2-3 多項式方程式

我們知道：任一個實數的平方必為正數或 0．因此，方程式 $x^2=-1$ 在實數系中無解．於是數學家們引進「虛數」，把實數系擴張成一個較大的數系─複數系，使得所有的多項式方程式在這個數系中都有解．

i 的規定

規定 $i=\sqrt{-1}$，且 i 滿足

(1) $i^2=-1$．　(2)當 $b>0$ 時，$\sqrt{-b}=\sqrt{b}i$

例如：$\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$，$\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$．

複數的定義

設 a，b 為實數，形如 $a+bi$ 的數稱為複數，其中 a 稱為 $a+bi$ 的實部，b 稱為 $a+bi$ 的虛部

實數：實數就是虛部為 0 的複數

虛數：虛部 $b\neq 0$ 的複數，稱為虛數

純虛數：實部為 0 的虛數 bi（$b\neq 0$）

例題 1 --

已知 a，b 是實數，且滿足 $(a-2)+4i=1+bi$，求 a，b 的值．

隨堂練習 --

已知 a，b 是實數，且滿足 $2+(4-a)i=(b-3)+bi$，求 a，b 的值．

複數的運算與性質

設 a，b，c，d 為實數，我們有

(1)加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$．

(2)減法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$．

(3)乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$．

例題 2 --

已知複數 $z_1=3+4i$， $z_2=5-3i$，求下列各值：

(1) z_1+z_2　　(2) z_1-z_2　　(3) $z_1\cdot z_2$

隨堂練習

已知複數 $z_1=2+\sqrt{3}i$， $z_2=2-\sqrt{3}i$，求下列各值：

(1) z_1+z_2　　(2) z_1-z_2　　(3) $z_1\cdot z_2$

重要性質

若 z_1， z_2， z_3為複數，則

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$， $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$．　【交換律】

(2) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$， $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$．　【結合律】

(3) $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$．　【分配律】

(4) $z_1+0=z_1$， $z_1\cdot 1=z_1$

設 z 為複數，正整數 $n>1$，規定 $z^n=z^{n-1}\cdot z$．

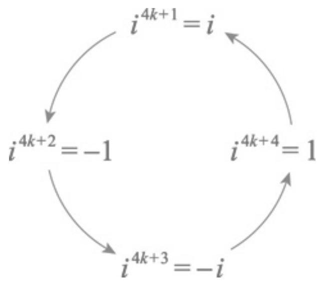
例題 3

計算 i， i^2，…， i^8的值。

---

i的性質

$i^{4k+1}=i$， $i^{4k+2}=-1$， $i^{4k+3}=-i$， $i^{4k+4}=1$，
其中 k 為正整數或 0．



隨堂練習 --

求下列各式的值：(1) i^{50}　(2) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{50}$

複數的除法公式

除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$（ c， d 不同時為 0）.

例題 4 --

將下列複數表示成 $a+bi$ 的形式，其中 a， b 是實數：(1) $\dfrac{1}{3+4i}$　(2) $\dfrac{2+i}{-3+4i}$

隨堂練習 --

將下列複數表示成 $a+bi$ 的形式，其中 a， b 是實數：(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$　(2) $i+\dfrac{1}{i}$

一元二次方程式的公式解

實係數一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

例題 5

解下列各方程式：

(1) $x^2+2x-4=0$．　(2) $2x^2-2x+5=0$

隨堂練習

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2+x+1=0$．　(2) $2x^2+2x-1=0$

根的性質

設實係數一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，判別式 $D=b^2-4ac$．

(1)當 $D>0$ 時，方程式有兩相異實根．

(2)當 $D=0$ 時，方程式有兩相等實根．

(3)當 $D<0$ 時，方程式有兩共軛虛根．

例題 6

求實數 k 的範圍，使方程式 $3x^2+4x-2k=0$ 的兩根均為實數

隨堂練習

求實數k的範圍，使方程式$x^2+3x-k=0$的兩根為共軛虛數

根與係數的關係

若α，β為實係數一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根，則

$$\begin{cases}\text{兩根的和：}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\\ \text{兩根的積：}\alpha\beta=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

例題 7 ---

已知α，β為方程式$2x^2+4x+5=0$的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$．　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$．　(3) $\alpha^3+\beta^3$

隨堂練習 ---

已知α，β為方程式$x^2-4x+7=0$的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$．　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$．　(3) $\alpha^3+\beta^3$

***n*次方程式**

當 $f(x)$ 是 n 次多項式時，我們稱 $f(x)=0$ 為 n 次多項式方程式，簡稱為 **n次方程式**。如果有一個數 α 滿足 $f(\alpha)=0$，就稱 α 是 $f(x)=0$ 的根或解．有時候為了強調這個根 α 所在的數系，將 α 稱為整數根，有理根，實根或複數根。

例題 8 --

已知 $x=2i$ 是三次方程式 $x^3+x^2+4x+a=0$ 的一根，求 a 的值？

隨堂練習 --

下列哪些是三次方程式 $x^3-2x^2+x-2=0$ 的根？

(1) $\sqrt{2}$　(2)2　(3) i　(4) $-i$　(5) $1+i$

並不是所有實係數 n 次方程式，都一定有實根．例如：實係數二次方程式 $x^2+1=0$ 就沒有實根，但有兩個共軛虛根 i 與 $-i$．如果把根的範圍由實數擴大到複數，那麼是不是所有 n 次方程式都一定有根？在西元1799年，德國數學家高斯在他的博士論文中成功地證明：

代數基本定理：任意一個複數係數 n 次方程式，只要次數 $n\geq 1$，就至少有一個複數根。

說明：

(1) 實數也可看作是複數，所以上面這個定理保證了實係數 n 次方程式一定有根。

(2) 每一個實係數 n 次方程式，都恰好有 n 個複數根。

(3) 虛根成對定理：設 $f(x)$ 是實係數 n（ $n\geq 2$ ）次多項式．若虛數 $a+bi$ 是方程式 $f(x)=0$ 的一個虛根，則它的共軛複數 $a-bi$ 也是 $f(x)=0$ 的一個虛根　（ a，b 是實數且 $b\neq 0$ ）

例題 9 --

設實係數方程式 $x^4-3x^3+6x^2+ax+b=0$ 有一根為 $1-3i$．

(1)求 a 與 b 的值．　(2)解此方程式

隨堂練習 --

已知 $2+i$ 為方程式 $x^4-5x^3+8x^2-x-5=0$ 的一根，求其他的根

重要性質：

(1) 實係數奇數次方程式至少有一個實根。

(2) 每一個實係數 n（$n\geq1$）次多項式都可以分解為實係數一次式或實係數二次式的乘積

(3) 一般的五次或五次以上的方程式，公式解不存在。

例題 10--

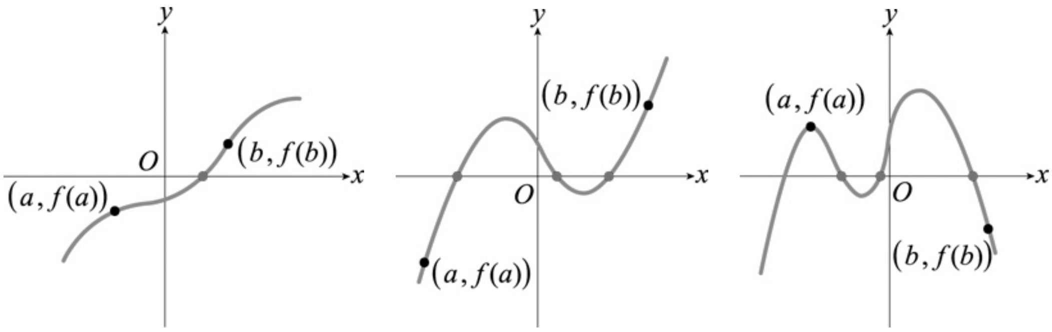
求方程式 $f\left(x\right)=2x^3-3x^2-8x-3=0$ 的有理根。

例題 11--

解方程式 $2x^4+x^3-7x^2-9x+6=0$

勘根定理

設 $f(x)=0$ 是一個實係數多項式方程式，而 a 與 b 是兩個相異實數．如果 $f(a)\cdot f(b)<0$（即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號），那麼方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間至少有一個實根。



例題 12--

方程式 $x^3-8x+1=0$ 在哪些連續整數之間有實根。

隨堂練習 --

方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 在哪些連續整數之間有實根。

例題 13--

已知方程式 $x^3-8x+1=0$ 恰有一負根，求與此負根最接近的整數。

隨堂練習 --

已知方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 恰有一正根，求與此正根最接近的整數

例題 14--

已知整係數多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 滿足 $f(0)<0$， $f\left(\sqrt{2}\right)>0$， $f\left(\sqrt{5}\right)<0$，

$f\left(\sqrt{10}\right)>0$，且方程式 $f(x)=0$ 的三根均為有理根，求整數 a， b， c 的值。

隨堂練習 --

已知整係數多項式 $f\left(x\right)=2x^3+ax^2+bx-3$滿足 $f\left(-1\right)=0$， $f\left(\sqrt{2}\right)f\left(\sqrt{3}\right)<0$，

且方程式 $f\left(x\right)=0$的三根均為有理根，求整數 a， b的值。

例題 15--

設 $a>0$， n是正整數．證明：方程式 $x^n=a$恰有一正根。

隨堂練習 --

已知正整數 n 滿足 $n<\sqrt[3]{100}<n+1$，求 n 的值

2-3 習題

一、基礎題

1. 將下列複數化成 $a+bi$（a，b 為實數）的形式：

(1) $(2-3i)+(-3+5i)$．　　(2) $(1+2i)(2-i)$．

(3) $\dfrac{2-i}{1+i}$．　　(4) $(1+i)^2+(1+i)^4$．

2. 已知 $(3+2i)x+(2-2i)y=17-2i$，求實數 x，y 的值．

3. 解下列方程式：

(1) $x^2+3=0$．　　(2) $2x^2+x+1=0$．　　(3) $x^2-2x+4=0$．

4. 設方程式 $x^2-4x+k=0$，求在下列各條件下實數 k 的值或範圍：

(1)兩根為相異實根．(2)兩根為相等實根．(3)兩根為共軛虛根．

5. 設 $x^2+8x+1=0$ 之兩根為 α、β，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$．　　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$．　　(3) $\alpha^3+\beta^3$．

6. 解下列方程式：(1) $x^3-3x^2-17x-13=0$． (2) $2x^3-5x^2-4x+3=0$．

7. 已知方程式 $x^4-3x^3+6x^2+2x-60=0$ 有一根為 $1+3i$，求其他的根．

8. 已知 $-1+2i$ 為實係數方程式 $x^4+3x^3+ax^2+bx+10=0$ 的一根，求 a，b 的值．

9. 已知方程式 $x^3-8x+2=0$ 有三個相異實根 α,β,γ，且 $\alpha<\beta<\gamma$，求 β 小數點後的第 1 位數字．

10. 設 $f(x)$ 為四次實係數多項式，且 $f(x)$ 的一些取值如下表所示：
有關方程式 $f(x)=0$ 的 4 個根所在的數系，選出正確的選項：

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	-1	1	-3

(1)4 實根
(2)3 實根 1 虛根
(3)2 實根 2 虛根
(4)1 實根 3 虛根
(5)4 虛根．

二、進階題

11. 求滿足$(x+yi)^2=8+6i$的實數x與y的值．

12. 已知$f(x)$是滿足下列兩條件的最低次實係數多項式：

(1) $f(x)$的最高次項係數為 2．

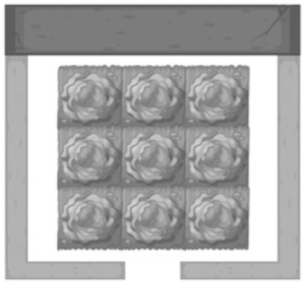
(2)複數$2-3i,i,-2$皆為方程式$f(x)=0$的根．

求$f(x)$的常數項．

13. 已知整係數方程式$x^3+ax^2+bx+5=0$有三個相異的有理根，求a，b的值．

14. 設m，n為實數，且方程式$x^3-17x^2+mx+n=0$有兩個複數根$a+i$與$1+bi$，其中a，b是非 0 的實數，求此方程式的實根及m，n的值．

15. 農夫利用一面舊牆並另砌三面新牆圍出一個面積為 24 平方公尺的矩形菜圃，並在舊牆對面的新牆正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示．舊牆的整修費用為每公尺 1 千元，新牆的造價費用為每公尺 3 千元，總工程費用為 4 萬 2 千元．設矩形菜圃的舊牆長度為 x 公尺．



(1)已知 x 滿足 $x+\frac{a}{x}=b$，求常數 a，b 的值．

(2)求 x 的值．

16. 將長 6 公尺、寬 4 公尺的矩形鐵片，四個角各截去一個面積相等的正方形，然後將各邊摺起來，做成一個無蓋的長方體容器，如果此容器的容積為 8 立方公尺（鐵板厚度不計），求截去的正方形邊長．