

群泡

367、

群论 姜志进

第一章 群的基本知识

§1.1 集合与代数运算

集合：有限个或无限个具有一定属性对象的总体，表示： A, B, \dots

元素：集合中的对象，表示： a, b, \dots

实数集（R）；整数集（I）；复数集（C）；空集（ \emptyset ）

$a \in A$ ：元素 a 属于集合 A ； $a \notin A$ ：元素 a 不属于集合 A 。

$A=B$ ： $a \in A \Leftrightarrow a \in B$

$A \subset B$ ： $a \in A \Rightarrow a \in B$ 且 A 是 B 的子集。

交集： $C = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 记作 $C = A \cap B$.

差集： $C = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$ 记作 $C = A - B$.

和（并）集： $C = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 记作 $C = A \cup B$

直和集： $C = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } A \cap B = \emptyset\}$ 记作 $C = A \oplus B$

对于 n 个不相交的集合 A_1, A_2, \dots, A_n 。

其直和集 $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \dots \text{ 或 } x \in A_n \text{ 且 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 不相交}\}$

直积集： $C = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 记作 $C = A \otimes B$

对于 n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 。

其直积集 $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$

代数运算：设 G 是一个非空集合，如果存在一个运算规则，使得 G 中的任意两个元素 g_k, g_l 按此运算

规则后恒对应于 G 中唯一确定的元素 g_m ，则称此运算规则为 G 的一个代数运算。

例如：实数域 R 的加法、减法、乘法都是 R 的代数运算。除法不构成 R 的代数运算。（任何数除以 0 不属于 R）

置换：设编号为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 个对象的一种排列方式为 P_1, P_2, \dots, P_n ，其中 P_1, P_2, \dots, P_n 分别取 $1, 2, \dots, n$ 中的一个数且每个数只取一次。其可认为是基本排列 $1, 2, \dots, n$ 作代换 $i \mapsto P_i, 2 \mapsto P_2, \dots, n \mapsto P_n$ 得到。

将这种代换为置换，记作 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$ 因此置换是 n 个元素的集合到自身的一个 $1-1$ 映射。

且只要上下两个符号与 P 对齐即可，次序可作任意变动不影响结果。例如 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

另取 n 个数的置换 $P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P'_1 & P'_2 & \cdots & P'_n \end{pmatrix}$

则 $PP' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P'_1 & P'_2 & \cdots & P'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_1 & P'_2 & \cdots & P'_n \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P_{P'_1} & P_{P'_2} & \cdots & P_{P'_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P_{P'_1} & P_{P'_2} & \cdots & P_{P'_n} \end{pmatrix}$

为 P 与 P' 两置换的联合置换，也是一种置换。因此置换是一种代数运算。

$$\text{而 } PP' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P'_1 & P'_2 & \cdots & P'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P_{P'_1} & P_{P'_2} & \cdots & P_{P'_n} \end{pmatrix} \neq PP'$$

因此一般来说，两置换乘积的次序是不可交换的。

$$\text{置换的逆: } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\text{恒等置换: } P_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = PP^{-1} = P^{-1}P$$

§1.2 群

1. 定义：设在一个非空集合 G 上规定了一种代数运算，通常统称为“乘法”。

设 $g_k, g_l \in G$ ，两者相乘记为 $g_k g_l$ ，如果这样规定的乘法使集合 G 满足如下四个条件，则称集合 G 为一个群。

(1) 封闭性：如果 $g_k, g_l \in G$ ，则有 $g_k g_l = g_m \in G$

(2) 结合律：即 $(g_k g_l) g_m = g_k (g_l g_m)$

(3) 单位元存在：若 g_k 是 G 中的任一元素，则在 G 中一定存在一个元素 g_0 ，使得 $g_0 g_k = g_k g_0 = g_k$ ，其中 g_0 称为 0 的元素，代表单位元。

(4) 逆元素存在：对于 G 中的每一个元素 g_k ，都有其逆元素 $g_k^{-1} \in G$ 存在，使得 $g_k^{-1} g_k = g_k g_k^{-1} = g_0$ 。

若群 G 的群元素个数有限，则称 G 为有限群，有限群所包含的元素的个数称为群的阶。元素的数目为无穷的群，称为无限群。

若群 G 的元素满足交换律，即对于 $g_k, g_l \in G$ ，有 $g_k g_l = g_l g_k$ ，则称 G 为交换群或 Abel 群。

对于二阶群，群元素之一为单位元，另一为非单位元。由于单位元与所有群元素都对易，所以二阶群一定为 Abel 群。

2. 举例：

(1) I, R, C 对于加法构成群，都是无限群且是 Abel 群。其中单位元为 0，元素 g 的逆元素为 $-g$ 。

对于普通乘法，二者不再构成群。因为若取单位元为 1，则 0 的逆 0^{-1} 将无意义，整数的逆不定为整数。

(2) $n \times n$ 非奇异矩阵 A 的全体，即 $\det A \neq 0$ 矩阵全体，按矩阵的乘法构成一个群，其中单位元是单位矩阵，且由于是非奇异矩阵，每一矩阵都有其逆存在且矩阵元素不可交换，所以这类群为非 Abel 群。

满足 $\det A = \pm 1$ 的 $n \times n$ 矩阵 A 的全体，按矩阵的乘法也构成一个群，其中满足 $\det A = 1$ 的一支仍构成一个群，但满足 $\det A = -1$ 的一支不构成群。因为 $\det(AB) = \det A \cdot \det B = (-1) \cdot (-1) = 1$ 不满足封闭性。

(3) D_3 群:

使等边三角形保持空间取向不变的操作构成集合 $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$ 其中角标了代表操作对称为三角形。该集合有6个元素，其中e表示恒等操作或不操作；

a, b, c表示分别绕如右图所示的对称轴旋转180°的操作；
d, f表示分别绕过中心O并垂直于三角形平面的轴顺时针
旋转120°与240°的操作。



定义两次操作乘积，为操作施行两次操作的结果。乘积如下表所示：

左乘因子	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

先施行的操作处在两元素乘积的右侧。

上表表明 D_3 满足群定义的封闭性、单位元及逆元素、三条件，也满足结合律。

因此 D_3 对于乘法构成群，其阶数为 $n=6$ 。由于 $ab=d \neq f=b^2$ ，所以 D_3 是一种非 Abelian 群。

乘法表中每一行或每一列包含了群中的全体元素，且每一元素只出现一次，这是所有群乘法表的共同特点。

(4) n 元置换群： S_n 。

以 3 元置换群为例：三个数的所有置换共有 6 个元素。

$$P_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, P_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, P_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

构成 6 阶置换群，记为 S_3 。其乘法表需将上表中元素作如下代换

$$e \Rightarrow P_e, a \Rightarrow P_a, b \Rightarrow P_b, c \Rightarrow P_c, d \Rightarrow P_d, f \Rightarrow P_f$$

(5). Pauli 矩阵具有形式

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{满足 } \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k, (i, j, k = 1, 2, 3)$$

则以下 8 个元素的集合 $\Sigma = \{\pm 1, \pm i\sigma_1, \pm i\sigma_2, \pm i\sigma_3\}$ 构成 8 阶群，称为 Pauli 矩阵群或二群。其中单位元为 1, $i\sigma_1$ 逆元素为 $-i\sigma_1$ 。

其乘法表为：

右	1	-1	$i\sigma_1$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$	
左	1	1	-1	$i\sigma_1$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$
-1	-1	1	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_2$	$-i\sigma_3$	$i\sigma_1$	$i\sigma_2$	$i\sigma_3$	
$i\sigma_1$	$i\sigma_1$	$-i\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$i\sigma_2$	1	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$	
$i\sigma_2$	$i\sigma_2$	$-i\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$-i\sigma_1$	$-i\sigma_3$	1	$i\sigma_1$	
$i\sigma_3$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	$-i\sigma_2$	$i\sigma_1$	-1	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	1	
$-i\sigma_1$	$-i\sigma_1$	$i\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$	-1	$-i\sigma_3$	$i\sigma_2$	
$-i\sigma_2$	$-i\sigma_2$	$i\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	$i\sigma_1$	$i\sigma_3$	-1	$-i\sigma_1$	
$-i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	$i\sigma_3$	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	1	$-i\sigma_2$	$i\sigma_1$	-1	

(6) Dirac 矩阵具有形式

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\gamma} \\ -\vec{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{四维矢量 } \gamma^\mu = (\gamma_0, \vec{\gamma}), \quad \delta_{\mu\nu} = (\gamma_0, -\vec{\gamma}) \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

$$\text{满足关系: } \gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_i^2 = -1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0 = \gamma_0^{-1}, \quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i = \gamma_i^{-1}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\mu = 2g_\mu^\nu = 2\delta_{\mu\nu}$$

其中 $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g_\mu^\nu = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 分别为 4 阶四维度规与单位张量。

由关系知，Dirac 矩阵反对易，且 γ_0 正来， γ_i 反来， $\bar{\gamma}_i$ 反来， $\bar{\gamma}_0$ 正来。

子征算符: $\gamma_5 = \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 显然 $\gamma_5^2 = 1$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5 = \gamma_5^{-1}$, $\gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0$ 。

即 γ_5 正来，与各矩阵反对易。此子征算符为 4 个不同的矩阵的乘积。

而由相同的块矩阵可通过反对易关系或为 1 (或 -1)，则 3 个不同的块矩阵的乘积项为 $\gamma_\mu\gamma_5$ ；两个不同的块矩阵的乘积项为 $\gamma_\mu\gamma_\nu$ ；一个块矩阵项为 γ_μ ，0 个块矩阵项为 1，再加上虚号。

则所有矩阵乘积的集合 T 为

$$T = \begin{cases} \pm 1 & (2\text{个元素}) \\ \pm i_1 & (8\text{个元素}) \\ \pm i_1 i_2 & (12\text{个元素}) \\ \pm i_1 i_2 i_3 & (8\text{个元素}) \\ \pm i_3 & (2\text{个元素}) \end{cases}$$

共 32 个元素.

构成一个群. 因为

(1) 单位元存在, 为 1

(2) 封闭性满足, 因为集合 T 包含了从 $0 \rightarrow 4$ 个所有不同 3×3 矩阵的乘积项
所以该集合中任意两元素的乘积都应处在该集合中.

(3) 逆元素存在. 如 i_0 与 i_3 的逆元素为它们本身, i_i ($i=1, 2, 3$) 的逆元素是 $-i_i$,
 $i_0 i_1, i_1 i_2, i_2 i_3$ 的逆元素为其本身, $i_1 i_2$ 与 $i_2 i_3$ 的逆分别是 $-i_1 i_2$ 与 $-i_2 i_3$.

(4) 乘积满足结合律.

因此 T 构成一个 32 阶有限群, 称为 Dirac 矩阵群或 T 群.

3. 性质

定理 1.1 群 G 中任意 m 个元素的乘积, 其结果与元素的组合方式无关.

对于 Abel 群, 这个乘积还与群元素的次序无关.

证明: 结合律.

定理 1.2 群 G 中的单位元 g_0 是唯一的.

证明: 假设群 G 中的单位元不唯一, 还有 g'_0 , 则对于群中的任一元素 $g \in G$

$$\text{有 } g'_0 g = g g'_0 = g$$

$$\text{取 } g = g_0, \text{ 得 } g'_0 g_0 = g_0 g'_0 = g_0.$$

$$\text{又因 } g_0 \text{ 是单位元, 所以, } g'_0 g_0 = g_0 g'_0 = g'_0.$$

$$\text{因此 } g_0 = g'_0.$$

定理成立.

定理 1.3 群 G 中的每个元素 g 的逆 g' 是唯一的.

证明: 假设元素 g 的逆元素不唯一, 还有 g'^{-1} , 则有 $g g'^{-1} = g'^{-1} g = g$.

$$\text{这样 } g'^{-1} = g_0 g'^{-1} = g'^{-1} g g'^{-1} = g'^{-1} g_0 = g'^{-1}$$

所以 g 的逆元素 g'^{-1} 唯一, 且 g 与 g'^{-1} 互为逆元素.

定理 1.4 单位元 g_0 的逆元素是其自身

证明: 假设 g_0 的逆元素为 g_0^{-1} , 则有 $g_0 g_0^{-1} = g_0^{-1} g_0 = g_0$.

另, 对于群中任一元素 $g \in G$, 有 $g g^{-1} = g^{-1} g = g$.

取 $g = g_0^{-1}$, 得 $g_0 g_0^{-1} = g_0^{-1} g_0 = g_0^{-1}$.

因此 $g_0^{-1} = g_0$.

定理 1.5 一群的重排定理. 设 g 为群 G 中的某一元素, 则序列 gg_i ($g_i \in G, i=1, 2, \dots$)

包含群 G 中的所有元素, 且每一元素只包含一次.

证明: (1) 群 G 中的任一元素 g_j 属于序列 gg_i ($g_i \in G, i=1, 2, \dots$)

设 g^* 为 g 的逆元素, 则由群的封闭性可知

$$g^* g_j = g_j \in G$$

则 $g g_i = g_j \in \text{序列 } gg_i$.

(2) 群 G 中的元素在序列 gg_i 中只出现一次

假如某元素, 如 g_j 在序列 gg_i 中出现两次,

即 $gg_k = g_j, gg_m = g_j$ 其中 $g_k \neq g_m$.

用 g^* 左乘以上两式, 得

$$g_k = g^* g_j, g_m = g^* g_j \Rightarrow g_k = g_m. \text{ 与假设矛盾.}$$

所以 g_j 在序列中不能出现两次及以上, 只能出现一次. 这样, 用群中任一元素左乘或右乘群的所有元素所得的新集合, 除元素排列次序不同以外, 与原来的群完全相同. 因此称为群的重排定理.

3.1.3 子群与陪集

1. 子群

(1) 定义: 设 H 是群 G 的一个非空子集, 若对子群 G 同样的乘法运算, H 也构成一个群, 则称 H 为群 G 的子群 (subgroup), 记作 $H \subset G$.

(2) 充要条件:

① 封闭性: 若 $h_1, h_2 \in H$, 则 $h_1 h_2 \in H$

② 逆元素存在: 若 $h \in H$, 则 $h^{-1} \in H$

由于 $h h^{-1} = h^{-1} h = g_0$ 包含在 H 中, 即 H 包含单位元, 因此不再另需此条件.

(3) 种类: 显然子群 (trivial subgroup): 群 G 本身及单位元 g_0 本身

固有子群 (proper subgroup): 群 G 的非显然子群.

无特别说明, 一般所说的子群指的都是固有子群.

(4) 举例: ① 整数群 \mathbb{Z} 是实数群 \mathbb{R} 的子群.

② D_3 群有 4 个子群 $H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, c\}$ 为 2 阶群, $H_4 = \{e, d, f\}$ 为 3 阶 Abel 群.

③ 工程学子群 $\Sigma_i = \{\pm 1, \pm i, \pm j_i\}$ ($i=1, 2, 3$) 为四阶 Abel 群, $Z_2 = \{\pm 1\}$ 为二阶群.

2. 循环群

定义：对于有限群 G 中的任一元素 g ，作序列 $g, g, g^2, \dots, g^m, \dots$

由群封闭性知，上序列每一项都属于 G ，而 G 是有限群，序列中必有重复元素。

设两个最靠近的重复元素的幂指数相等 m ，即 $g^m = g_0$ 。

这样序列将每隔 m 个元素就重复一次。

而集合 $G = \{g_0, g, g^2, \dots, g^{m-1}\}$ 按群 G 的乘法满足群定义的四要求，构成一个有限群称为循环群。

其为 G 的一个子群且是一个阿贝尔子群。

对于二阶群，由于非单位元素的平方只能是单位元，所以二阶群一定是循环群。

3. 复元素

定义：群 G 中部分元素的集合，可将它们视作一个整体，称为复元素（complex element）。

复元素与普通群元素之和，定义为复元素，中的每一项与该群元素之积，仍为一复元素。

例如： $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为群 G 的一复元素， $g \in G$ 为一普通群元素，

则 $gA = g\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = \{ga_1, ga_2, \dots, ga_m\}$ 也为一复元素。

两复元素的乘积，定义为所有可能元素乘积，项中的不同元素的集合。即依次用一个复元素中的各项遍乘另一复元素各项，虽然两复元素乘积仍为复元素。

群的重排定理： $gG = Gg = G$ ($g \in G$)

另有 $GG = G$, $HH = H$ ($H \subset G$)

4. 陪集

定义：设 H 是群 G 的一个子群， g 是 G 中但不属于 H 的任一元素。

即 $H \subset G$, $g \in G$, $g \notin H$

则复元素 $gH = \{gh_i\} = \{gh_0, gh_1, \dots\}$ ($h_i \in H$) 称为子群 H 的左陪集 (left coset)

$Hg = \{hg_j\} = \{hog, hg_1, \dots\}$ ($h \in H$) 称为子群 H 的右陪集 (right coset)

性质：

定理 1.6：陪集中不含有子群 H 的元素，陪集不可或子群。

证明：假设左陪集 gH 中有某元素属于 H ，如 $ghi = h_j \in H$

则 $g = h_j h_i^{-1} \in H$ 与 $g \notin H$ 矛盾。

因此陪集中不含有 H 的元素，因此其不含有单位元，而单位元唯一，因此不构成子群。

定理 1.7 (陪集定理)：两个陪集要么含有完全相同的元素，要么没有公共元素。

证明：设陪集 g_1H 和 g_2H 有一个共同元素，即 $g_1h_i = g_2h_i$

$$\Leftrightarrow g_2^{-1}g_1h_i = g_2^{-1}g_2h_i \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 = h_i \in H$$

则由群重排定理，知 $g_1^{-1}g_2H = h_i^{-1}H = H \Rightarrow g_1H = g_2H$

即两陪集只要有一个元素相同，则两陪集完全相同；反之则完全不同，即支集为 0。

因此，群 G 按子群 H 及其陪集进行分解，即 $G = \{g_1H, \dots, g_kH, H\}$

其中 $g_1, \dots, g_k \in G$ 但 $g_1, \dots, g_k \notin H$

群 G 按子群 H 及其陪集可分解的互不相交的复元素的个数，叫作子群 H 在 G 中的指标。

该指标的取值由如下定理确定：

定理 1.8 (子群阶定理)：设 n 是群 G 的阶， n_H 是子群 H 的阶，则 n 可被 n_H 整除，其商即为子群 H 在 G 中的指标。

证明：取 $g_i \in G$, $g_i \notin H$ 构成 H 的左陪集 $g_iH = \{g_ih_k\}$ ($h_k \in H$)

由定理 1.6 知 g_iH 与 H 分别取了 G 中的不同元素。如果 H 和 g_iH 不能穷尽 G 中元素，取 $g_j \in G$, $g_j \notin H$, $g_j \notin g_iH$ 再构成一陪集 g_jH 。则 g_jH 与 g_iH , H 中元素不同。照此引申，继续下去，由于群的阶数 n 有限，总元素 g_i ，存在使复元素串 $H, g_1H, g_2H, \dots, g_{n_H}H$ 包含了群 G 的所有元素，且每一元素只出现一次。

这样，子群 H 在 G 中的指标 $i = \frac{n}{n_H}$ = 整数。定理得证。

推论：阶数为素数的群，除平凡子群外没有固定子群。

例 1： D_3 群 $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$ 有子群 $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$, $H_3 = \{e, c\}$, $H_4 = \{e, d, f\}$

D_3 群 H 可分解成复元素串。 $H_1 = \{e, a\}$; $bH_1 = \{b, f\}$; $cH_1 = \{c, d\}$ 因此 H_1 在 D_3 中的指标为 $i_1 = \frac{n}{n_{H_1}} = \frac{6}{2} = 3$

H_1 的右陪集 $H_1b = \{b, d\} \neq bH_1$, $H_1c = \{c, f\} \neq cH_1$ 即 H_1 的左右陪集不相同。

同理： $H_2 = \{e, b\}$ $aH_2 = \{a, d\}$ $cH_2 = \{c, f\}$ \Rightarrow 指标 $i_2 = 3$. $H_2a \neq aH_2$

$H_3 = \{e, c\}$ $aH_3 = \{a, f\}$ $bH_3 = \{b, d\}$ \Rightarrow 指标 $i_3 = 3$. $H_3a \neq aH_3$.

$H_4 = \{e, d, f\}$ $aH_4 = \{a, b, c\}$ \Rightarrow 指标 $i_4 = 2$. $H_4a = \{a, c, b\} = aH_4$

例 2： Σ 群 $\Sigma = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 具有子群 $\Sigma_k = \{\pm 1, \pm ik\}$ ($k=1, 2, 3$), $\Sigma_2 = \{\pm 1\}$

则分解为： $\Sigma_k, i \not\in \Sigma_k$ ($j \neq k$; $j, k = 1, 2, 3$) $\Rightarrow i \neq k = 2$.

$\Sigma_2, i \not\in \Sigma_2$ ($j=1, 2, 3$) $\Rightarrow i_2 = 4$

§1.4 类、正规子群与商群

1. 关轭元素

定义：设 f, h 是群 G 的两个元素，若存在元素 $g_k \in G$

使 $f = g_k h g_k^{-1}$ 则称 f 与 h 关轭，或称 f 是 h 的关轭元素，记作 $f \sim h$ 。

性质：

(1) 对称性： $f \sim h \Rightarrow h \sim f$

(2) 可传递性： $f \sim g, h \sim g \Rightarrow f \sim h$

2. 关轭子群

定义：设 H 与 K 是群 G 的两个子群，若有 $g \in G$ ，使得

$$H = gKg^{-1} = \{gk; g^{-1}\} | k \in K\}$$

则称 H 是 K 的关轭子群。

3.类

定义：群 G 中所有相互关联元素的集合，称为群 G 的一个共轭类，简称类。

即群 G 的任一类 $C^{(i)}$ ，满足任意 $g_j \in G$ 。

$$\text{有 } g_j C^{(i)} g_j^{-1} = C^{(i)}$$

性质：

(1) 单位元自成一类

(2) 除单位元之外，其余各类都不是子群（因为不含有单位元）

(3) Abel 群中的每个元素自成一类

(4) 不同的类中没有共同的元素。（因为共轭关系具有可传递性，每一元素只能归属一个类）

(5) 同类元素具有相同的阶

证明：若 $C^{(i)}$ 中任一元素 $g_{i(m)} \in C^{(i)}$ 的阶为 m ，即 $g_{i(m)}^m = g_0$

则对任一元素有 $(g_i g_{i(m)} g_i^{-1})^m = g_i g_{i(m)}^m g_i^{-1} = g_i g_0 g_i^{-1} = g_0$ 阶数仍为 m 。

(6) 当 $g_j \in G$ 取遍群 G 中所有元素时， $g_j g_{i(m)} g_j^{-1}$ 可能不止一次地给出 $C^{(i)}$ 类中的同一元素。

例如：若 $g_{i(m)} = g_0$ ，则 $g_j g_{i(m)} g_j^{-1}$ 给出的总是单位元 g_0 。

定理：

定理 1.9：设 A_c 是由若干类，如 $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(r)}$ 构成的集合，

$$\text{即 } A_c = \{C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(r)}\}$$

$$\text{则 } g_j A_c g_j^{-1} = A_c \quad (g_j \in G)$$

逆定理：任一集合 A_c ，只要满足 $g_j A_c g_j^{-1} = A_c \quad (g_j \in G)$ ，则 A_c 必是由若干个类构成的集合。

定理 1.10：两类的乘积是类的集合。

$$\text{即 } C^{(i)} C^{(j)} = \sum_k a_{ijk} C^{(k)}$$

其中 $C^{(i)}, C^{(j)}, C^{(k)}$ 为类， a_{ijk} 为类 $C^{(k)}$ 在 $C^{(i)} C^{(j)}$ 中出现的次数。

定义：两类的乘积，为依次用一个类的元素遍乘另一个类的元素，重复出现的元素累加求和。

定理 1.11：设群 G 中的第 i 类 $C^{(i)}$ 包含 n_i 个元素 $g_k \quad (k=1, 2, \dots, n_i)$ ，则该类中各元素的和

$$c^{(i)} = \sum_{k=1}^{n_i} g_k$$

称为 $C^{(i)}$ 类的和。 $c^{(i)}$ 是一个整体或元素，小写之。

性质：(1) 类的和与群中的每个非零元素都可得

(2) 两类的和的乘积仍为类的和，即 $c^{(i)} c^{(j)} = \sum_k a_{ijk} C^{(k)}$

定理 1.12 假设有有限群 G 的阶为 n ，其中的 $C^{(i)}$ 类包含 n_i 个元素，则 n_i 是 n 的整除因子。

$$\text{即 } \frac{n}{n_i} \text{ 是整数。}$$

即只有那些元素数能整除群的阶的元素集合，才可能构成一个类。

例 1：群 $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$

$$\text{可分为三类 } C^{(0)} = \{e\}, C^{(1)} = \{d, f\}, C^{(2)} = \{a, b, c\}$$

因为 $e de^{-1} = d$, $a ca^{-1} = f$, $b db^{-1} = f$, $c dc^{-1} = f$, $d dd^{-1} = d$, $f df^{-1} = d$ 。 $\Rightarrow C^{(1)} = \{d, f\}$ 构成一类。

$$e ce^{-1} = c, \quad a ca^{-1} = b, \quad b cb^{-1} = a \\ c cc^{-1} = c, \quad d cd^{-1} = a, \quad f cf^{-1} = b \Rightarrow C^{(2)} = \{a, b, c\} \text{ 构成一类}.$$

三类的元素数分别为 1, 2, 3，都能整除 D_3 群的阶 $n=6$ ，满足要求。

$$\text{有 } C^{(0)} C^{(0)} = C^{(0)}, \quad C^{(0)} C^{(1)} = C^{(1)}, \quad C^{(0)} C^{(2)} = C^{(2)}$$

$$C^{(1)} C^{(1)} = \{d, f\} \{d, f\} = \{dd, df, fd, ff\} = \{e, e, d\} = \{2e, d, f\} = \{2C^{(0)}, C^{(1)}\}$$

$$C^{(1)} C^{(2)} = \{d, f\} \{a, b, c\} = \{da, db, dc, fa, fb, fc\} = \{c, a, b, b, c, a\} = \{2C^{(2)}\}$$

$$C^{(2)} C^{(2)} = \{a, b, c\} \{a, b, c\} = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\} = \{3C^{(0)}, 3C^{(1)}\}$$

例 2：群 $\Sigma = \{\pm 1, \pm i\sqrt{6}, \pm i, \pm i\sqrt{3}\}$ 可分为四类

$$C^{(0)} = \{1\}, \quad C^{(0)}' = \{-1\}, \quad C^{(1)} = \{\pm i\sqrt{6}\} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\text{因为 } 1^{-1} = 1, \quad (-1)^{-1} = -1, \quad (i\sqrt{6})^{-1} = -i\sqrt{6}, \quad (-i\sqrt{6})^{-1} = i\sqrt{6};$$

$$1(i\sqrt{6})^{-1} = i\sqrt{6}, \quad (-1)(i\sqrt{6})(-1)^{-1} = i\sqrt{6},$$

$$i\sqrt{6}(i\sqrt{6})(i\sqrt{6})^{-1} = i\sqrt{6}, \quad i\sqrt{6}(i\sqrt{6})(i\sqrt{6})^{-1} = -i\sqrt{6},$$

$$i\sqrt{6}(i\sqrt{6})(-i\sqrt{6})^{-1} = -i\sqrt{6}, \quad (-i\sqrt{6})(i\sqrt{6})(-i\sqrt{6})^{-1} = -i\sqrt{6},$$

同样可证 $C^{(2)}, C^{(3)}$ 也都是集。

四个类元素数分别为 1, 1, 2, 2, 可整除 $n=8$ ，满足要求。

4. 正规子群

定义：设 H 是 G 的子群，若对任意 $g \in G$ ，有

$$H = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

则称 H 为 G 的正规子群 (normal subgroup) 或不变子群 (invariant subgroup)

虽然可知，正规子群是美的集合，该集合中一定含有单位元 $C^{(0)} = \{e\}$ ，其加其他集

性質：

(1) 设 H 是 G 的正规子群，则对于任一元素 $g \in G$ ，在 $h \in H$ 取遍所有子群元素时，乘积 ghg^{-1} 一次且仅仅一次地给出 H 的所有元素。

(2) 正规子群的左陪集等于右陪集。

证明：设 H 是 G 的正规子群，则对于 $g \in G$ ， $gH \in H$ 。生成 H 的左陪集

$$gH = \{ghi \mid h \in H\}$$

$$\text{右陪集 } Hg = \{hi \mid h \in H\}$$

由于 H 是群 G 的正规子群，所以 $g^{-1}hi \in H$

则右陪集 $g(g^{-1}hi)g \in gH = hg \in Hg$ 。

$\Rightarrow gH = Hg$ 即左、右陪集相等。

例 1. D_3 群有子群 $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$, $H_3 = \{e, c\}$, $H_4 = \{e, d, f\}$

$$\text{有集 } C^{(0)} = \{e\}, C^{(1)} = \{d, f\}, C^{(2)} = \{a, b, c\}$$

则子群 H_4 是美的集合， $H_4 = \{C^{(0)}, C^{(1)}\}$ 是正规子群。

以 H_4 的左右陪集相等。

H_1, H_2, H_3 三子群互为正规子群。

例 2. Σ 群有子群 $\Sigma_1 = \{\pm 1, \pm i, \pm j\}$, $\Sigma_2 = \{\pm 1\}$

$$\text{有集 } C^{(0)} = \{1\}, C^{(1)} = \{-1\}, C^{(2)} = \{\pm i, \pm j\}$$

则 $\Sigma_1 = \{C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}\}$, $\Sigma_2 = \{C^{(0)}, C^{(1)}\}$

即子群 Σ_1, Σ_2 都是美的集合，是正规子群，其左、右陪集相等。

5. 商群

定义：设 H 是群 G 的正规子群，则由群阶定理可知， G 可按 H 及其左陪集 (等于右陪集) 分解。

得复元素串 $H, g_1H, g_2H, \dots, g_nH$

如果将该集合中的每一个复元素看作一个元素，并定义该集合中元素的乘积为复数之积，则集合 G/H 构成一个群，称为正规子群 H 的商群

证明如下：

大前提

(1) 封闭性： $g_iH g_mH = g_i g_m H = g_k H \in G/H$. ($g_k = g_i g_m$) ; 3. 之

(2) 结合律： $(g_iH g_mH) g_kH = g_i g_m g_k H = g_i H (g_m g_k H)$; 3. 之.

(3) 单位元： $H(g_iH) = g_iH$; 存在，为 H .

(4) 逆元： $(g_iH)(g_i^{-1}H) = g_i g_i^{-1} H = H$; 存在，为 $g_i^{-1}H$

由子群阶定理知，商群的阶等于正规子群 H 在群 G 中的指标。

例 1. D_3 有正规子群 $H_4 = \{e, d, f\}$

取 $a \in D_3$, $a \notin H_4$. 得左陪集 (等于右陪集) $aH_4 = \{ae, ad, af\} = \{a, b, c\}$

则 H_4 商群为 $D_3/H_4 = \{H_4, aH_4\}$ 为二阶循环群，单位元 H_4 , $(aH_4)^2 = aAH_4H_4 = H_4$.

例 2. Σ 有正规子群 $\Sigma_j = \{\pm 1, \pm i, \pm j\}$ ($j=1, 2, 3$), $\Sigma_2 = \{\pm 1\}$

由 Σ_j ($j=1, 2, 3$) 构成商群 $\Sigma/\Sigma_j = \{\Sigma_j, i\Sigma_j, j\Sigma_j\}$ ($k \neq j$; $j, k = 1, 2, 3$)

为二阶循环群，单位元为 Σ_j , $(i\Sigma_k \Sigma_j)^2 = \Sigma_k \Sigma_k \Sigma_j \Sigma_j = \Sigma_j$

由 Σ 可构成商群 $\Sigma/\Sigma_2 = \{\Sigma_2, i\Sigma_2, i^2\Sigma_2, i^3\Sigma_2\}$ 为四阶群。

单位元 Σ_2 , ($\Sigma_2 = -\Sigma_2$) 各元素连为自身。

5.1.5 群的同构与同态

1. 群的同构

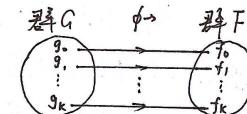
定义：若从群 G 到群 F ，存在着一个一一对应的满映射 ϕ ，且保持群的代数运算（乘法）规则不变：即群 G 中两元素映射的乘积，等于两元素乘积的映射，则称群 G 和群 F 同构，记为 $G \cong F$ 。

称 ϕ 为同构映射。

特点：

(1) 单位元映射到单位元

(2) 逆元素映射到逆元素



定理 1.13 (Cayley 定理): 任一 n 阶有限群 G 都和 n 元置换群 S_n 的一个子群同构.

证明: 假设 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. 取任一元素 $g_k \in G$, 由群的封闭性知:

$$\{g_k g_i | i=1, 2, \dots, n\} = \{g_{k1}, g_{k2}, \dots, g_{kn}\}$$

两集合元素相同, 只是排列方式不同.

相等子各元素编程作置换 $P_{g_k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ 前标 k 表示该置换由 $g_k \in G$ 来群法得的.

这样建立起 $g_k \in G$ 与 $P_{g_k} \in S_n$ 之间的映射关系.

即

$\phi: \begin{array}{c} g_1 \longrightarrow P_{g_1} \\ g_2 \longrightarrow P_{g_2} \\ \vdots \\ g_n \longrightarrow P_{g_n} \end{array}$

由 $g_k g_i = g_{ki}$ 且 $g_i g_k g_i = g_i g_{ki} = g_m$ 有 $g_m g_i = g_m$.

由 $g_1 g_{ki} = g_m$; 得置换 $P_{g_1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$.

由 $g_m g_i = g_m$; 得置换 $P_{g_m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$.

故 $P_{g_k} P_{g_i} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} = P_{g_{ki}}$.

因为 $g_i g_k = g_m$. 因此乘法规则保持不变: 两元素映射的乘积等于两元素乘积的映射.

再加上映射是一一对应的. 所以同构.

例 1: 所有二阶群都同构.

例 2: D_3 群与 S_3 群同构. (Cayley 定理)

S_3 群也有 3 个类: $C^{(0)} = \{pe\}$, $C^{(1)} = \{pa, pb\}$, $C^{(2)} = \{pc, pd, pc\}$

4 个子群: $H_1 = \{pe, pa\}$, $H_2 = \{pe, pb\}$, $H_3 = \{pe, pc\}$, $H_4 = \{pe, pd, pc\}$.

前三者互为共轭子群. 第四者为正规子群.

例 3: 群 G 的两个互为共轭的子群 H 和 K 同构.

证明: $g \in G$. $h_i = g k_i g^{-1}$, $h_j = g k_j g^{-1}$ ($h_i \in H, k_i \in K$)

则有 $h_i h_j = g k_i g^{-1} \cdot g k_j g^{-1} = g k_i k_j g^{-1}$ 即乘法规则不变.

例如 D_3 群的三个互为共轭的子群 $H_1 = \{pe, a\}$, $H_2 = \{pe, b\}$, $H_3 = \{pe, c\}$ 同构.

2. 群的同态.

定义: 如果存在映射 ϕ , 使得群 G 中每一个元素都唯一地对应于群 F 下的一个元素, 但群 F 中的一个元素, 对应于群 G 中的元素多于一个, 且保持群的代数运算 (乘法) 规则不变, 即 G 中两元素映射的乘积等于两元素乘积的映射, 则称群 G 与群 F 同态 (homomorphism).

记为 $G \sim F$, 称 ϕ 为同态映射.

虽然任何群 G 与只有单位元的群 $\{e\}$ 同态, 一般不考虑这种同态.

与同构映射一样, 在同态映射中, 单位元映射到单位元, 逆元素映射到逆元素.

例 1: D_3 群与 Z_2 群同态

$\phi: \begin{array}{c} \{e, d, f\} \longrightarrow \{1, -1\} \\ \text{D}_3 \text{ 群} \quad \{a, b, c\} \longrightarrow \cdots \end{array}$

例 2: S_3 群与 S_2 置换群同态.

$\phi: \begin{array}{c} \{\pm 1, \pm i6\} (i=1, 2, 3) \longrightarrow \{1, 2\} \\ \text{S}_3 \text{ 群} \quad \{\pm i6j, \pm i6k\} (i \neq j, k; i, k=1, 2, 3) \longrightarrow \{1, 2\} \end{array}$

3. 同态核.

定义: 设群 G 和群 F 同态, 则群 G 中与群 F 下的单位元 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_i\}$ 称为同态核 (homomorphic kernel).

定理 1.14 (同态核定理): 设群 G 与群 F 同态, 则有:

- 同态核 H 是 G 的正规子群.
- 商群 G/H 与 F 同构.

例 1: 由例 1 知 $H_4 = \{e, d, f\}$ 为同态核, 是正规子群.

二阶商群 $D_3/H_4 = \{H_4, aH_4\}$ 与 Z_2 群同构.

例 2: 由例 2 知 $\Sigma_1 = \{\pm 1, \pm i6\}$ 是同态核, 是正规子群.

二阶商群 $\Sigma_1/\Sigma_1 = \{\Sigma_1, i6\Sigma_1\} (i \neq j; i, j=1, 2, 3)$ 与 S_2 置换群同构.

§1.6 直积群、单纯群与半单群

1. 直积群

定义：设群 G 有子群 G_1 与 G_2 ，它们的阶数分别为 n_1 与 n_2 。若对于任意的 $g_{1i} \in G_1, g_{2j} \in G_2$ ，

两者之间对易，即 $g_{1i}g_{2j} = g_{2j}g_{1i}$ 。

则由 n_1n_2 个元素构成集合 $\{g_{ij}\}$ ，按照群 G 的乘法也构成一个群，称为 G_1 与 G_2 的直积群。

(direct product group). 记作 $G_1 \otimes G_2$ ，即 $G_1 \otimes G_2 = \{g_{ij}\}$

证明：

(1) 单位元存在：为 $g_0g_0 = g_0$ ，其中 $g_0 \in G$ ，为 G 的单位元。因为 $g_0g_0g_i g_j = g_i g_j g_0$

(2) 结合律成立： $g_{1i}g_{2j}g_{1k}g_{2l} = g_{1i}g_{1k}g_{2j}g_{2l} = g_{1p}g_{2q} \in G_1 \otimes G_2$ 。

其中 $g_{1p} = g_{1i}, g_{1k} = g_{2j}, g_{2q} = g_{2l}$ ， $g_{1p} \in G_1, g_{2q} \in G_2$ 。

(3) 各子群满足结合律，且不同子群的元素间相互对易，则直积群元素的乘积满足结合律。

(4) $g_{1i}g_{2j}$ 的逆元素 $g_{1i}^{-1}g_{2j}^{-1} \in G_1 \otimes G_2$

故 $G_1 \otimes G_2$ 也为群。 G_1 和 G_2 通常称为直积因子，显然 $G_1 \otimes G_2 = G_2 \otimes G_1$ 。

$G_1 \otimes G_2$ 也是 G 的一个子群，即 $G_1 \otimes G_2 \subset G$

性质：

(1) 不同直积因子的元素相互对易，但同一直积因子的元素可不对易。

(2) 直积因子 G_1 与 G_2 都是 $G_1 \otimes G_2$ 的正规子群。

证明：对于任意 $g_i \in G_1$ ，其共轭元素

$$g_{1i}g_{2j}(g_{1i}g_{2j})^{-1} = g_{1i}g_{2j}g_{1i}^{-1}g_{2j}^{-1} = g_{1i}g_{1i}^{-1} \in G_1$$

因此 G_1 是 $G_1 \otimes G_2$ 的正规子群，同理， G_2 也是 $G_1 \otimes G_2$ 的正规子群。

(3) 商群 $G_1 \otimes G_2 / G_1$ 与 G_2 同构。 $G_1 \otimes G_2 / G_2$ 与 G_1 同构。

(4) 各个群只要微课间元素对易即可构成直积群。

例1：7 阶循环群 $G_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ 是二阶循环群 $G_2 = \{e, a^3\}$ 与三阶循环群 $G_3 = \{e, a, a^2\}$ 的直积群。即 $G_6 = G_2 \otimes G_3$

G_2 与 G_3 都是 G_6 的正规子群。

商群 $G_6 / G_2 = \{G_2, aG_2, a^2G_2\}$ 与 G_3 同构关系为

商群 $G_6 / G_3 = \{G_3, aG_3\}$ 与 G_2 群同构关系为

$$G_6 / G_2 \xrightarrow{\phi} G_3$$

$$\begin{aligned} G_2 &\longrightarrow e \\ aG_2 &\longrightarrow a^2 \\ a^2G_2 &\longrightarrow a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_6 / G_3 \xrightarrow{\phi} G_2 \\ G_3 &\longrightarrow e \\ aG_3 &\longrightarrow a^3 \end{aligned}$$

2. 单纯群与半单群

单纯群 (Simple group)：若群 G 除去自身与单位元外，不包含正规子群，则称该群为单纯群。

半单群 (Semisimple group)：若群 G 不含有 Abel 正规子群，则称 G 为半单群。

例1. 有限个非 Abel 单纯群的直积是半单群。

例2. 单纯群一定半单，而半单群不一定是单纯群。

第二章 有限群表示论

§2.1 群的线性表示

1. 定义:

(1) 表示: 对于一个抽象群 G , 如果它和一个容易处理的具体群 $D(G)$ 同构或同态, 它们具有相同的代数运算性质, 那么只要研究清楚了 $D(G)$ 的代数性质, 也就相当于弄清楚了抽象群 G 的代数性质. 用这种弓形处理抽象群, 将抽象群 G 表示为具体群 $D(G)$ 表示了抽象群 G , 称 $D(G)$ 是 G 的表示.

(2) 线性表示: 如果 $D(G)$ 是线性空间 L 中的 $l \times l$ 阶非奇异矩阵群, 即其矩阵的行列式 $\det[D(G)] \neq 0$, 则称 $D(G)$ 是 G 的线性表示, 称 L 为群 G 的表示空间.

(3) 忠实表示: 如果矩阵群 $D(G)$ 和群 G 同构, 则称 $D(G)$ 是 G 的忠实表示. 这时群 G 中元素 g 和矩阵群 $D(G)$ 中的元素 $D(g)$ 是一一对应的.

(4) 非忠实表示: 如果矩阵群 $D(G)$ 和群 G 同态, 则称 $D(G)$ 是 G 的非忠实表示. 让所有群元素都和一个单位矩阵对应得到仅有单位元(单位矩阵)构成的表示, 每个群都有这样的表示, 称为恒等表示或平凡表示.

2. 线性表示的特点:

(1) 表示矩阵一定是方阵.

(2) 单位元的表示矩阵是单位矩阵.

(3) 互逆元素的表示矩阵是互逆矩阵.

3. 表示矩阵的确定:

设 $\{e_\alpha\}$ 为线性空间 L 中的一组基矢, 群 G 中的一个元素 g 对基矢 e_α 作用后得到该空间中的一个新基矢.

$$ge_\alpha = \sum D_{\mu\nu}(g) e_\mu$$

若基矢是正交归一的, 即其内积, $(e_\mu, e_\nu) = \delta_{\mu\nu}$.

则矩阵 $D(g)$ 的矩阵元 $D_{\mu\nu}(g) = (e_\mu, ge_\nu)$

这些矩阵的集合 $D(G) = \{D(g), g \in G\}$ 构成群 G 的一个表示.

若假设 $g' \in G$, 则 $g'ge_\nu = g \sum D_{\mu\nu}(g') e_\mu = \sum_\beta D_{\beta\mu}(g) D_{\mu\nu}(g') e_\beta$

$$\text{而 } gg'ge_\nu = \sum_\beta D_{\beta\mu}(gg') e_\beta.$$

$$\text{则 } D_{\beta\mu}(gg') = \sum_\alpha D_{\beta\mu}(g) D_{\alpha\nu}(g')$$

即 $D(g) D(g') = D(gg')$ ($g, g' \in G$) 保持乘法规则不变.

若变换前后的表示空间都是正交的, 则 $D(G)$ 还是一个幺正表示, 即 $P D^+(g) = D^-(g)$ ($g \in G$).

证明: $(ge_\mu, ge_\nu) = \sum_{\beta\alpha} D_{\beta\mu}^*(g) D_{\alpha\nu}(g) (e_\beta, e_\alpha)$

$$\begin{aligned} \text{由于基矢正交, 得 } S_{\mu\nu} &= \sum_{\beta\alpha} D_{\beta\mu}^*(g) D_{\alpha\nu}(g) S_{\beta\alpha} = \sum_\beta D_{\beta\mu}^*(g) D_{\beta\nu}(g) \\ &= \sum_\beta D_{\mu\beta}^*(g) D_{\beta\nu}(g) = [D^+(g) D(g)]_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\text{因此 } D^+(g) D(g) = I \Rightarrow D^+(g) = D^-(g)$$

4. 基矢变换对表示矩阵的影响:

设 e'_μ 为新基矢, 其与旧基矢 e_μ 之间的变换关系为 $e'_\mu = \sum_\lambda S_{\mu\lambda} e_\lambda$ 或 $e_\mu = \sum_\lambda S^{-1}_{\mu\lambda} e'_\lambda$ 其中 S 为变换矩阵. 则 $g e'_\mu = \sum_\lambda D_{\mu\lambda}(g) e'_\lambda$

$$\begin{aligned} \text{或 } \sum_\lambda S_{\mu\lambda} g e_\lambda &= \sum_\lambda \sum_\beta S_{\mu\lambda} D_{\beta\lambda}(g) e_\beta = \sum_\lambda \sum_\beta S_{\mu\lambda} D_{\beta\lambda}(g) S^{-1}_{\beta\mu} e'_\mu \\ &= \sum_\lambda \sum_\beta S^{-1}_{\beta\mu} D_{\beta\lambda}(g) S_{\lambda\mu} e'_\mu = \sum_\lambda [S^{-1} D(g) S]_{\mu\lambda} e'_\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_{\mu\lambda}(g) = [S^{-1} D(g) S]_{\mu\lambda} \text{ 或 } D(g) = S^{-1} D(g) S$$

因此基矢变换时, 表示矩阵 $D(G)$ 将经受一个相似变换.

由于变换矩阵 S 与表示矩阵 $D(G)$ 作用相同, 都是将旧基矢变新基矢, 因此若新、旧基都是正交的情况下, 变换矩阵 S 还是幺正的.

若群 G 的两个表示可通过相似变换相联系, 则称这两个表示为等价表示, 记作 $D(G) \sim D'(G)$.

若 $D(G)$ 是群 G 的一个表示, 则其等价表示 $D'(G) = S^{-1} D(G) S$ 也是群 G 的一个表示. 因为两个等价表示实质上是同一组表示在不同基矢下的不同形式, 且等价于同一表示的两个表示等价.

5. 有限群表示的纠正性.

定理 2.1: 有限群的任一表示都等价于一个纠正表示.

几何意义: 原表示是非纠正的, 表明表示空间的基矢是斜的. 对于有限群通过矩阵变换, 基矢变或正交的, 该空间的表示矩阵也就纠正化了.

推论 2.1: 若群 G 的两个纠正表示 $D(G)$ 和 $D'(G)$ 是等价的, 即 $D(g) = S^{-1}D'(g)S \quad (g \in G)$, 则变换矩阵 S 必是纠正的.

几何意义: 由于 $D(G)$ 纠正, 其表示空间正交, 则相似变换矩阵 S 是纠正的.

例 1: D_3 群的两个一维表示.

D_3 群与 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 同态.

则矩阵群 \mathbb{Z}_2 构成 D_3 的一个一维表示.

各群元素的表示矩阵为 $D^{(1)}(e) = D^{(1)}(a) = D^{(1)}(b) = D^{(1)}(c) = D^{(1)}(d) = D^{(1)}(f) = 1$, 为 D_3 群的恒等表示.

D_3 群与 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 同态, 对应关系为 $\{e, d, f\} \rightarrow 1, \{a, b, c\} \rightarrow -1$.

所以, \mathbb{Z}_2 构成 D_3 的另一个一维表示.

各群元素表示矩阵为 $D^{(1)}(e) = D^{(1)}(d) = D^{(1)}(f) = 1, D^{(1)}(a) = D^{(1)}(b) = D^{(1)}(c) = -1$.

例 2: D_3 群的三维表示.

由 $D_{\mu\nu}^{(3)}(g) = (e_\mu, g e_\nu) = e_\mu \cdot e_\nu \quad (g \in D_3)$

画出对应表示图, 得

$$D^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(3)}(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{(3)}(b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)}(c) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{(3)}(d) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(3)}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上六个矩阵为纠正矩阵.

6.2.2 群的可约表示与不可约表示.

1. 矩阵的直和.

设 $A = \{A_{ij}, i=1, 2, \dots, k\}$ 为 k 阶矩阵, $B = \{B_{ij}, i, j=1, 2, \dots, m\}$ 为 $m \times n$ 阵, 则两者直和为 $k \times mn$ 阵.

分块对角化矩阵

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ O_1 \\ \\ \\ O_2 \\ \\ \\ B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{matrix}$$

其中 O_1 是 $k \times m$ 零矩阵, O_2 是 $m \times k$ 零矩阵.

类似地, 各子阵的直和 $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots = \sum_i^{\oplus} A_i$, 阶数等于各直和因子阵的阶数之和.

性质:

(1) 不可交换: $A \oplus B \neq B \oplus A$

(2) $\det(A \oplus B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(3) $\text{Tr}(A \oplus B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$

(4) 若 A_1, A_2 为同阶阵, B_1, B_2 为另两个同阶阵,

则 $(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = (A_1 A_2) \oplus (B_1 B_2)$

证明: $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$$\text{则 } (A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_1 \\ 0_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0_1 \\ 0_2 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0'_1 \\ 0'_2 & B_1 B_2 \end{pmatrix} = A_1 A_2 \oplus B_1 B_2$$

2. 矩阵的直积.

设 A 与 B 分别为 $k \times m$ 与 $p \times q$ 矩阵, 则

$$A = \{A_{ij}, i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, m\}$$

$$B = \{B_{ij}, i=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, q\}$$

则 A 与 B 的直积是 $k \times p$ 与 $m \times q$ 矩阵.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1m}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1}B & A_{k2}B & \cdots & A_{km}B \end{pmatrix} \quad \text{其中 } A_{km}B = \begin{pmatrix} A_{km}B_{11} & A_{km}B_{12} & \cdots & A_{km}B_{1q} \\ A_{km}B_{21} & A_{km}B_{22} & \cdots & A_{km}B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{km}B_{p1} & A_{km}B_{p2} & \cdots & A_{km}B_{pq} \end{pmatrix}$$

而矩阵元 $(A \otimes B)_{kp, mq} = A_{km} B_{pq}$.

类似地, 多矩阵直积, $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots = \sum_i^{\otimes} A_i$.

性质：

(1) 不可交换： $A \otimes B \neq B \otimes A$

(2) 结合律： $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

(3) 分配律： $A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$

(4) $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}A \cdot \text{Tr}B$

(5) 若 A_1, A_2 为两个同阶矩阵， B_1, B_2 为另两个同阶矩阵，则

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2)$$

3. 群的可约表示与不可约表示

设在群 G 的 L 维线性表示空间 L 中，有 k ($k < L$) 维子空间 L_k ，若 L_k 在群 G 的表示 $D(g)$ ($g \in G$) 的变换下不变，即对于任一矢量 $\xi \in L_k$ ，都有 $D(g)\xi \in L_k$ ，则称 L_k 为 L 在 G 下的不变子空间。

而称表示 $D(G)$ 是可约的 (reducible).

适当选取表示空间的基矢，例如取 L 中的头 k 个基矢为不变子空间 L_k 的基矢，则可约表示矩阵具有形式

$$D(g) = \begin{pmatrix} D(g) & X(g) \\ 0 & D'(g) \end{pmatrix} \quad \text{其中 } D(g) \text{ 为 } k \times k \text{ 阵, } D'(g) \text{ 为 } (L-k) \times (L-k) \text{ 阵, } X(g) \text{ 为 } k \times (L-k) \text{ 阵.}$$

$\overset{k \times k}{\overbrace{}}$ $\overset{(L-k) \times 1}{\overbrace{}}$

$\overset{k \times k}{\overbrace{}}$ $\overset{(L-k) \times 1}{\overbrace{}}$

$\overset{0}{\overbrace{}}$ $\overset{(L-k) \times k}{\overbrace{}}$

在 $D(g)$ 的变换下，基矢变换为 $(e'_1, e'_2, \dots, e'_k, e'_{k+1}, \dots, e'_L) = (e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_L) D(g)$

这样 $(e'_1, \dots, e'_L) = (e_1, e_2, \dots, e_k) D(g) \in L_k$. 即 L_k 中的基矢经 $D(g)$ 变换后仍处于 L_k 中。

这样， L_k 中任一矢量 ξ ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$) $\in L_k$ ，经 $D(g)$ 变换后，变为 $D(g)\xi = D'(g)\xi \in L_k$ ($g \in G$)。

所以 L_k 是 L 的不变子空间。

若群 G 的表示矩阵 $D(G)$ 是可约的，则它可以通过相似变换或如上的右上三角 (或左下三角) 形式。

反之，若群 G 表示矩阵是不可约的，则任何相似变换都不能把它变为上述形式。

若 $D(G)$ 是么正的，则与 L 正交的子空间 L_{L-k} 也是不变子空间。

证明：假设 $\xi \in L_k, \eta \in L_{L-k} \Rightarrow (\xi, \eta) = 0$

由于 L_k 为不变子空间，对于 $g \in G$ ，有 $(D(g)\xi, \eta) = 0$.

$$\Rightarrow (D(g)\xi, \eta) = (\xi, D'(g)\eta) = (\xi, D'(g^{-1})\eta) = (\xi, D(g^{-1})\eta)$$

其中 $g^{-1} \in G$. 则 $D(g^{-1})\eta \in L_{L-k}$. ($g^{-1} \in G$) 即 L_{L-k} 为不变子空间。

则矩形阵可以写成分块对角化形式

$$D(g) = \begin{pmatrix} D(g) & 0_1 \\ 0_2 & D'(g) \end{pmatrix} \quad \text{其中 } 0_1, 0_2 \text{ 都是零矩阵, 我们说矩阵 } D(G) \text{ 是完全可约的.}$$

$\overset{k \times k}{\overbrace{}}$ $\overset{(L-k) \times 1}{\overbrace{}}$

$\overset{0_1}{\overbrace{}}$ $\overset{(L-k) \times 1}{\overbrace{}}$

$\overset{0_2}{\overbrace{}}$ $\overset{(L-k) \times k}{\overbrace{}}$

接下来，若 $D(g)$ 和 $D'(g)$ 仍可约，即 L_k 与 L_{L-k} 空间还包含不变子空间，则继续分解下去，直到不可约化为止。

适当选取基矢，表示矩阵 $D(G)$ 将具有如下分块对角化形式：

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0_1 & & \\ 0_2 & D^{(2)}(g) & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & D^{(r-1)}(g) \end{pmatrix}$$

完成这种完全约化后， $D^{(1)}(g), D^{(2)}(g), \dots, D^{(r-1)}(g)$ 都成为群 G 的较低维的不可约表示。(假设共有 r 个)

而称 $D(G)$ 为完全可约表示。

由于有限群任一表示等价于一特征表示，即有限群要么完全可约，要么不可约。

根据此和定义式，完全可约表示可以写成一系列不可约表示的直和。

$$\text{即 } D(g) = a_0 D^{(0)}(g) + a_1 D^{(1)}(g) + \cdots + a_{r-1} D^{(r-1)}(g) \quad (g \in G)$$

其中 a_i 是不可约表示 $D^{(i)}(g)$ 在 $D(g)$ 中出现的次数。满足条件 $\sum a_i = r$

$$\text{例 1: } D^{(1)}(D_3) = D^{(2)}(D_3) \oplus D^{(1)}(D_3)$$

其中 $D^{(1)}(D_3)$ 是 D_3 群的一维表示。

$$D^{(0)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^{(1)}(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^{(2)}(b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D^{(2)}(c) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D^{(1)}(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

与 D_3 群同构，保持乘法规则不变，且 $D^{(0)}(D_3)$ 不再可约。

因为若假设可约，则 $D^{(1)}(g_i) = \cup d_i \cup^{-1}$ 其中 d_i 为二阶对角矩阵，可对易。

$$\text{则 } D^{(1)}(g_i) D^{(2)}(g_j) = \cup d_i \cup^{-1} \cup d_j \cup^{-1} = \cup d_j d_i \cup^{-1} = D^{(2)}(g_j) D^{(1)}(g_i)$$

即 $D^{(1)}(D_3)$ 各矩阵将相互对易，与同构要求矛盾 (乘法变)。

因此 $D^{(0)}(D_3)$ 为 $D^{(2)}(D_3)$ 与 $D^{(1)}(D_3)$ 的直和。

§2.3 Schur 定理

定理 2.2 (schur 定理): 若矩阵 M 与群 G 的所有不可约表示矩阵 $D(G)$ 都对易

$$\text{即 } MD(g) = D(g)M \quad (g \in G)$$

则 M 必为常数矩阵. $M = \lambda I$

证明: 设群 G 的表示空间 L 是 L 维的, 则矩阵 M 为 $L \times L$ 阵, 因此存在 L 个本征值, 其中可能有相同或重叠的. 取某一本征值 λ , 设其重数为 k , 与其对应的本征向量的集合为 $\{e_\mu, \mu=1, 2, \dots, k\}$, 即 $Me_\mu = \lambda e_\mu (\mu=1, 2, \dots, k)$

用 $\{e_\mu, \mu=1, 2, \dots, k\}$ 构成 L 的子空间 L_k , 则对于其中的任一矢量 $\xi = \sum_{\mu=1}^k \xi_\mu e_\mu \in L_k$

$$\text{有 } M\xi = \lambda \xi$$

$$\text{有 } MD(g)\xi = D(g)M\xi = D(g)\lambda\xi = \lambda D(g)\xi$$

即 $D(g)\xi$ 仍为本征值为 λ 的本征向量. 所以 $D(g)\xi \in L_k$. ($g \in G$) 即 L_k 构成 L 的不变子空间.

但 $D(g)$ 为不可约表示, 即 $k=L$ 或 $k=0$.

$k=L$ 时, 即 L 中任一矢量都是 M 的本征值为 λ 的本征向量. 则 M 为常数矩阵.

$k=0$ 时, $M=0$. 是 $\lambda=0$ 的特殊情况. 定理得证.

由于可约表示在两个及以上所的不变子空间, 因此, 总可以找到这样的矩阵 M , 使 M 在各不变子空间中的本征值取常数, 即

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{r-1} \end{pmatrix} \text{ 与可约表示矩阵对易.}$$

这样, 可约表示总可以找到和它对易的常数矩阵.

判断一个表示是否可约:

先找到满足对易条件 $MD(g) = D(g)M$ ($g \in G$) 的矩阵 M .

若 M 是常数矩阵, 则 $D(g)$ 必不可约, 若 M 不是常数矩阵, 则 $D(g)$ 必可约.

定理 2.3 (schur 定理): 设 $D^{(1)}(G)$ 和 $D^{(2)}(G)$ 是群 G 的两个不可约表示, 其表示空间分别是 L_1 和 L_2 维.

若对于任意的 $g \in G$, 有一个 $L_2 \times L_1$ 矩阵 M , 并满足关系:

$$MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)M$$

则

(1) 当 $L_1=L_2$ 时, 要 $M=0$, 则 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$ 等价

(2) 当 $L_1 \neq L_2$ 时, $M=0$.

例 1: 类的和的表示矩阵为常数矩阵.

证明: 由定理 1.1 (1), 类的和与群中的每个群元素都对易, 所以与它们相应的表示矩阵也对易. 由 schur 定理可知, $C^{(1)}$ 的表示必为常数矩阵.

例如: 对于群 G 的不可约表示 $D^{(ij)}(G)$, 有 $D^{(ij)}(C^{(1)}) = \sum_{k=1}^{n_i} D^{(ik)}(g_k) = \lambda_{(i)}^{(j)} I^{(1)} = \lambda_{(i)}^{(j)} D^{(1)}(g_0)$

其中 $\lambda_{(i)}^{(j)}$ 为常数. 下面考虑类的和的表示的指标, 即 $\lambda_{(i)}^{(j)}$ 是第 i 个类和 $C^{(1)}$ 的第 j 个单极表示矩阵. $I^{(1)} = D^{(1)}(g_0)$ 是表示矩阵 $D^{(1)}(G)$ 的单位矩阵, $g_0 \in G$ 为单位元.

以 D_3 群为例. 其三个不等价不可约表示为 $D^{(1)}(D_3)$, $D^{(2)}(D_3)$, $D^{(3)}(D_3)$

其三个类 $C^{(1)} = \{e\}$, $C^{(2)} = \{d, f\}$, $C^{(3)} = \{a, b, c\}$. $I^{(1)} = C^{(1)}$, $I^{(2)} = e$, $I^{(3)} = d+f$, $C^{(2)} = a+b+c$

则各类的和的表示为

$$D^{(1)}(C^{(1)}) = 1 \Rightarrow \lambda_{(1)}^{(1)} = 1 \quad D^{(1)}(C^{(2)}) = 2 \Rightarrow \lambda_{(1)}^{(2)} = 2 \quad D^{(1)}(C^{(3)}) = 3 \Rightarrow \lambda_{(1)}^{(3)} = 3.$$

$$D^{(2)}(C^{(1)}) = 1 \Rightarrow \lambda_{(2)}^{(1)} = 1 \quad D^{(2)}(C^{(2)}) = 2 \Rightarrow \lambda_{(2)}^{(2)} = 2 \quad D^{(2)}(C^{(3)}) = -3 \Rightarrow \lambda_{(2)}^{(3)} = -3.$$

$$D^{(3)}(C^{(1)}) = I^{(3)} \Rightarrow \lambda_{(3)}^{(1)} = 1 \quad D^{(3)}(C^{(2)}) = -I^{(2)} \Rightarrow \lambda_{(3)}^{(2)} = -1 \quad D^{(3)}(C^{(3)}) = 0 \Rightarrow \lambda_{(3)}^{(3)} = 0$$

练习 4 不可约表示矩阵元的正交性定理.

定理 2.4 (正交性定理): 设 G 是 n 阶有限群, 它有两个不等价不可约公征表示 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$,

其表示空间分别为 L_1 与 L_2 维, 则两表示矩阵元间有正交关系.

$$\sum_{g \in G} D_{\alpha\beta}^{(1)}(g) D_{\mu\nu}^{(2)*}(g) = \frac{n}{L_1} \delta_{ij} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}.$$

表明各表示矩阵元的模长对于群元素的求和是同一常数 $\frac{n}{L_1}$.

$$\text{记 } A_{\alpha\beta}^{(i)}(g) = \sqrt{\frac{L_i}{n}} D_{\alpha\beta}^{(i)}(g) \text{ 则正交关系为 } \sum_{g \in G} A_{\alpha\beta}^{(1)}(g) A_{\mu\nu}^{(2)*}(g) = \delta_{ij} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}.$$

则正交关系实际上描述的是矢量集合 $\{A_{\alpha\beta}^{(i)}(G), i=0, 1, \dots, r-1; \alpha, \beta=1, 2, \dots, L_i\}$

其中假设群 G 有 r 个不等价不可约表示, i 是不可约表示的指标; α, β 是表示矩阵的矩阵元指标.

对于 L_1 维不可约表示 $D^{(1)}(G)$, 共有 L_1^2 个矩阵元, 则正交归一的矢量总数为 $\sum_{i=0}^{r-1} L_i^2$ 个

每一个矢量有几个分量: $A_{\alpha\beta}^{(i)}(g_0), A_{\alpha\beta}^{(i)}(g_1), \dots, A_{\alpha\beta}^{(i)}(g_{L_i-1})$, 因此矢量为 L_i 维空间的矢量.

由于 n 维空间中的正交归一的矢量不能超过 n 个, 则 $\sum_{i=0}^{r-1} L_i^2 \leq n$. 在 2.6 中将证明 $\sum_{i=0}^{r-1} L_i^2 = n$.

该式给出了群 G 的阶数 n 与其不等价不可约表示的数目 r 及各表示空间维数 L_i 之间的关系.

例 1: D_3 群的不可约表示有 $D^{(1)}(D_3)$, $D^{(2)}(D_3)$, $D^{(3)}(D_3)$

则各不可约表示维数的平方和为 $\sum_{i=0}^{r-1} L_i^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = n_{D_3}$.

因此, D_3 群有且仅有三个不可约群, 不可能再有其他不可约表示存在.

$$\text{且 } \sum_{g \in D_3} D^{(1)}(g) D^{(1)*}(g) = 6 = \frac{n_{D_3}}{L_1}, \quad \sum_{g \in D_3} D^{(2)}(g) D^{(2)*}(g) = 6 = \frac{n_{D_3}}{L_2}$$

$$\sum_{g \in D_3} D_{\alpha\beta}^{(1)}(g) D_{\mu\nu}^{(1)*}(g) = 3 \delta_{ij} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} = \frac{n_{D_3}}{L_1} \delta_{ij} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}. \text{ 其中 } L_1=2 \text{ 为 } D^{(1)}(D_3) \text{ 不可约表示的维数.}$$

$$\text{而 } \sum_{g \in D_3} D^{(2)}(g) D^{(2)*}(g) = \sum_{g \in D_3} D^{(2)}(g) D_{\alpha\beta}^{(2)*}(g) = \sum_{g \in D_3} D^{(2)}(g) D_{\mu\nu}^{(2)*}(g) = 0$$

满足正交性定理.

§2.5 表示的特征标

1. 定义:

设有有限群 $G = \{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}\}$, 其不可约表示矩阵为 $D(G) = \{D(g_0), D(g_1), \dots, D(g_{n-1})\}$

则任一群元素 g_i 的表示矩阵 $D(g_i)$ 的对角元素之和或迹, 称为 g_i 在 $D(G)$ 中的特征标 (character)

记为 $\chi(g_i) = \text{Tr } D(g_i) = \sum_{j=0}^{n-1} D(g_i)_{jj}, (g_i \in G)$

而群 G 中所有群元素在 $D(G)$ 中的特征标的集合 $\chi(G) = \{\chi(g_i), g_i \in G\}$ 称为表示 $D(G)$ 的特征标系,

或简称特征标.

2. 性质:

(1) 等价表示的特征标相等.

证明: 由矩阵迹的性质不变性知, 对于任意矩阵 A, B, C 有

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$$

即对于表示 $D(g_i)$ 的等价表示, $D'(g_i) = S^{-1}D(g_i)S$.

$$\text{有 } \text{Tr } D'(g_i) = \text{Tr } [S^{-1}D(g_i)S] = \text{Tr } [SS^{-1}D(g_i)S] = \text{Tr } [D(g_i)]$$

则相似变换不改变特征标, 某一表示在给定的表示空间的特征标是唯一确定的, 其取值只取决于表示本身与表示空间基底的选择无关.

(2) 单元元素的特征标相等.

若 g_k 与 g_m 共轭, 则有 g_i 存在, 使 $g_k = g_i g_m g_i^{-1}$, 则其相应的表示有关系.

$$D(g_k) = D(g_i) D(g_m) D(g_i^{-1}) = D(g_i) D(g_m) D'(g_i)$$

$$\Rightarrow \text{Tr } D(g_k) = \text{Tr } D(g_m).$$

则同一类中的各元素, 其表示的特征标相等, 特征标是类的函数.

(3) 定理 2.5 (特征标的正交性):

设元素 $g_i \in G$ 在不可约表示 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$ 中的特征标分别为 $\chi^{(1)}(g_i)$ 与 $\chi^{(2)}(g_i)$.

则二者满足正交关系, $\sum_{g_i \in G} \chi^{(1)}(g_i) \chi^{(2)*}(g_i) = n \delta_{12}$, 其中 n 为群 G 的阶.

$$\text{证明: } \sum_{g_i \in G} D^{(1)}(g_i) D^{(2)*}(g_i) = \frac{n}{l_1} \delta_{12} \delta_{12} = n \delta_{12}$$

$$\text{则对 } \alpha, \mu \text{ 本和, 得 } \sum_{g_i \in G} X^{(1)}(g_i) X^{(2)*}(g_i) = \frac{n}{l_1} \delta_{12} \sum_{g_i \in G} \delta_{\alpha i} \delta_{\mu i} = \frac{n}{l_1} \delta_{12} l_1 = n \delta_{12}.$$

推论: 不可约表示的特征标必满足 $\sum_{g_i \in G} \chi^{(1)}(g_i) \chi^{(1)*}(g_i) = n$; 反之, 若不满足上述, 必然是可约的.

由于特征标是类的函数, 则特征标正交关系可写成 $\sum_{k=0}^{r-1} n_k \chi^{(1)}(g_{c(k)}) \chi^{(1)*}(g_{c(k)}) = n \delta_{11}$

其中 n_k 为 $C^{(1)}$ 类中的元素数, $g_{c(k)} \in C^{(1)}$ 是 $C^{(1)}$ 中的任一元素, 求和是对类指标 $k=0, 1, \dots, r-1$ 进行的.

记 $A^{(1)}(C^{(1)}) = \sqrt{\frac{n}{l_1}} \chi^{(1)}(g_{c(1)})$, 则上式变为 $\sum_{k=0}^{r-1} A^{(1)}(C^{(1)}) A^{(1)*}(C^{(1)}) = n$

给出变量集合 $\{A^{(i)}(C_i), i=0, 1, \dots, r-1\}$ 的正交归一关系, 该组变量由不可约表示指标 i 指定, 因群 G 共有 r 个不可约表示, 则正交归一的变量有 r 个, 每个变量有 l_i 分量, 如 $A^{(1)}(C^{(1)}), A^{(1)}(C^{(2)}), \dots, A^{(1)}(C^{(r)})$

所以上式是 C 维空间中的一组正交归一的变量. 由于 C 维空间中正交归一的变量不超过 C 个, 则 $r \leq C$

§2.6 表示的特征标

在 2.6 节中将证明 $\Gamma = C$, 即群 G 的不等价不可约表示的数目与其可分解的类的数目相等.

例如: D_3 群有三个不等价不可约的群表示, $D^{(1)}(D_3), D^{(2)}(D_3), D^{(3)}(D_3)$ 且有三个类 $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$.

例 1: D_3 群有三个不可约表示 $D^{(1)}(D_3), D^{(2)}(D_3), D^{(3)}(D_3)$

三者特征标分别:

$$\chi^{(1)}(e) = \chi^{(1)}(a) = \chi^{(1)}(c) = \chi^{(1)}(d) = \chi^{(1)}(f) = 1$$

$$\chi^{(1)}(e) = \chi^{(1)}(d) = \chi^{(1)}(f) = 1 \quad \chi^{(1)}(a) = \chi^{(1)}(b) = \chi^{(1)}(c) = -1$$

$$\chi^{(2)}(e) = 2 \quad \chi^{(2)}(a) = \chi^{(2)}(b) = \chi^{(2)}(c) = 0 \quad \chi^{(2)}(d) = \chi^{(2)}(f) = -1$$

$$\text{则有 } \sum_{g_i \in D_3} \chi^{(1)}(g_i) \chi^{(1)*}(g_i) = 6 = n_{D_3}$$

$$\sum_{g_i \in D_3} \chi^{(1)}(g_i) \chi^{(1)*}(g_i) = 6 = n_{D_3}$$

$$\sum_{g_i \in D_3} \chi^{(1)}(g_i) \chi^{(1)*}(g_i) = 6 = n_{D_3}$$

3. 特征标表

由于同一类中各元素的特征标相等, 可将有限群的所有不等价不可约表示的特征标按类列表

其中 $g_{c(0)}, g_{c(1)}, \dots, g_{c(r-1)}$ 是各类中的任一元素.

	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$	\dots	$C^{(r-1)}$
$D^{(1)}(G)$	$\chi^{(1)}(g_{c(0)})$	$\chi^{(1)}(g_{c(1)})$	\dots	$\chi^{(1)}(g_{c(r-1)})$
$D^{(2)}(G)$	$\chi^{(1)}(g_{c(0)})$	$\chi^{(1)}(g_{c(1)})$	\dots	$\chi^{(1)}(g_{c(r-1)})$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$D^{(r-1)}(G)$	$\chi^{(r-1)}(g_{c(0)})$	$\chi^{(r-1)}(g_{c(1)})$	\dots	$\chi^{(r-1)}(g_{c(r-1)})$

通常第 1 行给出的是恒等表示在各类中的特征标, 第 1 列给出的是 $C^{(1)} = \{e\}$ 在各表示中的特征标.

例 1: D_3 群特征标表:

	C	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$
$D^{(1)}(D_3)$	1	1	1
$D^{(2)}(D_3)$	1	1	-1
$D^{(3)}(D_3)$	2	-1	0

4. 不同类特征标的乘积展开

两类的和 $c^{(i)}$ 与 $c^{(j)}$ 的乘积展开为 $c^{(i)} c^{(j)} = \sum_k a_{ijk} c^{(k)}$

\Rightarrow 在群 G 的不可约表示 $D^{(m)}(G)$ 中, 有 $D^{(m)}(c^{(i)}) D^{(m)}(c^{(j)}) = \sum_k a_{ijk} D^{(m)}(c^{(k)})$

由于类的和的表示为常数矩阵: $D^{(m)}(c^{(i)}) = \lambda_{(i)}^{(m)} I^{(m)} = \lambda_{(i)}^{(m)} D^{(m)}(g_0)$ 得 $\chi^{(m)}(c^{(i)}) = \lambda_{(i)}^{(m)} \chi^{(m)}(g_0)$

$\Rightarrow \lambda_{(i)}^{(m)} \lambda_{(j)}^{(m)} I^{(m)} = \sum_k a_{ijk} \lambda_{(k)}^{(m)} I^{(m)}$ 或 $\lambda_{(i)}^{(m)} \lambda_{(j)}^{(m)} = \sum_k a_{ijk} \lambda_{(k)}^{(m)}$

而类的和 $c^{(i)}$ 在给定表示 $D^{(m)}(G)$ 中的特征标为 $\chi^{(m)}(c^{(i)}) = n_i \chi^{(m)}(g_{c^{(i)}})$

其中 n_i 为 $C^{(i)}$ 类中元素的个数, $g_{c^{(i)}}$ 为 $C^{(i)}$ 类中的任一元素.

$\Rightarrow \chi^{(m)}(c^{(i)}) = \lambda_{(i)}^{(m)} \chi^{(m)}(g_0) = n_i \chi^{(m)}(g_{c^{(i)}})$

$\Rightarrow \lambda_{(i)}^{(m)} = \frac{n_i \chi^{(m)}(g_{c^{(i)}})}{\chi^{(m)}(g_0)} = \frac{n_i \chi^{(m)}(g_{c^{(i)}})}{l_m}$ 其中 $l_m = \chi^{(m)}(g_0)$ 为表示矩阵 $D^{(m)}(G)$ 的维数.

代入下划线式得 $n_i n_j \chi^{(m)}(g_{c^{(i)}}) \chi^{(m)}(g_{c^{(j)}}) = l_m \sum_k a_{ijk} n_k \chi^{(m)}(g_{c^{(k)}})$

即为同一表示中两个不同类特征标的乘积的展开式.

5. 可约表示的约化

设 $D(G)$ 是阶有限群 G 的表示, 且是可约的, 则有 $D(g) = \sum_i a_i D^{(i)}(g) \quad (g \in G)$

其中 a_i 为不可约表示 $D^{(i)}(g)$ 在 $D(g)$ 中出现的次数

两边求迹, 并对 g 求和, 得 $\sum_{g \in G} \chi(g) \chi^{(i)*}(g) = \sum_i a_i \sum_{g \in G} \chi^{(i)}(g) \chi^{(i)*}(g) = \sum_i a_i n_i = n a_i$

故 $a_i = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi^{(i)*}(g)$ 同乘 $\chi^{(i)*}(g)$

因此, 只要可约表示 $D(G)$ 的特征标已知, 就可求得其一不可约表示在其中出现的次数.

再接 $D(g) = \sum_i a_i D^{(i)}(g)$ 就可完成对可约表示的分解或约化.

例 1: D_3 群有一个三维的可约表示, $D^{(3)}(D_3)$.

各元素特征标为 $\chi^{(3)}(e) = 3, \chi^{(3)}(b) = \chi^{(3)}(c) = -1, \chi^{(3)}(d) = \chi^{(3)}(f) = 0$.

而不可约表示 $D^{(1)}(D_3)$ 与 $D^{(2)}(D_3)$ 中的特征标为

$$\chi^{(1)}(e) = 2, \chi^{(1)}(a) = \chi^{(1)}(b) = \chi^{(1)}(c) = 0, \chi^{(1)}(d) = \chi^{(1)}(f) = -1$$

$$\chi^{(2)}(e) = 1, \chi^{(2)}(a) = \chi^{(2)}(b) = \chi^{(2)}(c) = -1, \chi^{(2)}(d) = \chi^{(2)}(f) = 1$$

则不可约表示 $D^{(1)}(D_3)$ 与 $D^{(2)}(D_3)$ 在 $D^{(3)}(D_3)$ 中出现的次数分别为

$$a_1 = \frac{1}{6} \sum_{g \in D_3} \chi^{(3)}(g) \chi^{(1)*}(g) = \frac{1}{6} [3 \times 2 + (-1) \times 0 + (-1) \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times (-1) + 0 \times (-1)] = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{6} \sum_{g \in D_3} \chi^{(3)}(g) \chi^{(2)*}(g) = \frac{1}{6} [3 \times 1 + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) + 0 \times 1 + 0 \times 1] = 1$$

§2.6 有限群的正则表示

1. 正则表示及其特征标

设 G 为阶有限群 $G = \{g_i; i=1, 2, \dots, n\}$, 若将 G 的 n 个元素看作 n 维空间中的坐标基矢, 则用群元素 g_p 左乘群中的所有元素, 相当于对 n 维空间一个转换操作, 转换前后的坐标基矢有关系

$$g_p g_i = \sum_j D_{ji}^{reg}(g_p) g_j$$

其中 $D^{reg}(g_p)$ 为 $n \times n$ 之阵, 且有 $D^{reg}(g_p g_q) = D^{reg}(g_p) D^{reg}(g_q)$ 即群的乘法法则保持不变

因此 $D^{reg}(G)$ 构成群的一个表示, 称为正则表示 (regular representation). 每个有限群都有这样一个正则表示.

特点: 正则表示矩阵 $D^{reg}(g_p)$ 的每一行每一列只有一个元素等于 1, 其余全为 0.

例 1: D_3 群各元素的正则表示.

左乘因子 (列序)

e a b c d f

$$D^{reg}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

α 右乘因子 确定列号

得到结果 确定行号

其它元素、正则表示

$$D^{reg}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D^{reg}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D^{reg}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{reg}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D^{reg}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D^{reg}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得正则表示的特征标为 $\chi^{reg}(g) = \begin{cases} n & (g=g_0) \\ 0 & (g \neq g_0) \end{cases}$

2. 正则表示的约化

正则表示可按不可约表示约化为 $D^{reg}(g) = \sum_i a_i D^{(i)}(g) \quad (g \in G)$ 其中 a_i 为 $D^{(i)}(g)$ 在正则表示中出现的次数.

两边求迹得 $\chi^{reg}(g) = \sum_i a_i \chi^{(i)}(g)$ 且 $a_i = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{reg}(g) \chi^{(i)*}(g)$

由于只有 $g=g_0$ 时 $\chi^{reg}(g)=n$. 则上式化为

$$a_i = \frac{1}{n} \chi^{reg}(g_0) \chi^{(i)*}(g_0) = \frac{1}{n} n \chi^{(i)*}(g_0) = \chi^{(i)*}(g_0) = l_i \quad \text{其中 } l_i \text{ 为不可约表示 } D^{(i)}(G) \text{ 的维数.}$$

则正则表示可化为 $D^{reg}(g) = \sum_i l_i D^{(i)}(g) \quad (g \in G)$. 只要有不可约表示存在, l_i 必不为零

所以每个不可约表示都会出现在上式的直和中. 因此前面的 D_3 群的正则表示 $D^{reg}(D_3)$ 不可约. (D_3 群阶数为 6, 6 不可拆成 $\sum n^2$ 形式, 因此不可约)

3. 性质

(1) 定理 2.6 (不可约表示的维数定理): 各不可约表示维数的平方等于群的阶.

$$\text{证明: } \chi^{reg}(g) = \sum_i l_i \chi^{(i)}(g) = \begin{cases} n, & (g=g_0) \\ 0, & (g \neq g_0) \end{cases}$$

又 $g=g_0 \in G$, 得 $\sum_i l_i^2 = n$.

(2) 定理 2.7: 不等价不可约表示的数因等于类的数因.

§ 2.7 群表示的直积, 与直积群的表示.

1. 群表示的直积,

设群 G 有两个表示 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$. 作这两个表示矩阵的直积, $D(g) = D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g)$ ($g \in G$)

可以证明, 这个表示也是群 G 的一个表示.

$$\begin{aligned} \text{证明: 设 } g_i, g_j \in G, \text{ 则 } D(g_i)D(g_j) &= [D^{(1)}(g_i) \otimes D^{(2)}(g_i)][D^{(1)}(g_j) \otimes D^{(2)}(g_j)] \\ &= [D^{(1)}(g_i)D^{(1)}(g_j)] \otimes [D^{(2)}(g_i)D^{(2)}(g_j)] \\ &= D^{(1)}(g_i g_j) \otimes D^{(2)}(g_i g_j) = D(g_i g_j) \end{aligned}$$

保持乘法法则不变, 因此成立.

而两表示直积的特征标, 为 $\chi(g) = \chi^{(1)}(g)\chi^{(2)}(g)$, 即两表示直积的特征标等于两直积, 因此将直积之积.

如果表示 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$ 是不可约的, 则它们的直积一般来说可约.

因为 $\sum_{g \in G} \chi^{(1)}(g)\chi^{(2)}(g) = \sum_{g \in G} \chi^{(1)}(g)\chi^{(2)*}(g) = n$.

但 $\sum_{g \in G} \chi(g)\chi^{(2)*}(g) = \sum_{g \in G} \chi^{(1)}(g)\chi^{(1)*}(g)\chi^{(2)*}(g)\chi^{(2)*}(g) \neq n$.

它们可按不可约表示约化为 $D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g) = \sum_k a_{ijk} D^{(k)}(g)$ ($g \in G$)

这一分解称为 Clebsch - Gordon 展开式.

2. 直积群的表示.

设 G_1 与 G_2 为两个有限群, 阶数为 n_1 与 n_2 , 两者中的元素相互对易, 则其直积,

$G(g) = G_1(g) \otimes G_2(g)$ 亦构成群, 称为直积群.

其阶数为 $n_1 n_2$, 元素为 $g_1 g_2$, 其中 $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$.

设 G_1 与 G_2 群的不可约表示分别为 $D^{(1)}(G_1)$ 与 $D^{(2)}(G_2)$, 则可证明

$$D(g) = D^{(1)}(g_1) \otimes D^{(2)}(g_2) \quad (g = g_1 g_2 \in G, g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$$

是 $G(g)$ 的表示, 且不可约.

the liver and lungs are involved
in the disease and the liver is the main

site of inflammation

liver function is impaired
and there is an increase in

liver enzymes in the blood
liver function is impaired
and there is an increase in

liver enzymes in the blood
liver function is impaired
and there is an increase in

liver enzymes in the blood
liver function is impaired
and there is an increase in

liver enzymes in the blood
liver function is impaired
and there is an increase in

liver enzymes in the blood
liver function is impaired
and there is an increase in

liver enzymes in the blood
liver function is impaired
and there is an increase in

liver enzymes in the blood
liver function is impaired
and there is an increase in

第三章 置换群及其表示

由 Cayley 定理知, 在 n 阶有限群都同构于 S_n 的一个子群, 因此置换群 S_n 占有重要地位.

3.1 置换群的表示

1. 置换的循环与对换分解

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \text{ 其中 } p_i \text{ 是 } 1 \sim n \text{ 中的某一个数.}$$

置换可写为更加简单的形式, 如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 4)(2 \ 3 \ 6)(5)$$

其中 (5) 称为单循环, 代表 5 变为 5 , 即 5 不变. $(1 \ 4)$ 为二循环又称对换, 代表 1 变为 4 , 4 变为 1 .

$(2 \ 3 \ 6)$ 为三循环, 代表 2 变为 3 , 3 变为 6 , 6 变为 2 .

例 1: S_3 置换群

$$\left\{ \begin{array}{l} P_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \\ P_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(3) \\ P_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3)(2) \\ P_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2) \\ P_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 3)(1) \end{array} \right.$$

一般用记号 $(P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_k)$ 代表一个 k 循环, 称 k 为循环的长度.

显然, 没有公共数字的两独立循环之间是相互对易的.

$$\text{如 } (1 \ 4)(2 \ 3 \ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 3 \ 6)(1 \ 4)$$

而同一循环中的数字可作轮换而不变循环的结果, 如

$$(2 \ 3 \ 6) = (3 \ 6 \ 2) = (6 \ 2 \ 3)$$

单循环通常省去不写

在一循环可分解为若干个含有公共数字的对换之积.

$$\text{因为 } (1 \ 2)(2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$$

$$(1 \ 3)(1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \ 1 \ 3) = (1 \ 2 \ 3)$$

$$\text{所以 } (1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2)(2 \ 3) = (1 \ 3)(1 \ 2)$$

$$\begin{aligned} \text{一般情况下可证明 } (P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_k) &= (P_1 \ P_2)(P_2 \ P_3) \cdots (P_{k-1} \ P_k) \\ &= (P_1 \ P_k)(P_1 \ P_{k-1}) \cdots (P_1 \ P_2) \end{aligned}$$

当两个对换含有相同数字时, 这两个对换不可对易.

$$(1 \ 2)(1 \ 3) = (1 \ 3 \ 2) \neq (1 \ 3)(1 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$$

一个置换可分解为对换之积的形式不是唯一的.

一个置换若能分解为奇数个对换之积, 则称为奇置换; 反之, 若能分解为偶数个对换之积, 则称为偶置换. 一个置换的奇偶性是确定的.

任一置换 P 和它的逆 P^{-1} 的区别仅是上、下两行数字的对换, 数字间的对应关系不变,

所以二者具有相同的奇偶性.

虽然两个偶(奇)置换之积, 为偶置换. 一个奇置换与一个偶置换之积, 为奇置换.

记偶置换全体为 A_n . 则 A_n 构成 S_n 的一个正规子群.

证明:

(1) 封闭性: 偶 \times 偶 = 偶.

(2) 单位元存在: $P_e \in A_n$. 恒等置换, 一个对换

(3) 逆元存在: $\text{偶}^{-1} = \text{偶} \in A_n$.

(4) 结合律: $P_1 \in A_n, P_2 \in S_n$. 有 $P_2 P_1 P_2^{-1} = \text{偶} \in A_n$.

商群 S_n/A_n 是二阶群, 它有两个一个表示 $Z_1 = \{1\}$ 与 $Z_2 = \{1, -1\}$. 同样也是 S_n 群的表示.

$Z_1 = \{1\}$ 为恒等表示; $Z_2 = \{1, -1\}$. S_n 中偶置换映射到 1, 奇置换映射到 -1.

2. S_n 群的类与配分

(1) S_n 群的类与循环结构

设有两个置换 σ 与 τ , 二者都是 S_n 的元素, 其中

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix}$$

则 σ 的共轭元素

$$\tau \sigma \tau^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix}$$

得置换 σ 的共轭置换 $\tau \sigma \tau^{-1}$ 的求法:

① 对置换 σ 的上下两行数字同时作 τ 置换

$$\text{如 } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } \tau \sigma \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 5)(2 \ 3)(6)$$

② 分别写出 σ 与 τ 的独立循环之积, 然后对各循环中的数字分别作 τ 置换.

$$\text{如 } \sigma = (6 \ 2 \ 3)(1 \ 4)(5) \quad \tau = (1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 5 \ 6)$$

$$\text{得 } \tau \sigma \tau^{-1} = (1 \ 4 \ 5)(2 \ 3)(6)$$

因此, 共轭变换不改变置換的循环结构, 即置換 σ 与它的共轭置換 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 有相同的循环结构. 因此, 任意两个循环结构相同的置換一定是相互共轭的, 而相互共轭的元素组成一个类. 所以一个给定类中的所有元素具有相同的循环结构. 则 S_n 群中类的数目与其所有可能的不同循环结构的数目相等.

(2) 配分

概念: 按循环长度递减的次序排列独立循环之积.

即 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ($n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$) 或简记为 $[n_1, n_2, \dots, n_k]$ 称为 n 的一个配分.

每个置換都对应于 n 的一个配分, 如前置換 σ 与 τ , 其配分分别为 $\sigma: [3, 2, 1]; \tau: [6]$

由于相互共轭的元素具有相同的循环结构, 所以互为共轭元素的配分相同.

这样 S_n 的一个类中的所有元素对应于 n 的同一个配分, 置換群 S_n 可分解的类的数目等于 n 的所有可能的配分数.

例1: S_2 群有两个类 $n=2$

配分 $[1, 1] = [1^2]$, 一个元素: $(1)(2) = P_e$

配分 $[2]$, 一个元素: $(1 2)$

S_2 群与所有二阶群一样, 有两个一维表示.

例2: S_3 群有三个类 $n=3$

配分 $[1, 1, 1] = [1^3]$, 一个元素: $(1)(2)(3) = P_e$

配分 $[2, 1]$, 三个元素: $(1 2) = P_a, (1 3) = P_b, (2 3) = P_c$

配分 $[3]$, 两个元素: $(1 3 2) = P_d, (1 2 3) = P_f$.

由于 S_3 与 D_3 群同构, 则 S_3 群也有两个一维与一个二维不可约表示.

例3: S_4 群有四个类 $n=4$

配分 $[1, 1, 1, 1] = [1^4]$, 一个元素: $(1)(2)(3)(4) = P_e$

配分 $[2, 1, 1] = [2, 1^2]$, 六个元素: $(1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4)$

配分 $[2, 2] = [2^2]$, 三个元素: $(1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)$

配分 $[3, 1]$, 八个元素: $(1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3)$.

配分 $[4]$, 六个元素: $(1 2 3 4), (1 2 4 3), (1 3 2 4), (1 3 4 2)$

$(1 4 2 3), (1 4 3 2)$.

S_4 群有正规子群 $H = \{P_e, (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)\}$

则商群 $S_4/H = \{H, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$

商群 S_4/H 与 S_3 群都是六阶群, 二者同构, 而商群的表示也是其大群的表示.

所以 S_3 群的三个不可约表示也是 S_4 群的不可约表示.

由于 S_4 有 5 个类, 由定理 2.7 得其共有 2 个不等价不可约表示.

由于 S_4 群的阶数为 $4! = 24$, 由定理 2.6 得 $1^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 = 24 \Rightarrow L_4^2 + L_5^2 = 18 \Rightarrow L_4 = L_5 = 3$

则 S_5 的五个不可约表示中, 两个一维, 一个二维, 两个三维.

§3.2 杨图与杨表

1. 杨图

设 n 的某种配分为 $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_k]$, $v_i \geq v_{i+1}$. 且 $v_i = n$

在杨图中, 该配分由 n 个格子组成, 其中第 1 行为 v_1 个格子, 第 2 行为 v_2 个等...

上一行的格子数大于等于下一行的格子数, 左侧-列的格子数大于右側-列的格子数.

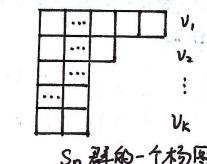
合起来的总格子总数为 n 个, 所组成的图形称为 n 元杨图.

则 杨图数 = 配分数 = 类数 = 不等价不可约表示数.

例1: S_2 群的杨图. $[1] \square [2] \square\square$

例2: S_3 群的杨图. $[1^3] \square [2, 1] \square\square [3] \square\square\square$

例3: S_4 群的杨图. $[1^4] \square [2, 1^2] \square\square [2^2] \square [3, 1] \square\square\square [4] \square\square\square\square$



S_4 群的一个杨图

假设在 n 的配分 $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ 中, 1 循环有 0 个, 2 循环有 0 个, k 循环有 0 个等.

则 $a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k = n$.

对于 S_n 中一个确定的类, n 的配分 $[v]$ 一定, 数组 $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ 也一定. 因此可以用数组 (a) 标记类.

用这种方法可以方便地求出各类中所包含的元素的数目, 结果为 $N(a) = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$.

证明: S_n 中某置換 P 的循环 $P = \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k)}_{\text{1循环 } a_1 \text{ 个}} \underbrace{(1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k)}_{\text{2循环 } a_2 \text{ 个}} \underbrace{(1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k)}_{\text{3循环 } a_3 \text{ 个}} \dots$

若无限制条件, 有 4^k 种方法, 并抛除以下重复.

① 各独立循环次序交换不给出新置換, 因此 a_1 个 1 循环中有 $a_1!$ 种置換.

② 各循环中数字对换不给出新置換, a_k 个 k 循环需要置換 k^{a_k} 次.

除以上两种情况即成立.

例4: S_4 群 $[1^4]$ 中 $a_1 = 4, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$. 则 $N(4, 0, 0, 0) = \frac{4!}{4! 1^4} = 1$

$[2, 1^2]$ 中 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0$. 则 $N(2, 1, 0, 0) = \frac{4!}{2! 1! 1^2} = 6$.

$[2^2]$ 中 $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 0$. 则 $N(0, 2, 0, 0) = \frac{4!}{2! 2^2} = 3$.

$[3, 1]$ 中 $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0$. 则 $N(1, 0, 1, 0) = \frac{4!}{1! 1! 1^2} = 8$.

$[4]$ 中 $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1$. 则 $N(0, 0, 0, 1) = \frac{4!}{1!} = 6$.

2. 杨表

在 S_n 的杨图 $[v]$ 上, 将 n 个数字无重复地填到 n 个格子中, 并且每一行自左而右是按增加顺序排列, 每列由上往下数字也增加, 因此得到的填了数字的杨图叫杨表.

定理 3.1: S_n 群的不可约表示 $D^{[v]}$ 的维数 $d^{[v]}$ 等于杨图 $[v]$ 的可填充的杨表数.

例 1:

$$(1) S_1 \text{ 群}, \boxed{1} \quad d^{[1]} = 1 \quad \text{-维平凡表示}$$

$$(2) S_2 \text{ 群}, \begin{array}{c|c} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{2} & \end{array} \quad d^{[1,2]} = 1, \quad d^{[2,1]} = 1 \quad \text{两个一维表示}$$

$$(3) S_3 \text{ 群}, \begin{array}{c|c|c} \boxed{1,2} & \boxed{1,3} & \boxed{1,2,3} \\ \hline \boxed{2} & \boxed{3} & \end{array} \quad d^{[1,2]} = 1, \quad d^{[2,1]} = 2, \quad d^{[3]} = 1 \quad \text{两个一维表示, 一个二维表示}$$

(4) S_4 群

$$\begin{array}{ccccccccc} \boxed{1,2,3,4} & \boxed{1,2,3} & \boxed{1,2,4} & \boxed{1,3,4} & \boxed{1,2} & \boxed{1,3} & \boxed{1,3} & \boxed{1,2} & \boxed{1,4} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{3,4} & \boxed{2,4} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ & & & & & & & & \end{array}$$

$d^{[4]} = 1, \quad d^{[3,1]} = 3, \quad d^{[2,2]} = 2, \quad d^{[2,1,1]} = 3, \quad d^{[1,1,1]} = 1 \quad \text{两个一维表示, 一个二维表示, 两个三维表示.}$

也可用如下代数方法获得:

定理 3.2: $D^{[v]}$ 的维数 $d^{[v]} = \frac{n!}{\text{杨图 } [v] \text{ 中各格子曲距之和加 1}}$. 其中一个格子的曲距定义为该格子右下与左上的格子数之和加 1

例如: 对于 S_4 群, $d^{[4]} = \frac{4!}{\frac{4!}{4 \times 2 \times 1 \times 1}} = 3$. 各格子中的数字是该格子的曲距.

3.3 S_n 群的不可约表示

1. S_n 群的不可约表示

假设用 $[v], [v]_1, [v]_2, \dots, [v]_d$ 表记杨图 $[v]$ 的各杨表, 相应的不可约表示 $D^{[v]}(S_n)$ 是 $d^{[v]}$ 维的.

矩阵元为 $D_{ij}^{[v]}(S_n)$ ($i, j = 1, 2, \dots, d^{[v]}$)

任意两相邻数字的对换, 例如, 对换 $(k-1, k)$ 的不可约表示矩阵元

$$D_{ij}^{[v]}(k-1, k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{若 } i=j \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \text{若 } i \neq j \text{ 且 } [v]_i = (k-1, k)[v]_j \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

其中的 $(k-1, k)[v]_j$ 代表将杨表 $[v]$ 中的数字 $k-1$ 与 k 对换后得到的杨表.

δ 为在杨表 $[v]$ 中由数字 $k-1$ 到达 k 时的曲距.

曲距的确定方法: 规定沿着杨表向上或向右移动一格为 +1, 向下或向左移动一格为 -1.

则从 $k-1$ 出发, 沿着直角路线到达 k , 经过的格子的代数和就是曲距.

由递推关系, $(i, j) = (i+1, j) \langle i, i+1 \rangle (i+1, j)$ 即可将任一两数字的对换用相邻数字的对换表示,

$$\text{例: } (1, 4) = (2, 4)(1, 2)(2, 4)$$

$$= (3, 4)(2, 3)(3, 4)(1, 2)(3, 4)(2, 3)(3, 4)$$

则置换群 S_n 的任一元素的表示矩阵可求.

例 1: S_2 群的不可约表示矩阵

$$[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}]: \quad \text{则 } 1 \Rightarrow 2 \text{ 的抽距为 } \delta = -1 \Rightarrow D^{[1,2]}(1,2) = -1$$

$$d^{[1,2]} = 1 \quad \text{而 } p_e = (1, 2)(1, 2) \Rightarrow D^{[1,2]}(p_e) = 1$$

$$[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}]: \quad \text{则 } 1 \Rightarrow 2 \text{ 的抽距为 } \delta = 1 \Rightarrow D^{[2,1]}(1,2) = 1$$

$$d^{[2,1]} = 1 \quad \text{而 } p_e = (1, 2)(1, 2) \Rightarrow D^{[2,1]}(p_e) = 1$$

例 2: S_3 群的不可约表示矩阵

$$[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}]: \quad \begin{array}{l} 1 \Rightarrow 2, \quad \delta = -1 \Rightarrow D^{[1,2]}(1,2) = -1 \\ 2 \Rightarrow 3, \quad \delta = -1 \Rightarrow D^{[2,3]}(2,3) = -1 \\ d^{[1,2,3]} = 1 \quad \text{而 } D^{[1,2]}(1,3) = D^{[1,2]}(2,3) D^{[1,2]}(1,2) D^{[1,2]}(2,3) = -1 \end{array}$$

$$D^{[1,2]}(1,3,2) = D^{[1,2]}(1,3) D^{[1,2]}(3,2) = 1$$

$$D^{[1,2]}(1,2,3) = D^{[1,2]}(1,2) D^{[1,2]}(2,3) = 1$$

$$D^{[1,2]}(p_e) = D^{[1,2]}(1,2) D^{[1,2]}(1,2) = 1$$

$$[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}]: \quad 1 \Rightarrow 2, \quad \delta = 1 \quad 2 \Rightarrow 3, \quad \delta = 1$$

$$d^{[1,2,3]} = 1 \quad \text{而 } D^{[1,2]}(p) = 1 \quad (p \in S_3)$$

$$[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}]: \quad \begin{array}{l} 1 \Rightarrow 2, \quad \delta = 1; \quad [2,1]_2, \quad \delta = -1 \\ d^{[2,1]} = 2 \quad [\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}], \quad [\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 2,1 \end{smallmatrix}]_2 \Rightarrow D^{[2,1]}_{11}(1,2) = 1, \quad D^{[2,1]}_{22}(1,2) = -1 \end{array}$$

由于 $[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}] \neq (1,2)[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}]_2$ 或 $[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 2,1 \end{smallmatrix}] \neq (1,2)[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 2,1 \end{smallmatrix}]$,

$$\Rightarrow D^{[2,1]}_{12}(1,2) = D^{[2,1]}_{21}(1,2) = 0$$

$$\text{则表示矩阵 } D^{[2,1]}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 \Rightarrow 3, $[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}]_1, \quad \delta = -2; \quad [\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}]_2, \quad \delta = 2.$

$$\Rightarrow D^{[2,1]}_{11}(2,3) = -\frac{1}{2}, \quad D^{[2,1]}_{22}(2,3) = \frac{1}{2}$$

$$\text{则 } D^{[2,1]}(2,3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } [\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}]_1 = (2,3)[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}]_2 \quad \text{且 } [\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}]_2 = (2,3)[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{smallmatrix}]$$

$$\Rightarrow D^{[2,1]}_{12}(2,3) = \sqrt{\frac{2^2-1}{2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad D^{[2,1]}_{21}(2,3) = \sqrt{\frac{(2-1)^2-1}{(2-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{则 } D^{[2,1]}(1,3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^{[2,1]}_{12}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad D^{[2,1]}(p_e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例3: S_4 群的不可约表示矩阵 $D^{[3,1]}(S_4)$

$$[3,1]: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad [3,1]: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad [3,1]: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad D^{[3,1]} = 3 \text{ 共 24 个矩阵.}$$

在杨表 $[3,1]$, $[3,1]$, 和 $[3,1]$ 中, $1 \Rightarrow 2$ 的轴距 6 分别为 1, -1, 1

$$\text{则 } D_{11}^{[3,1]}(1,2) = 1, D_{22}^{[3,1]}(1,2) = -1, D_{33}^{[3,1]}(1,2) = 1$$

$$\text{又 } [3,1]_{1(2)} \neq (1,2)[3,1]_{2(1)}, [3,1]_{1(3)} \neq (1,2)[3,1]_{3(1)}, [3,1]_{2(3)} \neq (1,2)[3,1]_{3(2)}$$

$$\text{则 } D_{12}^{[3,1]}(1,2) = D_{21}^{[3,1]}(1,2) = 0$$

$$D_{13}^{[3,1]}(1,2) = D_{31}^{[3,1]}(1,2) = 0 \Rightarrow D^{[3,1]}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{23}^{[3,1]}(1,2) = D_{32}^{[3,1]}(1,2) = 0$$

在杨表 $[3,1]$, $[3,1]$, $[3,1]$ 中, $2 \Rightarrow 3$ 的轴距 6 分别为 1, 2, -2

$$\text{则 } D_{11}^{[3,1]}(2,3) = 1, D_{22}^{[3,1]}(2,3) = \frac{1}{2}, D_{33}^{[3,1]}(2,3) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{又 } [3,1]_{1(2)} \neq (2,3)[3,1]_{2(1)}, [3,1]_{1(3)} \neq (2,3)[3,1]_{3(1)}, [3,1]_{2(3)} = (2,3)[3,1]_{3(2)}$$

$$\text{则 } D_{12}^{[3,1]}(2,3) = D_{21}^{[3,1]}(2,3) = 0$$

$$D_{13}^{[3,1]}(2,3) = D_{31}^{[3,1]}(2,3) = 0 \Rightarrow D^{[3,1]}(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D_{23}^{[3,1]}(2,3) = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$D_{32}^{[3,1]}(2,3) = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

在杨表 $[3,1]$, $[3,1]$, $[3,1]$ 中, $3 \Rightarrow 4$ 的轴距 6 分别为 -3, 1, 3.

$$\text{则 } D_{11}^{[3,1]}(3,4) = -\frac{1}{3}, D_{22}^{[3,1]}(3,4) = 1, D_{33}^{[3,1]}(3,4) = \frac{1}{3}$$

$$\text{又 } [3,1]_{1(2)} \neq (3,4)[3,1]_{2(1)}, [3,1]_{1(3)} = (3,4)[3,1]_{3(1)}, [3,1]_{2(3)} \neq (3,4)[3,1]_{3(2)}$$

$$\text{则 } D_{12}^{[3,1]}(3,4) = D_{21}^{[3,1]}(3,4) = 0$$

$$D_{13}^{[3,1]}(3,4) = D_{31}^{[3,1]}(3,4) = 0 \Rightarrow D^{[3,1]}(3,4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$D_{23}^{[3,1]}(3,4) = D_{32}^{[3,1]}(3,4) = \sqrt{\frac{9-1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

其余矩阵可用类似方法求出.

$$\text{有 } \sum_{g \in S_4} \chi^{[3,1]}(g) \chi^{[3,1]}(g) = \underbrace{1 \times 3 \times 3}_{[3,1]} + \underbrace{6 \times 1 \times 1}_{[2,1^2]} + \underbrace{3 \times (-1) \times (-1)}_{[2,2]} + \underbrace{8 \times 0 \times 0}_{[3,1]} + \underbrace{6 \times (-1) \times (-1)}_{[1^4]} = 24 = n. \text{ 因此 } D^{[3,1]}(S_4) \text{ 为 } S_4 \text{ 的一个不可约表示矩阵群.}$$

用同样的方法可求得 S_4 的其他 4 个不可约表示矩阵群.

2. S_n 群不可约表示的降阶分解.

假设在某一组基下, 相对于杨图 $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_k]$, S_n 的不可约表示为

$$\{D^{[v]}(p) \mid p \in S_n\}$$

如果用

$$\{D^{[v]}(p) \mid p \in S_{n-1}\}$$
 作为 $n-1$ 元置换群 S_{n-1} 表示时, 一般来说它不再可约

通常选取基先进行相似变换, 可将其分块对角化, 得 $D^{[v]}(p) = \begin{pmatrix} \oplus & 0 \\ 0 & D^{[v'']}(\bar{p}) \end{pmatrix} (p \in S_n)$

其中, $[v'_i]$ 是 $n-1$ 个数序的第一种配分, $D^{[v']}(\bar{p}) (p \in S_{n-1})$ 是 S_{n-1} 群的第 i 个不可约表示, 其由如下定理确定:

定理 3.3: 对于 n 元杨图 $[v]$, 如果某一行的格子数多于下一行的格子数, 从该行移去一个格子得到一个 $n-1$ 元杨图 $[v']$, 由此得到的所有可能的 $n-1$ 元杨图, 就是 S_n 的不可约表示 $[v]$ 中所包含的各种 S_{n-1} 的不可约表示 $[v']$.

注:

(1) 移去格子那一行的格子数一定等于下一行的格子数, 确保去掉格子的剩余部分仍是杨图.

(2) 每个不可约表示, 在分解式中最多只能出现一次.

例如: S_3 群的杨图 $[2,1]$, 有以下两种降阶分解式:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \times & \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline \end{array} \\ [2,1] & & [2] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \\ [2,1] & & [2,1] \end{array}$$

$$\Rightarrow D^{[2,1]}(p) = D^{[2^2]}(p) \oplus D^{[2,1^2]}(p) \quad (p \in S_3)$$

例 1: S_3 的三个不可约表示为:

$$D^{[1^3]}(p_e) = 1 \quad D^{[1^3]}(1,2) = -1$$

$$D^{[3]}(p_e) = 1 \quad D^{[3]}(1,2) = 1$$

$$D^{[2,1]}(p_e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^{[2,1]}(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_2 有两个不可约表示:

$$D^{[1^2]}(p_e) = 1 \quad D^{[1^2]}(1,2) = -1$$

$$D^{[2]}(p_e) = 1 \quad D^{[2]}(1,2) = 1$$

$$\text{则: } [1^2] \begin{array}{|c|c|} \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \end{array} \quad \text{即 } D^{[1^2]}(p) = D^{[1^2]}(p_e) \Leftrightarrow D^{[1^2]}(p_e) = D^{[1^2]}(p), D^{[1^2]}(1,2) = D^{[1^2]}(1,2)$$

$$[1^2] \begin{array}{|c|c|} \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \end{array} \quad \text{即 } D^{[1^2]}(p) = D^{[1^2]}(p_e) \Leftrightarrow D^{[1^2]}(p_e) = D^{[1^2]}(p), D^{[1^2]}(1,2) = D^{[1^2]}(1,2)$$

$$[2,1] \begin{array}{|c|c|} \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \end{array} \quad \text{即 } D^{[2,1]}(p) = D^{[2,1]}(p_e) \Leftrightarrow D^{[2,1]}(p_e) = D^{[2,1]}(p), D^{[2,1]}(1,2) = D^{[2,1]}(1,2)$$

$$D^{[2,1]}(1,2) = D^{[2,1]}(1,2) \oplus D^{[1^2]}(p_e)$$

$$D^{[2,1]}(1,2) = D^{[2,1]}(1,2) \oplus D^{[1^2]}(p_e)$$

第四章 李群及其表示

4.1 李群与算子

引例：考虑复数集合 $U(1) = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$ 满足群定义的4个条件： $A(\theta), A(\theta') \in U(1)$

① 封闭性： $A(\theta)A(\theta') = A(\theta+\theta') \in U(1)$

② 逆元素： $[A(\theta)]^{-1} = A(-\theta)$

③ 单位元： $e = A(0)$

④ 结合律： $[A(\theta_1)A(\theta_2)]A(\theta_3) = A(\theta_1)[A(\theta_2)A(\theta_3)]$

因此 $U(1)$ 构成群。

由于满足交换律且 θ 在实数域中连续，则 $U(1)$ 是一个阿贝尔连续群。

定义1：群参数：群 G 的元素，可以是 m 个参数 θ_i ($i=1, 2, \dots, m$) 的函数。

此时群元素可记为 $A(\theta) = A(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in G$.

上例中，群参数为 θ 。

定义2：逆元素函数：群的逆元素存在意味着对于任意一组参数 θ ，均有参数 θ' 存在

使得 $A(\theta)A(\theta') = A(\theta')A(\theta) = e \Rightarrow A(\theta') = A(\theta)^{-1}$

表明逆元素的参数 θ' 与 θ 间有一种函数关系， $\theta'_i = f_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ ($i=1, 2, \dots, m$)

或 $\theta' = f(\theta)$

上例中， $\theta' = -\theta$

定义3：组合函数：封闭性要求，对于任意群参数 α 与 β ，有群参数 γ 存在

使得 $A(\gamma) = A(\alpha)A(\beta) \in G$

表明 γ 与 α 及 β 之间应存在一定的函数关系， $\gamma_i = \phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ ($i=1, 2, \dots, m$)

或 $\gamma = \phi(\alpha; \beta)$ 通常称 ϕ 为群 G 的组合函数

上例中， $\gamma = \theta + \theta'$

另外，群元素乘法应满足结合律，则组合函数满足 $\phi[\alpha; \phi(\beta; \gamma)] = \phi[\phi(\alpha; \beta); \gamma]$

上例中， $\phi[\theta_1 + (\theta_2 + \theta_3)] = (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3$

定义4：连续群：若 α 和 β 都是群参数的连续函数，则称群 G 为连续群。

定义5：李群：若 α 和 β 既连续又可微，即 α 和 β 都是群参数的解析函数，则称群 G 为李群。

定义6：群阶：李群的独立参数的个数称为李群的阶。例如 $U(1)$ 为一阶李群。

定义7：参数空间：群参数的变化范围称为群的参数空间。例如 $U(1)$ 的参数空间为 \mathbb{R}

举例：

1. 一般线性变换群： $GL(L, \mathbb{C})$ (General Linear)

线性空间 L 中所有 $L \times L$ 非奇异复矩阵的集合

共有 $2L^2$ 个实参数，即 $GL(L, \mathbb{C})$ 是 $2L^2$ 阶李群。

① 若 $A_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ ，则为 L 阶实矩阵群，记为 $GL(L, \mathbb{R})$ ，是 $2L^2$ 阶李群。

② $\det A = \pm 1$ 的矩阵全体也构成一个群，称为一般特殊（么模）线性变换群，记作 $SL(L, \mathbb{C})$

$\det A = \pm 1$ 带两个约束条件（实部、虚部各一个），即 $SL(L, \mathbb{C})$ 是 $2(L^2-1)$ 阶李群。

2. 单正群： $U(L, \mathbb{C})$ 或简记为 $U(L)$ (Unitary)

由全体 L 阶非奇异复正矩阵构成，即任意 $A \in U(L)$ ，有 $AA^* = A^*A = I$ 或 $A^* = A^{-1}$

由于 $\det(A^*A) = \det A \det A^* = |\det A|^2 \Rightarrow |\det A|^2 = 1$

由于独立的矩阵元为处于右上三角区域的部分（不包括对角元），共 $1 + \dots + (L-1) = \frac{1}{2}L(L-1)$ 个对角元只有实部，则 $U(L)$ 群独立参数为 $\frac{1}{2}L(L-1) \times 2 + L = L^2$, $U(L)$ 群是 L^2 阶的。

① $\det A = \pm 1$ 的全体矩阵构成一个群，记为 $SU(L)$ 称为特殊（么模）单正群，为 (L^2-1) 阶李群。

在么正变换下，矢量内积不变： $(x, x') = (Ax, Ax') = (x, A^*Ax) = (x, x')$

3. 正交群： $O(L, \mathbb{C})$ (Orthogonality)

由全体 L 阶复正交矩阵构成，即任意 $A \in O(L, \mathbb{C})$ ，有 $AA^* = A^*A = I \Rightarrow A^* = A^{-1}$

由于 $\det(AA^*) = (\det A)^2 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

由于独立的矩阵元为处于右上三角区域的部分（不包括对角元），共 $1 + \dots + (L-1) = \frac{1}{2}L(L-1)$ 个

则 $O(L, \mathbb{C})$ 共有 $\frac{1}{2}L(L-1) \times 2 = L(L-1)$ 个实的独立参数。

① 满足 $\det A = \pm 1$ 的所有复正交矩阵的集合构成特殊（么模）正交群，记为 $SO(L, \mathbb{C})$

有 $\det A^* = \det A = \det A$

则 对任意 $A \in O(L, \mathbb{C})$ ， $A SO(L, \mathbb{C}) A^{-1} = SO(L, \mathbb{C})$

因此 $SO(L, \mathbb{C})$ 构成 $O(L, \mathbb{C})$ 的正规子群

$O(L, \mathbb{C}) = SO(L, \mathbb{C}) + A SO(L, \mathbb{C})$ ($A \in O(L, \mathbb{C})$ 且 $\det A = -1$)

$\Rightarrow O(L, \mathbb{C}) / SO(L, \mathbb{C})$ 为二阶李群。

② 若 $A \in O(L, \mathbb{C})$ ，且 $A_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ ，则 $O(L, \mathbb{C})$ 变为实的，记为 $O(L, \mathbb{R})$ 或简写为 $O(L)$ ，有 $\frac{1}{2}L(L-1)$ 个实参数

③ 若 $A \in SO(L, \mathbb{C})$ ，且 $A_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ ，构成特殊（么模）实正交矩阵，记为 $SO(L, \mathbb{R})$ 或简写为 $SO(L)$ 。

构成 $O(L)$ 的正规子群，代表 L 维空间的绝滚动，称为 L 维旋转变群。

在么正变换下，矢量长度不变： $|x|^2 = \tilde{x}' \tilde{x} = \tilde{x}' \tilde{A} \tilde{A} \tilde{x} = \tilde{x}' x = |x|^2$

4. 齐次洛伦兹群:

$$\text{四维时空间坐标} \quad x^M = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$$

$$x_\mu = (x^0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\vec{x})$$

线性变换为: $x'_\mu = \sum_\nu A_{\mu\nu} x^\nu$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) 且 $A_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$

若在上述变换下, 矢量长度保持不变,

$$\text{即 } x'^1 \cdot x'^1 = x'_\mu x^M = t'^2 - |\vec{x}'|^2 = x_\mu x^M = t^2 - |\vec{x}|^2$$

则称这种变换为齐次洛伦兹变换, 其变换矩阵的全体构成一个群, 称为齐次洛伦兹群.

用 L 表示, 其符合正交变换特点, 是四维空间中的一种转动变换.

则 L 共有 $\frac{1}{2} \times 4 \times (4-1) = 6$ 个独立参数, $\det A = \pm 1$.

L 中有如下四个元素:

(1) 单位元 $I = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$

(2) 空间反演 $\sigma = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

(3) 逆时间反演 $\tau = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

(4) 全反演 $\rho = \tau \sigma = \sigma \tau = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$

集合 $V = \{I, \sigma, \tau, \rho\}$ 构成一个四阶群.

若变换仅限 $x'_\mu = \sum_\nu A_{\mu\nu} x^\nu + a_\mu$, 其中 a_μ 为一平移实常数, 则称此为非齐次洛伦兹变换.

该变换下, 矢量两点间的距离保持不变, 称为非齐次洛伦兹群或庞加莱群, 带 10 个独立参数.

§4.2 李群的连通性与单连通性.

1. 李群的连通性

定义: 若李群 G 的参数空间中的任意两点, 可用此空间中的一条连续曲线连接起来, 则称 G 是连通的, 否则就是不连通的.

连通又可分为单连通与多连通.

单连通: 参数空间中任意两点间的任意两条连接曲线可经由参数空间内部使一条曲线连续变形为另一条, 则称 G 是单连通的.

多连通: 若所述的两条曲线不能经由参数空间内部连续变形而重合, 则称 G 是多连通的.

例1: 三维实正交群 $O(3)$

对于任意 $A \in O(3)$, $\det A = \pm 1$

因此 $O(3)$ 群参数空间分成互不相交的两叶

两叶无法用处于参数空间中的连续曲线连接起来, 所以 $O(3)$ 不连通.

$\det A = +1$
 $\det A = -1$

例2: 三维旋转群 $SO(3)$

元素 $A \in SO(3)$ 满足条件 $\det A = +1$, 因此 $SO(3)$ 连通.

$SO(3)$ 代表三维空间纯转动, 其元素可用转轴(2个参数)与转角(1个参数)描述.

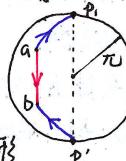
则 $SO(3)$ 群每个元素对应一个三维矢量, 矢量方向为转轴方向, 矢量长度为转角大小.

因此 $SO(3)$ 群的参数空间是一个半径为 π 的实心球体.

但直径两端两点(例如 P 与 P') 代表同一转动, 应视为同一点.

实际上参数空间是一个对称认可的实心球体.

因此从 a 到 b 可由红笔相连, 亦可由蓝笔相连, 但两条路无法连成变形



$\rightarrow SO(3)$ 是连通的.

例3: 二维特殊正交群 $SU(2)$

设 $A \in SU(2)$. 且 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \Rightarrow ad - bc = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad A^+ = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad A^+ = A^{-1} \Rightarrow a^* = d \quad c^* = -b$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$\text{设 } a = x + iy, \quad b = z + iw \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

则 $SU(2)$ 参数空间为四维球面. 因此 $SU(2)$ 为单连通李群.

例4: 齐次洛伦兹群 L

由 $\det A = \pm 1$ 知, L 是一不连通李群

$$\text{有 } \sum_{\mu} A_{\mu\nu} A^{\nu\lambda} = \sum_{\mu\nu\lambda} A_{\mu\nu} g^{\mu\rho} A_{\rho\lambda} g^{\alpha\lambda}, \quad g^{\lambda} = \sum_{\nu} g_{\nu\lambda} g^{\nu\lambda} \quad \text{且 } g_{\nu\lambda} = g^{\nu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} g^{\mu\rho} A_{\rho\lambda} = g_{\nu\lambda}$$

$$\Leftrightarrow A_{0v} A_{0\alpha} - A_{1v} A_{1\alpha} - A_{2v} A_{2\alpha} - A_{3v} A_{3\alpha} = g_{v\alpha} = \begin{cases} 0 & v \neq \alpha \\ 1 & v = \alpha = 0 \\ -1 & v = \alpha = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\text{取 } v = \alpha = 0 \text{ 得 } A_{00}^2 - \sum_{i=1}^3 A_{ii}^2 = 1 \Rightarrow A_{00}^2 \geq 1 \Rightarrow A_{00} \geq +1 \text{ 或 } A_{00} \leq -1$$

代表 L 群的参数空间还可分为 $A_{00} \geq +1$ 与 $A_{00} \leq -1$ 两叶, 两者也不连通.

因此 L 的参数空间可分为如下不连通的四叶:

$$L_+^{\uparrow}: \det A = +1, A_{00} \geq +1, I \in L_+^{\uparrow}$$

$$L_-^{\uparrow}: \det A = -1, A_{00} \geq +1, G \in L_-^{\uparrow}$$

$$L_-^{\downarrow}: \det A = -1, A_{00} \leq -1, T \in L_-^{\downarrow}$$

$$L_+^{\downarrow}: \det A = +1, A_{00} \leq -1, P \in L_+^{\downarrow}$$

$\det A = +1$ 的变换称为固有洛伦兹变换, 它不改变坐标轴的相对指向, 即左手坐标系, 变换后仍为右手坐标系,

$\det A = -1$ 的变换将改变坐标轴的相对指向, 即左手坐标系, 经变换后成为左手坐标系.

$A_{00} \geq +1$ 的变换称为正时洛伦兹变换

$$\text{由于 } x'_\mu = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow x'_0 = A_{00} x^0 + \sum_{i=1}^3 A_{0i} x^i$$

$$\text{对于类时空间 } x^2 = \sum_{\mu} x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + \sum_{i=1}^3 x_i x^i = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 > 0$$

$$\Rightarrow (x^0)^2 > \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$$

$$\text{由于 } \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} g^{\mu\rho} A_{\rho\lambda} = 1 \Rightarrow A_{00} A_{00} - \sum_{i=1}^3 A_{0i} A_{0i} = 1$$

$$\text{取装置 } A_{00} A_{00} - \sum_{i=1}^3 A_{0i} A_{0i} = A_{00}^2 - \sum_{i=1}^3 A_{0i}^2 = 1 \Rightarrow A_{00}^2 > \sum_{i=1}^3 A_{0i}^2$$

$$\text{则 } (A_{00} x^0)^2 > \sum_{i=1}^3 (A_{0i} x^i)^2$$

则 x'_0 的符号取决于 $A_{00} x^0$, 若 $A_{00} \geq +1$, 则 x'_0 与 x_0 同号, 正时洛伦兹变换不改变类时空间时间分量的符号

反之, 若 $A_{00} \leq -1$, 则 x'_0 与 x_0 异号, 类时空间的时间分量将变号.

例5 正时固有洛伦兹群 $L_p = L_+^{\uparrow}$, 固有洛伦兹群 L , 正时洛伦兹群 L^+ .

$$(1) \text{ 正时固有洛伦兹群 } L_p = L_+^{\uparrow}$$

由于其含有单位元 I , 构成群, 因此是 L 的正规子群

$$\text{有陪集 } \sigma L_p = L_+^{\uparrow}, \tau L_p = L_-^{\downarrow}, \rho L_p = L_+^{\downarrow}$$

$$\Rightarrow L = \{L_p, \sigma L_p, \tau L_p, \rho L_p\} = \{L_+^{\uparrow}, L_-^{\uparrow}, L_-^{\downarrow}, L_+^{\downarrow}\}$$

即商群 L/L_p 是一个四阶群, 与群 $V = \{I, \sigma, \tau, \rho\}$ 同构

对于 $A \in L_p$, $\det A \geq 1$, $A_{00} \geq +1$, 则类时空间的时间和空间都光速, 且坐标轴系右手关系, 保持不变. 虽然 $SO(3) \subset L_p$, 即三组旋转群 $SO(3)$ 是正时固有洛伦兹群的子群.

$$(2) \text{ 固有洛伦兹群 } L = L_+^{\uparrow} \cup L_+^{\downarrow}$$

$$A \in L_+, \det A = +1 \Rightarrow 坐标系保持右手关系不变.$$

$$(3) \text{ 正时洛伦兹群 } L^{\uparrow} = L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\uparrow}$$

$$A \in L^{\uparrow}, A_{00} \geq +1 \Rightarrow \text{类时空间的时间分量不变}.$$

例6. 狭义洛伦兹群 L_s

在狭义相对论中, 两个沿 x 轴相对匀速运动的惯性系间的洛伦兹变换为

$$x'^\mu = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{其中 } A_{\mu\nu}^M = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

上述全体构成群 L_s . 有 $\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^M g_{\mu\nu} A_{\nu\lambda}^M = g_{\lambda\mu}$ 且 $\det(A_{\mu\nu}^M) = +1$, $A^0 = \gamma \geq 1$

则 $L_s \subset L_p$ 且 L_s 为 L_p 的子群. 代表 (x^0, x^i) 二组空间中的转动变换群.

$$\text{而 } A^{M\alpha} = \sum_{\nu} A_{\nu\lambda}^M g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} g_{\mu\lambda} = 1 \quad \text{满足反交换, 则变换 } x'^\mu = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} x^\nu \text{ 是首次洛伦兹变换}$$

$$\text{且 } \det(A_{\mu\nu}) = \det(A^{\mu\nu}) = -1 \quad A^0 = A_{00} = \gamma \geq +1 \Rightarrow A_{\mu\nu} \text{ 或 } A^{\mu\nu} \notin L^{\uparrow} \text{ 不构成群.}$$

2. 李群的紧致性 (compact)

定义: 若李群的参数空间闭且有界, 则称其为紧致李群

对于矩阵李群 G 紧致 $\Leftrightarrow \forall A \in G, \exists k, s.t |A_{\mu\nu}| \leq k$

例 7: $O(l)$ 是紧致李群

$$\forall A \in O(l) \quad s.t \sum_{\mu} A_{\mu\mu} A_{\nu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu, \alpha = 1, 2, \dots, l)$$

$$\text{取 } \mu = \nu, \text{ 得 } \sum_{\alpha} (A_{\mu\alpha})^2 = 1 \quad (\mu, \alpha = 1, 2, \dots, l)$$

$$\Rightarrow |A_{\mu\alpha}| \leq 1 \quad (\mu, \alpha = 1, 2, \dots, l) \text{ 满足条件.}$$

同样 $SO(l)$ 也是紧致李群

例 8: $U(l)$ 是紧致李群

$$\forall A \in U(l) \quad s.t \sum_{\mu} A_{\mu\alpha} A_{\nu\alpha}^* = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu, \alpha = 1, 2, \dots, l)$$

$$\text{取 } \mu = \nu, \text{ 得 } \sum_{\alpha} A_{\mu\alpha} A_{\alpha\mu}^* = 1 \Rightarrow \sum_{\alpha} |A_{\mu\alpha}|^2 = 1 \quad (\mu, \alpha = 1, 2, \dots, l)$$

$$\Rightarrow |A_{\mu\alpha}| \leq 1 \quad (\mu, \alpha = 1, 2, \dots, l) \text{ 满足条件.}$$

同样 $SU(l)$ 也是紧致李群.

例 9: L 是非紧致李群

$$\text{由 } A_{00} > 0 \text{ 或 } A_{00} \leq -1 \Rightarrow L \text{ 非紧致}$$

虽然 $GL(L, C), GL(L, R), SL(L, C), SL(L, R)$ 等群都非紧致, 因此这里对群参数的取值范围没有要求.

§4.3 李群的无穷小生成元

设 A 为李群 G 在单位元附近的一个邻域内的群元素, 则由群的封闭性知

连通李群 G 总可以表示成集合 $G = \{A^n, n=1, 2, \dots\}$, 即连通李群可由单位元附近的群元素产生

这样, 为了得到连通李群 G , 只要求得其单位元附近的一个任意小的邻域内的群元素.

1. 李群的无穷小生成元

为了确定李群在单位元附近群元素, 将 $A(\alpha) \in G$ 在单位元 I (单位矩阵) 附近作级数展开

$$\text{得 } A(\alpha) = I + \sum_{k=1}^m \alpha_k X_k + \dots$$

其中 $\alpha_k \quad (k=1, 2, \dots, m)$ 是无穷小的群参数

假设共有 m 个独立群参数, 即李群 G 是 m 阶的, 上式的展开系数 $X_k = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha=0} \quad (k=1, 2, \dots, m)$

称为连通李群 G 的无穷小生成元, 或简称李群的生成元.

对于 m 阶李群, 共有 m 个线性无关的生成元(基矢)

例 1: $SO(2)$ 群的生成元

$SO(2)$ 群描述二维空间的纯转动, 有 $\frac{1}{2}l(l-1) = \frac{l(l-1)}{2} = 1$ 个参数

假设转动在 xoy 平面内绕 e_3 轴转 α 角

矩阵元为 $A_{\mu\nu} = (\vec{e}_\mu, \vec{e}'_\nu) = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}'_\nu$

$$\text{得群元素为 } A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi,$$

单位元为 $A(0)$

$$\text{生成元 } X = \left. \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{或写为 } X_{\alpha} = iX = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \rightarrow 0 \text{ 时 } A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = I + \alpha X = I - i\alpha X_{\alpha}$$

$$\text{若考虑 } e_3 \text{ 轴. } A_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \left. \frac{\partial A_3(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{或 } L_3 = iX_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 即为轨道角动量算符的 } z \text{ 分量.}$$

例 2: $SU(2)$ 群的生成元

有 $\frac{l(l-1)}{2} = 3$ 个独立参数.

单位元附近的群元素: $A(\alpha) = I + \Sigma(\alpha)$ 其中 Σ 为一少量.

由么正条件 $A(\alpha) A^*(\alpha) = I \Rightarrow \Sigma(\alpha) + \Sigma^*(\alpha) = 0$ 即 Σ 反厄米

令 $\Sigma(\alpha) = i\Lambda(\alpha)$, 则 $\Lambda(\alpha)$ 为厄米矩阵, 则 $A(\alpha) = I + i\Lambda(\alpha)$

由么模条件 $\det A = 1$, 得 $\det A = 1 + i \sum_p \Lambda_{pp} + \dots = 1$ 高阶

则 $\text{Tr } \Lambda = 0$ 即 Λ 无迹

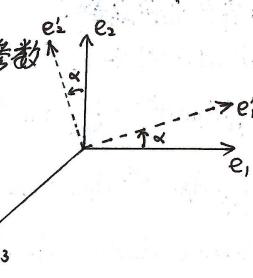
通常写为 $\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_1 + i\alpha_2 \\ -\alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ 其中 α_1, α_2 与 α_3 为三个无穷小群参数

$$\text{则 } A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 - i\alpha_3 & -i\alpha_1 - \alpha_2 \\ -i\alpha_1 + \alpha_2 & 1 + i\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{得生成元 } X_1 = \left. \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_1$$

$$X_2 = \left. \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2$$

$$X_3 = \left. \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_3} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\sigma_3$$



δ_{ik} ($k=1,2,3$) 为泡利矩阵, 满足对易关系 $[\delta_{ij}, \delta_{jk}] = 2i\frac{1}{\sqrt{3}}\epsilon_{ijk}\delta_{ik}$ ($i,j,k=1,2,3$).

其中 ϵ_{ijk} 为 Levi-Civita 符号, 是一完全反对称张量 (即 $\epsilon_{123}=1$).

则上式写为 $A(\alpha) = I + \begin{pmatrix} -i\alpha_3 & -i\alpha_1 - i\alpha_2 \\ -i\alpha_1 + i\alpha_2 & i\alpha_3 \end{pmatrix} = I + \sum_{i=1}^3 \alpha_i X_i = I - i \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i$

例 3: $SU(3)$ 群的生成元

有 $\pm 1 (l-1) \frac{l+3}{2}$ 3 个独立参数, 描述三维纯转动.

可以理解为分别绕 x, y, z 轴转 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 角 (优先后顺序).

即 $A(\alpha) = A_3(\alpha_3) A_2(\alpha_2) A_1(\alpha_1)$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ -\sin \alpha_2 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

其中 $-\pi \leq \alpha_1, \alpha_2 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_3 < \frac{\pi}{2}$

有生成元 $X_1 = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -iL_1$

$$X_2 = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iL_2$$

$$X_3 = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iL_3$$

其中 L_i ($i=1,2,3$) 为向量算符, 满足对易关系 $[L_i, L_j] = i \frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_{ijk} L_k$ ($i,j,k=1,2,3$)

且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rightarrow 0$ 时, $A(\alpha) \approx I + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = I + \sum_{i=1}^3 \alpha_i X_i = I - i \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i$

例 4: $SU(3)$ 群的生成元

同理, 单位元附近元素可写成 $A(\alpha) = I + i\Lambda(\alpha)$ 其中 Λ 是一无迹厄米矩阵.

且是一个无穷小量, 有 $I^2 - I \frac{l+3}{2}$ 8 个独立参数.

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} -\alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & -\alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_4 + i\alpha_5 \\ -\alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & -\alpha_6 + i\alpha_7 \\ -\alpha_4 - i\alpha_5 & -\alpha_6 - i\alpha_7 & \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha_8 \end{pmatrix}$$

其中 α_k ($k=1, \dots, 8$) 为八个无穷小群参数, 与之相应的生成元为:

$$X_k = \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha=0} = -i\lambda_k \quad (k=1,2,\dots,8)$$

$$\text{其中, } \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

上述八个无迹厄米矩阵称为 Gell-Mann 矩阵

满足对易关系 $[\lambda_i, \lambda_j] = 2i \frac{1}{\sqrt{3}} f_{ijk} \lambda_k$ ($i,j,k=1,2,\dots,8$).

其中 f_{ijk} 是完全反对称张量, 不为零的有

$$f_{123} = 1, f_{145} = 1, f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

采用生成元, 上式为 $A(\alpha) = I + \sum_{i=1}^3 \alpha_i X_i = I - i \sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i$

2. 有限群元素的生成

得到 $A(\alpha)$ 后, 利用 $G = \{A^n, n=1,2,\dots\}$ 就可得到李群 G . 只要上式中的 n 取得足够大,

就可以得到有限群参数的群元素. 即生成了有限群元素, 这就是将 X_k 称为生成元的原因.

$$\text{例 1': } A(\alpha) = I + \alpha X = I - i \frac{\alpha}{n} X_\alpha \quad \text{其中 } X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α 是无穷小量, n 是无穷大量, α 是有限量.

$$\Rightarrow A(\alpha) = [A(\alpha)]^n = (I - i \frac{\alpha}{n} X_\alpha)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-i\alpha X_\alpha)$$

$$\text{进行展开: } A(\alpha) = \exp(-i\alpha X_\alpha) = I - i\alpha X_\alpha - \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{3!} i\alpha^3 X_\alpha + \dots$$

$$= (I - \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{4!} \alpha^4 - \dots) - i X_\alpha (\alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \frac{1}{5!} \alpha^5 - \dots)$$

$$= \cos \alpha - i X_\alpha \sin \alpha$$

$$\text{即 } A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ 生成元 } X_\alpha \text{ 生成了有限群元素 } A(\alpha) \in SO(2)$$

对于有 m 个生成元的连通李群, 这种关系可一般性推广为

$$A(\alpha) = \exp\left(-i \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i\right)$$

其中 X_i 是与参数 α_i 相应的生成元, 通常将满足上述关系的群参数称为正则群参数.

一般来说, 若群元素的单位元仅处在零参数处, 即 $A(0) = I$, 则这样的群参数都是正则群参数. 如 $SO(2), SU(2), SO(3), SU(3)$, 其单位元都在零参数处, 因此与之相应的群参数都是正则的. 各群的有限群元素与相应的生成元之间都有如下指数关系:

$$SL(2): A(\alpha) = \exp\left(-i \sum_{i=1}^3 \alpha_i \epsilon_i\right) \quad \text{生成元 } \epsilon_i \quad \text{结构常数 } \epsilon_{ijk}$$

$$SO(3): A(\alpha) = \exp\left(-i \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i\right) \quad \text{生成元 } L_i \quad \text{生成元不对易, 需要规定它们的次序. } \quad \epsilon_{ijk}$$

$$SU(3): A(\alpha) = \exp\left(-i \sum_{i=1}^8 \alpha_i \lambda_i\right) \quad \text{生成元 } \lambda_i \quad \text{结构常数 } f_{ijk}$$

3. 李群的结构常数

$$\text{单位元附近群元素: } A(\alpha) = I + \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i + O(\alpha^2)$$

$$A^{-1}(\alpha) = I - \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow A(\alpha) A(\alpha) = I + O(\alpha^2)$$

$$\text{而 } A(\beta)^{-1} A(\alpha)^{-1} A(\beta) A(\alpha) = I + \sum_{i,j=1}^m \beta_i \alpha_j [X_i, X_j] \text{ 也是群元素 (封闭性)}$$

$$\Rightarrow A(\beta)^{-1} A(\alpha)^{-1} A(\beta) A(\alpha) = I + \sum_{k=1}^m \beta_k X_k$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^m \beta_i \alpha_j [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m \beta_k X_k$$

$$\Rightarrow [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m C_{ij}^k X_k \quad \text{且 } \delta_k = \sum_{i,j=1}^m C_{ij}^k \beta_i \alpha_j$$

即李群两生成元间的对易关系可由 m 个生成元的线性组合给出, C_{ij}^k 称为李群的结构常数.

由生成元对易关系确定. 对于阿贝尔李群, $C_{ij}^k = 0$

李群的结构常数的性质

(1) C_{ij}^k 关于下角标是反对称的, 即 $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$

(2) 满足 $\sum_{p=1}^m C_{ij}^p C_{pk}^q + C_{jk}^p C_{pi}^q + C_{ki}^p C_{pj}^q = 0$ (轮换对称)

3.4 李群的无穷小算符

设李群 G , 由 m 个独立参数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 描述.

L 维线性空间 L 中的矢量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 在 $A(\alpha) \in G$ 的变换下变为

$$X' = A(\alpha) X \iff X'_\mu = \sum_{i=1}^L A_{\mu i}(\alpha) X_i = f_\mu(x, \alpha)$$

坐标变换的同时, L 空间中任一函数亦作变换

$$\psi(x') = \hat{P}(A) \psi(x) \quad \text{保证自变量不变, 函数变.}$$

由于空间任一点的函数值在坐标变换时保持不变, 则

$$\hat{P}(A) \psi(x) = \psi(x) = \psi(A^\dagger x)$$

$$\Rightarrow \hat{P}(A) \psi(x) = \psi(A^\dagger x) = \psi[f(x, \bar{\alpha})] \quad \text{其中 } \bar{\alpha} \text{ 是 } A^\dagger(\alpha) \text{ 的群参数. 即 } A^\dagger(\alpha) = A(\bar{\alpha})$$

对于无穷小变换, $\alpha_k \rightarrow 0$, $\bar{\alpha}_k = -\alpha_k$.

将 $P(A)$ 展开

$$\hat{P}(A) \psi(x) = \psi[f(x, \bar{\alpha})] \Big|_{\bar{\alpha}=0} + \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_k \frac{\partial \psi[f(x, \bar{\alpha})]}{\partial \bar{\alpha}_k} \Big|_{\bar{\alpha}=0}$$

$$= \psi(x) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{\mu=1}^L \frac{\partial \psi[f(x, \bar{\alpha})]}{\partial f_\mu(\alpha, \bar{\alpha})} \cdot \frac{\partial f_\mu(x, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}_k} \Big|_{\bar{\alpha}=0}$$

$$\underline{f_\mu(x, \bar{\alpha})|_{\bar{\alpha}=0} = x_\mu} \quad \underline{\psi(x) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{\mu=1}^L \frac{\partial f_\mu(x, \alpha)}{\partial \alpha_k}|_{\alpha=0}} \cdot \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu}$$

$$\text{令 } \hat{X}_k = (-i) \times (-1) \sum_{\mu=1}^L \frac{\partial f_\mu(x, \alpha)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (k=1, 2, \dots, m) \text{ 称为李群的无穷小算符 (infinitesimal operator)}$$

$$\text{则 } \hat{P}(A) = I - i \sum_{k=1}^m \alpha_k \hat{X}_k \quad \text{其数同等于李群独立参数的和.}$$

无穷小算符 \hat{X}_k 与无穷小生成元满足同样的对易关系, 即 $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{k=1}^m C_{ij}^k \hat{X}_k$

因此从代数运算角度看, 无穷小生成元与无穷小算符没有什么区别, 但作用对象不同, 形式也就不一样.

无穷小算符作用在函数上, 取算符形式; 无穷小生成元作用在矢量上, 取矩阵形式.

上式为无穷小变换 $\alpha_k \rightarrow 0$ 的变换算符. 对于有限变换, 在群参数取正则群参数情况下,

有限参数变换算符为 $\hat{P}(A) = \exp\left(-i \sum_{k=1}^m \alpha_k \hat{X}_k\right)$.

\hat{X}_k 无关 $\Leftrightarrow \hat{P}(A)$ 么正, 即 $\hat{P}^*(A) = \hat{P}^{-1}(A)$

例1: $SO(2)$ 群的无穷小算子

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

只有一个群参数 α .

$$\Leftrightarrow X_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \quad X_2' = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \hat{X} = i \sum_{m=1}^2 \frac{\partial X_m'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial X_m}$$

$$= i \left(\frac{\partial X_1'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$= i \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = -\hat{\zeta}_3$$

例2: $SU(2)$ 群的无穷小算子.

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-i\alpha_3 & -i\alpha_1-\alpha_2 \\ -i\alpha_1+\alpha_2 & 1+i\alpha_3 \end{pmatrix}$$

三个群参数: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\Leftrightarrow X_1 = (1-i\alpha_3)x_1 + (-i\alpha_1-\alpha_2)x_2$$

$$X_2 = (-i\alpha_1+\alpha_2)x_1 + (1+i\alpha_3)x_2$$

$$\Rightarrow X_1 = i \sum_{m=1}^2 \frac{\partial X_m'}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_1=0} \frac{\partial}{\partial X_m} = i \left(\frac{\partial X_1'}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_1=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2'}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_1=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$= i \left[(-iX_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-iX_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] = X_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial}{\partial x_2} = -\hat{\zeta}_1$$

$$X_2 = i \left[(-X_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (X_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] = i \left(X_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = -\hat{\zeta}_2$$

$$X_3 = i \left[(-iX_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (iX_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = -\hat{\zeta}_3$$

满足 $[\hat{\zeta}_i, \hat{\zeta}_j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{\zeta}_k$

例3: $SO(3)$ 的无穷小算子.

$$\hat{X}_1 = iX_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + iX_3 \frac{\partial}{\partial x_2} = -\hat{\zeta}_1$$

满足 $[\hat{\zeta}_i, \hat{\zeta}_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{\zeta}_k$

$$\hat{X}_2 = -iX_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + iX_1 \frac{\partial}{\partial x_3} = -\hat{\zeta}_2$$

$$\hat{X}_3 = -iX_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + iX_2 \frac{\partial}{\partial x_1} = -\hat{\zeta}_3$$

例4: $SU(3)$ 的无穷小算子

$$\hat{X}_1 = -X_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial}{\partial x_1} = -\hat{\zeta}_1$$

$$\hat{X}_2 = -iX_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + iX_3 \frac{\partial}{\partial x_2} = -\hat{\zeta}_2$$

$$\hat{X}_3 = X_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - X_3 \frac{\partial}{\partial x_1} = -\hat{\zeta}_3$$

$$\hat{X}_4 = X_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_1} = -\hat{\zeta}_4$$

$$\hat{X}_5 = iX_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + iX_1 \frac{\partial}{\partial x_3} = -\hat{\zeta}_5$$

$$\hat{X}_6 = -X_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - X_3 \frac{\partial}{\partial x_2} = -\hat{\zeta}_6$$

$$\hat{X}_7 = -iX_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + iX_2 \frac{\partial}{\partial x_3} = -\hat{\zeta}_7$$

$$\hat{X}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} (X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) = -\hat{\zeta}_8$$

§4.5 李群的表示,

由重排定理知, 对于 $f(g), (g \in G)$, 有

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{g \in G} f(gg') = \sum_{g \in G} f'(g'g) = \sum_{g \in G} f(g'g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g^{-1}g)$$

若能改写上式, 就能将有限群表示的很多相关结果(例如正规性与正交性定理)推广到李群中.

1. 群上不变积分

李群是连通群.

求和 \Rightarrow 积分 $\xrightarrow{\text{对称性}} \text{对群参数加权积分}$.

$$\text{则上式改写为: } \int_{A(\alpha) \in G} f[A(\alpha)] w(\alpha) d\alpha = \int_{A(\alpha) \in G} f[A(\alpha) A(\beta)] w(\alpha) d\alpha = \int_{A(\alpha) \in G} f[A(\beta) A(\alpha)] w(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{A(\alpha) \in G} f[A(\alpha) A(\beta)] w(\alpha) d\alpha = \int_{A(\alpha) \in G} f[A^{-1}(\beta) A(\alpha)] w(\alpha) d\alpha.$$

其中 $A(\beta) \in G$. $w(\alpha) = w(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 为权重因子. 上式称为 群上不变积分.

不是所有李群都有这样的不变积分.

但对某些李群, 上式成立.

2. 李群的表示,

对于李群 G , 其群元素 $A(\alpha) \in G$, 由 m 个群参数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 描述.

如果线性空间 L 中存在非奇异矩阵集合 $D(A)$ 与 G 同构或同态, 则称 $D(A)$ 为李群 G 的 线性表示, 一般 $D(A)$ 也是一个李群.

若能找到一组基矢, 使得所有矩阵都有右上三角或左下三角形式, 如:

$$D(A) = \begin{pmatrix} D(A) & | & X(A) \\ 0 & | & D'(A) \end{pmatrix} \text{, 则称 } D(A) \text{ 为可约表示.}$$

若 $X(A) = 0$, 则 $D(A)$ 为分块对角化矩阵, 称完全可约表示.

对于有限群, 可约表示必完全可约. 但李群中, 可约表示不一定完全可约.

但对于某些李群, 由于存在群上不变积分, 有限群表示论中相关结论可直接迁移过来. ☆☆

例如: 累积李群的任一表示都等价于一线性表示. 累积李群的表示要么不可约, 要么完全可约.

不可约表示的矩阵元满足正交关系: $\int_{A(\alpha) \in G} D^{(i)*}_{\mu\nu}[A(\alpha)] D^{(j)}_{\mu\nu}[A(\alpha)] w(\alpha) d\alpha = \frac{1}{l_i} \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} S_{\mu\nu}$

其中 l_i 表示 $D^{(i)}(A)$ 的维数, 有限群的 $n = \sum_i l_i$ 过渡到李群时变为积分 $\int w(\alpha) d\alpha$.

3. 李群的伴随表示

设有李群 G . 对于 $A(\alpha) \in G$ 定义映射 $\phi = \text{Ad}$, 称为 伴随映射 (coadjoint)

满足 $\text{Ad } A(\alpha) [B(\alpha)] = A(\alpha) B(\alpha) A^{-1}(\alpha) = B^{\text{Ad}(A)}(\alpha)$. 这是一种 G 内元素的共轭操作.

$$B(\alpha) \xrightarrow{\text{共轭元素}} B^{\text{Ad}(A)}(\alpha)$$

当 $A(\alpha)$ 取遍 G 中所有元素时, Ad 将映射出 $B(\alpha)$ 中所有共轭元素, 我们称其为 $B(\alpha)$ 的伴。

单位元附近的群元素 $B(\alpha) = I + \sum_{j=1}^m \alpha_j X_j + \dots$ 其中 X_j 是李群 G 的生成元

$$\text{则 } B^{\text{Ad}(A)}(\alpha) = A(\alpha) B(\alpha) A^{-1}(\alpha) = I + \sum_{j=1}^m \alpha_j X_j^{\text{Ad}(A)}(\alpha) + \dots \quad \text{其中 } X_j^{\text{Ad}(A)}(\alpha) = A(\alpha) X_j A^{-1}(\alpha)$$

为变换后的 X_j .

由于 X_j 与 $X_j^{\text{Ad}(A)}(\alpha)$ 分别是伴随变换前后 m 维线性空间中的基元

$$\text{有 } X_j^{\text{Ad}(A)}(\alpha) = \sum_{k=1}^m D_{kj}^{\text{Ad}(A)}(\alpha) X_k \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

上式中 $D^{\text{Ad}(A)}(\alpha)$ 是一种表示, 称为李群 G 的 伴随表示.

对于 m 维李群 G , $D^{\text{Ad}(A)}(\alpha)$ 是 m 维的.

对于生成元 X_j 从伴随映射为: $\text{Ad } A(\alpha)(X_j) = A(\alpha) X_j A^{-1}(\alpha) = X_j^{\text{Ad}(A)}(\alpha)$

$$= \sum_{k=1}^m D_{kj}^{\text{Ad}(A)}(\alpha) X_k \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

§4.6. $SU(4)$ 群的不可约表示.

1. $SU(4)$ 群的不可约表示与杨图

$SU(4)$ 群的不可约表示可用 $l-1$ 个参数 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1})$ 描述,

参数可用杨图表示:

右图给出参数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (2, 3, 1, 0, 2)$ 时的杨图.

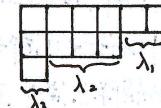


若代表 $SU(7)$ 的一个不可约表示, 则表示为 $D^{(7)}(2, 3, 1, 0, 2)$

若代表 $SU(6)$, 则表示为 $D^{(6)}(2, 3, 1, 0, 2)$

若代表 $SU(5)$, 则表示为 $D^{(5)}(2, 3, 1, 0)$ 适时, 各列的格子是多余的, 可以去掉.

如右图所示, 右图也是 $SU(4)$ 的表示 $D^{(4)}(2, 3, 1, 1)$ 的杨图.



2. $SU(4)$ 群不可约表示的维数

$D^{(l)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1})$ 的维数为 $d^{(l)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1})$

$$\text{有 } d^{(l)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1}) = \frac{1}{1! 2! \dots (l-1)!} \times (\lambda_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+2) \cdots (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{l-1}+l-1) \\ \times (\lambda_2+1)(\lambda_2+\lambda_3+2) \cdots (\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_{l-1}+l-2) \\ \times \cdots \times (\lambda_{l-1}+1)$$

$$(4) \quad d^{(2)}(\lambda) = \lambda + 1$$

$$d^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)$$

$$d^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{1! 2! 3!} (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)$$

3. $SU(4)$ 群不可约表示直积的分解

由 2.7 节知, 群的两个表示的直积也是群的一个表示且是可约的.

$$D^{(i)}(g) \otimes D^{(j)}(g) = \sum_k D_{ijk}^{(k)}(g) \quad (g \in G)$$

杨图分解法:

(i) 选择其中一个杨图作为基础图, 通常选择格子数较少者为基础图,

(ii) 保持基础图不变, 将另一个杨图的格子按行标号, 第1行填1, 第2行填2...

(iii) 将标号的格子加到基础图上, 作出一切可能扩大的杨图.

规则: (A) 加到基础图上的同一行格子的标号从左到右是不减次序, 即自左而右标号由小到大, 可以重复.

(B) 加到基础图上的同一列格子的标号从上到下是增加次序, 即从上到下标号由小到大, 不能重复.

(C) 扩大而成的每个图必须是杨图, $SU(4)$ 群总行数不能超过 4.

(D) 从最后得到的每一杨图的第一行开始, 由右向左逐行读这些标号时, 遵循一标号读过的不同格子数固定满足关系

标号 1 的格子 \geq 标号 2 的格子 \geq 标号 3 的格子 ...

即大格号出现之前, 小格号要先出现, 且小格号出现的次数不少于大格号出现的次数.

$$\text{例 1: } D^{(3)}(1, 1) \otimes D^{(3)}(1, 1)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{} \\ \text{D}^{(3)}(1, 1) \end{array} \otimes \begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \end{array} = \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \end{array}$$

$$\Rightarrow D^{(3)}(1, 1) \otimes D^{(3)}(1, 1) = D^{(3)}(2, 2) \oplus D^{(3)}(3, 0) \oplus D^{(3)}(0, 3) \oplus D^{(3)}(1, 1) \oplus D^{(3)}(1, 1) \oplus D^{(3)}(0, 0)$$

简化为 $8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ 其中 $\bar{10} = d^{(3)}(0, 3)$, $10 = d^{(3)}(3, 0)$

$$\text{例 2: } D^{(4)}(1, 0, 0) \otimes D^{(4)}(1, 0, 0) \otimes D^{(4)}(1, 0, 0)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{} \\ \text{D}^{(4)}(1, 0, 0) \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \text{D}^{(4)}(1, 0, 0) \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \text{D}^{(4)}(1, 0, 0) \end{array} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \text{D}^{(4)}(2, 0, 0) & \text{D}^{(4)}(0, 2, 0) \end{array} \right) \otimes \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \text{D}^{(4)}(1, 0, 0) \end{array} = \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \end{array}$$

$$\Rightarrow D^{(4)}(1, 0, 0) \otimes D^{(4)}(1, 0, 0) \otimes D^{(4)}(1, 0, 0) = D^{(4)}(3, 0, 0) \oplus D^{(4)}(1, 1, 0) \oplus D^{(4)}(1, 1, 0) \oplus D^{(4)}(0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow 4 \otimes 4 \otimes 4 = 20 \oplus 20 \oplus 20 \oplus \bar{4}$$

第五章 $SO(3)$ 群及其表示

§5.1 $SO(3)$ 群及其与 $SU(2)$ 群

1. $SO(3)$ 群的欧拉角描述

$SO(3)$ 是三参数 $[l_1(l-1)/2, l=3]$ 的李群 (原坐标轴的三个旋转 α_1, α_2 与 α_3)

实际上通常仅用三个欧拉角 α, β 与 γ , 转动方式如下:

$$(1) \text{ 绕 } z \text{ 轴转 } \alpha \text{ 角, } \Gamma \text{ 变为 } \tilde{\Gamma}, \text{ 矩阵形式为 } \tilde{\Gamma} = R_z(\alpha) \Gamma \quad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 绕新坐标系的 y' 轴转 β 角, $\tilde{\Gamma}$ 变为 $\tilde{\Gamma}'$, 矩阵形式为 $\tilde{\Gamma}' = R_y(\beta) \tilde{\Gamma}$

$$\text{有 } R_y(\beta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha) \quad \text{其中 } R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Gamma}' = R_z(\alpha) R_y(\beta) \tilde{\Gamma}$$

(3) 绕 z' 轴转 γ 角, $\tilde{\Gamma}'$ 变为 $\tilde{\Gamma}''$, 矩阵形式为 $\tilde{\Gamma}'' = R_z(\gamma) \tilde{\Gamma}'$

$$\text{有 } R_z''(\gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) [R_z(\alpha) R_y(\beta)]^{-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Gamma}'' = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \tilde{\Gamma} = R(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{\Gamma}$$

$$\text{其中 } R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma & -\cos\alpha \cos\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma & \cos\alpha \sin\beta \\ \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma & -\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma & \sin\alpha \sin\beta \\ -\sin\beta \cos\gamma & \sin\beta \sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi$$

$$0 \leq \beta \leq \pi$$

$$\beta=0 \text{ 时 } R(\alpha, 0, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\gamma) & -\sin(\alpha+\gamma) & 0 \\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 即单位元 } \tilde{\Gamma} \text{ 于 } \beta=0 \text{ 与 } \alpha+\gamma=0 \text{ 处}$$

2. $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 群的同态群描述

设 $\vec{F} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ 为三维位矢量, 它与泡利矩阵的点积,

$$M = \vec{F} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \text{ 为元迹矩阵, } \det M = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$\text{设 } U \in SU(2) \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{对 } M \text{ 作相似变换}$$

$$M' = U M U^+ \text{, 由于 } U \text{ 正, } U^+ = U^{-1}, \text{ 矩阵的迹在相似变换下不变, 则 } M' \text{ 也为元迹矩阵}$$

$$\text{写成 } M' = \vec{F}' \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & -x'_3 \end{pmatrix} \quad \det M' = -(x'_1^2 + x'_2^2 + x'_3^2)$$

相似变换

$$\Rightarrow x'_1^2 + x'_2^2 + x'_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

R: $U \in SU(2)$ 不改变矢量长度, 则每一个 $U \in SU(2)$ 对应一个三维空间的正交变换

$$\text{即 } M = \vec{F} \cdot \vec{\sigma} \xrightarrow{U \in SU(2)} M' = \vec{F}' \cdot \vec{\sigma} = U \vec{F} \cdot \vec{\sigma} U^+$$

$$P_U \in SO(3)$$

$$\Rightarrow \vec{F}' = P_U \vec{F}$$

具体表达式将 $M' = U M U^+$ 展开, 得到 $\vec{F}' = P_U \vec{F} = R(a, b) \vec{F}$ 表达式

$$\text{其中 } R(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) & -\frac{1}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) & -(ab + a^{*}b^{*}) \\ \frac{1}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}) & i(a^{*}b^2 - ab) \\ ab + a^{*}b^{*} & i(a^{*}b - b^{*}a) & aab^2 - bb^{*2} \end{pmatrix} \quad \text{即 } R \text{ 为 } SU(2) \text{ 的一个矩阵}$$

$$\Rightarrow \det R(a, b) = +1 \quad \text{即 } R \in SO(3)$$

由正交矩阵行列式为 1, 且两者维度空间不连通, 只需取 $a=1, b=0$, $\det R(1, 0) = +1$

3. $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 群的同态关系

$$\text{设有映射关系 } U \in SU(2) \longrightarrow R_U \in SO(3)$$

$$U \in SU(2) \longrightarrow R_{UU'} \in SO(3)$$

$$UU' \in SU(2) \longrightarrow R_{UU'} \in SO(3)$$

可以证明 $R_U R_{U'} = R_{UU'}$, 即 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 同态.

且两者的关系是 $SU(2)$ 中的两个群元素, 对应于 $SO(3)$ 的一个群元素.

因为 $M' = U M U^+ = (-U) M (-U^+)$, 所以, $U \in SU(2)$ 对应于 $SO(3)$ 中的同一元素.

通常称 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的覆盖群, 商群 $SU(2)/\{I\}$ 与 $SO(3)$ 同构

4. $SU(2)$ 群的欧拉角描述

$SU(2)$ 与 $SO(3)$ 具有共同的群参数, 用欧拉角 α, β, γ 形式

$$\text{有 } U_z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e^{-i\alpha} \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \cos\frac{\beta}{2} \\ b = -\sin\frac{\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$$

$$\Rightarrow U(\alpha, \beta, \gamma) = U_x(\alpha) U_y(\beta) U_z(\gamma)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \sin \frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

即由四欧拉角表示 $U(\alpha, \beta, \gamma) \in SU(2)$

级数 $a = e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos \frac{\beta}{2}, b = -e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{\beta}{2}$
称为 Cayley-Klein 矩阵

当 $\alpha \Rightarrow \alpha + 2\pi$ 或 $\gamma \Rightarrow \gamma + 2\pi$ 时, $a \Rightarrow -a, b \Rightarrow -b$ 而 $U \Rightarrow -U$ 使 $R(\alpha, \beta, \gamma) \in SO(3)$ 保持不变

因此 $SU(2)$ 两个群元素对应 $SO(3)$ 一个群元素.

$SO(3)$ 与 $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ 同构, 所以二者有相同的表示.

1. $SU(2)$ 群的不可约表示.

$$D_{m'm}^{(l)}(U) = D_{m'm}^{(l)}(a, b) = \sum_{k=0}^{l+m} (-1)^k \frac{[l-m]! [l+m]! [l-m]! [l+m]!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m-k)! (m-l+k)! k! (l+m-k)!} \times a^{l-m-k} b^{m-l+k} b^{l+m-k} a^{l+m-k}$$

其中 $m', m = l, l-1, \dots, -l$; l 取半正整数或零.

$$\text{群表示空间基矢 } |l, m\rangle (x_1, x_2) = \frac{x_1^{l-m} x_2^{l+m}}{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}}, \quad m = l, l-1, \dots, -l; \quad l \text{ 取半正整数或零.}$$

2. $SU(2)$ 群的不可约表示的性质.

① $D^{(l)}(U)$ 是幻正的 $D^{(l)}(U) D^{(l)*}(U) = 1$

② $D^{(l)}(U)$ 是不可约的

$$③ D^{(l)}(-U) = (-1)^{2l} D^{(l)}(U)$$

§5.3 $SO(3)$ 群的不可约表示.

1. $SO(3)$ 群的单值与双值表示.

① 当 l 取正整数时, $D^{(l)}(\pm U) = D^{(l)}(U)$, 即此时 U 与 $-U$ 有相同表示矩阵.

$$\Rightarrow D^{(l)}(\pm U) D^{(l)*}(\pm U') = D^{(l)}(U) D^{(l)*}(U') = D^{(l)}(\pm U U')$$

$$D^{(l)}(R_U) D^{(l)*}(R_{U'}) = D^{(l)}(R_{UU'})$$

即 $SU(2)$ 的表示也是 $SO(3)$ 群的表示, 称为 $SO(3)$ 群的单值表示.

② 当 l 取正半奇数时, $D^{(l)}(\pm U) = \pm D^{(l)}(U)$. 即 U 与 $-U$ 的表示相差带了一个负号.

$$\Rightarrow D^{(l)}(\pm U) D^{(l)*}(\pm U') = \pm D^{(l)}(U) D^{(l)*}(\pm U') = \pm D^{(l)}(\pm U U')$$

↑

$$D^{(l)}(R_U) D^{(l)*}(R_{U'}) = \pm D^{(l)}(R_{UU'})$$

乘法交换律不再满足, 将其推广使之可以相差一个正负号, 仍可视为 $SO(3)$ 群的表示, 称为 $SO(3)$ 的双值表示.

2. $SO(3)$ 群不可约表示的欧拉角描述

$$\text{将 } SU(2) \text{ 群不可约表示代入 } a = e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos \frac{\beta}{2}, b = -e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow D_{m'm}^{(l)}(R) = D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=0}^{l+m} (-1)^k \frac{[l-m]! [l+m]! [l-m]! [l+m]!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m-k)! (m-l+k)! k! (l+m-k)!} \times (\cos \frac{\beta}{2})^{2l+m-m'-2k} (-\sin \frac{\beta}{2})^{m'-m+2k} e^{-i(m'+m)\gamma}$$

其中 $m', m = l, l-1, \dots, -l$; l 取半正整数或零

3. $D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$ 的几种向量表达式

(1) $m' = l$ 时

$$D_{lm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \left[\frac{(2l)!}{(l+m)! (l-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\cos \frac{\beta}{2})^{l+m} (-\sin \frac{\beta}{2})^{l-m} e^{-i(l+m)\gamma}$$

(2) $m' = -l$ 时

$$D_{-lm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{l+m} \left[\frac{(2l)!}{(l+m)! (l-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\cos \frac{\beta}{2})^{l-m} (-\sin \frac{\beta}{2})^{l+m} e^{i(l-m)\gamma}$$

(3) $l=0$ 时, $D^{(0)}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$

$$(4) l=\frac{1}{2} \text{ 时, } D^{(\frac{1}{2})}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\cos \frac{\beta}{2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} - \sin \frac{\beta}{2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}) \\ -\frac{1}{2} (\sin \frac{\beta}{2} e^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}) \end{pmatrix}$$

(5) $l=1$ 时

$$D^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1+i\cos\beta}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)} & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} & \frac{1-\cos\beta}{2} e^{-i(\alpha-\gamma)} \\ 0 & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \\ -1 & \frac{1-\cos\beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} & \frac{1+\cos\beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix}$$

4. $D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$ 与 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 的等价性.

$SO(3)$ 群的不可约表示 $D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$ 与其自身表示 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 等价

$$\text{即 } R(\alpha, \beta, \gamma) = M D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) M^{-1}, \text{ 其中 } M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, M^* = M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

5. $SO(3)$ 群不可约表示直积的分解

① $SO(3)$ 群不可约表示的特征标 ② $SO(3)$ 群不可约表示直积的分解

统通过同一点的任意转动轴转同相同

$$D^{(l_1)}(R) \otimes D^{(l_2)}(R) = D^{(l_1+l_2)} + \dots + D^{(l_1+l_2)}(R)$$

角度的操作属于同一类.

$$\text{或 } D^{(l_1)}(R) \otimes D^{(l_2)}(R) = \sum_{l=l_1+l_2}^{l_1+l_2} D^{(l)}(R)$$

$SO(3)$ 群绕原点 O 任意转动轴转过以角

的不可约表示的特征标为

$$\chi_l = \frac{\sin[(l+\frac{1}{2})\alpha]}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

§5.4 坐标转动变换下场的变换与轨道角动量算符的本征值问题

1. 场的分类及其在坐标转动变换下的变换形式

(1) 标量场

在坐标作转动 $R \in SO(3)$ 时, 若场量 $\phi(r)$ 按 $SO(3)$ 群的不可约表示 $D^{(0)}(R)$ 变换
即 $\phi(r) \rightarrow \phi'(r') = D^{(0)}(R) \phi(r) = \phi(r)$

即 $\phi(r)$ 在空间坐标转动变换下保持不变, 则称 $\phi(r)$ 为空间转动变换下的标量场.

$$\Leftrightarrow \hat{P}(R)\phi(r) = \phi'(r) = \phi(R^{-1}r) \text{ 为空间旋转 = 映射关系反转.}$$

(2) 矢量场

若场量 $\vec{A}(r)$, 其分量由一个指标描述, 共三个分量 $A_i(r) (i=1,2,3)$

在 R 转动变换下, 按 $SO(3)$ 群的表示 $D^{(1)}(R)$ 或按 R 变换 ($D^{(0)}(R)$ 与 R 都行)

$$\text{即 } \hat{P}(R) A_i(r) = A'_i(r) = \sum_j R_{ij} A_j(R^{-1}r) \quad (i,j=1,2,3)$$

则称 $\vec{A}(r)$ 为矢量场 (vector field), 其中 $\hat{P}(R)$ 的其变换算符

(3) l -阶张量场

设有场量 $T(r)$, 有 l 个分量指标, 共 3^l 个分量, 即 $T_{ijk\dots}(r) (i,j,k,\dots=1,2,3)$

$$\hat{P}(R) T_{ijk\dots}(r) = T'_{ijk\dots}(r) = \sum_{i'j'k'} R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} \dots T_{i'j'k\dots}(R^{-1}r)$$

$$= \sum_{i'j'k'} \underbrace{(R \otimes R \otimes \dots \otimes R)}_{l\text{次}}_{ijk\dots, i'j'k\dots} T_{i'j'k\dots}(R^{-1}r)$$

则称 $T(r)$ 为 l -阶张量场, 或 l -阶张量场

一般情况下, 对于 m 维空间, 每个指标有 m 个取数, 这时的 l 个分量指标的张量场称为 l -阶 m 维张量场.

因此, 矢量场为零阶张量场, 矢量场为一阶张量场.

(4) l -阶旋量场

设有场量 $S_{lm}(r)$ 有 $2l+1$ 个分量, 即 $m = l, l-1, \dots, -l$. 在空间作 R 转动时, 按 $SO(3)$ 群的表示 $D^{(l)}(R)$

$$\text{变换. 即 } \hat{P}(R) S_{lm}(r) = S'_{lm}(r) = \sum_m D^{(l)}_{mm'}(R) S_{lm'}(R^{-1}r)$$

则称 $S_{lm}(r)$ 的 l -阶旋量场 (l th order spinor field)

① 零阶旋量场

零阶旋量场只有一个分量 $S_{00}(r)$, 其变换矩阵为 $D^{(0)}(R) = I$, 故 $l=0$ 时零阶旋量场即为一标量场.

② 一阶旋量场 有三个分量 $S_{lm}(r) (m=-1,0,1)$

$$\text{有 } \hat{P}(R) S_{lm}(r) = \sum_m D^{(1)}_{mm'}(R) S_{lm'}(R^{-1}r)$$

$$\Rightarrow S_{lk}(r) = \sum_i M_{ki}^l A_i(r) \quad \text{其中 } M \text{ 为 } 5,3,4 \text{ 阶矩阵} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{11}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1(r) - i A_2(r)] \\ S_{10}(r) = A_3(r) \\ S_{1-1}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1(r) + i A_2(r)] \end{cases}$$

即一阶旋量场可由矢量场线性组合而成, 二者并不独立.

2. 标量场与三阶旋量场变换算符的欧拉角表示

① 标量场变换算符

$$\hat{P}(R_z) = e^{-i\alpha \hat{L}_z} \Rightarrow \phi(R_z^{-1}r) = e^{-i\alpha \hat{L}_z} \phi(r)$$

一般情况下, 若坐标系转动 $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$

$$\text{则变换公式为 } \hat{P}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha \hat{L}_x} e^{-i\beta \hat{L}_y} e^{-i\gamma \hat{L}_z}$$

② $\frac{1}{2}$ 阶旋量场变换算符

$$\hat{P}(R_z) = e^{-i\alpha \hat{J}_z} \quad \text{其中 } \hat{J}_z = \hat{L}_z + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \text{ 为总角动量算符的三分量.}$$

$$\text{一般情况下, 相应于 } R(\alpha, \beta, \gamma), \frac{1}{2} \text{ 阶旋量场的变换算符为 } \hat{P}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha \hat{J}_x} e^{-i\beta \hat{J}_y} e^{-i\gamma \hat{J}_z}$$

第六章 李代数及其表示

李群的无穷小生成元构成一个代数，称为李代数。对于连通李群，有限群元素可由李代数生成。

6.1 李代数及其表示

1. 定义：设 g 是 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} 上的一个 m 维线性空间，对于任意的 $X, Y \in g$ ，若存在映射 ϕ

$$\phi(X, Y) = [X, Y]$$

满足：

$$① \text{封闭性: } [X, Y] = Z \in g$$

$$② 线性性: [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad (a, b \in \mathbb{R} \cup \mathbb{C})$$

$$③ \text{反对称性: } [X, Y] = -[Y, X]$$

$$④ \text{雅可比恒等式: } [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

则称 g 为李代数 (Lie algebra)

其中 $[X, Y]$ 称为李积，代表抽象的代数运算，没有确切的定义。

例 1：对于李积， $[X, Y] = XY - YX$ 。李群的无穷小生成元或无穷小矩阵构成一个李代数。

其封闭性、反对称性与雅可比恒等式可由结构常数描述。

这些无穷小生成元彼此间线性独立，构成 m 维线性空间的基本

该空间任意矢量都可由这些基矢线性叠加而成。

例 2：设 \vec{X}, \vec{Y} 是三维线性空间 L_3 中的任意两矢量

$$\vec{X} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$$

$$\vec{Y} = y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3$$

其中 $\{\hat{e}_i, i=1, 2, 3\}$ 为基矢，若定义李积为 $[\vec{X}, \vec{Y}] = \vec{X} \times \vec{Y}$ 满足封闭性、线性性与反对称性。

满足雅可比恒等式，因此 L_3 中所有矢量构成一个李代数，记为 l_3 。

例 3：复数域 \mathbb{C} 上的任一 3×3 反对称矩阵，可以看成三维线性空间 M_3 中矢量，三个基矢为

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

注意到 $[e_i, e_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} e_k$ 。

定义李积为 $[X, Y] = XY - YX$ ，满足封闭性、线性性与反对称性，雅可比恒等式成立，故构成李代数。

构成一个代数，记为 m_3 。

2. 子代数、理想子代数与商李代数

(1) 子代数：设有李代数 g ，若有子空间 $h \subset g$ ，且对于 $X, Y \in h$ ，李积 $[X, Y] \in h$ 。

则称 h 为 g 的子代数。

(2) 阿贝尔子代数：设 h 是子代数，若对于 $X, Y \in h$ ，有李积 $[X, Y] = 0$ ，则称 h 为阿贝尔子代数。

对于阿贝尔子代数，其基矢间的结构常数 $C_{ij}^k = 0$

与阿贝尔子代数对应的子群是阿贝尔子群。

(3) 理想子代数：简称为理想，也称不变子代数。若 h 为 g 的一个子代数且对于 $X \in h, Y \in g$ ，

李积 $[X, Y] \in h$ 。

则称 h 为 g 的理想子代数。

理想子代数生成的子群为正规子群。

g 本身及 l_3 也是 g 的理想，称为 g 的显然理想。

除显然理想以外的理想称为 g 的真理想或固有理想。

(4) 商李代数：设 h 为李代数 g 的理想。若 $X \in g$ ，但 $X \notin h$ ，取

$$X/h = X + h$$

所有不同的 X/h 的集合 $\{X/h\}$ 构成一个李代数，称为商李代数。

商李代数生成李群的商群 G/H 。

3. 李代数的直和 单纯李代数与半单纯李代数

(1) 李代数的直和

设 h_1, h_2, \dots, h_m 都是李代数 g 的理想，如果 g 中任一元素 X 都可唯一地表示为

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_m, \quad \text{其中 } X_i \in h_i$$

则称 g 是 $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ 的直和，记作 $g = h_1 \oplus h_2 \oplus \dots \oplus h_m = \bigoplus_{i=1}^m h_i$ 。

李代数的直和生成李群的直积。

性质：

$$① h_i \cap h_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$② [X_i, X_j] = 0, \quad \text{其中 } X_i \in h_i, X_j \in h_j, (i \neq j)$$

(2) 单纯李代数

不含有非零的阿贝尔理想的李代数称为单纯李代数. 单纯李代数生成单纯李群. P8.
 $SU(n)$, $SOL(n)$ 的单根表

(3) 半单李代数

不含有非零的阿贝尔理想的李代数称为半单李代数. 半单李代数生成半单李群.

由于非阿贝尔单纯李群的直积是半单群, 所以若干个非阿贝尔单纯李代数的直和构成半单李代数.

单纯李代数一定是半单的, 半单李代数不一定单纯

例如: 非阿贝尔单纯李代数的直和是半单李代数, 但不是单纯李代数.

4 李代数的同态与同构

设 g 与 g' 是两个定义在实数域 R 或复数域 C 上的李代数, 若存在一映射 ϕ ,

使得对于 $X, Y \in g, X', Y' \in g'$, 有 $\phi(X) = X', \phi(Y) = Y'$

且满足条件:

① 线性性: $\phi(ax + by) = a\phi(x) + b\phi(y) = ax' + by'$

其中 $a, b \in R$ 或 C

② 保持李积, 形式不变: $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = [X', Y']$

则称 ϕ 为由 $g \rightarrow g'$ 的同态映射, 同态同态, 记为 $g \rightarrow g'$.

若映射一一对应的, 则称 g 与 g' 同构, 记为 $g \cong g'$.

同态的李代数, 其代数性质相同, 可视为同一个李代数.

性质: 若两个李代数同构, 则它们的结构常数相同; 反之, 有相同结构常数的李代数必同构.

因此, 不同的李群可以有相同的结构常数, 但整体上讲这些群是完全不同的李群.

通常具有相同结构常数的那些李群称为局部同构李群, 也就是在单位元附近同构.

5 半单李代数的卡当判据与卡西米尔算符

(1) 卡当-基林度规张量与协变形式的结构常数

定义: 对称张量 $g_{ij} = g_{ji} = \sum_{pq} C_{ip}^q C_{jq}^p$ 通常称为卡当-基林度规张量.

则 $C_{ijk} = \sum_j g_{ir} C_{jk}^r$, 其中 C_{ijk} 是完全反对称张量. $C_{ijk} = -C_{jik} = -C_{ikj}$

(2) 半单李代数的卡当判据

卡当判据: 一个李代数是半单的 $\Leftrightarrow \det\{g_{ij}\} \neq 0$

半单李代数的共轭李代数 \Leftrightarrow 度规张量 g_{ij} 负定

(3) 半单李代数的卡西米尔算符 (Casimir)

对于半单李代数 g , 定义算符 $C = \sum_{ij} g_{ij} X_i X_j = \sum_{ij} g_{ij} X^i X^j = \sum_i X^i X_i$ 为卡西米尔算符.

其中 X_i, X_j 是 g 在 m 空间中的基矢

有 $[C, X_k] = 0$.

则对于 g 中任一元素, 都有 $[C, g] = 0$. 即 C 与 g 中任意元素的李积为零.

6 李代数的表示

存在一个同态映射中, 使得对于任意的 $X \in g$,

有 $\phi: X \rightarrow M(X) \in GL(L, C)$ (即矩阵类数 M)

并满足下列关系成立

(1) 线性关系, 即对于任意 $X, Y \in g$

$$M(ax + by) = aM(x) + bM(y) \quad (a, b \in C)$$

(2) 李积形式不变, 即若 $[X, Y] = Z \in g$

$$\text{则 } M([X, Y]) = [M(X), M(Y)] = M(Z) \in GL(L, C)$$

则称 M 是李代数 g 的表示.

李代数的表示 $M(g)$ 与李群的表示 $D(G)$ 之间有指教关系: $e^{M(g)} = D(G)$

性质:

(1) 要知道 $M(g)$ 即 $D(G)$

(2) 李代数表示的维数等于李群表示的维数.

(3) 李代数 M 也是李群的一个表示.

7 李代数的伴随表示

设有 m 维李代数 $g, X_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是该空间的任一基矢, 定义伴随映射 $\phi = ad$

$$ad: X_i (X_j) = [X_i, X_j] = X_j^{ad(i)} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m)$$

其中 X_j 为不同子 X_i 的另一基矢, $X_j^{ad(i)}$ 为伴随映射后的基矢. 映射 ad 通过李积操作将其基矢或新基矢 $X_j^{ad(i)}$, 当 X_i 作用于 g 的所有基矢后, 将映射生成 X_j 的所有伴随基矢.

由于 X_j 和 $X_j^{ad(i)}$ 都是 m 维线性空间的基矢, 有变换关系: $X_j^{ad(i)} = \sum_k M_{kj}^{ad(i)} X_k$

$M_{kj}^{ad(i)}$ 是一种表示, 称为李代数 g 的伴随表示, 对于 m 维李代数, $M_{kj}^{ad(i)}$ 是 m 维的.

$$\text{由 } X_j^{ad(i)} = [X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \text{ 得 } M_{kj}^{ad(i)} = C_{ij}^k$$

即李代数 g 的伴随表示就是它的结构常数.