2-1　邏輯、集合與計數原理

※邏輯
敘述：在數學上，一個“敘述”是指可以判斷對（成立）或錯（不成立）的句子。

※複合敘述的判斷

已知 P，Q 兩個敘述：

(1) 敘述“P 且 Q”成立的意義是 P，Q 兩者都成立。

(2) 敘述“P 或 Q”成立的意義是 P，Q 至少有一個成立。

隨堂練習--

試判定下列敘述是否成立：

(1) 10 是 2 的倍數且 10 是 3 的倍數。

(2) 10 是 2 的倍數或 10 是 3 的倍數。

※複合敘述的否定敘述

設 P，Q 為兩個敘述：

(1) “P 且 Q”的否定敘述為“$\sim P$ 或$\sim Q$”。

(2) “P 或 Q”的否定敘述為“$\sim P$ 且$\sim Q$”。

例如：
(1) “數學及格且英文及格”的否定敘述為“數學不及格或英文不及格”。
(2) “想吃蘋果或想吃橘子”的否定敘述為“不想吃蘋果也不想吃橘子”。

隨堂練習--

試寫出下列各敘述的否定敘述：

(1) 甲是第一名且乙是最後一名。

(2) n 是 3 的倍數或 n 是 5 的倍數。

※充要條件
如果從敘述 P 可以推到敘述 Q，記為 $P \Rightarrow Q$，
此時稱 P 是 Q 的**充分條件**，Q 是 P 的**必要條件**。
例如：$x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$，即 $x \geq 2$ 是 $x^2 \geq 4$ 的充分條件；$x^2 \geq 4$ 是 $x \geq 2$ 的必要條件。
如果敘述 P，Q 可以互推，記為“$P \Leftrightarrow Q$”。此時，P，Q 互相稱為**充要條件**。

※集合：直觀來說，將一群事物放在一起就是一個集合。
※集合的定義：集合是一些成員組成的一個整體。
※元素：組成集合的成員稱為**元素**。
當 x 是集合 A 的元素時，稱 $\boldsymbol{x}$ **屬於** $\boldsymbol{A}$，記作 $x \in A$。
若 x 不是集合 A 的元素時，記作 $x \notin A$。
※集合表示法：
1.（列舉法）$A=\{1，3，5，7，9\}$，
2.（描述法）$A=\{x|x<10$ 且 x 是正奇數$\}$。
※**空集合**：不含任何元素的集合，記作 $\varnothing$，即 $\varnothing=\{\quad\}$。

例題 1---

(1) 試表示在 1 到 1000 的整數中，3 的倍數所組成的集合。

(2) 試表示方程式 $x^3-1=0$ 的解所組成的集合。

隨堂練習---

(1) 試表示在 27 到 95 的整數中，4 的倍數所組成的集合。

(2) **試表示方程式** $x^2-3x+2=0$ **的解所組成的集合**。

※集合的相等、子集合

1.集合不考慮元素順序，若有重複的元素也視為同一個。

2.兩集合 A，B 相等（記為 $A=B$）的意義是 A 和 B 有相同的元素。

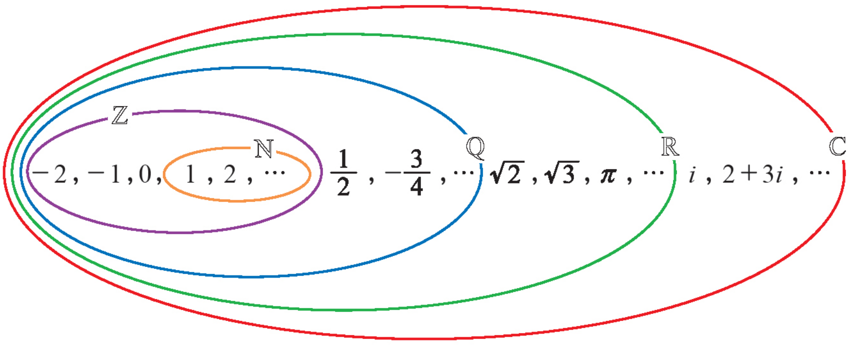
3.如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，則稱 A 是 B 的**子集**（或**部分集合**），記為 $A\subset B$，讀作"A 包含於 B"或"B 包含 A"。例如：若 $A=\{1，3，5\}$，$B=\{1，2，3，4，5\}$，則 $A\subset B$。

※根據子集的定義可得下列性質：

(1)　$A\subset A$。

(2) $\varnothing\subset A$。

(3) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，則 $A=B$。反之亦然。



例題 2---

列出集合 $S=\{a，b，c，d\}$的所有子集。

隨堂練習---

列出集合 $S=\{1，2，3\}$的所有子集。

集合的運算

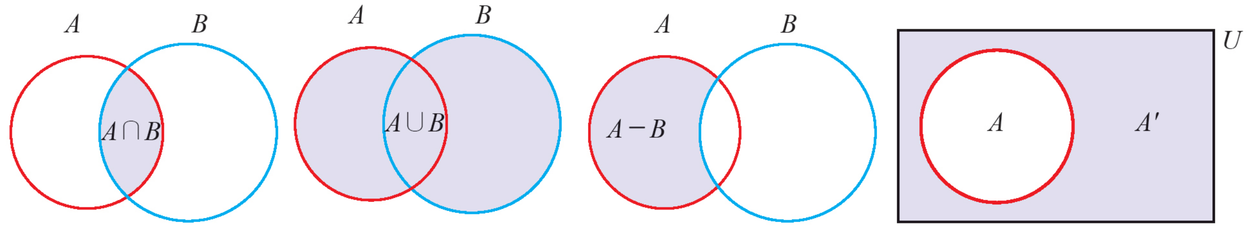
聯集定義為 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，即 A，B 所有元素所組成的集合

交集定義為 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，即 A，B 共同元素所組成的集合

差集定義為 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，即在 A 中但不在 B 中的元素所成的集合

宇集 U 通常討論集合時會預設一個大範圍

A 的**補集**定義為 $A'=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}=U-A$，



例題 3--

設宇集 $U=\{n|1\leq n\leq 10$，n 是整數$\}$，$A=\{2n|1\leq n\leq 5$，n 是整數$\}$，

$B=\{3n|1\leq n\leq 3$，n 是整數$\}$，試求下列各集合：

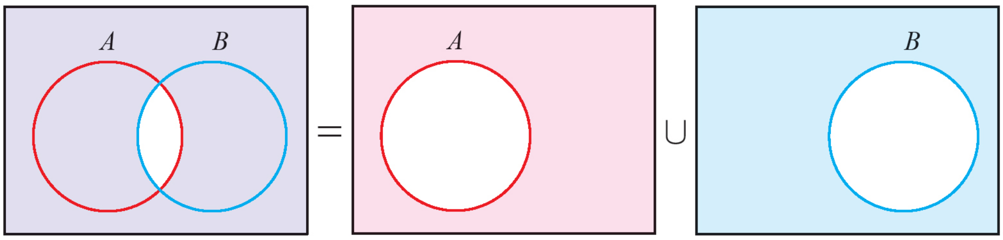
(1) $A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$，$(A\cap B)'$。
(2) A'，B'，$A'\cap B'$，$A'\cup B'$。

隨堂練習--

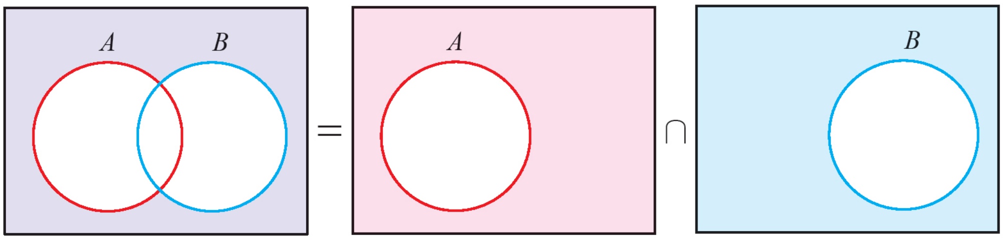
承例題 3，試求下列各集合：

(1) $B-A$。　　　　　　　　(2) $(A\cup B)'$。

※笛摩根定律
(1) $(A\cap B)'=A'\cup B'$。
(2) $(A\cup B)'=A'\cap B'$。

(1)


$(A\cap B)'$　　　　A'　　　　B'

(2)


$(A\cup B)'$　　　　A'　　　　B'

回顧第一段敘述的介紹，其中的否定敘述：
“P 且 Q”的否定敘述為“$\sim P$ 或$\sim Q$”，就是笛摩根定律(1)；
“P 或 Q”的否定敘述為“$\sim P$ 且$\sim Q$”，就是笛摩根定律(2)。

※積集合

　　兩個集合 A，B 的**積集合**定義為

$$A\times B=\{(a，b)\,|a\in A \text{ 且 } b\in B\},$$

即 A 的任一元素配上 B 的任一元素所成的有序元素對，都是 $A\times B$ 的元素。
例如：$A=\{2，3\}$，$B=\{5，7，9\}$，則
$A\times B=\{(2，5)，(2，7)，(2，9)，(3，5)，(3，7)，(3，9)\}$。

隨堂練習--

$A=\{p，q，r，s\}$，$B=\{t，u\}$，**試寫出** $A\times B$。

※計數原理目的是要計算有限集合中的元素個數有幾個。
窮舉法與樹狀圖：將集合的元素一一列舉出來，再計算其個數，我們稱之為**窮舉法**。

例題 4--

要設定一個三位數的密碼，且每一位數字只能使用 0 或 1。最多可設定出幾種不同的密碼？

隨堂練習---

小璿與同學猜拳兩次，每次可以出剪刀、石頭、布三種情形之一。請問小璿與同學共有幾種出拳的方法？

例題 5---

數線上的 1，2，3，4，5，6 六個點，兩兩配一組。各組兩點間的距離恰好是 2，3，4 各出現一次。試問有幾種配對方法？

隨堂練習---

用 10 元，5 元，1 元硬幣湊成 15 元有多少種方法？

※加法原理

若完成一件工作的方法，可分成 k 類，各類之間都沒有重複的情形，且第 1 類有 n_1 種方法，第 2 類有 n_2 種方法，…，第 k 類有 n_k 種方法，則完成這件工作的方法共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 種。

例題 6--

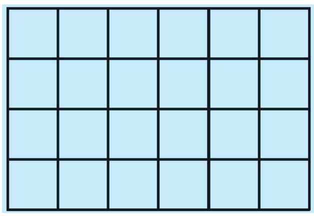
小璿、小芬各擲一顆骰子，點數和大於 8 有多少種情形？

隨堂練習--

小璿、小芬各擲一顆骰子，點數和是 3 的倍數有多少種情形？

例題 7--

如圖 13，每一小段的長度是 1。問有多少個大大小小長寬比為 1：2 或 2：1 的矩形？



隨堂練習--

同圖 13，有多少個大大小小的正方形？

※乘法原理

若完成一件工作的方法，可依序分成 k 個步驟，且完成第一個步驟有 n_1 種方法，…，完成第 k 個步驟有 n_k 種方法，則完成這件工作的方法共有 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ 種。

例題 8--

要設定一個五位數的密碼，且每一位數字只能使用 0，1 或 2。

(1) 最多可設定出幾組不同的密碼？

(2) 有多少組密碼的第二個數字是 1，且第四個數字不是 1？

隨堂練習--

某地區營業用貨車的車牌號碼共有 5 碼。前兩碼為英文字，後三碼為 0 至 9 的數字。某事故的肇事逃逸車輛為貨車，目擊者只看到前兩碼為 BG，問警方必須過濾多少輛營業用貨車來追查肇事者？

例題 9--

(1) 試求 720 的正因數個數。

(2) 720 的正因數中，有多少個是 12 的倍數？

- -

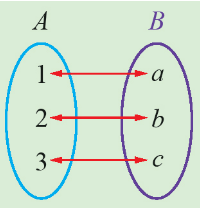
隨堂練習--

(1) 試求 648 的正因數個數。

(2) 承上題，其中有多少個正因數是平方數？

※一一對應原理

如果 A，B 兩集合中的元素具有一一對應的關係，則兩集合的元素個數相等，即 $n(A)=n(B)$。



例題 10 ---

將 3 寫成自然數的和有 3，2＋1，1＋2，1＋1＋1 這四種方法。（規定順序不同視為不同方法，例如：2＋1，1＋2 這兩種是不同的方法）

(1) 將 4 寫成自然數的和有幾種方法？

(2) 將 7 寫成自然數的和有幾種方法？

隨堂練習 ---

(1) 承例題 10 的解法中， 代表哪一個和式？

(2) 將 9 寫成自然數的和有幾種方法？

※取捨原理：重複者扣除，多扣者補回。

設 A，B，C 為有限集合，則：

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

(2) $n(A\cup B\cup C)=$
$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

例題 11

從 1 到 100，有多少個自然數是 2 或 3 的倍數？

隨堂練習

從 1 到 100，有多少個自然數是 3 或 5 的倍數？

例題 12

從 1 到 100，有多少個自然數是 2 或 3 或 7 的倍數？

隨堂練習

(1)從 1 到 100，有多少個自然數是 2 或 3 或 5 的倍數？

(2)從 1 到 100，有多少個自然數不是 3 也不是 5 的倍數？

習　題　2-1

一、基本題

1. 試寫出下列各敘述的否定敘述：
   (1) $x \fallingdotseq 7$。
   (2) $x>3$ 且 $x<5$。
   (3) 甲、乙、丙三個人之中，至少有一個是女生。

2. 設宇集為所有實數。考慮以下集合 A，B，
   $A=\{x|x$ 是實數，且 $-5\leq x<4\}$，
   $B=\{x|x$ 是實數，且 $2<x<9\}$。
   試求下列各集合：
   (1) $A\cap B$。　(2) $A\cup B$。　(3) $A-B$。
   (4) A'。　(5) $A'\cap B'$。　(6) $A\cup B'$。

3. $A=\{$你，我，他$\}$，$B=\{$追，趕，跑，跳，碰$\}$。試寫出 $A\times B$。

4. 用 1，2，3 這三個數字寫成三位數（數字可重複使用），若 1 的後面不能緊接著 3，問有多少種這樣的三位數？　　（提示：畫樹狀圖）

5. 某班有 40 名同學，高的同學有 28 名，胖的同學有 11 名。若胖但是不高的同學有 5 名，問高但是不胖的同學有幾名？

6. 某便利商店為與同業進行促銷戰，推出「冰品第二件不用錢…買一送一」的活動。該店共有八種冰品可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	30	30	35	35	35	40	40	40

規定所送的冰品之價格一定少於所買的價格（例如：買一個「丁」，可送甲、乙兩冰品之一）。若有一位該店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩種冰品，其搭配方法一共有幾種？

二、進階題

7. (1) 試求 5566 的正因數個數。
   (2) 試求 5566 的正因數的總和。

8. 甲、乙、丙三人玩剪刀，石頭，布的猜拳遊戲一次，試問：
   (1) 三人出拳的情況共有幾種？
   (2) 兩人留下的（例如（甲：剪刀，乙：石頭，丙：石頭））情形共有幾種？

9. 小瑢從 1 到 10 之中選一個自然數，小芬也從 1 到 10 之中選一個自然數。若兩人選的數相乘後是 3 的倍數，試問有幾種方法？