

## 2-4 二項式定理

### ※二項式定理

$$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 + \cdots + C_k^n x^{n-k} y^k + \cdots + C_n^n x^0 y^n,$$

$$\text{即 } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^{n-k} y^k.$$

此定理中， $C_k^n$  也稱為二項式係數。

### 例題 1

利用二項式定理展開下列各式：

(1)  $(x+y)^4$ 。

(2)  $(x-y)^4$ 。

### 隨堂練習

利用二項式定理展開下列各式：

(1)  $(x+y)^5$ 。

(2)  $(x-y)^5$ 。

### 例題 2

求  $(3a-2b)^5$  的展開式。



隨堂練習

(1) 求  $(2a-b)^4$  的展開式。

(2) 求  $(1+x)^n$  的展開式。

例題 3

(1) 求  $(2x-y)^6$  展開式中  $x^3y^3$  項的係數。

(2) 求  $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^8$  展開式中  $x^7$  項的係數。

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

隨堂練習

(1) 求  $(x+2y)^6$  展開式中  $x^2y^4$  項的係數。

(2) 求  $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$  展開式中的常數項。

-----

例題 4

利用  $(1-x)^5$  的展開式求  $(0.998)^5$  近似值到小數點後第 5 位。

-----

隨堂練習

求  $(1.003)^6$  的近似值到小數點後第 4 位。

-----

例題 5

試證明： $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$ 。

-----

隨堂練習

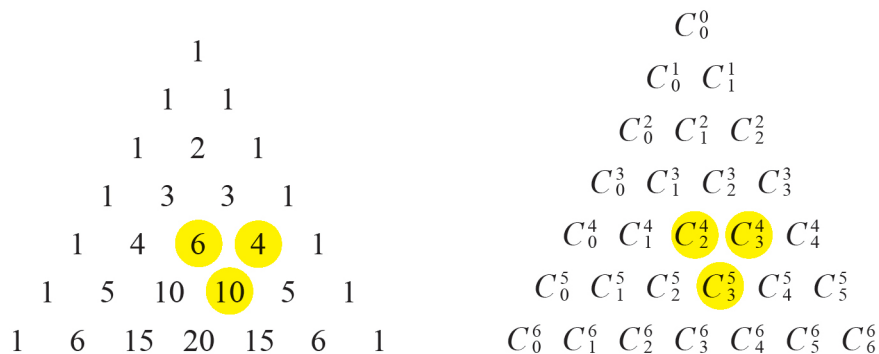
試證明： $C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$ 。

-----

※巴斯卡定理

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}。$$

由二項式定理展開  $(x+y)^n$ ,  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  並將係數排列成如下三角形：



這稱為巴斯卡三角形（或楊輝三角形）。

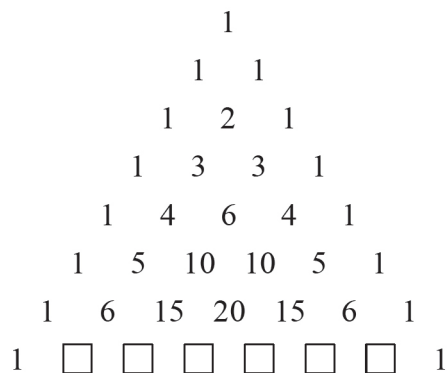
(1) 左右對稱，且兩端的數都是 1。

(2) 每個數等於其左上的數與右上的數的和，即  $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ ，

隨堂練習

圖 40 為巴斯卡三角形的一部分，

請在空格中填入適當的數字。



例題 6

試證明巴斯卡定理  $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ 。

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

隨堂練習

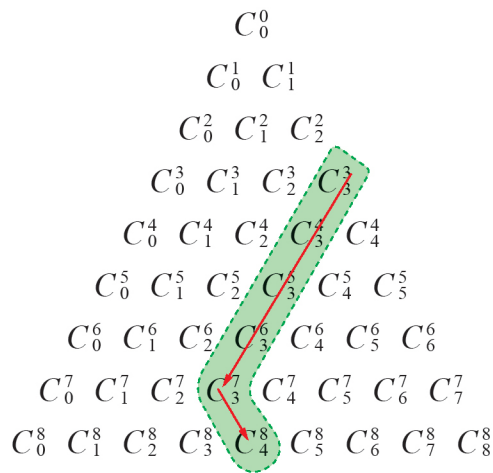
試將適當的數填入下列的空格：

(1)  $C_1^6 + C_2^6 = C_{\square}^{\square}$ 。

(2)  $C_5^9 = C_{\square}^8 + C_{\square}^8$ 。

例題 7

試求  $C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + C_3^7$  的值。



隨堂練習-----

試求  $C_0^2 + C_1^3 + C_2^4 + C_3^5 + C_4^6 + C_5^7$  的值。

-----



## 習 題 2-4

1. (1)展開  $(x+y)^5$ 。

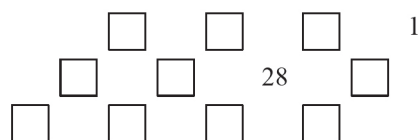
(2)展開  $(2a-3b)^4$ 。

2. (1) 求  $(x-5y)^7$  之中  $x^4y^3$  項的係數。

(2) 求  $\left(a^2+\frac{2}{a}\right)^6$  之中  $a^6$  項的係數。

3. 利用二項式定理計算  $(0.999)^5$  的近似值到小數點後第四位。(第五位四捨五入)

4. 右圖為巴斯卡三角形的一部分。  
試在空格內填入適當的數。



5. 試求下列各式的值：

(1)  $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + C_2^7$ 。

(2)  $C_0^3 + C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8$ 。

6. 試求多項式  $f(x) = 1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^{10}$  中 (1)  $x$  項的係數。  
(2)  $x^2$  項的係數。

7. 已知  $a$  是正整數且  $\left(x+\frac{a}{x}\right)^8$  展開式中的常數項為 1120，試求： (1)  $a$  之值。

(2) 展開式中各項係數的和。

8. 利用二項式定理求出  $13^{11}$  除以 100 的餘數。

9. (1) 試證明： $C_0^n + 2 \cdot C_1^n + 4 \cdot C_2^n + \cdots + 2^n \cdot C_n^n = 3^n$

(2) 今有排成一列的  $n$  個空格，每一格可以塗黃、綠、紅這三種顏色，考慮所有可能的方法數。試用此模型說明(1)式成立。