在三维空间中，考虑一块面积对参考点 O 的张角，称为立体角。
定义 $\Omega = \frac{S}{r^2}$，对于球面，

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

定义

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

则 4π 的球面度为 720°
对于曲面，定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S_\perp}{r^2} = \frac{\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^2} \\ \Omega = \int \frac{\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^2} \end{aligned}$$

对于圆锥，设其半锥角为 α，取 $\mathrm{d}\vec{S}$ 竖直向下

$$\Omega = \int_{\sum} \frac{\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \mathrm{d}S\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}S}{r} z = \frac{h}{r}\mathrm{d}S$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{\sum} \frac{h\mathrm{d}S}{r^3} = \iint_{\sum} \frac{h}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) \\ &= 2\pi(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

我们采用另一种直观的方法。注意到 $\vec{r}$ 的方向可能不统一，可将曲面往外推至同一球面。将圆锥底面推至球面，则球冠面积 $2\pi RH$

$$\Omega = \frac{S}{l^2} = \frac{2\pi l(l-h)}{l^2} = 2\pi(1-\frac{h}{l}) = 2\pi(1-\cos\alpha)$$

结论：$\sum$ 为某一封闭曲面，O 为参考点，则 $\sum$ 对 O 的立体角为

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & O\text{在}\sum\text{内} \\ 0, & O\text{在}\sum\text{外} \end{cases}$$

O 在 $\sum$ 内

$$\vec{F}=\frac{\vec{e}_r}{r^2}=\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0$$

在 O 点处，上式不成立，取复连通区域

$$\int_{\sum_{外}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\int_{\sum'_{内}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_D()\ \mathrm{d}V=0$$

$$\int_{\sum_{外}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\int_{\sum'_{内}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_{\sum'_{外}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

取

$$\sum{}'=\{x^2+y^2+z^2=\epsilon^2\}$$

$$\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S$$

$$\Omega=\int_{\sum'}\frac{\mathrm{d}S}{\epsilon^2}=4\pi$$

O 在 $\sum$ 之外，此时 $\sum$ 中

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0$$

处处成立，则 $\Omega=0$
球坐标中，

$$\mathrm{d}S=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}S=r^2\mathrm{d}\Omega$$