1-1 數與數線

從小到大，我們學過很多種數：最早認識的是計物數 1，2，3，⋯等（稱為自然數或正整數），其後加入了零與負整數，這些數統稱為整數．另外，在分配、比率與度量中會使用分數或小數，而國中時藉由畢氏定理的討論，引進了如$\sqrt{2}$、$3-\sqrt{5}$等根號數．這一節裡，我們要來回顧這個數字王國．

有理數的定義：**可以表示成$\frac{q}{p}$的數，稱為有理數．其中** p，q **為整數，且** $p\neq 0$。

有理數的補充說明：

(1)所有的整數都是有理數。

(2)有理數的表示方法並不是唯一的。

(3)任意兩個有理數作加、減、乘、除（除數不可以是 0）運算後仍然是有理數。

例題 1--

將下列各數化成小數：

(1) $\frac{13}{40}$。　　　　(2) $\frac{15}{11}$。

隨堂練習--

將有理數$\frac{3}{8}$與$\frac{1}{7}$化成小數。

例題 2--

將下列各循環小數化成最簡分數：

(1) $0.\overline{32}$　　(2) $0.4\overline{32}$.

隨堂練習--

將下列各循環小數化成最簡分數：

(1) $3.\overline{21}$　　(2) $0.0\overline{47}$

有理數就是整數、有限小數或循環小數．

隨堂練習--

在數線上標出代表 $\frac{4}{3}$ 的點。

隨堂練習

在數線上標出代表$-\dfrac{5}{4}$的點。

有理數的稠密性

任兩個相異有理數之間，至少有一個有理數存在。

隨堂練習

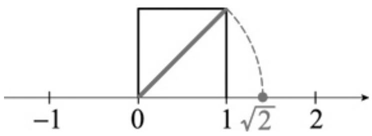
試找出一個介於$\dfrac{5}{4}$和$\dfrac{3}{2}$之間的有理數。

無理數

數線上，不是有理數的數稱為無理數

在數線上，有理數的分布雖然是密密麻麻的，但仍存在著無法用有理數形式表示的數．

例如：邊長是 1 的正方形其對角線的長$\sqrt{2}$就不是一個有理數



重要的性質

設a，b為有理數，若$a+b\sqrt{2}=0$，則$a=b=0$

例題 3

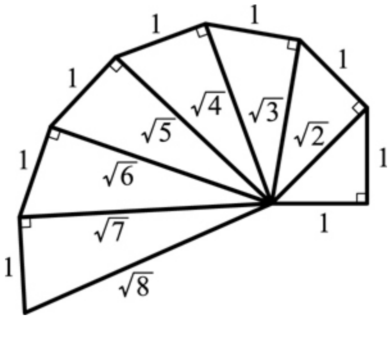
已知 a， b 是有理數，且 $\left(2-\sqrt{2}\right)a+5\sqrt{2}b=4+3\sqrt{2}$，求 a， b 的值

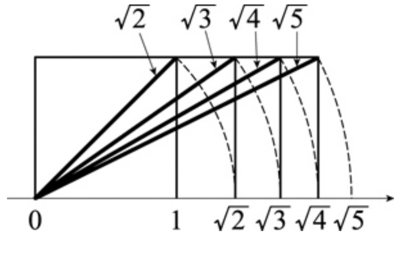
隨堂練習

已知 a， b 是有理數，且 $a\left(3+\sqrt{2}\right)+b\left(1-2\sqrt{2}\right)+7\sqrt{2}=0$，求 a， b 的值。

平方根的尺規作圖

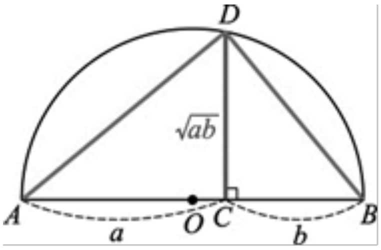
1.畢氏定理逐一作出





平方根的尺規作圖

2. 利用相似三角形的比例性質



隨堂練習--

利用尺規作圖，在數線上標出代表 $\sqrt{8}$ 的點

根式的化簡：

含有根號的式子稱為根式，習慣上，我們會將平方根寫成 $\dfrac{q\sqrt{n}}{p}$ 的形式，其中 $\dfrac{q}{p}$ 為最簡分數，n 為大於 1 的整數，且不是任何完全平方數的倍數。

根式的運算：設 a，b 為正數或 0，則

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，$b\neq 0$.

例題 4--

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{18}-\sqrt{8}$.　　　　(2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

----

(2)設 $n=k$（$k\geq 5$）時，$k^2-4k-1>0$ 成立，

則 $n=k+1$ 時，

$(k+1)^2-4(k+1)-1=k^2+2k+1-4k-4-1$

$=(k^2-4k-1)+(2k-3)$

隨堂練習--

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$.　　　(2) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$.

例題 5--

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.　　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$.　　　(3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

隨堂練習--

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$.　　　　(2) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.　　　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.

雙重根式

先將根式化成$\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$的形式後再化簡成$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$,當$a$， $b>0$時

$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$,當$a>b>0$時

註：不是每個雙重根式都可以化簡成$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$的型態

例題 6--

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.　　(2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.　　(3) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$.　　(4) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$.

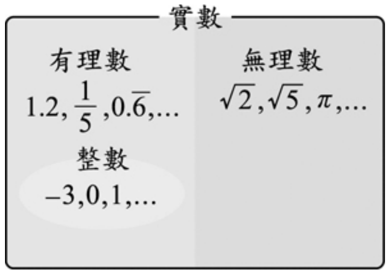
隨堂練習--

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$.　　(2) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$.　　(3) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.　　(4) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$.

重要性質

- 實數
  - 有理數
    - 整　　數
      - 正整數
      - 負整數
      - 零
    - 有限小數
    - 循環小數
  - 無理數（不循環的無限小數）



事實上，所有的無理數都是不循環的無限小數，我們將有理數和無理數統稱為**實數**

例題 7--

已知 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $a+\frac{1}{b}$的值 .

隨堂練習--

已知 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $a-b$的值 .

無理數的近似值：利用十分逼近法

隨堂練習--

求 $\sqrt{10}$ 的近似值 .（以無條件捨去法求至小數第一位）

實數的性質：

1.實數的運算性質：設 a， b， c 是任意實數，

(1)交換律： $a+b=b+a$， $ab=ba$ ．

(2)結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$， $(ab)c=a(bc)$ ．

(3)分配律： $a(b+c)=ab+ac$ ．

(4)消去律：若 $a+c=b+c$，則 $a=b$ ．若 $ac=bc$ 且 $c\neq 0$，則 $a=b$ ．

2.實數的次序關係：設 a， b， c 是任意實數，

(1)三一律：「 $a<b$， $a=b$， $a>b$ ．」三式中恰有一個成立．

(2)遞移律：若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$ ．

(3)不等量加法：若 $a<b$，則 $a+c<b+c$ ．

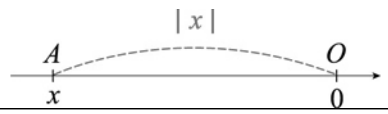
(4)不等量乘法：若 $a<b$ 且 $c>0$，則 $ac<bc$；
若 $a<b$ 且 $c<0$，則 $ac>bc$ ．

(5)對任一實數 a， $a^2\geq 0$ 恆成立．（ $a^2=0$ 僅在 $a=0$ 時成立）

3.實數的絕對值

數線上所有的點都對應到一個實數，稱作這個點的坐標．若 A 點的坐標為 x，我們以 $|x|$（讀做「 x 的絕對值」）來表示 A 點與原點的距離。

(1) $|x|\geq 0$ 恆成立



例題 8--

已知實數 x， y 滿足 $|x+y|+(2x-y-15)^2=0$，求 x， y 的值．

$x=5$， $y=-5$

例題 9--

比較下列各數的大小： $a=\sqrt{7}+\sqrt{6}$， $b=\sqrt{10}+\sqrt{3}$， $c=\sqrt{11}+\sqrt{2}$ ．

隨堂練習

比較下列各數的大小：$a=\sqrt{5}+\sqrt{10}$，$b=\sqrt{6}+3$，$c=\sqrt{13}+\sqrt{2}$.

例題 10

設 a，b 是非負的實數，試證：$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，　且當 $a=b$ 時，等號才成立.

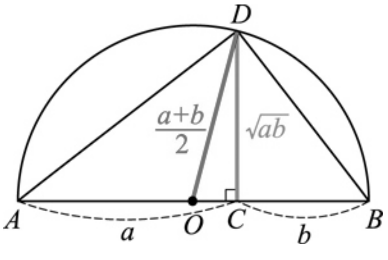
算幾不等式

若 a，b 為非負的實數，則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$.其中等號成立的條件是 $a=b$.

幾何證明

圖中 $\overline{CD}=\sqrt{ab}$（作法如圖），半徑 $\overline{OD}=\dfrac{a+b}{2}$，因為直角三角形 OCD 中，斜邊 $\overline{OD}$ 為最大邊，即 $\overline{OD}\ge\overline{CD}$，所以 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$.

（當 $a=b$ 時，$\overline{OD}$ 與 $\overline{CD}$ 重合，此時 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$）



例題 11 --

(1)已知 a， b 是正實數且 $ab=16$，求 $a+b$ 的最小值．

(2)面積為 16 的所有矩形中，哪一種矩形的周長為最短？

隨堂練習 --

一條長為 24 公尺的繩子，所能圍出的矩形面積最大是多少？這個有最大面積的矩形長、寬各為幾公尺？

乘法公式

(1) $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ ．　　【和平方公式】

(2) $\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$ ．　　【差平方公式】

(3) $\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$ ．　　【平方差公式】

(4) $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ ．

(5) $\left(a+b\right)\left(c+d\right)=ac+ad+bc+bd$

重要公式

(1) $\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ．　　【和立方公式】

(2) $\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ．　　【差立方公式】

(3) $\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$ ．　　【立方和公式】

(4) $\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$ ．　　【立方差公式】

例題 12 --

展開下列各式：

(1)$\left(a+2b\right)^3$.　　(2)$\left(2a-b-1\right)^2$.

(3)$\left(a-b+1\right)\left(a-b-1\right)$.　　(4)$\left(a-1\right)\left(a+1\right)\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+a+1\right)$.

隨堂練習 --

展開下列各式：

(1)$\left(2a-b\right)^3$.　　(2)$\left(a-b+3\right)^2$

(3)$\left(a+b-1\right)\left(a-b+1\right)$.　　(4)$\left(a-3\right)\left(a+3\right)\left(a^2+3a+9\right)\left(a^2-3a+9\right)$

例題 13 --

利用乘法公式，因式分解下列各式：(1) x^3-1 .　　　(2) $8x^3+27$.　　　(3) $27x^3+27x^2+9x+1$

隨堂練習 --

因式分解下列各式：(1) x^3+8y^3 .　　　(2) x^3-125 .　　　(3) $x^3-6x^2+12x-8$

例題 14 --

設 $x=2-\sqrt{3}$，求下列各式的值：(1) $x+\dfrac{1}{x}$.　　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.　　　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

隨堂練習 --

設 $x=\sqrt{5}-2$，求下列各式的值：(1) $x+\dfrac{1}{x}$.　　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.　　　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

例題 15 ---

設 $x>0$，化簡 $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}$

隨堂練習 ---

設 $x>1$，化簡 $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$

1-1 習題

一、基礎題

1. 下列何者為有理數？ (1)0.00345　(2) $\frac{34}{99}$　(3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　(4) $\sqrt{121}$　(5) $4-2\sqrt{3}$.

2. 將 $\frac{2}{7}$ 化為小數時，小數點後第 100 位數字為(1)2　(2)5　(3)7　(4)4　(5)8 .

3. 將下列各循環小數化成最簡分數：　(1) $0.\overline{520}$.　　　(2) $5.4\overline{38}$.

4. 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{12}-2\sqrt{48}$.

(2) $\dfrac{1}{7+\sqrt{41}}+\dfrac{1}{\sqrt{41}+\sqrt{33}}+\dfrac{1}{\sqrt{33}+5}$.

(3) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}+\dfrac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$.

(4) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}+\sqrt{14-8\sqrt{3}}$.

5. 已知有理數 a， b 滿足 $\left(a+2\sqrt{3}\right)^2=b+4\sqrt{3}$，求 a， b 的值 .

6. 已知實數 a， b 滿足 $\left(a-2\right)^2+2\left|a-2b\right|=0$，求 a， b 的值 .

7. 已知 $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $a-\dfrac{1}{b}$ 的值 .

8. 下列各數何者在整數 1 和 2 之間？ (1) $\sqrt{\dfrac{22}{7}}$ (2) $1.\overline{36}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ (4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

9. 展開下列各式：

(1) $(2a+3)^2(2a-3)^2$.　　(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$.

(3) $(a-b-1)(a+b+1)$.　　(4) $(3a-2b)^3$.

10. 因式分解下列各式：　(1) $27x^3-y^3$.　　(2) $(x+y)^4-(x-y)^4$.

11. 設 $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，求下列各式的值：　(1) $x+\dfrac{1}{x}$.　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.　　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

二、進階題

12. 選出正確的選項：

(1)若 a， b 都是無理數，則 $a+b$ 為無理數

(2)若 a， b 都是無理數，則 ab 為無理數

(3)若 a 為有理數， b 是無理數，則 $a+b$ 為無理數

(4)若 a 為有理數， b 是無理數，則 ab 為無理數

(5)若 $a-b$， $a+b$ 都是有理數，則 a， b 為有理數 .

13. 比較下列各數的大小：　$a=\sqrt{7}-\sqrt{5}$， $b=\sqrt{10}-\sqrt{2}$， $c=\sqrt{11}-1$.

14. 設 $a>0$， $b>0$，試證明 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$.