一年為一期複利計算．

(1)10 年後小華想出國唸書，此時就學基金有多少元？

(2)經過幾年後此筆存款的本利和會達到 200 萬元？

（$\log 1.02 \approx 0.0086$，$\log 1.22 \approx 0.086$，$\log 2 \approx 0.3010$）

隨堂練習 --

行政院希望在 20 年內讓國民平均所得超過現在的 2 倍．如果每年國民平均所得均增加 a%，那麼 a 的值最接近下列哪一個選項？

(1)3　(2)3.5　(3)4　(4)4.5　(5)5．

半衰期

指某種放射性物質衰變至原來數量的一半所需的時間，

例如：碘 131 的半衰期約為 8 天，表示該元素的放射性經過 8 天只剩下原來的 $\frac{1}{2}$，

經過 16 天只剩下原來的 $\frac{1}{4}$，如此經過 x 天，其存量會變成原來的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}$．

例題 10--

在 1960 年時專家以碳 14 檢測一件號稱是「耶穌裹屍布」的古物，發現該布上碳 14 的含量占原來的 $\frac{14}{15}$．若碳 14 的半衰期約為 5700 年，則裹屍布為哪一世紀的古物？

（$\log 2 \approx 0.3010$，　$\log 3 \approx 0.4771$，　$\log 7 \approx 0.8451$）

隨堂練習 ---

已知「碘 131」的半衰期為 8 天．某機構在發生輻射外洩時，原子能委員會偵測該機構周圍環境的「碘 131」殘留量為每公斤 1320 貝克．之後，於 12 月 26 日在同一地點偵測到「碘 131」殘留量為每公斤 220 貝克．問：該機構發生外洩的時間大約是 12 月幾日？

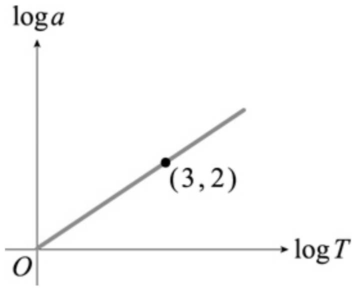
(1)1 日　(2)5 日　(3)10 日　(4)14 日

例題 11---

在研究行星軌道的週期 T 和半軸長 a 之間的關係時，若將 $\log T$ 當作 x 坐標，$\log a$ 當作 y 坐標，可得函數圖形為圖中的直線．求

(1)該直線的方程式．

(2)T 與 a 的關係式

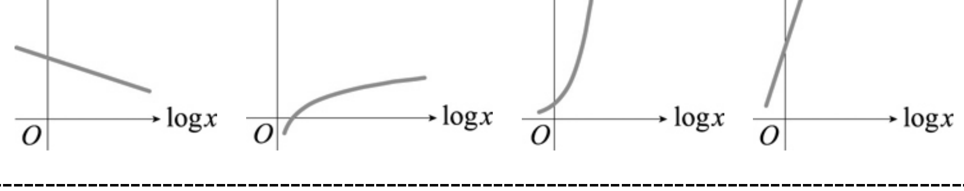


上述的關係式就是克卜勒的行星運動第三定律，在沒有對數的輔助下，當時的克卜勒花了好多年才看出兩者之間的關係

隨堂練習 ---

關於多項式函數 $y=10x^3$，若將 $(\log x,\log y)$ 描繪在坐標平面上，下列何者為其圖形？

(1)　(2)　(3)　(4)



3-5　習題

一、基礎題

1. 利用對數表求下列各對數值：

(1) $\log 4.32$　(2) $\log 5780$

(3) $\log 0.00372$　(4) $\log 37.28$

2. 利用對數表求下列各真數值：

(1) $\log x = 0.4843$　(2) $\log x = 5.4014$

(3) $\log x = -2.1244$　(4) $\log x = 0.4897$

3. (1) 6^{100}是幾位數？

(2)若將$\left(\frac{5}{6}\right)^{100}$表示成小數，則從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

4. 已知現有 10 株乳酸菌，且每隔 2 小時乳酸菌的數量會增加為原來的 3 倍．若以這樣的速度增殖，則經過多少小時之後，乳酸菌的數量會超過10^{10}株？

5. 求滿足$\left(\frac{5}{6}\right)^{n} < \frac{1}{100}$的最小正整數 n．

6. 在非洲挖掘出一人頭蓋骨,其碳 14 含量相對於正常含量為 $\frac{9}{100}$.若碳 14 的半衰期約為 5700 年，試估計其年代距今約為多少萬年？

二、進階題

7. 設 3^{100} 可表成科學記號 $b\times10^{n}$，已知 $\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$．選出正確的選項：
   (1) $\log3^{100}$ 的首數是 47
   (2) $\log3^{100}$ 的尾數是 b
   (3) $5\le b<6$
   (4) 3^{100} 是 48 位數
   (5) 3^{100} 的最高位數字是 5．

8. 已知 13^{60} 為 67 位數，求 13^{40} 的位數．

9. 正欣在股票市場裡買進賣出頻繁．假設每星期結算都損失該星期初資金的 1%．經過一段時間，正欣發現資金總損失已超過原始資金的一半，請問正欣進出股票市場至少多少個星期了？
（ $\log2\approx0.3010$， $\log3\approx0.4771$， $\log11\approx1.0414$）

10. 某銀行提供年利率 4%的優惠存款，每年複利計息一次．

(1)若小華於年初時存入 1 萬元，到第 10 年年底結算的本利和為多少元？

(2)若小華每年年初均存入 1 萬元，到第 10 年年底結算的本利和為多少元？

（均四捨五入至百位，計算公式：$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\dfrac{r^n-1}{r-1}$）

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732

第三章　總習題

一、概念題

1. 下列哪一函數與 $y=2^x$ 的圖形對稱於 y 軸？

(1) $y=-2^x$　(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(3)$y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(4) $y=\log_2 x$　(5) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

2. $-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)$的值為 (1)–3　(2)1　(3)2　(4)3　(5)8

3. 審計工作者會使用班佛法則來查帳．班佛法則是：

「銀行存款的最高位數字是 a 者的比例約為 $\log\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$」

根據班佛法則，銀行存款的最高位數字是 4，5，6 或 7 者的比例約有

(1)20%　(2)30%　(3)40%　(4)50%　(5)60%．

二、程序題

4. 設 a，b，c 為正整數，已知 $a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，求 $a+b+c$ 的值．

5. 解下列方程式：(1) $2^{2x}-9\cdot 2^{x}+8=0$　　　(2) $\log(3x+4)+\log(5x+1)=2+\log 9$

6. 已知滿足 n^{31} 為 35 位數的正整數 n 恰只有一個，求 n 的值．
（ $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 7\approx 0.8451$）

7. 美國數學家於 2013 年發現了目前已知的最大質數 $2^{57885161}-1$．若一張 A4 紙張可列印 3000 個數字，想印出此質數至少需要幾張 A4 的紙呢？在下列選項中，選出最接近的張數．
(1)5000　(2)5400　(3)5800　(4)6200　(5)6600．

三、數學解題

8. 下表是函數 $f(x)=b+\log_a x$ 的 4 個函數值：

x	0.25	2	4	8
$f(x)$	m	n	$10-m$	$n+4$

求：(1)函數 $f(x)$　　(2) $m+n$

9. 如果液體的酸鹼濃度為 x，那麼此液體的 pH 值定義為 $-\log x$．例如純水的酸鹼濃度為 1×10^{-7}，因此純水的 pH 值為 $-\log\left(1\times 10^{-7}\right)=7$．正常人血液的 pH 值約為 7.4 左右，當高於 7.5 或低於 7.3 時，會有昏迷、甚至死亡的危險．設 r 是某人血液酸鹼濃度與純水酸鹼濃度的比值，試檢驗下列哪些值是安全值？

(1) $r=\frac{2}{3}$　(2) $r=\frac{1}{2}$　(3) $r=\frac{2}{5}$　(4) $r=\frac{1}{3}$　(5) $r=\frac{1}{4}$．

10.「十二平均律」是鋼琴音階的依循規則：每一個音的弦長都是前一個音弦長的 $\sqrt[12]{2}$ 倍．設第一個音的弦長為 1，

(1)第幾個音的弦長為 4？

(2)若第 n 個音的弦長最接近 3，則正整數 n 的值為何？