

Griffiths 电动力学前几章

242页

第章 向量分析

物理量之和: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$. 乘法分配律: (i) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$
 向量之和: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
 二阶导数: (ii) $\nabla(\nabla T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T$
 $\nabla^2 \vec{V} = (\nabla^2 V_x) \hat{x} + (\nabla^2 V_y) \hat{y} + (\nabla^2 V_z) \hat{z}$

(2) $\nabla \times (\nabla T) = 0$
 (3) $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) \neq (\nabla \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla^2 \vec{V}$
 (4) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$

(5) $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$
 曲线坐标: 梯度: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial n} \hat{n} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \hat{e}_i$
 散度: $\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\phi F \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (F_i h_i h_k)}{\partial r_i}$
 laplacian: $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \hat{e}_i \right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} [h_i h_j h_k]$

整理: $\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} h_i h_k \frac{\partial}{\partial r_i}$

旋度: $(\nabla \times \vec{F})_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\phi F \cdot d\vec{s}}{\Delta A}$

$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial r_j} (F_i h_e) \right) \hat{e}_i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \det \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial r_1} & \frac{\partial}{\partial r_2} & \frac{\partial}{\partial r_3} \\ h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 & h_1 \hat{e}_1 \end{vmatrix} \delta(kx)$

对于直角坐标 $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ 对于球坐标 $h_1 = 1$ $h_2 = r$ $h_3 = r \sin \theta$

对于柱坐标 $h_1 = 1$ $h_2 = r$ $h_3 = 1$.

积分基本定理推论:

(a) $\int_V (\nabla T) d\vec{a} = \phi_s T d\vec{a}$ ($\vec{V} = \vec{c} \cdot \vec{T}$ 代入①)

(b) $\int_V (\nabla \times \vec{V}) d\vec{a} = -\phi_s \vec{V} \times d\vec{a}$ (\vec{V} 替换为 $(\vec{V} \times \vec{c})$ 代入②)

(c) $\int_V [T \nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U)] d\vec{a} = \phi_s (T \nabla U) \cdot d\vec{a}$

($\vec{V} = T \nabla U$ 代入③) Green's identity

(d) $\int_V (T \nabla^2 U - U \nabla^2 T) d\vec{a} = \phi_s (T \nabla U - U \nabla T) \cdot d\vec{a}$

Green's second identity

(e) $\int_S \nabla T \times d\vec{a} = -\phi_s T d\vec{l}$ ($\vec{V} = \vec{c} \cdot \vec{T}$ 代入④)

矢面积: $\vec{a} \equiv \int_S d\vec{a}$

静电场

Coulomb's law: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/(N \cdot m^2)$

$\vec{F} = Q \vec{E}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r'^2} \hat{r} d\vec{r}'$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{r'^2} \hat{r} d\vec{a}'$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')}{r'^2} \hat{r} d\vec{l}'$

微分方程: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

(i) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
 (ii) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$
 (iii) $\nabla(\vec{f} \cdot \vec{A}) = \vec{f} \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla \cdot \vec{f})$
 (iv) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$
 (v) $\nabla \times (\vec{f} \cdot \vec{A}) = f(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f)$
 (vi) $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A})$

注: $(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$ 将 x 分量提出, $(\vec{A} \cdot \nabla) B_x = \vec{A} \cdot (\nabla B_x)$
 $\therefore (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = \vec{A} \cdot (\nabla B_x) \hat{x} + \vec{A} \cdot (\nabla B_y) \hat{y} + \vec{A} \cdot (\nabla B_z) \hat{z}$

积分基本定理: ① $\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a)$

② $\int_R (\nabla T) \cdot d\vec{l} = T(\vec{b}) - T(\vec{a})$

③ $\int_V (\nabla \cdot \vec{V}) d\vec{a} = \phi_s \vec{V} \cdot d\vec{a}$

④ $\int_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{a} = \phi_p \vec{V} \cdot d\vec{l}$

边界条件: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$

$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$

fall space: $f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d\vec{z} = f(\vec{a})$

$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right) = 4\pi \delta(r^2); \nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) = -4\pi \delta(r^2)$

Helmholtz 定理 1: 离散场下列表述条件等价:

(a) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ everywhere.

(b) $\int_{\text{a closed loop}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 与路径无关 (路径上点给定)

(c) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ for any closed loop.

(d) $\vec{F} = -\nabla V$

Helmholtz 定理 2: 无源场下列表述条件等价:

(a) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ everywhere.

(b) $\vec{F} \cdot d\vec{a}$ 与表面无关 (边界线给定)

(c) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{a} = 0$ for any closed surface.

(d) $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$

Always: $\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}$

(i) $\vec{a} = \frac{1}{2} \oint \vec{F} \times d\vec{l}$ (ii) $\oint (\vec{c} \cdot \vec{F}) d\vec{l} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ($T = \vec{c} \cdot \vec{F}$ 代入⑤); $\nabla \cdot (\vec{c} \cdot \vec{F}) = \vec{c}$

静磁场

$\vec{F} = Q(\vec{V} \times \vec{B}) = \int I(d\vec{l} \times \vec{B})$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r'^2} d\vec{l}'$

$= \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{k(\vec{r}') \times \hat{r}}{r'^2} d\vec{a}'$

$= \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r'^2} d\vec{l}'$

微分方程: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

电势: $V(\vec{r}) = - \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$\vec{E} = -\nabla V$

Poisson's equation: $\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

无电荷 Laplace's equation: $\nabla^2 V = 0$

解: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r'} d\vec{r}'$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{r'} d\vec{a}'$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')}{r'} d\vec{l}'$

边界条件: $E_{\text{above}}^{\perp} - E_{\text{below}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$

$E_{\text{above}}^{\parallel} = E_{\text{below}}^{\parallel}$

$\Leftrightarrow E_{\text{above}} - E_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$\Leftrightarrow \nabla V_{\text{above}} - \nabla V_{\text{below}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ ($V_{\text{above}} = V_{\text{below}}$)

$\Leftrightarrow \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

静电能: 离散: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i)$ 其中 $V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$

连续: $W = \frac{1}{2} \int \rho V d\vec{a} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int \vec{E}^2 d\vec{a} + \phi_s \vec{V} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{a} \right)$

$= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\vec{a}$ (all space)

多极子: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta) P(r') d\vec{r}'$

$= V_{\text{mon}} + V_{\text{dip}} + V_{\text{quad}} + \dots$

其中 $V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$

$V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}; \vec{P} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i = \int \vec{r} \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}$

$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}, \theta) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$

$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{P} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{P}]$

$\vec{E}_{\text{dip}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{r^3}$ (面内电荷平均电场)

$\vec{E}_{\text{dip}}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \hat{r}}{r_i^2} \vec{r}_i$ (面外电荷平均电场等效)

它们在中心产生电场

电容器: $C = \frac{Q}{V}$ (Q 电荷量)

电感器: $L = \frac{I}{V}$

$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

磁势:

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (库伦规范: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$)

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$

无电流 $\nabla^2 \vec{A} = 0$

解: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r'} d\vec{r}'$

$= \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r'} d\vec{a}'$

$= \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{J(\vec{r}')}{r'} d\vec{l}'$

$\Leftrightarrow \vec{B}_{\text{above}} = \vec{B}_{\text{below}}$

$\Leftrightarrow B_{\text{above}} - B_{\text{below}} = \mu_0 K$

$\Leftrightarrow \vec{B}_{\text{above}} - \vec{B}_{\text{below}} = \mu_0 (\vec{K} \times \hat{n})$

$\vec{A}_{\text{above}} = \vec{A}_{\text{below}}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}$

$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J}) d\vec{a} = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d\vec{a} - \phi_s (\vec{A} \cdot \vec{B}) \right]$

$= \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\vec{a}$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r'} d\vec{r}'$

$= \frac{1}{4\pi\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n \vec{P}_n(\cos \theta) \vec{J}(r') d\vec{r}'$

$= \vec{A}_{\text{mon}} + \vec{A}_{\text{dip}} + \dots$

$\vec{A}_{\text{mon}} = 0$

$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}; \vec{m} = \vec{I}/\epsilon_0 = \vec{J}/\mu_0$

$= \frac{\mu_0}{4\pi\mu_0} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$

$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi\mu_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$

$\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi\mu_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}]$

$\vec{B}_{\text{dip}}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi\mu_0} \frac{2\vec{m}}{r^3}$ (面内电流平均磁场)

$\vec{B}_{\text{dip}}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r'} d\vec{r}'$ (面外电流平均磁场等效)

它们在中心产生磁场

极化率: $\vec{P} = \alpha \vec{E}$
原子矩矩: $\vec{N} = \vec{P} \times \vec{E}$
受力: $\vec{F} = (\vec{P}, \nabla) \vec{E}$

极化强度: \vec{P} = 单位体积偶极矩.

$$\text{极化电场: } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{r}}{r^2} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}_b \cdot \hat{n}}{r} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}_b}{r} dz'$$

极化电荷: $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ $P_b = -\nabla \cdot \vec{P}$

介质中微分方程:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = P_f$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

$$\text{边界条件: } D_{\text{above}}^+ - D_{\text{below}}^+ = \sigma_f$$

$$D_{\text{above}}'' - D_{\text{below}}'' = P_{\text{above}}'' - P_{\text{below}}''$$

线性电介质: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

关于 \vec{D}, \vec{E} 相似性见 P189.

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int E^2 dV = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

相似性

$$(i) \nabla \cdot \vec{D} = 0, \nabla \times \vec{E} = 0, \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P} \Rightarrow \vec{D} \rightarrow \vec{B}, \vec{E} \rightarrow \vec{H}, \vec{P} \rightarrow \mu_0 \vec{M}, \epsilon_0 \rightarrow \mu_0 \quad (P293)$$

第七章 电磁感应

欧姆定律: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ $\sigma = \frac{1}{\rho}$
 $V = IR$

电动势: $\mathcal{E} = \phi \vec{f} \cdot d\vec{l} = \vec{f} \cdot \vec{s} \cdot d\vec{l}$

互感: $\mathcal{E}_2 = M \frac{dI_1}{dt} \quad (M_{12} = \frac{\Phi_1}{I_1})$

$M_{21} = \frac{\Phi_2}{I_2} \phi \frac{dI_2}{dt} \quad (M_{21} = M_{12} = M)$

自感: $\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} \quad (L = \frac{\Phi}{I})$

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

磁化强度: \vec{M} = 原子体积磁偶极矩.

$$\text{极化强度: } \vec{P} = \frac{M_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dV'$$

$$= \frac{M_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{B}_0(\vec{r}') \times \hat{n}}{r} da' + \frac{M_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{r} dz'$$

$$\text{极化电流: } \vec{J}_b = \vec{M} \times \hat{n}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

$$H_{\text{above}} - H_{\text{below}} = -(M_{\text{above}} - M_{\text{below}})$$

$$H_{\text{above}} - H_{\text{below}} = \vec{k}_f \times \hat{n}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}$$

稳恒电流连续性方程: $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\text{焦耳热定律: } P = VI = I^2 R$$

$$\text{动生电动势: } \mathcal{E} = VBh = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{Faraday's law: } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

Lenz's law: Nature abhors a change in flux

Maxwell's equations (Before Maxwell): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} P$

$$(i) \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} P$$

$$(ii) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iii) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iv) \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Maxwell's equations (Magnetic charge):

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = \frac{P_f}{\epsilon_0}$$

$$(2) \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3) \nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 P_m$$

$$(4) \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

conservation laws:

$$(5) \nabla \cdot \vec{J}_m = -\frac{\partial P_m}{\partial t} \quad (6) \nabla \cdot \vec{J}_e = -\frac{\partial P_e}{\partial t}$$

Maxwell's equations (After Maxwell): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} P$

$$(a) \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} P$$

$$(b) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(c) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(d) \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell's equations in Matter:

$$(1) \nabla \cdot \vec{D} = P_f$$

$$(2) \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(4) \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_f + \vec{J}_d$$

Constitutive relations: (linear media)

$$(5) \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$(6) \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$(7) \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$(8) \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

displacement current: $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

起搏体: Meissner effect: $\vec{B} = 0$ (inside)

理想导电流体: Alfvén's theorem:

任意随液体流动的闭合回路的磁通量在所有时间恒定。

First uniqueness theorem: $\nabla^2 V = 0$ 且 V 在边界 S 的值给定时, 唯一。

Second uniqueness theorem: $\nabla^2 V = 0$ 且每边界上电荷给定时 V 唯一。

图解法: 若假想体系满足边界条件, 则假想体系的 $V(E)$ 为正确的 $V(E)$

分离变量法: 见 P131 电介质上的力: 见 P202 (虚功原理)

球坐标系: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dV}{dr}) = l(l+1) \quad R(r) = A r^l + \frac{B}{r^{l+1}}$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dV}{dr}) = l(l+1) \quad (P_l(\cos \theta))$$

$$\text{其中 } P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

$$(P_l(1) = 1)$$

二级结论:

电场:

$$\textcircled{1} \text{ 面电荷 } \rho(\theta) = \rho \cos \theta \text{ 或球对称化: } \vec{E}_{\text{eff}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\rho \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (\vec{r} = \frac{4}{3}\vec{r}^3 \vec{p})$$

$$\textcircled{2} \text{ 线性电介质置于匀强磁场 } \vec{B}_{\text{eff}} = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \vec{B}_0$$

磁场:

$$\textcircled{1} \text{ 旋转面电荷: } \vec{B}_{\text{eff}} = \frac{2}{3} \mu_0 \epsilon_0 \vec{r} \times \vec{w} = \frac{2}{3} \mu_0 \epsilon_0 \vec{M}_{\text{ave}}$$

$$\textcircled{2} \text{ 线性电介质置于匀强磁场 } \vec{B}_{\text{eff}} = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \vec{B}_0$$

电动力学导论 (Griffiths)

第一章 向量分析

1.1 向量代数

1.1.1 向量操作子

(i) 交换律: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

结合律: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

减法定义: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

(ii) 与标量相乘

分配律: $a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$

(iii) 点乘: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$ (即 \vec{A} 在 \vec{B} 方向上投影的乘积)

交换律: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

分配律: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

特别地: $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$

若 $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

(iv) 叉乘: $\vec{A} \times \vec{B} = ABS \sin \theta \hat{n}$

方向遵循右手定则: \hat{n} 为 \vec{A} 与 \vec{B} 构成平行四边形面积,

分配律: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

反交换律: $(\vec{B} \times \vec{A}) = -(\vec{A} \times \vec{B})$

特别地: $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$.

1.1.2 分量表示

在笛卡尔坐标系下, 向量可依基向量分解.

$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$. A_x, A_y, A_z 为 \vec{A} 的分量. Dirac 常写: $|A\rangle = \langle x|A\rangle |x\rangle + \langle y|A\rangle |y\rangle + \langle z|A\rangle |z\rangle$

其中 $A_x = \hat{x} \cdot \vec{A}$ $A_y = \hat{y} \cdot \vec{A}$ $A_z = \hat{z} \cdot \vec{A}$

(i) 加法: $\vec{A} + \vec{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) + (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$

$= (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z}$

(ii) 标量与分量效果相同:

$\alpha \vec{A} = (\alpha A_x) \hat{x} + (\alpha A_y) \hat{y} + (\alpha A_z) \hat{z}$

(iii) 求向量时分别乘每个分量再相加

利用 $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$. $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$.

得 $\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$

(iv) $= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

又例如: $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 0$. 得 $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

利用

$\hat{x} \cdot \hat{y} = -\hat{y} \cdot \hat{x} = \frac{1}{2}$

$\hat{y} \cdot \hat{z} = -\hat{z} \cdot \hat{y} = \frac{1}{2}$

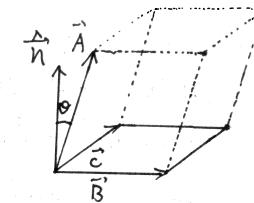
$\hat{z} \cdot \hat{x} = -\hat{x} \cdot \hat{z} = \frac{1}{2}$

1.1.3 三重积

(i) 标量三重积: $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$

几何意义: 标量三重积 $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$ 是由 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ 构成平行面体体积,

分量形式: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$



轮换性: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$.

$\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = -\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

点, 又可互换: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

(ii) 向量三重和: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

BAC-CAB 定律: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

1.1.4 位置矢量、位移矢量、分离矢量

位置矢量: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ (从原点 O 指向点 r 的位置)

大小: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

单位径矢: $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

无穷小位移量: $d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$ (从 (x, y, z) 指向 $(x+dx, y+dy, z+dz)$)

源点: \vec{r}' (电荷的位置) 场点: \vec{r} (考察点的位置)

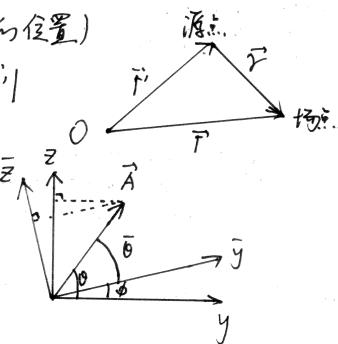
分离矢量: $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ 大小: $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$

单位分离矢量: $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

笛卡尔坐标中: $\vec{r} = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}$.

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\hat{r} = \frac{(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$



1.1.5 向量变换

如图所示, 在 $x-y-z$ 基中 $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$.

在 $\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$ 基中 $\vec{A} = (\bar{A}_x, \bar{A}_y, \bar{A}_z)$

有 $\begin{pmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ 简便的, 从这个矩阵的, 变换矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\text{即 } \bar{A}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} A_j$$

下面向量利用 dirac 符号 (量子力学) 简述:

\vec{A} 在 $x-y-z$ 系, ($x_i: i=1,2,3$) 中

$$\text{可表示为 } |\vec{A}\rangle = \langle x_1 | A \rangle |x_1\rangle + \langle x_2 | A \rangle |x_2\rangle + \langle x_3 | A \rangle |x_3\rangle$$

$$\text{其中 } \langle x_i | A \rangle = \sum_j \langle x_i | \vec{x}_j \rangle \langle \vec{x}_j | A \rangle \quad (\text{插} \rightarrow \text{单位算符}) = \sum_j R_{ij} \langle \vec{x}_j | A \rangle$$

$$\text{因此写成坐标: } \begin{pmatrix} \langle x_1 | A \rangle \\ \langle x_2 | A \rangle \\ \langle x_3 | A \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_1 | \vec{x}_1 \rangle & \langle x_1 | \vec{x}_2 \rangle & \langle x_1 | \vec{x}_3 \rangle \\ \langle x_2 | \vec{x}_1 \rangle & \langle x_2 | \vec{x}_2 \rangle & \langle x_2 | \vec{x}_3 \rangle \\ \langle x_3 | \vec{x}_1 \rangle & \langle x_3 | \vec{x}_2 \rangle & \langle x_3 | \vec{x}_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1 | A \rangle \\ \langle \vec{x}_2 | A \rangle \\ \langle \vec{x}_3 | A \rangle \end{pmatrix}$$

说明: 转换矩阵中, 纵列 $\begin{pmatrix} \langle x_1 | \vec{x}_j \rangle \\ \langle x_2 | \vec{x}_j \rangle \\ \langle x_3 | \vec{x}_j \rangle \end{pmatrix}$ 是第 j 坐标轴向旧坐标轴的坐标,

二阶张量转换形式 (9个分量):

$$\bar{T}_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_{ik} T_{kl} R_{lj}^*$$

阶张量有3个分量: 标量为常数, 向量为一阶张量.

Prob. 1.9 写出转换矩阵 R 符合如下转换:

① 旋转轴通过 O 与 $(1,1,1)$ ② 从 $(1,1,1)$ 点看向 $(0,0,0)$ 点, 逆时针旋转 120° .

解: 设 $\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$, $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. 任意向量 \vec{v} 经逆时针旋转 θ 所得 \vec{v}' .

不旋转部分: $\vec{v}'_n = (\hat{n} \cdot \vec{v}) \hat{n}$ 则 $\vec{v}'_l = \vec{v} - \vec{v}'_n = \vec{v} - (\hat{n} \cdot \vec{v}) \hat{n}$ 参与旋转

记 $\vec{w} = \vec{v}'_l \times \hat{n}$ (建立坐标系且 $|w| = |v_l|$) $= \vec{v}'_l \times \hat{n}$

那么 $\vec{v}'_l = \vec{v}'_l \cos\theta + \vec{w} \sin\theta = [\vec{v}'_l - (\hat{n} \cdot \vec{w}) \hat{n}] \cos\theta + (\vec{v}'_l \times \hat{n}) \cos\theta$

则 $\vec{v}' = \vec{v}'_n + \vec{v}'_l$

因此 $x-y-z$ 轴旋转后

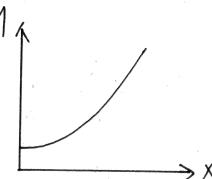
$$\text{代入 } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 得 } \vec{v}'_1 = \begin{pmatrix} n_x^2 + (1-n_x^2) \cos\theta \\ n_x n_y - n_y n_x \cos\theta - n_z \sin\theta \\ n_x n_z - n_z n_x \cos\theta + n_y \sin\theta \end{pmatrix}, \vec{v}'_2 = \begin{pmatrix} n_y n_x - n_y n_z \cos\theta + n_x \sin\theta \\ n_y^2 + (1-n_y^2) \cos\theta \\ n_y n_z - n_z n_y \cos\theta - n_x \sin\theta \end{pmatrix}, \vec{v}'_3 = \begin{pmatrix} n_z n_x + n_z n_y \cos\theta - n_y \sin\theta \\ n_z n_y - n_z n_x \cos\theta + n_x \sin\theta \\ n_z^2 + (1-n_z^2) \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}'_3 = \begin{pmatrix} n_z n_x + n_z n_y \cos\theta - n_y \sin\theta \\ n_z n_y - n_z n_x \cos\theta + n_x \sin\theta \\ n_z^2 + (1-n_z^2) \cos\theta \end{pmatrix} \text{ 则 } T = \begin{pmatrix} V_1' & V_2' & V_3' \end{pmatrix}, \text{ 代入题中数据 } \hat{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

8.1.2 微积分的计算

1.2.1 基本导数

单变量函数 $f(x)$ 的导数: $df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$



几何意义: $\frac{df}{dx}$ 是曲线 $f(x)$ 的斜率.

1.2.2 梯度

对于三元(多元)标量函数 $T(x,y,z)$ (以温度为例)

(x,y,z) 与 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 两点, 温度差 $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$

(沿 x 轴前进 dx 的温度加再沿 y 轴前进 dy 的温度加再沿 z 轴前进 dz 的温度之和)

上式可写为 $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}\right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) = (\nabla T) \cdot (d\vec{l})$

其中 $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$ 为向量.

几何: $dT = \nabla T \cdot d\vec{l} = |\nabla T| / |d\vec{l}| \cos\theta$.

因为当 $\theta=0^\circ$ 时 $\cos\theta=1$, dT 最大, T 变化最快. 此时 $|\nabla T| = \frac{dT}{|d\vec{l}|}$

方向: 指向 T 变化最快的方向

大小: 沿此方向 T 的变化速率(斜率)

以山的高度为例: ∇T 指向最高处, 而 T 为山的梯度(绝对值).

若由 $d\vec{l}$ 的方向垂直于 ∇T 即 $\theta=90^\circ$, $\cos\theta=0$, $dT=0$. 即沿山的等高线运动. 即等高线垂直于 ∇T

若 $\nabla T=0$, 则称此点为驻点, 此点可以为最大值(山峰), 最小值(山谷)或“山肩”.

1.2.3 Del 符号.

梯度可写为 ∇ 乘标量函数 T : $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$.

那么 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$ 称为 del

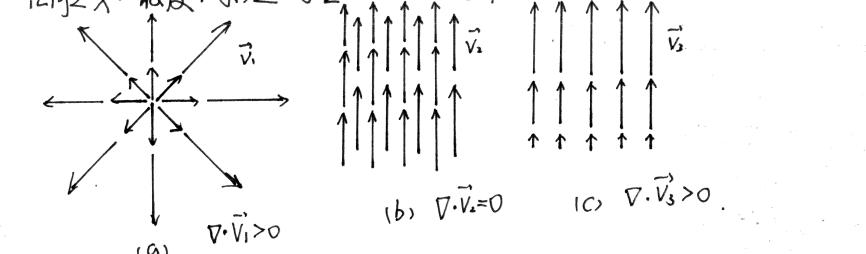
注: “ ∇ ”不是向量, 而是向量算子, 但许多性质与向量相同.

例如: 数乘: ∇T ; 点乘: $\nabla \cdot \vec{v}$; 叉乘: $\nabla \times \vec{v}$

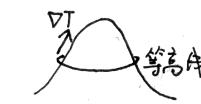
1.2.4 散度

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}\right) \cdot (V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} : \text{标量}$$

几何: 散度描述向量 \vec{v} 从一点展开的辐射程度.



类比: 从水龙头流出水, “水龙头”处有正的散度, 下水道口处有负的散度.



$$1.2.5 \text{ 速度} \quad \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad : \text{向量}$$

几何意义：速度描述了环绕某点的程度。
方向遵循右手定则。

类比：“水的旋涡”

1.2.6 乘法法则

对于普通导数：

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(kf) = k \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

$$\text{注: } (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = (A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}) (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

$$= (A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}) \hat{x} +$$

$$+ (A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}) \hat{y}$$

$$+ (A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}) \hat{z}$$

$$= \vec{A} \cdot \nabla B_x \hat{x} + \vec{A} \cdot (\nabla B_y) \hat{y} + \vec{A} \cdot (\nabla B_z) \hat{z}$$

$$\text{② } (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{F} = 0$$

i) \vec{x}^3 为例

$$[(\vec{F} \cdot \nabla) \vec{F}]_x = \vec{F} \cdot \left(\nabla \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \vec{F} \cdot \left(\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x} - \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} - \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \right)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} [x(y^2+z^2) - y \cdot x \cdot y - z \cdot x \cdot z] = 0$$

1.2.7 二阶导数

∇T 是向量，因此可以点乘和叉乘

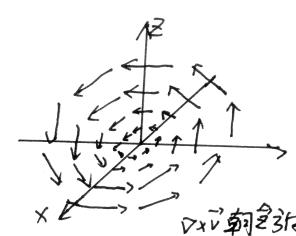
$$(1) \nabla \cdot (\nabla T) \quad (2) \nabla \times (\nabla T)$$

3. \vec{v} 是标量，因此不可以点乘

$$(3) \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v})$$

$\nabla \times \vec{v}$ 是向量，因此可以点乘和叉乘

$$(4) \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) \quad (5) \nabla \times (\nabla \times \vec{v})$$



$\nabla \times \vec{v}$ 朝哪个方向

另外有一些复杂的运算：

$$(1) 组成一个梯度场的式子有三种: $f \vec{g}$; $\vec{A} \cdot \vec{B}$$$

$$(2) 组成一个向量场的式子有三种: $f \vec{A}$; $\vec{A} \times \vec{B}$$$

两个梯度规则:

$$(i) \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$(ii) \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$$

两个向量规则:

$$(iii) \nabla \cdot (f \vec{A}) = f (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$$

$$(iv) \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

两个旋度规则:

$$(v) \nabla \times (f \vec{A}) = f (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f)$$

$$(vi) \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B})$$

§1.3 积分与通量

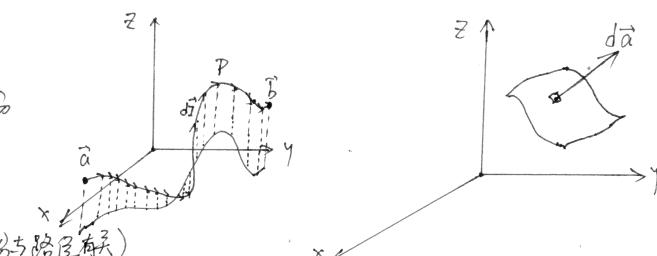
1.3.1 面积分、面积分、体积分

$$(a) 面积分 $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$ 沿曲面P积分$$

若P闭合 ($\vec{a}=\vec{b}$) 则表达式为 $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$

计算时取 \vec{a} 和 \vec{b} 的点乘

类比：做功 (除磁场外，积分与路径无关)



$$(b) 面积分 $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$ S为特定表面, da为面上无限小区域的向量垂直于表面.$$

若S闭合 (球) 则表达式为 $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$, 那么向外 da为正.

类比：流量. (除磁场外，积分与表面位置有关)

$$(c) 体积分 $\int_V T dz$ V为特定体积, dz为无限小体积元, dz = dx dy dz.$$

$$\int_V \vec{v} dz = \int (V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z}) dz = \hat{x} \int V_x dz + \hat{y} \int V_y dz + \hat{z} \int V_z dz$$

1.3.2 微积分基本定理.

$$\int_a^b \left(\frac{dt}{dx} \right) dx = f(b) - f(a) \Leftrightarrow \int_a^b F(x) dx = f(b) - f(a), F(x) = \frac{dt}{dx}$$

几何意义：计算如右图 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之差有两种：

- ① $f(b) - f(a)$
- ② 每小段 dt 再求和

1.3.3 标量基本定理.

如右图. $T(x, y, z)$. 曲线P从 \vec{a} 到 \vec{b}

$$\text{若沿小距离 } dt \quad dt = (\nabla T) \cdot d\vec{l}$$

$$\text{因此积累有 } \int_a^b (\nabla T) \cdot d\vec{l} = T(\vec{b}) - T(\vec{a})$$

几何意义：计算右图 $T(\vec{a})$ 与 $T(\vec{b})$ 之差有两种：

- ① $T(\vec{b}) - T(\vec{a})$
- ② 每小段 dt 再求和

结论：1. $\int_a^b (\nabla T) \cdot d\vec{l}$ 与从 \vec{a} 到 \vec{b} 路径无关

$$2. \phi(\nabla T) \cdot d\vec{l} = 0. \text{ 因 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 重合. } T(\vec{b}) - T(\vec{a}) = 0.$$

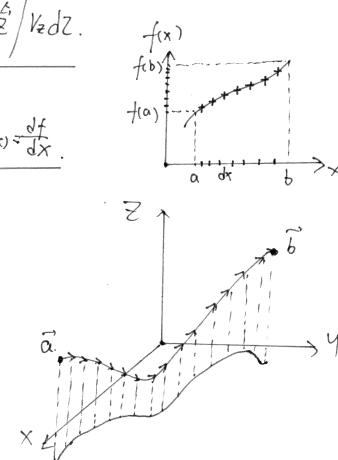
1.3.4 教授基本定理.

$$\int_V (\rho, v) dz = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{a} \quad \text{左侧代表某体积, V中物质之和, 右侧代表其边界 S 流量.}$$

几何意义：若 v 代表某不可压缩流体，则计算通过某表面 S 的流量有三种：

- ① 直接测出通过每小面积元流量再求和,
- ② 测出内部“水龙头”流量并求和,

因“水龙头”流出水必定会通过边界, 因此上述两种相等.



以球坐标为例

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 (r V_\theta)}{\partial r^2} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 T) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\sin \theta T) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

14.2 柱坐标 (s, φ, z)

$$x = s \cos \varphi \quad \hat{x} = \cos \varphi \hat{s} + \sin \varphi \hat{\varphi}$$

$$y = s \sin \varphi \quad \hat{y} = -\sin \varphi \hat{s} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$

$$z = z \quad \hat{z} = \hat{z}$$

Lame'系数 $h_1 = 1, h_2 = s, h_3 = 1$

$$d\vec{l} = ds \hat{s} + s d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s V_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \hat{s} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{\partial V_s}{\partial s} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s V_\varphi) - \frac{\partial V_s}{\partial \varphi} \right] \hat{z}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (s^2 T) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

§1.5 DIRAC S函数.

1.5.1 $\frac{1}{r^2}$ 的系数.

考虑 $\vec{V} = \frac{1}{r^2} \hat{r}$. $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \hat{r}) = 0$. 但 $\oint \vec{V} \cdot d\vec{a} = \int \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \neq 0$.

实际上 $\nabla \cdot \vec{V} = \int_0^\infty \text{原点处} + \int_0^\infty \text{非原点处}$ 且 $\oint (\nabla \cdot \vec{V}) \, d\tau = 4\pi$. 但这种函数称为S函数.

1.5.2 一维 S函数

定义: $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x=0 \end{cases}$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx = 1$.

S函数严格不是函数, 而是一种分布.

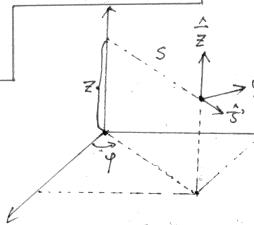
性质: 1. 批选这样: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) \, dx = \int_{(0)}^{(0)} f(x) \delta(x) \, dx = f(0)$

定义: $\delta(x-a) = \int_0^\infty \frac{x-a}{x-a} \, dx$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) \, dx = 1$.

则 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) \, dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) \, dx = f(a)$

2. $\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$. 特别地 $\delta(-x) = \delta(x)$ (偶函数)

3. 定义: $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ 为阶梯函数. 则 $\delta(x) = \frac{d\delta}{dx}$



1.5.3 三维 S函数.

定义: $\delta^3(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ 且 $\int_{\text{all space}} \delta^3(\vec{r}) \, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \, dx \, dy \, dz = 1$

性质: $\int_{\text{all space}} f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r}-\vec{a}) \, d\tau = f(\vec{a})$

几个特殊的S函数:

1. 向前侧 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$ 而 $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

因此, 善便地, $\nabla^2 \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{r})$

2. 高斯分布 $P_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

在60时为S函数

3. 积分时常用的 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) \, dk = \delta(x)$

来化简

§1.6 向量场理论

1.6.1亥姆霍兹定理.

在电动力学中一般要求场在无限远处趋于零, 在这种情况下, 场函数可完全由给定的场函数的梯度和旋度所唯一确定.

1.6.2 梯函数.

1. 若向量场函数 ~~处处~~ 的旋度处处为零, 则 \vec{F} 可写为某梯量势函数的梯度.

$\nabla \times \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = -\nabla V$

推论: 下列说法等价: (a) \vec{F} 为无旋场

(b) $\nabla \times \vec{F} = 0$ everywhere.

(c) $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 与路径无关 (给定端点)

(d) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

(e) 存在某梯量势函数 V , 使 $\vec{F} = -\nabla V$

且 V 不唯一, V 可加任常数, 因为梯度相减为零.

2. 若向量场的散度处处为零, 则 \vec{F} 可写为某向量势函数的旋度.

$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = \nabla \times \vec{A}$

推论: 下列说法等价:

(a) \vec{F} 为无散场

(b) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ everywhere.

(c) $\int_F \vec{F} \cdot d\vec{a}$ 与面积无关 (给定边界线)

(d) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{a} = 0$

(e) 存在某矢量势函数 \vec{A} , 使 $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$

且 \vec{A} 不唯一, \vec{A} 可加任常数, 因为散度相减为零, 因 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

3. 一般情况下 (有源有旋场)

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}$$

4. 在不为零的无源无旋场.

例如: $\vec{F}_1 = yz\hat{x} + zx\hat{y} + xy\hat{z}$
 $\vec{F}_2 = \sin x \cos y \hat{x} - \cos x \sin y \hat{y}$ 等.

它们边界条件不同.

练习题中的补充和思考.

Prob. 1.61

(a) $\int_V (\nabla T) d\vec{a} = \oint_S T d\vec{a}$ 证法: 令 $\vec{V} = \vec{c} \cdot \vec{T}$ 代入散度定理. 注: 和梯度定理方向相同.

(b) $\int_V (\nabla \times \vec{v}) d\vec{a} = -\oint_S \vec{v} \times d\vec{a}$ 证法: $\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{c}$ 代入散度定理. 注: 和旋度定理实质相同, 左右大体同向但方向相反.

(c) $\int_V \nabla T \times d\vec{a} = -\oint_S T d\vec{l}$ 证法: $\vec{V} = \vec{c} \cdot \vec{T}$ 代入旋度定理.

(d) $\int_V [T \nabla U + (\nabla U) \cdot (\nabla T)] d\vec{a} = \oint_S (T \nabla U) \cdot d\vec{a}$ 证法: $\vec{V} = T \nabla U$ 代入散度定理. 格林恒等式

(e) $\int_V (T \nabla^2 U - U \nabla^2 T) d\vec{a} = \oint_S (T \nabla U - U \nabla T) \cdot d\vec{a}$

格林第二恒等式 证法: (a) 相互对称性.

或: $\int_V \nabla \cdot (T \nabla U - U \nabla T) d\vec{a} = \oint_S (T \nabla U - U \nabla T) \cdot d\vec{a}$.

Prob. 1.62.

矢面积: $\vec{a} = \int_S d\vec{a}$

性质: (1) 若 S 为平面, $|\vec{a}|$ 为平面 S 面积,

(2) 若 S 闭合面, 则 $|\vec{a}| = 0$.

证明: 利用 Prob. 1.61(a). 令 $T = 1$. 由 $\oint_S d\vec{a} = \int_V (\nabla T) d\vec{a} = 0 = \vec{a}$.

(3) 对于相等的边界, \vec{a} 全部相等.

证明: 构造 同一边界 的两个不同曲面 S_1, S_2 .

且曲面 $S = S_1 + S_2$ 闭合. $\Rightarrow \oint_S d\vec{a} = 0 \Rightarrow \oint_{S_1+S_2} d\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ (由于 \vec{a} 方向应取及.)

$\Rightarrow \vec{a}_1 = \vec{a}_2$.

(4) $\vec{a} = \frac{1}{2} \oint_P \vec{r} \times d\vec{l}$ 证明: 既然同一边界所有 \vec{a} 相同.



不妨向构造 S 为方便计算 $d\vec{a}$, 如下方法构造 S

以 P 为底, 原点 O 为顶, 点作一锥体, S 即为锥体上曲面.

则虽然 $d\vec{a} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{l}$

$$\therefore \vec{a} = \int_S d\vec{a} = \int_{\text{锥体}} \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{l}$$

(5) \vec{c} 为任意矢量, 有 $\vec{a} \times \vec{c} = \oint_S (\vec{c} \cdot \vec{r}) d\vec{l} \Rightarrow \vec{c} \times \vec{a} = -\oint_S (\vec{c} \cdot \vec{r}) d\vec{l} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{c} = \oint_S (\vec{c} \cdot \vec{r}) d\vec{l}$

Prob. 1.10

引入字称, 符号 \hat{P} : $\hat{P}4(x, y, z) = 4(-x, -y, -z)$

若矢量 \vec{A} 经字称变换下方向旋转 180° , 即

$$\hat{P}\vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(-x, -y, -z) = -\vec{A}(x, y, z)$$

称 \vec{A} 为真矢量.

若矢量 \vec{B} 经字称变换下方向不变, 即

$$\hat{P}\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(-x, -y, -z) = \vec{B}(x, y, z)$$

称 \vec{B} 为伪矢量.

若标量 f 经字称变换下不变, 即

$$\hat{P}f(x, y, z) = f(-x, -y, -z) = f(x, y, z)$$

称 f 为真标量.

若标量 g 经字称变换下为原来的相反数, 即

$$\hat{P}g(x, y, z) = g(-x, -y, -z) = -g(x, y, z)$$

称 g 为伪标量.

§2.3 电势

2.3.1 “势”的介绍

由于 $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, 因此 \vec{E} 从 A 到 B 的分量与路径无关.

定义: $V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 其中 $\vec{0}$ 为标准参考点, $V(\vec{r})$ 只与位置有关, 称其为电势.

两点电势差为 $V(B) - V(A) = - \int_0^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_0^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

由标量基本定理: $V(B) - V(A) = \int_0^B (\nabla V) \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

2.3.2 “势”的评论

(i) 名字: “势”是一个可怕的名宇因为它使人想到“势能”

“势”和“势能”的联系于 §2.4 说明, 在这里只说明“势”≠“势能”

电势为常数的曲面称为等电势面.

(ii) 优势: 由 V 可推出 $\vec{E} = -\nabla V$, 用 V 的优势在于 \vec{E} 是向量, 需要三个分量,

而 V 是标量, 只有一个分量.

一个分量 V 可以描述三分量 \vec{E} 的原因为 $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$,

即 $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$ 补充.

因此, 对 \vec{E} 有额外要求; 但对 V 却没有.

(iii) 参考点

参考点在选择带来的结果是电势有一个参数的不确定性.

即 $V(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_0^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = k + V(\vec{r})$

常数不影响两点电势差: $V(B) - V(A) = V(B) - V(A)$

导致不改变电场强度: $\nabla V = \nabla'$

一般地, 选择无穷远为零势电势点. (因 $V(\vec{0}) = 0$, 选择参考点等同于寻找电势为零的点.)

除非, 电荷体系延长至无穷远, 例如: 无限大平面, 无限长直导线等, 若选择无穷远点为参考点, 则电势无穷大.

补充方法为选择其它的参考点.

(iv) 叠加定理

由电场力叠加原理 $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$

得电场强度叠加原理 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$

积分, 得 $V = V_1 + V_2 + \dots$ (标量叠加法)

(v) 单位: $\frac{N \cdot m}{C}$ 或 J/C 或 V

学习目标: 熟练运用

电势定义式

从电场得到电势.

2.3.3 沃松方程和拉普拉斯方程

由 $\vec{E} = -\nabla V$, 得 $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ 称为沃松方程.
且 $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

在 $\rho=0$ 的区域, 沃松方程退化为拉普拉斯方程 $\nabla^2 V = 0$

2.3.4 局部电荷分布的电势

通常我们利用 V 来求 \vec{E} , 我们需要通过 ρ 直接求 V

利用点电荷电势: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r}$

以及叠加定理, 得 分散分布电荷电势 $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho_i}{r_i}$

连续电荷电势 $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} d\vec{q}$ 此为连续电荷常见电势: ①半径为 R 带电球壳: $V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, & r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & r \leq R \end{cases}$

例如: 对于体电荷 $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} d\vec{r}'$ ② \vec{z} 轴上带电球 $V(\vec{r}) = V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \frac{\sqrt{z^2+L^2}}{z}$ ③ 内部电荷:

面电荷 $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{r} d\vec{a}'$ ④ \vec{z} 轴上带电球 $V(\vec{r}) = V(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} (\sqrt{R^2+z^2} - z)$ ⑤ $V(r) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2} (R^2 - r^2)$

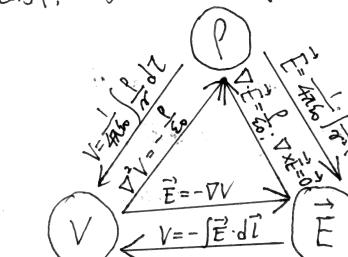
· 线电荷 $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')}{r} d\vec{l}'$ ⑥ \vec{z} 轴上带电球 $V(\vec{r}) = V(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} (\sqrt{R^2+z^2} - z)$

注意: 本节方法只适用于参考点可以选择在无穷远点的情况, 即无穷大电荷体系不适用.

学习目标: 可以熟练运用标量(积分)计算给定有限大电荷体系电势

2.3.5 边界条件

电流 I , 电场 \vec{E} , 电势 V 之间的联系:



$$\text{取高斯面如上图, } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = (E_{\text{above}} - E_{\text{below}}) \times A \\ = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

$$\Rightarrow E_{\text{above}} - E_{\text{below}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

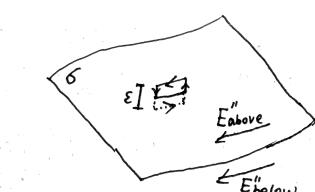
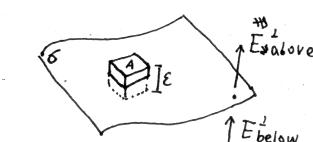
$$\text{取环路如下图, } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{above}} = \vec{E}_{\text{below}}$$

合并起来, $E_{\text{above}} - E_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ \hat{n} 为从下指向上的垂直于曲面的单位向量.

$$\text{而 } V_{\text{above}} - V_{\text{below}} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_{\text{above}} = V_{\text{below}}$$

但 $\nabla V_{\text{above}} - \nabla V_{\text{below}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ 得 $\frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 其中 $\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n}$ 表示 V 的法向导数



§2.4 静电场中的功和能量

2.4.1 移动一个电荷所需要的功

若场源电荷 q_1, \dots, q_n 不动, 将测试电荷从 a 移动到 b 点, 所做功为:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \rho \vec{E} \cdot d\vec{l} = \rho [V(b) - V(a)]$$

则 $V(b) - V(a) = \frac{W}{\rho}$, 即从 a 到 b 的电势差为从 a 移动到 b 每单位电荷所耗功.

特别地, 将测试电荷从无穷远移到下点, 所需功为:

$$W = \rho [V(r) - V(\infty)] \xrightarrow[V(\infty)=0]{} \rho V(r)$$

因此势是每单位电荷势能(创造单位电荷的能量)

2.4.2 点电荷系统的能量

为计算点电荷系统所需能量, 进行如下计算:

① 从无穷远移来 q_1 所需功: $W_1 = 0$.

② 从无穷远移来 q_2 所需功: $W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 (\frac{q_1}{r_{12}})$

③ 从无穷远移来 q_3 所需功: $W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 (\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}})$

$$\text{总功: } W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

其中 $j > i$ 为不计算相同算式两次 (例如 $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ 和 $\frac{q_2 q_1}{r_{21}}$)

$$\text{上式也可写成 (每次同乘两次再除\frac{1}{2}) } W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

因此 W 与装配电荷的顺序无关.

$$\text{上式也可写成 } W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right)$$

括号 j 为其它所有电荷在其电荷所处点的电势, 因此上式改写为

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(r_i) \quad \text{其中 } V(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

这是点电荷系统所需能量, 也是系统中所储存的能量.

2.4.3 连续电荷体系所具有的能量

将上节求和改为积分, 则 $W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$

若不知系统 ρ, V , 知系统 E, V , 则利用 $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int (\rho, E) V d\tau$

利用分部积分法 $W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \vec{E} \cdot (\nabla V) d\tau + \phi V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right]$, 利用 $\vec{E} = -\nabla V$, 得

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_V E^2 d\tau + \phi_s V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right) \quad \text{对于任何闭曲面 } S \text{ 和所构成体积 } V \text{ 成立}$$

若选择全空间为 V , 则 $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2 d\tau$

2.4.4 静电场能量的说明

(i) 复杂的不一致

利用 $W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$ 可知 $W > 0$ 但利用 $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(r_i)$, W 可以为正, 也可以为负,

(例如: 一对正负电荷能量为 $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$) 为什么会有不一致性?

原因是它们都是正确的, 但它们针对不同的问题.

$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(r_i)$ 这个式子没有考虑第一个电荷所需能量, 只计算将电荷聚在一起的能量

利用 $W = \frac{1}{2} \int E^2 d\tau$ 计算这个能量为 $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty r^4 dr = \infty$

$W = \frac{1}{2} \int E^2 d\tau$ 更为复杂, 因为它计算的是一个电荷系统全部的储存能量.

但若处理点电荷系统, 最好利用求和式, 因为我们忽略了制造点电荷自身所需能量.

事实上, 点电荷(q_i)是已经给定的, 我们需要做的只有移动它们而已. 因为我们既不可能将它们会聚到一起, 也不能将它们拆毁, 构造系统的过程是非物质性的(点电荷自身的无限能量是被电场中难以处理的循环能量, 既影响量子理论, 也影响经典理论).

不一致性来源于将求和式 $V(r_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$ 替换为 $V(r)$, 因为前者不包含 i 的电势, 后者是全部电势. 虽然由于连续电荷系统 电荷微元(极小, 以故两者无区别), 但若计算微点电荷系统, 最好选择求和式.

(ii) 能量储存场所

求和式表明能量储存于电荷, 而积分式表明能量储存于电场.

实际对于现阶段, 这是一个无答案的问题: 我可以告诉你能量大小是多少, 也可以用不同方式去计算它, 但能量储存在哪里是不恰当的.

放射论认为能量储存于电场中是有用的, 并给出能量密度定义:

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \text{单位体积的电场能.}$$

但静电场中也可以认为能量储存于电荷中. 能量密度为: $\frac{1}{2} \rho V$. 区别只是看待它们的方法.

(iii) 叠加原理

因为电场能量与场强是二次方关系, 因此电场能量不满足叠加原理.

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) d\tau = W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau. \text{ 存在交叉项.}$$

例如: 若将各处电荷扩大二倍, W 应该原来四倍.

§2.5 导体

2.5.1 基本性质

绝缘体中，电子像被短波束缚住一样，限制在特定原子附近。

金属导体中，电子可以自由运动（液体导体中，自由运动的是离子）

理想导体 可以容纳无限的

自由电荷。

由此可以得到理想导体的性质：

- 导体内部 $\vec{E} = \vec{0}$ 。原因：激发电场可以完全抵消外电场。
- 导体内部 $p = 0$ 。原因：高斯定律 $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow p = 0$ 。
- 电荷只存在于导体表面。原因：那是导体仅存的空间（或理解为“最近的排斥可以使能量最小”）
- 导体是等电势的。原因： $V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 。
- 导体外部的电场垂直于导体表面。原因：与(i)相同，若不垂直，分量会吸引导体内电荷移动。

2.5.2 感应电荷

将 $+q$ 靠近电荷量为0的导体， $+q$ 会吸引 $-q$ 电荷到靠近 $+q$ 的表面并排斥 $+q$ 电荷到远离 $+q$ 表面。
由此，整个导体受 $+q$ 吸引力。

若在导体空腔内放入 $+q$ 电荷，则空腔内电场不再为零。
但由于导体中无电场，因此在空腔表面激发出相反电荷
且 $q_{induced} = -q$ (高斯定理)

为保证导体总电荷为0， $Q_{enc} = q_{induced} + q_{left} = 0$ 。

所以，导体外表面剩余 $q_{left} = +q$ ，它们将 $+q$ 存在的痕迹传递到外部。

学习目标：利用叠加原理求导体系统电场

2.5.3 面电荷和导体所受力

由于导体内部 $\vec{E} = \vec{0}$ ，由边界条件得 $E_{outside} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ ，同时 $\sigma = -\frac{\partial V}{\partial n}$ 。

若 E 或 V 给出，则此式可用于计算电荷 σ 。

在电场中，面电荷 σ 会受到力的作用，定义压强 f 为单位面积受到的力。

子应为 σE ，但我们应使用 E_{above} 还是 E_{below} ？（对于界面）

答案应为 $f = \sigma E_{average} = \frac{1}{2} \sigma (E_{above} + E_{below})$

理由如下：

取表面微元，近似认为是平面，合场强有两部分：微元体产生场强和其它部分（其它面电荷的外部电场）产生电场。而微元体不可能对自己施加作用力，因此微元体受力只取决于 E_{other}
而 E_{other} 是连续的（可以看做元件而形成一个网）

由 $E_{above} = E_{other} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$ $E_{below} = E_{other} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$ 得 $E_{other} = \frac{1}{2} (E_{above} + E_{below}) = \frac{1}{2} E_{average}$

上面讨论对于任意分界面成立，特别地，导体 $E_{above} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$, $E_{below} = \vec{0}$

所以 $f_{normal} = \sigma E_{average} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n}$ 因此导体表面压强与面电荷有关，压强写作电场形式为： $p = \frac{\sigma}{2} E^2$

2.5.4 电容器

将 $+Q$ 放入一个导体， $-Q$ 放入另一个导体。由于它们分别成为等势体，我们可以求它们的电势差

$$V = V_+ - V_- = - \int_C^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{其中 } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\rho}{r^2} d\vec{r} dr$$

$+Q$

$-Q$

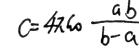
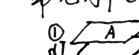
若 $+Q$ 变为原来2倍，则 \vec{E} 变为2倍（由第三章的唯一性定理）则 V 为原来2倍，因此 V 正比于 Q

设其比例为体系的电荷容量，简称电容 $C = \frac{Q}{V}$ (正电荷) 单位为 F = $\frac{C}{V}$ (电势差)

注：公式中的 Q 为正电荷， V 为电势差，若为负电荷，第一个电容器为虚构的半径无限大的球壳。
它对场无贡献，此时 Q 仅为体系电荷量， V 为导体电势（相对无穷远）

学习目标：利用定义求解电容

常见简单电容：



若要给电容器充电，需要将电子从正极板移向负极板，此过程需克服电场力做功

$$dW = V dq = \frac{Q}{C} dq$$

$$\text{那么从 } q=0 \text{ 到 } q=Q \text{ 做功为 } W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

§2.6 习题中的补充和深点

无其它新知识点，本章习题计算量较大，为强化计算能力可以再系统做一遍。

第三章 电势

3.1 拉普拉斯方程

3.1.1 介绍

静电场基本任务是计算电场 \vec{E} , 理论上, 由 $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{1}{4\pi r^2} P(\vec{r}') d\tau'$ 给出, 但此式较复杂, 除非可以 在对称性较好的情况下使用高斯定律, 一般情况下先求电势 $V(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{1}{r'} P(\vec{r}') d\tau'$$

但往往不会已知 P , 因为激发电荷可以自由移动, 上式可以等效为泊松方程:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ 和相应的边界条件.}$$

电荷 ρ 为零的区域, 有拉普拉斯方程: $\nabla^2 V = 0$.

笛卡尔坐标系中写为: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. 其解称为调和函数.

下面分别讨论一维、二维、三维拉普拉斯方程的解的性质.

3.1.2 一维拉普拉斯方程.

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \Rightarrow V(x) = mx + b.$$

包含两个不定常数 m, b . 若给定边界值, 则解固定.

性质: 1. $V(x)$ 是 $V(x+a)$ 和 $V(x-a)$ 的平均值, a 任意.

$$\text{即 } V(x) = \frac{1}{2} [V(x+a) + V(x-a)]$$

2. 拉普拉斯方程没有局部极值, 极值必存在于边界上.

3.1.3 二维拉普拉斯方程.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

类比: 被张紧的橡胶薄膜

性质: 1. V 在点 (x, y) 的值是周围值的平均值.

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R_{\text{circle}}} \int_V V d\tau$$

计算机利用此性质, 使用“松弛法”解拉普拉斯方程.

2. V 没有局部极值, 极值必存在于边界上.

类比: 张紧的薄膜上无山包也无峡谷

拉普拉斯方程给出了给定边界的最小面积.

三维

3.1.4 三维拉普拉斯方程.

性质: 1. 点 \vec{r} 的值 $V(\vec{r})$ 是圆球心为 \vec{r} 的球面上 V 值的平均值.

$$\text{即 } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{sphere}} V d\sigma = V_{\text{ave}}$$

2. V 无局部极值, 极值必存在于边界面上. (若 V 有局部极值, 则此点上的球面值的平均不再等于此点的值.)

证明引理, 直接求点电荷在坐标中心的情况, 再叠加定理即可.

推广: ① 电势:

半径为 R 的球面上的平均电势等于外部电荷作用 (V_{center}) 加上内部总电荷坐落在球心的作用 ($\frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 R}$)

$$\text{即 } V_{\text{ave}} = V_{\text{center}} + \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{可想象均匀带电球壳})$$

$$\text{证明: } V_{\text{ave}}^{\text{enc}} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int [z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta]^{\frac{1}{2}} R^2 \sin\theta dz d\phi \quad (z < R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{q}{R}$$

$$\therefore \text{总效应: } V_{\text{ave}} = V_{\text{ave}}^{\text{out}} + V_{\text{ave}}^{\text{enc}} = V_{\text{center}} + \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

② 电场:

半径为 R 的球面上的平均电场 \vec{E} 与外部电荷作用有关, 其值为球心电场大小; 内部电荷产生平均电场为零.

$$\text{即 } \vec{E}_{\text{ave}} = \vec{E}_{\text{ave}}^{\text{out}} = \vec{E}_{\text{center}} \quad (\text{可想象均匀带电球壳})$$

$$\text{证明: 先求外部电荷平均电场大小: } \vec{E}_{\text{ave}}^{\text{out}} = \frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(z-R\cos\theta)}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \cdot R^2 \sin\theta dz d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{z^2} \vec{E}_{\text{center}}$$

$$\text{再求内部电荷平均电场大小: } \vec{E}_{\text{ave}}^{\text{enc}} = \frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(z-R\cos\theta)}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \cdot R^2 \sin\theta dz d\phi \quad (z < R) = \vec{0}$$

$$\text{或利用电势: } V_{\text{ave}} = V_{\text{center}} + \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow -\nabla_z V_{\text{ave}} = -\nabla_z V_{\text{center}} - \nabla_z \left(\frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

$$\text{而 } -\nabla_z V_{\text{ave}} = -\nabla_z \frac{1}{4\pi R^2} \int V dz = \frac{1}{4\pi R^2} \int (-\nabla_z V) dz = \vec{E}_{\text{ave}}.$$

$$-\nabla_z V_{\text{center}} = \vec{E}_{\text{center}}$$

$$-\nabla_z \left(\frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ave}} = \vec{E}_{\text{ave}}^{\text{out}} = \vec{E}_{\text{center}}$$

其它推论见补充习题知识点...

3.1.5 边界条件和唯一性定理.

第一唯一性定理: 若 V 在边界面上 S 的值确定, 则在体积 V 上的拉普拉斯方程有唯一解. (边界可在无穷远处)

证明: 设有两个解满足拉普拉斯方程. $\nabla^2 V_1 = 0, \nabla^2 V_2 = 0$ 它们都满足边界值要求

考虑: $V_3 = V_1 - V_2$, 则 $\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$ 且 V_3 在边界上的值恒为零.

由于拉普拉斯方程无局部极值, 则 V_3 恒为 0. 因此 $V_1 = V_2$.

唯一性定理可以用于证明猜想. 若你猜得的结论满足: ① 满足拉普拉斯方程 ② 边界值正确, 那么它一定是正确答案.

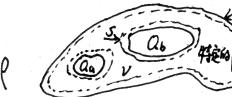
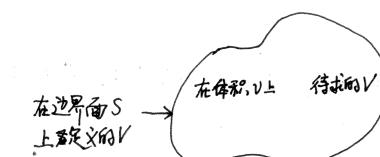
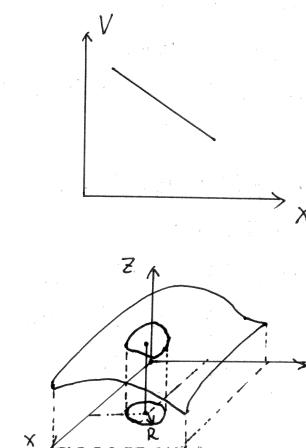
推广的第一唯一性定理: 若 ① 电荷密度给定 ② V 的边界值给定, 则该区域 V 有唯一解. (边界可在无穷远处)

证明: 与第一唯一性定理完全相同. 只要 V_1, V_2 遵从泊松方程 $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

3.1.6 导体和第二唯一性定理.

第二唯一性定理: 体积 V 被导体环境且体积 V 中给定电荷密度 ρ

若每个导体上的总电荷给定, 则电场强度有唯一解 (体积 V 可以被另一个导体包围, 也可无穷大)



证明：假设有两个电场满足条件 $\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

都符合积分形式的高斯定律 $\oint_{\text{with conducting surface}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = \frac{\rho}{\epsilon_0} A$ $\oint_{\text{with conducting surface}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \frac{\rho}{\epsilon_0} A$

同理，对外表面有： $\oint_{\text{outer boundary}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{ext}}}{\epsilon_0}$ $\oint_{\text{outer boundary}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{ext}}}{\epsilon_0}$

定义 $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ 则 $\nabla \cdot \vec{E}_3 = 0$. $\oint_{\text{each boundary}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0$

由于每个导体为等势体，因此在边界上 V_3 为常数（不必为零，因为 V_1 不一定等于 V_2 ）

利用 $\nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) = V_3 (\nabla \cdot \vec{E}_3) + \vec{E}_3 \cdot \nabla V_3 = -E_3^2$ (也可直接利用格林第二恒等式证明)

得 $\int \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) dz = \oint_{\text{boundary}} V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = - \int E_3^2 dz$

$\Rightarrow V_3 \oint_{\text{boundary}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = - \int E_3^2 dz$ 由 $\oint_{\text{boundary}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0$. 得 $\int E_3^2 dz = 0$

此积分永远等于 0. 当且仅当 $E_3 = 0$ 时积分才为零.

$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$

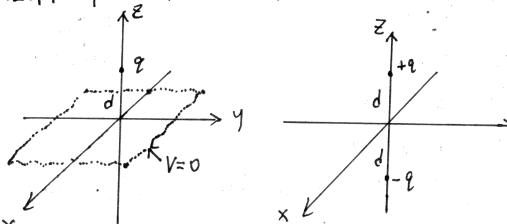
推广：体积 V 中的电荷密度 ρ 给定时，若每个边界上给出 V 的值或 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 的值时， \vec{E} 唯一确定。

证明：利用 $V_3 \oint_{\text{boundary}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = - \int E_3^2 dz$

若 V 值给定，则 $V_1 = V_2 \Rightarrow V_3 = 0$

若 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 值给定，则 $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_3 = 0$

$\Rightarrow \int E_3^2 dz = 0 \Rightarrow \vec{E}_3 = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$



3.2 图示法

3.2.1 经典图示法问题

点电荷 q 距无限大接地平板的距离为 d , 求平板上空空间的电势分布。

从数学上，此问题为求解 $z > 0$ 的泊松方程

在 $(0,0,d)$ 上有点电荷 q .

边界条件为：

1. $V = 0, z = 0$

2. $V \rightarrow 0, x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

第一唯一性定理告诉我们有且只有一个满足条件的结论，那么一定是正确答案。

考虑另一个电荷系统如右图。此系统易得 $V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right]$

若令：1. $V = 0, z = 0$ 且在 $z > 0$ 区域内有 $(0,0,d)$ 的 + q 点电荷

2. $V \rightarrow 0, x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

因此在 $z > 0$ 区域条件与第一个问题完全相同 ($z < 0$ 不同但无影响)

结论：第一个问题答案即为第二个问题答案中使 $z \geq 0$ 。图示法本质上为唯一性定理

3.2.2 激发的面电荷

若已求出电势 V ，可直接求出导体上激发的面电荷。

利用 $\sigma = \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$

此问题中，代入 $\sigma = \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}|_{z=0}$

得 $\sigma(x,y) = \frac{-q}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}$ 或 $\sigma(r) = \frac{-q}{2\pi(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}$

总电荷 $Q = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(r) r dr d\phi = -q$ 恰好等于电荷值。

3.2.3 作用力与能量

若求导体平板对点电荷作用力：

因平板系统在 q 附近的电势与无平板系统相同，因此电场力相等。

$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{z}$

由于两问题情况完全一样，因为作用力相同，但能量不一定相同。

计算能量有两种方法：

方法一：无平板系统给出 $W_{\text{无}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d}$

由于 $W = \frac{1}{2} \int E^2 dz$ 无平板系统有两相向区域而有平板系统只有其中一片区域。

$W_{\text{有}} = \frac{1}{2} \int_{z>0} E^2 dz + \frac{1}{2} \int_{z<0} E^2 dz = 2 \times \frac{1}{2} \int_{z>0} E^2 dz = 2W_{\text{无}}$

$\therefore W_{\text{有}} = \frac{1}{2} W_{\text{无}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d}$ 从无平板带来 所需能量。

方法二：可以依定义计算将

$W = \int_{\text{无限}}^d \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{无限}}^d \frac{q^2}{4z^2} dz = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d}$

由于导体极电势为零，虽然移动点电荷时激发电荷也移动，但无需做功。

作为对比，若同时引入两点电荷（无导体平板），将对它们同时做功，总数为二倍。

3.2.4 其它电像法问题

①所有电荷分布在导体平面附近都可由上述方法解决。

注：依电荷与真实电荷符号相反。

②点电荷 q 接地半径为 R 的导体球壳的球心距离为 a 的系统

考虑另一个系统由 q 与另一个点电荷 q'

且满足 $q' = -\frac{R}{a} q$, $b = \frac{R^2}{a}$ (记法: ① q 外; $q' < R$ 为内壳)

此系统电势 $V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{r} \right)$ 在球壳处为零.

注: 由于 $b < R$, 因此点电荷在球壳内, 由此可知
像电荷一定不在需要计算 V 的区域.

因为那将改变 p , 因此改变泊松方程.

散发电荷: $\delta(r) = -\frac{q}{4\pi R} (a^2 R^2) (R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta)^{-\frac{3}{2}}$

总电荷: $(q = -\frac{R}{a} q = q')$ 依然成立.

作用力: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Ra}{(a^2 - R^2)^2}$

能量: $W = \int_{-\infty}^a F \cdot dL = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{2(a^2 - R^2)}$

学习目标: 计算不同电荷-导体系统 V, σ, E, F, W (利用图解法)

③两半径为 R 的无限长圆柱轴线距离 $2d$ 且电势分别保持 $+V_0, -V_0$

考虑另一个系统, 两无限长直导线平行 x 轴并分别带有电荷 $+\lambda, -\lambda$.

此系统电势为 $V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(4\pi a)^2 + z^2}{(y^2 + z^2)}$

其等势面为圆柱, 给定 V_0 时轴位置为: $y = \frac{\exp[\frac{2\pi k V_0}{\lambda}] + 1}{\exp[\frac{2\pi k V_0}{\lambda}] - 1}$ 半径: $a = \frac{\exp[\frac{2\pi k V_0}{\lambda}]}{\exp[\frac{2\pi k V_0}{\lambda}] - 1}$

为使系统重合, 使 $\lambda = \frac{2\pi k V_0}{\ln(\frac{d}{R} + \sqrt{\frac{d^2}{R^2} - 1})}$ $a = \sqrt{d^2 - R^2}$

因此 $V(x, y, z) = \frac{V_0}{\ln(\frac{d}{R} + \sqrt{\frac{d^2}{R^2} - 1})} \cdot \ln \frac{(x + \sqrt{d^2 - R^2})^2 + y^2}{(x - \sqrt{d^2 - R^2})^2 + y^2}$

§3.3 分离变量法

本节使用数学方法直接解拉普拉斯方程

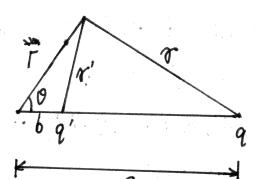
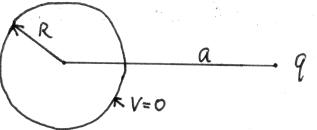
本方法适用边界 V 值或 σ 给定的内部区域

3.3.1 笛卡尔坐标系

以例题说明: 两接地导体平面平行 xz 平面, 一个在 $y=0$, 另一个在 $y=a$

左端在 $x=0$ 上用无限长条连接两平面, 其上电势为 $V_0(y)$. 求两平面

内部电势分布.



解: ①列拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ (系统与 z 无关, 因此实际上是二维问题)

②列边界条件:

(i) $V=0, y=0$

(ii) $V=0, y=a$

(iii) $V=V_0(y), x=0$

(iv) $V \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$

利用傅里叶变换: $\int_0^a \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} dy = \int_0^a V_0(y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy$

上式左右乘 $\sin \frac{n\pi y}{a}$ 并积分:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a C_n \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} dy = \int_0^a V_0(y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy$$

$$取 n=n 项: C_n \cdot \frac{a}{2} = \int_0^a V_0(y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy$$

$$即 C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy$$

③分离变量并代入拉普拉斯方程

设 $V(x, y) = X(x) Y(y)$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

④分析讨论

$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$ 只与 x 有关, 设为 $f(x)$. $\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$ 只与 y 有关, 设为 $g(y)$. 即 $f(x) + g(y) = 0$

因此当 x, y 变化时, 只有 $f(x), g(y)$ 分别为常数才符合条件.

$$\text{设 } \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1, \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2, C_1 + C_2 = 0$$

这里设 $C_1 \geq 0$, 则 $C_2 \leq 0$. (原因在后) 则 $C_1 = k^2, C_2 = -k^2$ 用边界条件定.

$$\Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 \Rightarrow \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y \Rightarrow \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = C \sin ky + D \cosh ky$$

$$\text{⑤边界条件: } V(x, y) = (A e^{kx} + B e^{-kx})(C \sin ky + D \cosh ky)$$

$$(i) \Rightarrow A = 0 \Rightarrow V(x, y) = C e^{-kx} \sin ky$$

$$(i) \Rightarrow D = 0.$$

$$(ii) \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a} (n=1, 2, 3, \dots)$$

之所以设 $C_1 \geq 0, C_2 \leq 0$, 因为这里若 $C_1 < 0, C_2 > 0$, 则 X 为 $\sin x$ 形式, 永远不会趋近 0.

Y 为 e^{-ky} 形式, 也不会在 $y=0, y=a$ 两点同时为零.

$n=0$ 不合适, 因为所有空间电势为零.

⑥线性组合, 傅里叶展开

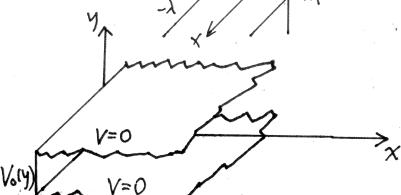
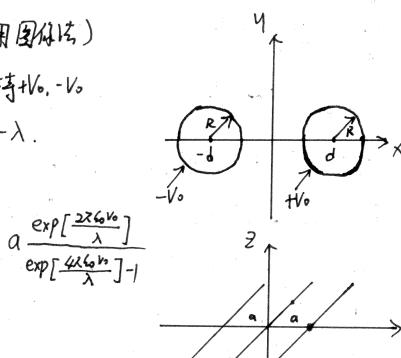
为满足条件 (iii) 进行线性叠加. $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为常数.

则边界条件叠加满足, 且 $\nabla^2 V = \alpha_1 \nabla^2 V_1 + \alpha_2 \nabla^2 V_2 = 0$ 满足.

因此, 普通结果 $V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}$

代入边界 (iii) $V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{a} = V_0(y)$

(下接虚线框内)



3.3.2 球坐标系

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

假定问题有 ϕ 位角对称性，则 V 与 ϕ 无关， R]

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

寻找形式 $V(r, \theta) = R(r) H(\theta)$ 形式方程。

$$\text{代入上式进行分离变量: } \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{H} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dH}{d\theta} = 0$$

$$\text{设 } \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) \quad \frac{1}{H} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dH}{d\theta} = -l(l+1), \quad (l \text{ 整数})$$

$$\text{半径方程: } \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} = l(l+1)R$$

即 $r^2 R'' + 2r R' - l(l+1)R = 0$ 为 Euler 方程。

$$\text{令 } t = \ln r \quad r = e^t \quad R \left[\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dr} \cdot \frac{dt}{dr} = e^{-t} \frac{dR}{dt}, \quad \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{dR}{dt} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} - l(l+1)R = 0. \quad \text{对应特征方程: } \lambda^2 + \lambda - l(l+1) = 0 \quad \text{即 } \lambda_1 = l, \quad \lambda_2 = -l-1$$

$$\text{即 } R(t) = A \exp(lt) + B \exp[-(l+1)t] = A r^l + \frac{B}{r^{l+1}}$$

$$\text{角方程中: } \frac{1}{H} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dH}{d\theta} = -l(l+1) \sin \theta \quad (H)$$

$$\text{其解为变量为 } \cos \theta \text{ 的勒让德方程: } H(\theta) = P_l(\cos \theta)$$

$$\text{其中 } P_l(x) \text{ 被罗德里格方程定义: } P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

记法: 记住 $\left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$, 前面的系数 $\frac{1}{2^l l!}$ 为使 $P_l(1) = 1$ 无特殊意义。

特征: ① $P_l(x)$ 为 x 的 l 次多项式 ② 若 l 为奇, $P_l(x)$ 为奇函数; 若 l 为偶, $P_l(x)$ 为偶函数。

③ l 可能为非负整数。

$$\text{因此: } V(r, \theta) = \left(A r^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\text{代入边界条件, 总解为: } V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

例: 若将 $\sigma_0(\theta)$ 电荷固定在半径为 R 球壳上, 求球壳内外电势。

$$\text{由内部边界条件: } r > 0, \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow B=0 \Rightarrow V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < R.$$

$$\text{由外部边界条件: } r \rightarrow \infty \quad V \rightarrow 0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r > R.$$

$$\text{由 } r=R \text{ 处边界条件: ① } V \text{ 连续: } \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \alpha) \Rightarrow B_l = A_l \cdot R^{l+1}$$

$$\text{② } E \text{ 非连续: } \Rightarrow \left(\frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l+1} P_l(\cos \alpha) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$\text{利用傅立叶变换: } A_l = \frac{1}{2\pi R^{l+1}} \int_0^\pi \sigma_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\text{若 } \sigma_0(\theta) = k \cos \theta = k P_1(\cos \theta) \text{ 则 } A_1 = \frac{k}{2\pi R} \Rightarrow V(r, \theta) = \frac{k}{3\pi R} r \cos \theta (r < R), \quad \int_1^r P_l(x) P_l(x) dx = \int_0^r P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\text{对于球外: } V(r, \theta) = \frac{kR^3}{3\pi R} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (r > R)$$

此结论经常用到需记住

学习目标: 分离变量解 球坐标系下拉普拉斯方程, 注意不同边界条件: 电荷、电场、电势的处理方法, 记住勒让德方程的性质。

3.4 多项式展开

3.4.1 长距离下的近似势

若距离电荷分布极远, 则电荷分布可似近似成点电荷, 电势大约为 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ 其中 Q 为总电荷。若 Q 为零, 则需考虑下面的项。

下面考虑偶极子电势: 两土 q 电荷 分开 距离为 d 。

求离偶极子无穷远电势。

设 r_- 为距- q 距离, r_+ 为距+ q 距离

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

$$\text{由余弦定理 } r_{\pm}^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \mp r d \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)$$

若考虑 $r \gg d$, 第三项忽略

$$\text{则 } \frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

$$\text{因此 } \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \approx \frac{d}{r^2} \cos \theta \Rightarrow V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$$

因此偶极子势按 $\frac{1}{r}$ 减小, 下降比 $\frac{1}{r^2}$ 快。

同理, 电四极子按 $\frac{1}{r}$ 减小; 电八极子按 $\frac{1}{r^3}$ 减小。

$$\text{任意系统电势可写为 } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{all}} p(\vec{r}') d\tau'$$

$$\text{余弦定理 } r^2 = r'^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta \right]$$

$$\Rightarrow r = r \left(1 + \epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{其中 } \epsilon = \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \theta \right) \ll 1$$

$$\text{进行泰勒展开: } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(1 + \epsilon \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \theta \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \theta \right)^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2} \right) + \dots \right] = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r'}{r} \right) P_0(\cos \theta) + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) + \dots \right]$$

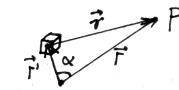
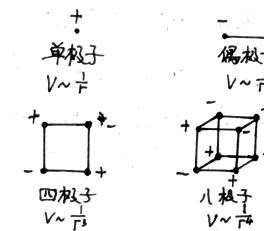
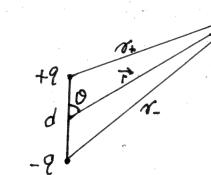
因此 $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta)$ 上式为勒让德多项式的生成函数。

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\text{all}} P_n(\cos \theta) p(\vec{r}') d\tau'$$

$$\text{或写为: } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int p(\vec{r}') d\tau' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta p(\vec{r}') d\tau' + \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) p(\vec{r}') d\tau' + \dots \right]$$

\downarrow 单极子贡献 \downarrow 偶极子贡献 \downarrow 四极子贡献

后一项比前一项为无穷小量。



3.4.2 单极子项和偶极子项

$$\text{单极子项: } V_{\text{mon}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{r}$$

其中 $\alpha = \int p d\tau$ 是系统总电荷

若总电荷 $\alpha=0$, 偶极子项占主导地位

$$\text{偶极子项: } V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos\alpha p(\vec{r}') d\tau'$$

$$\text{而 } r' \cos\alpha = \hat{r}' \cdot \hat{r}$$

$$\Rightarrow V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \int \hat{r}' \cdot \hat{p} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

其中 $\hat{p} = \int \hat{r}' p(\vec{r}') d\tau'$ 为电偶极矩

$$\text{分散电荷系统 } \vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i$$

对于 实验 的偶极子: $\vec{p} = q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q\vec{d}$ 其中 \vec{d} 从 $-q$ 指向 $+q$.

理想的偶极子: $d \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$, 使 $p=qd$ 固定

3.4.3 坐标原点对展开项的影响

$$\text{由 } V_{\text{mon}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{r} \quad V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \text{ 且 } \alpha = \int p(\vec{r}') d\tau' \quad \hat{p} = \int \hat{r}' p(\vec{r}') d\tau'$$

知 移动坐标系原点, α 不改变, \hat{p} 改变.

因此 $V_{\text{mon}}(\vec{r})$ 不变, $V_{\text{dip}}(\vec{r})$ 改变.

$$\vec{p} = \int \hat{r}' p(\vec{r}') d\tau' = \int (\vec{r} - \vec{a}) p(\vec{r}') d\tau' = \int \hat{r}' p(\vec{r}') d\tau' - \vec{a} \int p(\vec{r}') d\tau'$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \vec{p} - Q\vec{a}$$

特别: 若 $Q=0$, 则 $\vec{p}=\vec{p}$, 即偶极矩不随原点位置变化.

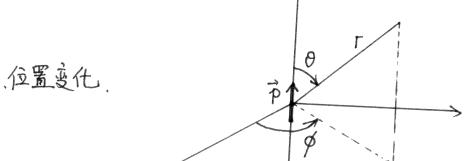
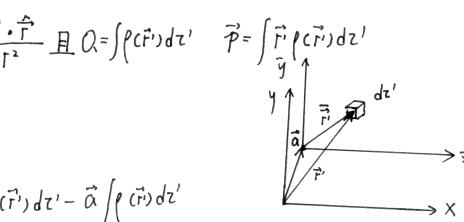
3.4.4 偶极子的电场强度

$$\text{由 } V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{对于 } r \neq 0, E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$



$r \rightarrow 0$ 时 先计算 $\nabla(\frac{p \cos\theta}{r^2})$ 在 $r \rightarrow 0$ 的值.

由 Prob. 1.61 (a)

$$\int_V (\nabla \frac{p \cos\theta}{r^2}) d\tau = \oint_S \frac{p \cos\theta}{r^2} d\vec{a}$$

$$d\vec{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

$$\therefore Ax = \oint_S \frac{p \cos\theta}{r^2} \times r^2 \sin\theta \sin\theta \cos\phi d\theta d\phi = \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0$$

同理 $Ay=0$

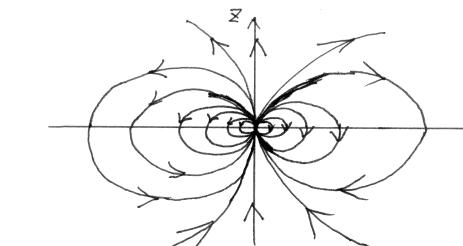
$$Az = \oint_S \frac{p \cos\theta}{r^2} \times r^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi = \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2}{3} x^2 \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{因此 } \int_V (\nabla \frac{p \cos\theta}{r^2}) d\tau = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \nabla \frac{p \cos\theta}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} \delta^3(\vec{r}) \hat{z}$$

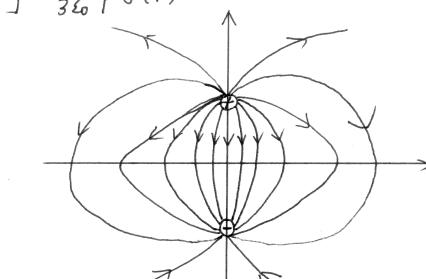
$$\text{则 } \vec{E} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times \frac{4\pi}{3} \delta^3(\vec{r}) \hat{z} = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \delta^3(\vec{r}) \hat{z}$$

$$\text{总的来说 } \vec{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}) - \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \delta^3(\vec{r}) \hat{z}$$

$$\text{另一种写法: } \vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\hat{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}] - \frac{1}{3\epsilon_0} P \delta^3(\vec{r})$$



理想偶极子电场



实际偶极子电场

$r \rightarrow 0$ 的 $S^3(\vec{r})$ 项可如下不严谨地推出.

由实际偶极子: 观察 O 点电场强度

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(\frac{d}{2})^2} \times 2 = -\frac{8q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{d^2}$$

因此 两电荷为直径的空间内总电场为: $\vec{E}_0 \times V = -\frac{8q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8q}{d^2} \times \frac{4\pi}{3} (\frac{d}{2})^3 = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$

再向理想偶极子趋近, 则 $\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \delta^3(\vec{r})$. 理由为 Prob. 3.47

3.5 题中的补充知识点

Prob. 3.47. 续 3.1.4 节推论 (考虑均匀带电球体)

3.1.4 节主要求球面而言的平均电场 这一题求的是整个球体内部的平均电场强度.

结论: 半径为 R 的球体内的平均电场 $\vec{E}_{\text{ave}} = \frac{1}{3\pi R^3} \iiint \vec{E} d\tau$

① 若场源电荷位于球内, 则 $\vec{E}_{\text{ave}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{R^3}$ (利用理想偶极子 \vec{p})

② 若场源电荷位于球外, 则 $\vec{E}_{\text{ave}} = \vec{E}_{\text{center}}$

证明: 首先证明位于 \vec{r} 的 q 产生的平均电场等于均匀带电球体 $P = -\frac{q}{3\pi R^3}$ 在 \vec{r} 产生的电场

$$\vec{E}_{\text{ave}} = \frac{1}{3\pi R^3} \iiint \vec{E} d\tau = \frac{1}{3\pi R^3} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{q}{3\pi R^3}\right) \frac{(-\hat{r})}{r^2} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q}{r^2} (-\hat{r}) d\tau = \vec{E}(\vec{r})$$

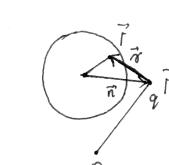
$$\text{后者可由高斯定理解决: } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho \cdot \frac{4\pi}{3} \pi r^3 \hat{n}}{3\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2 \hat{n}} = -\frac{q}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \hat{n} = -\frac{q}{3\epsilon_0 R^3} \frac{\vec{r}}{R^2} \hat{n} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

再叠加定理即可.

② 同①证法, 位于 \vec{r} 的 q 产生的平均电场等于 $P = -\frac{q}{3\pi R^3}$ 在 \vec{r} 产生电场 (与 \vec{r} 在球内外无关)

$$\text{后者由高斯定理: } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{P \cdot \frac{4\pi}{3} \pi r^3 \hat{n}}{3\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2 \hat{n}} = -\frac{P r^3}{3\epsilon_0 R^3} \hat{n} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^3 \hat{n}}{3\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\hat{n})}{R^2} = \vec{E}_{\text{center}}$$

再叠加定理即可.



Prob. 3.50 格林相互作用定理.

对于 有限空间中的 $\rho_1(\vec{r})$ 和 $\rho_2(\vec{r})$ 分别产生势 $V_1(\vec{r})$, $V_2(\vec{r})$

ρ_1, ρ_2 完全无关.

$$\text{证明: } \int_{\text{all space}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{all space}} \rho_2 V_1 d\tau$$

证明: 计算 $\int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau = A$

$$\textcircled{1} \quad \vec{E}_1 = -\nabla V_1$$

$$A = - \int \nabla V_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau = \int V_1 (\vec{E}_1 \cdot d\vec{s}) - \oint V_1 \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \int V_1 \rho_2 d\tau - 2 \int \rho_1 \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int V_1 \rho_2 d\tau$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{E}_2 = -\nabla V_2$$

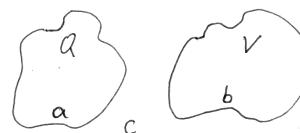
$$A = - \int \vec{E}_2 \cdot \nabla V_1 d\tau = \int (\nabla V_2 \cdot \vec{E}_1) d\tau - \oint V_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \int V_2 \rho_1 d\tau - \oint V_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int V_2 \rho_1 d\tau$$

$$\Rightarrow \int V_1 \rho_2 d\tau = \int V_2 \rho_1 d\tau$$

应用:

1. 考虑两分开的导体 a, b. 若只给 a 充电 Q , b 导体电势为 V_{ba} .

若只给 b 充电 Q , a 导体电势为 V_{ab} .



证明 $V_{ab} = V_{ba}$

$$\text{证明: 情况1: 给a充 } \int_{\text{all space}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_a \rho_1 V_2 d\tau + \int_b \rho_1 V_2 d\tau + \int_c \rho_1 V_2 d\tau = Q V_{ba} + 0 + 0 = Q V_{ba}$$

$$\int_{\text{all space}} \rho_2 V_1 d\tau = \int_a \rho_2 V_1 d\tau + \int_b \rho_2 V_1 d\tau + \int_c \rho_2 V_1 d\tau = 0 + Q V_{ab} + 0 = Q V_{ab}.$$

$$\Rightarrow V_{ab} = V_{ba}.$$

2. 对于 情况1: 使用实际情况, 对于情况2: 移走电荷 q, 使其中一个导体电势为 V_0 .

求图中感应电荷:

$$(a) \int_{\text{all space}} \rho_1 V_2 d\tau = Q_1 V_0 + q \frac{V_0(d-x)}{d} = \int_{\text{all space}} \rho_2 V_1 d\tau = 0$$

$$\Rightarrow Q_1 = q \frac{x-d}{d} \quad \text{同理 } Q_2 = -\frac{q(x-d)}{d}$$

$$(b) \text{对 } \vec{E} \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow V \propto \frac{1}{r} \Rightarrow V(a) = V_0 + B \quad \text{由 } V(b) = 0 \Rightarrow V = \frac{ab}{b-a} \frac{V_0}{r} + \frac{aV_0}{a-b}$$

$$\Rightarrow Q_a V_0 + q \left[\frac{abV_0}{(b-a)r} + \frac{aV_0}{a-b} \right] = 0$$

$$\Rightarrow Q_a = \frac{qa}{b-a} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \quad \text{同理 } Q_b = \frac{qb}{b-a} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$$

Prob. 3.52

$$\text{电四极子可写为 } V_{quad}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}$$

$$\text{其中 } Q_{ij} = \frac{1}{2} \int [3\vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_j - (\vec{r}')^2 \delta_{ij}] \rho(\vec{r}') d\tau' \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

又有形式:

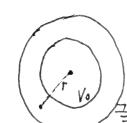
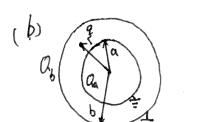
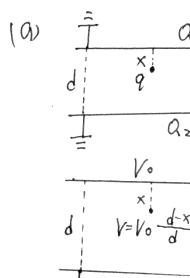
$$V_{mon} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} ; \quad V_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum r_i p_i}{r^2} ; \quad V_{quad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}}{r^3}$$

Q 为标量; \vec{P} 为向量; (Q_{ij}) 为二阶张量.

$$V_{oct} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i \hat{r}_j \hat{r}_k Q_{ijk}}{r^4} \quad \text{其中 } Q_{ijk} = \frac{1}{2} \int [5\vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_j \cdot \vec{r}'_k - (\vec{r}')^2 (\vec{r}'_i \delta_{jk} + \vec{r}'_j \delta_{ik} + \vec{r}'_k \delta_{ij})] \rho(\vec{r}') d\tau'$$

Prob. 3.24. 极坐标下拉普拉斯方程的解

$$V(s, \phi) = a_0 + b_0 \ln s + \sum_{k=1}^{\infty} [s^k (a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi) + s^{-k} (c_k \cos k\phi + d_k \sin k\phi)]$$



第四章 物质中的电场

§4.1 极化

4.1.1 电介质

物质可分为导体和绝缘体(电介质)

在导体中,电子可以自由移动;在电介质中,电荷被原子或分子束缚,像被皮带束缚,只能绕原子或分子轻微移动.外电场对电介质 原子或分子的电荷分布的作用有拉伸和旋转.下面将分别研究.

4.1.2 感应偶极子

将中性原子置于外电场 \vec{E} 中,原子核有沿电场方向位移趋势,电子有相反运动趋势.因此外场作用力使它们分开,它们的相互作用力使它们聚合,因此结果达到一个平衡.

即原子被极化:正电荷轻微移向一边,负电荷轻微移向另一边.

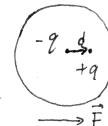
现在每个原子具有小偶极矩: $\vec{P} = \alpha \vec{E}$ 方向与电场方向相同.

其中 α 称为原子的极化率

在分子中,沿不同轴线的极化率大小不同.

此时

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\alpha_{ij}) \text{ 为分子极化张量}$$



4.1.3 极性分子排列

对于极性分子,例如 H₂O 分子,由于正电荷中心与负电荷中心不重合,因此在外场中受到力矩作用.

$$F_+ = q\vec{E} \quad F_- = -q\vec{E}$$

$$\vec{N} = (\vec{F}_+ \times \vec{F}_-) + (\vec{F}_- \times \vec{F}_+) = [(\frac{\vec{d}}{2}) \times (q\vec{E})] + [(-\frac{\vec{d}}{2}) \times (-q\vec{E})] = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

若电场不均匀 $F_+ \neq F_-$, 极性分子还会受到力的作用.

$$\vec{F} = \vec{F}_+ - \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q(\Delta \vec{E})$$

$$\text{而 } \Delta \vec{E}_x = (\nabla E_x) \cdot \vec{d} \text{ 则 } \Delta \vec{E} = (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q(\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad \text{不考虑 } \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

理想偶极子 \vec{p}

在电场 \vec{E} 中

其电势为: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ (磁场中为 $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$)

证明: 考虑从 $\theta=0$ 到 θ 的旋转过程.

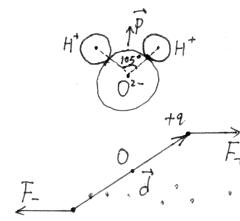
$$U(\theta) - U(0) = \int_0^\theta p E \sin \theta d\theta = -p E \cos \theta + p E$$

$$\text{令 } U(\theta) = p E \quad \text{则 } U(\theta) = -p E \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\text{而 } \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = 0 + 0 + 0 + (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (\text{自行展开})$$

$$\Rightarrow U(\theta) - U(0) = - \int_0^\theta \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) \cdot d\vec{l} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(0) + \vec{p} \cdot \vec{E}(\theta)$$

$$\Rightarrow U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



4.1.4 极化

当电介质原子或非极性分子放入外电场中,受力电荷偏移形成偶极子,方向与电场方向相同.

当极性分子放入外电场中,极性分子自身的偶极矩受力矩旋转,趋向与电场方向相同.

而热运动的随机性与此进程抗衡.

以上两种机制产生相同的结果,即产生大量偶极子且指向与电场相同,此时称材料被极化

用于描述被极化的程度,使用 \vec{P} 表示单位体积的偶极矩总量,称为极化强度

§4.2 极化物体产生的电场

4.2.1 受约束的电荷

下面求极化物体产生的电场

$$\text{对于单个偶极子, } V(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\text{对于电介质, } \vec{P} = \vec{P} d\tau'$$

$$\text{则 } V(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P}(\vec{P}) \cdot \hat{r}}{r^3} d\tau'$$

$$\text{利用 } \nabla'(\frac{1}{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2} \Rightarrow V(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \vec{P}(\vec{P}) \cdot \nabla'(\frac{1}{r}) d\tau'$$

$$\text{分部积分 } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \nabla'(\frac{\vec{P}}{r}) \cdot d\tau' - \int \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\tau' \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{1}{r} \vec{P} \cdot d\vec{a}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\tau'$$

第一项为面电荷电势 $\phi_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ 第二项为体电荷电势 $P_b = -\nabla \cdot \vec{P}$

上式变为 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\phi_b}{r} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P_b}{r} dz' \quad \text{因此计算电介质电势转化为分别求面电荷、体电荷电势转化之后,可用其它方法求电场(例如高斯定理)}$

例: 均匀极化球的电势、电场强度.

$$\phi_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_c \cos \theta \quad P_b = 0$$

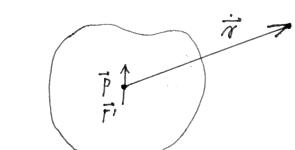
利用第3章3.3.2结论

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P_c}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & r \leq R \\ \frac{P_c}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & r > R \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{球内电场均匀: } \vec{E} = -\nabla V = -\frac{P_c}{3\epsilon_0} \frac{\hat{z}}{r^2} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\text{球外电势等于位于原点的偶极子: } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{r^2}$$

$$\text{其中 } \vec{P} = \vec{P} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \text{ 为总偶极矩}$$



学习目标: 求面电荷、体电荷,进而求相应电场、电势.

4.2.2 约束电荷的物理解释

ρ_b 和 σ_b 完全代表真实的电荷积累.

考虑偶极子排列成的长线，电荷与附近的电荷相抵消

只剩 两端无电荷抵消.

考虑轴线平行于极化强度 \vec{P} 的圆柱电介质

切下来的一小块 总偶极矩 $\vec{P} = \vec{P} A d = q \vec{d}$

$$\Rightarrow q = PA$$

因此端面电荷 $\sigma_b = \frac{q}{A} = P$

若端面倾斜. $\sigma_b = \frac{q}{A_{end}} = \frac{q}{(A \cos \theta)} = \frac{q \cos \theta}{A} = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \hat{n}$

因此等同于面电荷 $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$

若极化强度不均匀，就会在材料内部累积约束电荷

数量等同于表面电荷但电性相反

$$\text{则 } \int_S \rho_b d\sigma = - \oint \vec{P} \cdot d\vec{\alpha} = - \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV$$

$$\text{因此 } \rho_b = - \nabla \cdot \vec{P}$$

4.2.3 电介质中的电场

由于电介质中的电场实际上是复杂的，我们计算的实际是微观电场的平均值.

经计算，微观电场的平均值恰巧等于宏观电场的准确值.

4.3 电位移

4.3.1 电介质中的高斯定理

现在我们将由自由电荷引起的电场(外电场)和约束电荷引起的电场一起看待.

$$\text{总电荷密度: } \rho = \rho_f + \rho_b$$

$$\text{由高斯定理: } \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}' = \rho = \rho_b + \rho_f = - \nabla \cdot \vec{P} + \rho_f$$

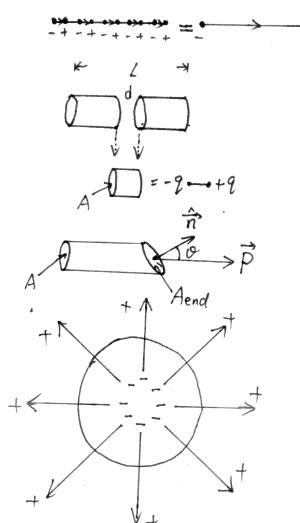
其中 \vec{E}' 为总电场，包括外电场和约束电荷产生电场.

$$\text{则 } \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}' + \vec{P}) = \rho_f$$

定义电位移: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}' + \vec{P}$. 则电介质中的高斯定理 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$

积分形式: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{\alpha} = Q_{fenc}$ 其中 Q_{fenc} 为闭合体积内总自由电荷

此定理优势为：只与自由电荷有关，而我们只能控制自由电荷，我们无法操纵约束电荷



4.3.2 一个欺诈的对比

上式看起来像高斯定律，只要把 ρ 替换成 ρ_f ，把 E' 替换成 D .

因此可能错误地认为 D 就像 E' ，只是它的源是什么非 ρ .

原因在于没有对于 D 的库伦定律： D 不玩 $[F = qE]$ ，也没有 D 的叠加原理.

只知道散度不足以定义向量场，还需要知道旋度.

E 的旋度在静电场中为零，但 D 的旋度不一定为零.

$$\nabla \times D = \nabla \times (\epsilon_0 E' + P) = \nabla \times P$$

D 的旋度有时为零但更多时候不为零.

因为 $\nabla \times D \neq 0$ ，因此 D 无法写成标量的梯度，因此 D 没有相应的势.

思路：如果要求计算电位移，首先观察对称性. 若问题中有球对称、圆柱对称或平面对称，那么可由高斯定理直接得出（因为这样的体系 $\nabla \cdot D$ 自动为零，由仅用对称性得结论，可不必担忧旋度）. 若对称性不存在，必须考虑其他方法，绝不能假定 D 由电荷唯一决定.

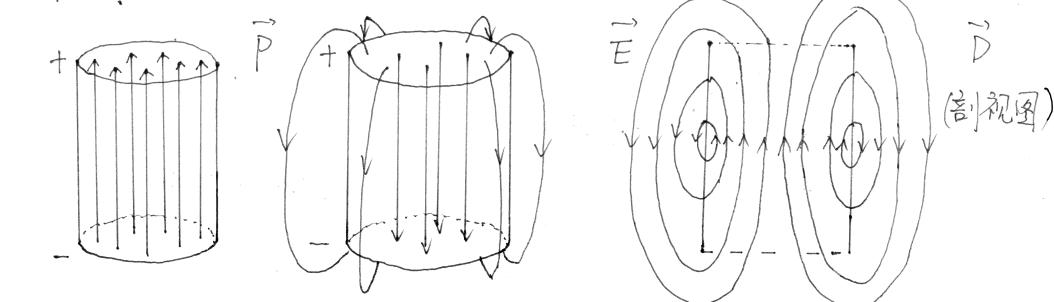
4.3.3 边界条件

用 2.3.5 节的办法，得 $D_{above}^\perp - D_{below}^\perp = \rho_f$

$$\text{同理 } D_{above}'' - D_{below}'' = P_{above}'' - P_{below}'' \quad \text{注意这里带有向量标记.}$$

注： E 线终点为电荷， D 线终点为自由电荷

例：画出圆柱形极化电介质的 P , E , D 草图



§4.4 线性电介质

4.4.1 极化率、介电常数和相对介电常数

为简化研究，假设极化强度与电场成正比：

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

其中 χ_e 称为极化率（量纲为1），通常认为导体 $\chi_e \rightarrow \infty$ ；真空 $\chi_e = 0$ 。用于对结果进行检查，满足上式的材料称为线性电介质。

注意，上式中的 \vec{E} 是总电场：可能一部分由自由电荷引起，另一部分由自身极化引起。

在线性电介质中，有 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$

所以 \vec{D} 和 \vec{E} 成比例 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

其中 $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ 称为材料的介电常数

定义无量纲量 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$ 称为材料的相对介电常数。

学习目标：利用电位移计算电介质中电场。

例：半径为 a 的带电 Q 电荷量的金属球，被介电常数 ϵ 且外径为 b 的线性电介质包裹。

求中心电势

由于球对称，所以可以直接计算 \vec{D}

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{r} \quad (\text{对于 } r > a \text{ 所有点})$$

$$\text{得 } \vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{r}, & a < r < b, \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2} \hat{r}, & r > b. \end{cases}$$

$$\text{则 } V = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^R \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_R^{\infty} (0) dr = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon_0 a} - \frac{1}{\epsilon_0 R} \right)$$

$$\text{再计算约束电荷 } \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi R^2} \hat{r}$$

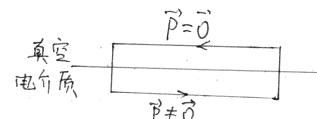
$$\text{在电介质中，} P_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0.$$

$$G_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon_0 b^2} & \text{外表面} \\ -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon_0 a^2} & \text{内表面} \end{cases}$$

下面考虑 \vec{E} 和 \vec{D} 平行度的问题，即 $\nabla \cdot \vec{D}$ 是否为零的问题（4.3.2节在线性电介质中）

尽管 \vec{P} 和 \vec{D} 正比于 \vec{E} ，但是 $\nabla \times \vec{D}$ 不一定像 $\nabla \times \vec{E}$ 一样永远为零。

考虑在边界附近的闭合曲线，对 \vec{P} 的积分不一定为零，但对 \vec{D} 要求一定为零，这是因为两介质 $\epsilon_0 \chi_e$ 是不同的。



几种 $\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{P} = 0$ 的情况（线性电介质）：

① 若空间被同种各向同性的线性电介质填满

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_f \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0$$

③ 分界线在 $E=0$ 处

此时 \vec{D} 可以认为是从自由电荷发出，而电介质不存在，即不必考虑约束电荷效果。

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{vac}$$

其中 \vec{E}_{vac} 是相同自由电荷分布在没有在任何电介质中的电场

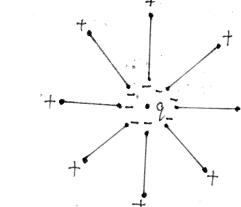
$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{1}{\epsilon_f} \vec{E}_{vac}$$

例如：若一个自由电荷被固定在大的电介质中，电场为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

附近电荷受到的力将减少，但库仑定律没有问题

是因为电荷附近的电介质壳层感应出相反符号的电荷。



晶体更容易在某些方向极化，因此写为

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} X_{xx} & X_{xy} & X_{xz} \\ X_{yx} & X_{yy} & X_{yz} \\ X_{zx} & X_{zy} & X_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \text{其中 } (X_{ij}) \text{ 称为极化率张量.}$$

4.4.2 线性电介质中的边界值问题

在（同种各向同性）电介质中，约束电荷与自由电荷成比例（不适用于面电荷）

$$P_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \epsilon_f$$

因此，除非有自由电荷埋在电介质中，所有电荷必然只能存在于表面。

在这种情况下，电势满足拉普拉斯方程，第三章所有方法在此都适用。

为方便使用，重写边界条件，使方程中只含自由电荷。

$$\text{由 } D_{above}^+ - D_{below}^+ = \epsilon f \quad \text{得 } E_{above}^+ - E_{below}^+ = \epsilon f$$

$$\text{或写为 } E_{above} \frac{\partial V_{above}}{\partial n} - E_{below} \frac{\partial V_{below}}{\partial n} = -\epsilon f$$

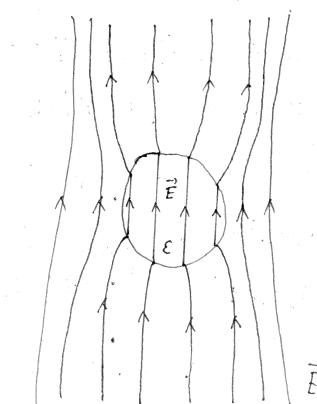
而电势自身连续： $V_{above} = V_{below}$

例1：分离变量法：线性电介质球置于匀强外场后，求球内电场。

边界条件：(i) $V_{in} = V_{out}$ $r=R$

$$(ii) \sum \frac{\partial V_{in}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{out}}{\partial r} \quad r=R$$

$$(iii) V_{out} \rightarrow -E_0 \cos \theta \quad r \gg R$$



由 $\Gamma \rightarrow 0$ 得 $V_{in}(\Gamma, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^{l+1} P_l(\cos\theta)$
 得 $V_{out}(\Gamma, \theta) = -E_0 R \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$
 $\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^{l+1} P_l(\cos\theta) = -E_0 R \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$

因此 $\begin{cases} A_l R^{l+1} = \frac{B_l}{R^{l+1}}, & l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \end{cases}$

(ii) $\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l+1} P_l(\cos\theta) = -E_0 \cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta)$
 因此 $\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l+1} = -\frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}}, & l \neq 1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} A_l = -E_0 - \frac{2 B_1}{R^3} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A_l = B_l = 0, & l \neq 1 \\ A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0, & B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0 \end{cases} \Rightarrow V_{in}(\Gamma, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \Gamma \cos\theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$

得 $\vec{E}_{in} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$

例2：电像法

假设在 $z=0$ 平面以下用极化率 χ_e 的材料填充。
 计算距离平面 d 处的点电荷 q 受力。

解：由于电荷 q 的存在，此系统不具有平移对称性，
 因此不能用 D 来做，且 $\vec{E} \times \nabla \chi_e \neq 0$ 。

采用 E 场来处理。

首先计算约束电荷： $\rho_b = 0$ $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \chi_e E_z$ 其中 E_z 为 $z=0$ 处（电介质内的）电场分量
 这个场部分取决于 q ，另一部分取决于约束电荷。

由库仑定律，前者贡献为 $E_z^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2+d^2} \cos\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$

约束电荷产生的电场（电介质内的点） $E_z^{(2)} = -\frac{\sigma_b}{2\epsilon_0}$ （注：这里用 ϵ_0 ，因为电介质的影响转移到了约束电荷上）

$\Rightarrow \sigma_b = \epsilon_0 \chi_e \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\epsilon_b}{2\epsilon_0} \right]$ 解出 $\sigma_b = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2} \right) \frac{qd}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$

总约束电荷为 $q_b = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2} \right) q = \frac{k_e d}{2} \int_d^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{k_e d}{2} (-2x^{-\frac{1}{2}}) \Big|_d^{+\infty} = k_e q \Rightarrow q_b = k_e q$
 再利用电像法，移除电介质并用位于 $(0, 0, -d)$ 电荷量 q_b 的电荷代替

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right], z > 0$

因为像电荷不在所考察区域中，因此若考察 $z < 0$ 区域，等效于位于 $(0, 0, d)$ 的电

荷量为 $(q+q_b)$ 代替。

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q+q_b}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} \right], z < 0$$

再代回边界条件检验成立。

$$\text{最后得 } \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_b}{(2d)^2} \hat{z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2} \right) \frac{q^2}{4d^2} \hat{z}$$

启示：①电介质带来两种思考角度：若存在完美对称性使 $\vec{E} \parallel \nabla \chi_e$ ，则可以利用 D 类似高斯定理直接求解而不用计算约束电荷且认为电介质的影响转移到 ϵ 不同；若无完美对称， \vec{E} 不平行于 $\nabla \chi_e$ ，就必须在 E 场解决，不用计算 D 且认为电介质的影响转移到约束电荷，最后化为不同电荷的合场，必要时辅以特殊手法，例如电像法、分离变量法。

②电像法必须遵守的规则：(i) 像电荷不能放入所考察电势的区域内

(ii) 像电荷的大小必须等于区域里的总电荷量

例3：考虑例2中若 $z > 0$ 区域中也充满线性电介质但电极化率为 χ_e' ，求各处电势

本题存在四种电荷分布：自由电荷 q ，约束电荷 q_b ，两电介质界面

约束电荷 σ_b, σ_b' 且由于电介质无穷大，无需使每种电介质极化总电荷为零

先求 q_b 。由 $q_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e'}{\epsilon} \vec{E} = -\frac{\chi_e'}{1+\chi_e'} q$

现将 q 和 q_b 整体看： $q+q_b = q - \frac{\chi_e'}{1+\chi_e'} q = \frac{1}{1+\chi_e'} q = \frac{q}{\epsilon_r'}$

对两个界面分别列 E 方程：

$$\sigma_b' = \vec{P} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \chi_e' \vec{E} \cdot \hat{n}' = -\epsilon_0 \chi_e' E_z' = -\epsilon_0 \chi_e' \left[-\frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q+q_b)}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma_b'}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} \right]$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \chi_e E_z = \epsilon_0 \chi_e \left[-\frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q+q_b)}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sigma_b'}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} \right]$$

写为矩阵形式 令 $\alpha = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q+q_b)}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0'} \frac{q}{(r+d)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{\chi_e} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\chi_e} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_b \\ \sigma_b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{克拉默法则} \quad \begin{pmatrix} \sigma_b = \frac{\alpha(1+\frac{1}{\chi_e})}{(-\frac{1}{2}\chi_e + \frac{1}{2}\chi_e + 2)} \\ \sigma_b' = \frac{[-\alpha(1+\frac{1}{\chi_e})]}{(-\frac{1}{2}\chi_e + \frac{1}{2}\chi_e + 2)} \end{pmatrix} = \frac{2\chi_e'(\chi_e+1)}{\chi_e + \chi_e + 2} \alpha$$

因此边界上的总电荷 $\tilde{q} = \sigma_b + \sigma_b' = \frac{2(\chi_e' - \chi_e)}{\chi_e + \chi_e + 2} \alpha = \frac{(\chi_e' - \chi_e)}{\epsilon_0'(\chi_e + \chi_e + 2)} \times \frac{qd}{2\pi(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \tilde{q} = \frac{\chi_e' - \chi_e}{\epsilon_0'(\chi_e + \chi_e + 2)} q = \frac{\epsilon_0' - \epsilon_0}{\epsilon_0'(\chi_e + \chi_e + 2)} q$

$$\Rightarrow z > 0 \text{ 时 } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{\tilde{q}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right]$$

$$z < 0 \text{ 时 } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\frac{q}{\epsilon_0'} + \tilde{q})}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} \right]$$

• 像电荷 \tilde{q}

• 合实际电荷 $q+q_b+\tilde{q}$



4.4.3 电介质系统的能量

电容器的能量 $W = \frac{1}{2} CV^2$

若电容器中充满线性电介质，它的电容变为 $C = \epsilon_r C_{vac}$

因为充入电介质后 $\vec{E} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_{vac}$ 因此 $V \rightarrow \frac{1}{\epsilon_r} V_{vac}$ 因为 $C = \frac{Q}{V}$ ，所以 $C \rightarrow \epsilon_r C_{vac}$

因此随着充入电介质，所需能量变多（多余能量用于使电介质极化/产生更多约束电荷）

真空中的静电场能量： $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$

电介质中的静电场能量为： $W = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \epsilon_r \int E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$

证明：假设电介质固定，向电介质中移动自由电荷，每个定点 \vec{r} 增加 $\Delta \rho(\vec{r})$

所需功为 $\Delta W(\vec{r}) = \Delta \rho_f(\vec{r}) \cdot V(\vec{r})$

全空间 $\rho(\vec{r})$ 都增加，因此所需总功 $\Delta W = \int \Delta \rho_f(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau$

因为 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \Delta \rho_f = \nabla \cdot (\Delta \vec{D})$

$\Rightarrow \Delta W = \int \nabla \cdot (\Delta \vec{D}) V(\vec{r}) d\tau$

利用分部积分 $\nabla \cdot [(\Delta \vec{D}) V] = [\nabla \cdot (\Delta \vec{D})] V + \Delta \vec{D} \cdot (\nabla V)$

$\Rightarrow \Delta W = \int \nabla \cdot [(\Delta \vec{D}) V] d\tau - \int \Delta \vec{D} \cdot (\nabla V) d\tau = \int \nabla \cdot [(\Delta \vec{D}) V] d\tau + \int \Delta \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau = (\Delta \vec{D} V) \cdot \hat{d}\vec{a} + \int \Delta \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$

由于对全空间积分， $V \rightarrow 0$ ，因此第一项为零。

$\Rightarrow \Delta W = \int \Delta \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$ 此式适用于任何介质

若电介质为线性电介质，则 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

则 $\frac{1}{2} \Delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \Delta (\epsilon \vec{E}^2) = \epsilon (\Delta \vec{E}) \cdot \vec{E} = \Delta \vec{D} \cdot \vec{E}$

因此 $\Delta W = \frac{1}{2} \int \Delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) d\tau$

则 $W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$

说明：1. 第二章推导的普遍公式 $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$ 为什么在此不适用？是因为求的是不同的问题。若使用镊子把全部电荷（自由电荷和约束电荷）一个一个放入适当位置，若如此构建系统则可以使用此式。

但此式不包括延伸和扭转电介质分子所做的功（若把正电荷和负电荷看作微小弹簧，连接起来的，那么没有让正负电荷极化所引起的位移变化中需要的功 $\pm kx^2$ ）

若一开始电介质没有极化，然后一个一个引入自由电荷，同时允许电介质随所引入电荷发生变化，若如此构建系统（通常如此）则应使用本节新公式 $W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$ 。此时弹簧能量也被包括进去，虽然不是直接的。

因为对自由电子施加的力会根据束缚电荷变化，放入自由电荷的过程中，自动伸长了弹簧。

2. 此式只能用于计算线性电介质总能量。因为非线性系统 $W_{弹} \neq \pm kx^2$ 特别是耗散系统，“系统存储的能量”无意义，因为功与过程有关。

4.4.4 电介质上的力

与导体一样，电介质会在自由电荷近端处激发符号相反电荷，因此电介质受自由电荷吸引力。
但由于边缘场复杂性，难以计算合力。

这里采用虚功原理的方法求解。

例：考虑如图电介质受力。

若将电介质向外拉一个无限小位移 $d\tau$

能量变化等于做功大小： $dW = F_{exert} d\tau$

F_{exert} 为抵消电场力必须施加的力 $F_{exert} = -F$

因此 $F = -\frac{dW}{d\tau}$ 若两极板电量不变，

而 $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 在此情况下 $C = \frac{\epsilon_0 w}{d} + \frac{\epsilon_0 (l-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r l - x_e x)$ 电容并联。

$\therefore F = -\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dc}{d\tau} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dc}{d\tau} = -\frac{\epsilon_0 x_e w}{2d} V^2$ 表示电场力使电介质向电容器中间吸引。

若两极板电势差不变，不应直接使用 $W = \frac{1}{2} CV^2$ 计算拉力，因为保持电势差不变，必须接入外电源，电源同样需要做功：

$$dW = F_{exert} d\tau + V dQ \Rightarrow F_{exert} = \frac{dW}{d\tau} - \frac{V dQ}{d\tau} \Rightarrow F = -F_{exert} = -\frac{dW}{d\tau} + V \frac{dQ}{d\tau}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{dW}{dC} \cdot \frac{dc}{d\tau} + V \cdot V \frac{dc}{d\tau} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dc}{d\tau} + V^2 \frac{dc}{d\tau} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dc}{d\tau} \text{ 同上式}$$

意义：作用在电介质上的力不取决于保持 Q 为常数还是 V 为常数，只取决于自由电荷、约束电荷的位置和电荷量。最好按 Q 为常数计算较为简单。

§ 4.5 习题中的补充知识点

Prob. 4.38 电介质中的唯一性定理。

体积 V 包含特定的自由电荷分布和各种线性电介质材料且每种材料极化率给定，

若体积 V 的边界 S 上的电势给定，则体积 V 中的电势唯一确定。

证法同 3.1.6 节，在体积 V 上对 $\nabla \cdot (V_s \vec{D}_s)$ 积分。

Prob. 4.37 一个电偶极子 \vec{P} 引入线性电介质球内（导电系数 ϵ ），求球内外电势。

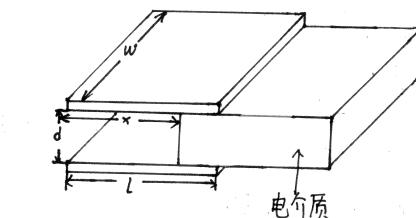
在电偶极子 \vec{P} 附近激发出体约束电荷 $P_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\epsilon_0 x_m}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = -\frac{\epsilon_0 x_m}{\epsilon} P_f$

因此约束电荷产生电偶极矩为 $(-\frac{\epsilon_0 x_m}{\epsilon} \vec{P})$

因此总电偶极矩为 $\vec{P}_t = \vec{P} - \frac{\epsilon_0 x_m}{\epsilon} \vec{P} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{P} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{P}$

分离变量法得到

$$V = \begin{cases} \sum_{L=0}^{\infty} A_L r^L P_L(\cos \theta) + \frac{P_t \cos \theta}{4\pi \epsilon r^2} & \text{球内} \\ \sum_{L=0}^{\infty} \frac{B_L}{r^{L+1}} P_L(\cos \theta) & \text{球外} \end{cases}$$



由 $E = R$ 处边界条件: $V_{R_1} = V_R$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0} + A_1 R^3 \\ B_2 = A_2 R^{2+1} \end{cases}$$

由 $R = R_2$ 另一边界条件:

$$E_{\text{外}} - E_{\text{内}} = \frac{\partial V_{R_2}}{\partial r} + \frac{\partial V_R}{\partial r} = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} = \frac{1}{R_2} \vec{P} \cdot \hat{n} = \chi_e E_{\text{外}} = \chi_e \frac{\partial V_R}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \sigma_b \frac{\partial V_{R_2}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_R}{\partial r} \quad (\text{D}_1^2 \text{D}_2^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{2(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r+2} \\ B_1 = \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2} \end{cases}$$

$$\text{得 } V_R = \frac{P_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{2(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r+2} R \cos \theta = \frac{P_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_r R^2} \left(1 + 2 \frac{R^3}{R^3} \frac{(\epsilon_r-1)}{(\epsilon_r+2)} \right) \quad R \leq R_2$$

$$V_{R_2} = \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2} - \frac{\cos \theta}{R^2} = \frac{P_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_r R^2} \left(\frac{3}{\epsilon_r+2} \right) \quad R \geq R_2$$

$$\sigma_b = (\vec{P} \cdot \hat{n})_R = (\epsilon_0 \chi_e E_{\text{内}})_R = -(\epsilon_r - \epsilon_0) \frac{\partial V_R}{\partial r} \Big|_{R=R_2} = \frac{P_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_r R^3} \cdot \frac{6(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r+2}$$

$$\text{其在导体球内部激发电场 } E_{\text{内}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_r R^3} \cdot \frac{6(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r+2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_r R^3} \cdot \frac{2(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r+2} \vec{P} \text{ 为匀强电场 (P1)}$$

即此情况下, 约束电荷分布类似于均匀极化球的情况。

补充1: 电像法例3:

设 $Z > 0$ 区域充满 ϵ'_r 电介质, $Z < 0$ 区域充满 ϵ_r 电介质, 求电场 E 空间分布。

$Z > 0$

ϵ'_r

$Z < 0$

ϵ_r

考察 $Z > 0$ 空间时, 假想位于 ϵ'_r 镜像电荷 q' 且空间布满 ϵ'_r 电介质

$$\text{则 } V_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon'_r} \frac{1}{r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon'_r} \frac{1}{r_2}$$

$$\vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{\hat{r}_1}{r_1^2} + \frac{q'}{4\pi} \frac{\hat{r}_2}{r_2^2}$$

考察 $Z < 0$ 空间时, 假想位于 ϵ_r 镜像电荷 q'' 与 q' 重叠, 且空间布满 ϵ_r 电介质

$$\text{则 } V_2(\vec{r}) = \frac{q+q''}{4\pi\epsilon_r} \frac{1}{r_3}$$

$$\vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{q+q''}{4\pi} \frac{\hat{r}_3}{r_3^2}$$

边界条件: 当 $r_1 = r_2 = r_3$ 时,

$$\text{电势相等: } V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q}{\epsilon'_r} + \frac{q'}{\epsilon'_r} = \frac{q+q''}{\epsilon_r}$$

$$\text{法向电位移相等: } D_1^z = D_2^z \Rightarrow q - q' = q + q''$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{得 } q' &= \frac{\epsilon'_r - \epsilon_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} q \\ q'' &= \frac{\epsilon_r - \epsilon'_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} q \end{aligned}$$

再代入即可。

验证: 例3方法

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\frac{q}{\epsilon'_r}}{r_1} + \frac{(\epsilon'_r - \epsilon_r) q}{\epsilon'_r (\epsilon'_r + \epsilon_r) r_2} \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon'_r} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\epsilon'_r - \epsilon_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon'_r} \frac{1}{r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon'_r} \frac{1}{r_2}$$

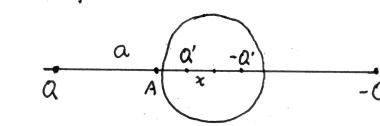
$$V_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\frac{q}{\epsilon'_r}}{r_3} + \frac{\frac{\epsilon'_r - \epsilon_r}{\epsilon'_r (\epsilon'_r + \epsilon_r)} q}{r_3} \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_3} \left(1 + \frac{\epsilon'_r - \epsilon_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} \right) \frac{1}{r_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3} \times \frac{2\epsilon'_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} \times \frac{1}{r_3}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3} \times \frac{2}{\epsilon'_r + \epsilon_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3} \times \frac{2\epsilon_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} \times \frac{1}{\epsilon_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3} \times \left(\frac{\epsilon'_r + \epsilon_r - \epsilon'_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3} \times \left(1 + \frac{\epsilon_r - \epsilon'_r}{\epsilon'_r + \epsilon_r} \right) = \frac{\epsilon_r + q''}{4\pi\epsilon_r} \frac{1}{r_3} \quad \text{Q.E.D.}$$

例3本质在于把电介质看作边界电荷, 本方法在于彻底利用镜像法而不求解方程, 从解题难度上, 此方法较好。

补充2: 线性电介质球置于匀强外场 —— 4.4.2 例1 镜像法。



考虑远处电荷 $\pm Q$, 距圆心 $a \gg R$, $Q \gg 0$, $\chi = \frac{R^2}{a}$.

则球外电场由 $\pm Q$, $\pm Q'$ 给出, 整个空间被 ϵ_0 充满
图中参考点A电势: $V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{a-R} + \frac{a'}{R-x} - \frac{a'}{R+x} - \frac{a}{a+R} \right)$

球内电场由 $\pm Q$, $\pm Q''$ 给出, 整个空间被 ϵ_r 充满
图中B电势: $V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_r} \left(\frac{a+a''}{a-R} - \frac{a+a''}{a+R} \right)$

$$\begin{aligned} \text{有 } V_A &= V_B \Rightarrow \begin{cases} a' = \frac{(\epsilon_r - \epsilon) \cdot R \cdot (a^2 + R^2)}{(\epsilon_r + \epsilon_0) a^2 + \epsilon_0 R^2} \xrightarrow{a \gg R} \frac{(\epsilon_r - \epsilon) R}{(\epsilon_r + \epsilon_0) a} Q \\ a'' = -\frac{2a^2 \cdot (\epsilon_r - \epsilon) \cdot R}{(\epsilon_r + \epsilon_0) a^2 + \epsilon_0 R^2} \xrightarrow{a \gg R} \frac{2(\epsilon_r - \epsilon) a}{\epsilon_r + \epsilon_0} Q \end{cases} \end{aligned}$$

匀强外场, 有 $E_0 \propto \frac{Q}{a^2}$, 球内电场, 有 $E \propto \frac{Q+a''}{a^2}$

$$\text{则 } \frac{E}{E_0} = \frac{\epsilon_r(Q+Q'')}{\epsilon_0 Q} = \frac{1 + \frac{2(\epsilon_r - \epsilon_0)}{(\epsilon_r + \epsilon_0) a}}{(\epsilon_r + \epsilon_0) a} = \frac{3\epsilon_r}{(\epsilon_r + \epsilon_0) a} = \frac{3}{\epsilon_r + 2\epsilon_0} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \quad \text{即 球内电场 } \vec{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

若 $\epsilon_r \rightarrow \infty$ 为导体, 则 $a' = -\frac{R}{a} Q$

第五章 静磁场场

5.1 洛伦兹定律

5.1.1 磁场

静止电荷产生电场，运动电荷额外产生磁场。

5.1.2 磁场力

磁场对在磁场 \vec{B} 中以速度 \vec{v} 运动的电荷产生力，遵循洛伦兹定律

$$\vec{F}_{\text{mag}} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{F} \text{ 和 } \vec{v} \text{ 是矢量, } \vec{B} \text{ 实际上是伪矢量}$$

当电场和磁场同时存在时， $\vec{F} = Q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]$

在磁场中，粒子以奇怪的轨道运动，特别是以下两种：

① 圆周运动或螺旋轨道

$$\text{洛伦兹力提供向心力 } QvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = QBR$$

② 摆线轨道

设运动沿 y - z 平面， \vec{B} 沿 x 轴正向， \vec{E} 沿 z 轴正向

粒子位置用 $(0, y(t), z(t))$ 表示， $\vec{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{x} - B\dot{y}\hat{z}$$

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = Q(E\hat{x} + B\dot{z}\hat{x} - B\dot{y}\hat{z}) = m\vec{a} = m(\ddot{y}\hat{x} + \ddot{z}\hat{z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} QB\dot{z} = m\ddot{y} \\ QE - QB\dot{y} = m\ddot{z} \end{cases} \quad \text{定义回旋频率 } \omega = \frac{QB}{m} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \omega^2 z \\ \ddot{z} = \omega^2 \left(\frac{E}{B} - y \right) \end{cases}$$

$$\text{对 I 式求导: } \ddot{y} = \omega^2 z \text{ 代入 II 式 } \Rightarrow \ddot{y} = \omega^2 z = \omega^2 \left(\frac{E}{B} - y \right) \Rightarrow \frac{d^2(y)}{dt^2} + \omega^2 y = \omega^2 \frac{E}{B}$$

此式为非线性微分方程，解为通解加特解： $y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B} t$

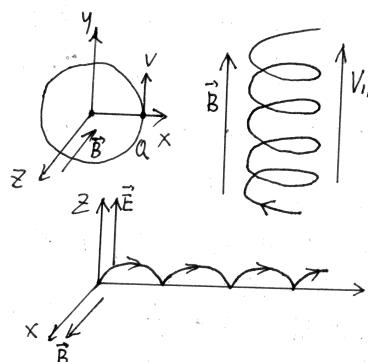
$$\text{积分得: } y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B} t + C_3 \quad \text{代入计算 } z(t) \text{ 得:}$$

$$z(t) = C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4$$

$$\text{代入初始条件: } \Rightarrow \begin{cases} y(t) = \frac{E}{WB} (wt - \sin \omega t) \\ z(t) = \frac{E}{WB} (1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

$$\text{令 } R = \frac{E}{WB} \text{, 上式改写为 } (y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

即圆心在 $(0, R\omega t, R)$ 上，(运动速度为 $v = wR = \frac{E}{B}$) 半径为 R 的摆线，且总运动垂直于 \vec{E} 的方向。



特点：磁场力不做功。

5.1.3 电流

导线中单位时间通过的电荷量称为电流

除了霍尔效应以外，不必考虑载流子的电性。

单位: $1A = 1C/s$

对于线电流 $I = \lambda v$

$$\text{若导线中有两种载流子 } I = \lambda_+ v_+ + \lambda_- v_-$$

磁场对线电流的洛伦兹力:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) dq = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \lambda dL = \int (\vec{I} \times \vec{B}) dL$$

$$\text{得 } \vec{F}_{\text{mag}} = \int (\vec{I} \times \vec{B}) dL$$

对于面电流，用面电流密度描述

$$\vec{k} = \frac{d\vec{I}}{dL_1}$$

若电荷面密度为 σ ，它们的速度为 \vec{v} ，则 $\vec{k} = \sigma \vec{v}$

磁场对面电流的洛伦兹力:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \sigma da = \int (\vec{k} \times \vec{B}) da$$

注: 就像 \vec{E} 在面电荷附近不连续， \vec{B} 在面电流密度附近也不连续。

因此此式需要小心计算平均磁场。

对于体电流，用体电流密度描述

$$\vec{j} = \frac{d\vec{I}}{d\alpha_1}$$

若体电荷密度为 ρ ，它们的速度为 \vec{v} ，则 $\vec{j} = \rho \vec{v}$

磁场对体电荷的洛伦兹力:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \rho d\tau = \int (\vec{j} \times \vec{B}) d\tau$$

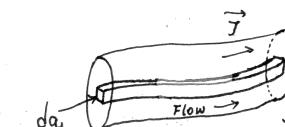
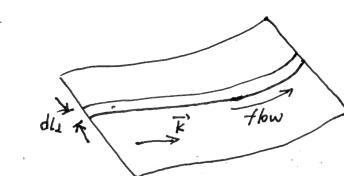
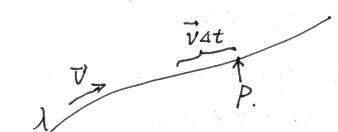
穿过横截面 S 的总电流为: $I = \int_S \vec{j} da = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{a}$

由高斯定理，穿出闭合面 S 的总电流 (单位时间体积 V 中电荷量的减少)

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int_V \frac{dp}{dt} dt$$

由于电荷守恒，流出的电荷使剩余的电荷减少。 $\Rightarrow \int_V (\vec{j} \cdot \vec{n}) d\tau = - \frac{dp}{dt} \int_V \frac{dp}{dt} dt = - \int_V \frac{dp}{dt} dt$

对任何体积都成立，得 $\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$ 称为连续性方程



所有与电流有关项都可以进行相应面电流、体电流、运动电荷、线电流的替换

$$\sum_{i=1}^n (\vec{J} \cdot d\vec{l}) \sim \int_{\text{line}} (\vec{J} \cdot d\vec{l}) \sim \int_{\text{surface}} (\vec{J} \cdot d\vec{a}) \sim \int_{\text{volume}} (\vec{J} \cdot d\vec{v})$$

类似电场理论中电荷的替换 $q \sim \lambda dL \sim \sigma da \sim \rho dv$

Prob. 6.7

若电流和电荷全部约束在体积 V 内，则有

$$\int_V d\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{其中 } \vec{P} \text{ 是总偶极矩.}$$

证明：以 x 方向为例

$$(\frac{d\vec{P}}{dt})|_x = \frac{d}{dt} \int_V \vec{J}_x dV = -2P_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -2P_x (\vec{J} \cdot \vec{A}) + 2P_x (\vec{A} \cdot \vec{J})$$

利用分部积分法： $\int_V \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{J} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = \int_V (\vec{J} \cdot \nabla) \vec{A} dV + \int_V \vec{A} \cdot d\vec{J} = \int_V (\vec{J} \cdot \nabla) \vec{A} dV$

$$\text{因此 } \frac{d\vec{P}}{dt}|_x = \int_V \vec{J}_x dV$$

$$\text{因此 } \frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V \vec{J} dV$$

§5.2 毕奥-萨瓦尔定律（简称，B-S 定律）

5.2.1 稳恒电流

若每点电荷密度不随时间变化 \Rightarrow 产生电场不随时间变化：静电场

若每点电流密度不随时间变化 \Rightarrow 产生磁场不随时间变化：静磁场

这种电流称为 稳恒电流

稳恒电流要求 ① 电流密度不随时间变 ② 无电荷堆积，即

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

由于磁场传播过快，因此即使是交流电依然近似符合静磁场规律。

但移动的电荷不可能组成稳恒电流，因此不符合静磁场规律。

5.2.2 稳恒电流产生的磁场

稳恒电流产生的磁场由 B-S 定律给出：

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(l) \times \hat{r}}{r^2} dl'$$

积分路线沿电流路线，其中 μ_0 称为真空中的导磁系数

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$ 为确切值，其用来定义 1A，再用 1A 定义 1C

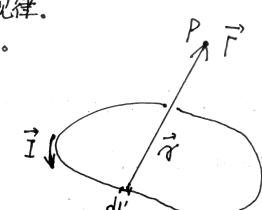
\vec{B} 的单位为： $T = N/(A \cdot m)$ 称为磁感应强度。

学习目标：利用 B-S 定律计算 \vec{B}

见第见磁场：

$$\textcircled{1} \quad P \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$\text{无限长: } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



dl'

$$\text{③} \quad \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(l) \times \hat{r}}{r^2} dl'$$

$$\text{对于面电流: } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{k}(r') \times \hat{r}}{r^2} da'$$

$$\text{对于体电流: } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r') \times \hat{r}}{r^2} dr'$$

$$\text{再次强调 } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{QV \times \hat{r}}{r^2} \text{ 不正确}$$

$$\text{因为 } B-S \text{ 只能用于稳恒电流}$$

$$(\text{非相对论 } v \ll c \text{ 近似正确})$$

§5.3 磁感应强度 \vec{B} 的旋度和散度

5.3.1 直线电流

无限长直导线的磁场如图，其旋度非零

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint dl = \mu_0 I$$

与 S 无关，与积分曲线形状无关

若有许多电流，每个穿过面 S 的直导线贡献 $\mu_0 I$ 。

不穿面 S 的直导线无贡献，则

$$\oint_p \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad I_{\text{enc}} \text{ 代表积分路线上包围的总电流}$$

$$\text{若用电流体密度代替: } I_{\text{enc}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$\text{由旋度定理: } \oint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \oint_p \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$\text{因此 } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

缺陷在于只适用于直导线，下一节推导普适定理基于 B-S 定理。

5.3.2 \vec{B} 的散度和旋度

$$\text{B-S 定理指出 } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(l) \times \hat{r}}{r^2} dl'$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot (\vec{J}(l) \times \hat{r}) dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int [(-\vec{J}(l)) \cdot (\nabla \times \hat{r})] dl' = 0$$

$$\text{得 } \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times (\vec{J}(l) \times \hat{r}) dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int [\vec{J}(l) \cdot (\nabla \times \hat{r}) - (\vec{J} \cdot \nabla) \hat{r}] dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(l) \cdot \nabla \delta^3(\vec{r}) dl' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{J} \cdot \nabla) \hat{r} dl'$$

$$\text{第一项为: } \frac{\mu_0}{4\pi} \times 4\pi \vec{J}(P) = \mu_0 \vec{J}(P)$$

$$\text{第二项: 由于 } (\vec{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2} = (\vec{J} \cdot \nabla_r) \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\text{以 } x \text{ 分量为例 } (\vec{J} \cdot \nabla_r) \left(\frac{x-x'}{r^3} \right) = \vec{J}(P) \cdot \nabla_r \left(\frac{x-x'}{r^3} \right)$$

$$\text{利用乘法规则, 上式为 } \nabla_r \cdot \left[\frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right] - \left(\frac{x-x'}{r^3} \right) (\nabla' \cdot \vec{J}(P))$$

由于稳恒电流散度为零，上式第二项为零

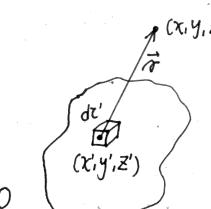
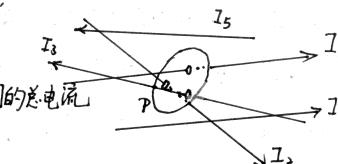
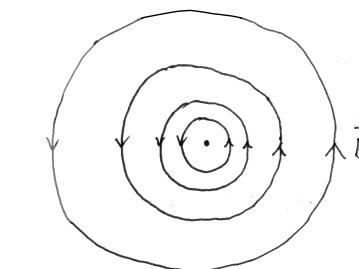
$$\Rightarrow \left[-(\vec{J} \cdot \nabla_r) \frac{\hat{r}}{r^2} \right]_x = \nabla_r \cdot \left[\frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right]$$

$$\text{再利用散度定理 } \int_V \nabla_r \cdot \left[\frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right] dl' = \oint_S \frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

而往往我们考虑的是将电流全部包含在内的体积，(若了趋向无穷远，此项也为零，只是分析较复杂)

那么在边界面上 $\vec{n} = 0$ 因此此项为零。

$$\text{得 } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



5.3.3 安培定则

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 称为安培定则的微分形式.

利用散度定理 $\int (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{enc}$

其中的积分回路 γ 称为安培环.

则 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$ 称为安培定则的积分形式. 积分回路方向遵循右手定则.

对任意稳恒电流都成立.

学习目标: 利用安培定则计算对称体系下的磁场.

常见对称体系:

$$\textcircled{1} \text{无限长直导线: } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \textcircled{2} \text{无限长螺线管: } B = \begin{cases} \mu_0 n I, & \text{内部} \\ 0, & \text{外部} \end{cases} \quad \textcircled{3} \text{环形线圈}$$

以环形线圈为例:

对于任意截面的环形线圈, 只要截面形状不变, 线圈内外磁场一定为圆形.

证明: 由 B-S 定律, \vec{r} 处的磁感应强度 $\vec{B}(\vec{r})$ 中由 \vec{r}' 处电流元贡献大小为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{I} \times \hat{n}}{r^2} dI'$$

若将 \vec{r} 置于 xz 平面, 因此在笛卡尔坐标系下 $\vec{r} = (x, 0, z)$

$$\vec{r}' = (s' \cos \phi', s' \sin \phi', z') \text{ 因此 } \vec{r}' = (x - s' \cos \phi', -s' \sin \phi', z - z')$$

$$\vec{I} = (I_s \cos \phi', I_s \sin \phi', I_z) \text{ (因为 } \vec{I} \text{ 无 } \vec{z} \text{ 分量)}$$

$$\Rightarrow \vec{I} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I_s \cos \phi' & I_s \sin \phi' & I_z \\ (x - s' \cos \phi') & (-s' \sin \phi') & (z - z') \end{vmatrix}$$

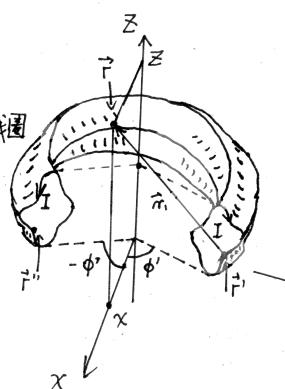
同理, 得对称的 \vec{r}'' 处, 令 $\phi' \rightarrow -\phi' \Rightarrow \vec{I} \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I_s \cos \phi' & -I_s \sin \phi' & I_z \\ (x - s' \cos \phi') & s' \sin \phi' & (z - z') \end{vmatrix}$

因此叠加以后 \hat{x}, \hat{z} 分量消失, 只剩 \hat{y} 方向分量.

因此总场沿 \hat{y} 方向, 因此磁场为圆形.

知道磁场方向后计算较为简单, 使用安培定则

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi S} \hat{y}, & \text{线圈内} \\ \vec{0}, & \text{线圈外} \end{cases}$$



5.3.4 静电场和静磁场比较

静电场的麦克斯韦方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

远场条件: $\vec{E} = 0$

$$\text{场中受力: } \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

静磁场的麦克斯韦方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

远场条件: $\vec{B} = \vec{0}$

5.4 磁矢势

5.4.1 矢势

正如 $\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$.

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 其中 \vec{A} 即为磁矢势

由安培定律: $\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$

由于可以在 \vec{A} 中加入任意标量函数的梯度 ($\nabla \times (\nabla \psi) = \vec{0}$, 不影响 \vec{B})

因此可以通过这一项将 \vec{A} 的散度消去, 这种规范称为库伦规范.

库伦规范中, 有 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 代入上式, 有

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \text{ 只在库伦规范中成立.}$$

此式类似泊松方程 $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, 其解为: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r'} d\tau'$

因此假设无穷远处电流 $J = \vec{0}$, 则

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r'} d\tau'$$

对于线电流和面电流

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{r'} dI' \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{k}(\vec{r}')}{r'} da'$$

若无穷远处电流 $J \neq \vec{0}$, 必须使用其他方法得到 \vec{A} .

学习目标: 求库伦规范中的磁矢势

例1: 无穷远处 $J = \vec{0}$ 的情况.

考虑面荷密度 σ 、半径为 R 的球壳以 \vec{w} 旋转产生的磁场

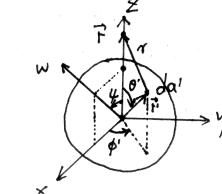
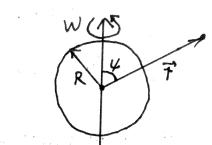
由于计算复杂, 现将 \vec{w} 置于 xz 平面, 将待测点 P 置于 z 轴上

$$\text{利用 } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{R}(\vec{r}')}{r'} d\tau'$$

$$\text{而 } \vec{R} = \sigma \vec{v} \quad r' = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'} \quad da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ w \sin \phi & 0 & w \cos \phi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix}$$

$$= R w [-\cos \theta' \sin \phi' \hat{x} + (\cos \theta' \cos \phi' - \sin \theta' \cos \phi') \hat{y} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{z}]$$



$$\text{利用 } \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = 0$$

因此只要式中含有 $\sin\phi'$ 或 $\cos\phi'$ 的项皆为零

$$\text{只剩 } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int -\frac{\sigma R w \sin 4 \cos\phi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\phi'}} \hat{y} R^2 \sin\phi' d\theta' d\phi'$$

$$= -\frac{\mu_0 R^3 \sigma w \sin 4}{2} \int_0^\pi \frac{\cos\phi' \sin\phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\phi'}} \hat{y}$$

整理之后得

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R^6}{3} (\vec{w} \times \vec{r}) & \text{球内} \\ \frac{\mu_0 R^4 \vec{w}}{3r^3} (\vec{w} \times \vec{r}) & \text{球外} \end{cases}$$

若 \vec{w} 落在 z 轴上，点 P 坐标为 (r, θ, ϕ) ，则

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R w \sigma}{3} r \sin\phi \hat{\phi} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R w \sigma}{3} \frac{\sin\phi}{r^2} \hat{\phi} & r \geq R \end{cases}$$

$$\text{球内磁场均匀: } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \vec{w}$$

例 2: 无限远处 \vec{A} 的情况

求无限长螺线管磁矢势

此时无法用前面的方法，因为延伸至无穷远

$$\text{注意: } \oint_P \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \Phi$$

与安培定则类似 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$ 将 $\vec{B} \rightarrow \vec{A}$, $\mu_0 I_{\text{enc}} \rightarrow \Phi$ 是由于其方程相同。)

在螺线管中取半径为 s 的安培环，有

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = A \cdot 2\pi s = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 n I \pi s^2 \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} s \hat{\phi}, \quad s \leq R$$

$$\text{螺线管外, 有 } \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 n I (\pi R^2) \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2}{s} \hat{\phi}, \quad s \geq R$$

总结: 在库仑规范中, \vec{A} 将会沿电流的方向。

$$\text{Prob. 5.25 若 } \vec{B} \text{ 均匀, 则} \text{ 库仑规范可使用} \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{B})$$

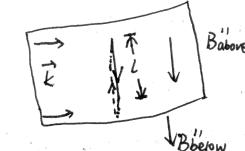
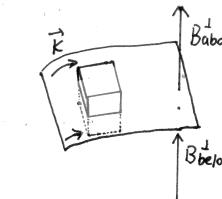
$$\text{证明: } \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{B}) = -\frac{1}{2} [\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{B})] = 0$$

$$\nabla \times \vec{A} = -\frac{1}{2} \nabla \times (\vec{r} \times \vec{B}) = -\frac{1}{2} [(\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} + \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot \vec{r})] = -\frac{1}{2} [\vec{B} \cdot \vec{r} \vec{B}] = \vec{B}$$

5.4.2 边界条件

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r^2} d\vec{l} \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}; \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{aligned}$$

Prob. 5.52; Prob. 5.53



利用 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ 得到 $B_{\text{above}}^\perp = B_{\text{below}}^\perp$

$$\text{利用 } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_{\text{above}}'' - B_{\text{below}}'') L = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 K L$$

$$\text{得到: } B_{\text{above}}'' - B_{\text{below}}'' = \mu_0 K$$

因此 $\vec{B}_{\text{above}} - \vec{B}_{\text{below}} = \mu_0 (\vec{K} \times \vec{n})$ 其中 \vec{n} 垂直于平面指向 \vec{n} 和电势相同，边界面上下磁矢势不变 $\vec{A}_{\text{above}} = \vec{A}_{\text{below}}$

$$\text{但 } \frac{\partial \vec{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}$$

5.4.3 矢势中的多极展开

$$\text{利用 } \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\alpha}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\alpha)$$

$$\text{代入 } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{r'} d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint \frac{1}{r'} d\vec{l}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \phi(r')^n P_n(\cos\alpha) d\vec{l}' \text{ 或写为展开形式}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{1}{r} \phi(r') d\vec{l}' + \frac{1}{r^2} \phi(r') \cos\alpha d\vec{l}' + \frac{1}{r^3} \phi(r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\alpha - \frac{1}{2} \right) d\vec{l}' + \dots \right]$$

$$\text{单极子项: } \vec{A}_{\text{mon}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \times \frac{1}{r} \phi d\vec{l}' = \vec{0}$$

单极子项永远为零，因为自然界无磁单极子。

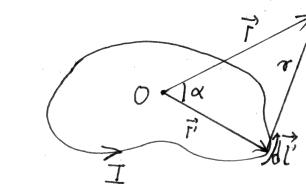
$$\text{偶极子项: } \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \times \frac{1}{r^2} \phi r' \cos\alpha d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \phi(\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}'$$

$$\text{利用第一章 Prob. 1.62 (5) } \phi(\vec{c} \cdot \vec{r}) d\vec{l}' = (\int d\vec{a}) \times \vec{c}$$

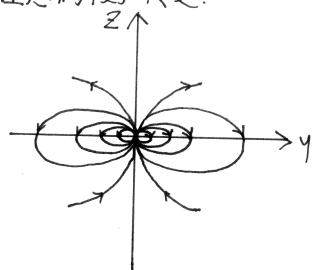
$$\text{令 } \vec{c} = \frac{\vec{r}}{r} \text{ 得 } \phi(\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}' = \int d\vec{a}' \times \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\text{得 } \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I / d\vec{a}' \times \frac{\vec{r}}{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2} \text{ 其中 } \vec{m} = I / d\vec{a}' \text{ 称为磁偶极矩}$$

由于磁单极子项为零，因此磁偶极子项与原点位置无关。



使处于原点的小电流环 $a \rightarrow 0, I \rightarrow \infty$ 保持 $m = Ia$ 不变，完成了由实际偶极子向理想偶极子转变。



“理想”偶极子磁场

$$\text{在极坐标系下 } \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \hat{\phi}$$

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) + \frac{2\mu_0}{3} \vec{m} S^3(\vec{r})$$

$$\text{另一种写法: } \vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] + \frac{2\mu_0}{3} \vec{m} S^3(\vec{r})$$

不管从图像还是从表达式上看，电偶极子和磁偶极子产生的场几乎完全相同。 $S^3(\vec{r})$ 项也可依照电场类似方法得出，因为 Prob. 5.59

Prob. 5.38 若体系为体电流，则磁偶极矩可写为： $\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV$

证明：取垂直于的一微面积元

$$\frac{d\vec{m}}{ds} = \frac{dI}{ds} \int d\vec{a} = J \int d\vec{a}$$

由 Prob. 1.62.(4)，得 $\int d\vec{a} = \frac{1}{2} \phi \vec{r} \times d\vec{l}$

$$\text{得 } \frac{d\vec{m}}{ds} = J \phi \vec{r} \times d\vec{l} = \frac{1}{2} \phi \vec{r} \times \vec{j} ds$$

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \frac{1}{2} \int_s \phi \vec{r} \times \vec{j} ds = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r} \times \vec{j}) dV$$

§5.5 问题中的补充知识点

Prob. 5.41 霍尔效应：

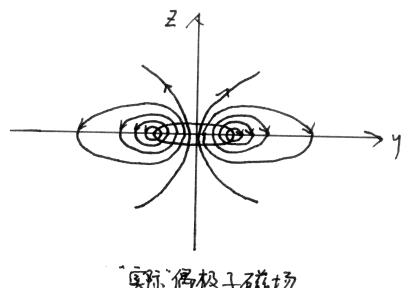
若载流子电荷为正，上下两面存在电压差（称为霍尔电压）

求此电压与 B, V 及尺寸的关系。

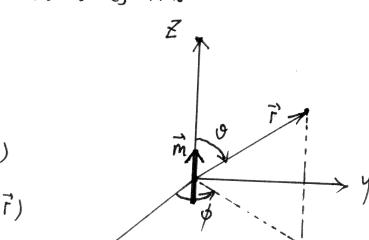
$$\text{解: } qE + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow E = VB = \frac{U}{t}$$

$$\therefore U = BVt$$

注：霍尔电压与载流子电荷有关，若电荷为负，电压反向。

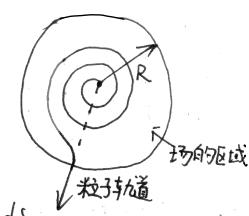


实际偶极子磁场



Prob. 5.43 证明：圆形对称的磁场中 (B 的方向垂直纸面且大小只取决于 s)

若总磁通量 $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ ，则从磁场中间射出的粒子必沿半径向射出或沿半径方向入射的粒子必经圆心（即轨迹反向）



解：角动量为 \vec{L}

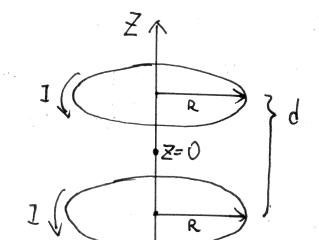
$$\Delta \vec{L} = \vec{B}_1 \int F_0 s dt = -\vec{B}_1 \int q V_s B_1(s) s dt = -\vec{B}_1 \int q \dot{s} B_1(s) s dt \equiv \vec{B}_1 \int q B_1(s) s ds \\ = -\frac{\vec{B}_1 q}{2\pi} \int 2\pi B_1(s) s ds = -\frac{\vec{B}_1 q}{2\pi} \int B_1(s) s ds d\theta = -\frac{\vec{B}_1 q}{2\pi} \int B_1 da = -\frac{q}{2\pi} \int \vec{B}_1 da = -\frac{q}{2\pi} \vec{\Phi}$$

由于 $\vec{\Phi} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0$ 初始时 $\vec{L}_0 = \vec{0}$

因此出口 $\vec{L} = \vec{0}$ 即 $V_\theta = 0$ 沿半径出口

Prob. 5.46 亥姆霍兹线圈

在亥姆霍兹线圈中心 $\frac{\partial B}{\partial z} = 0$ 因此可以近似认为匀强磁场且满足 $d = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5} R}$ 时 $\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0$ ，更接近匀强磁场



Prob. 5.50 证明两闭合线圈通电后的洛伦兹力满足牛二定律且线圈2对线圈1的力可写为

$$\vec{F}_2 = -\mu_0 I_1 I_2 \phi \phi \int \frac{d\vec{l}_1}{ds} \cdot d\vec{l}_2$$

$$\text{证明: } \vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \frac{\vec{r}}{r^3})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi d\vec{l}_1 \left(d\vec{l}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi d\vec{l}_1 \int d\vec{l}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi d\vec{l}_1 \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{l}_2 - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)$$

由梯度基本定理，得证。

$$\text{因此 } \vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \phi \phi \frac{\vec{r}}{r^3} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)$$

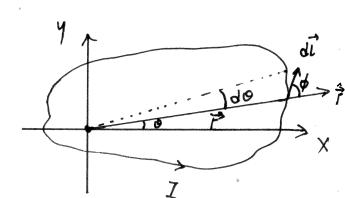
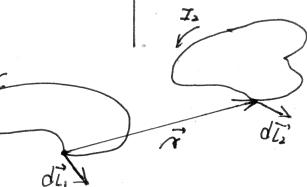
若求 \vec{F}_1 ，只需改变 \vec{r} 的方向，因此 $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ 满足牛二定律

Prob. 5.51 若闭合导线在一平面内，使场点置于原点，并用极坐标 $r(\theta)$ 表示闭合导线

$$\text{则磁感应强度大小 } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \phi \frac{d\theta}{r}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \phi \frac{|d\vec{l}| \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \phi \frac{dr}{r}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \phi \frac{r d\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \phi \frac{d\theta}{r}$$



Prob. 5.52 ; Prob. 5.53

补充 5.4.2 节关系图中, $\vec{B} \rightarrow \vec{A}$ 关系

$$\text{类比 } \begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = 0; \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0; \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{r^2} d\tau'$$

对应

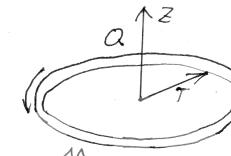
同理, 也可以建立相似的 $\vec{E} \rightarrow \vec{V}$ 关系,

$$\text{类比 } \begin{cases} \text{电介质中: } V(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P}(\vec{P}) \cdot \hat{r}}{r^2} d\tau' \\ \text{真空中: } ? \quad ; \quad P = \epsilon_0 V \cdot \vec{E} \end{cases} \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(-\epsilon_0 \vec{E}) \cdot \hat{r}}{r^2} d\tau' = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{E} \cdot \hat{r}}{r^2} d\tau'$$

Prob. 5.53 方法较复杂, 若要研究最好翻书。

Prob. 5.58. 质量为 M , 电荷量为 Q 的薄“甜甜圈”绕自身对称轴旋转。

其产生的磁偶极矩与其角动量之比称为“旋磁比”, 简写为 g



$$I = \frac{Q}{2\pi r} \times W r = \frac{Q\omega}{2\pi} \quad \alpha = \pi r^2$$

$$\Rightarrow M = \frac{Q\omega}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{Q\omega r^2}{2} \quad L = M r^2 \omega$$

$$\Rightarrow g = \frac{M}{L} = \frac{Q}{2M} \quad \text{其与形状无关, 因此只改变形状不影响结果}$$

如均匀旋转带电球, 其 $g = \frac{Q}{2M}$.

Prob. 5.59 稳恒电流位于球内部时, 球内平均磁场 $\vec{B}_{ave} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{2m}{R^3}$ (示意图略, 带负极子 S 场指出)

$$\text{证明: } \vec{B}_{ave} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \vec{B} d\tau = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int (\nabla \times \vec{A}) d\tau$$

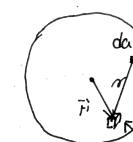
$$\text{利用 Prob. 1.61. (b)} \\ \Rightarrow \vec{B}_{ave} = \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{\text{球面}} \vec{A} \times d\vec{a} = -\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{\text{球面}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{球内}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r'} d\tau' \right) \times d\vec{a} = -\frac{3}{4\pi R^3} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{球内}} \vec{J}(\vec{r}') \times \left(\oint_{\text{球面}} \frac{d\vec{a}}{r'} \right) d\tau'$$

$$\text{球坐标积分} \quad -\frac{3}{4\pi R^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{球内}} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{4}{3} \pi r^2 d\tau'$$

$$\text{利用 Prob. 5.38 结论, 得 } \vec{B}_{ave} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m}{R^3}$$

稳恒电流位于球外部时, 球内平均磁场等于其中心产生磁场

$$\text{证明: 同上. } \vec{B}_{ave} = -\frac{3}{4\pi R^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{球外}} \vec{J}(\vec{r}') \times \left(\oint_{\text{球面}} \frac{d\vec{a}}{r'} \right) d\tau'$$



$$-\frac{3}{4\pi R^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{球外}} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{4\pi}{3} \frac{R^3 \vec{r}'}{(\vec{r}')^3} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{球外}} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}'}{(\vec{r}')^2} d\tau'$$

$$\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} \\ \vec{B}_{ave} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} d\tau' = \vec{B}_{cen}$$

第六章 物质中的磁场

§6.1 磁化

6.1.1 反磁性、顺磁性、铁磁性

磁化来源于物质内部分子电流

根据磁化方向与外场方向是否相同分为
 顺磁性
 反磁性

铁磁性：磁化强度不取决于现在外场大小，而取决于磁化的整个过程。

6.1.2 磁偶极子受到的力和力矩

就像电偶极子在电场中受力矩作用，磁偶极子在磁场中受力矩作用

因为任何闭合电流环可以用无限小矩形电流环构造

如图，边a受力无影响，边b受力相对x轴有一个力矩，使m的指向转向与B相同。

$$\text{且 } \vec{N} = \vec{A}F \sin\theta \hat{x}$$

$$\text{而 } \vec{F} = B\vec{l} b$$

$$\Rightarrow \vec{N} = IabB \sin\theta \hat{x} = mB \sin\theta \hat{x} \quad \text{其中 } m = Iab \text{ 是闭合的磁偶极矩}$$

得 $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ 与电场的情况 $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$ 相同。

由于每一个电子都有自旋因此产生磁偶极矩，外场迫使其旋转至与外场方向相同，这就是顺磁性产生的原因。

但由于泡利不相容原理，电子往往与反自旋的另一个电子成对出现

抵消掉了这个力矩。因此排除分子热运动带来的无序性，往往顺磁性产生于奇数电子原子或分子中。

在非均匀磁场中，磁偶极矩m受力大小为

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

证明：考虑右图矩形线框，分别计算四条边受力，利用 $\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$

$$\vec{F} = I \left\{ dy \hat{y} \times \vec{B}(0, y, 0) + dz \hat{z} \times \vec{B}(0, z, 0) - dy \hat{y} \times \vec{B}(0, y, z) - dz \hat{z} \times \vec{B}(0, 0, z) \right\}$$

$$= I \left\{ dz \hat{z} [\vec{B}(0, z, 0) - \vec{B}(0, 0, z)] - dy \hat{y} [\vec{B}(0, y, z) - \vec{B}(0, y, 0)] \right\}$$

利用泰勒展开：

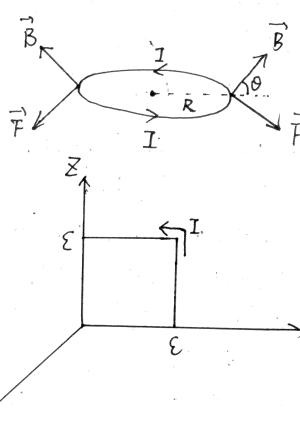
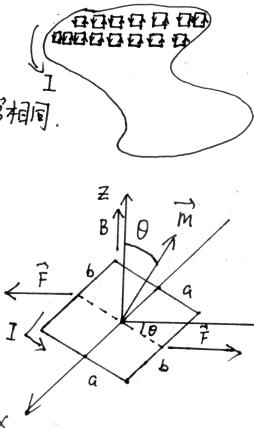
$$\vec{B}(0, z, 0) \approx \vec{B}(0, 0, z) + \varepsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \Big|_{(0,0,z)}$$

$$\vec{B}(0, y, z) \approx \vec{B}(0, y, 0) + \varepsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \Big|_{(0,y,0)}$$

$$\vec{F} = I \int \left\{ dz \hat{z} \times \varepsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \Big|_{(0,0,z)} - dy \hat{y} \times \varepsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \Big|_{(0,y,0)} \right\}$$

$$= I \varepsilon^2 \left[\hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} - \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right]$$

$$= m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k} \right)$$



$$\text{利用 } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y}$$

代入上式，得

$$\vec{F} = m \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{j} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k} \right) = m \nabla B_z = m \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

6.1.3 磁场对原子轨道的效应。

电子不仅有自旋，还绕原子核旋转。

$$\text{有 } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = Me \frac{V^2}{R}$$

若增添垂直旋转平面朝向上的磁场，则

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} + e\bar{V}B = me \frac{\bar{V}^2}{R}$$

$$\text{两式合-: } \frac{MeV^2}{R} = \frac{me\bar{V}^2}{R} - e\bar{V}B.$$

$$\Rightarrow e\bar{V}B = \frac{me}{R} (\bar{V}^2 - V^2) = \frac{me}{R} (\bar{V} + v)(\bar{V} - v) \cong \frac{me}{R} \times 2\bar{V} \times \Delta V$$

$$\text{得 } \Delta V = \frac{e\bar{V}B}{2me}$$

因此若 B 增加，电子转速 v 增加。（虽然磁场不能做功，但变化的磁场产生电场，产生电场使电子加速）

$$\text{而 } \vec{m} = I \vec{a} = \pi R^2 \times \left(-\frac{eV}{2\pi R} \right) = -\frac{1}{2} eV R \hat{z}$$

$$\text{得 } \Delta \vec{m} = \frac{1}{4} \frac{e^2 R^2}{me} \vec{B}$$

因此 m 的变化量与 B 的方向相反，这是反磁性产生原因。

这是普遍现象，但由于强度远远小于顺磁性，因此主要在偶数电子原子或分子中存在。

6.1.4 磁化强度

定义单位体积中的磁偶极矩

$M = \text{单位体积中的磁偶极矩}$ ，称为磁化强度。

由于顺磁性物质激发磁场与外磁场相同，因此受吸引力，磁场对顺磁性物质有吸引作用。

反之磁场排斥反磁性物质。

§6.2 磁化物体内部的磁场

6.2.1 约束电流

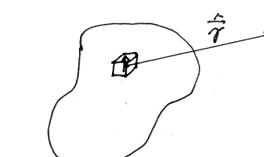
$$\text{由 } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{n}}{r^3}$$

得针对磁化物体： $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{r'^3} d\tau'$

$$\text{利用 } \nabla' \frac{1}{r'} = \frac{\hat{n}}{r'^2} \text{，得 } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{M}(\vec{r}') \times (\hat{n} \frac{1}{r'})]}{r'^3} d\tau'$$

$$\text{分部积分，得 } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{1}{r'} [\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')] d\tau' - \int \nabla' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r'} \right] d\tau' \right\}$$

$$\text{由 Prob. 1.61.(b) 转化为面积分 } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r'} [\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')] d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{r'} [\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{a}']$$



其中第一项为体电流磁矢势 $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$

第二项为面电流磁矢势 $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$

则 $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{r'} d\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{r'} da'$

计算电介质磁场与通过单面电流、体电流磁场后叠加效果完全相同。

例：均匀磁化体的磁感应强度：

使 \vec{M} 沿 z 轴正方向。

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \vec{0} \quad \vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M S \sin \theta \hat{p}$$

若考虑均匀带电球壳快速旋转 $\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma R \sin \theta \hat{p}$

利用 5.4.1 节结果使 $\sigma R \sin \theta \rightarrow M$

得 $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$ 球内

球外磁场与 $B = \frac{4\pi}{3} \mu_0 R^3 M$ 的理想磁偶极子效果相同。

磁场形状与 4.1.4 节极化电场形状几乎相同。

学目标：求面电流、体电流，进而求相应磁感应强度。

6.2.2 约束电流的物理解释

当磁化强度不均匀时，如右图每一个 M 可用小电流环表示。

而内部电流由于附近有反向电流而互相抵消。

但边缘处电流无附近电流环供其抵消。

因此总效应等同于电流 I 沿边界流动。

下面求电流 I 与 M 的关系。

设小电流环面积为 a ，厚度为 t

其磁偶极矩 $m = Mat$

由于电流产生磁偶极矩 $M = It$

$$\Rightarrow I = Mt$$

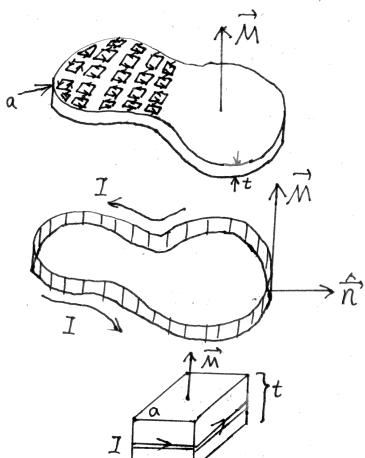
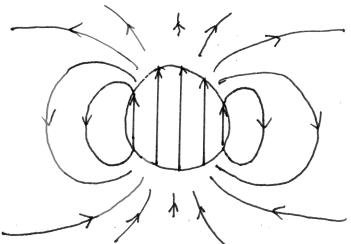
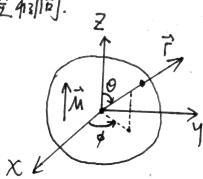
$$\text{得 } K_b = \frac{I}{t} = M.$$

再带上 \hat{n} 的方向，利用叉乘 $K_b = \vec{M} \times \hat{n}$

上下表面无电流产生，因为 $\vec{M} \parallel \hat{n}$ 。

此面电流产生方式与常规电流不同。此电流由无数微小电流环叠加而成，没有单一电荷绕表面旋转。

但它产生的磁场与其它电流磁场完全相同。



当磁化强度不均匀时，内部电流不能抵消。
如图两相邻电流环中间存在净 x 方向电流。

$$J_x = [M_z(y+dy) - M_z(y)] dz = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$$

得 $(J_b)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y}$

同理，若如下图所示，则 $(J_b)_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$

共有六种指向。

因此普遍形式 $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$

且对于体电流应满足稳恒条件： $\nabla \cdot \vec{J}_b = 0$

6.2.3 物质内部的磁场

由于微观上物质内部磁场是复杂的，我们计算的实际上是微观磁场的平均值。

§6.3 磁场强度

6.3.1 磁化物质中的安培定则

现考虑由于约束电流产生的磁场和外界磁场共同作用。

由安培定则，得 $\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) = \vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M}$

$$\Rightarrow \nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}) = \vec{J}_f$$

定义 磁场强度 $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

得磁化物质中的安培定则。

微分形式： $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$

积分形式： $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}}$ 其中 I_{enc} 为通过线圈环的总电流。

此定理优势为：只与自由电流有关，而我们只能控制自由电流，无法操纵约束电流。

学目标：利用 \vec{H} 计算 \vec{B} 。

事实上，更多使用 \vec{H} 而不是 \vec{B} ，但更多使用 \vec{B} 而不是 \vec{H} 。

理由是，为建造一个磁场，必须通过线圈并通入自由电流。从仪器中读出电流并直接计算出 \vec{H} 。

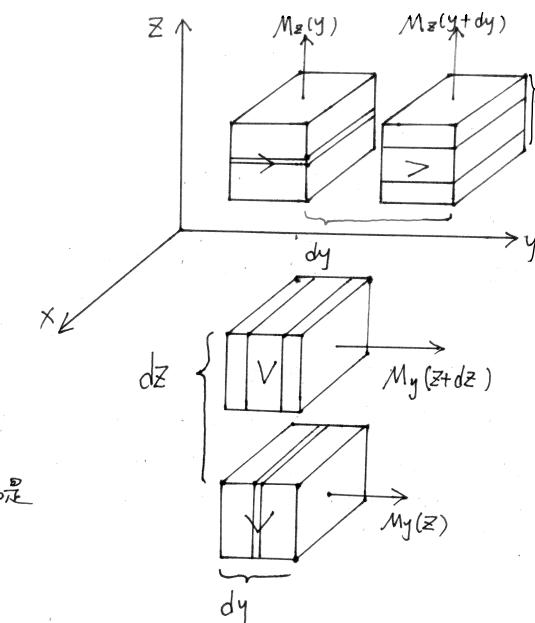
而为建立电场，必须通入自由电荷。但是，从仪器中测出的是对应的电压，由电压直接计算出 \vec{E} 。

6.3.2 一个欺诈的对比

像电场情况一样，不可以认为 \vec{H} 只由 \vec{J}_f 决定。因为虽然知道 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$

但 $\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot (\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}) = -\nabla \cdot \vec{M}$ 不是为零。

思路：若要求磁介质中的 \vec{B} 或 \vec{H} ，先观察对称性。若存在对称性使 $\nabla \cdot \vec{M} = 0$ ，则可以，通过自由电荷直接求出 \vec{H} ，若缺乏必要的对称性，必须使用其它的方法（例如约束电流）。



6.3.3 边界条件

$$\text{由上一节可得 } H_{\text{above}} - H_{\text{below}} = -(M_{\text{above}} - M_{\text{below}})$$

$$\text{由 } \nabla \times \vec{H} = \vec{P}_f \text{ 得 } \vec{H}_{\text{above}} - \vec{H}_{\text{below}} = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

对于 \vec{B} 而言：

$$B_{\text{above}}^{\perp} - B_{\text{below}}^{\perp} = 0$$

$$\vec{B}_{\text{above}}^{\parallel} - \vec{B}_{\text{below}}^{\parallel} = \mu_0 (R \times \hat{n})$$

§ 6.4 线性磁介质和非线性磁介质

6.4.1 磁化率与导磁率

在顺磁性与反磁性材料中 H 与外场 B 有关，但事实上更常用 H 。因此

$$\text{定义: } \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{其中 } \chi_m \text{ 称为磁化率}$$

对于顺磁性材料 $\chi_m > 0$ ，对于反磁性材料 $\chi_m < 0$ 。

服从上式的介质称为线性磁介质。

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \text{称为基本关系}$$

$$\text{其中 } \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad M_r = \frac{M}{\mu_0} = 1 + \chi_m \text{ 称为相对导磁率, } M \text{ 称为矫顽磁矩}$$

学习目标：利用磁场强度计算磁介质中磁场

虽然 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，但在线性磁介质中 $\nabla \cdot \vec{H}$ 不一定等于零。

$$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \text{ 往往在边界面 (M 变化处) } H \text{ 的散度不为零。真空中}$$

例如一个线性顺磁性圆柱体位于磁场中，做如图高斯面。

上侧由于 $M = 0$, $\int M \cdot d\vec{a} = 0$ ，右侧 $M \neq 0$, $\int M \cdot d\vec{a} > 0$ 。

因此 $\oint M \cdot d\vec{a} \neq 0$ ，则 $\nabla \cdot M$ 必不等于零。

在线性磁介质中，体约束电流正比于自由电流。

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi_m \vec{H}) = \chi_m \vec{J}_f$$

特别是，当磁介质中无自由电流时，磁介质无体约束电流，约束电流只存在于表面。

6.4.2 铁磁性

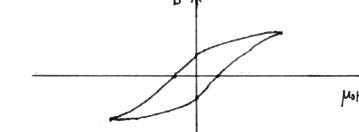
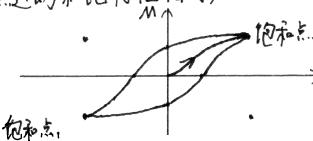
铁磁性材料无需外场 B 即可保持自身 M 不变，因此其为非线性磁介质。

其主要特点为：每个磁偶极矩趋向于与附近磁偶极矩指向相同的方向。

因此铁磁性材料中存在许多磁偶极矩方向互不相同的微小磁畴，磁畴内部磁偶极矩相同。

由于这种特性，磁化过程即使磁畴方向全部一致，因此磁化过程遵循磁滞回线。

且由于热运动和此特性相对，因此温度较高时材料失去此性质，临界温度称为居里点，材料为顺磁性。



§ 6.5 补充题中的知识点

Prob. 6.25 注意下列平行性质：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0, \nabla \times \vec{E} = \vec{0}, \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P} & (\text{没有自由电荷}) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{H} = \vec{0}, \mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \vec{M} & (\text{没有自由电流}) \end{cases}$$

利用 $\vec{D} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{P} \rightarrow \vec{M}$, $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$

计算均匀磁化球磁感应强度。

(b) 线性磁介质球处于匀强磁场中时，介质球内部磁感应强度。

(c) 求取决于球内部公转、恒电流子球的平均磁场

(a) 由 $\vec{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$

$$\text{得 } \vec{H} = -\frac{1}{3} \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\text{得 } \vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

(说明了 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$ 对应原因)

$$(b) \text{由 } \vec{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 = \frac{3\vec{E}_0}{\frac{\vec{B}}{\mu_0} + 2}$$

$$\text{得 } \vec{H} = \frac{3\vec{H}_0}{\frac{\vec{B}}{\mu_0} + 2}$$

$$\text{得 } \vec{B} = \frac{1 + \chi_m}{1 + \frac{\chi_m}{3}} \vec{B}_0$$

Prob. 6.26

由 $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int P(\vec{r}') \frac{\hat{r}}{r'^2} d\tau'$ 全部包含因子 $\int \frac{1}{r'^2} d\tau'$ ，因此若已知均匀带电物体，则可以求出。

$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int P(\vec{r}') \frac{\hat{r}}{r'^2} d\tau'$ 对应均匀极化物体电势及均匀磁化物体磁势

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int M(\vec{r}') \frac{\hat{r}}{r'^2} d\tau'$ 利用此性质计算均匀极化球内外电势及均匀磁化球内外磁势。

考虑均匀带电球电场

$$\vec{E}_{\text{内}} = \frac{P}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad \vec{E}_{\text{外}} = \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{由 } \vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r}}{r^2} d\tau' \text{ 设 } \int \frac{\hat{r}}{r^2} d\tau' = \vec{A}$$

$$\text{则 } \vec{A}_{\text{内}} = \frac{4\pi}{3} P \hat{r} \quad \vec{A}_{\text{外}} = \frac{4\pi R^3}{3r^2} P \hat{r}$$

$$\Rightarrow V_{\text{内}} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} \hat{r} = \frac{P}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

$$V_{\text{外}} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi R^3}{3r^2} \hat{r} = \frac{R^3 P}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{A}_{\text{内}} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \times \frac{4}{3}\pi \hat{r} = \frac{\mu_0}{3} M \times \hat{r}$$

$$\vec{A}_{\text{外}} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \times \frac{4\pi R^3}{3r} \hat{r} = \frac{\mu_0 R^3}{3r} M \times \hat{r}$$

Prob. 6.28

一个磁偶极子 \vec{m} 被引入线性磁介质球 (导磁率为 μ)，求球内外磁场。

解：此题与 Prob. 4.37 类似。

$\nabla \times \vec{H} = \chi_m \nabla \times \vec{H} = \chi_m \vec{J}_f$ 得 \vec{m} 引起体电流，产生磁偶极矩为 $\chi_m \vec{m}$

因此总磁偶极矩大小 $\vec{m}_0 = \vec{m} + \chi_m \vec{J}_f \vec{m} = \frac{\mu_0}{\mu_0} \vec{m}$

它产生磁场为 $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}]$

磁介质球表面产生约束电流 \vec{K}_b ，类比 Prob. 4.37 进行大胆假设

此电流在介质中产生的磁场为 $\vec{B}_2 = A \vec{m}$

则总磁场 $\vec{B}_{in} = \vec{B}_0 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] + A \vec{m}$

因此 $\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}_{in} = \frac{\chi_m}{4\pi r^3} \frac{1}{3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] + A \frac{\chi_m}{\mu} \vec{m}$

则 $\vec{K}_b = M_{(R)} \times \hat{r} = \left(\frac{\chi_m}{4\pi r^3} + A \frac{\chi_m}{\mu} \right) \vec{m} \times \hat{r} = \left(\frac{\chi_m}{\mu} - \frac{\chi_m}{4\pi R^3} \right) M \sin \theta \hat{\phi}$

化为均匀磁化球内部磁场： $\vec{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 \chi_m \left(\frac{A}{\mu} - \frac{1}{4\pi R^3} \right) \vec{m}$

与假设对比： $A = \frac{2}{3} \mu_0 \chi_m \left(\frac{A}{\mu} - \frac{1}{4\pi R^3} \right)$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2(\mu_0 - \mu)}{R^3(\mu_0 + \mu)}$$

$$\text{因此 } \vec{B}_{in} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] + \frac{2(\mu_0 - \mu) \vec{m}}{R^3(\mu_0 + \mu)} \right\} \quad (r < R)$$

面约束电荷在球外产生磁场等于其转化为理想磁偶极子产生磁场。

$$\vec{M}_{trans} = \frac{4}{3} \pi R^2 \times \left(\frac{3}{2\mu_0} \vec{B}_2 \right) = \frac{\mu_0 (\mu_0 - \mu) \vec{m}}{\mu_0 (2\mu_0 + \mu)}$$

$$\text{总磁偶极矩 } \vec{m}_{tot} = \vec{m}_0 + \vec{M}_{trans} = \frac{3\mu_0 \vec{m}}{2\mu_0 + \mu}$$

$$\text{其产生磁场为 } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \right) \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}]$$

补充：电像法——在磁场中应用。

设一无限长的直线电流 I 位于一无限大磁介质平面附近，该电流与分界面平行，且与分界面距离为 d ，界面上两侧介质磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 。计算上半空间磁场时，假设镜像电流 I' 位于 μ_2 中，并使空间充满 μ_1 介质。

$$\text{则 } \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\phi + \frac{I'}{2\pi r} \vec{a}'_\phi, \quad \vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi + \frac{\mu_1 I'}{2\pi r} \vec{a}'_\phi$$

计算下半空间磁场时，假设镜像电流 I'' 位于 μ_1 中与 I 重合

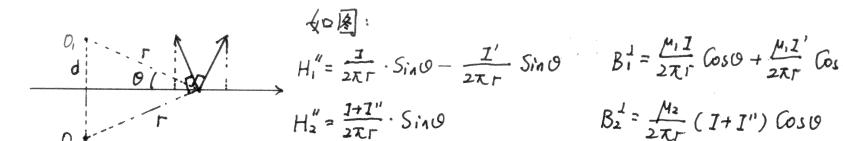
并且使空间充满 μ_2 介质。

$$\text{则 } \vec{H}_2 = \frac{I+I''}{2\pi r} \vec{a}_\phi, \quad \vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2 = \frac{\mu_2}{2\pi r} (I+I'') \vec{a}_\phi$$

边界条件： $r = r' = r''$ 处

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f = 0 \Rightarrow H_1'' = H_2''$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow B_1^z = B_2^z$$



$$\text{得 } I - I' = I + I'' \Rightarrow \begin{cases} I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \\ \mu_1 I + \mu_1 I' = \mu_2 (I + I'') \\ I'' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I \end{cases}$$

由 μ_1, μ_2 不同，判定 I', I'' 大小和方向

(1) $\mu_2 > \mu_1$ 时， $I' > 0, I'' < 0, I'$ 与 I 方向一致， I'' 与 I 方向相反

(2) $\mu_2 < \mu_1$ 时， $I' < 0, I'' > 0, I'$ 与 I 方向相反， I'' 与 I 方向相同

(3) μ_1 有限， $\mu_2 \rightarrow \infty$ ，即当第二种物质为铁磁物质时， $I' = I, I'' = -I$

$$\text{此时 } \vec{H}_2 = \frac{I+I''}{2\pi r''} \vec{a}_\phi = \vec{0}$$

$$\text{而 } B_2 = \lim_{r'' \rightarrow \infty} [\mu_2 \times \frac{1}{2\pi r''} (I + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I)] = \frac{\mu_1 I}{\pi r}$$

(4) $\mu_1 \rightarrow \infty, \mu_2$ 为有限时， $I' \approx I, I'' \approx -I$ 。

说明电流位于磁物质中时，下部空间的磁感应强度比电流位于整个空间充满磁介质时产生磁感应强度增加了一倍。

第七章 电动力学

7.1 电动势

7.1.1 欧姆定律

大多数物质中，电流密度与正比于单位电荷推力：

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{其中 } \sigma \text{ 称为电导率, 其倒数 } \rho = \frac{1}{\sigma} \text{ 称为电阻率.}$$

理想导体 $\sigma = \infty$, 理想绝缘体 $\sigma = 0$.

一般来说, 驱动电流的动力一般为电动势 $F = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\text{则 } \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

由于电子速度较小(等离子体等除外), 磁场贡献量较小.

因此 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 称为欧姆定律

在理想导体中, 由于 $\sigma = \infty$ 因此驱使电流的所需电场已是微不足道的.

因此往往认为导线都是等势的, 而电阻器几乎不使用导电材料.

从一个电极流向另一个电极的总电流正比于它们之间的电势差

即 $V = IR$ 为更常用的欧姆定律.

其中 R 称为电阻, 是材料及形状的函数.

对于稳恒电流在均匀电导率材料中.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

因此材料中无电荷累积, 即所有不平衡电荷处于材料表面.

因此, 带有恒定电流和均匀电导率材料内, 拉普拉斯方程成立, 第三章工具和技巧依然适用.

欧姆定律意义: 电子一面被电场加速, 另一面频繁与原子相撞且由于漂移速度远小于热运动速度, 相撞时间间隔取决于热运动速度.

因此电场做功被转化为电阻器放热, 由于每单位电荷做功为 V , 每单位时间流过电荷为 I

因此传递功率 $P = VI = I^2 R$. 为焦耳热定律

7.1.2 电动势

对电路中的电子有两种驱动力: $\vec{J} = \vec{f}_s + \vec{E}$ 其中 \vec{f}_s 为外界推力, 例如电池推力.

其总效果为 $\vec{J} = \vec{f}_s \cdot d\vec{l} = \vec{f}_e \cdot d\vec{l}$ (静电场 $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$) 被称为电动势, 简写为 emf

理想电源中(无内阻), 电荷受合力为零

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{f}_s$$

$$\text{得两极间电势差 } V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{f}_s \cdot d\vec{l} = \vec{f}_s \cdot \vec{d}l = \mathcal{E}$$

因此, 电池的作用就是建立并维持与电动势相等的电势差.

7.1.3 动生电动势

发电机利用动生电动势. 如图

闭合回路有垂直纸面向内的磁场, 整个回路以速度 v 被拉向右边
在 ab 段中电荷受到磁力, 垂直分量 qvB 驱动电流流过回路.

$$\text{电动势为 } \mathcal{E} = \vec{f}_e \cdot d\vec{l} = vBh$$

由于磁力不做功, 实际电流中的能量由拉动线框产生且大小相等.

换一种方法计算电动势:

$$\text{令 } \Phi \text{ 为 } \vec{B} \text{ 通过回路的磁通量: } \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\text{对于上图矩形回路 } \Phi = B h x$$

$$\text{线框向左运动时, 磁通量减小, } \frac{d\Phi}{dt} = B h \frac{dx}{dt} = -Bhv$$

$$\text{因此 } \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ 称为动生电动势的磁通量定则.}$$

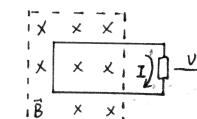
但注意, 小心开关突变, 滑动触点等情况, 最好使用洛伦兹定律
因为磁通量定则可能会产生矛盾.

如图, 开关切换时, 回路磁通量变为之前二倍, 但由于无电流切断磁感线, 实际电流计 A 中无电流.
更加棘手的是涡流的情形, 因其电流分布难以确定.

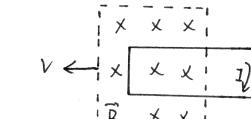
7.2 电磁感应

7.2.1 法拉第定律

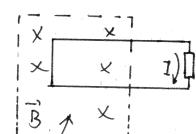
法拉第的三个实验:



a)



b)



变化的磁场

结论: 一个变化的磁场可以感应出电场

$$\text{且感生电场电动势 } \mathcal{E} = \vec{f}_e \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \text{ 称为法拉第定律.}$$

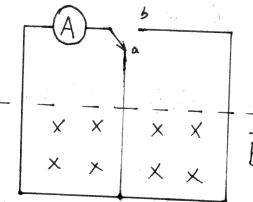
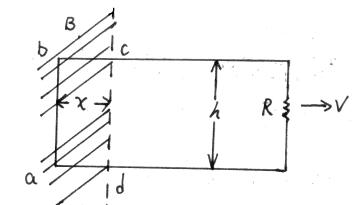
$$\text{利用旋度定理, 化为微分形式的法拉第定律: } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

普遍通量定则: 无论何时(并且不论什么原因), 当通过一个回路的磁通量改变时, 都会在回路中出现电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

为确定感生电场方向, 使用楞次定律: 自然状态反抗磁通量的改变.

感生电流自身产生的磁通量将倾向于抵消磁通量的变化.



7.2.2 感应电场

一个理想的感应电场(只取决于 B , $\rho=0$)

$$\text{满足 } \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

在数学上和磁场形式相同.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 I$$

因此由 $B-S$ 定律类比得

$$\vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \hat{s} \right) d\vec{a} = -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

若对称性允许, 可使用安培定则的技巧 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$.

$$\text{得到 } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

例: 竖直向上的匀强磁场 $B(t)$ 随时间变化, 求感应电场.

$$\text{解: } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\pi s^2 B(t)) = -\pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\text{得 } E = -\frac{s}{2} \frac{dB}{dt}$$

由于电磁感应只在磁场变化时出现, 而计算时仍使用静磁学, 被称为准静态. 一般只有考虑电磁波和辐射时, 才考虑静磁学定律失效问题.

7.2.3 互感

假设有两个线圈, 若向线圈1通入电流, 它产生磁场 \vec{B}_1 . 一些场线穿过线圈2

设 Φ_2 为 \vec{B}_1 穿过线圈2的磁通量

$$\text{由 } B-S \text{ 定律 } \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1}{\pi r} \int \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{s}}{r^2} \propto I,$$

$$\text{而 } \Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 \propto I,$$

因此 $\Phi_2 = M_{21} I$, 其中 M_{21} 称为互感系数

借助矢势可得 M_{21} 方程:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \int (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

$$\text{由 } \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \phi \frac{d\vec{l}_1}{r}$$

$$\text{得 } \Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \phi \left(\phi \frac{d\vec{l}_1}{r} \right) \cdot d\vec{l}_2$$

因此 $M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \phi \phi \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$ 称为纽曼方程.

性质: 1. M_{21} 只与线圈形状、相对位置有关.

2. 改变下标后发现: $M_{21} = M_{12}$.

即在线圈1通入电流 I 后穿过线圈2的磁通量等于在线圈2中通入相同大小电流 I 后穿过线圈1的磁通量

例: 一个小螺线管(长为 l , 半径为 a , 单位长度 n 匝)位于大螺线管(半径为 b , 单位长度 m 匝)轴线上.

向小螺线管中通入电流 I , 求通过大螺线管的磁通量.

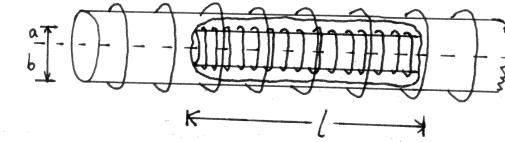
解: 由于小螺线管较短, 产生磁场较复杂.
假设向大螺线管通入电流 I , 内部磁均为

$$B = \mu_0 N_2 I$$

因此穿过小螺线管单圈的磁通量为 $\Phi = \mu_0 N_2 I \pi a^2$

因此穿过小螺线管磁通量为 $\Phi = \mu_0 N_2 I \pi a^2 n l$

等同于小螺线管通过大螺线管的磁通量.



由于线圈1中变化的电流, 则穿过线圈2的磁通量变化, 产生感应电场.

$$\epsilon_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -M \frac{dI}{dt}$$

再进一步想, 变化的电流不仅在附近环路中激发电势, 也在自身中激发一个电动势.

由于磁感应强度大小正比于电流: $\Phi = L I$ 其中 L 称为自感, 与 M 相同, L 也只取决于形状.

$$\text{若电流变化, 环中产生的感应电场: } \epsilon_2 = -L \frac{dI}{dt}$$

电感单位是亨利 (H).

例: 计算横截面为矩形(内半径为 a , 外半径为 b , 高为 h , 缠绕铜线 N 匝)的环形螺线圈.

$$\text{解: 其内部磁场为 } B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}$$

$$\text{磁场穿过一匝的磁通量为 } \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_a^b h ds = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{总磁通量为 } \Phi = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{因此自感 } L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

电感就像电容一样是固有的正的量.

由楞次定律($\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 中的负号), 此电动势阻碍电流变化. 因此称此电动势为反电动势.

凡电流变化, 必有反电动势相抗.

7.2.4 磁场中的能量

下面计算为使电流流动所克服反电动势做的功.

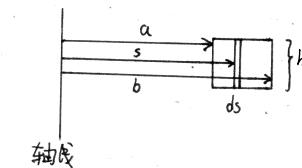
单位电荷绕环路一周做功 ($-\epsilon$), 而单位时间通过导线的电荷量为 I

$$\text{因此单位时间为克服反电动势做功 } \frac{dw}{dt} = -\epsilon I = LI \frac{dI}{dt}$$

若电流从零开始连续变化, 则总功为 $W = \frac{1}{2} L I^2$

此能量被储存在磁场中, 当电流减小时再释放出来.

$$\text{若考虑两导体互感, 总能量 } E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_1 I_1 I_2$$



另一方面，对上式进行改写，利用 $\vec{A} = \vec{I}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} I \vec{A} = \frac{1}{2} I \int (\vec{B} \cdot d\vec{a}) = \frac{1}{2} I \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{2} I \phi \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \phi (\vec{A} \cdot \vec{l}) d\vec{l}$$

写为体电流形式： $W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV$

利用安培定则： $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) dV$$

利用分离积分方法： $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

$$\text{得 } W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 dV - \int A \cdot (\nabla \times B) dV \right] = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_V B^2 dV - \phi_s (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} \right]$$

$$\text{若取全空间： } W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{all space}} B^2 dV$$

因此， $W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$ 说明能量储存在磁场中，大小为每单位体积 $(\frac{B^2}{2\mu_0})$ ；

而 $W = \frac{1}{2} \int (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV$ 说明能量储存在电流中，大小为每单位体积 $(\frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j})$ ；

二者仅仅是记账上的区别，无需担心能量储存在位置。

虽然磁场不做工，但是在建立磁场时会产生感应电场，正是感应电场提供所需能量的原因。

与电场能量对比：

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \int (V \rho) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

例：长同轴电缆（内半径为 a ，外半径为 b ）内外表面和外表面分别通相反方向电流

求长度 L 中的磁场中储存的能量。

由安培定律 磁场为 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$ $a \leq s \leq b$.

$$\vec{B} = \vec{0} \quad \text{其它。}$$

单位体积能量为 $\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$

$$\text{总能量： } W = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \times s \times 2\pi ds = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \ln(\frac{b}{a})$$

由于能量也可写为 $W = \frac{1}{2} L I^2$ 。

$$\text{得 } L = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$$

当电流较为复杂以致不便求磁通量时，可以用能量的方法求解自感。

学过标量计算磁场能量。

7.3 麦克斯韦方程组

7.3.1 麦克斯韦之前的电磁学

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

由于向量旋度的散度一定为零，则

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \text{ 成立}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{j}) = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{j})$$

针对非稳恒电流，此公式错误。

考虑如右图安培环，当使用平面作为表面时，穿过安培环电流为 I

当使用曲面作为表面时，穿过安培环电流为 0，产生歧义。

且安培定则由 BS 定律导出，只适用于静磁场，这里有电荷堆积在电容器极板上，非静磁场。

7.3.2 麦克斯韦如何修改安培定则

问题出在 $\nabla \cdot \vec{j} \neq 0$ 。

根据连续性定律和高斯定律。

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

则 $\nabla \cdot (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$ 去掉了额外的散度。

$$\text{则 } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

麦克斯韦首次揭示：变化的电场产生磁场。

此项被麦克斯韦称为位移电流： $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\text{积分形式安培定则： } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a}$$

7.3.3 麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

和力定律 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 总结全部经典电动力学。

注：不可认为 E 、 B 的旋度由 \vec{B} 、 \vec{E} 对时间导致产生，归根到底，它们都由 \vec{j} 产生。

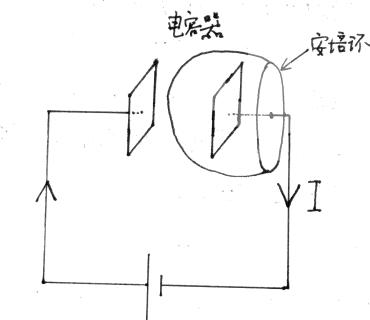
7.3.4 磁荷

$P = 0, \vec{j} = \vec{0}$ 的空间有：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \quad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_m \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

但目前来说，磁荷不存在。



7.3.5 物质中的麦克斯韦方程

下面推导基于自由电荷和自由电流的麦克斯韦方程.

在静态情况下, \vec{P} 激发约束电荷 $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$

\vec{M} 激发约束电流 $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$

在非静态情况下有新的特点: 电极化的变化带来约束电荷的流动, 记为 \vec{J}_p . 此电流需包含在总电流中.

考虑小极化块, 若 \vec{P} 增加, 则每个面上 ρ_b 增加, 产生电流

$$dI = \frac{\partial \rho_b}{\partial t} da_1 = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} da_1$$

电流密度因此为: $\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

极化电流与约束电流 \vec{J}_b 无关, 后者由磁化给出.

极化电流的连续性方程: $\nabla \cdot \vec{J}_p = -\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

注意: 磁化的变化没有类似的效果.

因此, 总电荷被分成两部分 $P = P_f + P_b = P_f - \nabla \cdot \vec{P}$

总电流被分成三部分 $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

高斯定律: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (P_f - \nabla \cdot \vec{P})$

得 $\nabla \cdot \vec{D} = P_f$ 其中 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

安培定律: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

得 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 其中 $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

因此麦克斯韦方程改写为:

$$\nabla \cdot \vec{D} = P_f \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

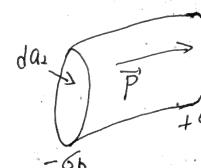
此方程条件不全, 需另指出 \vec{D} 与 \vec{B} 的关系,

例如对于线性电介质: $P = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, $M = \chi_m \vec{H}$

$$\text{或 } \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\text{其中 } \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

$$\text{这里, 位移电流 } J_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



7.3.6 边界条件

由麦克斯韦方程在物质中的形式

得边界条件 $\epsilon_1 \vec{E}_1^+ - \epsilon_2 \vec{E}_2^+ = G_f$

$$\vec{E}_1^- - \vec{E}_2^- = \vec{0}$$

$$\vec{B}_1^+ - \vec{B}_2^+ = \vec{0}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^- - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^- = K_f \times \hat{n}$$

若边界上无自由电荷、自由电流

$$\epsilon_1 \vec{E}_1^+ - \epsilon_2 \vec{E}_2^+ = \vec{0}$$

$$\vec{E}_1^- - \vec{E}_2^- = \vec{0}$$

$$\vec{B}_1^+ - \vec{B}_2^+ = \vec{0}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^- - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^- = \vec{0}$$

§7.4 补充题中的知识点

Prob. 7.44 超导效应

(a) 证明完美导体中 \vec{B} 不随时间变化.

由于 $\vec{E} = 0$, 得 $\nabla \times \vec{E} = \vec{0} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

(b) 证明通过一个完美导体环的磁通量是常数.

由于 $\vec{E} = 0$, 得 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

超导体是一个完美导体并且其内部实际磁场 \vec{B} 为零.

(c) 超导体中的电流只存在于表面.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

由于 $\vec{E} = 0$, 得 $\vec{J} = 0$, 即电流只分布在表面.

Prob. 7.49 对于法拉第感应电场, 有 $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

证明: 由 Prob. 5.52, 有 $\vec{A}(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{r^2} d\tau'$

$$\text{由 7.2.2 节, 得 } \vec{E}(r) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{r^2} dt' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{r^2} d\tau'$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

或由: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 类似 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

$$\text{得 } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Prob. 7.53 圆形闭合电流环(半径为 r, 电阻为 R)包围着匀强磁场, 磁感应强度大小 $B = \alpha t$

理想电压表接入 P 和 Q 之间

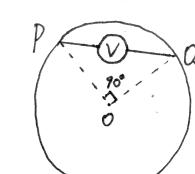
(a) 求环中电流 (b) 求电压表示数

$$\text{解: (a) } I = \frac{E}{R} = \frac{d\phi}{R dt} = \frac{\pi r^2 \alpha}{R}$$

(b) 考虑由 ΔOPQ 构成回路, $\oint E = \frac{1}{2} \alpha \pi r^2$.

由于 OP 和 OQ 垂直于电场方向, 电场不做功

电压表测 PQ 间电压 $V = \frac{1}{2} \alpha \pi r^2$. 注: 此情景中, 电压表示数与线路形状有关, 做法连接圆心.



Prob. 7.64 电磁二元变换

考虑如下变换 $\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\frac{1}{c}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} q_e' \\ \epsilon_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \frac{1}{c}\sin\alpha \\ -c\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_e \\ \epsilon_m \end{pmatrix}$

麦克斯韦方程组不变.

力学: $\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E})$ 不变.

第八章 守恒定律

§8.1 电荷与能量

8.1.1 连续性方程

以电荷连续性方程为例

$$\text{体积 } V \text{ 中的电荷 } Q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

流出边界 S 的电流为 $\phi_s \vec{j} \cdot d\vec{a}$

由于局部电荷守恒：体积中电荷的减少等于流出边界的电荷。

$$\frac{dQ}{dt} + \phi_s \vec{j} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$$

对于任意体积成立，则

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{为连续性方程的数学形式，可由 Maxwell 方程得出。}$$

8.1.2 坡印廷定理

$$\text{静电荷体系能量 } W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

$$\text{磁场能量 } W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

$$\text{因此单位体积电磁场的储能 } U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

考虑一些电荷和电流构成的体系，在此时间内这些电荷微移，求电磁力作用于这些电荷的元功。

$$\text{由洛伦兹定理。 } \vec{F} \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

$$\text{代入 } q \rightarrow \rho dV, \vec{v} \rightarrow \vec{j}$$

$$\text{则 } \frac{dw}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \int_V \rho \vec{E} \cdot \vec{v} dV = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV$$

$$\text{由 } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\text{则 } \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{由 } \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \text{ 且 } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{得 } \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\text{代入得 } \vec{E} \cdot \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\text{则 } \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \int_V \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) dV - \frac{1}{\mu_0} \phi_s (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a}$$

$$\text{令 } U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2), \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\text{则 } \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\mu_0} \int_V \phi_s d\vec{a} = 0 \quad \text{称为坡印廷定理。}$$

内涵：电磁场总能的减少 ($\frac{dw}{dt} + \phi_s d\vec{a}$) 等于流出边界面能量 ($\phi_s \vec{S} \cdot d\vec{a}$) 与对电荷做功 ($\frac{dw}{dt}$) 之和。

U 称为能量密度， \vec{S} 称为坡印廷矢量，为单位时间、单位面积、传播的能量（能流密度）。

若对电荷做功为零 $\frac{dw}{dt} = 0$ 。

$$\text{则 } \int_V \phi_s d\vec{a} + \vec{S} \cdot d\vec{a} = \int \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int (\nabla \cdot \vec{S}) dV = 0$$

$$\text{对任意体积, } \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

为能量的连续性方程。

总的来说，电磁场的能量不守恒，场对电荷做功；电荷产生场，对于全部能量体系中必须考虑场和物质。

§8.2 动量

8.2.1 电动力学中的牛三定律

在静电力学中，电荷之间相互作用符合牛三定律；在电动力学中，电荷之间相互作用力不符合牛三定律。

破坏了牛三定律背后的动量守恒。为此，应认为磁场本身存在动量。

8.2.2 麦克斯韦张量矩阵

$$\text{单位体积微元受电动力: } \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\text{由 } \rho = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}), \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ 得}$$

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

$$\text{即 } \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = (\vec{E} \cdot \vec{B}') + (\vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\text{由 } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \text{ 得 } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}).$$

$$\text{则 } \vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right]$$

$$\text{由于 } \nabla \cdot (\vec{E}^2) = \nabla \cdot (\vec{E} \cdot \vec{E}) = 2(\vec{E} \cdot \vec{E}) = 2(\vec{E} \cdot \vec{E}) + 2\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

$$\text{同理 } \nabla \cdot (\vec{B}^2) = 2(\vec{B} \cdot \vec{B}) + 2\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$\text{则 } \vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2\mu_0} \nabla \cdot (\vec{B}^2) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right] - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right] - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

引入麦克斯韦张量矩阵。

$$T_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2)$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) & \epsilon_0 (E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y) & \epsilon_0 (E_x E_z) + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_z) \\ \epsilon_0 (E_y E_x) + \frac{1}{\mu_0} (B_y B_x) & \frac{1}{2} \epsilon_0 (-E_x^2 + E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{\mu_0} (-B_x^2 + B_y^2 - B_z^2) & \epsilon_0 (E_y E_z) + \frac{1}{\mu_0} (B_y B_z) \\ \epsilon_0 (E_z E_x) + \frac{1}{\mu_0} (B_z B_x) & \epsilon_0 (E_z E_y) + \frac{1}{\mu_0} (B_z B_y) & \frac{1}{2} \epsilon_0 (-E_x^2 - E_y^2 + E_z^2) + \frac{1}{\mu_0} (-B_x^2 - B_y^2 + B_z^2) \end{pmatrix}$$

张量与向量点乘仍为向量.

$$(\vec{a} \cdot \vec{T})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij} \quad (\vec{T} \cdot \vec{a})_j = \sum_{i=x,y,z} T_{ji} a_i$$

$$(\nabla \cdot \vec{T}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\text{而其分量 } (\nabla \cdot \vec{T})_j = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2] + \mu_0 [(\nabla \cdot \vec{B}) B_j + (\vec{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2]$$

$$\text{则 } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} (= \nabla \cdot \vec{T} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t})$$

$$\text{积分得 } \vec{F} = \phi_s \vec{T} \cdot d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{S} \cdot d\tau$$

在静止情况下, 第二项为零, 则

$$\vec{F} = \phi_s \vec{T} \cdot d\vec{a}$$

物理意义: \vec{T} 为微元体应力, (T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}) 为正应力; $(T_{xy}, T_{xz}, \text{etc})$ 为切应力.

例: 计算均匀带电球体(半径为 R, 带电量 Q)对北极球作用力.

取球壳 $R > 0$ 区域, 在 $r \rightarrow \infty$ 时 $E \rightarrow 0$, 则 $\vec{T} = 0$ 不予考虑.

只考虑 $Z > 0$ 区域:

$$r < R \text{ 时 } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_r}{R^3} \vec{r} = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$$

由于 \vec{T} 沿 Z 轴, 因此只计算 T_Z .

$$F_Z = T_{zx} dx + T_{zy} dy + T_{zz} dz = T_{zz} dz.$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} (-E_x^2 - E_y^2 + E_z^2) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^4.$$

$$dz = -r dr d\phi \frac{\hat{z}}{2}$$

$$\text{则 } F_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 \cdot 2\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{16R^2}.$$

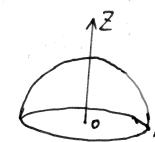
$$r > R \text{ 时 } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_r}{R^3} \vec{r} = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})$$

$$T_{zz} = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$F_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot 2\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^3} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2}.$$

$$\vec{F} = F_z \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{16R^2} \hat{z}.$$

或使用带电荷部分边界计算, 结果相同.



8.2.3 动量守恒.

电磁力等于对物体动量变化 $F = \frac{dp}{dt}$

$$\text{则 } \frac{dp}{dt} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{S} \cdot d\tau + \phi_s \vec{T} \cdot d\vec{a}$$

$$\text{有 } \frac{dp}{dt} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{S} \cdot d\tau - \phi_s \vec{T} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\text{令 } \vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \phi_s (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\text{则 } \frac{dp}{dt} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{g} \cdot d\tau + \phi_s (-\vec{T}) \cdot d\vec{a} = 0$$

内涵: 电磁场动量的减少 $(-\frac{dp}{dt}, \vec{g} \cdot d\tau)$ 等于流出边界面动量 $(\phi_s (-\vec{T}) \cdot d\vec{a})$ 与电荷得引动量 $(\frac{dp}{dt})$ 之和, 其中 \vec{g} 称为动量密度, $(-\vec{T})$ 为动量流密度, $-\vec{T} \cdot d\vec{a}$ 为单位时间通过 $d\vec{a}$ 的动量.

若对电荷冲量为零,

$$\text{则 对 体 积, } \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \nabla \cdot (-\vec{T}) = 0$$

为动量连续性方程.

总的来说, 电磁场动量不守恒, 必须考虑物体和场总的动量守恒.

注意: \vec{S} 有两重身份: ① 单位时间穿过单位面积的能量 (能量密度) ② $\mu_0 \epsilon_0 \vec{S}$ 为场中单位体积动量 (动量密度)

\vec{T} 有两重身份: ① 作用于电荷的应力 ② $(-\vec{T})$ 描述穿过单面积的动量流 (动量流密度)

8.2.4 角动量

由于 $\vec{g} = \phi_s (\vec{E} \times \vec{B})$

$$\text{则 角动量 } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \epsilon_0 [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})]$$

例: 半径为 R 的长直螺线管 (半径为 R, 单位长度 n 匝, 电流为 I), 同轴有两个长为 l 的圆柱金属球壳 (外壳: 半径为 b, 带电量 -Q; 内壳: 半径为 a, 带电量 Q). 当螺线管电流减少时, 金属壳开始旋转, 求角动量变化.

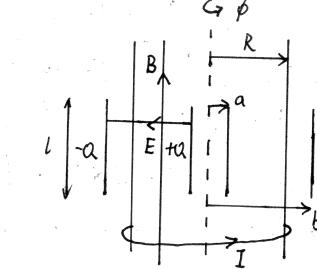
$$\vec{E} = \frac{\alpha}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{s} \hat{s} \vec{S} \quad (a < s < b)$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} \quad (s < R)$$

$$\text{则 } \vec{g} = -\frac{\mu_0 n I \alpha}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\phi} \quad (a < s < R)$$

$$\text{则 角动量的 Z 分量 } L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -\frac{\mu_0 n I \alpha}{2\pi l} \quad (\text{常数})$$

$$\text{总角动量, } \vec{L} = L_z \cdot \pi (R^2 - a^2) l \cdot \hat{z} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \alpha (R^2 - a^2) l \hat{z}$$



当电流成小时,变化的磁场产生环形电场

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{R^2}{s} \hat{\phi} & s > R \\ -\frac{1}{2}\mu_0 n \frac{dI}{dt} s \hat{\phi} & s < R \end{cases}$$

$$\text{则对外球壳力矩 } \vec{N}_b = \vec{r} \times (-\alpha \vec{E}) = \frac{1}{2} \mu_0 n \alpha r^2 \frac{dI}{dt} \hat{z}$$

$$\text{得到角动量 } \vec{L}_b = \frac{1}{2} \mu_0 n \alpha R \hat{z} \int_0^R \frac{dI}{dt} dt = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q R \hat{z}$$

$$\text{对内球壳力矩 } \vec{N}_a = -\frac{1}{2} \mu_0 n \alpha a^2 \frac{dI}{dt} \hat{z}$$

$$\text{得到角动量 } \vec{L}_a = \frac{1}{2} \mu_0 n I Q a^2 \hat{z}$$

$$\text{则球壳得到总角动量 } \vec{L}_{\text{em}} = \vec{L}_a + \vec{L}_b = \frac{1}{2} \mu_0 n I Q (a^2 - R^2) \hat{z} = \vec{L}$$

场角动量完全转化为物体角动量.

§8.3 磁场力不做功

考虑废车在磁起重机带动下上升,车体为铁磁性材料,受磁化而成一个大的圆形线圈

因此考虑带电线荷密度 λ ,以 w 角速度旋转的圆环.

磁场力作用于圆环向上分量为 $F = 2\pi I A B_s$

其中 B_s 为磁场水平分量.

由 $I = \lambda w a$. 若圆环上升 dz .

$$\text{此力做功 } dW = 2\pi a^2 \lambda w B_s dz$$

同时,反电动势作用于环,由于其与电荷流向相反,因此角速度减小.

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{而 } d\vec{B} = B_s \cdot 2\pi a dz, \frac{d\phi}{dt} = \vec{\phi} \cdot d\vec{I} = f(2\pi a) \quad \text{其中 } f \text{ 为单位电荷受水平力}$$

$$\text{则 } f = -B_s \frac{d\vec{z}}{dt}$$

$$\text{则环受力矩 } N = a(-B_s \frac{d\vec{z}}{dt}) \cdot \vec{\lambda} \cdot (2\pi a)$$

$$\text{则减小环角动量的功 } dW_1 = N d\phi = N w dt = -2\pi a^2 \lambda w B_s dz$$

$$\text{而 } dW_1 + dW_2 = 0$$

因此铁环转动动能转化为势能.

考虑磁铁,将磁铁简化为环形电流(半径为 b , 电流为 I_b)

小车也为同向环形电流(半径为 a , 电流为 I_a)且二者电流保持不变.

由于平行电流相互吸引.

使小电流环刚好漂浮时, $F_{\text{mag}} : M_a g$

$$F_{\text{mag}} = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = M_a g$$

使小环上升 dz .

$$\text{重力增加 } dW_g = M_a g dz = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

为维持电流,需做功:

$$dW_a = -\epsilon_a I_a dt = \frac{d\vec{B}_a}{dt} \cdot I_a dt = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} dz = dW_g.$$

与此同时,也有反电动势作用于上圆环.

$$dW_b = -\epsilon_b I_b dt = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} dz = dW_a = dW_g$$

也就是说,为提供 dW_g , 消耗 $2dW_g$ 功, 那余下功去向何方?

它转化为储存在场中的能量.

$$U = \frac{1}{2} L_a I_a^2 + \frac{1}{2} L_b I_b^2 + M I_a I_b$$

$$dU = I_a I_b \frac{dM}{dt} \cdot dt = dW_b.$$

磁场不做功由洛伦兹力得出,本质为不存在磁荷.

若存在磁荷,

$$\vec{F} = q_e (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) + q_m (\vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{V} \times \vec{E})$$

则磁场对磁荷做功.

另一种可能,若存在永磁偶极子 \vec{m} (不依赖电流), 则洛伦兹力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) + \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

磁场可对这些 \vec{m} 做功(因为其 S 足够小,无磁通量因此不产生反电动势)但其脱离经典电动力学范畴.

