数值分析实验报告

插值方法比较

姓名： 李忠鹏

学号： 230980121

2025年5月6日

目录

1 问题描述

本实验旨在比较两种不同的插值方法对平方根函数的近似效果。给定如下数据点：

x	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

表 1: 数据点（实际对应$y=\sqrt{x}$）

实验要求：

1. 用这9个点作8次多项式插值$L_8(x)$。
2. 用三次样条(第一边界条件)程序求$S(x)$。
3. 分析在区间$[0,64]$上，哪个插值更精确；在区间$[0,1]$上，两种插值哪个更精确。

2 理论基础

2.1 拉格朗日插值法

拉格朗日插值法是一种多项式插值方法，用于构造一个n次多项式通过$n+1$个给定数据点。对于给定的数据点(x_i, y_i)，$i=0,1,\ldots,n$，拉格朗日插值多项式为：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) \tag{1}$$

其中$l_i(x)$为拉格朗日基函数：

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2}$$

每个基函数$l_i(x)$满足$l_i(x_i)=1$和$l_i(x_j)=0$（当$i\neq j$时）。

2.2 三次样条插值法

三次样条插值通过构造分段三次多项式来连接相邻数据点，保证曲线通过所有数据点，并且在节点处具有一阶和二阶导数的连续性。对于区间$[x_i, x_{i+1}]$上的三次多项式片段$S_i(x)$，其形式为：

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{3}$$

第一边界条件指定在边界点处的二阶导数为0（自然边界条件）。

3 代码实现

3.1 拉格朗日插值实现

拉格朗日插值算法的核心实现如下：

```
def lagrange_interpolation(x_data, y_data):
    n = len(x_data)

    def lagrange_function(x):
        result = 0
        for i in range(n):
            Ln_value = y_data[i]
            for j in range(n):
                if i != j:
                    Ln_value *= (x - x_data[j]) / (x_data[i] - x_data[j])
            result += Ln_value
        return result

    return lagrange_function
```

3.2 三次样条插值实现

三次样条插值使用了SciPy库中的CubicSpline函数：

```
from scipy.interpolate import CubicSpline
S = CubicSpline(x_data, y_data, bc_type='natural')
```

其中bc_type='natural'指定了自然边界条件（边界处的二阶导数为0）。

4 结果分析

4.1 区间$[0, 64]$上的插值效果

图1和图2展示了两种插值方法在$[0, 64]$区间上的效果对比。

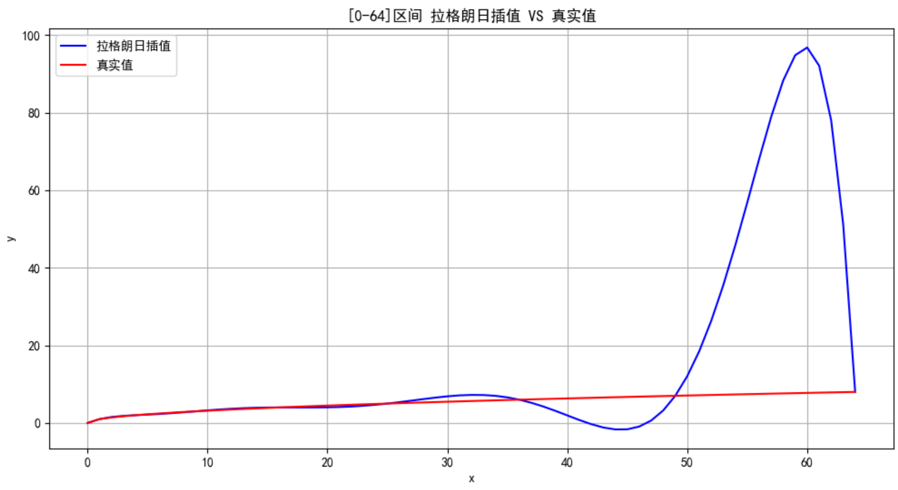

图 1: 拉格朗日插值在$[0, 64]$区间上与真实函数的对比

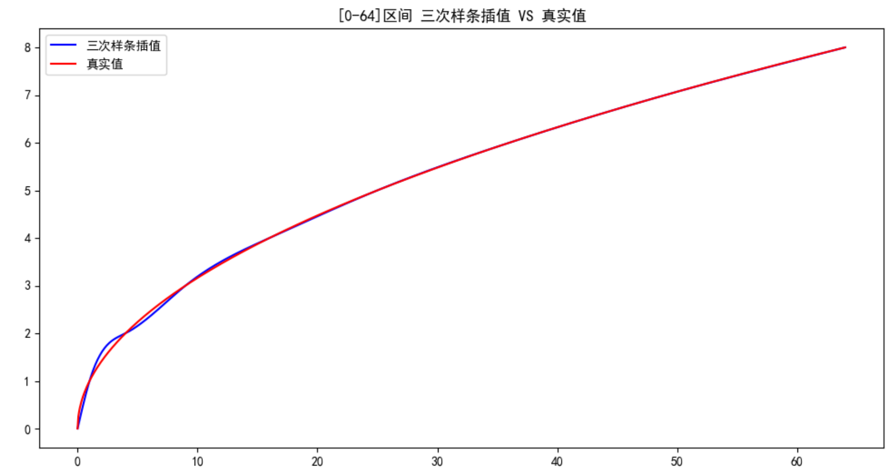

图 2: 三次样条插值在$[0, 64]$区间上与真实函数的对比

从图1可以看出，拉格朗日8次多项式插值虽然通过了所有数据点，但在整个区间上出现了明显的震荡现象。而图2显示，三次样条插值提供了更加平滑的曲线，与真实的平方根函数几乎完全重合。

4.2 区间$[0, 1]$上的插值效果

图3和图4展示了两种方法在$[0, 1]$区间上的效果。

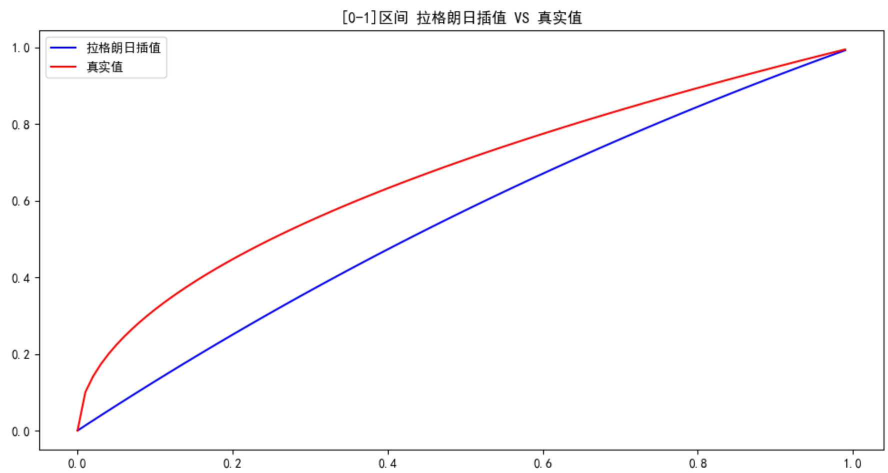

图 3: 拉格朗日插值在$[0, 1]$区间上与真实函数的对比

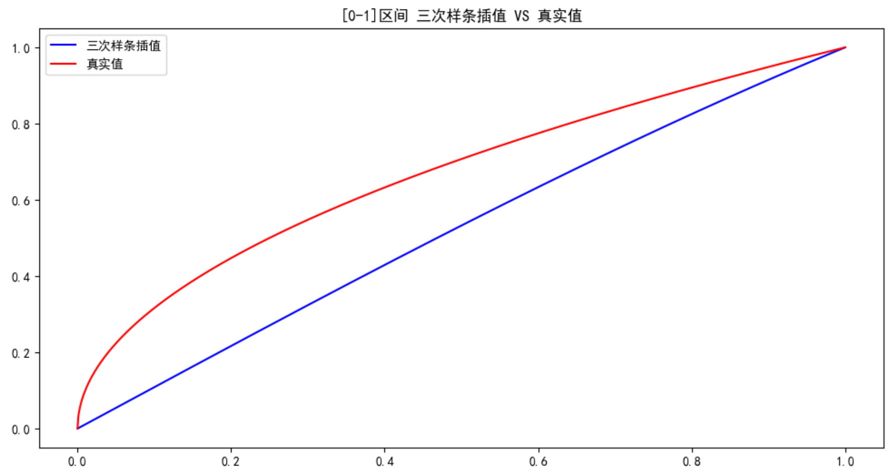

图 4: 三次样条插值在[0, 1]区间上与真实函数的对比

在区间[0, 1]上，两种插值方法的表现相似，与真实函数都有良好的拟合。这主要是因为这个区间内只有两个数据点$(0, 0)$和$(1, 1)$，两种方法都能很好地插值这两个点。

5 结论

基于python跑出的结果和matplotlib画出的图像，可以得出以下结论：

1. 在区间[0, 64]上，三次样条插值明显优于拉格朗日插值。拉格朗日插值虽然通过所有数据点，但在数据点之间出现了明显的震荡（龙格现象），而三次样条插值保持了良好的平滑性，更接近真实函数。

2. 在区间[0, 1]上，两种插值方法的精确度相近。这主要是因为该区间内只有两个数据点，且函数在此区间内变化较为平缓。

对于平方根函数的插值问题，三次样条插值法展现出了更好的整体性能，特别是在处理较大区间时能有效避免高次多项式插值的龙格现象，提供更加平滑和准确的近似结果。