

2-4 多項式函數圖形與多項式不等式

在 2-1 節的課程中，我們知道：常數函數及一次函數的圖形都是直線，二次函數的圖形都是拋物線，至於高次（三次或三次以上）函數的圖形，目前我們還是與描繪三次及四次單項函數圖形一樣，只能透過描點的方法，描出約略的圖形。

函數圖形

- (1) 多項式函數的圖形都是連續不斷的。
- (2) 對於次數不低於 1 次的多項式函數，當首項係數為正數時，函數圖形的最右方是上升的。
- (3) 當首項係數為負數時，函數圖形的最右方是下降的。

例題 1

利用描點的方法畫出三次函數 $f(x) = x^3 - x$ 的圖形

函數圖形與方程式的實根

- (1) 多項式函數 $f(x)$ 之圖形與 x 軸交點的 x 坐標，就是多項式方程式 $f(x) = 0$ 的實根
- (2) 多項式方程式的實根會呈現在函數的圖形上，而虛根是不會在圖形上出現的。

一次不等式重要性質

設 a, b, c 為實數。

- (1) 不等量加法：若 $a > b$ ，則 $a + c > b + c$ 。
- (2) 不等量乘法：若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則 $a \cdot c > b \cdot c$ 。
若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則 $a \cdot c < b \cdot c$

例題 2

解一次不等式 $2x - 3 > 0$

隨堂練習

解不等式 $2x+1 < 5x+10$

解二次不等式

例題 3

解二次不等式 $(x-1)(x-3) \leq 0$

例題 4

解下列二次不等式：(1) $3+2x-x^2 \geq 0$.

(2) $x^2-x-3 > 0$

隨堂練習

解下列二次不等式：

(1) $6-5x-x^2 < 0$.

(2) $3+5x \geq x^2$

例題 5

解二次不等式 $x^2 - 4x + 4 > 0$

隨堂練習

解二次不等式 $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

重要性質

(1)若二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 恆成立，則 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac \leq 0$ ；反之亦然。

(2)若二次不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 恆成立，則 $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac \leq 0$ ；反之亦然

例題 6

解下列二次不等式：

(1) $x^2 + x + 1 > 0$.

(2) $x^2 + x + 1 \leq 0$

隨堂練習

解下列二次不等式：

(1) $2x^2 - 8x + 11 > 0$.

(2) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 5 < 0$.

例題 7 -----

已知二次不等式 $x^2 + kx + k \geq 0$ 的解為全體實數，求實數 k 的範圍

隨堂練習 -----

已知二次不等式 $-x^2 + 2x + k \leq 0$ 的解為全體實數，求實數 k 的範圍

例題 8 -----

已知：以每秒 v_0 公尺的速度從地面垂直向上發射子彈， t 秒後的高度為 y 公尺，可由 $y = v_0 t - 4.9t^2$ 確定。今以每秒 58.8 公尺的速度從地面垂直向上發射子彈，問子彈高度不低於 98 公尺的時間有多少秒？

隨堂練習 -----

如右圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 4，在 \overline{AB} 與 \overline{BC} 上分別各取一點 P ， Q ，使得 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ ，且四邊形 $PQCD$ 的面積至少為 10，求 \overline{AP} 長的範圍

高次不等式

解高次（三次或三次以上）不等式，若能順利的將多項式分解成一次或二次因式的連乘積，則可求得不等式的解

例題 9 -----

解不等式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$

隨堂練習 -----

解不等式 $(x-2)(3x^2-2x-1) > 0$

例題 10-----

解不等式 $(2-x)(x^2-3x+1) < 0$

隨堂練習 -----

解不等式 $(3-x^2)(x^2-3x-4) > 0$

例題 11-----

解不等式 $(x-1)(x-2)^3(x-3)^4(2x^2+3x+4) \leq 0$

隨堂練習

解不等式 $(x+1)(x-2)^2(x-5)^3 < 0$

例題 12

解下列不等式：

(1) $\frac{x-2}{x-3} < 0$.

(2) $\frac{3}{x+2} < x$

隨堂練習

解下列不等式：

(1) $\frac{x}{x+1} < 0$.

(2) $\frac{1}{x-1} < 1$

2-4 習題

一、基礎題

1. 已知不等式 $3x-2 > ax+3$ 的解為 $x > 1$ ，求實數 a 的值。

2. 解下列不等式：

(1) $x^2 > 3x+10$.

(2) $x^2 < x+1$.

(3) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

(4) $2x^2 - 4x + 7 > 0$.

3. 解下列不等式：

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0$.

(2) $(x-1)(x+2)(x-2)^2(x-3)^3 \geq 0$.

$$(3) (x^2 + x + 1)(x^2 - 6x + 9) \leq 0 .$$

$$(4) (x-2)^4 (x-1)^3 (x+2)^5 (x^2 + x + 3) \leq 0 .$$

$$(5) x^3 - 3x + 2 \leq 0 .$$

4. 解不等式 $\frac{2x-1}{x+3} > 1$.

5. 選出與不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ 有相同的解之選項：

$$(1) (1-x)(x-2) > 0$$

$$(2) \frac{x-1}{x-2} > 0$$

$$(3) (x-1)(x-2)(x-3)^2 > 0$$

$$(4) (x-1)(x-2)(-x^2 + 2x - 5) < 0$$

$$(5) (x-1)^3 (x-2)^5 > 0 .$$

二、進階題

6. 右圖為三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形，且圖形通過

$(0,0)$ ， $(1,0)$ 與 $(2,0)$ 。選出正確的選項：

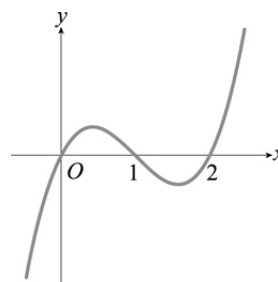
$$(1) a > 0$$

$$(2) b > 0$$

$$(3) c > 0$$

$$(4) d > 0$$

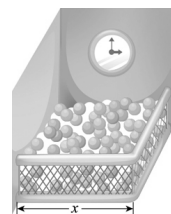
$$(5) a + b + c + d > 0 .$$



7. 已知 a, b 為實數，且不等式 $(3x^2 - x + 1)(x^2 + ax + b) \leq 0$ 的解為 $-1 \leq x \leq 3$ ，求 a, b 的值。

8. 解不等式 $x^2(x+2)(x+1)(x-5) \leq (2x+3)(x+2)(x+1)(x-5)$ 。

9. 如圖，在牆角用一條長 9 公尺的護欄，圍出一個面積至少 18 平方公尺，但不超過 20 平方公尺的長方形遊戲區，並要求遊戲區掛鐘的那一邊須比其鄰邊短。若掛鐘的那一邊的邊長為 x 公尺，則 x 的範圍為何？



10. 城市為了招商，決定對某外商第一年生產的飲料 A 免稅。已知此外商第一年生產的飲料 A 每瓶售價 65 元，銷售量 100 萬瓶。假設第二年開始對飲料 A 徵收 $r\%$ （即每 100 元的銷售金額要徵收附加稅 r 元）的稅率，外商將調高每瓶售價為 70 元，且預測年銷售量將會減少 $10r$ 萬瓶。依此假設，如果要使飲料 A 收取的稅不少於 112 萬元，那麼 r 應訂在什麼範圍內？



11. 某兒童遊樂場裡有一門大砲，可發射出砲彈供人玩樂。當大砲發射 t 秒後，砲彈的高度 y 公尺由數學式 $y = kt(4-t)$ 確定，其中正數 k 為大砲上可調整的變數。已知遊樂場的天花板高 16 公尺，且不讓砲彈打中天花板，求變數 k 的最大範圍。