



北京大学

博士研究生学位论文

题目： 热密核物质相图的非微扰 QCD 研究

姓 名： 秦思学

学 号： 10904817

院 系： 物理学院

专 业： 理论物理

研究方向： 中高能核物理与核色动力学

导师姓名： 刘玉鑫 教授

二〇一二年四月

版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以任何方式传播。否则一旦引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。

热密核物质相图的非微扰 QCD 研究

秦思学 理论物理

导师姓名：刘玉鑫 教授

摘要

我们的宇宙从何而来？宇宙中的物质如何演化？为回答这些问题，我们需要理解强相互作用物质（简称核物质）在温度和化学势平面的相图。热密核物质的性质由量子色动力学（QCD）描述。QCD 是标准模型的强相互作用部分，具有三个特殊的性质：渐近自由、手征对称性自发破缺（DCSB）和色禁闭。这些特性与热密核物质的性质密切相关，而手征对称性自发破缺和色禁闭不能由微扰论解释，物理学家正试图从各个角度和利用各种方法去探讨它们。QCD 的 Dyson-Schwinger (DS) 方程是一组关于 QCD 格林函数的无穷耦合非线性积分方程。原则上，通过求解这些方程，我们能够理解 QCD 各个方面的性质。从而 DS 方程方法是很好体现了 QCD 的特殊性质的非微扰连续场论方法，并已取得了诸多进展。本文中，我们利用 DS 方程方法研究热密核物质的相图，进而探讨宇宙演化的行为。

关于热密核物质相图的研究，经过多年努力，已取得很多成果。相应地，随着研究的深入，一些重要问题自然地被提了出来，例如，是否存在临界终点（CEP）？若存在，其位置在哪里？在不清楚非微扰相互作用的具体形式的情况下，常用的基于有效热力学势的相变判据不再有效。那么，理论上如何判断相变的发生？如何直接从非微扰 QCD 出发理解手征相变临界温度之上的附近区域内的夸克胶子物质的性质？等等。本文的研究工作就针对这些问题来展开。

首先，我们提出一种与最新 DS 方程计算和格点 QCD 模拟结果一致的相互

作用模型。在我们测试的描述强子性质的各个方面，该模型下的结果均与已知的成熟模型下的结果一致，并且能够自然地给出单调的 QCD 跑动耦合常数和胶子质量标度。在彩虹梯子近似下，利用该模型，我们详细计算了轻介子（赝标、标量和矢量道）基态、反常态和径向激发态的质量等性质。一方面，我们阐明了彩虹梯子近似描述反常态和径向激发态存在的不足。另一方面，由于彩虹梯子近似是一种对称性保持的截断方案，故其不仅能够对超越领头阶近似提供有价值的信息，而且还能描述一些不敏感于相互作用细节的强子性质。

其次，我们提出一种基于手征磁化率的相变判据。该判据可用于研究强相互作用体系在温度和密度平面的相图，它不仅能够给出相边界曲线，还可以准确地确定相变临界终点。强相互作用夸克体系的性质由 DS 方程中的夸克方程（或能隙方程）描述，即使该方程中的夸克胶子顶点缺乏图形表示，使得显式地构造有效热力学势十分困难，该判据仍然有效。由此，我们给出了热密核物质的相图，得到的 CEP 的位置约为 $(\mu^E, T^E) \sim (1.0, 0.9)T_c$ ，其中 T_c 为零密有限温度下的手征相变的临界温度。通过定量分析相图对模型依赖的行为，我们说明已有的不同理论方法给出不同 CEP 位置的原因是它们的相互作用体现的禁闭宽度不同，并发现在 CEP 处张开一个两相共存区，其宽度随禁闭宽度的增加而增加，其性质是手征对称性破缺-禁闭与手征对称-退禁闭两相共存。

再者，我们利用最大熵方法分析在临界温度 T_c 之上的手征对称性恢复的夸克胶子物质的谱密度。采用彩虹近似和温度依赖的相互作用模型，我们得到，在临界温度之上 $1.4 - 1.8T_c$ 区域内，除正常热激发和等离子集体激发外，夸克胶子物质还表现出一种非微扰零模式激发。零模是一种长波模式，意味着长程关联。在零模存在的区域，体系是强耦合夸克胶子等离子体（sQGP）。

关键词：强相互作用物质，核物质，相变，相图，非微扰，QCD，Dyson-Schwinger 方程，手征对称性自发破缺，手征对称性恢复，色禁闭，退禁闭，温度，密度，化学势，夸克，胶子，强子

Phase diagram of thermal-dense nuclear matter via a nonperturbative QCD approach

Si-xue Qin Theoretical physics

Directed by Prof. Yu-xin Liu

Abstract

How does the Universe come from? How does the matter in the Universe evolve? In order to answer these fundamental questions, we have to explore the QCD phase diagram in the chemical-potential/temperature plane. The behaviors of dense-thermal strong-interaction matter (i.e., nuclear matter) are governed by quantum chromodynamics (QCD)—the strong-interaction sector of the Standard Model, which has three remarkable features: asymptotic freedom, dynamical chiral symmetry breaking (DCSB) and confinement. In order to demonstrate these features that are closely connected to properties of nuclear matter, physicists are cutting away from many angles. The QCD Dyson-Schwinger equations (DSEs) are an infinite tower of coupled and nonlinear integral equations, which provide relations between all Green functions of QCD. With a set of solutions of these equations in hand, one can have a complete understanding of QCD since all physical quantities can be extracted from the Green functions in principle. The DSEs approach is then a nonperturbative continuous field theory method which includes both DCSB and confinement and has been made a great deal of progress. We insist that it has its

capability to make valuable contributions to understanding the phase transitions and other properties of nuclear matter and further to providing information of the evolution of the Universe.

Through many efforts in the last years, the study of phase diagram of thermal-dense nuclear matter has made lots of achievements. Simultaneously, some significant questions arise as companies, for example, does the critical endpoint exist? if so, how about its location? The phase transition criterion based on the effective thermodynamical potential fails as the explicit form of the nonperturbative interaction is unavailable. Then, how can we identify phase transitions theoretically? how can we understand properties of quark-gluon matter in the region above but near the critical temperature of the chiral phase transition directly from nonperturbative QCD? and so on. This thesis develops to solve these questions.

First, we propose a model for the rainbow-ladder kernel whose momentum-dependence is consonant with modern DSE- and lattice-QCD results, and assess its capability as a tool in hadron physics. In every respect tested, this model produces results for observables that are at least equal to the best otherwise obtained in a comparable approach. Moreover, it enables the natural extraction of a monotonic running-coupling and -gluon-mass. Using this new model, ground-state, radially-excited and exotic scalar-, vector- and flavoured-pseudoscalar-mesons are studied in rainbow-ladder truncation. The inability of this truncation to provide realistic predictions for the masses of excited- and exotic-states is confirmed and explained. On the other hand, its application does provide information that is potentially useful in proceeding beyond this leading-order truncation, e.g.: placing qualitative constraints on the long-range behaviour of the interaction kernel; and highlighting and illustrating some features of hadron observables that do not depend on details of the dynamics.

Second, we establish a criterion identifying phase transitions based on chiral susceptibilities, which enables one to draw phase diagram and locate the critical endpoint (CEP) in the chemical-potential/temperature plane for strongly-interacting quark system whose interactions are described by any reasonable gap equation, even

if the diagrammatic content of the quark-gluon vertex is unknown. We then locate not only the phase boundaries of the matter but also a critical endpoint (CEP) at $(\mu^E, T^E) \sim (1.0, 0.9)T_c$, where T_c is the critical temperature for the chiral symmetry to be restored at $\mu = 0$. With the model dependence of the phase diagram being analyzed quantitatively, we unify an explanation for that different theoretical methods gave distinct locations of the CEP as that they have different confinement length. Moreover, we find that a domain of phase coexistence opens at the CEP whose area increases as the confinement length-scale grows and whose components are just the chiral symmetry broken and confined phase as well as the chiral symmetry restored and deconfined phase.

Furthermore, implementing the maximum entropy method, we compute the dressed-quark spectral density from the self-consistent numerical solution of a rainbow truncation of QCD's gap equation at temperatures above that for which chiral symmetry is restored. We find that, in addition to the normal and plasmino modes, the spectral function also exhibits an essentially nonperturbative zero mode for temperatures extending to 1.4 – 1.8-times the critical temperature, T_c . In the neighbourhood of T_c , this long-wavelength mode contains the bulk of the spectral strength and so long as this mode persists, the system may fairly be described as a strongly-coupled state of quark and gluon matter (sQGP).

Keywords: strong-interaction matter, nuclear matter, phase transition, phase diagram, nonperturbative, QCD, Dyson-Schwinger equations, dynamic chiral symmetry breaking, chiral symmetry restoration, confinement, deconfinement, temperature, density, chemical potential, quark, gluon, hadron

目录

第一章 引言	1
1.1 宇宙演化和核物质相图	1
1.2 实验现状和未来发展	4
1.3 理论现状和存在的困难	5
1.3.1 标准模型和 QCD	5
1.3.2 QCD 的非微扰特征	9
1.3.3 相变的判据	13
1.4 本文拟讨论的问题及内容安排	14
第二章 QCD Dyson-Schwinger 方程方法概述	17
2.1 DS 方程的推导和费曼图表示	18
2.2 夸克传播子方程和介子方程	24
2.3 方程求解：胶子模型和截断方案	26
2.4 手征对称性自发破缺和色禁闭的实现	35
2.4.1 临界耦合强度和临界流夸克质量	38
2.4.2 内禀参数空间的相图	40
第三章 现实胶子模型与零温零密下的介子性质	43
3.1 胶子质量函数和 QCD 跑动耦合常数	44
3.2 Bethe-Salpeter 振幅和实验观测量	46
3.3 基态、激发态和反常态介子性质	50
3.4 本章小结	57

第四章 有限温度和有限密度下的 QCD 相图	59
4.1 有限温度和有限密度下的夸克方程	60
4.2 传统的有效势判据与相应的手征相变相图	64
4.3 手征磁化率判据与相应的手征相变相图	73
4.4 本章小结	81
第五章 临界温度之上的夸克胶子物质的性质	83
5.1 胶子模型和夸克传播子的谱表示	84
5.1.1 温度依赖的胶子模型	84
5.1.2 夸克传播子的谱表示	86
5.2 夸克胶子等离子体的激发模式	93
5.2.1 高温情况下的激发模式	94
5.2.2 较低温情况下的激发模式	99
5.3 零模激发和体系的强耦合性质	100
5.4 本章小结	103
第六章 结论与讨论	105
附录 A 本文符号约定	113
附录 B 夸克方程的求解方法	117
附录 C 介子方程的求解方法	125
附录 D 最大熵谱分析方法	131
参考文献	137
发表文章	157
致谢	159

第一章 引言

1.1 宇宙演化和核物质相图

我们现在所处的宇宙中物质种类繁多、多姿多彩。然而我们的宇宙从何而来？物质的质量从何而来？到目前为止，现代物理学给出了其基本图象和大致过程。现代物理学认为我们的宇宙来源于约 130 多亿年前的一次大爆炸。在大爆炸之初，宇宙温度极高，具有高度对称性^[1]。随着时间的演化，宇宙温度逐渐降低，对称性也随之破缺。在大爆炸之后的 10^{-43} 秒内，宇宙处于普朗克能标，现在认识到的四种基本力（引力、电磁力、弱作用力和强作用力）可能表现为一种基本力。在 10^{-43} 到 10^{-36} 秒之间，引力从统一的基本力中分离出来，宇宙进入大统一时代^[2]。在 10^{-36} 到 10^{-12} 秒之间，强作用力进一步从大统一力中分离出来，宇宙进入电弱统一时代^[3]。现代宇宙膨胀理论认为，在大爆炸之后的 10^{-32} 秒之内，一次剧烈膨胀使得宇宙半径增加了约 26 个量级，体积增加了约 78 个量级^[4]。在此阶段，宇宙中出现夸克、胶子和电子、中微子等轻子，被称为早期宇宙^[5]，其中夸克没有质量，处于高度对称状态（常称之为具有手征对称性）。在 10^{-12} 到 10^{-6} 秒之间，电弱对称性破缺，四种基本力完全分开出来，并且由于电弱对称性破缺，夸克获得内禀质量（常称之为流质量），从而分为三代六味，其中第一代夸克（ u 夸克和 d 夸克）质量很小，仅 $4 \sim 5\text{MeV}$ 左右。这时的宇宙温度仍然极高，夸克和胶子尚不能形成强子（介子和重子）。在 10^{-6} 到 1 秒之间，由于宇宙冷却，夸克和胶子束缚形成强子，如 π 介子、质子、中子等^[6]。以质子和中子为例，现在测量到的质量大约 940MeV ，由三个 u/d 夸克组成（具体地，质子由两个 u 夸克和一个 d 夸克组成；中子由一个 u 夸克和两个 d 夸克组成）。那么这三个夸克的质量平均为 310 多 MeV ，再考虑质子和中子的结合能，即夸克由不束缚到束缚的质量亏损，这些夸克的质量大约为 $400 \sim 500\text{MeV}$ ，这一质量常被称为组分质量。此后 1 到 10 秒

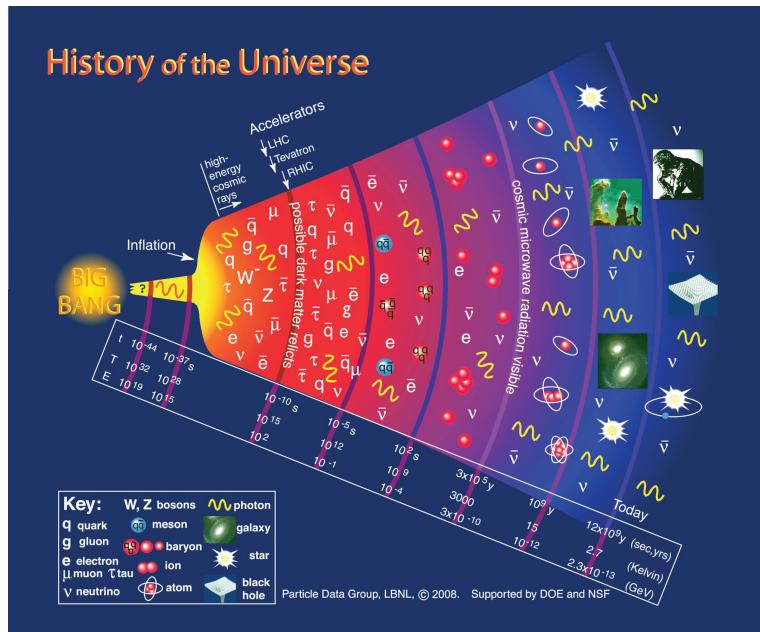


图 1.1: 宇宙演化历史示意图 (取自 PDG, LBNL)。

之间，由于宇宙温度仍然很高，强子和反强子发生着频繁而剧烈的碰撞和湮灭过程，产生出大量轻子-反轻子对。在该阶段尾声，宇宙温度下降到某个临界点，此时新的轻子-反轻子对不再产生，代之以大量轻子和反轻子湮灭成光子。此后，原子核形成，再经过复合阶段，原子核与电子结合形成原子^[5,7]，再经过漫长的岁月形成星体，进而形成星系^[8]。我们的太阳系约在大爆炸后 80 至 90 亿年形成。这就是宇宙演化简史，其过程及各阶段宇宙中的主要成分如图1.1所示。尽管已有上述大致图像和过程，但其具体细节和机制都还有诸多不清晰之处。因而，现代物理学的核心问题之一就是揭示宇宙各阶段的物态的具体性质和演化过程。

我们已知，在一个非均匀系统中，可以利用物理手段分离的物理和化学性质相同的均匀物质状态称为物质的相，由一个相到另一个相的演化称为相变。于是，前述的不同温度和密度状态下的零质量夸克组成的物质状态、具有流质量的夸克形成的物质状态、具有组分质量的夸克形成的物质状态等实际上为强相互作用物质的不同相，早期宇宙中物质的演化实际上即强相互作用物质（常简称为核物质）的相变。那么，理解核物质在温度和密度（化学势）平面上的相图^[9]，是完整理解宇宙演化的至关重要的部分。核物质的半定量相图如图1.2所示。在高温低密区域（早期宇宙），夸克和胶子未形成强子，处于非禁闭和手征对称的相（常称为夸克

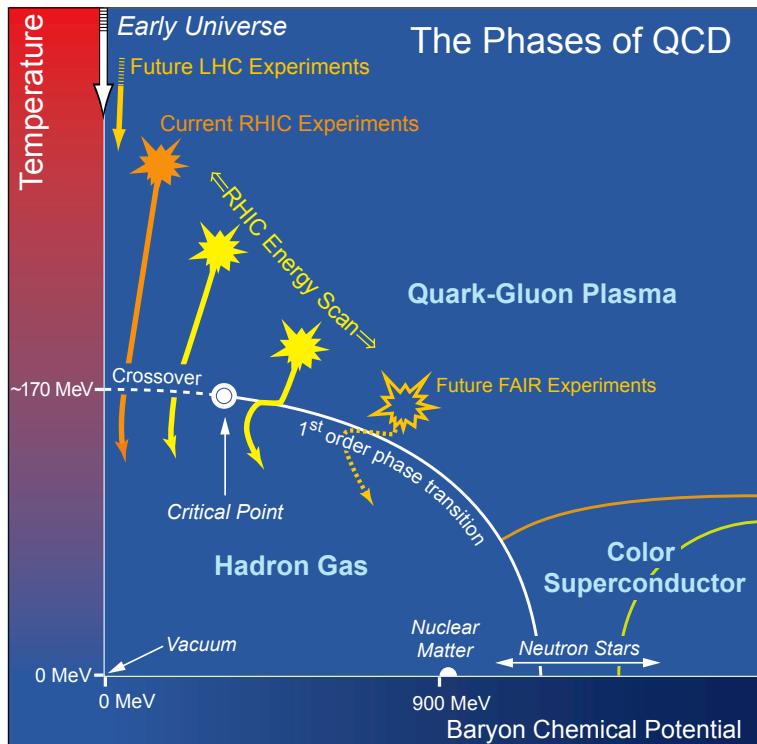


图 1.2: 强相互作用物质的半定量相图 (取自文献^[15])。

胶子等离子体状态, 简记为 QGP)^[10,11]。随着温度降低, 夸克和胶子相互作用越来越强, 形成具有类似理想流体特征的强耦合夸克胶子等离子体 (sQGP)^[12]。在温度到达某个临界温度 T_c 之下, 夸克和胶子开始形成强子, 即处于禁闭和手征对称性破缺态。随着体系的重子化学势增加, 强子 (气体) 开始凝结成原子核或强子液体。在极端引力条件下, 大量原子核被压缩在一起, 形成所谓的致密天体, 例如中子星、夸克星和混杂星等。这些天体内部具有极高的重子 (或夸克) 化学势, 可能形成所谓的色超导相^[13]。总之, 核物质具有丰富的相和复杂的相结构, 涉及的相变包括手征对称-手征对称性破缺相变、非禁闭-禁闭相变及色味结构相变等。由于不同条件下驱动相变的因素不同, 从而相变级次不同。通常我们称一级相变区域和二级相变 (或连续过渡) 区域的交界点为临界终点 (critical endpoint, 简称为 CEP)^[14]。从实验和理论上确定热密核物质相图是当今物理学的重大课题, 尤其确定临界终点的存在性和位置以及理解高于临界温度 T_c 和中等化学势 (密度) 等特殊区域的物质性质更是重中之重。

1.2 实验现状和未来发展

在我们的现实宇宙中，早期的相变过程早已完成。当今的实验研究只能是通过观测致密天体的性质和出现的现象及实验室中相对论性重离子碰撞（核-核碰撞）形成的物质的性质来进行。自从德国法兰克福大学的研究人员率先说明利用高能核-核碰撞有可能形成夸克处于退禁闭状态的物质^[16,17]以来，经过 30 多年的努力，人们建造的 BEVALAC（美国 Lawrence-Berkeley 国家实验室，1975 – 1985）、AGS（美国布鲁克海文国家实验室，1987 – 1995）、SPS（瑞士欧洲核子中心，1987 – ）、SIS（德国重离子物理研究所 GSI，1990 – ），RHIC（美国布鲁克海文国家实验室，2000 – ）、LHC（瑞士欧洲核子研究中心，2009 – ）等核-核碰撞装置已经能创造出诸多物质形态：从高温低密（低重子数密度）的早期宇宙，到有限温度和有限密度下的相变区域的物质，再到低温低密极限下的强子态等等。大量数据和新现象不断涌现，从而为完整理解宇宙图像提供了一些实验基础。对应于核物质相图，不同实验覆盖不同温度和密度（重子化学势）区域。粗略地，我们可将其分为三类。

第一类实验覆盖高温低密区域，其代表是位于瑞士日内瓦的欧洲核子研究中心的大型强子对撞机（LHC）^[18]。LHC 由欧洲核子中心从 1998 到 2008 年建造，是目前世界上能量最高的对撞机。LHC 的主要目标是检验现有粒子物理和高能物理的理论预言（例如，是否存在 Higgs 玻色子^[19]，从而揭示夸克流质量起源的机制），探测早期宇宙所具有的更高的对称性（例如，是否存在超对称^[20]），从而帮助人们加深对宇宙深层次规律的理解和认识。其 ALICE 探测终端计划主要对每核子能量为 5.5TeV 的 Pb-Pb 碰撞形成的物质进行观测，从而揭示高温夸克物质的性质。截止现在，LHC 已能实现 3.5TeV 的离子束对撞，并得到了关于一些重要问题的初步结果，例如，LHC 中创造出夸克胶子等离子体^[21,22]，Higgs 玻色子被锁定在 115 至 130GeV 能区^[23] 等。LHC 正在产生更多实验数据，并计划进一步提高离子束能量。这将为人们探讨更多更深层次的基本问题提供机遇。

第二类实验主要关注退禁闭和手征对称性恢复相变的区域，其代表是位于美国布鲁克海文国家实验室的相对论性重离子对撞机（RHIC）^[24,25,26]。相比 LHC，RHIC 离子束能量较低（¹⁹⁷Au 束流，每核子平均能量为 20 ~ 200GeV），因而对撞核心具有较低温度和较高密度。通过控制离子束能量，RHIC 的能够覆盖核物质相图上最大约 400MeV 的重子化学势的区域^[27]。因而，RHIC 可以用来研究核物质

相变行为以及相变临界点附近的物态的性质。RHIC 实验数据分析表明，存在一个临界温度 $T_c \approx 170\text{MeV}$ ，在此之上，囚禁在强子中的夸克和胶子自由度被释放出来形成夸克胶子等离子体^[28,29,30,31]。通过分析椭圆流，RHIC 还发现， T_c 附近的强耦合夸克胶子等离子体（sQGP）具有类似理想流体的性质，例如，具有接近强耦合极限的剪切粘滞系数和熵密度比 ($\eta/s \sim 1/4\pi$)^[32]。RHIC 离子束能量扫描实验可能可以用来寻找相变的临界终点（CEP）^[33]。目前，关于强相互作用物质相图，CEP 的存在性及其位置的确定是最迫切需要解决的问题。另外，正在德国设计建造的反质子和离子研究装置（FAIR）^[34] 以及俄罗斯计划在 Dubna 建造的超导同步加速器离子对撞装置（NICA）^[35]，由于它们的束流具有更低的能量和更高的流强，因而能够覆盖比 RHIC 更大的重子化学势区域。这将有助于研究低温高密核物质的性质和相变行为，从而深化人们对早期宇宙强相互作用物质的组分、结构、性质和致密天体内部物质的性质、结构以及一些爆发性天体过程的认识。

第三类实验主要研究低温低密极限下的强子的性质，例如，强子质量谱、强子的电磁性质、强子内部价夸克分布等^[36]，目的在于揭示强相互作用的低能行为和探讨禁闭的机制。该类实验装置遍布世界各地，例如，北京谱仪、美国 Jefferson 实验室的 12GeV 装置、欧洲核子中心的 COMPASS 探测装置、德国重离子物理研究所 GSI 的 PANDA 探测装置、德国尤里希研究中心的 COSY 同步加速器、日本高能加速研究机构 KEK 的 BELLE 探测器、斯坦福国家加速器实验室 SLAC 的 BABAR 探测器等。目前，该类实验的数据远远超前于理论，并且更多更精确的数据正随着实验装置的升级而不断产生。这为理论研究提供了丰富而可靠的数据库。

1.3 理论现状和存在的困难

1.3.1 标准模型和 QCD

现代物理学已经能够在规范场框架下统一描述电磁力、弱作用力和强作用力。该理论被称为粒子物理标准模型^[37,38,39,40,41]。其提出和发展主要集中于上世纪五十至七十年代，并因得到多方实验支持而被广泛接受。标准模型描述轻子、夸克、规范玻色子和 Higgs 玻色子的动力学，其基本构架可由图1.3示意。

事实上，标准模型是一种规范场论^[42]，规范群为 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ，其中， $SU(3)_C$ 为强相互作用规范群，而 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 为弱电相互作用规范群。强相

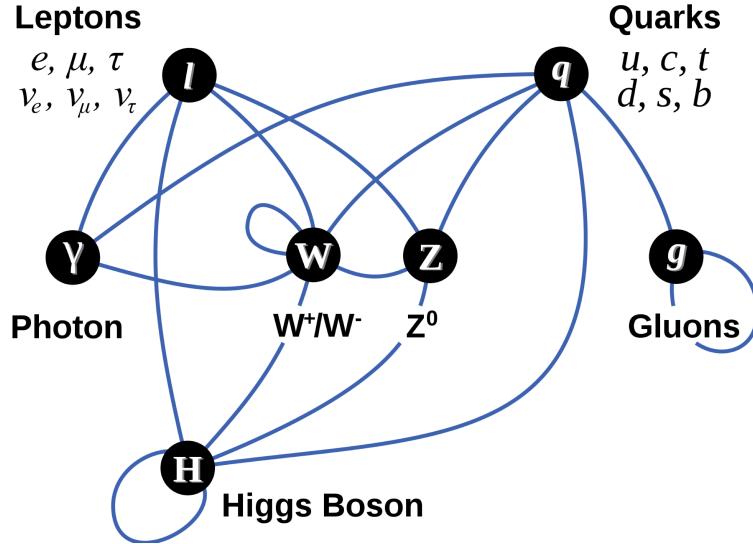


图 1.3: 粒子物理标准模型中的基本粒子相互作用示意图 (取自 Wiki 百科)。

互作用有八种规范玻色子 (胶子), 对应 $SU(3)_C$ 群的伴随表示。弱电相互作用则有四种规范玻色子 (分别为 W^\pm 、 Z 玻色子和 γ 光子), 对应 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 群的伴随表示。规范场论要求, 如果规范对称性没有破缺, 则对应的规范玻色子必须是无质量的粒子。然而, 在现实世界中, W^\pm 和 Z 玻色子都有非零质量 ($M_{W^\pm} = 80.4\text{GeV}$, $M_Z = 91.2\text{GeV}$)。这意味着标准模型破缺了 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 对称性, 而相应的对称性 (破缺) 群链可以写成 :

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_{em}. \quad (1.1)$$

该破缺模式由所谓的 Higgs 机制实现。Higgs 机制使得费米子、 W^\pm 和 Z 玻色子获得质量, 并预言了一种新的标量粒子, 即 Higgs 玻色子。目前, 从实验上探测 Higgs 玻色子是粒子物理的重要问题^[19,23,43]。如果 Higgs 玻色子未被实验证实, 则意味着 Higgs 机制不正确, 进而需要修改标准模型。尽管如此, 标准模型作为现代粒子物理的基本理论, 其精确性仍然毋庸置疑, 最近观察到的 Higgs 粒子存在的迹象^[23], 使得人们进一步确信该理论框架正确无疑。

夸克模型的建立

在上世纪五六十年代，实验上发现了大量强子态。人们开始意识到强子并非基本粒子，而是由更基本的单元组成，并且这些基本单元决定强子的各种量子数。 Λ^0 和 K^0 粒子的发现意味着存在一种新的守恒量子数，即奇异数。于是，在 1961 年，Gell-Mann 和 Ne'eman 提出采用比同位旋对称群 $SU(2)$ 更大的味对称群 $SU(3)$ 来进行强子态分类，而所有强子态都应该表示成 $SU(3)$ 群的不可约表示，该方法历史上称作“Eightfold-way”分类法^[44,45]。在 1963 年，Gell-Mann 和 Zweig 发现 $SU(3)$ 群的基础表示不对应任何已知的强子态，于是建议引入一种新的基本粒子——夸克^[46,47]。 $SU(3)$ 味对称群对应的三种夸克分别称为 u 夸克、 d 夸克和 s 夸克。如果以这些夸克作为强子的基本组分，人们能够建立起整个强子谱。

夸克对应 $SU(3)$ 群的基础表示 **3**，而反夸克对应其共轭基础表示 **$\bar{3}$** 。夸克-反夸克对组成的九重态可以表示为

$$q\bar{q} = \mathbf{3} \otimes \mathbf{\bar{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}. \quad (1.2)$$

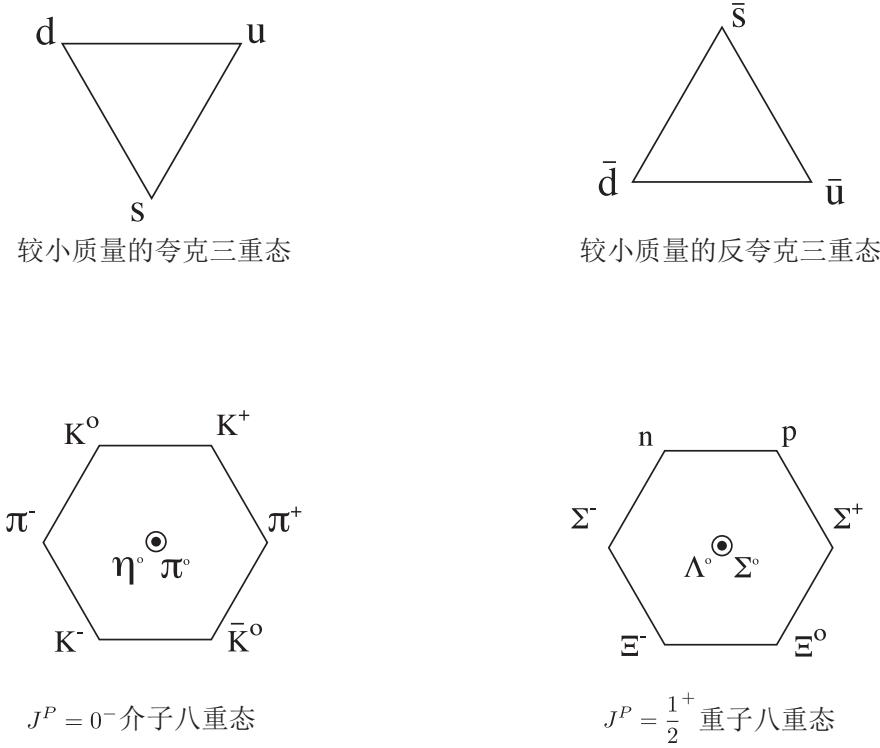
1 和 **8** 分别对应介子单态 ($u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}$) 和八重态，如图1.4所示。重子由三个夸克组成，

$$qqq = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}. \quad (1.3)$$

1、**8** 和 **10** 分别对应重子单态、八重态和十重态，其中常见的 $J^P = \frac{1}{2}^+$ (J 为总角动量， P 为宇称) 的八重态重子如图1.4所示。注意到，多重态中的各强子质量并不简并，这意味着 $SU(3)$ 味对称性并非精确保持 (不同味道夸克存在质量差异)。

色荷和色动力学

尽管夸克模型在强子态分类方面取得了巨大成就，但是仍然存在不可逾越的困难。例如， Δ^{++} 粒子由三个 u 夸克组成，自旋为 $\frac{3}{2}$ ，这意味着三个 u 夸克的轨道角动量为零且必须自旋平行。但是，由于泡利不相容原理，这样的三个夸克不能构造出反对称波函数，除非夸克存在某种隐藏的自由度。该自由度被称为色自由度，即组成 Δ^{++} 粒子的三个夸克携带三种不同的色荷，由 Bardeen、Fritzsch 和

图 1.4: $SU(3)$ 夸克模型中的粒子多重态示意图。

Gell-Mann 于 1973 年明确提出^[48]。因为自然界中从未观测到带色的粒子，所以所有强子态必须对应 $SU(3)_C$ 色对称群的单态表示，而单态表示总是具有反对称性质，于是 Δ^{++} 粒子的波函数问题被圆满解决。与此同时，也产生了一种全新的动力学——量子色动力学 (QCD)。

QCD 是描述强相互作用的规范理论，夸克和胶子是其基本自由度（夸克作为强子的基本组分，首先由美国 SLAC 的深度非弹性散射实验证实^[49,50]，而胶子的存在则首先由德国 PETRA 观测到的三喷注事件验证^[51]）。QCD 的规范群为 $SU(3)_C$ ，夸克对应群的基础表示，胶子对应群的伴随表示。若定义 $q_f(x)$ 表示夸克场， $A_\mu^a(x)$ 表示胶子场，则规范不变的 QCD 拉氏量可以写成

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f^{N_f} \bar{q}_f(x)(i\cancel{D} - m_f)q_f(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x), \quad (1.4)$$

其中, N_f 为夸克味道数。协变微商定义为

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a, \quad (1.5)$$

g 为强相互作用耦合强度, $\frac{\lambda^a}{2}$ 为 $SU(3)_C$ 生成元。胶子场强张量定义为

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x), \quad (1.6)$$

f^{abc} 为 $SU(3)_C$ 非阿贝尔规范群的结构常数。

在单圈微扰近似下, QCD 的 β 函数为

$$\beta(\alpha_s := \frac{g^2}{4\pi}) = \frac{\partial \alpha_s(Q)}{\partial \ln Q} = -(11 - \frac{2N_f}{3}) \frac{\alpha_s^2}{2\pi}. \quad (1.7)$$

当夸克味道数 $N_f < 16$ 时, β 函数为负。这意味着 QCD 的跑耦合常数随着能标增加而减小, 并在高能极限下趋于无穷小,

$$\alpha_s(Q) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda_{\text{MS}}^2)}, \quad (1.8)$$

其中, $\beta_0 = 11 - \frac{2N_f}{3}$, Λ_{MS} 为 QCD 的特征标度, 该理论结果与实验测量结果的比如图1.5所示。这种现象称为“渐近自由”, 由 Gross、Wilczek 和 Politzer 在 1973 年发现^[52,53,54]。渐近自由来源于虚夸克的屏蔽效应和虚胶子的反屏蔽效应。由于两种效应处于竞争地位, 因此在夸克味道数较小时, 反屏蔽效应占优势从而导致渐近自由。该现象已被高能散射实验所验证, Gross 等人也因此被授予 2004 年诺贝尔物理学奖。另外, QCD 在高能区的诸多定量计算也得到了很好的实验验证, 例如, 强子喷注散射截面、对撞机中重味夸克的产生等^[55,56]。但是, 由于缺少非微扰计算手段, QCD 在低能区的理论预言仍然十分困难。

1.3.2 QCD 的非微扰特征

由图1.5可以看出, 在低能区 ($Q \lesssim 1\text{GeV}$), QCD 跑动耦合常数随着能标降低而快速增大。这意味着微扰论在低能区失效, 于是 QCD 的低能区性质不能由微扰论解释。最典型的 QCD 非微扰性质则是手征对称性自发破缺和色禁闭。如何理解

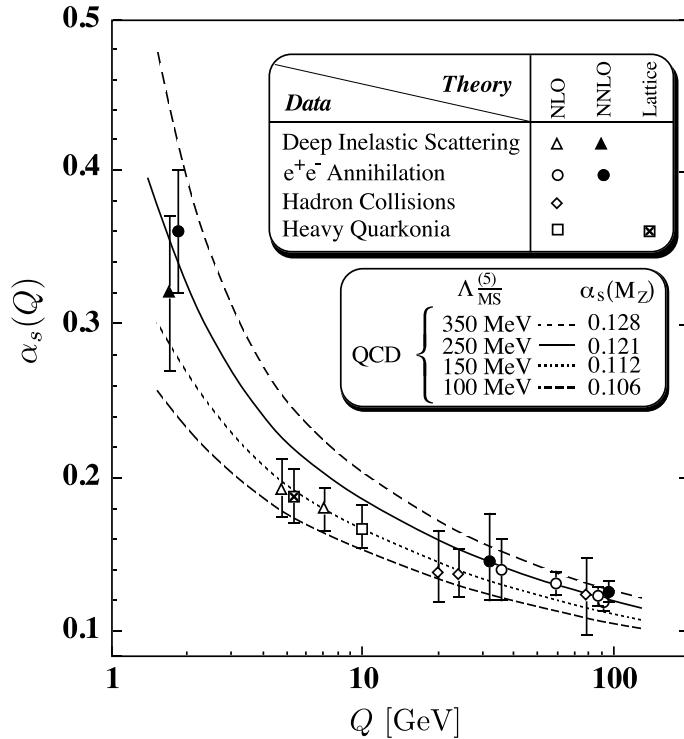


图 1.5: QCD 跑动耦合常数的微扰计算结果及与实验数据的比较 (取自文献^[57])。

这两个性质，是 QCD 自诞生以来就一直存在且目前急需解决的重大问题。

手征对称性自发破缺

粒子的手征性 (chirality) 可以通过其自旋定义，例如，对于自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子，若自旋方向平行于运动方向则称为右手粒子，若反平行则称之为左手粒子。手征性的对称变换称为宇称。如果粒子质量为零，则其手征性对应的螺旋度是洛伦兹变换下的守恒量。在场论中，粒子的手征性由对应的庞加莱群的群表示决定，右手粒子对应庞加莱群的右手表示，左手粒子对应左手表示。但是，由于狄拉克旋量同时包含右手和左手分量，因而需要定义投影算符分离出右手和左手部分。在对称变换下，如果右手和左手部分可以独立变换而保持拉氏量不变，则称该拉氏量具有手征对称性。例如，近似地将 u 和 d 夸克处理成无质量狄拉克费米子，则有

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}_R i \not{D} q_R + \bar{q}_L i \not{D} q_L + \mathcal{L}_{\text{gluons}}, \quad (1.9)$$

其中, $q = (u, d)^T$, 左手和右手分量的投影算符定义为 $\hat{P}_{R/L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ 。如果独立地对右手和左手部分做味道空间的 $U(2)$ 转动, 即 $U_R(2) \times U_L(2)$ 变换, 则拉氏量保持不变。因此, 在拉氏量层次上, QCD 是手征对称的理论。

然而, 现实世界却并不具有手征对称性。考虑以下宇称相反的算符对,

$$\vec{\pi} : i\bar{q}\vec{\tau}\gamma_5 q(x) \iff \sigma : \bar{q}q(x), \quad (1.10)$$

$$\vec{\rho} : \bar{q}\vec{\tau}\gamma_\mu q(x) \iff \vec{a}_1 : \bar{q}\vec{\tau}\gamma_\mu\gamma_5 q(x), \quad (1.11)$$

若体系具有手征对称性, 则相应的介子态应该质量简并。事实上, 根据介子态的实验数据^[58],

$$\vec{\pi} : [0^-, 140] \iff \sigma : [0^+, 600], \quad (1.12)$$

$$\vec{\rho} : [1^-, 770] \iff \vec{a}_1 : [1^+, 1260], \quad (1.13)$$

很显然, 宇称对偶态的质量并不简并。这意味着体系的手征对称性一定被破缺。虽然 u 和 d 夸克并非严格的零质量, $m_u \sim m_d \sim 5\text{MeV}$, 但是手征对称性对于拉氏量仍然是一个很好的近似对称性, 或者说, 如此小的流夸克质量并不足以导致严重的宇称对偶态质量劈裂。于是需要在超越拉氏量的层次上引入手征对称性破缺机制, 称为“自发破缺”, 即真空态的手征对称性的破缺。

对于两味 QCD, 其味道空间转动群可分解为,

$$U_R(2) \otimes U_L(2) = SU_R(2) \otimes SU_L(2) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1), \quad (1.14)$$

其中, 矢量部分 $U_V(1)$ 对称性对应重子数守恒, 而轴矢量部分 $U_A(1)$ 对称性由量子反常破缺。于是, 手征对称性自发破缺 (DCSB) 可以表示为,

$$SU_R(2) \otimes SU_L(2) \rightarrow SU_V(2), \quad (1.15)$$

$SU_V(2)$ 对称性对应同位旋对称性。根据 Goldstone 定理, 整体的连续对称性自发破缺必然伴随一种零质量和零自旋的 Goldstone 玻色子, 并且其必须与守恒流分量 J^0 具有相同宇称和内禀量子数。对于 QCD, 手征对称性的自发破缺对应的

Goldstone 玻色子必须是零质量、零自旋、负宇称、单位同位旋、零重子数和零奇异数。在强子谱中, π 作为质量最小的粒子, 正是(近似)手征对称性自发破缺的(赝) Goldstone 玻色子。

手征对称性自发破缺作为一个强烈的物理事实, 被认为是现实世界的质量来源的物理机制。因其与 QCD 的低能行为密切相关, 故不能通过微扰方法计算得到。为此, Nambu 模型 (NJL)^[59,60,61] 和手征微扰论^[62,63] 等低能有效理论, 取得了一定程度上的成功。但是, 如何理解 QCD 的手征对称性自发破缺, 如何理解早期手征对称的宇宙演化到现实的手征对称性破缺的宇宙, 仍然是当今基础物理的重大问题。

色禁闭

夸克和胶子作为 QCD 的基本自由度, 迄今为止从来没有被实验直接观测到, 即无论以多高的能量轰击强子都不能得到自由的夸克和胶子。这种现象被称为“色禁闭”。在非禁闭的 QED 中, 由于作为传递电磁相互作用的光子本身并不携带电荷, 因此带电荷粒子间的电场会随着距离的增加迅速衰减, 例如, 原子中的束缚电子会在一定能量下激发成自由电子(电离)。然而, 传递强相互作用的胶子自身携带色荷, 这意味着夸克间的胶子场不会像 QED 那样弥散在整个空间, 而会被全部压缩在所谓的色流管内部。于是, 随着夸克间距离的增大, 色流管的强度反而会增加, 夸克间的相互作用亦会增强。在足够高的能量下, 色流管会断裂并同时产生出夸克-反夸克对, 从而使得自由夸克仍然被禁闭。在高能重离子对撞机核心, 物质湮灭产生出高能夸克-反夸克对, 由于色禁闭, 它们会在相背分离的过程中迅速强子化。因而, 实验上观测到的是强子喷注而非自由夸克。

对于重味夸克, 势的语言可以用来描述色禁闭。格点 QCD 模拟计算发现, 重味夸克间存在静态线性禁闭势^[64,65],

$$V^{(0)}(r) = -\frac{a}{r} + \sigma r + v_0, \quad (1.16)$$

如图1.6所示。但是, 对于轻味夸克, 由于其间的产生-湮灭效应, 静态禁闭势不适合于描述轻夸克相互作用。为此, 人们试图通过研究 QCD 的真空结构来理解色禁闭^[66,67,68,69]。目前的理论对色禁闭的认识还很不清楚, 甚至没有解析证明: QCD

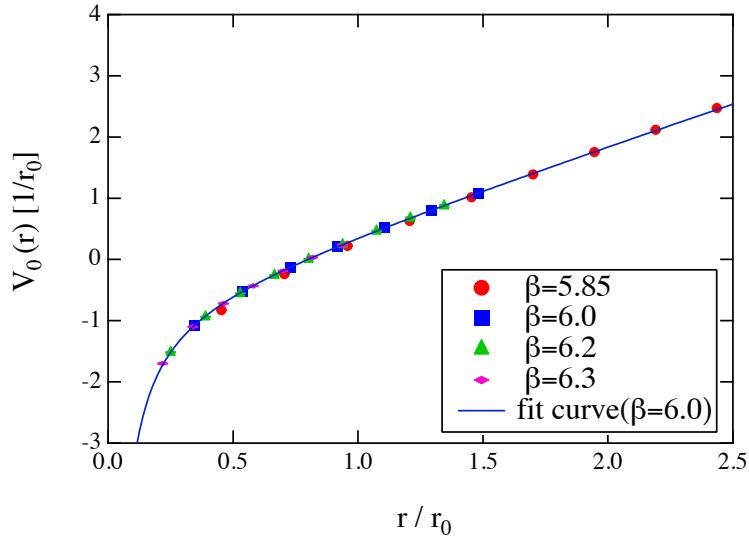


图 1.6: 重味夸克间的线性禁闭行为, 其中 $r_0 = 0.5\text{fm}$, β 对应不同的格点 QCD 模拟参数 (取自文献^[70])。

应该具有色禁闭。理解色禁闭是公认的 21 世纪基础物理的一大挑战。

1.3.3 相变的判据

在宇宙的物质状态的演化过程中, 伴随着对称性的演化过程和相变过程。在理解体系动力学的基础上, 如何描述对称性演化过程并分析相变行为是确定 QCD 相结构的另一重要内容。系统的相变理论通常以朗道相变理论^[71,72] 作为基础, 它由朗道于上世纪三十年代末提出, 并最初用于研究低温超导相变。朗道理论假设: 平衡态体系的宏观状态由“有序度”描述, 而有序度表达为体系的内禀对称性对应的序参量 η , 即无序相的序参量 $\eta = 0$, 有序相的序参量 $\eta \neq 0$; 平衡态体系的热力学势 Ω (自由能 F 或自由焓 G) 表达为序参量的函数, 而且物理态总是对应 Ω (F 或 G) 的最小值状态。因此, 通过分析 $\Omega(T, \mu; \eta)$ 随温度 T 和化学势 μ 的演化行为, 我们可得到体系的从无序相到有序相 (或者从有序相到无序相) 的相变行为和相变级次等信息。

唯象地, 在相变点附近, 假设序参量 η 为小量, 我们可将热力学势 $\Omega(T, \mu; \eta)$ 按序参量 η 作泰勒展开

$$\Omega(T, \mu; \eta) = \Omega_0(T, \mu) + a(T, \mu)\eta + b(T, \mu)\eta^2 + c(T, \mu)\eta^3 \dots, \quad (1.17)$$

其中，展开系数 a, b, c 等为温度 T 和化学势 μ 的函数。物理态极值条件表示为

$$\frac{\partial \Omega(T, \mu; \eta)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Omega(T, \mu; \eta)}{\partial \eta^2} > 0. \quad (1.18)$$

于是，分析序参量 η 和展开系数 a, b, c 等的行为可以得到相变点和相变级次等信息。朗道相变理论在晶体、铁磁材料和低温超导等的相变研究中取得了巨大成功。

朗道相变理论的非平庸部分即是构造体系的热力学势。然而，一般性地建立体系的微观动力学和热力学势之间的关系却并非易事。原则上，我们可以将关于体系微观自由度的作用量 S 转化为关于序参量的有效作用量 Γ_{eff} ，然后即可将热力学势表达为序参量的函数形式

$$\Omega = \frac{1}{V} \Gamma_{\text{eff}}. \quad (1.19)$$

于是，问题的核心转换为构造体系的有效作用量。对于弱耦合体系，我们可以基于微扰技术得到体系的有效作用量。显然，对于我们关心的强相互作用物质，微扰技术不再适用。在非微扰框架下，借助于复合场的生成泛函技术，我们可以在简单近似下将有效作用量表达为格林函数的泛函形式。若将序参量亦表达为格林函数的泛函形式，则我们可得到有效作用量关于序参量的隐函数关系。一方面，该方法受制于简单近似，往往很难推广到解决现实问题；另一方面，由于存在复合场构造上的自由度，所得的有效热力学势很难保证物理态的极小值条件。

因此，在朗道相变理论的框架内，当无法显式地构造出体系的热力学势时，如何分析体系的平衡态相结构是我们必须克服的重大困难；在超越朗道相变理论的层次上研究体系的非平衡态性质，例如涨落和输运性质等，也是我们需要面对的重要问题。

1.4 本文拟讨论的问题及内容安排

如前文所述，强相互作用物质的相和相图是理解宇宙图像及宇宙中强相互作用物质演化的重要部分，其实验和理论研究是目前基础物理的中心内容。标准模型中的强相互作用部分——QCD，是目前研究这一问题的基本理论。但是，QCD 具有的非微扰性质使得相关的定量计算十分困难。于是，人们迫切需要建立一套

行之有效的非微扰计算方案。多年来的研究表明, QCD 的 Dyson-Schwinger (DS) 方程方法^[73,74,75] 是目前“几乎唯一既具有手征对称性自发破缺又反映色禁闭”的非微扰 QCD 的连续场论方法^[76], 也就是一个可以应用于真正研究强相互作用系统相变(简称 QCD 相变)的非微扰 QCD 的连续场论方法。综合考虑物理问题和理论方法两方面因素, 本文拟采用 QCD 的 Dyson-Schwinger (DS) 方程方法研究 QCD 物质的相图。较具体地, 我们不仅要确定相边界曲线和临界终点的位置, 还要分析零重子数密度下高于临界温度不多的区域和低温中等密度区域中的夸克胶子物质的性质。由于在非微扰情况下难以给出有效热力学势, 因此传统的通过分析热力学势研究相变的方案失效。于是, 我们需要构建非微扰情况下表征相变的判据。根据拟研究问题的内容, 本论文章节结构安排如下。

第二章介绍 DS 方程方法的基本框架和理论现状。本章首先给出一般的 DS 方程的推导, 然后着重介绍夸克和介子方程以及两类方程的求解方案, 即截断和模型构造, 最后展示手征对称性自发破缺和色禁闭在 DS 方程方法下的实现, 并讨论内禀参数空间中的相图。

第三章研究强子态的性质。具体地, 本章主要研究零温零密极限下的介子性质。目前格点 QCD 模拟计算的结果表明, 胶子存在某种质量标度^[77]。为此, 本章首先提出一个新的相互作用模型^[78], 并分析胶子质量函数和跑动耦合常数的行为。然后, 利用此模型, 我们在彩虹梯子近似下分别计算介子基态、激发态和反常态的性质^[79]。在此基础上, 我们分析彩虹(裸顶点)梯子近似下研究介子所存在的不足, 从而说明在对实际体系的研究中, 虽然 DS 方程方法是行之有效的方法, 但必须超越最低阶(裸顶点)近似。

第四章将 DS 方程方法推广到有限温度和有限密度情况, 首先在平均场近似下, 基于有效势的概念研究 QCD 的手征相变的相图, 然后提出一种基于手征磁化率表征相变的判据和方案^[80], 使得 DS 方程方法对于手征相变的研究不受限于最简单的截断方案(即超越平均场近似)。相较有效势方案, 手征磁化率方案不仅能给出相边界曲线和相变的临界终点(CEP), 还能给出两相(即手征对称性破缺相和手征对称相)共存区域。最后, 我们讨论 CEP 位置和共存区性质对相互作用细节依赖的行为, 这或对 RHIC 实验寻找 CEP 提供积极建议。

第五章研究相图中的特征区域——零重子数密度的临界温度 T_c 之上的夸克胶子物质的性质^[81]。本章首先考虑温度效应对夸克相互作用, 即胶子传播子的影

响。然后，分别考虑高温和低温下（即 $T > T_c$ 的程度）的夸克胶子物质的激发模式。结果表明，在高温情况下，DS 方程的结果和硬热圈微扰计算结果一致：夸克胶子物质存在正常热激发和等离子集体激发两种模式，且两种激发模式的准粒子质量与温度成正比。然而，在 T_c 附近，夸克胶子物质还表现出一种“零激发”模式（简称零模）。通过分析零模的性质，我们发现，它反映体系的强耦合特征，因而 T_c 附近的物态应该称为强耦合夸克胶子等离子体（sQGP），并且确定了 sQGP 存在的温度区间。

最后一章是关于本文内容的总结和对后续工作的展望。本论文最后给出四个附录，具体说明本文中的符号约定和较详细介绍正文中部分内容的计算细节。

第二章 QCD Dyson-Schwinger 方程 方法概述

理解 QCD 的非微扰性质，进而得到热密核物质的相图，需要建立一套非微扰计算方案。格点 QCD 是目前唯一从第一性原理出发的方法，是建立在离散时空点阵上的格点规范理论^[82]。其利用 Monte-Carlo 算法模拟场的组态，然后对观测量作统计平均。随着计算技术的发展，格点 QCD 计算已取得诸多有意义的成果，例如，低能强子谱^[83] 和低密有限温度下强子–QGP 相变的性质^[84]。然而，其自身也存在着一些困难，例如，因受制于计算资源，目前在物理参数下的模拟计算仍然十分困难，Monte-Carlo 算法因引入化学势带来的符号问题而失效等。因此，有必要在连续场论框架下发展 QCD 的非微扰方法。为此，QCD 求和规则^[85,86]、手征微扰论^[62,63] 和 Nambu 模型^[59,60,61] 等方法亦被广泛使用。这些方法能在一定程度上抓住 QCD 的主要特征，并且容易求解，但是往往缺乏普适性或者与 QCD 的直接联系。本文采用基于格林函数的 Dyson-Schwinger 方程方法，它具有良好的 QCD 基础^[73,74,75]，几乎是目前唯一一种既能体现手征对称性自发破缺又能体现色禁闭的连续场论非微扰方法^[76]。

原则上，所有的观测量或关键物理量，例如散射振幅、束缚态性质、传播子行为和真空凝聚等，都可以从格林函数中提取出来。因此，只要能够建立一套关于格林函数的运动方程，我们就能够通过求解这些方程而得到所需的物理量。DS 方程方法正是基于这一思想，最早由 Dyson 和 Schwinger 建立^[87,88,89]。但是，DS 方程本身是一组无穷阶耦合的积分方程组，我们必须引入适当的截断和模型输入方能求解。本章首先给出一般 DS 方程的推导，然后着重介绍夸克和介子方程及其截断方案和模型构造，最后讨论手征对称性自发破缺和色禁闭的实现以及由相互作用强度和流夸克质量构成的内禀空间的相图。

2.1 DS 方程的推导和费曼图表示

首先, 在 Euclidean 空间中 (相关符号约定见附录A), QCD 的规范不变的作用量可以写为

$$S_{\text{QCD}}[q, \bar{q}, A] = \int d^4x \left[\bar{q}(x)(\not{D} + m_0)q(x) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha(x)F_\alpha^{\mu\nu}(x) \right], \quad (2.1)$$

其中, 协变微分和场强张量分别定义为

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a, \quad (2.2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_0 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.3)$$

在路径积分量子化方案中, 对规范等价的场位形积分会导致所谓的无穷规范体积问题, 因而需要采用 Faddeev 和 Popov 提出的规范固定方法^[90]。在 QCD 情况下, 为了保证规范不变性和幺正性, 必须引入一种零自旋且反对易的非物理辅助场, 常称之为鬼场 ($\omega_a, \bar{\omega}_a$)。于是, 生成泛函由三部分组成

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J, \sigma, \bar{\sigma}] = \int \mathcal{D}[q, \bar{q}, A_\mu, \omega, \bar{\omega}] \exp [-S_{\text{QCD}} - S_{\text{GF}} + S_{\text{C}}], \quad (2.4)$$

其中,

$$S_{\text{GF}} = \int d^4x \left[(\partial_\mu \bar{\omega}_a)(\delta^{ab}\partial_\mu - g_0 f^{abc} A_\mu^c)\omega_b - \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 \right], \quad (2.5)$$

$$S_{\text{C}} = \int d^4x \left[\bar{\eta}q + \bar{q}\eta + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\sigma}_a \omega_a + \bar{\omega}_a \sigma_a \right], \quad (2.6)$$

其中 ξ_0 为裸的规范固定参数, $\eta, \bar{\eta}, J_\mu^a, \sigma_a, \bar{\sigma}_a$ 为相应场的外源。

以标量场为例, 一般 N 点格林函数可由生成泛函表示为

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle \Omega | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle \\ &= \frac{\int [\mathcal{D}\phi] e^{-S[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)}{\int [\mathcal{D}\phi] e^{-S[\phi]}} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

但是，在实际应用中，我们往往需要计算连通格林函数或连通截肢（单粒子不可约）格林函数。因此，在具体推导 DS 方程之前，我们先定义这两类格林函数的生成泛函。

首先，我们注意到， $Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J$ 表示在引入外源 J 的情况下，真空到真空的散射振幅，包括连通和非连通两部分。若将 $Z[J]$ 表示成连通单元 $W[J]$ 的求和形式，则有

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} W^N[J] = e^{-W[J]}. \quad (2.8)$$

$W[J]$ 即是连通格林函数的生成泛函。为了得到连通截肢格林函数的生成泛函，通过对 $W[J]$ 做 Legendre 变换，我们得到平均场的有效作用量为

$$\Gamma[\tilde{\phi}] = W[J] - \int d^4x J(x) \tilde{\phi}(x), \quad (2.9)$$

其中， $\tilde{\phi}(x) = \langle \phi(x) \rangle_J$ 表示在引入外源 $J(x)$ 情况下的场的平均值。于是，我们有如下场-源共轭变换，

$$\tilde{\phi}(x) = -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \quad J(x) = -\frac{\delta \Gamma[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(x)}. \quad (2.10)$$

关于源的变分算符可以表示为

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} = \int d^4y \frac{\delta \tilde{\phi}(y)}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(y)} = - \int d^4y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(y)}, \quad (2.11)$$

其中， $\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} = \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}(x) \delta \tilde{\phi}(y)} \right)^{-1}$ 是最低阶两点连通格林函数，即场的传播子 $S(x, y)$ 。显然， $W[J]$ 生成的格林函数等于 $\Gamma[\tilde{\phi}]$ 生成的格林函数与传播子外腿构成的树图，也就是说， $\Gamma[\tilde{\phi}]$ 正是连通截肢格林函数的生成泛函。

DS 方程的一般形式

类似于普通微积分，在适当边界条件下，泛函全微分的泛函积分等于零，即

$$0 = \int [\mathcal{D}\phi] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \exp \left\{ -S[\phi] + \int d^4x J(x) \phi(x) \right\}. \quad (2.12)$$

由此，我们得到

$$0 = \int [\mathcal{D}\phi] \left\{ -\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} + J(x) \right\} \exp \left\{ -S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) \right\} \quad (2.13)$$

$$= \left\{ -\frac{\delta S[\delta/\delta J]}{\delta \phi(x)} + J(x) \right\} Z[J]. \quad (2.14)$$

于是，

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \right\rangle_J = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta S[\delta/\delta J]}{\delta \phi(x)} Z[J] = J(x). \quad (2.15)$$

在外源为零时，上式表示，场位形使得作用量取泛函极值。显然，类似于经典力学中的欧拉-拉格朗日方程，该式实际上就是场的运动方程。若将其作为 DS 方程的出发点，则所有多点格林函数满足的方程均可由此导出。因而，DS 方程也称为格林函数的运动方程。

束缚态方程的一般形式

在量子场论中， N 体束缚态对应 $2N$ 点格林函数的奇点，例如介子对应正反夸克四点格林函数，而重子对应夸克六点格林函数。一般地， $2N$ 点格林函数 $G^{(2n)}$ 和相应的 N 粒子不可约散射核 $K^{(n)}$ 之间的关系可表示为

$$G^{(2n)} = \prod_{i=1}^{2n} S_i + \left(\prod_{i=1}^{2n} S_i \right) K^{(n)} G^{(2n)}. \quad (2.16)$$

若定义束缚态波函数 $\Psi = \langle \Omega | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | X \rangle$ ，则在壳条件下的 $2N$ 点格林函数可以表示成

$$G^{(2n)} \xrightarrow{P^2 \rightarrow -M^2} \frac{\Psi \bar{\Psi}}{P^2 + M^2}. \quad (2.17)$$

于是，我们得到束缚态波函数满足的方程为

$$\Psi = \left(\prod_{i=1}^n S_i \right) K^{(n)} \Psi, \quad (2.18)$$

或者定义束缚态振幅 $\Gamma = (\prod_{i=1}^n S_i)^{-1} \Psi$, 则其满足的方程为

$$\Gamma = K^{(n)} \left(\prod_{i=1}^n S_i \right) \Gamma. \quad (2.19)$$

QCD 的 DS 方程和强子态方程

将 DS 方程的一般式(2.15)中的变分替换为对反夸克场的变分, 则有

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{q}} = (\not{D} + m_0)q + ig_0 \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a q. \quad (2.20)$$

于是, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\bar{q}}(y)} &= - \left\langle \frac{\delta S}{\delta \bar{q}(y)} \right\rangle_\eta \\ &= (\not{D} + m_0)\tilde{q}(y) + ig_0 \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \tilde{A}_\mu^a(y) \tilde{q}(y) + ig_0 \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \\ &\quad \times \int_z \int_w \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{A}_\mu^a(y) \delta \tilde{A}_\nu^b(z)} \right)^{-1} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{q}(y) \delta \tilde{q}(w)} \right)^{-1} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{A}_\nu^b(z) \delta \tilde{q}(w)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

若再将方程两边做夸克场的变分 $\frac{\delta}{\delta \tilde{q}(x)}$, 并令所有平均场为零, 则得到

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{q}(x) \delta \tilde{q}(y)} = (\not{D} + m_0)\delta(x - y) + \Sigma(x, y), \quad (2.22)$$

其中, $\Sigma(x, y)$ 称为自能项, 其表达式为

$$\Sigma = ig_0 \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \int_z \int_w \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{A}_\mu^a(y) \delta \tilde{A}_\nu^b(z)} \right)^{-1} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{q}(y) \delta \tilde{q}(z)} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \tilde{A}_\nu^b(z) \delta \tilde{q}(x) \delta \tilde{q}(w)}. \quad (2.23)$$

至此, 我们得到了夸克传播子、胶子传播子和正规夸克-胶子顶点满足的 DS 方程。类似地, 我们也可以推导鬼场和胶子场满足的方程, 其费曼图表示如图2.1所示。

QCD 中常见的强子态包括, 两体介子态和三体重子态。其中, 介子由正反夸克组成, 因而束缚态方程的非平庸部分即是正反夸克四点散射核 $K^{(2)}$, 如图2.2所

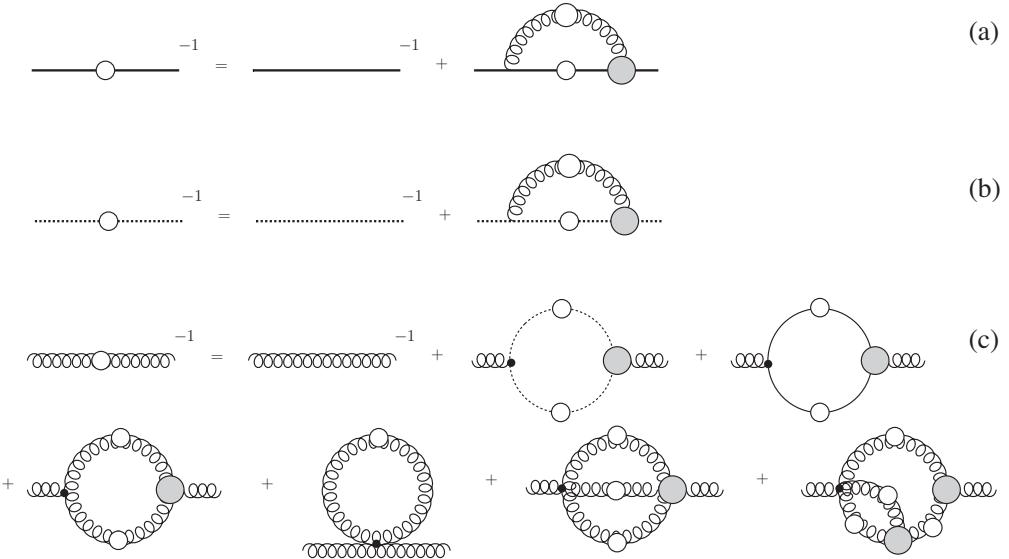


图 2.1: QCD 的最低阶 DS 方程的费曼图表示, 其中空心圆圈表示完全传播子, 实心圆圈表示正规顶点, 实线表示夸克线, 点线表示鬼场线, 卷曲线表示胶子线。

示。设介子束缚态振幅为 $\Gamma^{(2)}$, 则其满足的方程为

$$\Gamma^{(2)} = K^{(2)} S_1 S_2 \Gamma^{(2)}, \quad (2.24)$$

该方程称为两体束缚态的 Bethe-Salpeter 方程^[91], 如图2.4所示。对于三夸克重子态, 其六点散射核 $K^{(3)}$ 可以分解为三粒子不可约加两粒子不可约部分^[92,93,94],

$$K^{(3)} = K_{\text{irr}}^{(3)} + \sum_{i=1}^3 K_i^{(2)} \otimes S_i^{-1}, \quad (2.25)$$

其费曼图表示如图2.3所示。于是, 重子态振幅满足的方程可以写为

$$\Gamma^{(3)} = K^{(3)} S_1 S_2 S_3 \Gamma^{(3)}, \quad (2.26)$$

该方程称为三体束缚态的 Faddeev 方程^[95], 其结构示意图如图2.4所示。

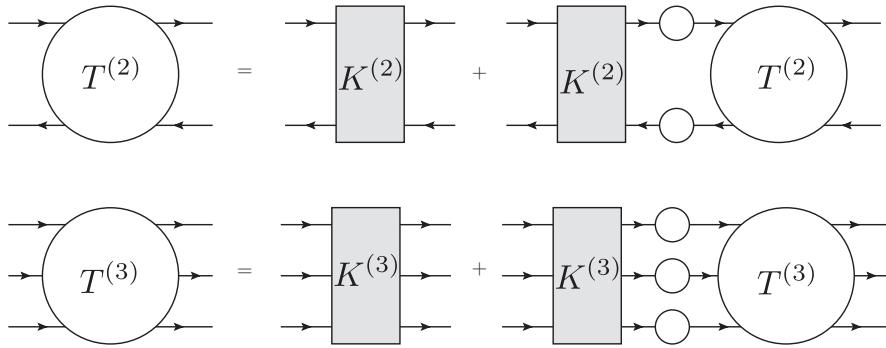


图 2.2: QCD 的四点和六点格林函数的 T 矩阵满足的方程示意图, 其中 K 为多粒子不可约散射核, 空心圆圈为夸克传播子。

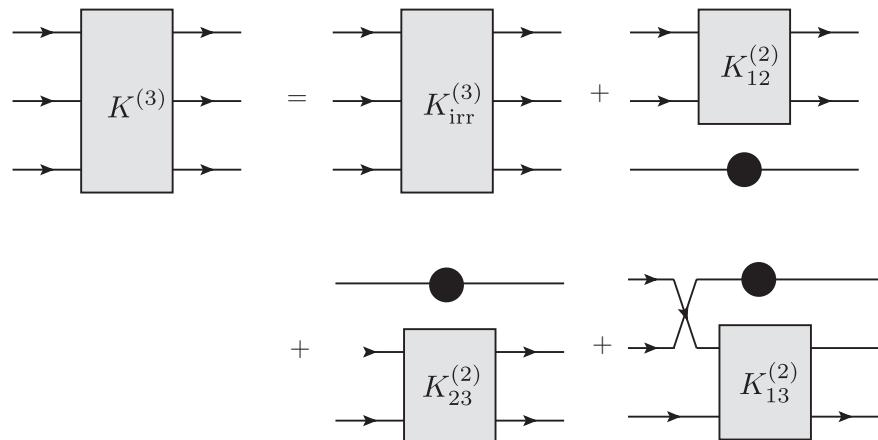


图 2.3: QCD 的六点散射核的结构示意图, 其中 $K_{\text{irr}}^{(3)}$ 为三粒子不可约部分, $K_i^{(2)}$ 为两粒子不可约部分, 实心黑圆圈为夸克传播子的逆。

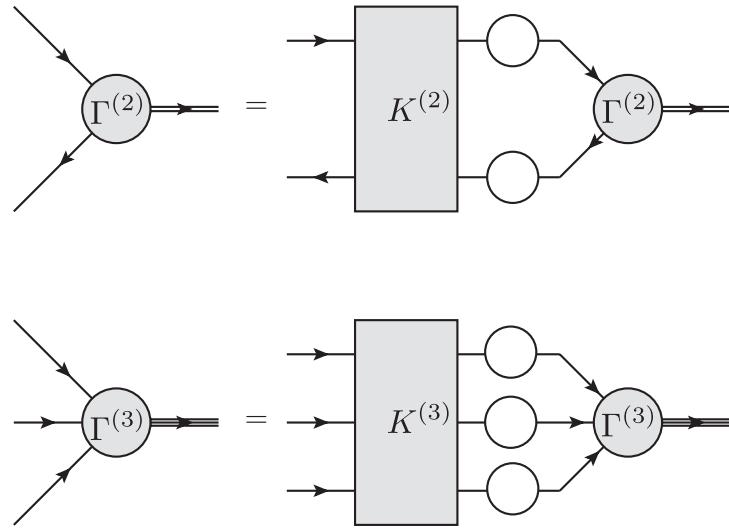


图 2.4: 两体束缚态的 Bethe-Salpeter 方程和三体束缚态的 Faddeev 方程示意图, 其中 K 为散射核, Γ 为束缚态振幅。

2.2 夸克传播子方程和介子方程

在前述讨论中, 我们给出了 QCD 的低阶 DS 方程、两体和三体束缚态方程的具体形式。本文的工作主要运用到其中两个方程: 夸克方程和关于两体束缚态的介子方程。前者用于研究 QCD 基本自由度上的物理, 而后者用于联系基本自由度和实验观测量。本节我们具体分析这两个方程的结构。

在动量空间中, 重整化的夸克传播子方程可以写为

$$S^{-1}(p, \zeta) = Z_2(i\gamma + Z_m m_0) + Z_1 \int_q^\Lambda g_0^2 D_{\mu\nu}^{ab}(p-q, \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \zeta) \Gamma_\nu^b(p, q, \zeta), \quad (2.27)$$

其中, $\int_q = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$, $D_{\mu\nu}^{ab}$ 为完全胶子传播子, Γ_ν^b 为完全夸克-胶子正规顶点, Λ 为正规化截断标度, ζ 为重整化标度, 重整化系数 Z_1, Z_2, Z_m 依赖于截断和重整化标度。由传播子的 CPT 变换性质可知, 它包含两个独立的洛伦兹结构, 可以表示为

$$S(p, \zeta) = \frac{1}{i\gamma A(p^2, \zeta^2) + B(p^2, \zeta^2)} = \frac{Z(p^2, \zeta^2)}{i\gamma + M(p^2)} \quad (2.28a)$$

或者

$$S(p, \zeta) = -i\gamma^{\mu}\sigma_v(p^2, \zeta^2) + \sigma_s(p^2, \zeta^2), \quad (2.28b)$$

其中, A 、 B 、 Z 、 M 或 σ_v 、 σ_s 即是需要求解的标量结构函数, 并且重整化群方程要求质量函数 $M(p^2) = \frac{B(p^2, \zeta^2)}{A(p^2, \zeta^2)}$ 与重整化标度 ζ 无关。由方程(2.27)可知, 欲求解夸克传播子需要知道胶子传播子和夸克胶子顶点函数。

对于介子方程, 若介子总动量为 P , 组分夸克相对动量为 q , 则介子振幅满足的方程可写成

$$\Gamma(k, P)_{\alpha\beta} = Z_1 \int_q^\Lambda K_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(q, k, P)[S(q_+) \Gamma(q, P) S(q_-)]_{\rho\sigma}, \quad (2.29)$$

其中, 脚标表示狄拉克和色味指标, $q_+ = q + \eta P$, $q_- = q - (1 - \eta)P$ 。由于方程具有相对论协变性, 动量分配因子 $\eta \in [0, 1]$ 与物理量无关。 J^{PC} 量子数通常被用来对介子态进行分类, 即决定介子振幅相应的结构和变换性质^[96]。由于介子为玻色子, 因此总角动量量子数只能为整数, 即 $J = 0, 1, 2, \dots$, 分别对应标量介子、矢量介子和张量介子等。对于人们关注较多的 $J = 0, 1$ 的介子, 质标和标量介子有四个独立洛伦兹结构, 而矢量介子有八个。标量介子的正交洛伦兹基矢可以写为,

$$\tau_{0+}^1 = i\mathbf{I}, \quad (2.30a)$$

$$\tau_{0+}^2 = (P \cdot k)\not{P}, \quad (2.30b)$$

$$\tau_{0+}^3 = P^2\not{k} - (P \cdot k)\not{P}, \quad (2.30c)$$

$$\tau_{0+}^4 = i[\not{k}, \not{P}]. \quad (2.30d)$$

质标介子的正交洛伦兹基矢可以写为,

$$\tau_{0-}^1 = i\gamma_5, \quad (2.31a)$$

$$\tau_{0-}^2 = \gamma_5\not{P}, \quad (2.31b)$$

$$\tau_{0-}^3 = \gamma_5(P \cdot k)\tau_{0+}^3, \quad (2.31c)$$

$$\tau_{0-}^4 = \gamma_5\tau_{0+}^4. \quad (2.31d)$$

矢量介子的正交洛伦兹基矢可以写为,

$$\tau_{1-}^1 = i\gamma_\mu^T, \quad (2.32a)$$

$$\tau_{1-}^2 = i[3k_\mu^T(\gamma^T \cdot k) - \gamma_\mu^T(k^T)^2], \quad (2.32b)$$

$$\tau_{1-}^3 = i(P \cdot k)k_\mu^T \not{P}, \quad (2.32c)$$

$$\tau_{1-}^4 = i[\gamma_\mu^T \not{P}(\gamma^T \cdot k) + k_\mu^T \not{P}], \quad (2.32d)$$

$$\tau_{1-}^5 = k_\mu^T, \quad (2.32e)$$

$$\tau_{1-}^6 = (P \cdot k)[\gamma_\mu^T(\gamma^T \cdot k) - (\gamma^T \cdot k)\gamma_\mu^T], \quad (2.32f)$$

$$\tau_{1-}^7 = (k^T)^2(\gamma_\mu^T \not{P} - \not{P}\gamma_\mu^T) - 2k_\mu^T(\gamma^T \cdot k)\not{P}, \quad (2.32g)$$

$$\tau_{1-}^8 = k_\mu^T(\gamma^T \cdot k)\not{P}, \quad (2.32h)$$

其中, $X_\mu^T = X_\mu - \frac{(P \cdot X)P_\mu}{P^2}$ 表示横向投影分量。于是, 介子振幅可以分解为

$$\Gamma_X(k, P) = \sum_i \tau_X^i(k, P) F_X^i(k^2, P \cdot k, P^2), \quad (2.33)$$

F_X^i 为洛伦兹变换不变的标量振幅。 P 宇称和 C 宇称变换分别定义为,

$$P : \Gamma(k, P) \rightarrow \gamma_4 \Gamma(\tilde{k}, \tilde{P}) \gamma_4, \quad (2.34)$$

$$C : \Gamma(k, P) \rightarrow \hat{C} \Gamma^t(-k, P) \hat{C}^{-1}, \quad (2.35)$$

其中, $\tilde{k} = (k_4, -\vec{k})$, t 表示矩阵转置, \hat{C} 为电荷共轭算符 $\hat{C}\gamma_\mu\hat{C}^{-1} = -\gamma_\mu$ 。由方程(2.29)可知, 介子束缚态的标量振幅 F_i 依赖于夸克传播子 (其又依赖于胶子传播子和夸克胶子顶点) 和四点散射核。

2.3 方程求解：胶子模型和截断方案

为了求解方程(2.27)和(2.29), 我们需要知道胶子传播子、夸克胶子顶点和夸克-反夸克散射核。对于胶子传播子, 原则上, 我们可以通过求解其自身满足的方程得到。然而, 胶子传播子方程自身非常复杂 (如图2.1c 所示): 包含夸克圈、鬼场圈和胶子自作用的贡献。因此, 我们通常将胶子传播子作为模型输入, 例如, 采

用拟合格点 QCD 模拟计算得到的结果。对于顶点和散射核，我们需要引入所谓的截断方案，即用低阶格林函数构造高阶格林函数，从而使得方程封闭可解。任何截断方案原则上不能破坏系统原有的对称性，而对称性体现为格林函数满足的一系列恒等式，也就是说这些恒等式即是截断方案的根据。本节中我们分别讨论胶子模型和截断方案。

2.3.1 胶子模型

在欧氏空间中，胶子传播子的一般形式为

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \mathcal{D}(k^2) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (2.36)$$

其中， ξ 为规范参数， $\mathcal{D}(k^2)$ 为胶子着衣函数。DS 方程本身依赖于规范，人们一般选用 Landau 规范，因为它是重整化群的固定点，是协变规范，并且便于格点 QCD 做数值模拟。设自由胶子传播子为

$$D_{\mu\nu}^{\text{free}}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (2.37)$$

则胶子着衣函数模型可以表示为

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^{\text{free}}(k) k^2 \mathcal{G}(k^2), \quad (2.38)$$

其中 $\mathcal{G}(k^2)$ 已经吸收了跑动相互作用强度，即需要构造的相互作用函数。我们通常将其表达为两部分，即

$$\mathcal{G}(k^2) = \mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2) + \frac{4\pi}{k^2} \alpha_{\text{pQCD}}(k^2), \quad (2.39)$$

其中， $\mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2)$ 为红外相互作用部分， $\alpha_{\text{pQCD}}(k^2)$ 为全空间有界且单调递减的微扰 QCD 的跑动耦合常数。在 $k^2 \lesssim 2\text{GeV}$ 区域，红外部分起主要作用，而之上微扰部分起主要作用。 $\mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2)$ 的形式决定手征对称性自发破缺和色禁闭是否能够实现。在讨论现实 QCD 模型之前，我们先考虑两种简化模型：

(1) 点相互作用模型,

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{1}{M_G^2} \theta(\Lambda^2 - k^2), \quad (2.40)$$

其中, M_G 为胶子质量标度, Λ 是为了满足重整化和渐近自由而引入的动量硬截断标度。该模型与 Nambu 模型^[59,60]相似, 能较好地体现 QCD 的手征性质。但是, 其夸克表现为有限质量的点相互作用粒子, 因而缺乏禁闭特征。

(2) 定常相互作用模型,

$$\mathcal{G}(k^2) = 4\pi^2 \eta^2 \delta^4(k), \quad (2.41)$$

η 为相互作用强度。该模型也称为 Munczek-Nemirovsky (MN) 模型^[97], 因所有相互作用都集中于零动量处, 故表示一种极端的“渐近自由”形式。在该模型下, 夸克方程(2.27)可以解析求解, 其结果可以反映手征对称性自发破缺和禁闭。

以上两个模型简单易用, 也能在一定程度上抓住物理的某些侧面, 但是也存在明显的不足。因此, 我们需要构造更现实的模型。首先, (2.39)式中的微扰部分可以写为

$$\alpha_{\text{pQCD}}(k^2) = \frac{2\pi\gamma_m(1 - e^{-k^2/4m_t^2})}{\ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)^2]}, \quad (2.42)$$

其中, 反常量纲 $\gamma_m = 12/(33 - 2N_f)$, $N_f = 4$, QCD 的特征标度 $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.234 \text{ GeV}$, $\tau = e^2 - 1$, $m_t = 0.5 \text{ GeV}$ 。该形式满足 QCD 的一圈重整化群跑动的行为^[98,99]。至于红外相互作用, 我们通常有以下三种形式:

(1) 屏蔽的线性禁闭模型^[100],

$$\mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2) = 4\pi^2 \frac{\chi^2}{k^4 + \Delta}. \quad (2.43)$$

该模型实际上表示带屏蔽的线性禁闭势。其中, χ 表征相互作用强度, Δ 表征禁闭宽度。如引言所述, 重味夸克间的相互作用可以用静态线性禁闭势描述, 因此该模型具有一定的现实性, 也能较好地描述低能观测量^[100]。

(2) Maris-Tandy 模型^[101],

$$\mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2) = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2}. \quad (2.44)$$

它是对 MN 模型做有限相互作用展宽, $\delta^4(k) \xrightarrow{\omega \sim 0} \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\omega^6} k^2 e^{-k^2/\omega^2}$, 的自然形式, 其中 ω 为相互作用宽度。MT 模型形式简单, 并且在整个动量空间无奇异性, 因而被广泛应用于计算相变和介子性质^[102,103,104,105,106,107]。本文部分工作将使用该模型。

(3) 红外定常模型^[78],

$$\mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2) = \frac{8\pi^2}{\omega^4} D e^{-k^2/\omega^2}. \quad (2.45)$$

该模型也相当于对 MN 模型做有限相互作用展宽, $\delta^4(k) \xrightarrow{\omega \sim 0} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\omega^4} e^{-k^2/\omega^2}$, 但是却更符合最新求解耦合 DS 方程^[108,109] 和格点 QCD 的结果^[77,110,111]。目前求解耦合 DS 方程和格点 QCD 模拟计算均表明, 胶子存在某种质量标度, 具有动量空间中单调下降的质量函数^[77], 即

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{4\pi\alpha(k^2)}{k^2 + m_g^2(k^2)}, \quad m_g^2(k^2) = \frac{M_g^4}{k^2 + M_g^2}. \quad (2.46)$$

$m_g(k^2)$ 为胶子质量函数, M_g 为胶子质量标度。本文部分工作将使用该模型。

2.3.2 截断方案

DS 方程的截断原则是尽可能保持系统的对称性。在规范理论中, 规范对称性导致格林函数满足严格的约束关系, 或称为 Ward-Takahashi (WT) 恒等式^[112,113]。在非阿贝尔规范理论中, 规范对称性被规范固定破坏, 而剩下所谓的定域 Becehi-Rouet-Store-Tyutin (BRST) 对称性^[114], 此时产生的恒等式称为 Slavnov-Taylor (ST) 恒等式^[113,115]。原则上, 通过求解这些恒等式, 我们可以用低阶格林函数构造出高阶格林函数, 从而实现 DS 方程的截断。

QCD 的拉氏量在如下 BRST 变换下保持不变,

$$\delta q = -ig_0\zeta \frac{\lambda^a}{2}\omega_a q, \quad (2.47a)$$

$$\delta \bar{q} = ig_0\bar{q}\zeta \frac{\lambda^a}{2}\omega_a, \quad (2.47b)$$

$$\delta \omega_a = \frac{\zeta}{2}g_0 f^{abc} \omega_b \omega_c, \quad (2.47c)$$

$$\delta \bar{\omega}_a = -\frac{\zeta}{\xi_0}(\partial_\mu A_\mu^a), \quad (2.47d)$$

$$\delta A_\mu^a = -\frac{\zeta}{\xi_0}(\delta^{ab}\partial_\mu - g_0 f^{abc} A_\mu^c)\omega_b \quad (2.47e)$$

其中, ζ 为反对易 Grassmann 数, 满足 $\zeta^2 = 0$, $\zeta\omega_a = -\omega_a\zeta$ 和 $\zeta q = -q\zeta$ 等。场的泛函积分测度 $\mathcal{D}[q, \bar{q}, A_\mu, \omega, \bar{\omega}]$ 和生成泛函 $Z[\eta, \bar{\eta}, J, \sigma, \bar{\sigma}]$ 也保持不变。由(2.4)式得

$$\int \mathcal{D}[q, \bar{q}, A_\mu, \omega, \bar{\omega}] e^{-S_{\text{QCD}} - S_{\text{GF}} + S_C} \delta S_C = 0, \quad (2.48)$$

其中, 关于源的变分为

$$\begin{aligned} \delta S_C &= \int d^4x \left[\bar{\eta}\delta q + \delta \bar{q}\eta + J_\mu^a \delta A_\mu^a + \bar{\sigma}_a \delta \omega_a + \delta \bar{\omega}_a \sigma_a \right], \\ &= \int d^4x \left[-ig_0\bar{\eta}\frac{\lambda^a}{2}\omega_a q + ig_0\bar{q}\frac{\lambda^a}{2}\omega_a \eta + \frac{1}{2}g_0 f^{abc} \bar{\sigma}_a \omega_b \omega_c \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\xi_0}(\partial_\mu A_\mu^a)\sigma_a + \frac{1}{\xi_0}J_\mu^a(\delta^{ab}\partial_\mu - g_0 f^{abc} A_\mu^c)\omega_b \right] \zeta. \end{aligned} \quad (2.49)$$

由于上式对任意无穷小变换都成立, 因此我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \int \mathcal{D}[q, \bar{q}, A_\mu, \omega, \bar{\omega}] \left[-ig_0\bar{\eta}\frac{\lambda^a}{2}\omega_a q + ig_0\bar{q}\frac{\lambda^a}{2}\omega_a \eta + \frac{1}{2}g_0 f^{abc} \bar{\sigma}_a \omega_b \omega_c \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\xi_0}(\partial_\mu A_\mu^a)\sigma_a + \frac{1}{\xi_0}J_\mu^a(\delta^{ab}\partial_\mu - g_0 f^{abc} A_\mu^c)\omega_b \right] e^{-S_{\text{QCD}} - S_{\text{GF}} + S_C}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

此式即是一般的 ST 恒等式, 高阶格林函数间的约束关系可由此导出。

ST 恒等式通常很难求解, 并使得截断方案中不可避免的引入鬼场贡献。我们可以考虑鬼场对胶子传播子的贡献, 例如求解胶子和鬼场耦合的 DS 方程^[116,117]。但是, 在求解夸克方程和介子方程时, 我们常常忽略鬼场对夸克胶子顶点和正反

夸克散射核的形式上的贡献，使得实际计算简便可行，这被称为阿贝尔近似。此时，ST 恒等式退化为 WT 恒等式。下面我们分别讨论与夸克方程(2.27)式和介子方程(2.29)式相关的一部分，即夸克胶子顶点和正反夸克散射核满足的 WT 恒等式。

(1) 夸克胶子矢量顶点 WT 恒等式

$$i(p-q)_\mu \Gamma_\mu(p, q) = S^{-1}(p) - S^{-1}(q). \quad (2.51)$$

它表示夸克胶子顶点的纵向部分可以由夸克传播子构造。基于此恒等式的 Ball-Chiu (BC) 顶点^[118] 表示为，

$$\Gamma_\mu^{\text{BC}}(p, q) = \gamma_\mu \Sigma_A + (p+q)_\mu \left[\frac{\not{p} + \not{q}}{2} \Delta_A - i \Delta_B \right]. \quad (2.52)$$

其中， $\Sigma_F = \frac{F(p^2) + F(q^2)}{2}$ ， $\Delta_F = \frac{F(p^2) - F(q^2)}{p^2 - q^2}$ 。显然，BC 顶点不包含任何动力学奇异特性。对于完整顶点 Γ_μ^{Full} ，我们可将其分解为十二个独立的洛伦兹结构

$$\{\gamma_\mu, k_\mu, Q_\mu\} \times \{\mathbf{1}, \not{k}, \not{Q}, [\not{k}, \not{Q}]\}, \quad (2.53)$$

其中定义 $k = p - q$, $Q = p + q$ 。由于矢量顶点 WT 恒等式约束与动量 k 平行的分量，于是完整顶点 Γ_μ^{Full} 可进一步表示为

$$\Gamma_\mu^{\text{Full}}(p, q) = \Gamma_\mu^{\text{BC}}(p, q) + \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Gamma_\nu^T(k, Q) \quad (2.54)$$

其中， $\Gamma_\nu^T(k, Q)$ 称为横向顶点，可分解为八个独立的洛伦兹结构

$$\{\gamma_\mu, Q_\mu\} \times \{\mathbf{1}, \not{k}, \not{Q}, [\not{k}, \not{Q}]\}. \quad (2.55)$$

显然，BC 顶点忽略了顶点横向结构。为简单起见，我们也常采用裸顶点（彩虹）近似，即

$$\Gamma_\mu^{\text{Bare}}(p, q) = \gamma_\mu. \quad (2.56)$$

如何利用横向 WT 恒等式约束顶点的横向结构^[119,120,121,122]，仍然是目前存在的一

个问题。目前的方法是唯象地引入横向结构，例如考虑反常磁矩项^[123]。

(2) 轴矢量顶点的 WT 恒等式，

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}^{fg}(k, P) = S_f^{-1}(k_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S_g^{-1}(k_-) - i(m_f + m_g) \Gamma_5^{fg}(k, P). \quad (2.57)$$

该恒等式来源于两味 QCD 拉氏量的手征对称性。为了研究手征对称性自发破缺，我们在截断方案中不能显式地破缺手征对称性，也就是说构造的夸克胶子顶点和四点散射核必须自洽，以保证该恒等式。根据(2.16)式，轴矢和赝标顶点的非齐次 BS 方程可以写为

$$\Gamma_{5\mu}^{fg}(k, P)_{\alpha\beta} = [\gamma_5 \gamma_\mu]_{\alpha\beta} + \int_q^\Lambda K_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(q, k, P) [S_f(q_+) \Gamma_{5\mu}^{fg}(q, P) S_g(q_-)]_{\rho\sigma}, \quad (2.58)$$

$$\Gamma_5^{fg}(k, P)_{\alpha\beta} = [\gamma_5]_{\alpha\beta} + \int_q^\Lambda K_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(q, k, P) [S_f(q_+) \Gamma_5^{fg}(q, P) S_g(q_-)]_{\rho\sigma}. \quad (2.59)$$

将以上两式代入(2.57)，可以得到四点散射核和夸克自能满足的关系

$$[\Sigma_f(k_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 \Sigma_g(k_-)]_{\alpha\beta} = - \int_q^\Lambda K_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(q, k, P) [S_f(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S_g(q_-)]_{\rho\sigma}. \quad (2.60)$$

在彩虹近似下^[124,125]，如果散射核取单胶子交换形式

$$K_{\alpha\beta, BD}^{\rho\sigma, AC}(q, k, P) = -g^2 D_{\mu\nu}(k-q) \left[\frac{\lambda^a}{2} \right]_{AC} \left[\frac{\lambda^a}{2} \right]_{BD} [\gamma_\mu]_{\alpha\rho} [\gamma_\nu]_{\beta\sigma}, \quad (2.61)$$

则恒等式(2.60)自动满足，这一形式称为梯子近似。于是，在彩虹梯子近似下，介子方程可以写为

$$\Gamma_X^{fg}(k, P) = - \int_q^\Lambda D_{\mu\nu}(k-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_f(q_+) \Gamma_X^{fg}(q, P) S_g(q_-) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu. \quad (2.62)$$

彩虹梯子近似能够较好地描述介子性质，但是仍然存在诸多不足。目前，超越彩虹梯子近似的截断方案已取得了一些进展^[123,126,127]。

2.3.3 重整化和归一化

如果采用的胶子模型包含紫外部分，即(2.42)式，则夸克方程需要做重整化。首先，夸克方程相关的重整化常数为 Z_2 、 Z_m 和 Z_1 ，分别用于夸克场、夸克质量和夸克胶子顶点的重整化。动量减除 (MOM) 重整化方案定义重整化点处的夸克传播子为自由传播子，即

$$S^{-1}(\zeta^2) = i\gamma + m_f, \quad (2.63)$$

其中， ζ 为重整化点， m_f 为重整化的夸克质量。该重整化条件包含两个洛伦兹结构，能够确定两个重整化系数。在彩虹近似下，我们常常将 Z_1 吸收到相互作用模型中，即

$$Z_1 g^2 D_{\mu\nu}(k) \Gamma_\nu(p, q) = D_{\mu\nu}^{\text{free}}(k) k^2 \mathcal{G}(k^2) \gamma_\nu, \quad (2.64)$$

此时，重整化的夸克方程(2.27)可以表示为

$$S^{-1}(p) = Z_2(i\gamma + Z_m m_0) + \Sigma(p), \quad (2.65)$$

由(2.28a)式， $S^{-1}(p) = i\gamma A(p^2) + B(p^2)$ 。若定义

$$\Sigma(p) = i\gamma [A'(p^2) - 1] + B'(p^2), \quad (2.66)$$

则重整化点处的夸克传播子为

$$S^{-1}(\zeta^2) = i\gamma [Z_2 + A'(\zeta^2) - 1] + Z_2 Z_m m_0 + B'(\zeta^2). \quad (2.67)$$

于是，我们得到

$$Z_2 = 2 - A'(\zeta^2), \quad Z_2 Z_m m_0 = m_f - B'(\zeta^2). \quad (2.68)$$

在手征极限下, $Z_2 Z_m m_0 \equiv 0$, $m_f = 0$, $B'(\zeta^2) = 0$ 。在超越手征极限情况下, 标量函数 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 满足的方程为

$$A(p^2) = 1 + A'(p^2) - A'(\zeta^2), \quad (2.69a)$$

$$B(p^2) = m_f + B'(p^2) - B'(\zeta^2). \quad (2.69b)$$

对于 BC 顶点, 其满足的矢量顶点 WT 恒等式(2.51)要求 $Z_1 = Z_2$ 。此时, 重整化的夸克方程(2.27)改写为

$$S^{-1}(p) = Z_2(i\gamma + Z_m m_0) + Z_2\Sigma(p), \quad (2.70)$$

其中重整化系数表示为

$$Z_2 = \frac{1}{A'(\zeta^2)}, \quad Z_2 Z_m m_0 = m_f - \frac{B'(\zeta^2)}{A'(\zeta^2)}. \quad (2.71)$$

相应地, 标量函数 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 表示为

$$A(p^2) = \frac{A'(p^2)}{A'(\zeta^2)}, \quad (2.72a)$$

$$B(p^2) = m_f + \frac{B'(p^2) - B'(\zeta^2)}{A'(\zeta^2)}. \quad (2.72b)$$

注意到, 彩虹近似下的重整化是相减性, 而 BC 顶点下的是相乘性^[128]。

介子的 BS 方程(2.29)是关于束缚态振幅的齐次本征方程。类似于薛定谔方程, 我们需要对所得振幅做归一化处理。如果考虑正反夸克入射形成介子束缚态, 再从束缚态衰变成正反夸克出射, 那么该散射过程的 S 矩阵必须满足幺正性。由此, 可导出 Leon-Cutkosky 归一化条件^[129]

$$\frac{\partial}{\partial P^2} \text{tr} \int_k \left[\bar{\Gamma}(k, -Q) S(k_+) \Gamma(k, Q) S(k_-) + \int_q \bar{\Psi}(q, Q) K(q, k, P) \Psi(k, Q) \right] = 1, \quad (2.73)$$

式中动量取在壳条件 $P^2 = Q^2 = -M^2$ 。如果将(2.29)式显式地写成本征方程

$$\lambda_i(P^2)\Gamma_i = K(P^2)\Gamma_i, \quad (2.74)$$

则 $\lambda_i(P^2) = 1$ 的所有态构成了相同 J^{PC} 量子数的所有径向激发谱。此时可以采用 Nakanishi 归一化方案^[130,131]

$$\left(\frac{\partial \ln(\lambda)}{\partial P^2}\right)^{-1} = \text{tr} \int_k \bar{\Gamma}(k, -P) S(k_+) \Gamma(k, P) S(k_-). \quad (2.75)$$

归一化的振幅可用于计算介子的衰变常数、介子的电磁形状因子以及介子内部价夸克的分布函数等^[101,106,132,133]。

2.4 手征对称性自发破缺和色禁闭的实现

在本章前几节中，我们给出了 DS 方程的一般形式，也给出了夸克方程和介子方程的具体形式，并且讨论了求解两类方程所需的模型和截断方案。在本节中，我们讨论手征对称性自发破缺和色禁闭在 DS 方程方法下的实现。首先，如果说手征对称性自发破缺是真空态的破缺，那么我们需要知道如何考察真空的手征对称性。对于一个手征变换不变的算符，例如，对矢量流算符 $\bar{q}\gamma_\mu q$ ，其真空期望值可以表示为

$$\langle \Omega | \bar{q}\gamma_\mu q | \Omega \rangle = \langle \Omega_R | \bar{q}_R \gamma_\mu q_R | \Omega_R \rangle + \langle \Omega_L | \bar{q}_L \gamma_\mu q_L | \Omega_L \rangle. \quad (2.76)$$

这意味着该类算符不会混合右手和左手真空态。但是对于破坏手征对称性的算符，例如标量算符 $\bar{q}q$ ，其真空期望值（手征凝聚）为

$$\langle \Omega | \bar{q}q | \Omega \rangle = \langle \Omega_R | \bar{q}q | \Omega_L \rangle + \langle \Omega_L | \bar{q}q | \Omega_R \rangle, \quad (2.77)$$

则显然包含了右手和左手真空态混合项。考虑右手和左手真空态独立的 $U(1)$ 转动 ($N_f = 1$)，则

$$|\Omega'\rangle = e^{i\theta_R} |\Omega_R\rangle + e^{i\theta_L} |\Omega_L\rangle. \quad (2.78)$$

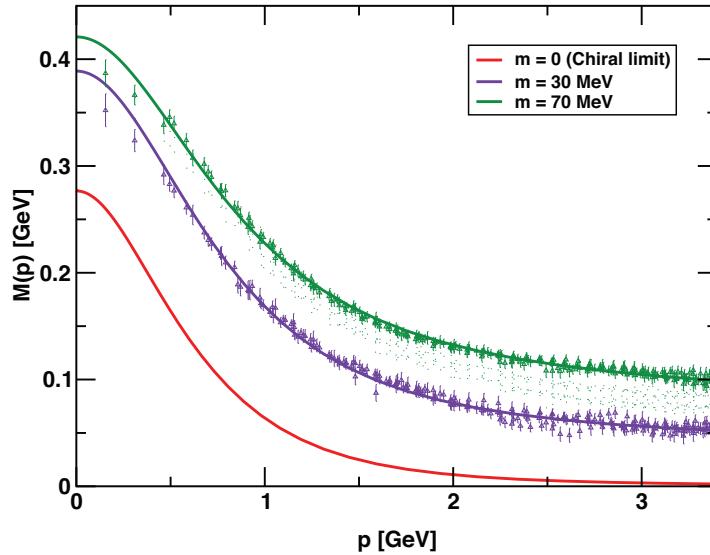


图 2.5: 在不同流夸克质量下, DS 方程给出的夸克质量函数及其与格点 QCD 模拟计算结果的比较, 其中实线为求解 DS 方程给出的结果, 带误差限的点为格点 QCD 模拟计算给出的结果 (取自文献^[135])。

于是, 手征凝聚在此变换下表示为

$$\langle \bar{q}q \rangle' = \langle \Omega' | \bar{q}q | \Omega' \rangle = \langle \Omega_R | \bar{q}q | \Omega_L \rangle e^{i(\theta_L - \theta_R)} + \langle \Omega_L | \bar{q}q | \Omega_R \rangle e^{i(\theta_R - \theta_L)}. \quad (2.79)$$

如果 $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, 则 $\langle \bar{q}q \rangle' = \langle \bar{q}q \rangle$ 对任意 $\theta_R \neq \theta_L$ 成立, 即真空态具有手征对称性。反之, 如果 $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$, 则 $\langle \bar{q}q \rangle' = \langle \bar{q}q \rangle$ 当且仅当 $\theta_R = \theta_L$ 成立, 即真空态的手征对称性破缺。非零手征凝聚意味着真空中由于强吸引相互作用而出现正反夸克对 (类似于超导中的库珀对)。轻夸克在凝聚中运动会出现有效质量, 这也就是说手征对称性自发破缺是强子质量的来源^[134]。

根据结构函数 $A(p^2, \zeta^2)$ 和 $B(p^2, \zeta^2)$ 满足的方程 (参见附录B), 例如, 在彩虹近似下

$$\begin{aligned} A(p^2, \zeta^2) &= Z_2 + \frac{4}{3} \int_q^\Lambda \mathcal{G}(k^2) \frac{A(q^2, \zeta^2)}{q^2 A^2(q^2, \zeta^2) + B^2(q^2, \zeta^2)} \left[\frac{p \cdot q}{p^2} + \frac{2(k \cdot p)(k \cdot q)}{p^2 k^2} \right], \\ B(p^2, \zeta^2) &= Z_2 Z_m m_0 + \frac{4}{3} \int_q^\Lambda \mathcal{G}(k^2) \frac{3B(q^2, \zeta^2)}{q^2 A^2(q^2, \zeta^2) + B^2(q^2, \zeta^2)}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

我们发现，在手征极限（ $Z_2 Z_m m_0 \equiv 0$ ）下，夸克方程恒有 $B(p^2, \zeta^2) \equiv 0$ 的解，即动力学质量 $M(p^2, \zeta^2) \equiv 0$ 。该解称为 Wigner 解。在一定条件下，该夸克方程还存在 $B(p^2, \zeta^2) \neq 0, A(p^2, \zeta^2) > 0$ ，从而 $M(p^2, \zeta^2) \neq 0$ 的解。该解称为 Nambu 解。夸克方程(2.27)给出的 Nambu 解的典型质量函数如图2.5所示。显然在有限流质量下，DS 方程给出与格点 QCD 一致的结果：夸克质量函数在红外快速上升，并且其标度和组分夸克质量相同。在手征极限下，格点模拟无能为力，但 DS 方程仍然能给出类似的结果。此时，手征凝聚和质量函数的关系可明确地表示为^[136]

$$-\langle \bar{q}q \rangle^0 = \text{tr} \langle \bar{q}q \rangle = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_q^\Lambda \text{tr} S(q) = N_c \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_q^\Lambda \frac{Z(q^2) M(q^2)}{q^2 + M^2(q^2)}, \quad (2.81)$$

即有限夸克动力学质量意味着有限手征凝聚。因此，我们说 DS 方程实现了手征对称性自发破缺，并且可用于研究 QCD 的手征相变。

目前，虽然色禁闭尚没有严格的判据，但是其一定意味着不存在夸克渐近态。在标准场论中，单粒子渐近态表现为与传播子对应的正定的谱函数在质壳上的奇点，例如，对于标量场^[134]

$$S(p^2) = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \frac{\rho(M^2)}{p^2 + M^2}, \quad (2.82)$$

$$\rho(M^2) = \sum_n (2\pi) \delta(M^2 - E_n^2) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2, \quad (2.83)$$

其中，求和遍历哈密顿量的所有本征态。**如果夸克传播子具有非正定的谱函数，那么体系将不能出现自由夸克，即可视为色禁闭的一种表现。**

类似于标量场，我们将夸克传播子的标量部分做谱分解

$$\sigma_s(p^2) = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \frac{\rho_s(M^2)}{p^2 + M^2}. \quad (2.84)$$

将方程两边做 p^2 的二次微分，则

$$\sigma_s''(p^2) = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \frac{2\rho_s(M^2)}{(p^2 + M^2)^3}. \quad (2.85)$$

如果 $\rho_s(M^2)$ 正定，则 $\sigma_s''(p^2)$ 在整个类空动量区域恒大于零。在典型参数下，关于 $\sigma_s''(p^2)$ 的行为的计算结果如图2.6所示。很显然，在红外区域， $p^2 \lesssim 1 \text{ GeV}$, $\sigma_s''(p^2) < 0$ 。

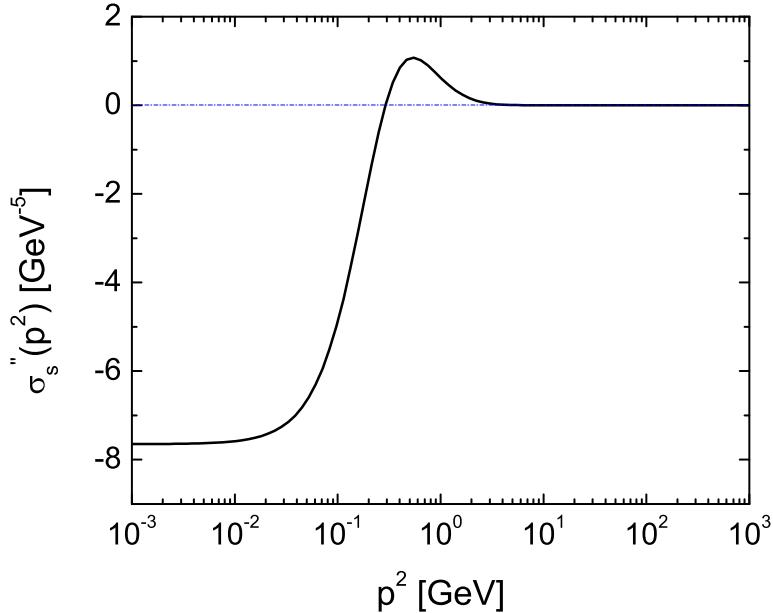


图 2.6: 利用彩虹近似和 MT 模型在典型参数 ($D = 0.93\text{GeV}^2$, $\omega = 0.4\text{GeV}$, $m = 0.005\text{GeV}$) 下计算得到的夸克传播子的标量结构函数的二次微分随动量跑动的行为。

这意味着谱函数 $\rho_s(M^2)$ 的正定性破坏。在这种意义下，我们说 DS 方程方法实现了色禁闭。

综上所述，DS 方程方法可以同时实现手征对称性自发破缺和色禁闭。这说明我们的胶子模型和截断方案抓住了非微扰 QCD 的主要特征，因此，QCD 的 DS 方程方法是现有理论方法中可以用来实际研究 QCD 相变的（唯一）连续场论非微扰方法。本文的内容主要就是利用 DS 方程方法研究 QCD 的手征相变等性质。

2.4.1 临界耦合强度和临界流夸克质量

在研究具体问题之前，我们有必要先讨论零温零密下内禀参数（耦合强度和流夸克质量）对手征对称性的影响。一方面，温度和密度效应最直接的影响即是改变相互作用的行为，例如，温度的一个显著效应就是削弱相互作用强度，因此讨论耦合强度可为研究真实相变提供定性认识；另一方面，考虑到现实世界中不同味夸克存在流质量差异，例如， $m_u \approx m_d \approx 5\text{MeV}$, $m_s \approx 130\text{MeV}$ ，因此讨论流质量效应可以为研究多味夸克体系的相变行为提供有用信息。

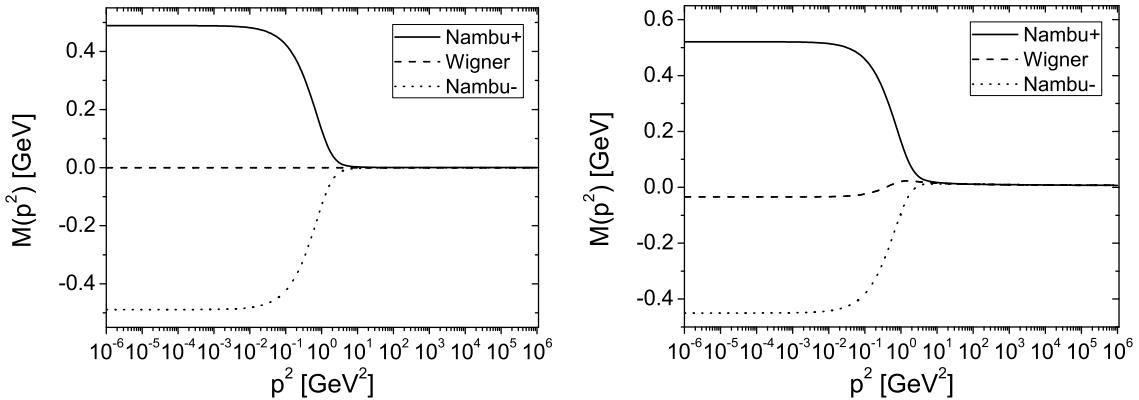


图 2.7: 裸顶点近似和 MT 模型 (取参数 $D = 0.93\text{GeV}^2$, $\omega = 0.4\text{GeV}$) 下计算得到的夸克质量函数随动量变化的行为: 左图为手征极限下的结果, 右图为 $m = 10\text{MeV}$ 情况下的结果。

首先, 在一组典型模型参数下 (彩虹近似, Maris-Tandy 模型, $D = 0.93\text{GeV}^2$, $\omega = 0.4\text{GeV}$), 我们得到手征极限下的夸克质量函数如图2.7的左半部分所示。我们发现, 此时夸克方程有两个手征对称性自发破缺的解 (Nambu \pm) 和一个手征对称的解 (Wigner)。在手征极限下, QCD 的拉氏量在整体手征变换下保持不变 (即左手和右手分量可做独立的 $U(1)$ 转动, 拉氏量具有手征对称性) ,

$$q(x) \rightarrow q'(x) = e^{i\gamma_5\theta}q(x), \quad \bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}'(x) = \bar{q}(x)e^{i\gamma_5\theta}. \quad (2.86)$$

为考察真空态的手性对称性, 我们对其做同样的手征变换, 则夸克传播子变为

$$S'(p) = \int d^4x e^{ip \cdot (x-y)} \langle \Omega' | q(x) \bar{q}(y) | \Omega' \rangle = -i\cancel{p}\sigma_v(p^2) + e^{2i\gamma_5\theta}\sigma_s(p^2). \quad (2.87)$$

由于手征对称性自发破缺, 当手征变换角 $\theta = \pi/2$ 时, 正负 Nambu 解映射为 $M(p^2) \rightarrow -M(p^2)$ 。此时两个解对应的真空能量简并, 物理上取与流夸克质量同号的解, 即正 Nambu 解。对于 Wigner 解, 它对应真空的非破缺实现方式, 是非物理解。显然, 当耦合强度等于零时, 夸克完全自由, 真空无动力学自发破缺。随着耦合强度增加, 正反夸克间的吸引变强, 那么在什么强度下才会形成凝聚从而导致真空的手征对称性自发破缺呢? 为此, 我们研究了夸克方程的解结构随耦合强度演化的行为, 所得结果如图2.8的左半部分所示。我们发现, 存在一个临界耦合

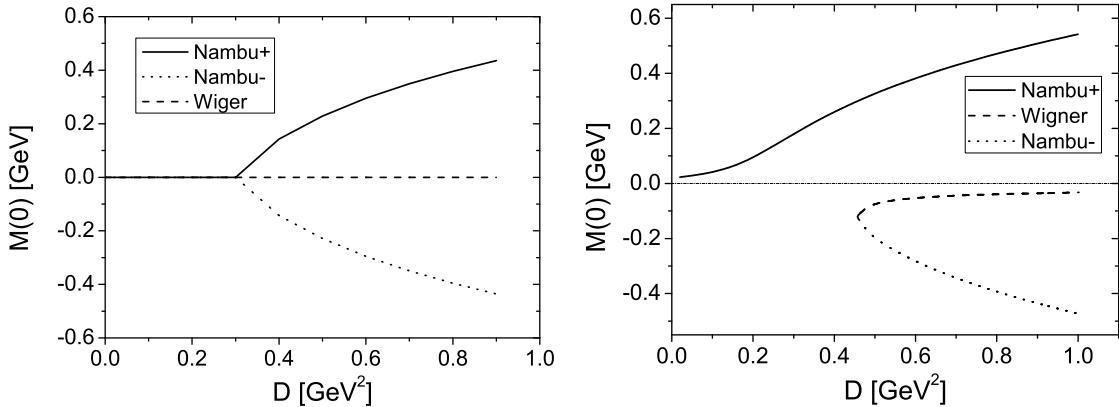


图 2.8: 裸顶点近似和 MT 模型 (取参数 $\omega = 0.4 \text{ GeV}$) 下计算得到的夸克方程的解结构随相互作用强度 D 演化的行为: 左图为手征极限下的结果, 右图为 $m = 10 \text{ MeV}$ 情况下的结果。

强度 D_c , 当 $D < D_c$ 时, 方程只有 Wigner 解, 其对应的手征凝聚 $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, 即系统无手征对称性自发破缺。因此, 可以预见, 当温度消弱相互作用到一定程度时, 系统将发生手征对称性恢复相变。

在有限流夸克质量情况下, QCD 的拉氏量不再保持手征变换下的不变性。那么, 这是否意味着方程此时只有 Nambu 解呢? 在典型耦合强度下, 我们发现轻夸克方程原来的解结构仍然存在, 如图2.7的右半部分所示。此时, 正负 Nambu 解不再满足严格的手征变换映射关系(2.87)式, 而 Wigner 解也不再严格为零。但是, 从破缺的程度上看, QCD 的拉氏量仍然具有近似的手征对称性。同手征极限类似的解结构随耦合强度的演化行为如图2.8的右半部分所示。

为了考察重味夸克的流质量效应, 我们研究了解结构随流夸克质量演化的行为, 所得结果如图2.9所示。我们发现, 随着流夸克质量增加, 正负 Nambu 解的差别亦随之增大, 并且存在一个临界质量 m_c ^[137], 当 $m > m_c$ 时, 方程只有正 Nambu 解, 系统的近似手征对称性完全丧失。该临界值可以作为手征微扰展开的收敛半径^[63,137]。

2.4.2 内禀参数空间的相图

上一小节分别讨论了耦合强度和流夸克质量对 DS 方程的解结构的影响, 并说明存在临界耦合强度和临界流夸克质量, 在其上下, DS 方程的解的性质完全不

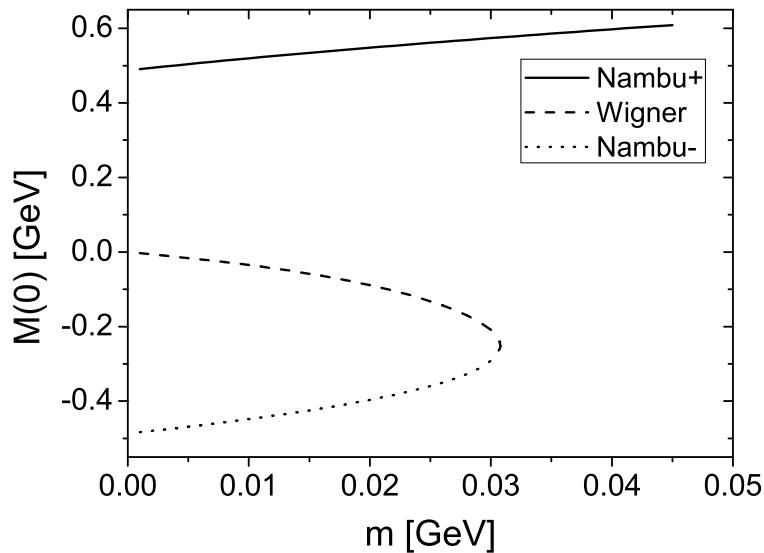


图 2.9: 裸顶点近似和 MT 模型 (取参数 $D = 0.93\text{GeV}^2$, $\omega = 0.4\text{GeV}$) 下, 计算得到的夸克方程的解结构随流夸克质量演化的行为。

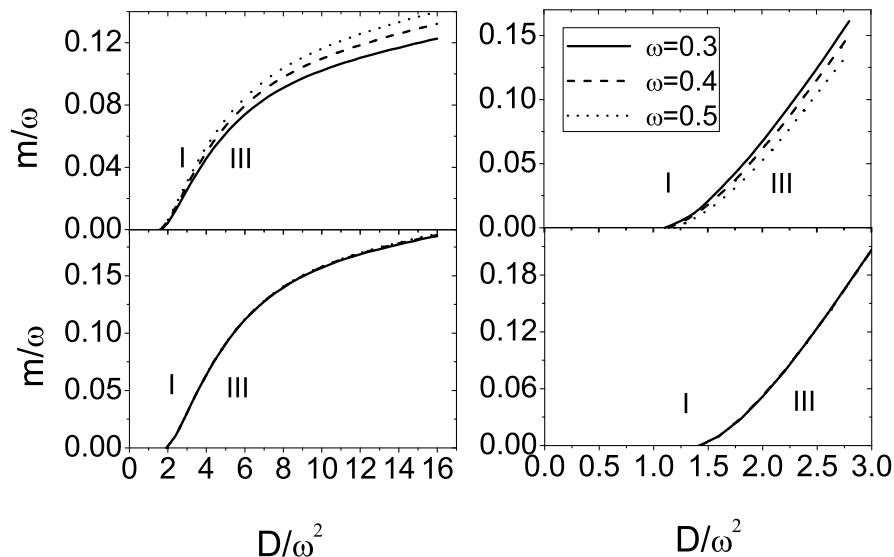


图 2.10: 利用 DS 方程得到的 QCD 在内禀参数空间中的相图, 图的左半部分和右半部分分别为裸顶点和 BC 顶点下的结果, 图的上半部分和下半部分分别为 MT 模型和去除紫外项的 MT 模型下的结果。

同，也就是发生了手征相变。在本小节，我们在不同胶子模型（ Maris-Tandy 模型和去除紫外项的 Maris-Tandy 模型）和夸克胶子顶点（裸顶点和 BC 顶点）下讨论 $D-m$ 平面的手征相变相图，所得结果如图2.10所示。图中标记 I 的区域为仅有一个解（在手征极限下，该解为手征对称的 Wigner 解；在超越手征极限下，该解为手征对称性的硬破缺为主导的 Nambu 解），图中标记 III 的区域同时存在三个解（正负 Nambu 解和 Wigner 解）。定性地，比较图2.10的各子图，我们可以得到与模型无关的结果：在临界流夸克质量之下，手征对称性动力学破缺确实源自于相互作用强度，但是在临界流夸克质量之上，手征对称性硬破缺占主导，我们可以近似地采用静态势模型来描述体系的性质。定量地，由图可知，去除紫外项的 Maris-Tandy 模型给出的相图可以严格按相互作用宽度 ω 做无量纲化；在相同破缺程度下（在 $D_{\text{Bare}} \sim 2D_{\text{BC}}$ 时，二者给出的手征凝聚相等），BC 顶点下的临界流夸克质量大于裸顶点模型下的临界质量，而且在大耦合强度下表现得更为明显。

2.5 本章小结

本章我们首先推导了 DS 方程的一般形式，然后给出了夸克方程和介子方程的具体形式。第三节中，我们详细讨论了胶子模型和截断方案的构造。本章最后，我们讨论了手征对称性自发破缺和色禁闭在 DS 方程下的实现，以及内禀参数空间中的 QCD 相图。这为以后利用 DS 方程方法研究强相互作用体系的相结构和相的性质提供了参考和指导。

第三章 现实胶子模型与零温零密下的 介子性质

由前两章的讨论可知，在早期宇宙到现实宇宙的演化过程中，温度逐渐降低，相应地发生手征对称性自发破缺和色禁闭相变，而低温低密的现实宇宙中的物质正是处于手征对称性破缺和色禁闭的相，即强子相。为了利用 QCD 的 DS 方程方法研究 QCD 相变和早期宇宙强相互作用物质的演化，我们需要构造胶子模型和截断方案，而构造胶子模型和截断方案通常依赖于强子性质的研究。首先，从夸克和胶子的基本动力学理解强子的性质是理解手征对称性破缺和色禁闭发生机制的基础，因而也是理解 QCD 相变和宇宙演化细节的基础。事实上，我们的模型构造正是以描述零温零密的强子性质为前提。其次，QCD 作为描述强相互作用的正确理论，必须能够回答：什么样的物质可能存在？它们的构成如何？基本理论面临的这些挑战，也是目前诸多实验项目关心的问题，例如，北京谱仪、欧洲核子中心的 COMPASS 探测器、美国的 Jefferson 实验室、日本的质子加速器和德国 GSI 的 PANDA 探测器等等。再者，早期宇宙强相互作用物质的演化过程在极端相对论性重离子对撞实验中得以重现，而对撞核心的反应过程是根据观测到的末态强子重构的，因此强子的性质和相变的观测信号密不可分，是理论联系实验的重要一环。总之，强子性质的研究意义重大而深远。

目前对强子性质的研究包括其质量谱、电磁形状因子（Form Factor）、内部价夸克（部分子）分布函数（PDF）、强衰变和轻子衰变性质以及新强子态（例如反常态和混杂态）的性质等^[36]。理论方案有格点 QCD^[82,83]、DS 方程方法^[73,74,75]、手征微扰论^[62,63,138]、QCD 求和规则^[85,86] 和组分夸克模型^[139] 等。其中，DS 方程方法，由于能够体现 DCSB 和色禁闭，正在成为研究强子性质的强有力工具。大量计算表明，彩虹梯子近似已能较好地描述 $M < 1\text{GeV}$ 的基态介子质量谱、衰

变性质和电磁形状因子等性质^[140,141,142]。但是，对于 $M \in [1, 2]\text{GeV}$ 的基态、激发态和反常态介子，彩虹梯子近似还存在严重不足。最近发展的超越彩虹梯子近似的截断方案^[123,126,127,143,144] 以及重子的三体束缚态方程（Faddeev 方程）的研究^[105,107,132] 已初见成效，并有望统一描述 $M < 2\text{GeV}$ 的轻强子谱。

另一方面，随着 DS 方程方法的发展，现实的胶子模型已能用于实际计算。目前求解夸克、胶子与鬼场耦合的 DS 方程^[108,109] 和格点 QCD 模拟计算得到的结果均表明^[77,110,111]，胶子存在某种质量标度，并具有与夸克类似的跑动质量函数，其具体跑动行为如图3.1所示。回顾已有模型，应用最广泛的 Maris-Tandy 模型（见2.3节）的胶子着衣函数是红外消失的，显然不具有图示的红外定常行为。那么对胶子的新认识会如何影响介子的性质？这是我们迫切需要回答的问题。因此，在本章中我们先构建红外定常的胶子着衣函数模型，然后在彩虹梯子近似下，研究新胶子模型下的基态、激发态和反常态介子的一些性质。

3.1 胶子质量函数和 QCD 跑动耦合常数

对于(2.36)式中的胶子着衣函数，若将其表示为类似(2.28a)式的形式

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{Z(k^2)}{k^2 + m_g^2(k^2)}, \quad (3.1)$$

其中， $Z(k^2)$ 和 $m_g(k^2)$ 分别为胶子的波函数重整化因子和质量函数，则在一圈近似下，我们有

$$\mathcal{D}(k^2) \propto \frac{1}{k^2} \left(\ln \frac{k^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)^{-\gamma}, \quad (3.2)$$

其中， γ 为胶子反常量纲。基于此微扰极限，我们可以将 $Z(k^2)$ 和 $m_g(k^2)$ 参数化为如下形式：

$$Z(k^2) = z_0 \left(\ln \frac{k^2 + r M_g^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)^{-\gamma}, \quad m_g^2(k^2) = \frac{M_g^4}{k^2 + M_g^2}, \quad (3.3)$$

其中， r 和 γ 为拟合参数， M_g 为胶子质量标度。这种参数化方案可以很好地拟合格点 QCD 模拟计算所得的数据^[77]，如图3.1所示，其中典型的胶子质量标度为：

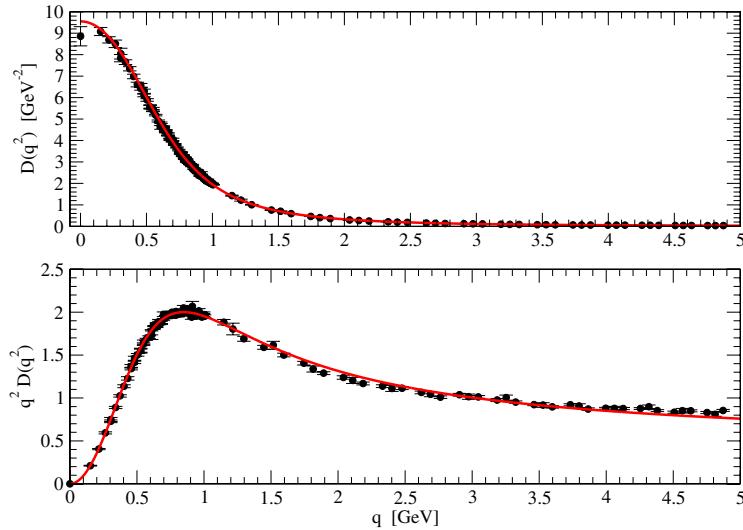


图 3.1: 格点 QCD 模拟计算得到的胶子着衣函数和参数化的胶子着衣函数随动量跑动的行为 (取自文献^[77])。

$$M_g = 672 \text{ MeV}.$$

为使求解夸克方程和介子方程时所用的胶子着衣函数能够反映新近认识到的特征, 我们构建一个胶子着衣函数模型^[78], 其表述如(2.45)式。由我们提出的模型(2.45)式和(2.46)式可以提取出胶子质量函数和 QCD 跑动耦合常数, 其结果如图3.2所示。相应的胶子质量标度随相互作用宽度 ω 的增加而增大: $\omega = 0.5 \text{ GeV}$ 时, $M_g = 0.67 \text{ GeV}$; $\omega = 0.6 \text{ GeV}$ 时, $M_g = 0.81 \text{ GeV}$ 。在我们的参数空间 $\omega \in [0.4, 0.6] \text{ GeV}$ 内, 相应的 M_g 与格点 QCD 模拟计算的结果相近^[77]。QCD 跑动耦合常数为动量的单调减函数, 其红外标度随 ω 的增加而压低: $\omega = 0.5 \text{ GeV}$ 时, $\alpha_{RL}(0)/\pi = 15$, $\alpha_{RL}(M_g^2)/\pi = 3.8$; $\omega = 0.6 \text{ GeV}$ 时, $\alpha_{RL}(0)/\pi = 9$, $\alpha_{RL}(M_g^2)/\pi = 2.2$ 。我们注意到, α_{RL} 的红外标度明显大于格点 QCD 模拟计算的结果。这是因为, 在彩虹梯子近似下, 为了保证 DCSB, 我们需要等效地提高耦合强度以弥补顶点缺失的相互作用。在超越彩虹梯子近似的截断方案中, 跑动耦合常数则可压低到格点 QCD 模拟计算所得结果的水平^[123,127], 但是净相互作用仍然与彩虹梯子近似下的相近。因而跑动耦合常数的问题不会干扰我们讨论胶子质量标度对介子性质影响的行为。

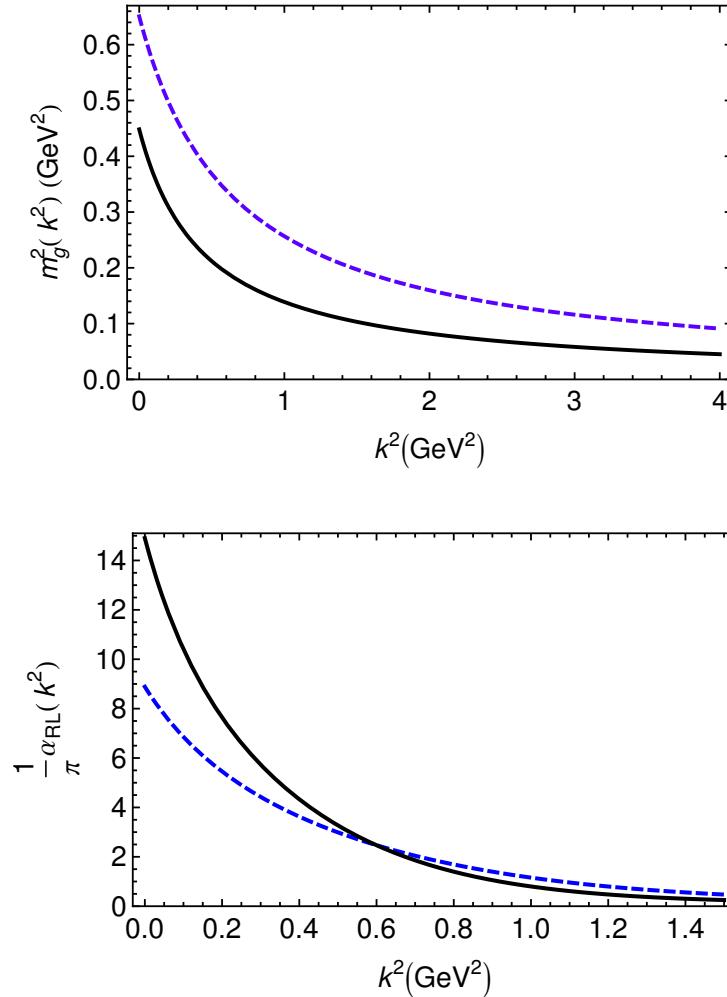


图 3.2: 从我们提出的模型中提取出的胶子质量函数 (上) 和 QCD 跑动耦合常数 (下) 随动量跑动的行为, 实线对应 $\omega = 0.5 \text{ GeV}$, 虚线对应 $\omega = 0.6 \text{ GeV}$ 。

3.2 Bethe-Salpeter 振幅和实验观测量

在上一节和2.3节中, 我们讨论了胶子模型、介子方程截断方案以及 BS 振幅的归一化条件。本节主要介绍物理 BS 振幅和实验观测量的联系, 涉及轻衰变过程、强衰变过程和电磁形状因子。首先, 介子的轻衰变过程如图3.3 (上) 所示: 介子通过正反夸克耦合到 W 玻色子, 然后放出轻子和中微子。轻衰变宽度可表示为

$$\Gamma(X \rightarrow l + \nu_l) = \frac{G_F^2}{8\pi} f_X^2 |V_{fg}|^2 M_X m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{M_X^2}\right)^2, \quad (3.4)$$

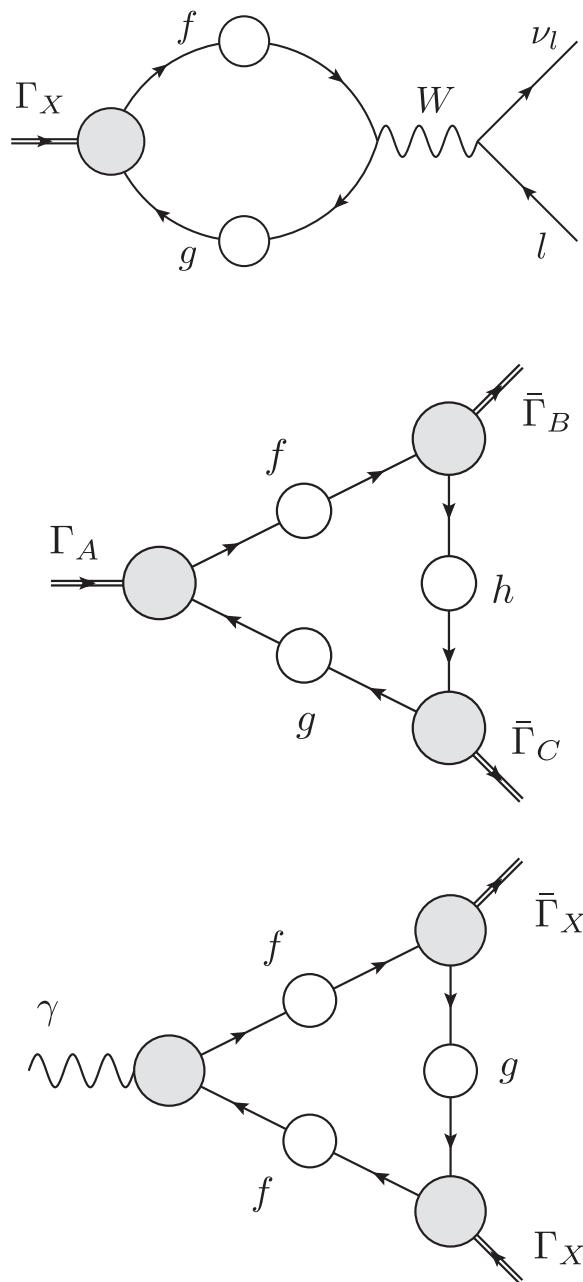


图 3.3: 介子的轻衰变过程 (上)、强衰变过程 (中) 和电磁形状因子 (下) 的费曼图表示, 其中空心圆圈表示完全的夸克传播子, 实心圆圈表示完全的夸克-介子顶点或者完全的夸克-光子顶点。

其中, M_X 为介子质量, m_l 为轻子质量, G_F 为费米子耦合强度, V_{fg} 为介子中组分夸克的 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵元, f_X 为轻衰变常数。于是, 质标、标量和矢量介子的 f_X 分别表示为

$$f_{0^-} P_\mu = Z_2 \operatorname{tr} \int_k^\Lambda i\gamma_5 \gamma_\mu S_f(k_+) \Gamma_{0^-}(k, P) S_g(k_-), \quad (3.5)$$

$$f_{0^+} P_\mu = Z_2 \operatorname{tr} \int_k^\Lambda i\gamma_\mu S_f(k_+) \Gamma_{0^+}(k, P) S_g(k_-), \quad (3.6)$$

$$f_{1^-} M_{1^-} = \frac{1}{3} Z_2 \operatorname{tr} \int_k^\Lambda \gamma_\mu S_f(k_+) \Gamma_{1^-}^\mu(k, P) S_g(k_-). \quad (3.7)$$

由式(2.58)和(2.59)可知, BS 振幅和相应的顶点在质壳上有如下关系

$$\Gamma_{5\mu}(k, P) \xrightarrow{P^2 \rightarrow -M^2} \frac{f_{0^-} P_\mu}{P^2 + M^2} \Gamma_{0^-}(k, P), \quad (3.8)$$

$$\Gamma_5(k, P) \xrightarrow{P^2 \rightarrow -M^2} \frac{\rho_{0^-}}{P^2 + M^2} \Gamma_{0^-}(k, P), \quad (3.9)$$

其中, ρ_{0^-} 可类似 f_{0^-} 由 BS 振幅表示为

$$\rho_{0^-} = -Z_4 \operatorname{tr} \int_k^\Lambda i\gamma_5 S_f(k_+) \Gamma_{0^-}(k, P) S_g(k_-). \quad (3.10)$$

由轴矢量 WT 恒等式(2.57), 我们立即得到

$$f_{0^-}^2 M_{0^-}^2 = (f_{0^-} \rho_{0^-})(m_f + m_g). \quad (3.11)$$

对于标量介子, 我们可以定义

$$\rho_{0^+} = -Z_4 \operatorname{tr} \int_k^\Lambda S_f(k_+) \Gamma_{0^+}(k, P) S_g(k_-), \quad (3.12)$$

并由矢量 WT 恒等式(2.51)得到

$$f_{0^+}^2 M_{0^+}^2 = -(f_{0^+} \rho_{0^+})(m_f - m_g). \quad (3.13)$$

类比流代数的 Gell-Mann–Oakes–Renner 关系^[145], $f_{0^-}^2 M_{0^-}^2 = -\langle \bar{q}q \rangle^0 (m_f + m_g)$, 可以定义介子中的夸克凝聚为 $f_{0^\pm} \rho_{0^\pm}$ ^[146,147], 并且在手征极限下, 介子中的夸克凝聚

严格地等于通常的手征夸克凝聚，即 $f_{0^-}\rho_{0^-} = -\langle \bar{q}q \rangle^0$ 。

介子衰变到两介子末态的强衰变过程， $A \rightarrow B + C$ ，实际上是组分夸克间的多体散射过程。玻恩近似可将多体散射问题约化为两体散射问题的叠加，即将相互作用势表示为 $V = \sum_{i < j} V_{ij}$ 。但是，对于强相互作用体系，一方面，势的语言不再适用；另一方面，高阶玻恩近似无法处理非微扰过程。在 1950 年，Chew 提出的脉冲近似^[148] 正是为了克服玻恩近似的困难，并在强相互作用的 S 矩阵理论中扮演着重要角色。在脉冲近似下， $A \rightarrow B + C$ 的费曼图如图3.3（中）所示^[101,149]。例如， $\sigma \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的衰变宽度为

$$\Gamma_{\sigma\pi\pi} = \frac{3}{2} \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2}{16\pi} \frac{\sqrt{M_\sigma^2 - 4M_\pi^2}}{M_\sigma^2}, \quad (3.14)$$

其中， $g_{\sigma\pi\pi}$ 为 σ 介子和 π 介子的耦合强度

$$g_{\sigma\pi\pi} = \sqrt{2} N_c \int_k^\Lambda \text{tr}[\Gamma_\sigma(q, Q) S(k + P_1) \Gamma_\pi(k, P_1) S(k) \Gamma_\pi(k, P_2) S(k - P_2)], \quad (3.15)$$

$q = k + \frac{P_1 - P_2}{2}$, $P_1 + P_2 = Q$, 质壳条件表示为, $P_1^2 = P_2^2 = -m_\pi^2$, $Q^2 = -m_\sigma^2$ 。在质心系中， σ 处于静止，而 π^\pm 动量大小相等方向相反。

介子电磁形状因子描述光子和组分夸克的耦合。在脉冲近似下，电磁形状因子的费曼图如图3.3（下）所示，其中夸克光子顶点由矢量顶点的非齐次 BS 方程给出^[135,133,150]。例如，类似强衰变过程，我们可以得到 π 的电磁形状因子为

$$F_\pi(Q^2) P_\mu = N_c \int_k^\Lambda \text{tr}[i\Gamma_\mu(q, Q) S(k + P_1) \Gamma_\pi(k, P_1) S(k) \Gamma_\pi(k, P_2) S(k - P_2)], \quad (3.16)$$

其中， $q = k + P$, $P_1 = P - \frac{Q}{2}$, $P_2 = -(P + \frac{Q}{2})$ 。若将矢量 WT 恒等式(2.51)的微分形式

$$i\Gamma_\mu(q, Q = 0) = \frac{\partial S^{-1}(q)}{\partial q_\mu} = \frac{\partial S^{-1}(k + P)}{\partial P_\mu}, \quad (3.17)$$

代入上式，并对比 BS 振幅的流守恒归一化条件式(2.73)，我们可以得到电磁形状因子满足的恒等式： $F_\pi(Q^2 = 0) = 1$ 。

3.3 基态、激发态和反常态介子性质

在前两节中，我们分别讨论了体现胶子质量标度的相互作用模型，以及归一化的 BS 振幅和观测量的联系。本节将具体求解介子的 BS 方程并分析基态、激发态和反常态介子的性质。注意，介子的 BS 方程式(2.29)依赖于复平面夸克传播子，具体求解方法见附录C.1，介子方程的矩阵求解方法见附录C.2。

3.3.1 基态介子的性质

在求解过程中，通过拟合 π 介子和 K 介子的质量， $M_\pi \approx 0.138\text{GeV}$ ， $M_K \approx 0.496\text{GeV}$ ，我们可以确定重整化点处的流夸克质量， $m_{u=d}^\zeta = 3.4\text{MeV}$ ， $m_s^\zeta = 82\text{MeV}$ （重整化点为 $\zeta = 19\text{GeV}$ ）。由重整化群不变的质量与流夸克质量的关系， $\hat{m}(\zeta_0) = m^\zeta (\ln \zeta_0 / \Lambda_{\text{QCD}})^{\gamma_m}$ ，可得， $\hat{m}_{u,d} = 6\text{MeV}$ ， $\hat{m}_s = 146\text{MeV}$ 。计算得到的基态赝标、标量和矢量介子的质量和衰变常数等结果如表3.1所示。由表知，当 $D\omega = (0.8\text{GeV})^3$ ，且 $\omega \in [0.4, 0.6]\text{GeV}$ 时，基态介子性质不敏感于相互作用宽度（或胶子质量标度），并且定量地符合实验数据。另外，轻衰变常数的恒等式(3.11)和(3.13)亦很好地满足。这表明，在彩虹梯子近似下，利用不同形式的胶子着衣函数模型都可以得到与实验测量结果符合得很好的基态介子性质。

3.3.2 激发态和反常态介子的质量谱

除基态介子性质外，我们还计算了 $J = 0, 1$ 的激发态和反常态介子性质。这里的激发态指具有相同 J^{PC} 量子数的径向激发态，反常态指夸克模型中不允许的反常宇称态，例如，假设正反夸克对有轨道角动量 L 和自旋 S ，则 J^{PC} 量子数可表示为： $|L - S| \leq J \leq L + S$ ； $P = (-1)^{L+1}$ ， $C = (-1)^{L+S}$ ，于是反常态有 0^{--} 、 0^{+-} 和 1^{-+} 等。为了考察质量谱对相互作用宽度 ω （或胶子质量标度 M_g ）的依赖性，我们分别用 $M(\omega) = \omega(c_0 + c_1\omega)$ 和 $M(\omega) = \text{常量}$ 去拟合介子质量，然后计算相对拟合误差的标准方差比 $\sigma_{20} = \sigma_2/\sigma_0$ ，则 $\sigma_{20} \ll 1$ 意味着强敏感， $\sigma_{20} \approx 1$ 为弱敏感。计算得到的 $J = 0, 1$ 的激发态和反常态介子质量谱和参数依赖性如表3.2所示。表中数据都是采用 $D\omega = (1.1\text{GeV})^3$ 的结果。采用较大的 $D\omega$ 值主要基于下述两方面考虑：一方面夸克传播子存在复平面奇点问题（见附录C.1），放大 $D\omega$ 可以覆盖更多介子态；另一方面 π 介子云效应可以将核心质量拉回到实验值，因而

表 3.1: 利用胶子着衣函数的 Maris-Tandy 模型和我们提出的红外定常模型计算得到的基态介子的一些性质 (其中带 * 号的为拟合量) 及其与实验测量结果的比较 (所有带量纲的量都以 GeV 为量纲)。

模型	MT 模型	红外定常模型				实验值 ^[58]
		0.8	0.8	0.8	0.8	
$(D\omega)^{1/3}$	0.72	0.8	0.8	0.8	0.8	-
ω	0.4	0.4	0.5	0.6	0.7	-
$m_{u,d}^\zeta$	0.0037	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	-
m_s^ζ	0.084	0.082	0.082	0.082	0.082	-
$A(0)$	1.58	2.07	1.70	1.38	1.16	-
$M(0)$	0.50	0.62	0.52	0.42	0.29	-
M_π	0.138*	0.139*	0.134	0.136	0.139	0.138
f_π	0.093*	0.094*	0.093	0.090	0.081	0.092
$\rho_\pi^{1/2}$	0.48	0.49	0.49	0.49	0.48	-
M_K	0.496*	0.496*	0.495	0.497	0.503	0.496
f_K	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.113
$\rho_K^{1/2}$	0.54	0.55	0.55	0.55	0.55	-
M_ρ	0.74	0.76	0.74	0.72	0.67	0.777
f_ρ	0.15	0.14	0.15	0.14	0.12	0.153
M_ϕ	1.07	1.09	1.08	1.07	1.05	1.020
f_ϕ	0.18	0.19	0.19	0.19	0.18	0.168
M_σ	0.67	0.67	0.65	0.59	0.46	-
$\rho_\sigma^{1/2}$	0.52	0.53	0.53	0.51	0.48	-

放大 $D\omega$ 不影响对物理的认识。

很显然, 相比于基态, 激发态和反常态介子的性质更敏感地依赖于相互作用宽度 ω , 亦即胶子的质量标度和相互作用细节: 随着 ω 增加, 长程相互作用变弱 (如图3.2所示), 组分夸克间束缚能减小, 束缚态质量增大。但是, 激发态和反常态介子的质量总体偏轻, 并且 M_{π_1} 和 M_{ρ_1} 的相对大小敏感地依赖于 ω : 虽然 $\omega = 0.4\text{GeV}$, $M_{\pi_1} < M_{\rho_1}$, 但当 ω 增大时, M_{π_1} 很快大于 M_{ρ_1} 。这两点结论均有悖于实验事实, 并且已有的其它胶子模型也有这样的问题。因此, 这种缺陷主要应该是彩虹梯子近似本身的困难, 而非主要来源于胶子模型。

3.3.3 激发态和反常态介子的结构

为进一步了解激发态和反常态介子的结构, 澄清彩虹梯子近似存在的不足, 从而为发展超越彩虹梯子近似的截断方案提供参考, 我们分析了(2.33)式中洛伦兹不

表 3.2: 利用我们提出的红外定常模型, 在不同相互作用宽度 ω (或胶子质量标度 M_g) 下, 计算得到的激发态和反常态介子质量及其参数依赖性 (取 $D\omega = (1.1 \text{ GeV})^3$, 所有带量纲的量都以 GeV 为量纲, 脚标“1”表示第一激发态)。

ω	0.4	0.5	0.6	σ_{20}	实验值 ^[58]
M_π	0.214	0.155	0.147	0.83	0.138
$M_{0^{--}}$	0.814	0.940	1.053	0.03	-
M_{π_1}	1.119	1.283	1.411	0.02	1.3
M_σ	0.970	0.923	0.913	1.25	$0.4 \sim 1.2$
$M_{0^{+-}}$	1.186	1.252	1.323	0.34	-
M_{σ_1}	1.358	1.489	1.575	0.14	$1.2 \sim 1.5$
M_ρ	1.088	1.046	1.029	1.22	0.77
$M_{1^{-+}}$	1.234	1.277	1.318	0.60	1.35
M_{ρ_1}	1.253	1.260	1.303	0.03	1.45

变的振幅 F_X^i 对其质量的贡献。首先, 对于赝标介子, 我们依次移除 $F_{0^-}^2$ 、 $F_{0^-}^3$ 和 $F_{0^-}^4$ 并分析基态、激发态和反常态质量的变化, 所得结果如图3.4 (上) 所示。由此图知, 对于所有态, $F_{0^-}^1$ 和 $F_{0^-}^2$ 占主要贡献, 而 $F_{0^-}^3$ 和 $F_{0^-}^4$ 可以忽略。由相应的洛伦兹结构式(2.31)可知, 后两项的贡献与夸克非零轨道角动量相关。这意味着 π 介子的第一径向激发态和反常态的轨道角动量 $L = 0$, 即处于 1S_0 态。此时, 轨道自旋耦合效应可以忽略。

由图3.4 (中) 所示的标量介子的质量相对移动的计算结果知, 对于标量介子, $F_{0^+}^1$ 、 $F_{0^+}^3$ 和 $F_{0^+}^4$ 起主要作用。因后两项的贡献与夸克非零轨道角动量相关, 各态轨道角动量 $L = 1$, 即处于 3P_0 态。此时, 轨道自旋耦合效应会显著影响各态性质, 这也正是彩虹梯子近似对 σ 介子描述存在不足的原因。

对于矢量介子, 由图3.4 (下) 知, $F_{1^-}^1$ 、 $F_{1^-}^4$ 和 $F_{1^-}^5$ 起主要作用。由于后两项的贡献与 P 波成分相关, 因此各态的角动量贡献不可忽略。对于第一激发态 ρ_1 , $F_{1^-}^2$ 的贡献亦很重要, 而 $F_{1^-}^2$ 与 D 波成分相关, 这意味着 ρ_1 的轨道自旋耦合效应非常重要。因此, 相对于 π_1 , 轨道自旋排斥效应会显著提高 ρ_1 的质量, 并使得 $M_{\pi_1} > M_{\rho_1}$ 。

3.3.4 激发态和反常态介子的 BS 振幅

如3.2节所述, 介子实验观测量可由相应的 BS 振幅得到。在本小节中, 我们分析 BS 振幅随动量的跑动行为和弱衰变常数对胶子质量标度的依赖行为。计算

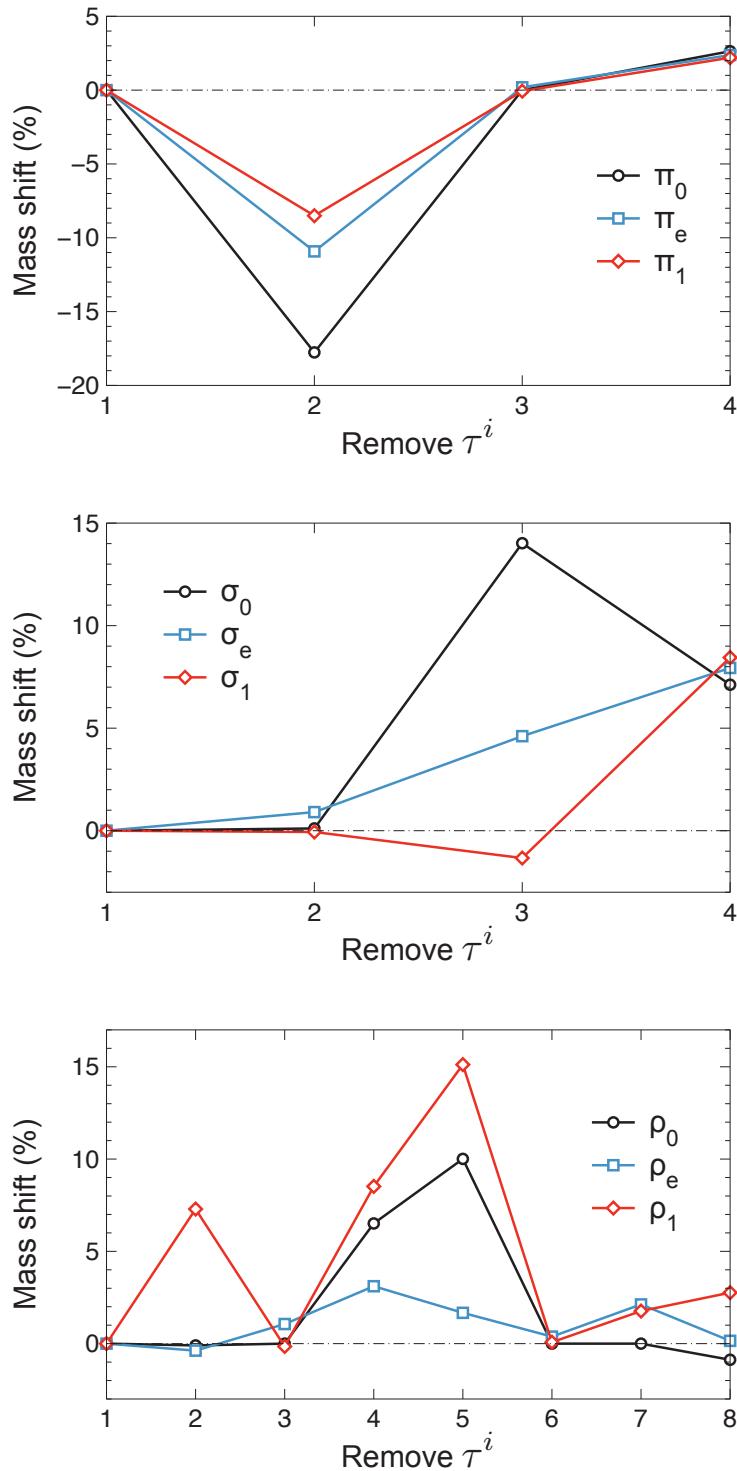


图 3.4: 移除洛伦兹不变的振幅 $F_X^{i>1}$ 后, 质标(上)、标量(中)和矢量(下)介子态的质量的相对变化, $D\omega = (1.1 \text{GeV})^3$, $\omega = 0.6 \text{GeV}$ (其中, “0”为基态, “e”为反常态, “1”为第一激发态)。

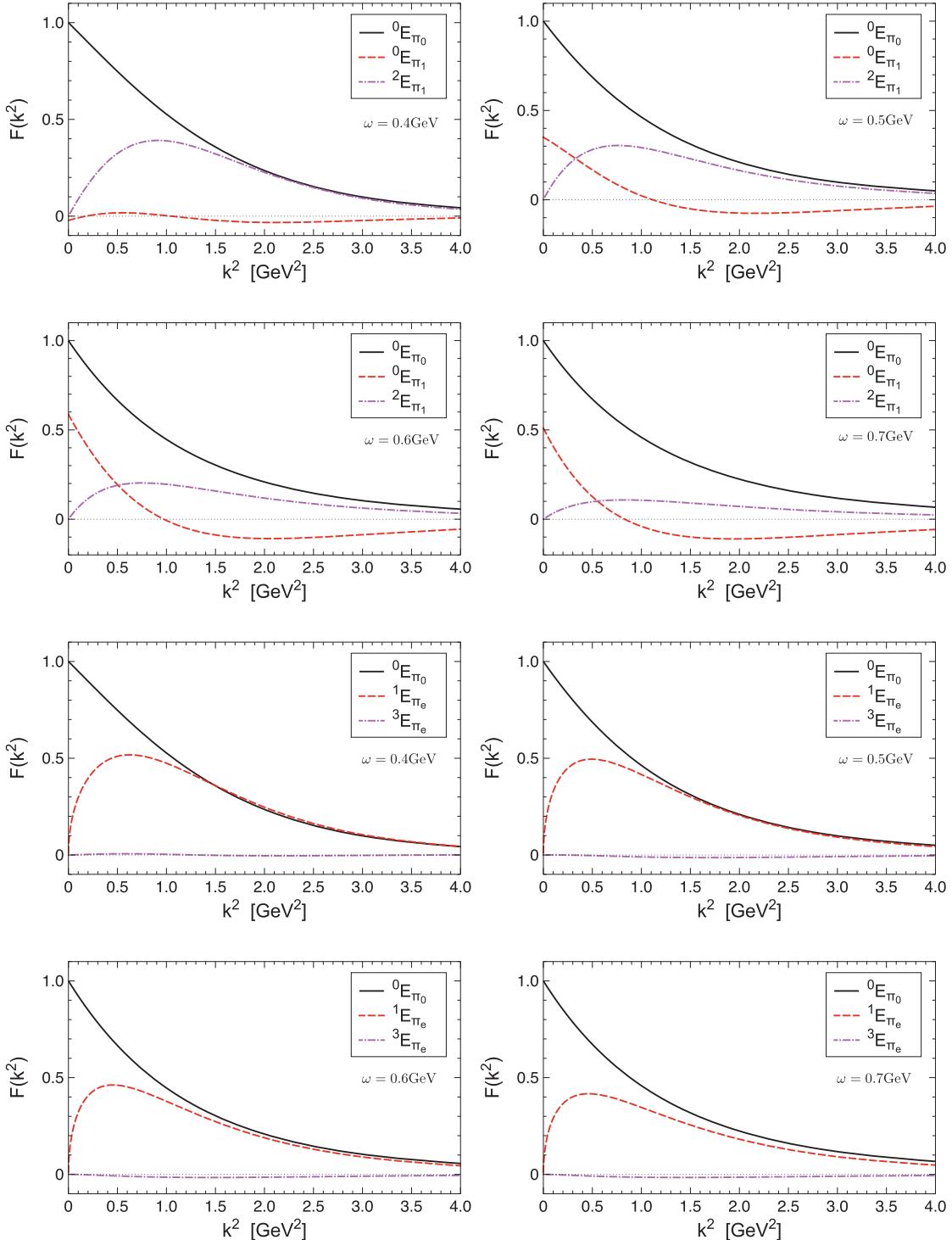


图 3.5: 质标介子的 BS 振幅的 Chebyshev 投影随动量跑动的行为，上半部分四个子图为基态与激发态对比，下半部分四个子图为基态与反常态对比。所有振幅均按 ${}^0E_{\pi_0}(k^2 = 0) = 1$ 归一，参数取为 $D\omega = (1.1 \text{ GeV})^3$ 。

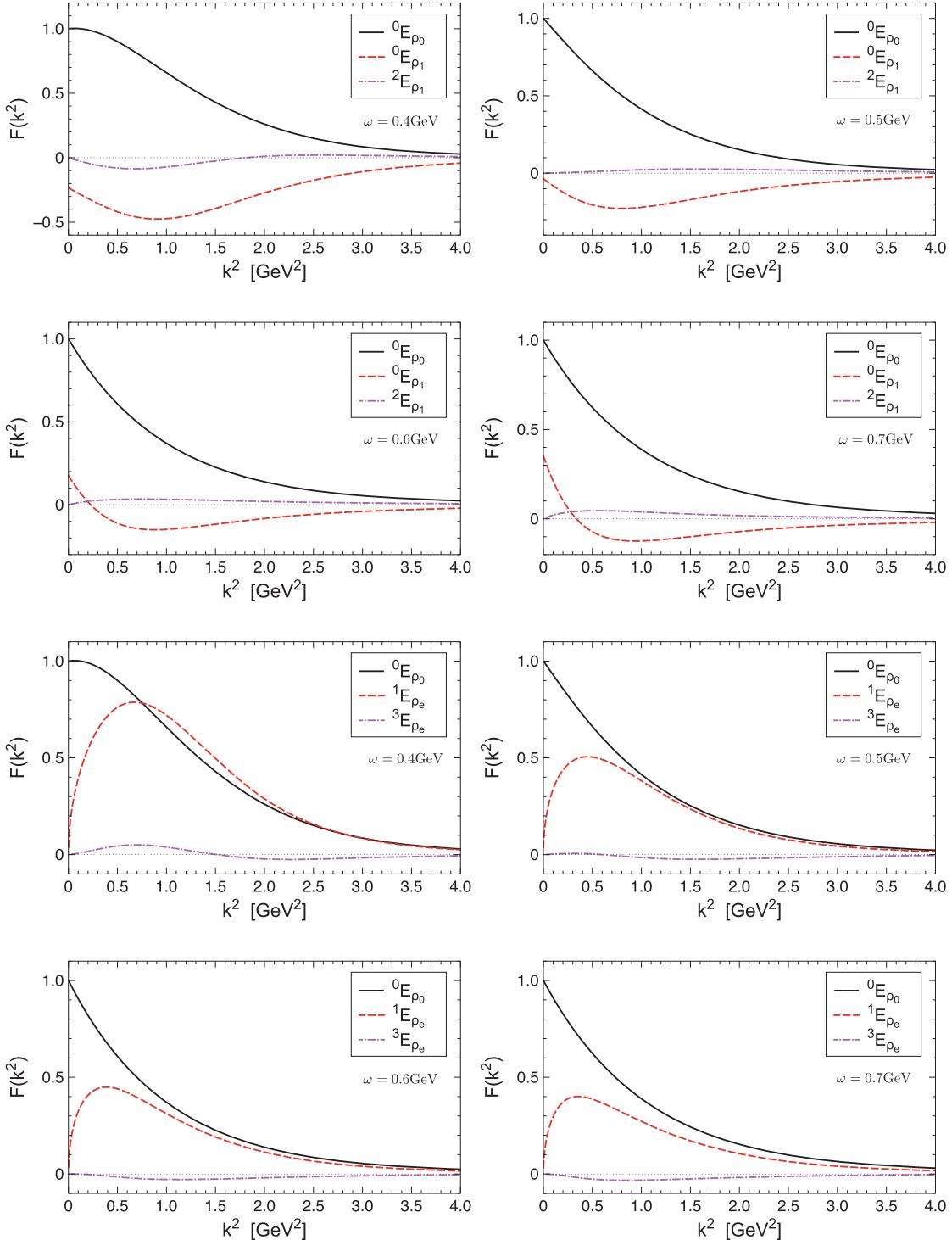


图 3.6: 矢量介子的 BS 振幅的 Chebyshev 投影随动量跑动的行为，上半部分四个子图为基态与激发态对比，下半部分四个子图为基态与反常态对比。所有振幅均按 ${}^0E_{\rho_0}(k^2 = 0) = 1$ 归一，参数取为 $D\omega = (1.1 \text{ GeV})^3$ 。

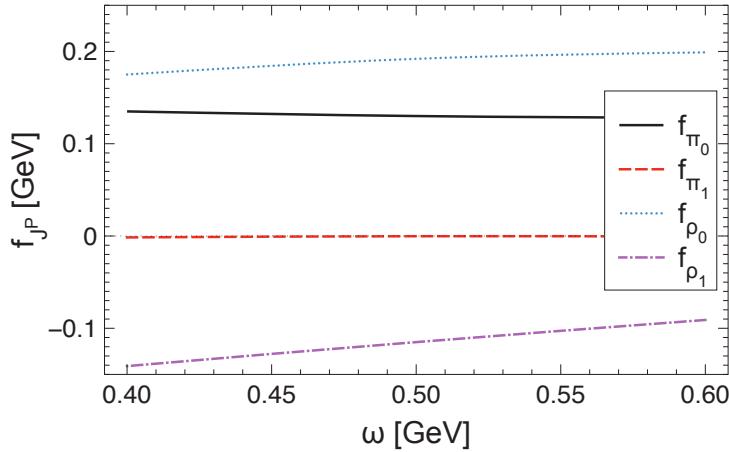


图 3.7: 计算得到的赝标和矢量介子的轻衰变常数对相互作用宽度 ω (或胶子质量标度 M_g) 的依赖行为, 其中参数取为 $D\omega = (1.1 \text{ GeV})^3$ 。

得到的赝标和矢量介子的 BS 振幅如图3.5和3.6所示, 其中 Chebyshev 投影定义为

$${}^n E_X(k^2) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} U_n(z) E_X(k^2, z\sqrt{k^2 P^2}, P^2), \quad (3.18)$$

$E_X = F_X^1$ 为第一个洛伦兹不变振幅, $U_n(z)$ 为第二类 Chebyshev 多项式, 在 C 宇称变换下, $z \rightarrow -z$ 。容易看出, 质标和矢量介子的基态和激发态只有偶数阶 Chebyshev 投影, 而反常态只有奇数阶 Chebyshev 投影。整体来说, 激发态和反常态的 BS 振幅比基态更敏感地依赖于相互作用宽度 ω (或胶子质量标度 M_g)。具体地, π_1 的 BS 振幅随 ω 变化的行为如图3.5上半部分四个子图所示。我们发现, 在 $\omega = 0.4 \text{ GeV}$ 时, ${}^0 E_{\pi_1}$ 远小于 ${}^2 E_{\pi_1}$, 在 k^2 轴上有两个节点, 并且 π_1 的电磁半径可能小于 π 。这有悖于第一径向激发态的一般特征: ${}^0 E_X$ 只有一个节点, 并且电磁半径大于基态的电磁半径。于是, 我们可以认为 $\omega \lesssim 0.5 \text{ GeV}$ 是非物理参数。 ρ_1 的 BS 振幅随 ω 变化的行为与 π_1 的行为相似, 如图3.6上半部分四个子图所示。但是, 只有当 $\omega \gtrsim 0.6 \text{ GeV}$ 时, 才能得到自然的 BS 振幅。

计算得到的反常态 π_e 和 ρ_e 的 BS 振幅的动量依赖行为随 ω 变化的特征分别如图3.5和3.6下半部分四个子图所示。由此图知, 在 $\omega \gtrsim 0.5 \text{ GeV}$ 时, π_e 的一阶 BS 振幅 ${}^1 E_{\pi_e}$ 小于 ${}^0 E_{\pi_e}$, 三阶 BS 振幅 ${}^3 E_{\pi_e}$ 负定; 在 $\omega \gtrsim 0.6 \text{ GeV}$ 时, ρ_e 的一阶 BS 振幅 ${}^1 E_{\rho_e}$ 小于 ${}^0 E_{\rho_e}$, 三阶 BS 振幅 ${}^3 E_{\rho_e}$ 负定。由于这是首次在彩虹梯子近似下研

究反常态的 BS 振幅，因而该特征的截断方案依赖性和可观测效应需要进一步讨论。这将有助于我们对反常态物理性质的理解。

若约定各态的 BS 振幅在零动量处为正，则赝标和矢量介子的轻衰变常数对 ω 的依赖行为如图3.7所示：基态的轻衰变常数 f_π 和 f_ρ 为正，而第一径向激发态 f_{π_1} 和 f_{ρ_1} 为负。我们注意到，轻衰变常数对 ω 依赖较弱； $f_{\pi_1} \approx -1\text{MeV}$ ，其接近零的行为符合轴矢量 WT 恒等式的要求^[151]，并与 $\tau \rightarrow \pi_1 \nu_\tau$ 的实验数据^[152] 和格点 QCD 模拟计算所得的结果^[153] 一致。由此可以推知，虽然彩虹梯子近似在描述激发态和反常态质量谱时存在自身缺陷，但其 BS 振幅仍然包含了模型无关的成分，因而具有潜在的应用价值。

3.4 本章小结

本章主要研究了零温零密极限下的介子的性质。根据最新求解夸克、胶子与鬼场耦合的 DS 方程和格点 QCD 模拟计算所得的结果，我们提出了一种新的相互作用模型。由该模型能够提取出合理的胶子质量标度和单调的 QCD 跑动耦合常数。利用该模型，我们在彩虹梯子近似下求解了介子的 BS 方程，并分析了轻介子的基态、激发态和反常态性质。我们确认了彩虹梯子近似存在的两点不足：激发态和反常态的质量偏小；赝标和矢量介子第一径向激发态的质量的相对大小与实验结果不符。

通过讨论洛伦兹不变的 BS 振幅对介子质量的贡献，我们定性地了解了基态、激发态和反常态介子的角动量-自旋结构。这有助于澄清彩虹梯子近似的不足，也有助于发展超越彩虹梯子近似的截断方案。另一方面，我们还详细分析了各介子态的 BS 振幅的特征和弱衰变常数。这使我们意识到，对称性保持（满足轴矢量 WT 恒等式）的彩虹梯子近似仍然有能力给出一些模型和截断无关的强子可观测性质。

由这些结果可以推知，在利用 DS 方程方法研究 QCD 相变（即早期宇宙强相互作用物质的演化行为）时，虽然由彩虹梯子近似可以得到一些定性的可供参考的结果，但是为得到现实的结果，我们需要在超越彩虹梯子近似下进行讨论。

第四章 有限温度和有限密度下的 QCD 相图

在温度 (T) 和化学势 (μ) 平面, 强相互作用体系具有丰富的相和复杂的相结构。对 QCD 相图的研究是当今基础物理理论和实验的热点问题, 也是探讨宇宙物质起源及其演化等重大长远问题的重要环节。其中, 人们最感兴趣的是手征对称性恢复相变和退禁闭相变。除相边界曲线外, 临界终点 (CEP) 的存在性及其位置问题目前更是广受关注^[31,154,155,156]。在手征极限下, CEP 指一级手征相变和二级手征相变的相边界线的交点, 而在超越手性极限下, 则是指一级手征相变的相边界曲线与连续过渡区 (二级相变退化为连续过渡, 常称为 crossover) 的交点^[14]。在目前 RHIC 所能覆盖的能量区域内, 还没有得到存在 CEP 的明确的实验信号。但是, RHIC 的椭圆流数据分析估计 CEP 的位置大约为, $\mu^E/T_c \gtrsim 1.0$, $T^E/T_c \lesssim 1.0$ ^[157] (T_c 为零化学势下的手征相变的临界温度, μ^E 和 T^E 分别为 CEP 的化学势和温度)。未来的 FAIR 实验能够覆盖更大的化学势区域, 也许能够提供更多关于 CEP 的信息。

理论上, 多种方法被用来研究 CEP。格点 QCD 作为第一性原理出发的方法, 其结果往往很受关注。对于零化学势有限温度情况, 格点 QCD 是良好定义的, 但是由于化学势带来的符号问题, 格点 QCD 在有限化学势情况下失效。此时, 其结果需要借助外推手段, 例如, 首先引入虚化学势 (此时没有符号问题, $\mu^2 < 0$), 然后通过在 $\mu^2 = 0$ 处做 μ^2 的泰勒展开得到实化学势 ($\mu^2 > 0$) 下的结果。格点 QCD^[158,159,160,161,162,163] 给出的典型 CEP 位置为 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (1.0 - 1.4, 0.93)$ 。事实上, 由于技术困难, 格点 QCD 尚不能完成现实物理参数下的模拟, 因此也就不能完全确定 CEP 的存在性^[164]。至于模型方法, Nambu–Jona-Lasinio (NJL) 模型^[165,166] 给出 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (1.7, 0.4)$; 体现禁闭效应的 Polyakov-NJL

(pNJL) 模型^[167,168,169,170,171,172] 给出 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (1.5 - 1.8, 0.3 - 0.8)$; 手征夸克模型^[173] 给出 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (2.0, 0.4)$; Polyakov 圈提高的手征夸克模型^[174] 给出 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (0.9, 0.8)$; 三味线性 σ 模型和 Polyakov 圈提高的三味线性 σ 模型^[175] 分别给出 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (1.1, 0.5)$ 和 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (0.7, 0.9)$ 。我们可以看出, 相比于格点 QCD, 各模型给出的 CEP 的位置普遍远离温度轴, 即 μ^E/T^E 较大, CEP 的位置在实验能够扫描的能区之外。DS 方程方法也已被用于研究 CEP 问题。目前, 在最简单截断方案下, 人们给出了两种极端相互作用模型的结果: 定常模型(2.41)式^[176] 给出 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (0, 1)$; 可分离相互作用模型 (对于夸克胶子顶点, 出射夸克动量和入射夸克动量无关, 并因子化成各自的函数)^[177] 给出 $(\mu^E, T^E)/T_c \sim (1.09, 0.78)$ 。前已述及, DS 方程方法是几乎唯一的既具有手征对称性自发破缺性质又具有色禁闭特征的非微扰 QCD 的连续场论方法, 是当今可以采用的能够真实地研究 QCD 相变和早期宇宙强相互作用物质演化行为的连续场论方法。因此, 在 DS 方程框架下, 采用更加现实的截断方案和胶子模型研究 QCD 相图以及 CEP 的存在性和位置问题是十分迫切和必需的工作, 并且将现有的不同理论方法纳入统一框架下分析它们给出相去甚远的 CEP 位置的内在原因也是非常重要的课题。

4.1 有限温度和有限密度下的夸克方程

在上一章, 我们用路径积分的方法推导了 DS 方程。为了利用 DS 方程研究有限温度和有限密度 (化学势) 情况下强相互作用体系的相变, 我们需要将 QCD 的 DS 方程推广到有限温度和有限密度情况。首先, 我们需要建立路径积分和量子统计之间的联系。以标量场为例, 平衡态巨正则系综的配分函数为^[178]

$$Z(\beta, \mu) = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}(\vec{x}) \langle \tilde{\phi}(\vec{x}) | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \tilde{\phi}(\vec{x}) \rangle, \quad (4.1)$$

其中, 积分遍历态的完备组。如令 $H' = \hat{H} - \mu \hat{N}$, 考虑闵氏空间的时间演化算符

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}(\vec{x}) | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \tilde{\phi}(\vec{x}) \rangle &= \langle \tilde{\phi}(\vec{x}) | e^{-i(-i\beta)H'} | \tilde{\phi}(\vec{x}) \rangle \\ &= \mathcal{N} \int_{\substack{\phi(-i\beta, \vec{x}) = \tilde{\phi}(\vec{x}) \\ \phi(0, \vec{x}) = \tilde{\phi}(\vec{x})}} \mathcal{D}\phi(x) e^{i \int_0^{-i\beta} d(-i\tau) \int d^3x \mathcal{L}'(-i\tau, \vec{x})}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mu \hat{N}$ 。将上式写成欧氏空间的形式, 则为

$$\langle \tilde{\phi}(\vec{x}) | e^{-\beta(\hat{H}-\mu \hat{N})} | \tilde{\phi}(\vec{x}) \rangle = \mathcal{N} \int_{\phi(0,\vec{x})=\tilde{\phi}(\vec{x})}^{\phi(\beta,\vec{x})=\tilde{\phi}(\vec{x})} \mathcal{D}\phi(x) e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}'_E(\tau,\vec{x})}, \quad (4.3)$$

此时, $\mathcal{L}'_E = \mathcal{L}_E - \mu N$ 。于是, 我们得到配分函数的表达式为

$$\begin{aligned} Z(\beta, \mu) &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\tilde{\phi}(\vec{x}) \int_{\phi(0,\vec{x})=\tilde{\phi}(\vec{x})}^{\phi(\beta,\vec{x})=\tilde{\phi}(\vec{x})} \mathcal{D}\phi(x) e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}'_E(\tau,\vec{x})} \\ &= \mathcal{N} \int_{\phi(0,\vec{x})=\phi(\beta,\vec{x})} \mathcal{D}\phi(x) e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}'_E(\tau,\vec{x})}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

参照通常路径积分量子化程序, 我们定义量子统计的生成泛函为

$$Z(\beta, \mu; j) = \mathcal{N} \int_{\phi(0,\vec{x})=\phi(\beta,\vec{x})} \mathcal{D}\phi(x) e^{-S'_E(\beta) + \int_0^\beta j(\tau) \phi(\tau, \vec{x}) d\tau}. \quad (4.5)$$

有限温度和有限密度下的虚时格林函数则可表达为

$$\begin{aligned} \langle T[\phi(\tau_1, \vec{x}) \dots \phi(\tau_n, \vec{x})] \rangle &= \frac{1}{Z(\beta, \mu)} \left. \frac{\delta^n Z(\beta, \mu; j)}{\delta j(\tau_1) \dots \delta j(\tau_n)} \right|_{j=0} \\ &= \frac{1}{Z(\beta, \mu)} \int \mathcal{D}\phi(\tau, \vec{x}) \phi(\tau_1, \vec{x}) \dots \phi(\tau_n, \vec{x}) e^{-S'_E(\beta)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

显然, 上述生成泛函和格林函数的形式与前述的(2.4)式和(2.7)式相同。这意味着, 第二章推导的 DS 方程可直接推广到有限温度和有限密度情况。下面我们详细给出有限温度和有限密度下的夸克方程。

考虑路径积分的边界条件, 夸克的虚时传播子满足

$$\langle T[q(\beta, \vec{x}) \bar{q}(\tau, \vec{x})] \rangle = -\langle T[q(0, \vec{x}) \bar{q}(\tau, \vec{x})] \rangle, \quad (4.7)$$

即虚时关联函数有反周期边界条件

$$D(\tau - \beta, \vec{x}) = -D(\tau, \vec{x}), \quad \tau \in [0, \beta]. \quad (4.8)$$

对上式做离散傅里叶变换，动量空间中的传播子可以写为

$$S(i\omega_n, \vec{p}) = \int_0^\beta d\tau \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i\omega_n \tau + i\vec{p} \cdot \vec{x}} D(\tau, \vec{x}), \quad (4.9)$$

其中， $\omega_n = (2n+1)\pi T$, $n \in \mathbb{Z}$ 为费米子的 Matsubara 频率。在有限化学势下，拉氏量改写为

$$\mathcal{L}'_E(\tau, \vec{x}) = \mathcal{L}_E(\tau, \vec{x}) - \mu q^\dagger(\tau, \vec{x})q(\tau, \vec{x}). \quad (4.10)$$

如果做如下微分算符的变换， $(\partial_\tau, \vec{\nabla}) \rightarrow (\partial_\tau - \mu, \vec{\nabla})$ ，则原始拉氏量保持形式不变。相应的 Matsubara 频率替换为， $\tilde{\omega}_n \rightarrow \omega_n + i\mu$ 。另外，由于温度和化学势显式地破缺了 $O(4)$ 对称性，具体地有对称性（破缺）群链 $O(4) \rightarrow O(3)$ ，则夸克传播子的洛伦兹结构应改写为

$$S(i\tilde{\omega}_n, \vec{p}) = [i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} A(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) + i\gamma_4 \tilde{\omega}_n C(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) + B(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2)]^{-1}, \quad (4.11)$$

或者

$$S(i\tilde{\omega}_n, \vec{p}) = -i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \sigma_A(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) - i\gamma_4 \tilde{\omega}_n \sigma_C(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) + \sigma_B(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2). \quad (4.12)$$

于是，(2.27)式所述的夸克方程应改写为

$$\begin{aligned} S^{-1}(i\tilde{\omega}_n, \vec{p}) &= i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4 \tilde{\omega}_n + m + T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g^2 D_{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q}, \Omega_{nl}; T, \mu) \\ &\times \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(i\tilde{\omega}_l, \vec{p}) \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_\nu(\vec{p}, \tilde{\omega}_n, \vec{q}, \tilde{\omega}_l; T, \mu), \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中， $\Omega_{nl} = \omega_n - \omega_l$ 为胶子的 Matsubara 频率。

同样因为 $O(4)$ 对称性破缺，胶子的张量结构也需要相应地改写为横向和纵向两部分，即

$$g^2 D_{\mu\nu}(\vec{k}, \Omega_{nl}; T, \mu) = P_{\mu\nu}^T D_T(\vec{k}, \Omega_{nl}; T, \mu) + P_{\mu\nu}^L D_L(\vec{k}, \Omega_{nl}; T, \mu), \quad (4.14)$$

其中, $P_{\mu\nu}^{T/L}$ 分别为横向和纵向投影算符

$$P_{\mu\nu}^T(k_\Omega) = \begin{cases} 0, & \mu \text{ and/or } \nu = 4, \\ \delta_{ij} - \frac{\vec{k}_i \vec{k}_j}{\vec{k}^2}, & \mu, \nu = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (4.15)$$

并且 $P_{\mu\nu}^T + P_{\mu\nu}^L = \delta_{\mu\nu} - k_\Omega^\mu k_\Omega^\nu / k_\Omega^2$, 其中 $k_\Omega := (\Omega_{nl}, \vec{k})$ 。原则上, 由于温度和化学势效应, 胶子横向和纵向分量并不相等, 即 $D_T \neq D_L$ 。但是, 在我们关心的温度和化学势区域, $D_T = D_L := D_0$ 仍然不失为一个较好的近似^[179]。对于 D_0 , 我们可以取2.3节所述的各种形式。例如, 我们取

$$D_0(s) = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D s e^{-s/\omega^2}, \quad s = \vec{k}^2 + \Omega_{nl}^2. \quad (4.16)$$

上式忽略了 Maris-Tandy 模型中的紫外项, 使得理论超可重整, 这不仅可以简化计算过程, 而且可以免去重整化手续。在此, 我们可以放心地忽略紫外项, 原因是手征对称性自发破缺完全由红外相互作用决定。

在 $O(3)$ 对称性下, 夸克胶子顶点分解为横向和纵向两部分, $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^T + \Gamma_\nu^L$, 其中 T, L 分别表示为垂直和平行于第四维的投影。如果采用彩虹近似(2.56)式, 则其横向和纵向分量均不受温度和化学势影响, 故裸顶点近似仍可整体地写为^[125]

$$\Gamma_\nu(\vec{p}, \tilde{\omega}_n, \vec{q}, \tilde{\omega}_l; T, \mu) = \gamma_\nu. \quad (4.17)$$

当然, 裸顶点会给计算带来诸多便利, 并且可以在一定程度上给出主要物理图象。但是, 如上一章所述, 为了研究现实体系, 我们需要讨论超越彩虹近似的情况, 并且在超越彩虹近似下, 我们还必须考虑着衣顶点受温度和化学势影响的效应。显然, 这是在接近真实 QCD 的情况下, 定量研究现实体系所必须面对的困难。由于规范对称性并未破缺, 2.3节推导的 WT 恒等式仍然成立, 故矢量 WT 恒等式(2.51)导致的 BC 顶点(2.52)式可直接推广到有限温度和有限密度情况^[118, 180, 181, 80]

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu(\vec{q}, \tilde{\omega}_l, \vec{p}, \tilde{\omega}_n; T, \mu) &= (\tilde{p}_n + \tilde{q}_l)_\nu \left[\frac{\gamma_\alpha^T(\tilde{p}_n + \tilde{q}_l)_\alpha}{2} \Delta_A + \frac{\gamma_\alpha^L(\tilde{p}_n + \tilde{q}_l)_\alpha}{2} \Delta_C - i \Delta_B \right] \\ &\quad + \gamma_\nu^T \Sigma_A + \gamma_\nu^L \Sigma_C, \end{aligned} \quad (4.18)$$

其中, $\Sigma_A, \Sigma_C, \Delta_A, \Delta_C$ 和 Δ_B 与零温零密情况下的定义一致, 动量 $\tilde{p}_n = (\vec{p}, \omega_n + i\mu)$, $\tilde{q}_l = (\vec{q}, \omega_l + i\mu)$, 投影 γ 矩阵 $\gamma_\nu^T = \gamma_\nu - u_\nu \gamma_\alpha u_\alpha$, $\gamma_\nu^L = u_\nu \gamma_\alpha u_\alpha$, $u = (0, 0, 0, 1)$ 。为了对比裸顶点和 BC 顶点下的结果, 我们可以自然地定义它们的有效相互作用强度分别为 $\hat{D} = D$ 和 $\hat{D} = DA(0, 0)$ 。

至此, 我们推导了夸克方程在有限温度和有限密度下的具体形式, 构造了现实的胶子模型和截断方案, 于是, 我们能够求解有限温度和有限密度下的夸克方程。但是为了分析相变行为, 我们还需要构造相应的相变判据。这是我们研究手征相变的相图, 并确定 CEP 的存在性及其位置的必要步骤。

4.2 传统的有效势判据与相应的手征相变相图

相变通常伴随着对称性的破缺或者恢复。经典 Landau 相变理论用序参量 (η) 来表征对称性的破缺程度: 对应对称性破缺的相的序参量非零, 反之则为零。热力学势 (Ω) 表达为序参量的函数, 通常作为相变的判据: 稳定相表现为热力学势的整体极小点, 亚稳相表现为局域极小点。例如, 假设序参量在相变临界点附近是一个小量, 将热力学势写成对称点 ($\eta = 0$) 附近的泰勒展开形式, 则

$$\Omega(T, \mu; \eta) = \Omega_0(T, \mu) + a(T, \mu)\eta + b(T, \mu)\eta^2 + \dots, \quad \frac{\partial \Omega(T, \mu; \eta)}{\partial \eta} = 0, \quad (4.19)$$

其中, 序参量和展开系数 a, b 等为温度和化学势的函数, 分析它们的行为可以得到相变点和相变级次等信息。在确定温度和化学势下, Landau 理论的“基本自由度”只有序参量, 它可以是宏观的相对体积、宏观的相对密度、宏观的磁化率或者真实的有序度等。

DS 方程方法研究的是格林函数的运动方程, 其“基本自由度”事实上是各阶格林函数。因此, 在 DS 方程框架下研究相变, 我们的直接想法是将序参量和热力学势推广为各阶格林函数的泛函。由于截断方案的引入, 低阶格林函数的运动方程封闭, 使得我们可以将序参量和热力学势构造成低阶格林函数的泛函。针对上一节得到的有限温度和有限密度下的夸克方程, 我们希望能够进一步将低阶格林函数限定为夸克传播子。如2.4节所述, 手征凝聚 $\langle \bar{q}q \rangle$ 可作为手征对称性自发破缺的

序参量。在有限温度和有限密度情况下, (2.81)式推广为

$$-\langle \bar{q}q \rangle^0 = N_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{tr}_D \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} S(i\tilde{\omega}_n, \vec{p}). \quad (4.20)$$

虽然上式仅在手征极限下成立, 但是对于轻夸克体系手征极限是合理的近似。

为了构造有效热力学势, 我们在普通生成泛函(2.4)式中引入复合非定域算符^[124,182]

$$\begin{aligned} Z[J, K] = e^{-W[J, K]} &= \int [\mathcal{D}\phi] \exp \left[-S[\phi] + \int d^4 x J(x) \phi(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \phi(x) K(x, y) \phi(y) \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

其中, $K(x, y)$ 为复合算符 $\phi(x)\phi(y)$ 的外源。通过双 Legendre 变换, 我们得到推广的有效作用量为

$$\begin{aligned} \Gamma[\tilde{\phi}, \tilde{G}] &= W[J, K] - \int d^4 x J(x) \tilde{\phi}(x) - \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \tilde{\phi}(x) K(x, y) \tilde{\phi}(y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \tilde{G}(x, y) K(x, y), \end{aligned} \quad (4.22)$$

其中, $\tilde{\phi}(x) = \langle \phi(x) \rangle_J$ 和 $\tilde{G}(x, y) = \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle_K$ 分别为场 $\phi(x)$ 和复合场 $\phi(x)\phi(y)$ 在外源下的真空期望值。相应的平均场变分为

$$\frac{\delta \Gamma[\tilde{\phi}, \tilde{G}]}{\delta \tilde{\phi}(x)} = -J(x) - \frac{1}{2} \int d^4 y K(x, y) \tilde{\phi}(y), \quad \frac{\delta \Gamma[\tilde{\phi}, \tilde{G}]}{\delta \tilde{G}(x, y)} = -\frac{1}{2} K(x, y). \quad (4.23)$$

令外源 J 和 K 为零, 我们得到如下平均场极值条件

$$\frac{\delta \Gamma[\tilde{\phi}, \tilde{G}]}{\delta \tilde{\phi}(x)} \Big|_{J, K=0} = 0, \quad \frac{\delta \Gamma[\tilde{\phi}, \tilde{G}]}{\delta \tilde{G}(x, y)} \Big|_{J, K=0} = 0, \quad (4.24)$$

其中, $\tilde{G}(x, y)|_{K=0} = \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle = G(x, y)$ 正是传播子。也就是说, 传播子必然使得有效作用量取泛函极值,

$$\frac{\delta \Gamma[G]}{\delta G(x, y)} = 0. \quad (4.25)$$

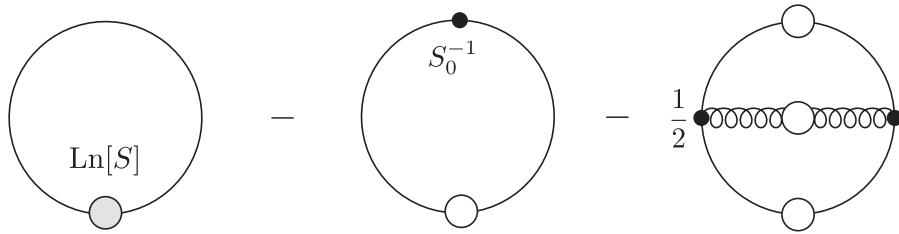


图 4.1: 裸顶点近似下的 CJT 有效作用量的真空图, 其中空心圆圈表示完全传播子, 未标注的黑点表示裸的夸克胶子顶点。

上式中, 我们已令场的无源的真空期望值为零。对于夸克传播子的有效作用量, 我们将其分解为单粒子不可约和双粒子不可约部分

$$\Gamma[S] = \text{TrLn}[S] - \text{Tr}[SS_0^{-1}] - \Gamma_2[S], \quad (4.26)$$

其中, Tr 和 Ln 均作用在泛函空间、色味空间和狄拉克空间, $\Gamma_2[S]$ 表示所有双粒子不可约真空图之和。该式称为 Cornvral-Jackiw-Tomboulis (CJT) 有效作用量^[183]。利用极值条件(4.25)式得

$$\frac{\delta\Gamma_{\text{CJT}}[S]}{\delta S} = 0 = S^{-1} - S_0^{-1} - \frac{\delta\Gamma_2[S]}{\delta S}. \quad (4.27)$$

上式即是与(2.22)式等价的夸克传播子的运动方程。显然, 夸克的自能表示为

$$\Sigma[S] = \frac{\delta\Gamma_2[S]}{\delta S}. \quad (4.28)$$

至此, 只要能显式地给出自能关于传播子的图形表示, 我们可以写出有效作用量的具体形式。在裸顶点近似下, 夸克自能表达成胶子和夸克传播子的圈积分, 于是, 我们有传播子的 CJT 有效作用量^[184,185]

$$\Gamma_{\text{CJT}}^0[S] = \text{TrLn}[S] - \text{Tr}[SS_0^{-1}] - \frac{1}{2}\text{Tr}[\Sigma S], \quad (4.29)$$

其真空图如图4.1所示。考虑到模型化的胶子传播子不依赖夸克传播子, 上式事实上忽略了胶子对夸克的变分, 将夸克自能表达为夸克传播子的齐次函数。

等价地,通过引入辅助场 (AF),我们可以构造关于夸克自能的有效作用量^[184,185]

$$\Gamma_{\text{AF}}^0[\Sigma] = \text{TrLn}[S_0^{-1} + \Sigma]^{-1} + \frac{1}{2}\text{Tr}[\Sigma S] = \text{TrLn}[S] + \frac{1}{2}\text{Tr}[\Sigma S]. \quad (4.30)$$

在坐标空间下, 以 AF 表达的有效作用量可以写为

$$\Gamma_{\text{AF}}^0[\Sigma] = -N_f N_c \int d^4x \int d^4y \left\{ \ln \det S^{-1}(x, y) - \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{1} - S_0^{-1}(x, y)S(x, y)] \right\}. \quad (4.31)$$

考虑到平衡态的时空平移不变性, 对上式做关于 $x - y$ 的傅里叶变换得

$$\Gamma_{\text{AF}}^0[\Sigma] = -N_f N_c \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \ln \det S^{-1}(p) - \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{1} - S_0^{-1}(p)S(p)] \right\}. \quad (4.32)$$

于是, 以 AF 表达的有效势可以表示为

$$\Omega_{\text{AF}}^0[\Sigma] = \frac{\Gamma_{\text{AF}}^0[\Sigma]}{V} = -N_f N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \ln \det S^{-1}(p) - \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{1} - S_0^{-1}(p)S(p)] \right\}. \quad (4.33)$$

显然, 以 AF 表达的有效势是传播子的泛函, 并且在夸克方程的解下取极值, 因而正是我们所需要的推广的热力学势。由于(4.33)式存在明显的发散项, 在实际应用中, 我们通常比较相的势能差或者压强差。例如, 若存在相 N 和 W , 则两相的压强差表示为^[176,185]

$$\begin{aligned} P_N - P_W &= -(\Omega_N - \Omega_W) \\ &= 2N_f N_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln(\vec{p}^2 A^2 + \tilde{\omega}_n^2 C^2 + B^2) + \vec{p}^2 \sigma_A + \tilde{\omega}_n^2 \sigma_C \right]_W^N. \end{aligned} \quad (4.34)$$

其中 $A, B, C, \sigma_A, \sigma_C$ 为(4.11)式和(4.12)式中定义的夸克传播子的结构函数。

至此, 我们已经完成了序参量和有效势的构造, 它们都表达为夸克传播子的泛函。因此, 只需求解夸克方程(4.13)式, 并分析相应的序参量和有效势的行为, 我们就可以得到手征相变的相图和 CEP 的信息。在2.4.1小节中, 我们已知零温零密下夸克方程有对应手征对称性破缺的 Nambu 解和对应手征对称性保持的 Wigner 解。由于此时 Nambu 解才是物理解, 因此其有效势应低于 Wigner 解。显然, 温度和密度会改变解的行为和有效势的相对高低。与经典的朗道相变理论的结果对应,

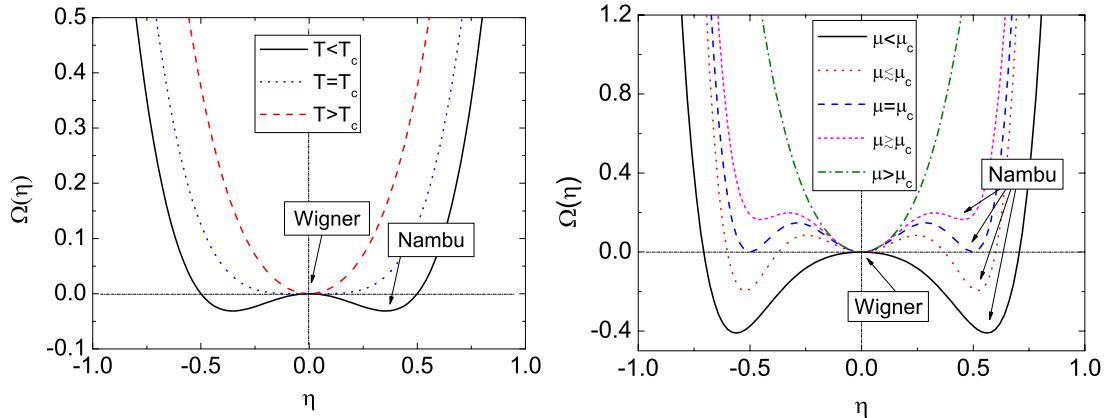


图 4.2: Landau 相变理论框架下, 二级相变(图左)和一级相变(图右)的热力学势在不同温度或密度(化学势)下的行为示意图。

二级相变和一级相变情况下系统的有效热力学势的演化行为分别如图4.2的左半部分和右半部分所示。显然, 传统的相变临界点由两相的有效热力学势相等来决定, 并且二级相变的序参量在临界点附近连续, 而一级相变的序参量在临界点附近不连续。下面, 我们根据此判据先分别讨论温度和化学势效应, 然后总结出相图。

4.2.1 温度效应

在零密有限温度情况下, 利用(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数下计算得到的夸克传播子随温度变化的行为如图4.3所示。首先, 我们发现, 在很低温度下就有 $A \neq C$, 即 $O(4)$ 对称性破缺。其次, Nambu 解的标量部分随温度升高而减小, 并在某一温度处降为零。这意味着, 夸克的动力学质量或者手征凝聚随温度升高而减小, 后者随温度演化行为如图4.4的左半部分所示。这表明, 在这组参数下, 存在一个临界点 $T_c = 133\text{MeV}$, 手征凝聚变为零, 真空的手征对称性恢复。为了确定相变是否真实发生, 我们还需要考察有效势。Nambu 相和 Wigner 相的压强差随温度的演化行为如图4.4的右半部分所示: 在零温处, Nambu 相的压强大于 Wigner 相的压强, 真空为手征对称生破缺的真空, 但是随着温度升高两相压强差逐渐减小, 在 T_c 处两相的压强差为零, 即两个相合并为一个相, 真空为手征对称性恢复的真空。与之对应的 Landau 相变理论的热力学势演化的行为如图4.2的左半部分所示。这是典型的二级相变的特征: T_c 是手征对称性恢复相变的临界温度, 手征凝聚在临界温度附近连续变为零。

另外，在袋模型框架下，如果定义袋外真空为 Nambu 真空，袋内为 Wigner 真空，则袋常数由内外真空压强差决定。当真空中压强差随温度升高而减小时，袋常数随之减小，袋半径随之增大，并且在相变临界温度下，袋常数变为零，袋半径变为无穷大，即发生夸克解禁闭相变^[186]。在这种图象下，手征对称性恢复和夸克解禁闭在相同条件下发生。

4.2.2 密度效应

在零温有限密度下，利用(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数下计算得到的夸克传播子随化学势变化的行为如图4.5所示。由图我们发现，Nambu 相存在一个临界化学势 $\mu_a = 515\text{MeV}$ ，在此之下 $A \equiv C$ ，即 $O(4)$ 对称性仍然保持。回想经典体系，化学势表示“粒子源”强度，其大小表示体系中增加一个粒子所需要的能量，从真空中激发出单粒子的最小化学势应为单粒子的静止质量。相应地，Wigner 相在 $\mu = 0^+$ 时， $A \neq C$ ，则不难理解。虽然夸克胶子体系有相似行为，但是显然的区别在于，色禁闭使得激发出的夸克必须以强子态的形式存在。至于禁闭发生的过程，目前尚无令人信服的理论解释。

在 μ_a 之下，由于真空的性质未被破坏，我们可以证明其手征凝聚保持不变^[181]。在零温有限密度下，手征凝聚的表达式(4.20)中的求和变为连续积分

$$\begin{aligned} -\langle \bar{q}q \rangle^0 &= N_c \text{tr}_D \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_4}{2\pi} S(\tilde{p}_4, \vec{p}) \\ &= N_c \text{tr}_D \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} \frac{d\tilde{p}_4}{2\pi} S(\tilde{p}_4, \vec{p}), \end{aligned} \quad (4.35)$$

如果 $\mu < \mu_a$ ，则夸克传播子在路径 $[-\infty \rightarrow +\infty]$ 和 $[-\infty + i\mu \rightarrow +\infty + i\mu]$ 围成的区域内无奇点，于是在这种情况下的手征凝聚严格等于零温零密情况下的手征凝聚的值， $\langle \bar{q}q \rangle = (-0.25 \text{ GeV})^3$ 。

虽然手征凝聚保持不变，但是 Nambu 相和 Wigner 相的有效势的相对高低却发生了变化。计算得到的零温下的压强差随化学势变化的行为如图4.6的右半部分所示。我们发现在一个临界化学势 $\mu_c = 375\text{MeV}$ ，使得两相的压强差等于零：在 μ_c 之下，Nambu 相的压强高于 Wigner 相的压强；在 μ_c 之上，反之。因此，我们可以认为， μ_c 处发生了手征对称性恢复相变。再考察相变点附近的凝聚行为，如

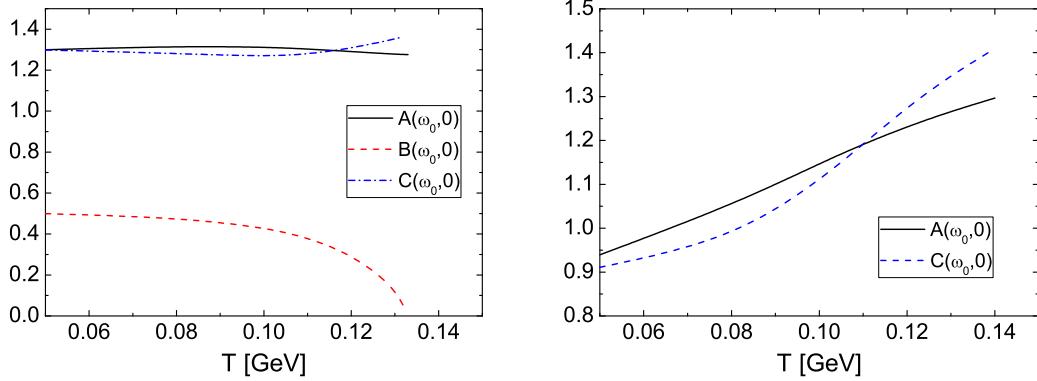


图 4.3: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的零化学势下的夸克传播子随温度变化的行为, 左边为 Nambu 解的结果, 右边为 Wigner 解的结果。

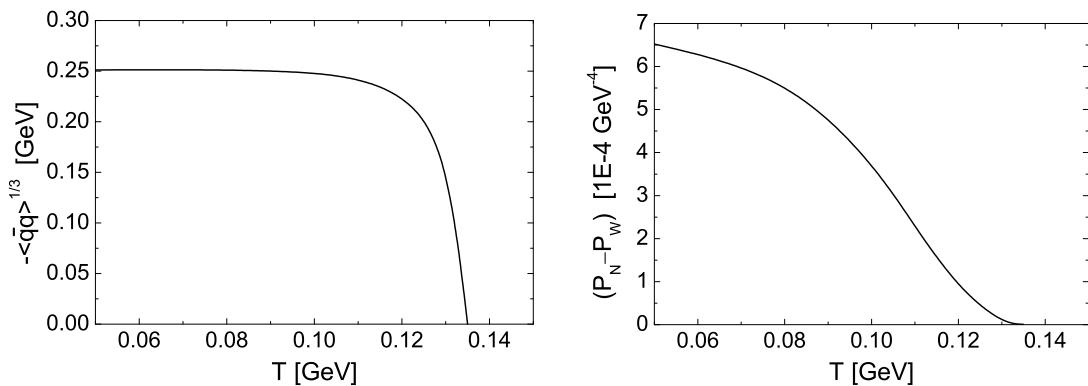


图 4.4: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的零化学势下的手征凝聚 (左) 和压强差 (右) 随温度变化的行为。

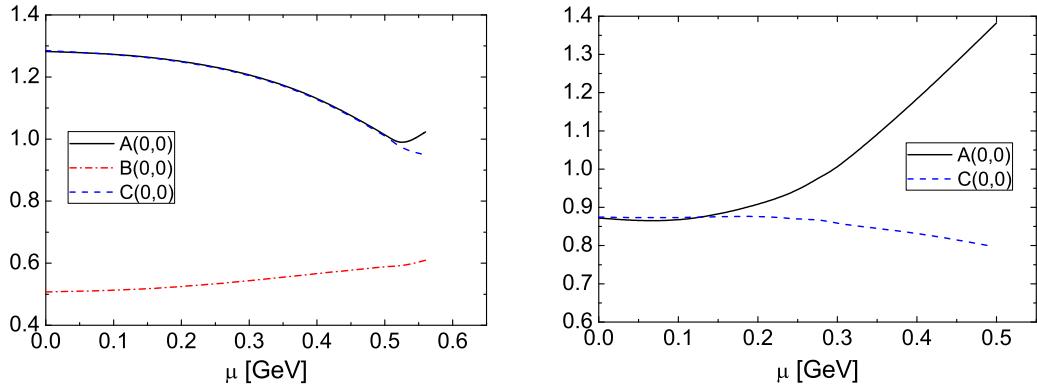


图 4.5: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的零温下的夸克传播子随夸克化学势变化的行为, 左边为 Nambu 解的结果, 右边为 Wigner 解的结果。

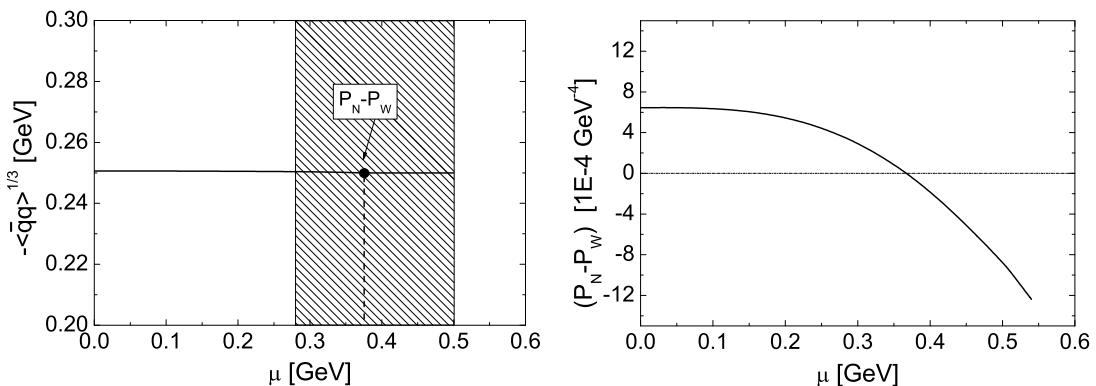


图 4.6: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的零温下的手征凝聚 (左) 和压强差 (右) 随夸克化学势演化的行为。

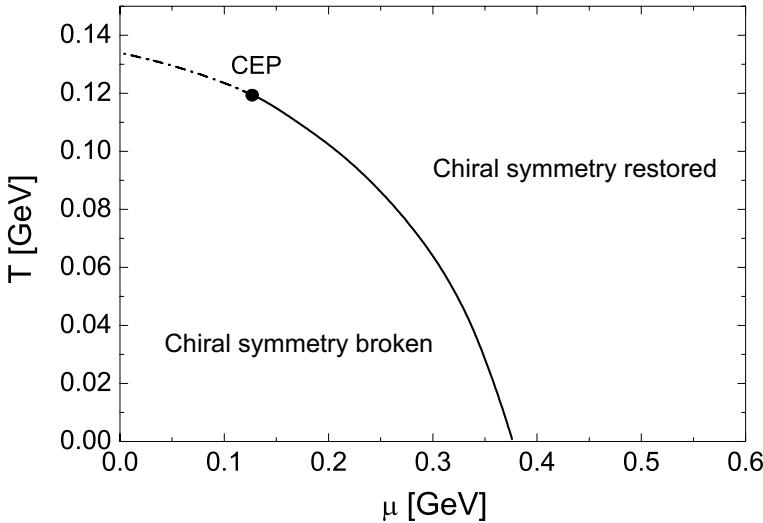


图 4.7: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下, 以有效势为判据计算得到的 T - μ 平面上手征相变的相图, 其中的实线为一级相变线, 点划线为二级相变线, 它们相交处的黑点对应 CEP 的位置。

图4.6的左半部分所示, 对应 $\mu_c = 375 \text{ MeV}$, 手征凝聚突变为零。与之对应的 Landau 相变理论的热力学势的演化行为如图4.2右半部分所示。显然, 此时的相变是不连续相变, 即一级相变。

4.2.3 相图和 CEP

综上所述, 在零密有限温度情况下, 温度驱动的手征相变是二级相变; 在零温有限化学势情况下, 化学势驱动的手征相变是一级相变。于是, 我们推测, 在温度和密度 (T - μ) 平面上, 很可能存在一级相变和二级相变边界的交点, 即临界终点 (CEP)。综合前述结果以及 $T \neq 0 \neq \mu$ 的情况下的结果, 我们得到有效势判据给出的手征极限下的 T - μ 平面上的强相互作用物质的手征相变的相图如图4.7所示。显然在典型参数下, 存在临界终点, 其位置为 $(\mu^E, T^E)/T_c = (0.98, 0.90)$, $\mu^E/T^E = 1.08$, 与 RHIC 椭圆流数据分析以及格点模拟结果一致^[157,158,159,162,160]。我们注意到, 分析有效势在夸克传播子的泛函空间的局域性质 (极大值点、极小值点或鞍点) 十分困难, 因此, 有效势判据目前尚不能给出一级相变的两相共存区。

4.3 手征磁化率判据与相应的手征相变相图

上一节中, 我们利用传统的有效势判据, 分析了 $T\text{-}\mu$ 平面的手征相变相图, 得到了合理的 CEP 位置。但是, 一方面, 即使忽略胶子传播子对夸克传播子的依赖, 目前构造有效势的方法还受制于夸克胶子顶点的具体表示。在通常的截断方案中, 通过 WT 恒等式构造的夸克胶子顶点往往没有相应的图形表示, 例如常用的 BC 顶点, 因而很难构造出有效势。这使得在超越彩虹近似下构造有效势本身变得很困难。另一方面, 类似于 Landau 相变理论, 有效势的绝对大小并不足以给出完整的相变信息, 我们还需要考察相的稳定性(分析有效势在泛函空间中的曲率): 任何物理上可以存在的(亚)稳定相必须是有效势的(局域)极小点。例如, 将有效势在 DS 方程的解的附近做展开

$$\Omega[S + \delta S] = \Omega[S] + \frac{1}{2} \int \delta S(p) \frac{\delta^2 \Omega[S]}{\delta S(p) \delta S(q)} \delta S(q) + \dots, \quad (4.36)$$

如果选择适当的变分 $\delta S(p)$ 使得第二项可正可负, 则解处于一个鞍点, 而只有在第二项正定时, 解才处于一个极小点。计算表明, 夸克方程的 Nambu 解处于 CJT 有效势的鞍点, 但是处于 AF 有效势的局域极小点^[184,187]。实际上, 这正是我们采用 AF 有效势而非 CJT 有效势作为相变判据的原因。尽管如此, 一般性地分析物理解是否处于有效势的局域极小点却十分困难。而且, 上一章的讨论表明, 为实际研究物理问题并得到可靠结果, 我们必须超越彩虹梯子近似。基于以上原因, 我们迫切需要寻找一种新的判据, 不仅能克服无法显式地构造有效势的困难, 还能有效地分析相的稳定性。本节即讨论并解决这一问题。

首先, 回忆经典铁磁系统, 我们可以分析磁化率来判断相变。铁磁系统的序参量为磁矩 M ,

$$M = \frac{\partial \Omega(M)}{\partial H}, \quad H = \frac{\partial \Omega(M)}{\partial M}, \quad (4.37)$$

其中, H 为磁场强度。磁化率表示为磁矩对磁场强度的响应,

$$\chi_M = \frac{\partial M}{\partial H} = \left[\frac{\partial H}{\partial M} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial^2 \Omega(M)}{\partial M^2} \right]^{-1}, \quad (4.38)$$

即磁化率可以表示为热力学势对序参量的二阶导数的逆。铁磁相变为连续相变，磁化率在相变点处发散。对于 QCD 系统，若将生成泛函(2.4)式改写为

$$Z[0] = \int \mathcal{D}[q, \bar{q}, A_\mu, \omega, \bar{\omega}] \exp \left\{ -S_{\chi\text{QCD}} + \int d^4x \bar{q}(x)q(x)m \right\}, \quad (4.39)$$

其中 $S_{\chi\text{QCD}}$ 表示手征极限下的 QCD 作用量，则流夸克质量 m 即是手征凝聚 $-\langle \bar{q}q \rangle(x)$ 的外源。于是，有效作用量对复合算符的变分可以表示为

$$\frac{\partial \Gamma[-\langle \bar{q}q \rangle(x)]}{\partial [-\langle \bar{q}q \rangle(x)]} = m, \quad (4.40)$$

由于热力学势 $\Omega = \Gamma/V$ ，我们得到

$$\frac{\partial \Omega(-\langle \bar{q}q \rangle)}{\partial (-\langle \bar{q}q \rangle)} = m, \quad (4.41)$$

式中已考虑了真空的时空平移不变性，消去了时空体积。于是，手征磁化率可以表示为

$$\chi_m = \frac{\partial(-\langle \bar{q}q \rangle)}{\partial m} = \left[\frac{\partial m}{\partial(-\langle \bar{q}q \rangle)} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial^2 \Omega(-\langle \bar{q}q \rangle)}{\partial(-\langle \bar{q}q \rangle)^2} \right]^{-1}. \quad (4.42)$$

上式与(4.38)式相似，也就是说，手征磁化率可以用于分析手征相变。由(4.20)式可知，在手征极限下，手征凝聚可直接表达为夸克传播子的迹。在非手征极限下，由于重整化问题，手征凝聚尚无严格的规定，但是近似地有^[188]

$$-\langle \bar{q}q \rangle \sim M(\tilde{\omega}_0, \vec{0}) \sim B(\tilde{\omega}_0, \vec{0}), \quad (4.43)$$

于是，我们有

$$\chi_m = \frac{\partial B(\tilde{\omega}_0, \vec{0})}{\partial m}. \quad (4.44)$$

由此可见，分析手征磁化率随温度和化学势的演化行为，仅需要求解夸克方程(4.13)式。因此，手征磁化率判据不需要显式地构造出热力学势，可以适用于任何超越彩虹近似的复杂顶点。在 NJL 模型中，可以显式地证明(4.42)式并展示判据的有效性^[189]。

下面我们先在彩虹近似下对比手征磁化率判据和有效势判据的结果，然后再将前者应用于 BC 顶点情况，最后我们将综合分析手征相变的相图的特征量对于相互作用细节依赖的行为，并说明已有的不同的理论方法给出不同的 CEP 位置的内在原因。

4.3.1 彩虹近似下的结果

在零密有限温度下，利用(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数下计算得到的 Nambu 相和 Wigner 相的磁化率随温度的演化行为如图4.8所示。显然，在零温零密处，Nambu 相的磁化率为正，而 Wigner 相为负，这说明前者是物理上的稳定相，夸克方程的解满足 QCD 的手征对称性自发破缺的要求。随着温度升高，两相磁化率的绝对值增大，但是仍然维持符号不变，这意味着相的稳定性没有被打破。但是，存在临界温度 T_c ，当 $T = T_c$ 时，两相磁化率均趋于发散，并且 Wigner 相磁化率改变符号，这说明相的稳定性发生了改变，Nambu 相消失而 Wigner 相成为物理上的稳定相。该图像与铁磁系统的连续相变完全一致，因此，磁化率判据给出零密有限温度下的手征相变为二级相变。与上一节利用有效势判据得到的结果比较知，利用手征磁化率判据得到的临界温度与利用有效势判据得到的结果完全相同。

在零温有限密度下，利用(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数下计算得到的 Nambu 相和 Wigner 相的磁化率随化学势的演化行为如图4.9所示。我们发现，与零密有限温度下的情况不同，在相变的临界化学势 μ_c 之前，存在一个临界化学势 $\mu_c^W = 375\text{MeV}$ ，使得 Wigner 相的磁化率发散并改变符号，于是 Wigner 相变为稳定相。在 μ_c 之上，Nambu 相的磁化率快速上升，但是不发散，并在另一个临界化学势 $\mu_c^N \approx 500\text{MeV}$ 处取极大值。于是，我们可以确定一个两相共存的区域 $\mu \in [\mu_c^W, \mu_c^N]$ 。具体地说， $\mu \in [\mu_c^W, \mu_c]$ 的情况下，Nambu 相是稳定相，Wigner 相是亚稳相； $\mu \in [\mu_c, \mu_c^N]$ 的情况下，反之。这是典型的一级相变特征。按照 Landau 相变理论，一级相变的热力学势在相消失时应该为鞍点，即二阶导数为零，磁化率发散。但是，考虑到(4.44)式对凝聚做了近似，我们可以认为严格的手征磁化率仍然会在相消失处发散。由于我们真正关心的只是手征磁化率的符号，所以不发散问题不会干扰对相变的分析。总之，在零温有限密度下，手征磁化率判据给出的是手征相变的共存区，而非通常所说的相变点。

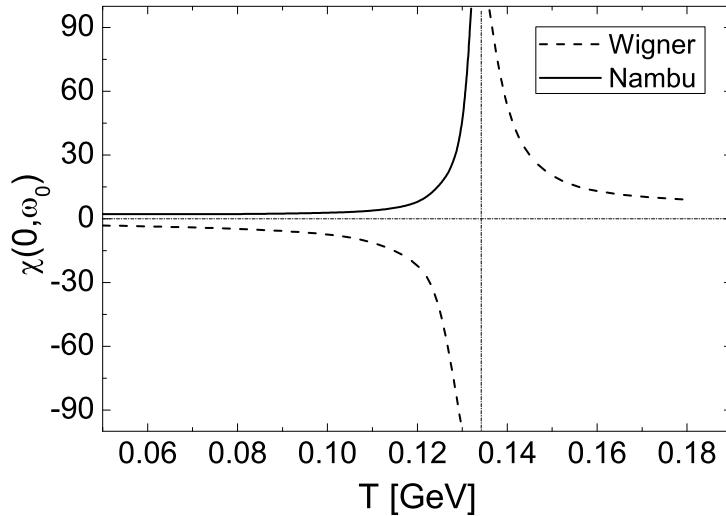


图 4.8: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的零密有限温度下的 Nambu 相和 Wigner 相的磁化率随温度演化的行为。

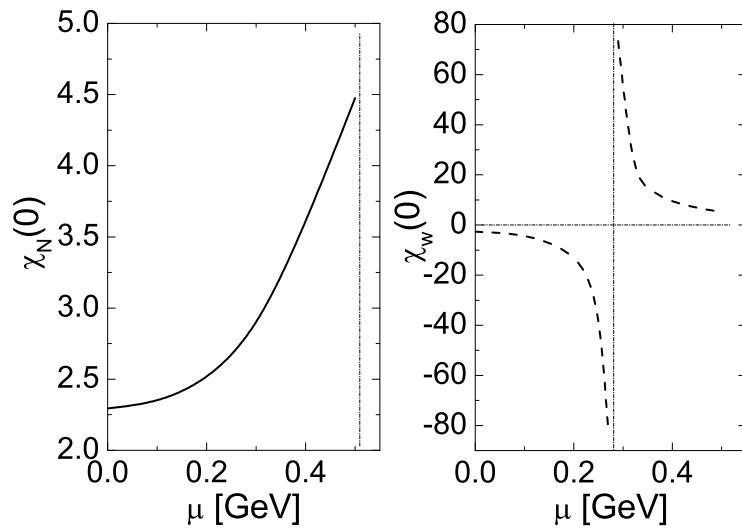


图 4.9: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的零温有限密度下的 Nambu 相和 Wigner 相的磁化率随化学势演化的行为。

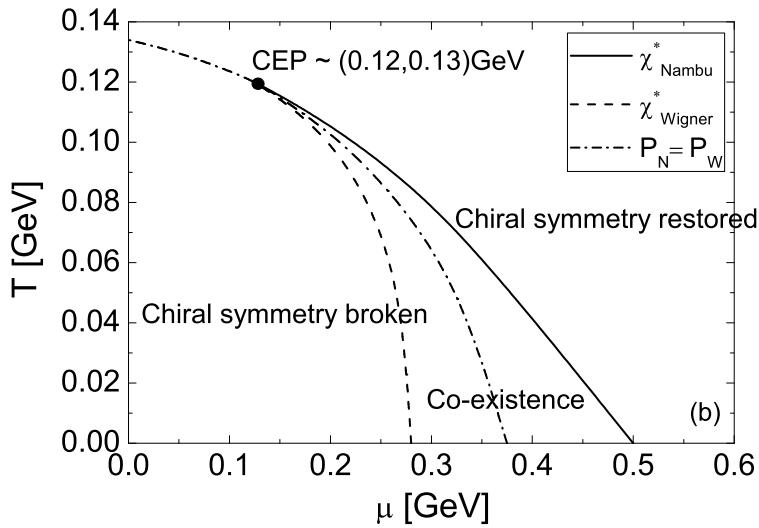


图 4.10: 利用裸顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 1.0 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的 T - μ 平面上的手征相变相图, 其中的点划线为有效势判据给出的相变曲线。

由上述结果和讨论我们知道, 对于二级相变, 两相的磁化率在相同的状态下同时发散; 对于一级相变, 两相的磁化率在不同的状态下发散, 而对应它们发散的两个状态之间的区域为两相共存区。于是, 我们可以得到, CEP 即是对应两相的磁化率开始不同时发散的状态。该结论可作为确定 CEP 的判据。为了得到整个相图, 我们分析了 χ^W 和 χ^N 在 T - μ 平面上的行为, 得到的相图如图4.10所示。在低密区域, 手征相变是二级相变, 没有共存区, 因此, 两种判据给出的相变线严格重合。随着化学势增加, 共存区的边界线在 CEP 处张开, 有效势给出的相变线位于共存区内。比较两种判据给出的结果知, 两种判据给出的 CEP 位置严格相同。

4.3.2 BC 顶点的结果

在上一小节, 我们对比了两种判据的结果, 发现手征磁化率判据能够给出二级相变线和一级相变的共存区, 并可以准确地定出 CEP。这无疑验证了手征磁化率判据的有效性。接下来, 我们将此判据推广到 BC 顶点的情况。这是第一次在 QCD 连续场论框架下, 在超越平均场近似的水平上给出手征相变的相图。我们仍然先分别讨论温度和密度效应, 然后再给出相图和 CEP 位置。首先, 在零温零密下, 我们得到手征凝聚大小为 $\langle \bar{q}q \rangle = (-0.258 \text{ GeV})^3$, 其大小和彩虹近似下的相

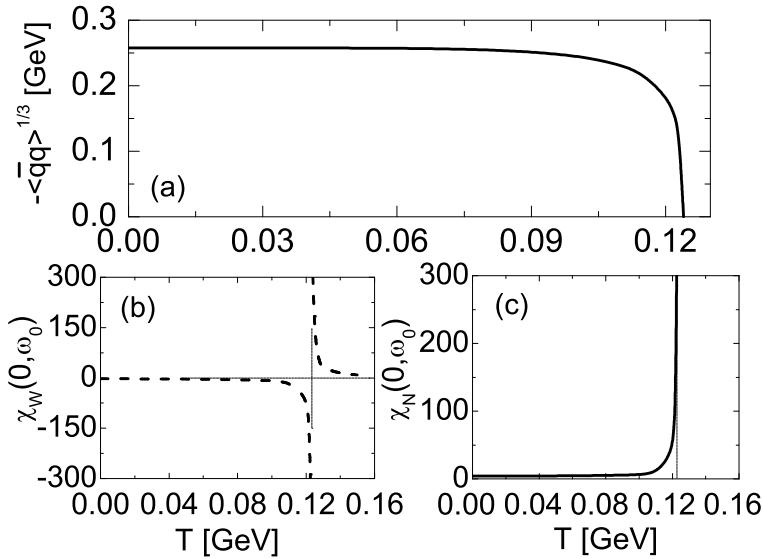


图 4.11: 在零密有限温度下, 利用 BC 顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 0.5\text{GeV}^2$, $\omega = 0.5\text{GeV}$) 下计算得到的手征夸克凝聚 (a) 及 Wigner 相 (b) 和 Nambu 相 (c) 的磁化率随温度演化的行为。

近。零化学势下, 手征凝聚随温度变化的行为如图4.11 (a) 所示。显然, 存在临界温度 $T_c = 124\text{MeV}$, 在 $T = T_c$ 情况下, 手征凝聚减小到零, 真空变为手征对称的 Wigner 真空。相应地, 两相的磁化率随温度演化的行为如图4.11 (b) 和 (c) 所示。与裸顶点和经典连续相变情况相同, 两相的磁化率均在 T_c 处发散: Nambu 相完全被 Wigner 相代替, 系统发生了二级手征对称性恢复相变。

在零温有限密度下, 与裸顶点下的结果相似, 体系存在一个临界化学势 $\mu_a = 300\text{MeV}$, 在其之下手征凝聚保持不变 (即夸克传播子的解析结构不发生变化)。但是不同的是, 直至 Nambu 解在 $\mu_c^N = 314\text{MeV}$ 处完全消失, 我们发现在区间 $\mu \in [\mu_a, \mu_c^N]$ 内, 手征凝聚缓慢减小, 如图4.12 (a) 的阴影部分所示。这意味着 Nambu 相发生了手征对称性部分恢复现象。通过考察两相的磁化率随化学势演化的行为, 如图4.12 (b) 和 (c) 所示, 我们发现, Wigner 相的手征磁化率在临界化学势 $\mu_c^W = 286\text{MeV}$ 处双向发散并由负变正, 而 Nambu 相的手征磁化率在 $\mu_c^N = 314\text{MeV}$ 处正向发散。这表明, 在 $\mu < \mu_c^W$ 区间内, Wigner 相是非稳定相 ($\chi_W < 0$), 而 Nambu 相为稳定相 ($\chi_N > 0$), 体系处于 Nambu 相; 在 $\mu_c^W < \mu < \mu_c^N$ 区间内, 两相的磁化率均为正, 即两相共存; 在 $\mu > \mu_c^N$ 区间内, Nambu 相消失, 而 Wigner 相为稳定相 ($\chi_W > 0$), 体系处于 Wigner 相。注意到,

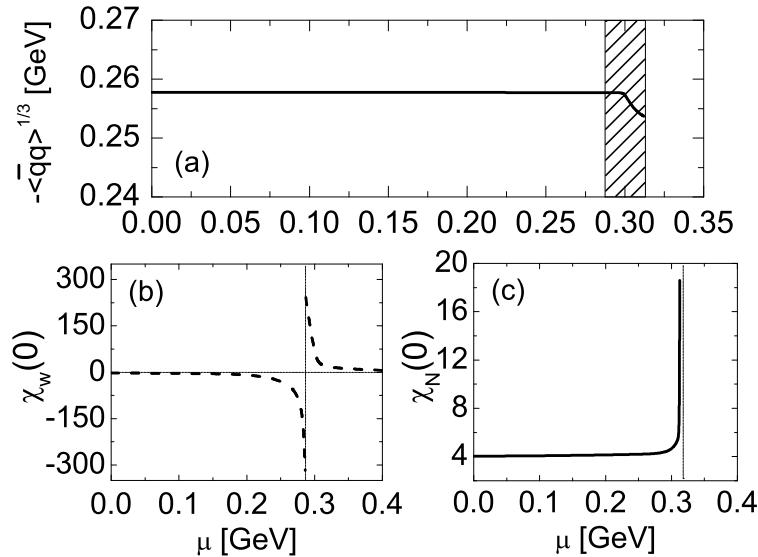


图 4.12: 在零温有限密度下, 利用 BC 顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 0.5\text{GeV}^2$, $\omega = 0.5\text{GeV}$) 下计算得到的手征夸克凝聚 (a) 及 Wigner 相 (b) 和 Nambu 相 (c) 的磁化率随化学势演化的行为。

此时 Nambu 相的磁化率在 μ_c^N 处表现出了发散行为。这说明在 BC 顶点下, 手征凝聚的近似式(4.44)不会有任何问题。

在裸顶点和 BC 顶点两种模型下, 我们发现在中等化学势 (密度) 区域均存在两相共存区。这意味着两相共存区的存在性是模型无关的。事实上, 在经典 Landau 相变理论中, 热力学势的演化行为使得一级相变总是伴随着两相共存。例如, 标准大气压零摄氏度的冰水混合物就是典型的两相共存状态, 过冷和过热现象也说明, 在一定温度和压强范围内, 冰和水都可以稳定存在。对于强相互作用体系的共存区, 若假设两相的有效热力学势相等的点为 μ_c , 则在 $\mu_c^W < \mu < \mu_c^N$ 范围内, Nambu 相是稳定相, Wigner 相为亚稳相: 由于涨落效应, 在禁闭和手征对称性破缺的夸克背景中, 存在解禁和手征对称的夸克“气泡”, 并且随着化学势升高, “气泡”的数量和体积增大。在 $\mu_c < \mu < \mu_c^N$ 范围内, Nambu 相转变为亚稳相, Wigner 相为稳定相: 在解禁闭和手征对称的物质背景中, 存在禁闭和手征对称性破缺的夸克“液滴”, 并且随着化学势升高, “液滴”数量和体积减少。因此, 从统计意义上来说, 共存区出现了手征对称性部分恢复现象。

在整个 $T-\mu$ 平面上, 通过分析两相磁发率的发散点, 我们可以得到 BC 顶点的手征相变相图, 所得结果如图4.13所示。较具体地, BC 顶点给出 CEP 的位置为

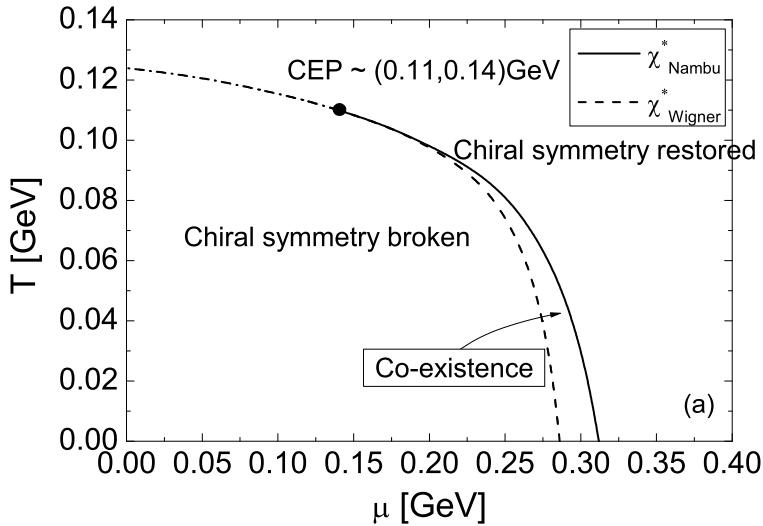


图 4.13: 利用 BC 顶点近似和(4.16)式所述的胶子着衣函数模型在典型参数 ($D = 0.5 \text{ GeV}^2$, $\omega = 0.5 \text{ GeV}$) 下计算得到的 T - μ 平面上的手征相变相图。

$(\mu^E, T^E)/T_c = (1.13, 0.89)$, $\mu^E/T^E = 1.27$ 。这一结果与 RHIC 椭圆流数据分析以及格点模拟结果^[157,158,159,162,160]很好地符合。在零温情况下, 共存区在化学势轴上的宽度为 26MeV。相比裸顶点的结果, BC 顶点给出的 CEP 位置相近, 但是共存区宽度小得多。另外, 如果将禁闭理解为夸克传播子的解析行为, 那么在手征极限下, 我们的模型给出的退禁闭相变和手征对称性恢复相变总是同时发生, 并且共存区就是正常的禁闭和手征对称性破缺的相与退禁闭和手征对称的相共存的区域, 而不是所谓的具有手征对称性但仍处于禁闭状态的 Quarkyonic 相^[76,190,191]。但是从统计的角度看, 共存区包含有 Quarkyonic 的成分。

4.3.3 截断方案和模型的依赖性

回顾上面的描述和讨论, 利用手征磁化率判据, 我们分别给出了裸顶点和 BC 顶点的典型模型参数下的手征相变相图。下面, 我们讨论顶点和模型参数对相图中的特征量 (即临界温度、共存区宽度和 CEP 位置) 的影响。为方便讨论, 我们固定有效相互作用强度 \hat{D} (如4.1节所述), 并定义禁闭宽度为 $r = 1/\omega$ 。通过在多个 ω (或 r) 下的计算, 得到相图中的特征量对顶点和禁闭宽度的依赖行为如表4.1所示。显然, 裸顶点和 BC 顶点下的临界温度 T_c 和 CEP 位置基本一致, 但是前者的共存区大于后者。并且, 随禁闭宽度 r 增大时, CEP 的位置转向温度轴,

表 4.1: 利用 BC 顶点和裸顶点模型计算得到的 CEP 位置和共存区宽度等特征量对禁闭宽度的依赖行为。 Δ_C 表示化学势轴上的共存区宽度。 \hat{D} 表示有效相互作用强度。所有参数均给出相似的手征凝聚大小和 π 的轻子衰变常数 f_π ^[126]。(r 的量纲为 GeV^{-1} , 其它所有量的量纲都为 GeV)。

vertex	模型			结果			
	$\hat{D}^{1/2}$	ω	r	T_c	Δ_C	$(\mu^E, T^E)/T_c$	μ^E/T^E
BC	0.7	0.50	2.00	0.124	0.026	(1.13, 0.89)	1.27
BC	0.7	0.45	2.22	0.128	0.048	(0.69, 0.92)	0.75
BC	0.7	0.40	2.50	0.139	0.076	(0.16, 0.96)	0.17
Bare	1.0	0.50	2.00	0.133	0.220	(0.98, 0.90)	1.08
Bare	1.0	0.45	2.22	0.136	0.280	(0.81, 0.89)	0.91
Bare	1.0	0.40	2.50	0.148	0.360	(0.17, 0.95)	0.18

共存区变宽；而当 r 减小时，CEP 转向化学势轴，共存区变窄。再考虑两个极端模型：类 NJL 模型的点相互作用(2.40)式，其对应的禁闭宽度为零，计算得到的 μ^E/T^E 相当大；而 MN 模型(2.41)式下，其对应的禁闭宽度趋于无穷大，计算得到的 $\mu^E/T^E = 0$ 。综合考虑这些结果知，此前不同（模型）方法得到的 CEP 位置相差甚远的原因是所用模型对应的禁闭宽度不同，较大的禁闭宽度给出较小的 μ^E/T^E 值。唯象地看，较大的禁闭宽度对应于强子有较大的半径，从而在较小的化学势下，体系中的强子即有较大的机会接触，而不同强子内的夸克之间即有较强的相互作用，于是使得主要驱动一级相变的化学势的临界值变小，也就是 CEP 对应的化学势变小， μ^E/T^E 的值变小。

4.4 本章小结

本章首先推导了有限温度和有限密度（化学势）下的夸克方程，并推广了零温零密下的胶子模型和截断方案，然后基于有效势判据研究了彩虹近似下的手征相变相图。计算表明，在小化学势和高温度情况下，体系发生的是二级手征对称性恢复相变，而在较低温度和较高密度（较大化学势）情况下发生的是一级相变。因此，在 $T-\mu$ 平面，存在一级相变和二级相变线的交点，即临界终点 CEP，其位置与格点 QCD 模拟计算和 RHIC 椭圆流数据分析所得结果接近。

但是，构造对应于复杂的现实顶点下的有效势十分困难，这使得我们很难在现实的模型和截断方案下研究 QCD 相变。为此，我们提出了一种基于手征磁化率

的判据，该判据可以应用于在任何相互作用和顶点形式下研究相图。为了验证判据的有效性，我们首先在彩虹近似下对比了有效势判据的结果。我们发现，手征磁化率判据不仅能准确给出二级相变线和 CEP 位置，还能定出一级相变的两相共存区。于是，我们将手征磁化率判据应用于 BC 顶点情况，给出了相应的手征相变相图，并详细分析了顶点和模型参数对相图的特征量影响的行为。

在一组典型的模型参数（即能够给出合理的真空凝聚，以及真空中的 π 和 ρ 介子性质）下，我们给出 CEP 的位置约为 $(\mu^E, T^E) \sim (1.0, 0.9)T_c$ 。我们还发现，CEP 的位置可以反映相互作用的禁闭宽度：随禁闭宽度增大，CEP 转向温度轴。由此可见，此前不同模型方法给出不同的 CEP 位置的原因是其对应的禁闭宽度不同。并且，以 CEP 为起点向较大化学势和较低温度区域张开一个两相共存区，其宽度敏感地依赖于夸克胶子顶点（裸顶点下的结果大于 BC 顶点下的结果）并随禁闭宽度的增加而增大。这些结果为实验上搜寻 CEP 提供了有益的建议。

第五章 临界温度之上的夸克胶子物质的性质

在上一章，我们研究了温度和密度平面的相图，发现存在禁闭和手征对称性破缺（强子）到退禁闭和手征对称性恢复（夸克胶子物质）的相变。近年来的 RHIC 实验已经能够重现高温低密的夸克胶子物质^[192]，这使得人们有机会从实验和理论两方面研究早期宇宙物质的组分和性质，并揭示早期宇宙到现实宇宙的演化过程。在相变温度 T_c 之上的附近区域，实验发现其中的物质状态呈现出近理想流体的行为^[193]。这被认为是人类目前能创造的“最完美”的液态物质。近理想流体的剪切粘滞系数 η 对熵密度 s 的比值 (η/s) 很小，例如室温下宏观的石墨^[194]。近理想流体行为通常是强耦合的表现，因此人们认为 RHIC 实验创造出的夸克胶子物质处于强耦合夸克胶子等离子体状态 (sQGP)。

sQGP 是连接甚早期宇宙和现实宇宙的中间物质状态，对其性质的深入研究不仅能够丰富我们对 QCD 相结构的认识，还可以深化对宇宙演化图象的理解。另外，这也使得实验第一次能够直接研究 QCD 基本自由度的动力学。实验主要关注 sQGP 的实验信号和输运性质。理论则希望能够建立 QCD 和 sQGP 性质的联系。从 QCD 跑动耦合常数随能标的跑动行为，我们可以想象超高温下的 QGP 是弱耦合体系，其行为可以通过微扰论解释。硬热圈展开 (HTL) 计算^[195,196] 给出高温下夸克和胶子的热质量和衰变率都正比于温度， $m_T \sim g(T)T$ ， $\gamma_T \sim g(T)^2 T$ ，并且体系存在三种激发模式：正常热激发、等离子集体激发和小动量区域的类反粒子连续激发^[197]。这些性质表明，高温 QGP 更接近弱耦合热气体，而非强耦合近理想流体。

随着温度下降至接近 T_c ，跑动耦合常数必然增大。由 HTL 的结果知，准粒子的衰变率增大的速度大于其热质量增大的速度，当 $\gamma_T/m_T \sim 1$ 时，原来的准粒

子图象不再有效。这意味着 HTL 展开无法描述 T_c 附近的 sQGP 行为。另一方面，淬火近似下的一些格点 QCD 模拟计算表明，等离子集体激发在 T_c 附近仍然存在^[198]；另一些格点 QCD 模拟计算则表明，退禁闭温度之上的夸克传播子与退禁闭温度之下的无定性差别，仅有效夸克质量减小约一半^[199]。但是，前者有悖于 sQGP 的强耦合性质，后者无法显式地说明 sQGP 的强耦合性质。另外，基于引力理论的 AdS/CFT 对偶方法给出^[200,201]，在强耦合极限下 sQGP 的 $\eta/s = 1/4\pi$ 。最新的计算又表明，该极限应该被打破^[202]。对于如此百家争鸣的问题，我们迫切需要在非微扰 QCD 的连续场论框架下研究 sQGP 的性质。

本章将在 DS 方程框架下研究 T_c 附近的夸克谱密度，分析 sQGP 中存在的激发模式以及各激发模式的性质。由于夸克谱密度是连接 sQGP 的基本自由度和实验观测量的关键，因此我们希望本章的谱分析结果能够对理解 sQGP 的强耦合性质提供新的切入点。

5.1 胶子模型和夸克传播子的谱表示

5.1.1 温度依赖的胶子模型

由于 sQGP 处于强耦合到弱耦合的过渡区域，因此我们需要仔细考虑温度对相互作用的影响。一方面，格点 QCD 模拟计算^[179,111,203] 和求解胶子与鬼场的耦合 DS 方程^[204,205] 都表明，温度对胶子的横向和纵向部分影响的行为不尽相同。另一方面，QCD 跑动耦合常数的行为表明，温度会压低红外区域的相互作用强度。因此，接下来我们就从这两方面修改胶子模型。首先，在硬热圈近似下，通过计算胶子的单圈自能，人们发现温度会对胶子纵向部分贡献一个热质量^[178]

$$m_g^2(T) = \frac{1}{6}g^2T^2(3 + \frac{1}{2}N_f), \quad (5.1)$$

其中， N_f 为味道数。为了匹配高温微扰论的结果，我们取 $m_g^2 = (16/5)T^2$ 。因此，(4.14)式中横向和纵向着衣函数可分别写为

$$D_T(\vec{k}, \Omega_{nl}; T) = \mathcal{D}(k_\Omega^2, 0), \quad D_L(\vec{k}, \Omega_{nl}; T) = \mathcal{D}(k_\Omega^2, m_g^2), \quad (5.2)$$

其中, $\mathcal{D}(k_\Omega^2, m_g^2)$ 为真空中的 Maris-Tandy 模型(2.44)式的推广

$$\mathcal{D}(k_\Omega^2, m_g^2) = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D s e^{-s/\omega^2} + \frac{8\pi^2 \gamma_m (1 - e^{-s/4m_t^2})/s}{\ln[\tau + (1 + s/\Lambda_{QCD}^2)^2]}, \quad (5.3)$$

其中定义 $s = \vec{k}^2 + \Omega_{nl}^2 + m_g^2$ 。上式表明, 在 $T \neq 0$ 时, $D_L \neq D_T$ (在上一章中, 当讨论温度较低的区域时, 例如 $T < T_c < 200\text{MeV}$ 范围内, $D_T \sim D_L$ 仍然是合理的近似^[179])。在手征极限和彩虹近似下, 利用温度依赖的胶子模型, 我们得到零密有限温度下的二级相变 (退禁闭和手征对称性恢复) 的临界温度为

$$T_c = 138\text{MeV}, \quad (5.4)$$

比文献^[206] 给出的临界温度小约 10%。

在2.3节中我们提到, 红外相互作用关系到禁闭和手征对称性破缺能否实现。因此, 在相变之后的 $T > T_c$ 温度下, 相互作用的红外部分会受到温度效应的屏蔽。于是, 我们将(5.3)式中的强度 D 修正为

$$D(T) = \begin{cases} D, & T < T_p, \\ \frac{a}{b + \ln[T/\Lambda_{QCD}]}, & T \geq T_p \end{cases}, \quad (5.5)$$

其中, T_p 表示非微扰效应的持续温度, 即在此温度之下我们可以忽略热屏蔽对禁闭和手征对称性破缺的影响, 自然的选择是 $T_p = T_c$ 。我们采用对数型屏蔽是因为其符合 QCD 耦合常数随动量跑动的行为。为了完全确定模型参数, 我们还需要拟合高温极限的结果。在 HTL 近似下, 夸克的单圈自能给出夸克的热质量为

$$m_q^2(T) = \frac{1}{6} g^2 T^2, \quad (5.6)$$

对比胶子热质量得, $m_q^2 = 16/25 T^2$, 其数值与格点 QCD 模拟计算的结果一致^[198]。在 $T > 2T_c$ 时, 若令夸克方程给出的热质量等于 HTL 热质量, 则可以确定 $a = 0.028$, $b = 0.558$, $D(T)$ 随温度的演化行为如图5.1所示。

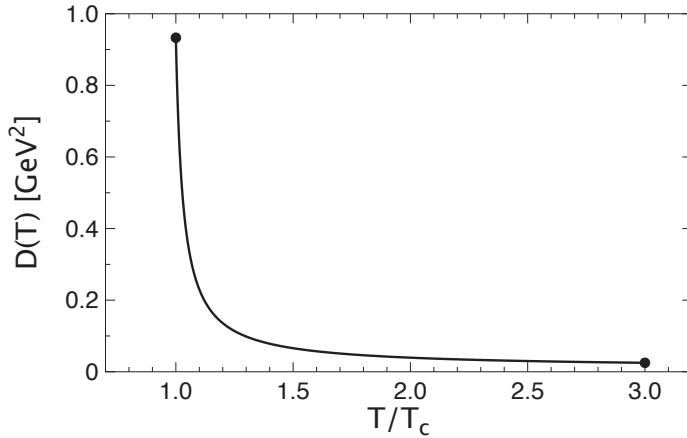


图 5.1: 在临界温度 T_c 之上, 非微扰相互作用强度随温度变化的行为。

5.1.2 夸克传播子的谱表示

一. 传播子谱表示的一般形式

在2.4节中, 我们提到, 禁闭的夸克传播子没有正定的谱表示。但是, 在退禁闭和手征对称性恢复的区域, $T > T_c$, 夸克传播子有正定的谱表示^[207]。夸克传播子的谱表示的物理图像为, 在真空中某点产生一个夸克, 然后在其传播过程中有一定振幅散射到哈密顿量的各本征态, 最后各态再散射到夸克, 并湮灭到真空, 也就是说夸克传播子可以做体系哈密顿量的本征态的完备展开, 各态的概率就是相应的谱密度。首先, 在闵氏空间中, 我们将编时格林函数表示成推迟和超前格林函数, 即

$$\begin{aligned} S^{(ab)}(x_1 - x_2) &= \langle \Omega | T\{\psi^{(a)}(x_1)\bar{\psi}^{(b)}(x_2)\} | \Omega \rangle \\ &= S_R^{(ab)}(x_1 - x_2) + S_A^{(ab)}(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (5.7)$$

插入时空平移算符 P_μ , 并注意到 $P_\mu |\Omega\rangle = 0$, 则推迟和超前格林函数可以写为

$$S_R^{(ab)}(x_1 - x_2) = \theta(t_1 - t_2) \langle \Omega | \psi^{(a)}(0) e^{-iP \cdot (x_1 - x_2)} \bar{\psi}^{(b)}(0) | \Omega \rangle, \quad (5.8)$$

$$S_A^{(ab)}(x_1 - x_2) = -\theta(t_2 - t_1) \langle \Omega | \bar{\psi}^{(b)}(0) e^{-iP \cdot (x_2 - x_1)} \psi^{(a)}(0) | \Omega \rangle. \quad (5.9)$$

对推迟格林函数插入哈密顿量的本征态的完备集

$$\sum_N |N\rangle\langle N| = \mathbf{1},$$

则有

$$S_R^{(ab)}(x_1 - x_2) = \theta(t_1 - t_2) \sum_N e^{-ip_N \cdot (x_1 - x_2)} \langle \Omega | \psi^{(a)}(0) | N \rangle \langle N | \bar{\psi}^{(b)}(0) | \Omega \rangle. \quad (5.10)$$

利用阶跃函数的恒等式

$$\theta(t_1 - t_2) = i \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{k + i\epsilon} e^{-ik(t_1 - t_2)},$$

我们得到

$$S_R^{(ab)}(x_1 - x_2) = i \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{k + i\epsilon} e^{-ik(t_1 - t_2)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \rho^{(ab)}(p_0, \vec{p}), \quad (5.11)$$

其中, $\rho(p_0, \vec{p})$ 定义为

$$\rho^{(ab)}(p_0, \vec{p}) = (2\pi)^4 \sum_N \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_N) \delta(p_0 - p_N^0) \langle \Omega | \psi^{(a)}(0) | N \rangle \langle N | \bar{\psi}^{(b)}(0) | \Omega \rangle. \quad (5.12)$$

对 $S_R^{(ab)}(x_1 - x_2)$ 中的积分做变量替换, 则

$$\begin{aligned} S_R^{(ab)}(x_1 - x_2) &= i \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-i(k+p_0)(t_1-t_2)}}{(k + p_0) - p_0 + i\epsilon} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \rho^{(ab)}(p_0, \vec{p}) \\ &= i \int \frac{dp'_0}{2\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip'_0(t_1-t_2)}}{p'_0 - p_0 + i\epsilon} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \rho^{(ab)}(p_0, \vec{p}) \\ &= i \int \frac{d^4 p'}{2\pi} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{\rho^{(ab)}(p_0, \vec{p}')}{p'_0 - p_0 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

显然, 由上式的傅里叶变换可得

$$S_R^{(ab)}(p'_0, \vec{p}') = \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{\rho^{(ab)}(p_0, \vec{p}')}{p'_0 - p_0 + i\epsilon}, \quad (5.14)$$

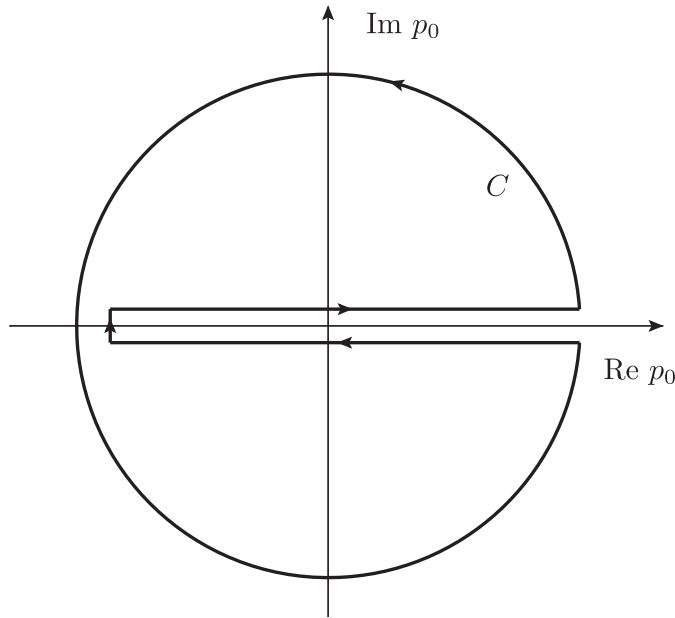


图 5.2: 在 p_0 的复平面上, 夸克推迟传播子的柯西围道积分路径。

这即是闵氏空间中的夸克推迟传播子的谱表示。在 p_0 的复平面上, $S_R^{(ab)}(p_0, \vec{p})$ 的全部奇异性都集中在实轴, 因此对于实轴之外的任意一点, 由柯西定理得

$$\begin{aligned} S_R^{(ab)}(p'_0, \vec{p}) &= \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{S_R^{(ab)}(z, \vec{p})}{z - p'_0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{S_R^{(ab)}(p_0 + i\epsilon, \vec{p}) - S_R^{(ab)}(p_0 - i\epsilon, \vec{p})}{p_0 - p'_0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{-2\text{Im} S_R^{(ab)}(p_0 + i\epsilon, \vec{p})}{p'_0 - p_0}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

其中, 积分围道如图5.2所示, 无穷远处路径积分为零。于是, 谱密度可表达为推迟格林函数在实轴上的不连续性, 即

$$\rho^{(ab)}(p_0, \vec{p}) = -2\text{Im} S_R^{(ab)}(p_0, \vec{p}). \quad (5.16)$$

如前文所述, DS 方程和格点 QCD 都建立在欧氏空间。利用欧氏空间的传播子和推迟实时传播子的解析延拓关系

$$S_R^{(ab)}(p_0, \vec{p}) = S^{(ab)}(i\omega_n, \vec{p})|_{i\omega_n \rightarrow p_0 + i\epsilon}, \quad (5.17)$$

我们可以得到

$$S^{(ab)}(i\omega_n, \vec{p}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho^{(ab)}(\omega, \vec{p})}{i\omega_n - \omega}. \quad (5.18)$$

由此可见，欧空间和闵空间的格林函数可以通过谱表示联系起来，或者说谱密度包含了所有的动力学和运动学信息。本章的主要工作即是计算高于手征相变临界温度 T_c 的区域内夸克的谱密度，并以此来理解 sQGP 的非微扰性质。

二. 谱密度的对称性和求和规则

由欧氏空间中夸克传播子的谱表示(5.18)式可知，谱密度和夸克传播子有相同的洛伦兹结构。于是，与(4.11)式相同，对谱密度可以做如下分解

$$\rho(\omega, \vec{p}) = \omega\gamma_4\rho_e(\omega, |\vec{p}|) - i\vec{\gamma} \cdot \vec{p}\rho_v(\omega, |\vec{p}|) + \rho_s(\omega, |\vec{p}|). \quad (5.19)$$

对(5.14)式两边做 \mathcal{C} 宇称变换，并由 $S(p_0, \vec{p}) = \mathcal{C}[S(-p_0, -\vec{p})]^t \mathcal{C}^{-1}$ 可得

$$\rho(\omega, \vec{p}) = -\mathcal{C}[\rho(-\omega, -\vec{p})]^t \mathcal{C}^{-1}, \quad (5.20)$$

即谱密度结构函数有以下奇偶性

$$\rho_e(\omega, |\vec{p}|) = -\rho_e(-\omega, |\vec{p}|), \quad (5.21a)$$

$$\rho_v(\omega, |\vec{p}|) = -\rho_v(-\omega, |\vec{p}|), \quad (5.21b)$$

$$\rho_s(\omega, |\vec{p}|) = -\rho_s(-\omega, |\vec{p}|). \quad (5.21c)$$

为了推导关于谱密度的求和规则，我们需要讨论传播子在大动量处的渐近行为。由(4.11)式可知，传播子可分解为^[180,207]

$$S(i\omega_n, \vec{p}) = [i\vec{\gamma} \cdot \vec{p}A(\omega_n^2, \vec{p}^2) + i\gamma_4\omega_nC(\omega_n^2, \vec{p}^2) + B(\omega_n^2, \vec{p}^2)]^{-1}, \quad (5.22)$$

并且对于任何弱耦合或者渐近自由的理论，

$$A(\omega_n^2, \vec{p}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z_2^A, \quad C(\omega_n^2, \vec{p}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z_2, \quad B(\omega_n^2, \vec{p}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.23)$$

由于谱密度在 $\omega \rightarrow \infty$ 时收敛，因此在(5.18)式两边做 $1/\omega_n$ 的展开可得

$$S(i\omega_n, \vec{p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{i\omega_n} \left(\frac{\gamma_4}{Z_2} + \frac{i\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{i\omega_n} \frac{Z_2^A}{Z_2^2} + \dots \right), \quad (5.24)$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\omega, \vec{p})}{i\omega_n - \omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{i\omega_n} \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, \vec{p}) \left(1 + \frac{\omega}{i\omega_n} + \dots \right). \quad (5.25)$$

令上式中 $1/\omega_n$ 的幂次相同的项相等，则

$$Z_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, \vec{p}) = \gamma_4, \quad (5.26)$$

$$Z_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \rho(\omega, \vec{p}) = i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \frac{Z_2^A}{Z_2}. \quad (5.27)$$

以上两式是谱密度满足的最简单的两个求和规则。

在手征极限下，手征对称性恢复的夸克胶子物质中的夸克为无质量费米子，因此相应的传播子和谱密度无洛伦兹标量部分。若定义能量投影算符^[208,209]， $\hat{P}_\pm = \frac{1}{2} (\gamma_4 \pm i\vec{\gamma} \cdot \vec{p})$ ，并定义相应的结构函数为

$$S_\pm(i\omega_n, |\vec{p}|) = i\omega_n \sigma_C(\omega_n^2, \vec{p}^2) \pm |\vec{p}| \sigma_A(\omega_n^2, \vec{p}^2), \quad (5.28)$$

则夸克传播子可以分解为

$$S(i\omega_n, \vec{p}) = -S_+(i\omega_n, |\vec{p}|) \hat{P}_+ - S_-(i\omega_n, |\vec{p}|) \hat{P}_-. \quad (5.29)$$

其中利用了投影算符的关系， $tr[P_+ P_-] = 2$ ， $tr[P_+ P_+] = tr[P_- P_-] = 0$ 。同样地，我们可以定义谱密度的结构函数为

$$\rho_\pm(\omega, |\vec{p}|) = \omega \rho_e(\omega, \vec{p}^2) \pm \vec{p}^2 \rho_v(\omega, \vec{p}^2), \quad (5.30)$$

则谱密度可以分解为

$$\rho(\omega, \vec{p}) = \rho_+(\omega, |\vec{p}|) \hat{P}_+ + \rho_-(\omega, |\vec{p}|) \hat{P}_-. \quad (5.31)$$

于是，我们得到结构函数的谱表示式为

$$S_{\pm}(i\omega_n, |\vec{p}|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho_{\pm}(\omega, \vec{p})}{\omega - i\omega_n}, \quad (5.32)$$

相应的求和规则为

$$Z_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_{\pm}(\omega, \vec{p}) = 1, \quad (5.33)$$

$$Z_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \rho_{\pm}(\omega, \vec{p}) = \frac{Z_2^A}{Z_2} |\vec{p}|. \quad (5.34)$$

考虑到(5.32)式的积分核为复数，对两边做离散傅里叶变换得到

$$D_{\pm}(\tau, |\vec{p}|) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} S_{\pm}(i\omega_n, |\vec{p}|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_{\pm}(\omega, \vec{p}) \left(T \sum_n \frac{e^{-i\omega_n \tau}}{\omega - i\omega_n} \right). \quad (5.35)$$

利用 Matsubara 频率求和恒等式： $T \sum_n \frac{e^{-i\omega_n \tau}}{\omega - i\omega_n} = \frac{e^{-\omega \tau}}{1 + e^{-\omega/T}}$ ，上式可化简为

$$D_{\pm}(\tau, |\vec{p}|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_{\pm}(\omega, \vec{p}) \left(\frac{e^{-\omega \tau}}{1 + e^{-\omega/T}} \right). \quad (5.36)$$

这即是格点 QCD 模拟计算中常用的虚时关联函数的谱分解形式。相比(5.32)式，(5.36)式为实数积分方程，可以为数值计算带来方便。

三. 谱密度与输运系数

在本小节中，我们将在适当的近似下讨论谱密度与输运系数的关系，并以此说明谱函数具有联系理论计算和实验观测的桥梁作用。在线性响应理论中，剪切粘滞系数由 Kubo 公式^[210,211,212]给出

$$\eta(\omega) = \frac{i}{\omega} [\Pi_R(\omega) - \Pi_R(0)], \quad (5.37)$$

其中， $\Pi_R(\omega)$ 为推迟的能动量张量实时关联函数。静态剪切粘滞系数表示为

$$\eta = \eta(\omega = 0) = - \left. \frac{d\Pi_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0^+}. \quad (5.38)$$

与夸克传播子一样， $\Pi_R(\omega)$ 可以表示为对应的虚时关联函数的解析延拓，即

$$\Pi_R(\omega) = \Pi(i\omega_n)|_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+}. \quad (5.39)$$

能动量张量的虚时关联函数定义为

$$\Pi(i\omega_n) = -N_c N_f \int_0^\beta d\tau e^{-i\omega_n \tau} \int d^3 \vec{r} \langle \Omega | T_\tau \{ T_{xy}(\vec{r}, \tau) T_{xy}(0, 0) \} | \Omega \rangle, \quad (5.40)$$

其中，Matsubara 频率为 $\omega_n = 2n\pi T$ 。在手征极限下，如果拉氏量中没有场的微分耦合项，如 Nambu 模型^[59,60,61]，则能动量张量有如下简单形式

$$T_{xy} = \frac{i}{2} (\bar{q} \gamma_2 \partial_x q - \partial_x \bar{q} \gamma_2 q). \quad (5.41)$$

将上式代入(5.40)式，我们得到

$$\Pi(i\omega_n) = N_c N_f T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_x^2 \text{tr} [\gamma_2 S(i\omega_l + i\omega_n, \vec{p}) \gamma_2 S(i\omega_l, \vec{p})], \quad (5.42)$$

其中，Matsubara 频率为 $\omega_l = (2l + 1)\pi T$ 。利用传播子的谱表示(5.18)式，我们可以得到 $\Pi(i\omega_n)$ 的解析延拓 $\Pi_R(\omega)$ 。于是，静态剪切粘滞系数表示为

$$\eta = \frac{N_c N_f}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_x^2 [1 - f(\omega)] f(\omega) \text{tr} [\gamma_2 \rho(\omega, \vec{p}) \gamma_2 \rho(\omega, \vec{p})], \quad (5.43)$$

其中， $f(\omega) = 1/(1 + e^{\beta\omega})$ 为费米分布函数，夸克谱密度 $\rho(\omega, \vec{p})$ 可以按(5.31)式分解为两个独立的结构函数 $\rho_{\pm}(\omega, \vec{p})$ 。完成上式的三动量角度积分，我们最终得到 η 和 $\rho_{\pm}(\omega, \vec{p})$ 的关系式为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{N_c N_f}{60\pi^3 T} \int_0^\infty d|\vec{p}| \vec{p}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [1 - f(\omega)] f(\omega) \\ &\times [\rho_+^2(\omega, |\vec{p}|) + \rho_-^2(\omega, |\vec{p}|) + 8\rho_+(\omega, |\vec{p}|)\rho_-(\omega, |\vec{p}|)]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

显然，只要确定了谱密度分布即可确定剪切粘滞系数。

5.2 夸克胶子等离子体的激发模式

在上一节中，我们推导了夸克传播子的谱表示，分析了谱密度的对称性和求和规则，并展示了谱密度和输运系数（例如静态剪切粘滞系数）间的联系。本节将在5.1.1节的模型下求解零密有限温度下的夸克方程，然后由所得的夸克传播子分析出谱密度。由于谱密度的行为决定了体系中存在的激发模式，因此通过比较不同温度区域 ($T > T_c$) 中夸克的谱密度，我们即可得到高于手征相变临界温度的区域内夸克胶子物质的性质。

在由(5.32)式或者(5.36)式求解谱密度时，因传播子是谱密度的线性函数，故可将谱表示写成泛函空间的矩阵形式

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{S}. \quad (5.45)$$

上式中矩阵 \mathbf{K} 是奇异矩阵，于是求逆问题是一个病态问题， χ^2 拟合亦很不稳定。针对这一问题，我们采用常用的最大熵谱分析方法 (MEM)^[198,213,214,215,216]，详细内容请参见附录D。在 MEM 中，我们需要定义熵模型和谱模型，前者表达谱密度在泛函空间的概率，后者表达对谱结构的先验认识。常用的熵模型可以定义为

$$S[\rho] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[\rho(\omega) - m(\omega) - \rho(\omega) \ln \frac{\rho(\omega)}{m(\omega)} \right], \quad (5.46)$$

其中，谱模型 $m(\omega)$ 定义为

$$m(\omega) = m_0 \theta(\Lambda^2 - \omega^2), \quad (5.47)$$

它表示仅在 $\omega^2 < \Lambda^2$ 的区域内有无任何结构的均匀分布。由于任何先验的结构假设都可能会影响体系本身的谱密度，因此均匀分布的谱模型是一种自然的选择。原则上，任何稳定可靠的输出都不应该敏感地依赖于模型参数： m_0 和 Λ 。数值分析表明^[81,215]，输出的谱密度不敏感于 m_0 ，但在一定范围内敏感于 Λ 。然而当 Λ 足够大时，我们仍然可以得到稳定的谱密度。下面我们将在不同温度区域用 MEM 分析夸克的谱密度，并讨论体系中存在的激发模式。

5.2.1 高温情况下的激发模式

在极端高温情况下，由于渐近自由，夸克胶子物质的行为类似于理想气体。此时，夸克传播子为自由粒子的形式

$$S^{\text{free}} = -\frac{i\gamma_4\omega_n + i\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{\omega_n^2 + \vec{p}^2}, \quad (5.48)$$

$$S_{\pm}^{\text{free}} = \frac{i\omega_n \pm |\vec{p}|}{\omega_n^2 + \vec{p}^2} = \frac{1}{\pm|\vec{p}| - i\omega_n}. \quad (5.49)$$

显然，谱密度表示为

$$\rho_{\pm}^{\text{free}}(\omega, \vec{p}) = \delta(\omega \mp |\vec{p}|). \quad (5.50)$$

随着温度降低，夸克间的相互作用开始变得重要并影响体系的激发模式。在 $T \gtrsim 3T_c$ 的区域，夸克进入微扰相互作用区域。此时，夸克传播子可以通过硬热圈展开 (HTL) 计算^[178,196]。在一圈水平上，闵氏空间中的夸克自能为

$$\Sigma_{\text{HTL}}(p_0, \vec{p}) = \gamma_0 \frac{m_q^2}{|\vec{p}|} Q_0 \left(\frac{p_0}{|\vec{p}|} \right) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \frac{m_q^2}{\vec{p}^2} \left[1 - \frac{p_0}{|\vec{p}|} Q_0 \left(\frac{p_0}{|\vec{p}|} \right) \right], \quad (5.51)$$

其中， $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ ， m_q 为(5.6)式定义的夸克热质量。与(5.28)式对应的推迟传播子结构函数可以表示为

$$S_{\pm}^R(p_0, |\vec{p}|) = \left\{ p_0 \mp |\vec{p}| - \frac{m_q^2}{2|\vec{p}|} \left[\left(1 \mp \frac{p_0}{|\vec{p}|} \right) \ln \frac{p_0 + |\vec{p}|}{p_0 - |\vec{p}|} \pm 2 \right] \right\}^{-1}. \quad (5.52)$$

由谱密度和推迟传播子的关系(5.16)式可得，

$$\rho_{\pm}(p_0, |\vec{p}|) = 2\pi [Z_{\pm}(|\vec{p}|) \delta(p_0 - \omega_{\pm}(|\vec{p}|)) + Z_{\mp}(|\vec{p}|) \delta(p_0 + \omega_{\mp}(|\vec{p}|))] + \text{cont.} \quad (5.53)$$

由上式可知，体系存在三种激发模式：两种准粒子激发（来自(5.52)式的奇点）和连续激发（来自(5.52)式中对数函数的割线， $p_0^2 < \vec{p}^2$ ）。计算得到的准粒子色散关系 $\omega_{\pm}(|\vec{p}|)$ 和准粒子的激发概率 $Z_{\pm}(|\vec{p}|)$ 如图5.3所示。显然，它们的渐近行为是

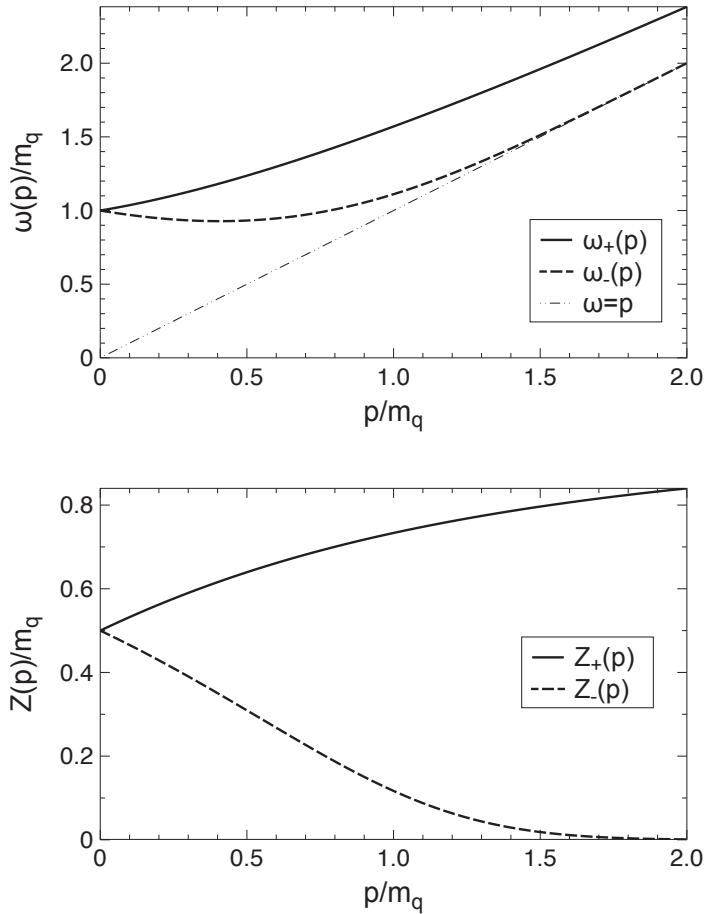


图 5.3: HTL 给出的高温下夸克胶子物质的准粒子的色散关系和概率分布。

$$|\vec{p}| \ll m_q : \quad \omega_{\pm}(|\vec{p}|) \simeq m_q \left(1 \pm \frac{1}{3} \frac{|\vec{p}|}{m_q} \right), \quad (5.54)$$

$$Z_{\pm}(|\vec{p}|) \simeq \frac{1}{2} \pm \frac{|\vec{p}|}{3m_q},$$

$$|\vec{p}| \gg m_q : \quad \omega_+ (|\vec{p}|) \simeq |\vec{p}| \left(1 + \frac{m_q^2}{\vec{p}^2} \right), \quad (5.55)$$

$$\omega_- (|\vec{p}|) \simeq |\vec{p}| \left[1 + \frac{2}{e} \exp \left(-\frac{2\vec{p}^2}{m_q^2} \right) \right],$$

$$Z_+ (|\vec{p}|) \simeq 1 + \frac{m_q^2}{2\vec{p}^2} \left[1 - \ln \left(\frac{2\vec{p}^2}{m_q^2} \right) \right],$$

$$Z_- (|\vec{p}|) \simeq \frac{2\vec{p}^2}{em_q^2} \exp \left(-\frac{2\vec{p}^2}{m_q^2} \right).$$

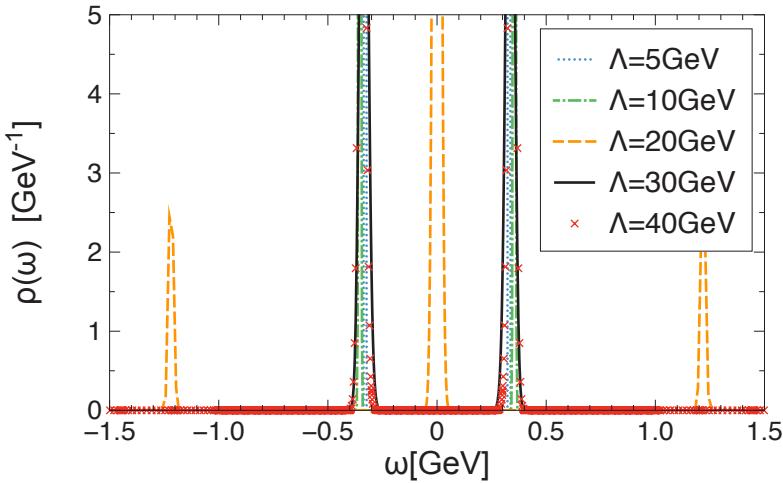


图 5.4: 在 $T = 3.0T_c$ 情况下, 通过求解夸克方程提取的夸克谱密度对 MEM 谱模型中的截断参数依赖的行为, 其中黑线表示谱密度开始稳定的截断 ($|\vec{p}| = 0$)。

由此我们发现, 两种激发模式在低动量区类似于静止质量为夸克热质量 m_q 的点粒子, 而在高动量区趋于自由粒子。在低动量区, 两种模式的激发概率都约为 $1/2$, 但是随着动量增加, ω_+ 的概率增大, 而 ω_- 的概率减小, 当动量标度远大于热质量标度时, 体系几乎只剩下 ω_+ 激发。为了明确两种激发模式的物理图象, 我们考虑其对应的螺旋度和手征度之比, ω_\pm 分别为 ± 1 。在真空中, 正能量粒子具有正的螺旋度和手征度之比。因此, ω_+ 对应正常粒子的热修正准粒子, 也称为正常热激发; ω_- 则对应热浴导致的费米型集体激发, 也称为反夸克洞或者等离子集体激发。

以上微扰论结果可以作为验证模型的正确性和算法的有效性的参考起点。为此, 我们首先计算了高温下的谱密度。在 $T = 3.0T_c$ 的情况下, 通过求解夸克方程和利用 MEM 谱分析方法得到的谱密度分布函数如图5.4所示, 很显然, 稳定的谱密度存在两种激发模式, 分别对应正常激发和等离子激发

$$\rho_\pm(p_0, |\vec{p}|) = 2\pi[Z_\pm(|\vec{p}|)\delta(p_0 - \omega_\pm(|\vec{p}|)) + Z_\mp(|\vec{p}|)\delta(p_0 + \omega_\mp(|\vec{p}|))]. \quad (5.56)$$

我们把谱密度的准粒子共振峰写成 δ 函数, 并取相应的留数为共振峰的积分面积, 是因为共振峰的宽度随着数值精确度提高而收敛到零。这两种激发模式与 HTL 的结果完全相同。其色散关系和激发概率随三动量跑动的行为如图5.5 (上) 和 (中)

所示。在低动量区域，色散关系和激发概率的渐近行为分别为

$$\omega_{\pm}(|\vec{p}|) \xrightarrow{|\vec{p}| \rightarrow 0} m_q \pm 0.33|\vec{p}|, \quad (5.57)$$

$$Z_{\pm}(|\vec{p}|) \xrightarrow{|\vec{p}| \rightarrow 0} 0.5 \pm 0.33|\vec{p}|/m_q, \quad (5.58)$$

其中，夸克热质量大小如5.1.1节所述， $m_q = 0.8T$ 。上式与 HTL 结果(5.54)式一致。在中等动量区域， $|\vec{p}| \sim T$ ，等离子激发的色散关系出现极小值，与 HTL 的结果一致。在高动量区域，两种激发模式均趋于自由，并且随着动量增加，等离子激发的概率快速衰减，体系的性质迅速由正常热激发主导。对谱密度求和规则(5.33)式的验证计算，我们得到

$$Z_2 \sum_{Q=\pm} Z_Q \approx 1, \quad (5.59)$$

对(5.34)式的验证计算的结果如图5.5 (下) 所示。显然，这两个求和规则都很好地满足。

对以上诸方面，我们的结果均与微扰论一致，但是二者仍存在两点不同：谱密度缺少连续激发模式；等离子激发从类空区域趋于自由。对于第一点差异，我们可从两方面理解：由(5.54)式和(5.55)式可知，连续谱在低动量和高动量区可被忽略，在中等动量区亦有

$$0.8 \leq Z_+ + Z_- \leq 1, \quad (5.60)$$

因而连续谱的激发总是次要的，也就是说，连续谱的缺失并不会影响主要物理规律；目前的谱分析方法很难确定谱的连续结构，格点 QCD 模拟计算亦有类似的困难^[217]。对于第二点差异，我们可以理解为：在中等动量区域，等离子激发模式的概率很小，这使得精确确定其色散关系变得困难，并且当其概率和连续谱可比拟时，其行为可能会受连续谱缺失的影响。自然地，由于格点 QCD 模拟计算也缺失连续谱，因此其得到的等离子激发色散关系与我们的结果类似^[217]。

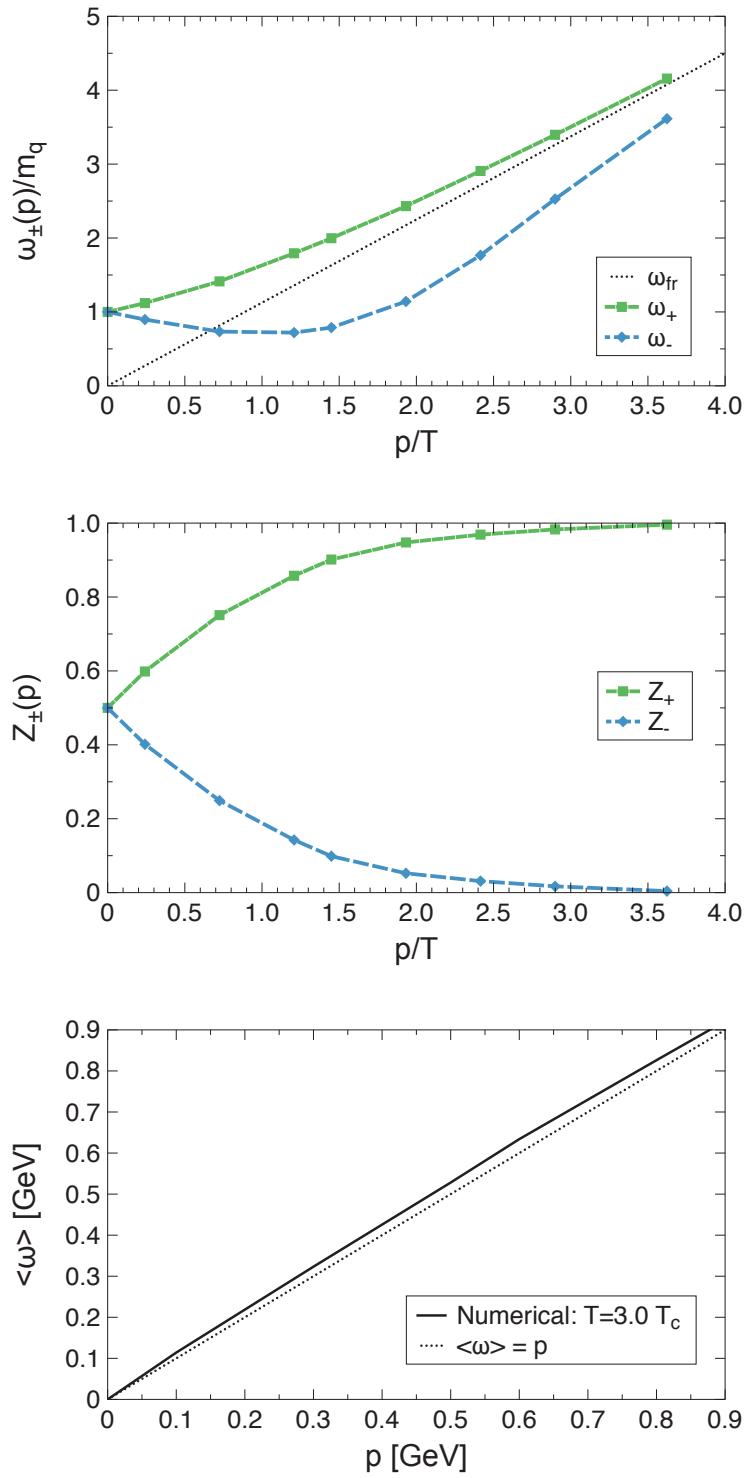


图 5.5: 在 $T = 3.0T_c$ 情况下, 通过求解夸克方程提取的夸克胶子物质中的两种激发模式对应的色散关系(上)和激发概率(中)以及求和规则(下)随三动量的模的跑动行为。

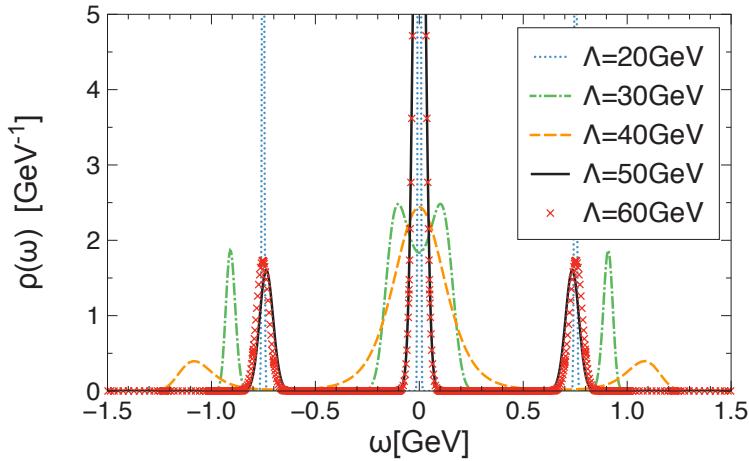


图 5.6: 在 $T = 1.1T_c$ 情况下, 通过求解夸克方程并利用 MEM 提取的夸克谱密度及其对 MEM 谱模型中的截断参数依赖的行为, 其中黑线表示谱密度开始稳定的截断 ($|\vec{p}| = 0$)。

5.2.2 较低温情况下的激发模式

在上一小节中, 我们研究了 DS 方程给出的高温情况下的夸克谱密度, 并与 HTL 的结果做了比较, 二者定量上符合得很好。当温度降低到 T_c 附近时, QCD 跑动耦合强度增大, HTL 微扰方法不再有效, 但是我们的方法则不受影响。在 $T = 1.1T_c$ 情况下, 通过求解夸克方程提取的夸克谱密度的行为如图5.6所示 ($|\vec{p}| = 0$)。由图我们发现, 此时稳定的谱密度对应有三种激发模式: 除正常热激发和等离子集体激发外, 在 $\omega = 0$ 处, 出现一种新的激发模式, 称为零模激发模式。对于求和规则(5.33)式, 具体计算表明:

$$Z_2 \sum_{Q=0,\pm} Z_Q \approx 1, \quad (5.61)$$

对于求和规则(5.34)式, 其具体计算结果如图5.7所示。很显然, 两个求和规则也都很好地满足。

在 $T_c < T < 3T_c$ 范围内, 我们进行了一系列计算, 得到的夸克谱结构和零模激发模式的概率随温度演化的行为分别如图5.8上、下两部分所示。由图知, 随着温度的升高, 零模的激发概率逐渐减小, 当 $T_s \approx 1.35T_c$ 时, 相变的激发概率减小到零, 于是我们得到零模存在的温度范围为 $T \in [T_c, T_s]$ 。零模激发模式与其它

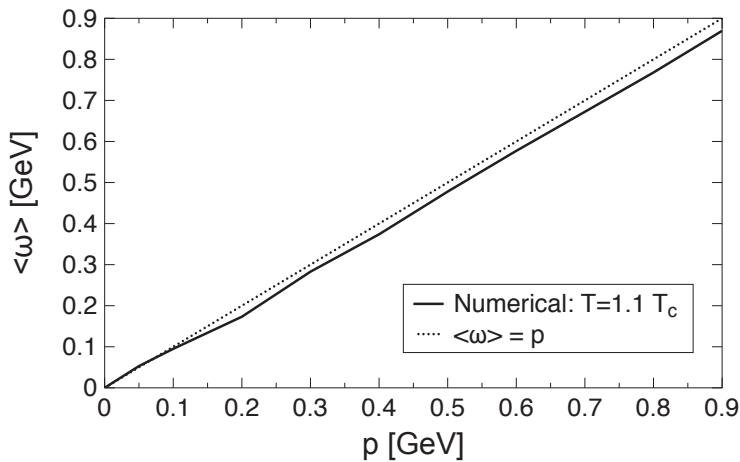


图 5.7: 在 $T = 1.1T_c$ 情况下, 通过求解夸克方程并利用 MEM 提取的夸克谱密度的求和规则随三动量的模的跑动的行为。

两种模式存在两个显著的区别: 正常热激发和等离子激发的质量标度正比于温度, $m_T \sim T$, 因而是显然的温度效应, 但零模激发的质量却与温度无关, $m_0 \sim 0$, 温度效应只是压低零模的激发概率; 由相互作用强度随温度的跑动行为(如图5.1)知, 零模出现是在红外非微扰项未被温度完全屏蔽的区域。那么, 零模的根源是什么, 其出现意味着体系具有什么样的行为?

5.3 零模激发和体系的强耦合性质

由手征相变的行为我们已知, Wigner 相在 T_c 之下一直存在, 而零模正是 Wigner 相的基本激发。当 $T \gtrsim T_c$ 时, Wigner 相由非物理态转变为物理态, 零模则相应地成为体系的主导贡献。根据5.1.2节描述的谱密度的物理意义, 我们可以想象: 一个手征对称性恢复的夸克在某点产生, 然后在空间中传播并受到体系中的微观粒子散射的过程。如果这种情况下的物质像气体, 所有粒子的平均自由程将反比于温度, $l \propto 1/T$, 由德布罗意关系得有效质量正比于温度, $m_T \propto T$, 此时夸克将被局域化; 如果物质像液体, 夸克将不断地被吸收和放出, 并获得低于真空中光速的传播速度, 从而在整个物质中传播, 其行为类似于透明介质中传播的光子。

以上我们描述了零模的定性的物理图像, 具体计算得到的 $T = 1.1T_c$ 情况下

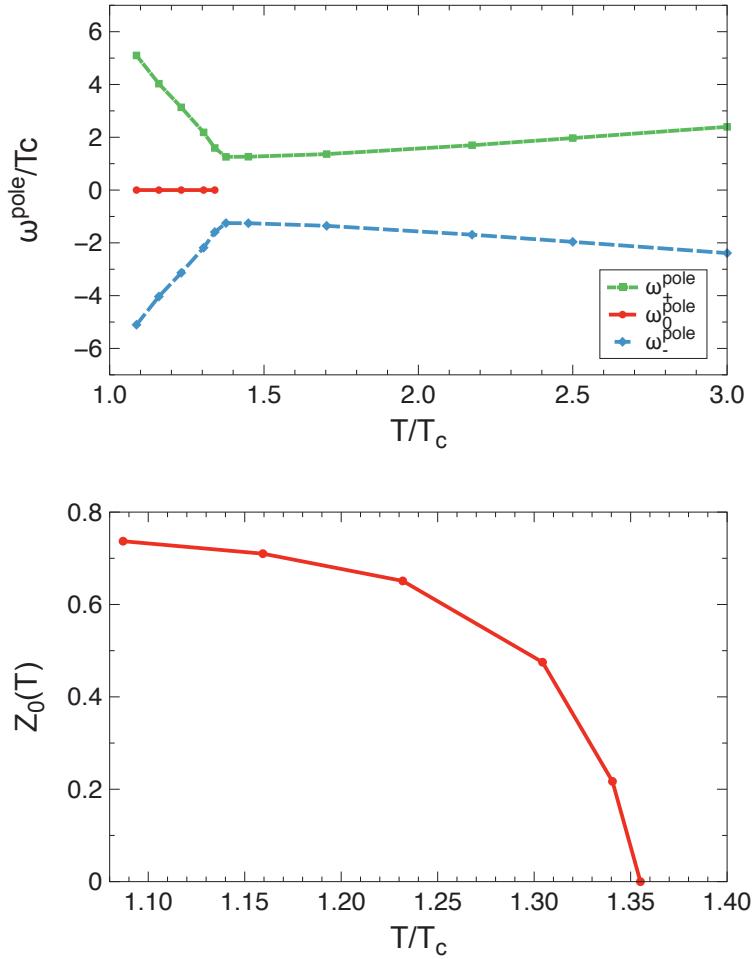


图 5.8: 通过求解夸克方程并利用 MEM 提取的夸克谱结构 (上) 和零模激发模式的激发概率 (下) 随温度演化的行为 ($|\vec{p}| = 0$)。

零模激发模式的准粒子的色散关系如图5.9 (上) 所示。由具体数据知, 在低动量区域, 色散关系有渐近行为

$$\omega_{\pm}(|\vec{p}|) \stackrel{p \approx 0}{=} m_T \frac{-0.2 |\vec{p}|}{+0.3 |\vec{p}|}, \quad (5.62)$$

$$\omega_0(|\vec{p}|) \stackrel{p \approx 0}{=} 0.8 |\vec{p}|. \quad (5.63)$$

在高动量区域, 所有激发模式均趋于自由形式。相应地, 零模的激发概率随动量的跑动行为如图5.9 (下) 所示, 由图易知, 低动量下的体系行为由零模主导。首

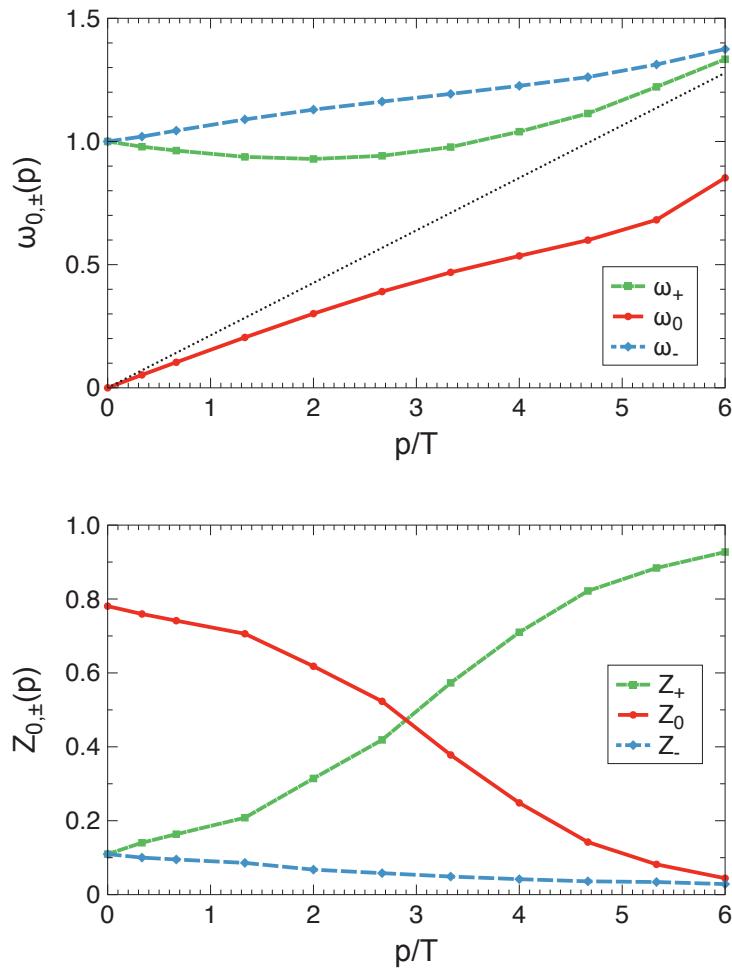


图 5.9: 在 $T = 1.1T_c$ 情况下, 通过求解夸克方程得到的夸克胶子物质中的三种激发模式对应的色散关系(上)和激发概率(下)随三动量的模的跑动的行为。

先, 由零模的色散关系可知, 其为长波模式, $\lambda \sim 1/\omega_0$, 即体系中具有长程关联。其次, 零模的色散关系处于类空区域, 这意味着零模是一种非定域激发。再次, 在低动量区域, 零模的传播速度为 $v = 0.8c$, 即夸克胶子物质对零质量夸克的折射率为 $n = c/v = 1.25$, 这意味着这种情况下的夸克胶子物质更接近液态而非气态(水对可见光的典型折射率为 1.33, 空气的折射率为 1.0003)。综上所述, 零模反应了体系的长程关联性和类液态行为, 也就是说, 这种状态的夸克胶子物质具有强耦合性质。因此, 在 $T \in [T_c, T_s]$ 范围内, 体系应该认为是强耦合夸克胶子等离子体(sQGP), 或等价地说零模是 sQGP 的特征。

另外, 若(5.5)式中的非微扰效应持续温度 T_p 增加, T_s 会增加, 但是增加的速

度 $T_s < T_p$, 具体计算表明, T_p 增加 50%, T_s 增加 30%, 达到 $1.75T_c$ 。于是, 我们得到 sQGP 存在的区间约为 $T/T_c \in [1, 1 + \Delta]$, $\Delta \simeq 0.4 - 0.8$ 。这一结果与利用格点 QCD 对有限温度下 J/Ψ 粒子的性质演化行为分析得出的结果^[218] 很好符合。如2.3节所述, 在 DS 方程框架下 DCSB 的实现由红外能区的相互作用决定, 而零模的存在又密切依赖于红外能区的相互作用的持续温度 T_p , 这说明零模是能够产生 DCSB 的非微扰效应在 T_c 之上的持续。另外, 在类 NJL 和 Yukawa 模型中, 通过考虑玻色子(例如介子)对费米子的一圈修正, 可以得到类似的零模激发^[217,219,220]。这些唯象模型的结果与我们的结果之间的联系表现为 DCSB 的实现。因此, 我们认为零模是模型无关的, 是 DCSB 在相变后的必然体现。

5.4 本章小结

本章主要研究了手征相变的临界温度 T_c 之上的温度区域内的夸克胶子物质的性质。我们首先构造了一个温度依赖的胶子模型, 然后推导了夸克传播子的谱表示和关于谱密度的求和规则, 并说明了谱密度与动力学输运系数之间的联系。通过求解夸克方程和利用最大熵谱分析方法, 我们得到了不同温度区域的夸克谱密度。通过分析谱密度, 我们可以了解体系的激发模式。具体分析表明, 在高温下, 我们的结果和微扰论的结果符合得很好, 它们具有相同的激发模式、色散关系、激发概率以及求和规则。但是在 T_c 附近, 我们发现了一种新的激发模式, 称为零模。通过分析其性质, 我们发现零模是一种非微扰效应, 即 DCSB 在 T_c 之上的一种表现。零模意味着强耦合和长程关联, 于是我们直接在非微扰 QCD 框架下说明了在 T_c 之上的附近的温度区域内的夸克胶子物质为强耦合夸克胶子等离子体(sQGP)。对于 sQGP 存在的区间, 我们可以将之表示为 $T/T_c \in [1, 1 + \Delta]$, $\Delta \simeq 0.4 - 0.8$, 这一结果与格点 QCD 模拟计算的结果很好符合。我们相信, 零模具有可观测效应, 有助于人们从微观上理解 sQGP 的近理想流体行为。

第六章 结论与讨论

6.1 结论

我们的宇宙从何而来？这是一个久远而深刻的问题。现代物理学认为宇宙来源于大爆炸，并将宇宙演化史概括为对称性逐步破缺的过程。如果将各阶段宇宙的物质形态映射到温度和密度（化学势）平面，则整个宇宙演化事实上包括了丰富的相结构和复杂的相变。由于强相互作用物质贡献可见物质的绝大部分质量，因此其在温度和密度平面的相图成为了现代物理学关心的焦点。例如，低温低密区域的强子性质、高温低密区域的夸克胶子等离子体性质和低温高密区域的致密天体内部结构等问题贯穿了强子物理、重离子碰撞物理和天体物理。各个能区的实验正在产生大量的新数据和新现象，这为理论带来了机遇和挑战。标准模型作为现代理论物理的基石，其精确性受到了大量实验的验证，但仍然存在诸多疑问。QCD 作为标准模型的强相互作用部分，描述夸克和胶子的动力学，在低能量区域具有两个明显特征：基本自由度的色禁闭和真空的手征对称性自发破缺。这两个特征都有强烈的实验证据支持：在所有能量标度的强子对撞实验中，都没有观测到夸克和胶子末态；强子质量远远大于流夸克质量之和，并且各强子态的质量差异也不能由流夸克质量效应解释。由于 QCD 跑动耦合常数在红外能区急剧增大，通常的微扰方法无法描述这两个特征。如何发展一套有效的非微扰方法是 QCD 面临的最大挑战和主要内容，也是确定热密强相互作用物质相图，进而揭示宇宙演化过程的必经之路。

格点 QCD、QCD 求和规则、手征微扰论和 Nambu 模型等方法都已被广泛应用于研究 QCD 的非微扰性质。然而，这些方法各有优缺点，例如，格点 QCD 是第一性原理的方法，却受制于计算技术的发展；唯象方法能在一定程度上抓住 QCD 的主要特征，并且易于计算，但缺乏普适性或与 QCD 的直接联系。DS 方

程是一套格林函数满足的积分方程。原则上，通过求解 DS 方程，我们可以从格林函数中得到所有关心的物理量。但是，目前的理论水平远没有达到这种理想境界。在宇宙演化的大背景下，本文紧扣热密强相互作用物质（核物质）的相变这一主题，一方面，从内容上对 QCD 相图提出了新见解；另一方面，从方法上对 DS 方程的未来应用和 QCD 相变研究提供了一些新思路。

具体地，在第二章中，我们介绍了 DS 方程方法的一般框架：推导了 DS 方程的一般形式，给出了夸克方程和介子方程的具体形式，并详细讨论了胶子模型和截断方案的构造等。在本章最后，我们展示了手征对称性自发破缺和色禁闭在 DS 方程下的实现，并给出了一些模型和截断方案下的内禀参数空间相图。总之，DS 方程方法具有良好的 QCD 基础，既能体现手征对称性自发破缺又能体现色禁闭，是一种非微扰 QCD 的连续场论方法。

在第三章中，我们根据最新 DS 方程和格点 QCD 模拟计算的结果，提出了一个新的相互作用模型，并应用于研究了零温零密极限下的介子的一些性质。一方面，该模型对应的胶子质量标度与格点 QCD 模拟计算的结果一致；另一方面，其跑动耦合常数随动量增加单调下降。在彩虹梯子近似下，通过计算新模型下的轻介子基态、激发态和反常态的质量，我们发现：质量小于 1GeV 的基态介子和实验符合得很好；激发态和反常态质量偏小；赝标和矢量介子第一径向激发态的质量的相对大小与实验结果不符。进一步计算洛伦兹不变的 BS 振幅对各介子态质量的贡献，我们定性地说明了各态的角动量-自旋结构，这在一定程度上解释了彩虹梯子近似描述激发态和反常态的不足。最后，通过分析各介子态的 BS 振幅的特征和弱衰变常数，我们发现对称性保持的彩虹梯子近似仍然具有一些模型和截断无关的性质。

在第四章中，我们推导了有限温度和有限密度下的夸克方程，并推广了零温零密下的胶子模型和截断方案，然后分别讨论了有效势判据和手征磁化率判据给出的 QCD 相图。目前，有效势判据仅适用于彩虹近似，体系在温度和密度轴上分别发生二级和一级手征对称性恢复相变，并且在 $T-\mu$ 平面上存在一级相变和二级相变线的交点——临界终点（CEP）。为了克服有效势判据在复杂顶点下失效的困难，我们提出了一种基于手征磁化率的判据，从而直接由分析相的稳定性研究相变行为。该判据只需要求解有限温度和有限密度（化学势）下的夸克方程，不显式地依赖有效势的具体形式，因而可以应用于在任何相互作用和顶点形式下研究相图。

利用此判据，我们不仅精确重现了裸顶点下的结果，还首次给出了超越彩虹近似的 BC 顶点下的 QCD 相图，并说明 CEP 的典型位置约为 $(\mu^E, T^E) \sim (1.0, 0.9)T_c$ 。计算结果表明：随禁闭宽度增加，CEP 转向温度轴，共存区宽度增加，从而说明原来不同理论方法给出相差甚远的 CEP 位置的原因是所用模型中相互作用的禁闭宽度不同；较低温度中等化学势区域的两相共存区是通常的手征对称性破缺—色禁闭相与手征对称—色退禁闭相两相共存区。

在第五章中，为了讨论 T_c 之上温度区域的夸克胶子物质的性质，我们首先构造了一种温度依赖的胶子模型，然后通过求解夸克方程并利用最大熵谱分析方法，得到了夸克胶子物质的夸克谱密度。结果表明，在高温情况下，夸克谱密度有两个奇点，分别对应正常热激发和等离子集体激发，并且其满足的色散关系和激发概率与硬热圈的结果完全一致。在 T_c 附近，夸克谱密度在 $\omega = 0$ 处出现一种新的激发模式，称为零模。通过分析零模的色散关系，我们发现零模是一种温度无关的激发模式，但其激发概率随温度升高而降低。零模是手征对称性自发破缺在 T_c 之上的一种表现。因此，零模意味着强耦合和长程关联，与体系的近理想流体行为相关。在其存在的温度区域 ($T/T_c \in [1, 1 + \Delta]$, $\Delta \simeq 0.4 - 0.8$) 内的夸克胶子物质应该认为是强耦合夸克胶子等离子体 (sQGP)。

综上所述，在内容上，本文主要完成了两点：1) 在超越平均场水平上给出了 QCD 手征相变相图，以及相图的特征量（即 CEP 的位置和两相共存区的宽度）对禁闭宽度的依赖关系；2) 在较为现实的胶子模型下，发现了 sQGP 区域存在零模激发，这种温度不依赖的激发模式反映了体系的强耦合和长程关联性质，与 sQGP 的类理想流体行为密切相关。在方法上，1) 本文提出了反映胶子质量标度的相互作用模型，它在已测试的各个方面都具有与其它模型相当的能力，而且符合最新 DS 方程和格点 QCD 模拟计算的结果，因而可用于 QCD 相变和强子性质的未来研究；2) 本文推广并明确提出了相变的手征磁化率判据，它可以应用于分析任何复杂夸克胶子顶点下的 QCD 手征相变相图。

6.2 讨论与展望

为了理解强相互作用体系在温度和密度平面的相结构和相的性质，物理学家正尝着多方面的努力，本论文工作只是其一个重要方面，或者更准确地说，我们开

辟了利用真正的非微扰 QCD 的连续场论方法研究早期宇宙强相互作用物质演化的研究，因此，后续的工作还有很多。我们未来的研究工作计划从以下三个方面展开。首先，在零温零密区域，强子的性质是手征对称性自发破缺和色禁闭的体现，因而理解这些束缚态性质能够提供理解 QCD 的线索。如果能够把决定各能标下强子性质的基本自由度与 QCD 的基本参数和基本场联系起来，那么我们将能够加深对早期宇宙的性质及其演化过程的定量理解。

其次，在有限温度和有限密度下，夸克和胶子体系经历手征对称性恢复相变和退禁闭相变。在此极端条件下，我们可以直接研究夸克和胶子的动力学。这显然也是理解宇宙演化过程的必要步骤。目前，极端相对论性重离子对撞实验已经能创造出早期宇宙的物质状态，大量新数据和新现象接踵而至，为理论研究带来了契机。

再者，由于色禁闭的事实，所有对撞实验的信号都来自于强子化末态。在对撞核心，热密核物质经历相变过程，而出射的强子喷注会携带其动力学信息。这种媒质效应会改变强子的性质，例如质量和衰变宽度，而且会在临界点附近有着显著效应。因而，将真空中 (in-vacuum) 和媒质中 (in-medium) 的 QCD 联系起来，是完整理解 QCD 和强相互作用体系行为的必要步骤。

现在已具体安排并正在进行的工作如下：

6.2.1 强子物理方面

在强子物理方向，实验数据十分丰富并且远远超前于理论。目前，格点 QCD 模拟方法正日益受到关注，连续场论方法也取得了很多重要成果。其中，DS 方程方法已在描述轻强子的基态质量谱、 π 介子电磁形状因子以及 π 和 K 介子价夸克分布函数等方面取得了成功。但是，根据本文中对彩虹梯子近似存在的缺陷的分析，我们意识到需要发展一套超越彩虹梯子近似的截断方案。最近，通过求解夸克胶子顶点的横向 Ward-Takahashi 恒等式，我们已经在夸克层次（即忽略四点及以上格林函数对夸克胶子顶点的贡献）上给出了包含反常磁矩效应的夸克胶子顶点的完整形式，同时自然地构造出了相应的正反夸克散射核，而且该方案无需引入额外的模型参数。这些新的研究进展使得我们可以在该超越彩虹梯子近似的截断方案下，结合本文构造的符合最新 DS 方程和格点 QCD 模型计算结果的相互作用

模型，解决更多强子物理问题：

(1) 质量小于 2GeV 的介子谱，包括基态、径向激发态和反常态；各态的电磁性质，例如电磁形状因子，电磁半径等；各态强衰变性质，尤其是反常态到基态的衰变宽度；各态的内部结构，即价夸克分布函数。

(2) 目前颇受实验和理论关注的奇异态，例如，反常态、混杂态和胶球等。

这些课题无论在实验还是理论方面都很有意义，并且特别重要。一旦完成了第一个目标，那么我们将进一步确认我们的方法抓住了 QCD 的主要的非微扰性质，并有信心将其用于第二个目标。目前，奇异态的实验信号还很弱，因而我们可先于实验作出理论预言。我们相信，理论和实验的相互促进一定能够加深对强子结构和 QCD 的理解。

6.2.2 QCD 相变与重离子碰撞物理

目前，相对论性重离子碰撞实验已能将我们的视野延伸到真正的强相互作用体系。我们的主要目的是描述 QCD 在温度和密度（化学势）平面的相结构以及各相的性质。关于相图，临界终点的存在性和位置在实验和理论上都仍广受争议。关于相的性质，除以上讨论的强子相外，新发现的强耦合夸克胶子等离子体（sQGP）相的类理想流体行为受到极大关注。基于本文已完成的工作，我们正在系统地开展的工作包括：

(1) 在更现实的理论模型下对相变及相图等的研究。4.3节中我们提出手征磁化率判据，使得我们可以在超越平均场水平上表征相变。我们已经建立了一个相互作用模型（第三章所述）和一个考虑了反常色磁矩效应的夸克胶子顶点模型（2.3.2 小节简单提及^[123]），但是它们都没有考虑介质效应。因此我们正将其推广到有限温度和有限密度下，并分析其对相变行为的影响。

(2) QCD 相变的实验观测信号。5.2节发现的新激发模式（即零模）与 sQGP 的强耦合性质密切相关。若进一步将其与 sQGP 的实验观测量联系起来，将是十分有意义的工作。结合我们提出的新的相互作用模型和成熟的夸克胶子顶点，我们可以计算零模的准粒子衰变宽度，并分析其对 sQGP 的粘滞系数的贡献。临界温度附近的 η/s 将可能由于零模的贡献而显著压低。再者，人们普遍相信重子数、奇异数和电荷等守恒荷的涨落及其关联可能是另一个较好的实验观测信号，但对于其在高温区的行为，尽管最近的格点 QCD 模拟计算^[221] 给出与 pNJL 预言^[222] 相

同的结果，但与较早的格点 QCD 模拟计算的结果^[223] 相差甚远。因此利用 DS 方程这一非微扰 QCD 连续场论方法对相关问题进行研究是非常必要和迫切的工作。

6.2.3 强子物理与 QCD 相变及重离子碰撞物理的交叉

以上两个方向对于理解 QCD 都十分重要，并且不可分割。一方面，当讨论强子性质时，我们会自然地问：“真空中和介质中（例如，冷核物质或者致密星体内部物质）的强子性质有何不同？”、“在极端条件下，强子如何分解为夸克和胶子？”、“QGP 中是否存在束缚态？”等等问题。另一方面，实验物理学家总是会问：“如何从末态观测量中分析出相变信号？”。显然，这些问题相互关联。再者，致密天体具有天然的高密低温环境，是研究 QCD 相变的天然实验室。因此，事实上，强子物理、QCD 相变与重离子碰撞物理和致密天体物理存在诸多交叉内容：

- (1) 从实验上确定手征凝聚随温度和密度（化学势）的演化行为是强子物理的一个重要问题。最新研究表明，手征凝聚可能是强子波函数的某种性质^[146,147]。这使得我们可以自然地将手征凝聚的演化行为与强子性质联系起来。
- (2) QCD 相图的临界终点 CEP 的实验信号是人们普通关注的问题。如果我们等价地问：“介质中的强子在 CEP 附近有什么独特的性质？”，那么 CEP 的实验信号问题将可以迎刃而解。
- (3) 在低温高密情况下，强子物质会经历一级相变（手征对称性恢复和退禁闭），并伴随着一段手征对称性部分恢复的相共存区。在高温低密情况下，夸克胶子等离子体会在 T_c 附近表现出近理想流体行为。那么，在这些特殊的区域是否能形成束缚态？如果能，那么其性质如何？这些问题不仅本身很有意思，而且有助于我们分析各相的性质及相变过程。
- (4) 在类 NJL 的点相互作用模型下，我们可以讨论介质中的重子性质。这可以帮助我们寻找相变的实验信号，而且与中子星的结构及核心坍缩型超新星爆发等致密天体物理研究密切相关。中子星及超新星内部为高密环境，其组分（强子，或夸克，或强子与夸克混合）直接影响星体的结构、性质及爆发过程。况且核心坍缩型超新星爆发过程与惯性约束核聚变过程完全相同，其中的物质的组分及状态方程、粒子间的碰撞与反应、粒子及能量输运等核心问题实际是热密核物质的相结构及相变等基本问题，因此，相关研究不仅是揭示早期宇宙强相互作用物质演化的基础研究，还可以为解决能源等重大实际应用问题提供直接的参考。

综上所述，鉴于目前和未来的实验数据以及现有的工作基础，我们认为以上各方面工作具有高度的重要性和实际可行性。随着研究的深入，我们一定可以加深对 QCD 本身和热密强相互作用物质（核物质）相图的理解，从而加深对宇宙演化过程的认识，并为实际应用提供重要的参考。

附录 A 本文符号约定

一. 自然单位制

本文采用自然单位制,

$$\hbar = c = 1. \quad (\text{A.1})$$

基本量纲的关系为

$$[\text{length}]^{-1} = [\text{time}]^{-1} = [\text{energy}] = [\text{mass}]. \quad (\text{A.2})$$

本文采用能量单位为 GeV (或者 $1\text{GeV} = 1000\text{MeV}$), 其与国际单位制的转换因子如表A.1所示。已知的国际单位制常量为

$$c = 2.998 \times 10^{10}\text{cm/s}, \quad \hbar = 6.582 \times 10^{-22}\text{MeVs}, \quad e = -1.602 \times 10^{-19}\text{C}. \quad (\text{A.3})$$

表 A.1: 自然单位制和国际单位制转换因子。

	GeV	g	K	cm^{-1}	s^{-1}
GeV	-	1.78×10^{-24}	1.16×10^{13}	5.06×10^{13}	1.52×10^{24}
g	5.62×10^{23}	-	6.52×10^{36}	2.84×10^{37}	8.53×10^{47}
K	8.62×10^{-14}	1.53×10^{-37}	-	4.34	1.30×10^{11}
cm^{-1}	1.98×10^{-14}	3.51×10^{-38}	0.23	-	3.00×10^{10}
s^{-1}	6.58×10^{-25}	1.17×10^{-48}	7.64×10^{-12}	3.33×10^{-11}	-

二. 阎氏度规和欧氏度规

本文使用的阎氏度规和欧氏度规分别定义为

$$g_{\mu\nu}^M = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu}^E = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

若定义阎氏度规为, $g_{\mu\nu}^{M'} = -g_{\mu\nu}^M = \text{diag}\{-1, +1, +1, +1\}$, 则阎空间 M' 和欧空间 E 可通过时间分量的 Wick 转动联系起来。为了给出 $M \rightarrow M'$ 的变换关系, 我们考虑 $g_{\mu\nu}^M$ 和 $g_{\mu\nu}^{M'}$ 对应的正能解 Dirac 方程分别为

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0, \quad (\text{A.5})$$

其中, γ 矩阵定义为

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_\nu^\mu. \quad (\text{A.6})$$

于是, $M \rightarrow M'$ 的变换关系可简单的表示为

$$g_{\mu\nu}^M \rightarrow -g_{\mu\nu}^{M'}, \quad \gamma_M^\mu \rightarrow i\gamma_{M'}^\mu, \quad \gamma_M^\mu \partial_\mu \rightarrow i\gamma_{M'}^\mu \partial_\mu. \quad (\text{A.7})$$

为了给出 $M' \rightarrow E$ 的变换关系, 我们首先将费米场的生成泛函表示为显含度规的形式

$$Z_0 = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] e^{iS[\psi, \bar{\psi}, g]} = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x^\mu \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, g] \right\}, \quad (\text{A.8})$$

其中, $d^4x^\mu \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ 为坐标变换不变的积分测度。由于 Wick 转动保持真空态始终为能量最低态, 因而我们取

$$\sqrt{-\det g_{\mu\nu}^{M'}} = \sqrt{-\det g_{M'}^{\mu\nu}} = 1, \quad \sqrt{-\det g_{\mu\nu}^E} = -\sqrt{-\det g_E^{\mu\nu}} = -i. \quad (\text{A.9})$$

表 A.2: 闵氏空间和欧氏空间的变换关系。

闵空间 (M)	欧空间 (E)
$g_{\mu\nu}^M$	$-g_{\mu\nu}^E$
γ_M^μ	$i\gamma_E^\mu$
$\int d^4x_M^\mu$	$-i \int d^4x_E^\mu$
$\int d^4p_\mu^M$	$i \int d^4p_\mu^E$
\mathcal{L}_M	$-\mathcal{L}_E$

于是, $M' \rightarrow E$ 的变换关系可表示为

$$g_{\mu\nu}^{M'} \rightarrow g_{\mu\nu}^E, \quad \gamma_{M'}^\mu \rightarrow \gamma_E^\mu, \quad \int d^4x_{M'}^\mu \rightarrow -i \int d^4x_E^\mu. \quad (\text{A.10})$$

相应地, 生成泛函的指数可表示为

$$iS[\psi, \bar{\psi}; g_{M'}] = iS_{M'}[\psi, \bar{\psi}], \quad iS[\psi, \bar{\psi}; g_E] = -S_E[\psi, \bar{\psi}], \quad (\text{A.11})$$

其中, 作用量可表示为拉氏量的积分

$$S_{M'}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x^\mu \mathcal{L}_{M'}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x^\mu \mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, g_{M'}], \quad (\text{A.12})$$

$$S_E[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x^\mu \mathcal{L}_E[\psi, \bar{\psi}] = - \int d^4x^\mu \mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, g_E]. \quad (\text{A.13})$$

若约定坐标 x^μ 为逆变矢量, 动量 p_μ 为协变矢量, 则傅里叶变换定义为

$$f(x^\mu) = \int \frac{d^4p_\mu}{(2\pi)^4} \sqrt{-\det g^{\mu\nu}} e^{-ip_\mu x^\mu} f(p_\mu), \quad (\text{A.14})$$

$$f(p_\mu) = \int d^4x^\mu \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} e^{ip_\mu x^\mu} f(x_\mu). \quad (\text{A.15})$$

显然, $M' \rightarrow E$ 的动量积分测度的变换关系为, $\int d^4p_\mu^{M'} \rightarrow i \int d^4p_\mu^E$ 。

综上所述, 闵氏空间到欧氏空间的变换关系, $M \rightarrow E$, 如表A.2所示, 例如,

QCD 拉氏量可分别表示为

$$\mathcal{L}_M(x) = \bar{q}(x) \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + g \frac{\lambda^a}{2} g_{\mu\nu}^M \gamma^\mu A_a^\nu - m \right) q(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha(x) F_\alpha^{\mu\nu}(x), \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{L}_E(x) = \bar{q}(x) \left(\gamma^\mu \partial_\mu + ig \frac{\lambda^a}{2} g_{\mu\nu}^E \gamma^\mu A_a^\nu + m \right) q(x) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha(x) F_\alpha^{\mu\nu}(x). \quad (\text{A.17})$$

附录 B 夸克方程的求解方法

一. 零温零密下的夸克方程

2.3节给出，零温零密下的夸克传播子有两个独立的标量结构函数 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 。若考虑重整化手续，我们可以将 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 表示为自能结构函数 $A'(p^2)$ 和 $B'(p^2)$ 的形式，如(2.69)式和(2.72)式所示。因此，求解零温零密夸克方程可等价为求解 $A'(p^2)$ 和 $B'(p^2)$ 满足的耦合积分方程。在裸项点近似下，它们满足的方程为

$$\begin{aligned} A'(p^2) &= 1 + \frac{1}{4p^2} \text{tr}[-i\gamma^\mu \Sigma(p^2)] \\ &= 1 + \frac{4}{3p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(k^2) \frac{A(q^2)f(p, q)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} B'(p^2) &= \frac{1}{4} \text{tr}[\Sigma(p^2)] \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(k^2) \frac{3B(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

其中， $4/3$ 因子来源于色矩阵求和， $k = p - q$ ， $f(p, q) = p \cdot q + \frac{2(k \cdot p)(k \cdot q)}{k^2}$ 。类似地，在 BC 项点下，它们满足的方程为

$$\begin{aligned} A'(p^2) &= 1 + \frac{4}{3p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(k^2) \frac{1}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} \left[A(q^2) \Sigma_A f(p, q) \right. \\ &\quad \left. - B(q^2) \Delta_B h(p, q) - A(q^2) \Delta_A \frac{p^2 + q^2}{2} h(p, q) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$B'(p^2) = \frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{G}(k^2) \frac{3B(q^2) \Sigma_A + [B(q^2) \Delta_A - A(q^2) \Delta_B] h(p, q)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)}, \quad (\text{B.4})$$

其中, $h(p, q) = 2p \cdot q - \frac{2(k \cdot p)(k \cdot q)}{k^2}$ 。利用相应的重整化条件, 即可得 $A'(p^2)$ 和 $B'(p^2)$ 满足的耦合积分方程。由于其仅依赖于四动量的模方 p^2 , 我们采用 $O(4)$ 球坐标系, 并令积分动量 q 的第四分量与 p 平行, 则

$$d^4q = \frac{1}{2}q^2 \sin^2 \theta \sin \phi dq^2 d\theta d\phi d\psi, \quad p \cdot q = \sqrt{p^2 q^2} \cos \theta, \quad (\text{B.5})$$

其中, $q^2 \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, \pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$ 。因积分核与 ϕ, ψ 无关, 则

$$\frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \frac{1}{6\pi^3} \int_0^\infty q^2 dq^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta. \quad (\text{B.6})$$

于是, $A'(p^2)$ 和 $B'(p^2)$ 的方程最终可简写为

$$A'_x = 1 + \frac{1}{6\pi^3} \int_0^\infty y dy \frac{\Theta_A(x, y; A_x, B_x, A_y, B_y)}{y A_y^2 + B_y^2}, \quad (\text{B.7})$$

$$B'_x = \frac{1}{6\pi^3} \int_0^\infty y dy \frac{\Theta_B(x, y; A_x, B_x, A_y, B_y)}{y A_y^2 + B_y^2}. \quad (\text{B.8})$$

二. 有限温度和有限密度下的夸克方程

由4.1节知, 有限温度和有限密度 (化学势) 的夸克有三个独立的结构函数。若忽略胶子横向和纵向结构函数的差异, $D_T = D_L := \mathcal{G}$, 我们得到裸顶点下的夸克方程为

$$A'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) = 1 + \frac{4T}{3\vec{p}^2} \sum_l \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{G}(\vec{k}^2, \Omega_{nl})}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)} \\ \times \left\{ A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \left[\vec{p} \cdot \vec{q} + \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{p})(\vec{k} \cdot \vec{q})}{k^2} \right] + C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \frac{2\tilde{\omega}_l \Omega_{nl}(\vec{k} \cdot \vec{p})}{k^2} \right\}, \quad (\text{B.9})$$

$$C'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) = 1 + \frac{4T}{3\tilde{\omega}_n^2} \sum_l \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{G}(\vec{k}^2, \Omega_{nl})}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)} \\ \times \left\{ A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \frac{2\tilde{\omega}_n \Omega_{nl}(\vec{k} \cdot \vec{q})}{k^2} + C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l \left[1 + \frac{2\Omega_{nl}^2}{k^2} \right] \right\}, \quad (\text{B.10})$$

$$B'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) = \frac{4T}{3} \sum_l \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{3\mathcal{G}(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) B(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)}. \quad (\text{B.11})$$

若考虑胶子横向和纵向结构函数的差异，则裸顶点下的夸克方程为

$$\begin{aligned}
 A'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) &= 1 + \frac{4T}{3\vec{p}^2} \sum_l \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)} \\
 &\quad \times \left\{ A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \left[\vec{p} \cdot \vec{q} D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) + \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{p})(\vec{k} \cdot \vec{q})}{k^2} D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) \right. \right. \\
 &\quad + \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{p})(\vec{k} \cdot \vec{q})}{\vec{k}^2} D_T(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) - \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{p})(\vec{k} \cdot \vec{q})}{\vec{k}^2} D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) \Big] \\
 &\quad \left. + C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \frac{2\tilde{\omega}_l \Omega_{nl}(\vec{k} \cdot \vec{p})}{k^2} D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) \right\}, \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) &= 1 + \frac{4T}{3\tilde{\omega}_n^2} \sum_l \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)} \\
 &\quad \times \left\{ A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \frac{2\tilde{\omega}_n \Omega_{nl}(\vec{k} \cdot \vec{q})}{k^2} D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) + C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l \right. \\
 &\quad \left. \times \left[2D_T(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) - D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) + \frac{2\Omega_{nl}^2}{k^2} D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) \right] \right\}, \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

$$B'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) = \frac{4T}{3} \sum_l \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{[2D_T(\vec{k}^2, \Omega_{nl}) + D_L(\vec{k}^2, \Omega_{nl})] B(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)}. \tag{B.14}$$

在 BC 顶点下，我们忽略胶子横向和纵向结构函数的差异，得到结构函数 A' 、 B'

和 C' 满足的方程为

$$\begin{aligned}
 B'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) = & \frac{4T}{3} \sum_l \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)} \\
 & \times \left\{ B(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \left[\Sigma_A \left(3 - \frac{\vec{k}^2}{k^2} \right) + \Sigma_C \frac{\vec{k}^2}{k^2} \right] + B(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \frac{\Delta_C}{2} \right. \\
 & \times \left[(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_l)^2 - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \Omega_{nl}(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_l)}{k^2} \right] + B(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \frac{\Delta_A}{2} \\
 & \times \left[(\vec{p} + \vec{q})^2 - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \vec{k} \cdot (\vec{p} + \vec{q})}{k^2} \right] - C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Delta_B \\
 & \times \left[(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_l) \tilde{\omega}_l - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \Omega_{nl} \tilde{\omega}_l}{k^2} \right] - A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Delta_B \\
 & \left. \times \left[(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{q} - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \vec{k} \cdot \vec{q}}{k^2} \right] \right\}, \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) &= 1 + \frac{4T}{3\vec{p}^2} \sum_l \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)} \\
&\times \left\{ B(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) \Delta_B \left[\frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \vec{k} \cdot \vec{p}}{k^2} - \vec{p} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) \right] + A(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) \Sigma_A \right. \\
&\times \left[\frac{2(\vec{k} \cdot \vec{p})(\vec{k} \cdot \vec{q})}{k^2} - \frac{\vec{k}^2(\vec{p} \cdot \vec{q})}{k^2} + \vec{p} \cdot \vec{q} \right] + A(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) \Sigma_C \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q}) \vec{k}^2}{k^2} \\
&+ C(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) (\Sigma_A + \Sigma_C) \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p}) \Omega_{nl} \tilde{\omega}_l}{k^2} - A(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) \Delta_A \left[\vec{p}^2 \vec{q}^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}(\vec{p}^2 + \vec{q}^2)}{2} - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q})(\vec{p}^2 \vec{k} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 \vec{k} \cdot \vec{p})}{2k^2} \right] + A(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) \\
&\times \Delta_C \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{2} \left[(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_l)^2 - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \Omega_{nl} (\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_l)}{k^2} \right] - C(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) \\
&\times \Delta_A \frac{\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot \vec{q}}{2} \left[\tilde{\omega}_l (\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_l) - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \Omega_{nl} \tilde{\omega}_l}{k^2} \right] - C(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) \\
&\times \left. \Delta_C \frac{\tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l + \tilde{\omega}_l^2}{2} \left[\vec{p} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \vec{k} \cdot \vec{p}}{k^2} \right] \right\}, \quad (B.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2) &= 1 + \frac{4T}{3\tilde{\omega}_n^2} \sum_l \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{q}^2 A^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + \tilde{\omega}_l^2 C^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) + B^2(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2)} \\
&\times \left\{ B(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Delta_B \left[\frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \Omega_{nl} \tilde{\omega}_n}{k^2} - \tilde{\omega}_n (\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_l) \right] + A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \right. \\
&\times (\Sigma_A + \Sigma_C) \frac{\Omega_{nl} \tilde{\omega}_n \vec{k} \cdot \vec{q}}{k^2} + C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Sigma_A \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l (3 - \frac{\vec{k}^2}{k^2}) + \Sigma_C \\
&\times C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \left[\frac{\Omega_{nl}^2 \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l}{k^2} - \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l \right] - A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Delta_A \frac{\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2}{2} \left[\tilde{\omega}_n^2 + \right. \\
&+ \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \Omega_{nl} \tilde{\omega}_n}{k^2} \left. \right] - A(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Delta_C \frac{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l}{2} \left[\vec{p} \cdot \vec{q} + \right. \\
&+ \vec{q}^2 - \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \vec{k} \cdot \vec{q}}{k^2} \left. \right] - C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Delta_C \left[\tilde{\omega}_n^2 \tilde{\omega}_l^2 + \frac{\tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l (\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\omega}_l^2)}{2} \right. \\
&- \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) (\tilde{\omega}_n^2 \tilde{\omega}_l + \tilde{\omega}_l^2 \tilde{\omega}_n) \Omega_{nl}}{2k^2} \left. \right] + C(\tilde{\omega}_l^2, \vec{q}^2) \Delta_A \frac{\tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_l}{2} \left[(\vec{p} + \vec{q})^2 \right. \\
&- \left. \frac{k \cdot (\tilde{p} + \tilde{q}) \vec{k} \cdot (\vec{p} + \vec{q})}{k^2} \right] \left. \right\}. \quad (B.17)
\end{aligned}$$

由于结构函数依赖于 Matsubara 频率和三动量的模方 \vec{p}^2 , 我们采用 $O(3)$ 球坐标系, 并令积分动量 \vec{q} 的 z 方向与 \vec{p} 平行,

$$d^3\vec{q} = \vec{q}^2 d|\vec{q}| \sin \theta d\theta d\phi, \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = \sqrt{\vec{p}^2 \vec{q}^2} \cos \theta, \quad (\text{B.18})$$

其中, $\vec{q}^2 \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ 。因积分核与 ϕ, ψ 无关, 则

$$\frac{4T}{3} \sum_l \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} = \frac{T}{3\pi^2} \sum_l \int_0^\infty \vec{q}^2 d|\vec{q}| \int_0^\pi \sin \theta d\theta. \quad (\text{B.19})$$

于是, $A'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2)$ 、 $C'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2)$ 和 $B'(\tilde{\omega}_n^2, \vec{p}^2)$ 的方程最终可简写为

$$A'_{n,x} = 1 + \frac{T}{3\pi^2} \sum_l \int_0^\infty y^2 dy \frac{\Theta_A(x, y, n, l; A_{n,x}, B_{n,x}, C_{n,x}, A_{l,y}, B_{l,y}, C_{l,y})}{y^2 A_{l,y}^2 + \tilde{\omega}_l^2 C_{l,y}^2 + B_{l,y}^2}, \quad (\text{B.20})$$

$$C'_{n,x} = 1 + \frac{T}{3\pi^2} \sum_l \int_0^\infty y^2 dy \frac{\Theta_C(x, y, n, l; A_{n,x}, B_{n,x}, C_{n,x}, A_{l,y}, B_{l,y}, C_{l,y})}{y^2 A_{l,y}^2 + \tilde{\omega}_l^2 C_{l,y}^2 + B_{l,y}^2}, \quad (\text{B.21})$$

$$B'_{n,x} = \frac{T}{3\pi^2} \sum_l \int_0^\infty y^2 dy \frac{\Theta_B(x, y, n, l; A_{n,x}, B_{n,x}, C_{n,x}, A_{l,y}, B_{l,y}, C_{l,y})}{y^2 A_{l,y}^2 + \tilde{\omega}_l^2 C_{l,y}^2 + B_{l,y}^2}. \quad (\text{B.22})$$

三. 夸克方程数值求解

为求解结构函数满足的耦合积分方程, 我们需要将其做泛函空间的离散化。零温零密、零温有限密以及有限温有限密情况的离散化方案分别为,

$$\{p_i^2\} = \{10^{t_i}\}, \quad t_i \in [-\Lambda, \Lambda], \quad (\text{B.23})$$

$$\{\theta_n, p_i^2\} = \{\arccos(z_n), 10^{t_i}\}, \quad z_n \in [-1, 1], \quad t_i \in [-\Lambda, \Lambda], \quad (\text{B.24})$$

$$\{\omega_n, |\vec{p}_i|\} = \{(2n+1)\pi T, 10^{t_i}\}, \quad n \in [-N, N], \quad t_i \in [-\Lambda, \Lambda]. \quad (\text{B.25})$$

其中, Λ 为动量截断, N 为频率截断: 动量部分采用指数形式是为了使离散点列集中在红外区域; 截断是正规化手段, 所有重整化结果与截断无关。若令 $\vec{R} = [A'_{n,i}, C'_{n,i}, B'_{n,i}]^t$, 则原始方程可表示成 \vec{R} 满足的非线性方程组

$$\vec{R} - \vec{F}(\vec{R}) = 0. \quad (\text{B.26})$$

牛顿迭代的误差函数和海森矩阵^[224] 分别定义为

$$\vec{G}(\vec{R}) = \vec{R} - \vec{F}(\vec{R}), \quad H_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial F_i(\vec{R})}{\partial R_j}. \quad (\text{B.27})$$

牛顿迭代法步骤^[225] :

- (1) 定义初值 $\vec{R}_{k=0}$, 设定计算精度 ϵ ;
- (2) 计算误差 $\vec{G}(\vec{R}_k)$, 若 $\|\vec{G}(\vec{R}_k)\| < \epsilon$, 结束 ;
- (3) 计算海森矩阵 $H(\vec{R}_k)$;
- (4) 求解迭代增量 $H(\vec{R}_k)\delta\vec{R} = -\vec{G}(\vec{R}_k)$;
- (5) 更新变量 $\vec{R}_{k+1} = \vec{R}_k + \delta\vec{R}$, 转第 (2) 步。

其中, $\|\cdot\|$ 表示矢量的欧氏模, 通常定义为 $\|\vec{V}\| = \sqrt{\sum_i v_i^2}$ 。

除直接离散化外, 我们可将结构函数做一组基函数的展开, 例如切比雪夫多项式, 然后求解展开系数满足的非线性方程组。展开方案虽然增加了计算量, 但是方程的内动量积分精度便于控制, 输出结果易于使用。另外, 牛顿迭代虽然收敛速度很快, 但是由于需要求解海森矩阵及迭代增量的线性方程组, 因而不适合方程复杂或维度很高的情况。为此, 我们常使用拟牛顿迭代法, 例如, 布莱登 (Broyden)^[226] 迭代或限制内存的布莱登迭代。

附录 C 介子方程的求解方法

一. 复平面夸克传播子

首先, 正反夸克束缚态的在壳条件为, $P^2 = -M_X^2$, 其中 M_X 为强子质量。于是, 总动量可以表示为

$$P_\mu = (\vec{P}, P_4), \quad P_4 = i\sqrt{\vec{P}^2 + M_X^2}. \quad (\text{C.1})$$

显然, 总动量为复数, 而且因介子方程(2.29)式依赖于夸克传播子 $S(q_\pm)$, 故夸克动量 q_\pm 亦为复数。因此, 我们需要求解复平面的夸克方程。通常, 我们取强子的静止系, 并将总动量均匀分配于正反夸克, 即

$$P_\mu = (\vec{0}, iM_X), \quad q_\pm = (\vec{q}, q_4 \pm \frac{iM_X}{2}). \quad (\text{C.2})$$

为了求解传播子的结构函数 $A(q_\pm^2)$ 和 $B(q_\pm^2)$, 我们考虑 q_\pm^2 在复平面上的区域

$$\Re(q_\pm^2) = q^2 - \frac{M_X^2}{4}, \quad \Im(q_\pm^2) = \pm q_4 M_X. \quad (\text{C.3})$$

显然, 实部和虚部满足的方程为

$$\Re(q_\pm^2) + \frac{M_X^2}{4} \geq \frac{\Im^2(q_\pm^2)}{M_X^2}. \quad (\text{C.4})$$

上式为复平面上的一个抛物线区域, 如图C.1所示。在遇到复平面上的奇点之前, 夸克传播子在整个抛物线内部的区域解析。取抛物线及其无穷开口处竖直路径形成

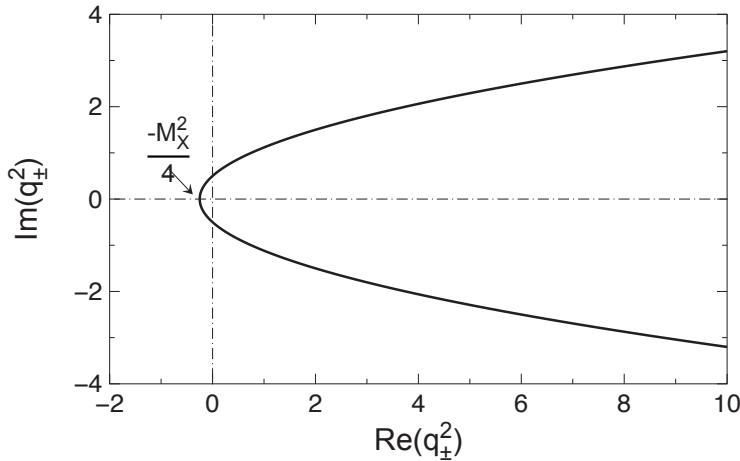


图 C.1: 介子方程中的夸克传播子依赖的复动量区域。

的封闭路径 C , 应用柯西积分得

$$F(q'^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(q^2)}{q^2 - q'^2} dq^2, \quad (\text{C.5})$$

其中, $F = A, B$ 。由(C.3)式和(C.4)式, 抛物线路径上的复动量可表示为

$$q^2 = \left(q_4 \pm \frac{iM_X}{2} \right)^2, \quad dq^2 = (2q_4 + iM_X)dq_4, \quad 0 < q_4 < \Lambda, \quad (\text{C.6})$$

其中, Λ 为正规化动量截断, 抛物线开口处路径的复动量可表示为

$$q^2 = \Lambda^2 - \frac{M_X^2}{4} \pm i\Lambda M_X t, \quad dq^2 = i\Lambda M_X dt, \quad 0 < t < 1. \quad (\text{C.7})$$

在 (q_4, t) 参数化方案下, 我们可以方便地完成路径 C 上的柯西围道积分^[227,228]

$$F(q'^2) = \frac{\oint_C \frac{F(q^2)}{q^2 - q'^2} dq^2}{\oint_C \frac{1}{q^2 - q'^2} dq^2}. \quad (\text{C.8})$$

上式利用了柯西积分恒等式 $\oint_C \frac{1}{q^2 - q'^2} dq^2 = 2\pi i$, 由于分子分母的积分核具有相同的发散行为, 因而该形式可显著提高积分围道附近的柯西积分精度。将(C.8)式代入夸克方程, 我们即可得到路径 C 上的结构函数 A 和 B 满足的积分方程, 进而

求得介子方程所需的复平面传播子。注意，以上方案在抛物线围道接近夸克传播子的奇异性时会遇到困难，这限制了我们能够求解的介子的最大质量，在彩虹梯子近似下， $M_X^{\max} \sim 1.5\text{GeV}$ 。目前，尚无一套有效的方法能够将夸克传播子解析延拓到超过奇异性的区域。因此，计算更大质量的介子态需要借助外推手段。另外，利用参数化度规方案直接在闵氏空间中求解 DS 方程^[228] 可能为解决这一问题提供一定参考价值。

二. 介子振幅矩阵求解

由(2.33)式知，若令相对动量和总动量点积为 $P \cdot k = z_k \sqrt{P^2 k^2}$ ，则介子的 BS 振幅可按 J^P 量子数分解为洛伦兹不变的标量振幅

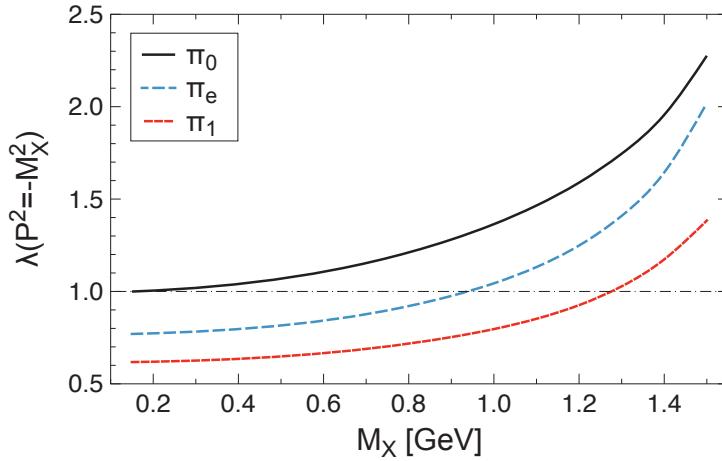
$$\Gamma_X(k, P) = \vec{\tau}_X(k, P) \vec{F}_X(k^2, z_k; P^2). \quad (\text{C.9})$$

在给定总动量时， $F_X^i(k^2, z_k; P^2)$ 为相对动量 $k^2 \in [0, \infty)$ 和 $z_k \in [-1, 1]$ 的二维函数。若对 BS 方程(2.29)式两边做洛伦兹基矢 $\vec{\tau}_X(k, P)$ 的投影，则

$$\begin{aligned} \text{tr}[\tau_X^i(k, P) \text{ LHS}] &= \sum_j^{N_X} \text{tr}[\tau_X^i(k, P) \tau_X^j(k, P)] F_X^j(k^2, z_k; P^2) \\ &= \sum_j^{N_X} M_X^{i,j}(k^2, z_k; P^2) F_X^j(k^2, z_k; P^2). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

上式简写为矢量形式为， $\text{tr}[\vec{\tau}_X(k, P) \Gamma_X(k, P)] = \mathbf{M}_X(k^2, z_k; P^2) \vec{F}_X(k^2, z_k; P^2)$ 。以彩虹梯子近似为例，BS 方程右边的投影可表示为

$$\begin{aligned} \text{tr}[\tau_X^i(k, P) \text{ RHS}] &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(k-q) \sum_j^{N_X} F_X^j(q^2, z_q; P^2) \\ &\quad \times \text{tr}[\tau_X^i(k, P) \gamma_\mu S(q_+) \tau_X^j(q, P) S(q_-) \gamma_\nu] \\ &= \sum_{q^2} \sum_{z_q} \mathbf{N}_X(k^2, z_k, q^2, z_q; P^2) \vec{F}_X(q^2, z_q; P^2), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

图 C.2: π 介子各态的本征值随质量的跑动行为。

其中,

$$\begin{aligned} N_X^{i,j}(k^2, z_k, q^2, z_q; P^2) &= -\frac{4}{3(2\pi)^3} w[q^2] w[z_q] \sum_{z_\phi} w[z_\phi] D_{\mu\nu}(k-q) \\ &\times \text{tr}[\tau_X^i(k, P) \gamma_\mu S(q_+) \tau_X^j(q, P) S(q_-) \gamma_\nu]. \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

上式中的积分权重和动量点积分别定义为

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = (2\pi) \sum_{q^2} \sum_{z_q} \sum_{z_\phi} w[q^2] w[z_q] w[z_\phi], \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} P \cdot k &= z_k \sqrt{P^2 k^2}, \\ P \cdot q &= z_q \sqrt{P^2 q^2}, \\ k \cdot q &= \sqrt{k^2 q^2} [z_k z_q + z_\phi \sqrt{(1-z_k^2)(1-z_q^2)}]. \quad (\text{C.14}) \end{aligned}$$

由于左手和右手投影相等, 介子方程(2.29)式可以改写为

$$\begin{aligned} \vec{F}_X(k^2, z_k; P^2) &= \sum_{q^2, z_q} \mathbf{M}_X^{-1}(k^2, z_k; P^2) \mathbf{N}_X(k^2, z_k, q^2, z_q; P^2) \vec{F}_X(q^2, z_q; P^2) \\ &= \sum_{q^2, z_q} \mathbf{K}_X(k^2, z_k, q^2, z_q; P^2) \vec{F}_X(q^2, z_q; P^2). \quad (\text{C.15}) \end{aligned}$$

在 $\{k^2, z_k\}$ 的离散空间中, 上式可进一步改写为本征方程^[229]

$$\lambda(P^2)\vec{F}_X(P^2) = \mathbf{K}_X(P^2)\vec{F}_X(P^2). \quad (\text{C.16})$$

随着动量 P^2 的变化, $\lambda(P^2) = 1$ 的解对应介子态。将矩阵 K_X 的本征值降序排列, 则可得到 J^P 量子数的基态、反常态和第一激径向发态等, 对 π 介子所得结果如图C.2所示。

附录 D 最大熵谱分析方法

由5.1.2节，求解夸克谱的谱密度是一个病态逆问题：在一定的方程求解和拟合精度下，存在一个谱密度的集合，能够通过谱表示给出相同的 Matsubara 传播子（或者虚时传播子），也就是说，谱密度和传播子是多对一的关系。该集合中的谱密度通常行为迥异，这使得谱分析失去意义。但是，物理的谱密度必然包含在该集合中，那么是否可以通过概率统计的方法得到与其最接近的谱密度呢？

最大熵方法（MEM）^[213,214,215,216] 即是为了解决多对一的问题而发展起来的谱分析方法，现已广泛应用于谱函数和图像重建。一般性地，我们可将问题抽象为：数据（ D ）通过模型（ M ）联系到像（ I ），其中，数据 D 为已知信息，通常包含噪声；像 I 为无噪声的待求信息；模型 M 表达数据和像之间的所有关系。首先， D 、 I 和 M 的联合概率分布表示为 $\mathcal{P}[D, I, M]$ 。由贝叶斯定理

$$\mathcal{P}[A, B] = \mathcal{P}[A|B]\mathcal{P}[B] = \mathcal{P}[B|A]\mathcal{P}[A], \quad (\text{D.1})$$

我们可得到

$$\mathcal{P}[D, I, M] = \mathcal{P}[D|I, M]\mathcal{P}[I|M]\mathcal{P}[M] = \mathcal{P}[I|D, M]\mathcal{P}[D|M]\mathcal{P}[M]. \quad (\text{D.2})$$

于是，在已知数据和模型的情况下，像的条件分布函数为

$$\mathcal{P}[I|D, M] = \frac{\mathcal{P}[D|I, M]\mathcal{P}[I|M]}{\mathcal{P}[D|M]}. \quad (\text{D.3})$$

由于数据和模型已知，并且 $\mathcal{P}[D|M]$ 与像 I 无关，因此可令其为常数，即

$$\mathcal{P}[I|D, M] \propto \mathcal{P}[D|I, M]\mathcal{P}[I|M]. \quad (\text{D.4})$$

在上式右边, 第一项表示已知像和模型的数据分布函数, 称为似然概率 (*likelihood probability*); 第二项表示已知模型的像分布函数, 与数据无关, 称为先验概率 (*priori probability*)。一旦能够确定以上两项, 我们就能够得到像的分布函数, 从而得到最可能的像。

1. 似然概率

假设已知像和模型的数据统计为独立全同事件, 由中心极限定理知, 似然概率为高斯分布

$$\mathcal{P}[D|I, M] = \frac{1}{Z_L} e^{-L[I]}, \quad (\text{D.5})$$

其中, Z_L 为归一化因子, 似然函数 $L[I]$ 定义为

$$L[I] = \sum_i^{N_D} \frac{(D_i^* - D_i^I)^2}{2\sigma_i^2}, \quad (\text{D.6})$$

D^* 表示统计数据, D^I 表示已知像和模型给出的数据。由(D.4)式可知, 当 $\mathcal{P}[I|M] = \text{const}$ 时, 最大化 $\mathcal{P}[I|D, M]$ 等价于最大化似然概率 $\mathcal{P}[D|I, M]$, 等价于最小化似然函数 $L[I]$, 即等价于通常的优度拟合 (χ^2 -fitting)。显然, 优度拟合的失效由先验概率 $\mathcal{P}[I|M]$ 的平庸行为导致。最大熵方法的关键即是构造非平庸的先验概率。

2. 先验概率

在最大熵方法中, 先验概率由已知模型 M 的像 I 携带的信息熵决定, 即

$$\mathcal{P}[I|M] = \frac{1}{Z_S} e^{\alpha S[I]}, \quad (\text{D.7})$$

其中, $Z_S \propto \alpha^{-N_I/2}$ 为归一化因子, α 为正定的标度因子。上式的熵模型为常用的 Shannon-Jaynes 信息熵

$$S[I] = \sum_i^{N_I} \left[I_i - m_i - I_i \ln \left(\frac{I_i}{m_i} \right) \right], \quad (\text{D.8})$$

其中, m 为先验估计, 若忽略任何数据输入 (即 $\mathcal{P}[D|I, M] = \text{常数}$), 像取先验估计的概率最大。显然, 标度因子 α 和先验估计 m 均为模型 M 的一部分, 因此我

们可显式地将 M 表达为 α 和 m 的函数, 即 $M = M(\alpha, m)$ 。对于 α 因子的处理, 经典最大熵方法取 $\mathcal{P}[I|D, M(\alpha, m)]$ 的极大值, Bryan 最大熵方法^[213] 则对 α 做 $[0, \infty]$ 的统计平均, 本文采用后者; 对于 m 的处理, 需要分析像的稳定性, 理想的像应不敏感于 m 。

3. MEM 谱分析步骤

以虚时夸克传播子的谱表示式(5.36)为例。第一步, 结合似然概率和先验概率, 我们可以得到夸克谱密度的分布函数为

$$\mathcal{P}[\rho|D, M(\alpha, m)] \propto e^{Q[\rho]}, \quad Q[\rho] = \alpha S[\rho] - L[\rho]. \quad (\text{D.9})$$

于是, 概率极值条件为

$$\left. \frac{\delta Q[\rho]}{\delta \rho(\omega)} \right|_{\rho=\rho_\alpha} = 0. \quad (\text{D.10})$$

可以证明, 上式的解是唯一的, 这保证了 MEM 的稳定性。以上极值条件的泛函方程在离散化空间中的自由度通常为 $N_\rho \sim \mathcal{O}(10^3)$ 。Bryan 提出的奇异值分解 (SVD)^[213] 方法可使极值搜索维度小于数据点的维度 $N_D \sim \mathcal{O}(10)$ 。首先, 将虚时传播子和谱密度做如下离散化

$$m_l = m(\omega_l) \Delta \omega, \quad l = 1, \dots, N_\rho, \quad (\text{D.11})$$

$$\rho_l = \rho(\omega_l) \Delta \omega, \quad l = 1, \dots, N_\rho, \quad (\text{D.12})$$

$$D_i = D(\tau_i), \quad i = 1, \dots, N_D. \quad (\text{D.13})$$

利用谱表示的矩阵形式(5.45), 我们可将极值条件(D.10)式表示为

$$-\alpha \ln \left(\frac{\rho_l}{m_l} \right) = \sum_i^{N_D} K_{i,l} \frac{\partial L}{\partial D_i}. \quad (\text{D.14})$$

由于谱密度为正定函数, $\rho_l > 0$, 因此可以令 $\rho_l = m_l \exp(a_l)$ 。于是, 极值条件可进一步改写为

$$-\alpha \vec{a} = K^t \overrightarrow{\frac{\partial L}{\partial D}}. \quad (\text{D.15})$$

将矩阵 K^t 做 SVD 分解, $K^t = U \Xi V^t$, 其中, U 为 $N_\rho \times N_\rho$ 的方阵, 且满足 $U^t U = \mathbf{1}$; Ξ 为 $N_\rho \times N_D$ 的矩形对角矩阵; V^t 为 $N_D \times N_D$ 的方阵, 且满足 $V^t V = \mathbf{1}$ 。将矩阵 Ξ 的对角元按降序排列, 则

$$e_{1,1} \geq e_{i,i} \dots \geq e_{N_s, N_s} > e_{N_s+1, N_s+1} \sim \dots e_{j,j} \dots \sim e_{N_D, N_D} \sim 0, \quad (\text{D.16})$$

其中, N_s 为 K^t 的奇异子空间维度, $N_s \leq \min\{N_\rho, N_D\}$ 。若取 U' 、 Ξ' 和 V'^t 分别为 U 、 Ξ 和 V^t 的 $N_\rho \times N_s$ 、 $N_s \times N_s$ 和 $N_s \times N_D$ 子矩阵, 则(D.15)式可表示为

$$-\alpha \vec{b} = \Xi' V'^t \overrightarrow{\frac{\partial L}{\partial D}}, \quad \vec{b} = U'^t \vec{a}. \quad (\text{D.17})$$

显然, 上式的维度为 N_s , 与概率极值条件(D.10)式等价。

第二步, 将输出的谱密度表达为概率平均

$$\begin{aligned} \rho_{\text{MEM}}(\omega) &= \int_0^\infty d\alpha \int \mathcal{D}\rho \rho(\omega) \mathcal{P}[\alpha, \rho | DM(m)] \\ &= \int_0^\infty d\alpha \int \mathcal{D}\rho \rho(\omega) \mathcal{P}[\rho | DM(\alpha, m)] \mathcal{P}[\alpha | DM(m)]. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

考虑到虚时关联函数的误差较小, 我们可假设 $\mathcal{P}[\rho | DM(\alpha, m)]$ 为其极值 $\rho_\alpha(\omega)$ 附近的尖锐分布。于是, 我们得到

$$\rho_{\text{MEM}}(\omega) \simeq \int_0^\infty d\alpha \rho_\alpha(\omega) \mathcal{P}[\alpha | DM(m)]. \quad (\text{D.19})$$

由贝叶斯公式,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[\alpha, D|M(m)] &= \mathcal{P}[\alpha|DM(m)]\mathcal{P}[D|M(m)] \\ &= \int \mathcal{D}\rho \mathcal{P}[\alpha, \rho, D|M(m)] \\ &= \int \mathcal{D}\rho \mathcal{P}[D|\rho M(\alpha, m)]\mathcal{P}[\rho|M(\alpha, m)]\mathcal{P}[\alpha|M(m)],\end{aligned}\quad (\text{D.20})$$

可得到 α 分布函数

$$\mathcal{P}[\alpha|DM(m)] = \int \mathcal{D}\rho \mathcal{P}[\alpha|M(m)] \frac{\mathcal{P}[D|\rho M(\alpha, m)]\mathcal{P}[\rho|M(\alpha, m)]}{\mathcal{P}[D|M(m)]}. \quad (\text{D.21})$$

由(D.4)式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[\alpha|DM(m)] &= \int \mathcal{D}\rho \mathcal{P}[\alpha|M(m)]\mathcal{P}[\rho|DM(\alpha, m)] \\ &= \mathcal{P}[\alpha|M(m)] \frac{1}{Z_L Z_S} \int \mathcal{D}\rho e^{Q[\rho]},\end{aligned}\quad (\text{D.22})$$

其中, $\mathcal{P}[\alpha|M(m)]$ 通常采用拉普拉斯规则, $\mathcal{P}[\alpha|M(m)] = \text{常数}$ 。由于 $e^{Q[\rho]}$ 为其极值 $\rho_\alpha(\omega)$ 附近的尖锐分布, 我们对上式做鞍点近似可得

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[\alpha|DM(m)] &\propto \frac{1}{Z_L Z_S} \int \mathcal{D}\rho e^{Q[\rho]} \\ &\propto \alpha^{N_\rho/2} \int \mathcal{D}\rho \exp \left\{ Q[\rho_\alpha] + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{N_\rho} \delta\rho_i \frac{\delta^2 Q[\rho_\alpha]}{\delta\rho_i \delta\rho_j} \delta\rho_j \right\} \\ &\propto \alpha^{N_\rho/2} \int \mathcal{D}\rho \exp \left\{ Q[\rho_\alpha] - \frac{1}{2} \sum_i^{N_\rho} \lambda_i (\rho_\alpha - \rho)_i^2 \right\} \\ &\propto e^{Q[\rho_\alpha]} \prod_i^{N_\rho} \left(\frac{\alpha}{\lambda_i} \right)^{1/2},\end{aligned}\quad (\text{D.23})$$

式中最后一步利用了高斯积分, $\{\lambda_i\}$ 为海森矩阵 $\frac{\delta^2 Q[\rho]}{\delta\rho_i \delta\rho_j} \Big|_{\rho=\rho_\alpha}$ 的本征值。如果我们令 $\mathcal{P}[\alpha|DM(m)]$ 的归一化因子为 Z_α , 则

$$\rho_{\text{MEM}}(\omega) \simeq \frac{1}{Z_\alpha} \int_0^\infty d\alpha \rho_\alpha(\omega) e^{Q[\rho_\alpha]} \prod_i^{N_\rho} \left(\frac{\alpha}{\lambda_i} \right)^{1/2}. \quad (\text{D.24})$$

由于分布函数 $\mathcal{P}[\alpha|DM(m)]$ 集中在某一区间 $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, 因此归一条件为

$$\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} d\alpha \mathcal{P}[\alpha|DM(m)] = 1. \quad (\text{D.25})$$

第三步, 误差分析, 即在某一能量区间 $I = [\omega_1, \omega_2]$, 求谱密度的均值和涨落。首先, 均值定义为

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{MEM}} \rangle_I &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} d\alpha \int \mathcal{D}\rho \int_I d\omega \rho(\omega) \mathcal{P}[\alpha, \rho|DM(m)] \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} d\alpha \int_I d\omega \rho_\alpha(\omega) \mathcal{P}[\alpha|DM(m)]. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

其次, 涨落定义为

$$\begin{aligned} \langle \delta \rho_{\text{MEM}} \rangle_I &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} d\alpha \int \mathcal{D}\rho \int_I d\omega \int_I d\omega' \delta\rho(\omega) \delta\rho(\omega') \mathcal{P}[\alpha, \rho|DM(m)] \\ &= -\frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} d\alpha \int_I d\omega \int_I d\omega' \left[\frac{\delta^2 Q}{\delta\rho(\omega) \delta\rho(\omega')} \right]_{\rho=\rho_\alpha}^{-1} \mathcal{P}[\alpha|DM(m)]. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

第四步, 测试先验估计 m 的敏感性, 例如, 改变 m 的标度或者截断, 分析谱密度的变化。若考虑高能区域的微扰论结果, 则 $m(\omega \rightarrow \infty)$ 的渐近行为已知。至此, 我们已完成了最大熵谱分析的所有步骤。

参考文献

- [1] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, (1975).
- [2] J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and K. Tamvakis, “*Grand unification in simple supergravity*”, *Phys. Lett. B* **121**, 123–129 (1983).
- [3] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*. Benjamin Cummings, (2002).
- [4] A. Guth, *The Inflationary Universe*. Basic Books, (1998).
- [5] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*. Westview Press, (1994).
- [6] G. M. Fuller, G. J. Mathews, and C. R. Alcock, “*Quark-Hadron Phase-Transition in the Early Universe - Isothermal Baryon-Number Fluctuations and Primordial Nucleosynthesis*”, *Phys. Rev. D* **37**, 1380–1400 (1988).
- [7] C. Copi, D. Schramm, and M. Turner, “*Big-bang nucleosynthesis and the baryon density of the universe*”, *Science* **267**, 192–199 (1995).
- [8] W. H. Press and P. Schechter, “*Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation*”, *Astrophys. J.* **187**, 425 (1974).
- [9] K. Rajagopal, “*Mapping the QCD phase diagram*”, *Nucl. Phys. A* **661**, 150–161 (1999).
- [10] U. Heinz and M. Jacob, “*Evidence for a New State of Matter: An Assessment of the Results from the CERN Lead Beam Programme*”, preprint (2000), [arXiv:nucl-th/0002042v1](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0002042v1).

- [11] D. Rischke, “*The quark-gluon plasma in equilibrium*”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **52**, 197–296 (2004).
- [12] U. Heinz, “*The strongly coupled quark-gluon plasma created at RHIC*”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 214003 (2009).
- [13] M. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schäfer, “*Color superconductivity in dense quark matter*”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1455–1515 (2008).
- [14] M. A. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov, and J. J. M. Verbaarschot, “*Phase diagram of QCD*”, *Phys. Rev. D* **58**, 096007 (1998).
- [15] The DOE/NSF Nuclear Science Advisory Committee, “*The Frontiers of Nuclear Science, A Long Range Plan*”, preprint (2008), [arXiv:0809.3137v1](https://arxiv.org/abs/0809.3137v1).
- [16] W. Scheid, H. Muller, and W. Greiner, “*Nuclear Shock Waves in Heavy-Ion Collisions*”, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 741–745 (1974).
- [17] H. Baumgardt, J. Schott, Y. Sakamoto, E. Schopper, H. Stoecker, *et al.*, “*Shock Waves and MACH Cones in Fast Nucleus-Nucleus Collisions*”, *Z. Phys. A* **273**, 359–371 (1975).
- [18] G. Polesello, “*Introduction to LHC physics*”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **53**, 107 (2006).
- [19] CERN, “*Missing Higgs*”, 2008.
<http://public.web.cern.ch/public/en/Science/Higgs-en.html>.
- [20] CERN, “*Towards a superforce*”, 2008.
<http://public.web.cern.ch/public/en/Science/Superforce-en.html>.
- [21] K. Aamodt and the ALICE Collaboration, “*Higher Harmonic Anisotropic Flow Measurements of Charged Particles in Pb-Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ TeV*”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 032301 (2011).
- [22] S. Chatrchyan and the CMS Collaboration, “*Indications of Suppression of Excited Upsilon States in Pb-Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ TeV*”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 052302 (2011).

- [23] CERN, “*ATLAS and CMS experiments present Higgs search status*”, 2011.
<http://press.web.cern.ch/press/PressReleases/Releases2011/PR25.11E.html>.
- [24] T. Michel, “*Nuclear Instruments and Methods in Physics Research - Section A: accelerators, spectrometers, detectors and associated equipment*”, *Nucl. Instrum. Meth. A* **591**, vii (2008).
- [25] M. Harrison, S. Peggs, and T. Roser, “*The RHIC accelerator*”, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **52**, 425–469 (2002).
- [26] E. D. Courant, “*Accelerators, colliders, and snakes*”, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, 1–37 (2003).
- [27] B. Mohanty and the STAR Collaboration, “*STAR experiment results from the beam energy scan program at the RHIC*”, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38**, 124023 (2011).
- [28] C. Seife, “*New Collider Sees Hints of Quark-Gluon Plasma*”, *Science* **291**, 573 (2001).
- [29] M. Gyulassy and L. McLerran, “*New forms of QCD matter discovered at RHIC*”, *Nucl. Phys. A* **750**, 30–63 (2005).
- [30] J. Takahashi and the STAR Collaboration, “*Test of chemical freeze-out at the RHIC*”, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **36**, 064074 (2009).
- [31] S. Gupta, X. Luo, B. Mohanty, H. G. Ritter, and N. Xu, “*Scale for the Phase Diagram of Quantum Chromodynamics*”, *Science* **332**, 1525–1528 (2011).
- [32] E. Shuryak, “*Physics of strongly coupled quark-gluon plasma*”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62**, 48–101 (2009).
- [33] R. Lacey, N. Ajitanand, J. Alexander, P. Chung, W. Holzmann, M. Issah, A. Taranenko, P. Danielewicz, and H. Stöcker, “*Has the QCD Critical Point Been Signaled by Observations at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider?*”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, (2007).

- [34] I. Augustin, H. H. Gutbrod, D. Kraemer, K. Langanke, and H. Stoecker, “*New Physics at the International Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR) Next to GSI*”, preprint (2008), [arXiv:0804.0177v1](https://arxiv.org/abs/0804.0177v1).
- [35] V. Toneev, “*The NICA/MPD Project at JINR (Dubna)*”, preprint (2007), [arXiv:0709.1459v2](https://arxiv.org/abs/0709.1459v2).
- [36] S. Capstick, S. Dytman, R. Holt, X. Ji, J. Negele, and E. Swanson, “*Key Issues in Hadronic Physics*”, preprint (2000), [arXiv:hep-ph/0012238v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0012238v1).
- [37] S. L. Glashow, “*Partial-symmetries of weak interactions*”, *Nucl. Phys.* **22**, 579–588 (1961).
- [38] S. Weinberg, “*A Model of Leptons*”, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264–1266 (1967).
- [39] A. Salam, *Elementary Particle Physics: Relativistic Groups and Analyticity : Proceedings of the Eighth Nobel Symposium*. Almqvist & Wiksell, (1968).
- [40] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge University Press, (1994).
- [41] T. Muta, *Foundation of Quantum Chromodynamics: an Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*. World Scientific Publishing Company, (1998).
- [42] T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge Theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, USA, (1988).
- [43] T. Vickey and the ATLAS and CMS Collaborations, “*Higgs Searches at the LHC*”, preprint (2008), [arXiv:0806.1330v1](https://arxiv.org/abs/0806.1330v1).
- [44] M. Gell-mann, “*The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry*”, California Institute of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20, TID-12608 (1961).
- [45] Y. Ne’eman, “*Derivation of Strong Interactions From a Gauge Invariance*”, *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).
- [46] M. Gell-mann, “*A Schematic Model of Baryons and Mesons*”, *Phys. Lett.* **8**, 214–215 (1964).

- [47] G. Zweig, “*An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*”, CERN Report 8182/TH.401 (1964).
- [48] W. A. Bardeen, H. Fritzsch, and M. Gell-mann, “*Light-Cone Algebra, π^0 Decay and $e^+ e^-$ Annihilation*”, preprint (2002), [arXiv:hep-ph/0211388v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0211388v1).
- [49] E. Bloom, D. Coward, H. DeStaeler, J. Drees, G. Miller, L. Mo, R. Taylor, M. Breidenbach, J. Friedman, G. Hartmann, and H. Kendall, “*High-Energy Inelastic e-p Scattering at 6° and 10°*”, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930–934 (1969).
- [50] M. Breidenbach, J. Friedman, H. Kendall, E. Bloom, D. Coward, H. DeStaeler, J. Drees, L. Mo, and R. Taylor, “*Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering*”, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 935–939 (1969).
- [51] R. Brandelik, W. Braunschweig, K. Gather, V. Kadansky, K. Lübelsmeyer, and et al, “*Evidence for planar events in $e^+ e^-$ annihilation at high energies*”, *Phys. Lett. B* **86**, 243–249 (1979).
- [52] D. J. Gross and F. Wilczek, “*Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*”, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343–1346 (1973).
- [53] H. Politzer, “*Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*”, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346–1349 (1973).
- [54] H. Politzer, “*Setting the scale for predictions of asymptotic freedom*”, *Phys. Rev. D* **9**, 2174–2175 (1974).
- [55] D. Gross and F. Wilczek, “*Asymptotically Free Gauge Theories. I*”, *Phys. Rev. D* **8**, 3633–3652 (1973).
- [56] D. Gross and F. Wilczek, “*Asymptotically free gauge theories. II*”, *Phys. Rev. D* **9**, 980–993 (1974).
- [57] A. Pich, “*Quantum Chromodynamics*”, preprint (1995), [arXiv:hep-ph/9505231v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9505231v1).
- [58] K. Nakamura and Particle Data Group, “*Review of Particle Physics*”, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37**, 075021 (2010).

- [59] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “*Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II*”, Phys. Rev. **124**, 246–254 (1961).
- [60] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “*Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*”, Phys. Rev. **122**, 345–358 (1961).
- [61] T. Hatsuda and T. Kunihiro, “*QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian*”, Phys. Rep. **247**, 221–367 (1994).
- [62] S. Weinberg, “*Phenomenological Lagrangians*”, Physica A: Stat. Mech. Appl. **96**, 327–340 (1979).
- [63] S. Scherer, “*Introduction to chiral perturbation theory*”, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277–538 (2003).
- [64] M. Lüscher, “*Anomalies of the free loop wave equation in the WKB approximation*”, Nucl. Phys. B **173**, 365–396 (1980).
- [65] M. Lüscher, “*Symmetry-breaking aspects of the roughening transition in gauge theories*”, Nucl. Phys. B **180**, 317–329 (1981).
- [66] S. Mandelstam, “*Vortices and quark confinement in non-abelian gauge theories*”, Phys. Lett. B **53**, 476–478 (1975).
- [67] S. Mandelstam, “*Vortices and quark confinement in non-Abelian gauge theories II*”, Phys. Rep. **23**, 245–249 (1976).
- [68] A. Polyakov, “*Quark confinement and topology of gauge theories*”, Nucl. Phys. B **120**, 429–458 (1977).
- [69] G. ’t Hooft, “*The Topological Mechanism for Permanent Quark Confinement in a Non-Abelian Gauge Theory*”, Phys. Scr. **25**, 133–142 (1982).
- [70] Y. Koma, M. Koma, J. M. Nieves, E. Oset, and M. J. Vicente-Vacas, “*Heavy quark potentials derived from lattice QCD*”, AIP Conf. Proc. **1322**, 298–306 (2010).

- [71] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1.* Butterworth-Heinemann, (1980).
- [72] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 2.* Butterworth-Heinemann, (1980).
- [73] C. D. Roberts and A. G. Williams, “*Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics*”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477–575 (1994).
- [74] C. D. Roberts, M. S. Bhagwat, A. Höll, and S. V. Wright, “*Aspects of hadron physics*”, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **140**, 53–116 (2007).
- [75] C. D. Roberts, “*Hadron properties and Dyson-Schwinger equations*”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **61**, 50–65 (2008).
- [76] L. McLerran and R. D. Pisarski, “*Phases of dense quarks at large N_c* ”, *Nucl. Phys. A* **796**, 83–100 (2007).
- [77] O. Oliveira and P. Bicudo, “*Running gluon mass from a Landau gauge lattice QCD propagator*”, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38**, 045003 (2011).
- [78] S.-x. Qin, L. Chang, Y.-x. Liu, C. Roberts, and D. Wilson, “*Interaction model for the gap equation*”, *Phys. Rev. C* **84**, 042202 (2011).
- [79] S.-x. Qin, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts, and D. J. Wilson, “*Investigation of rainbow-ladder truncation for excited and exotic mesons*”, *Phys. Rev. C* **85**, 035202 (2012).
- [80] S.-x. Qin, L. Chang, H. Chen, Y.-x. Liu, and C. D. Roberts, “*Phase Diagram and Critical End Point for Strongly Interacting Quarks*”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 172301 (2011).
- [81] S.-x. Qin, L. Chang, Y.-x. Liu, and C. Roberts, “*Quark spectral density and strongly-coupled quark-gluon plasma*”, *Phys. Rev. D* **84**, 014017 (2011).
- [82] T. DeGrand and C. DeTar, *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing Company, (2006).
- [83] Z. Fodor and C. Hoelbling, “*Light hadron masses from lattice QCD*”, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 449–495 (2012).

- [84] E. Laermann and O. Philipsen, “*Lattice QCD at finite temperature*”, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, 163–198 (2003).
- [85] L. Reinders, “*Hadron properties from QCD sum rules*”, *Phys. Rep.* **127**, 1–97 (1985).
- [86] A. V. Radyushkin, “*Introduction to QCD Sum Rule Approach*”, preprint (2001), [arXiv:hep-ph/0101227v2](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0101227v2).
- [87] F. Dyson, “*The S matrix in quantum electrodynamics*”, *Phys. Rev.* **75**, 1736–1755 (1949).
- [88] J. S. Schwinger, “*On the Green’s functions of quantized fields. 1.*”, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37**, 452–455 (1951).
- [89] J. S. Schwinger, “*On the Green’s functions of quantized fields. 2.*”, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37**, 455–459 (1951).
- [90] L. Faddeev and V. Popov, “*Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field*”, *Phys. Lett. B* **25**, 29–30 (1967).
- [91] E. Salpeter and H. Bethe, “*A Relativistic equation for bound state problems*”, *Phys. Rev.* **84**, 1232–1242 (1951).
- [92] J. Taylor, “*Relativistic Three-Particle Equations. I*”, *Phys. Rev.* **150**, 1321–1330 (1966).
- [93] R. T. Cahill, C. D. Roberts, and J. Praschifka, “*Baryon structure and QCD*”, *Aust. J. Phys.* **42**, 129 (1989).
- [94] U. Löring, K. Kretzschmar, B. C. Metsch, and H. R. Petry, “*Relativistic quark models of baryons with instantaneous forces*”, *Eur. Phys. J. A* **10**, 309–346 (2001).
- [95] L. D. Faddeev, “*Scattering theory for a three particle system*”, *Sov. Phys. JETP* **12**, 1014–1019 (1961).
- [96] C. H. Llewellyn Smith, “*A relativistic formulation of the quark model for mesons*”, *Ann. Phys.* **53**, 521–558 (1969).

- [97] H. Munczek and A. Nemirovsky, “*Ground-state $q\bar{q}$ mass spectrum in quantum chromodynamics*”, *Phys. Rev. D* **28**, 181–186 (1983).
- [98] P. Jain and H. J. Munczek, “ *$q\bar{q}$ bound states in the Bethe-Salpeter formalism*”, *Phys. Rev. D* **48**, 5403–5411 (1993).
- [99] P. Maris and C. D. Roberts, “ *π - and K -meson Bethe-Salpeter amplitudes*”, *Phys. Rev. C* **56**, 3369–3383 (1997).
- [100] T. Meissner, “*The mixed quark-gluon condensate from an effective quark-quark interaction*”, *Phys. Lett. B* **405**, 8–13 (1997).
- [101] P. Maris and P. Tandy, “*Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants*”, *Phys. Rev. C* **60**, 055214 (1999).
- [102] P. Maris and C. D. Roberts, “*Dyson-Schwinger equations: A tool for hadron physics*”, *Int. J. Mod. Phys. E* **12**, 297–365 (2003).
- [103] A. Höll, A. Krassnigg, P. Maris, C. Roberts, and S. Wright, “*Electromagnetic properties of ground-state and excited-state pseudoscalar mesons*”, *Phys. Rev. C* **71**, 065204 (2005).
- [104] M. S. Bhagwat, A. Krassnigg, P. Maris, and C. D. Roberts, “*Mind the gap*”, *Eur. Phys. J. A* **31**, 630–637 (2007).
- [105] G. Eichmann, I. Cloët, R. Alkofer, A. Krassnigg, and C. Roberts, “*Toward unifying the description of meson and baryon properties*”, *Phys. Rev. C* **79**, (2009).
- [106] T. Nguyen, A. Bashir, C. Roberts, and P. Tandy, “*Pion and kaon valence-quark parton distribution functions*”, *Phys. Rev. C* **83**, (2011).
- [107] G. Eichmann, “*Nucleon electromagnetic form factors from the covariant Faddeev equation*”, *Phys. Rev. D* **84**, (2011).
- [108] A. Aguilar, D. Binosi, J. Papavassiliou, and J. Rodríguez-Quintero, “*Nonperturbative comparison of QCD effective charges*”, *Phys. Rev. D* **80**, 085018 (2009).

- [109] A. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou, “*Unquenching the gluon propagator with Schwinger-Dyson equations*”, preprint (2012),
[arXiv:1204.3868](https://arxiv.org/abs/1204.3868).
- [110] P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, M. B. Parappilly, and A. G. Williams, “*Unquenched gluon propagator in Landau gauge*”, *Phys. Rev. D* **70**, 034509 (2004).
- [111] A. Cucchieri, D. Dudal, T. Mendes, and N. Vandersickel, “*Massive gluon propagator at zero and finite temperature*”, preprint (2012),
[arXiv:1202.0639](https://arxiv.org/abs/1202.0639).
- [112] J. Ward, “*An Identity in Quantum Electrodynamics*”, *Phys. Rev.* **78**, 182–182 (1950).
- [113] J. Taylor, “*Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills field*”, *Nucl. Phys. B* **33**, 436–444 (1971).
- [114] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, “*Renormalization of gauge theories*”, *Ann. Phys.* **98**, 287–321 (1976).
- [115] A. A. Slavnov, “*Ward identities in gauge theories*”, *Theor. Math. Phys.* **10**, 99–104 (1972).
- [116] L. von Smekal, R. Alkofer, and A. Hauck, “*The infrared behavior of gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD*”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3591–3594 (1997).
- [117] L. von Smekal, A. Hauck, and R. Alkofer, “*A solution to coupled Dyson-Schwinger equations for gluons and ghosts in Landau gauge*”, *Ann. Phys.* **267**, 1 (1998).
- [118] J. Ball and T.-W. Chiu, “*Analytic properties of the vertex function in gauge theories. I*”, *Phys. Rev. D* **22**, 2542–2549 (1980).
- [119] K.-I. Kondo, “*Longitudinal and Transverse Ward-Takahashi Identities, Anomaly and Schwinger-Dyson Equation*”, *Int. J. Mod. Phys. A* **12**, 5651–5686 (1997).

- [120] H.-x. He, F. C. Khanna, and Y. Takahashi, “*Transverse Ward-Takahashi identity for the fermion-boson vertex in gauge theories*”, *Phys. Lett. B* **480**, 222–228 (2000).
- [121] M. R. Pennington and R. Williams, “*Checking the transverse Ward-Takahashi relation at one-loop order in four dimensions*”, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **32**, 2219–2233 (2006).
- [122] H.-X. He, “*Transverse symmetry transformations and the quark-gluon vertex function in QCD*”, *Phys. Rev. D* **80**, 016004 (2009).
- [123] L. Chang, Y.-x. Liu, and C. Roberts, “*Dressed-Quark Anomalous Magnetic Moments*”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 072001 (2011).
- [124] H. J. Munczek, “*Dynamical chiral symmetry breaking, Goldstone’s theorem, and the consistency of the Schwinger-Dyson and Bethe-Salpeter equations*”, *Phys. Rev. D* **52**, 4736–4740 (1995).
- [125] A. Bender, C. D. Roberts, and L. v. Smekal, “*Goldstone theorem and diquark confinement beyond rainbow-ladder approximation*”, *Phys. Lett. B* **380**, 7–12 (1996).
- [126] L. Chang and C. D. Roberts, “*Sketching the Bethe-Salpeter Kernel*”, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 081601 (2009).
- [127] L. Chang and C. D. Roberts, “*Tracing masses of ground-state light-quark mesons*”, preprint (2011), [arXiv:1104.4821v4](https://arxiv.org/abs/1104.4821v4).
- [128] J. Bloch, “*Multiplicative renormalizability and quark propagator*”, *Phys. Rev. D* **66**, 034032 (2002).
- [129] R. Cutkosky and M. Leon, “*Normalization of Bethe-Salpeter Wave Functions and Bootstrap Equations*”, *Phys. Rev.* **135**, B1445–B1446 (1964).
- [130] N. Nakanishi, “*Normalization Condition and Normal and Abnormal Solutions of the Bethe-Salpeter Equation. II*”, *Phys. Rev.* **139**, B1401–B1406 (1965).

- [131] N. Nakanishi, “*Normalization Condition and Normal and Abnormal Solutions of the Bethe-Salpeter Equation*”, Phys. Rev. **138**, B1182–B1192 (1965).
- [132] V. Mader, G. Eichmann, M. Blank, and A. Krassnigg, “*Hadronic decays of mesons and baryons in the Dyson-Schwinger approach*”, Phys. Rev. D **84**, (2011).
- [133] P. Maris and P. Tandy, “*Electromagnetic transition form factors of light mesons*”, Phys. Rev. C **65**, 045211 (2002).
- [134] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, (1995).
- [135] M. S. Bhagwat, I. C. Cloet, and C. D. Roberts, “*Covariance, Dynamics and Symmetries, and Hadron Form Factors*”, preprint (2007),
[arXiv:0710.2059v1](https://arxiv.org/abs/0710.2059v1).
- [136] P. Maris, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, “*Pion mass and decay constant*”, Phys. Lett. B **420**, 267–273 (1998).
- [137] L. Chang, Y.-x. Liu, M. Bhagwat, C. Roberts, and S. Wright, “*Dynamical chiral symmetry breaking and a critical mass*”, Phys. Rev. C **75**, 015201 (2007).
- [138] H. Leutwyler, “*Principles of chiral perturbation theory*”, preprint (1994),
[arXiv:hep-ph/9406283](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9406283).
- [139] D. Diakonov, “*Foundations of the Constituent Quark Model*”, preprint (1996), [arXiv:nucl-th/9603023v1](https://arxiv.org/abs/nucl-th/9603023v1).
- [140] P. Maris and P. C. Tandy, “*QCD modeling of hadron physics*”, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl. **161**, 136–152 (2006).
- [141] P. C. Tandy, “*Modeling QCD for Hadron Physics*”, AIP Conf. Proc. **1374**, 139–144 (2011).
- [142] L. Chang, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, “*Selected highlights from the study of mesons*”, Chin. J. Phys. **49**, 955–1004 (2011).

- [143] L. Chang, C. D. Roberts, and D. J. Wilson, “*Hadron physics and dynamical chiral symmetry breaking*”, preprint (2012), [arXiv:1201.3918](https://arxiv.org/abs/1201.3918).
- [144] C. D. Roberts, “*Strong QCD and Dyson-Schwinger Equations*”, preprint (2012), [arXiv:1203.5341](https://arxiv.org/abs/1203.5341).
- [145] M. Gell-Mann, R. Oakes, and B. Renner, “*Behavior of current divergences under $SU(3) \times SU(3)$* ”, *Phys. Rev.* **175**, 2195–2199 (1968).
- [146] S. Brodsky, C. Roberts, R. Shrock, and P. Tandy, “*New perspectives on the quark condensate*”, *Phys. Rev. C* **82**, 022201 (2010).
- [147] L. Chang, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, “*Expanding the concept of in-hadron condensates*”, preprint (2011), [arXiv:1109.2903v2](https://arxiv.org/abs/1109.2903v2).
- [148] G. F. Chew and G. C. Wick, “*The impulse approximation*”, *Phys. Rev.* **85**, 636–642 (1952).
- [149] D. Jarecke, P. Maris, and P. Tandy, “*Strong decays of light vector mesons*”, *Phys. Rev. C* **67**, 035202 (2003).
- [150] M. Bhagwat and P. Maris, “*Vector meson form factors and their quark-mass dependence*”, *Phys. Rev. C* **77**, 025203 (2008).
- [151] A. Höll, A. Krassnigg, and C. D. Roberts, “*Pseudoscalar meson radial excitations*”, *Phys. Rev. C* **70**, 042203 (2004).
- [152] M. Diehl and G. Hiller, “*New ways to explore factorization in bdecays*”, *J. High Energy Phys.* **2001**, 067–067 (2001).
- [153] C. McNeile and C. Michael, “*The decay constant of the first excited pion from lattice QCD*”, *Phys. Lett. B* **642**, 244–247 (2006).
- [154] R. D. Pisarski and F. Wilczek, “*Remarks on the Chiral Phase Transition in Chromodynamics*”, *Phys. Rev. D* **29**, 338–341 (1984).
- [155] M. Stephanov, K. Rajagopal, and E. Shuryak, “*Signatures of the Tricritical Point in QCD*”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4816–4819 (1998).
- [156] B. Mohanty, “*QCD Phase Diagram: Phase Transition, Critical Point and Fluctuations*”, *Nucl. Phys. A* **830**, 899c–907c (2009).

- [157] R. A. Lacey, N. N. Ajitanand, J. M. Alexander, P. Chung, J. Jia, A. Taranenko, and P. Danielewicz, “*An estimate for the location of QCD critical end point*”, preprint (2007), [arXiv:0708.3512v6](https://arxiv.org/abs/0708.3512v6).
- [158] Z. Fodor and S. D. Katz, “*Lattice determination of the critical point of QCD at finite T and μ* ”, *J. High Energy Phys.* **2002**, 014–014 (2002).
- [159] R. Gavai and S. Gupta, “*On the critical end point of QCD*”, *Phys. Rev. D* **71**, 114014 (2005).
- [160] P. de Forcrand and S. Kratochvila, “*Finite density QCD with a canonical approach*”, *Nucl. Phys. B - Proc. Suppl.* **153**, 62–67 (2006).
- [161] Z. Fodor, “*Recent Result in QCD Thermodynamics from the Lattice*”, PoS **CPOD07**, 027 (2007), [arXiv:0712.2930](https://arxiv.org/abs/0712.2930).
- [162] A. Li, A. Alexandru, X. Meng, and K.-F. Liu, “*Study of QCD critical point using canonical ensemble method*”, *Nucl. Phys. A* **830**, 633c–635c (2009).
- [163] A. Li, A. Alexandru, and K.-F. Liu, “*Critical point of $N_f = 3$ QCD from lattice simulations in the canonical ensemble*”, *Phys. Rev. D* **84**, 071503 (2011).
- [164] P. d. Forcrand and O. Philipsen, “*The chiral critical line of $N_f = 2 + 1$ QCD at zero and non-zero baryon density*”, *J. High Energy Phys.* **2007**, 077 (2007).
- [165] C. Sasaki, B. Friman, and K. Redlich, “*Chiral phase transition in the presence of spinodal decomposition*”, *Phys. Rev. D* **77**, 034024 (2008).
- [166] P. Costa, M. Ruivo, and C. de Sousa, “*Thermodynamics and critical behavior in the Nambu–Jona-Lasinio model of QCD*”, *Phys. Rev. D* **77**, 096001 (2008).
- [167] W.-j. Fu, Z. Zhang, and Y.-x. Liu, “*2+1 flavor Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model at finite temperature and nonzero chemical potential*”, *Phys. Rev. D* **77**, 014006 (2008).

- [168] H. Abuki, R. Anglani, R. Gatto, G. Nardulli, and M. Ruggieri, “*Chiral crossover, deconfinement, and quarkyonic matter within a Nambu–Jona-Lasinio model with the Polyakov loop*”, *Phys. Rev. D* **78**, 034034 (2008).
- [169] B. J. Schaefer and M. Wagner, “*Three-flavor chiral phase structure in hot and dense QCD matter*”, *Phys. Rev. D* **79**, 014018 (2009).
- [170] P. Costa, H. Hansen, M. C. Ruivo, and C. A. de Sousa, “*How parameters and regularization affect the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model phase diagram and thermodynamic quantities*”, *Phys. Rev. D* **81**, 016007 (2010).
- [171] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, and M. Yahiro, “*Determination of QCD phase diagram from the imaginary chemical potential region*”, *Phys. Rev. D* **79**, 096001 (2009).
- [172] F. Karsch, B.-J. Schaefer, M. Wagner, and J. Wambach, “*Towards finite density QCD with Taylor expansions*”, *Phys. Lett. B* **698**, 256–264 (2011).
- [173] P. Kovács and Z. Szép, “*Influence of the isospin and hypercharge chemical potentials on the location of the critical end point in the μ_B -T phase diagram of the $SU(3)_L \times SU(3)_R$ chiral quark model*”, *Phys. Rev. D* **77**, 065016 (2008).
- [174] B. J. Schaefer, J. Pawłowski, and J. Wambach, “*Phase structure of the Polyakov-quark-meson model*”, *Phys. Rev. D* **76**, 074023 (2007).
- [175] H. Mao, J. Jin, and M. Huang, “*Phase diagram and thermodynamics of the Polyakov linear sigma model with three quark flavors*”, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37**, 035001 (2010).
- [176] D. Blaschke, C. D. Roberts, and S. Schmidt, “*Thermodynamic properties of a simple confining model*”, *Phys. Lett. B* **425**, 232–238 (1998).
- [177] M. He, J.-F. Li, W.-M. Sun, and H.-S. Zong, “*Quark number susceptibility around the critical end point*”, *Phys. Rev. D* **79**, 036001 (2009).
- [178] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, (2000).

- [179] A. Cucchieri, A. Maas, and T. Mendes, “*Infrared properties of propagators in Landau-gauge pure Yang-Mills theory at finite temperature*”, *Phys. Rev. D* **75**, 076003 (2007).
- [180] P. Maris, C. Roberts, S. Schmidt, and P. Tandy, “*T dependence of pseudoscalar and scalar correlations*”, *Phys. Rev. C* **63**, 025202 (2001).
- [181] H. Chen, W. Yuan, L. Chang, Y.-x. Liu, T. Klahn, and C. Roberts, “*Chemical potential and the gap equation*”, *Phys. Rev. D* **78**, 116015 (2008).
- [182] R. Jackiw, “*Functional evaluation of the effective potential*”, *Phys. Rev. D* **9**, 1686–1701 (1974).
- [183] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, “*Effective action for composite operators*”, *Phys. Rev. D* **10**, 2428–2445 (1974).
- [184] R. Haymaker, T. Matsuki, and F. Cooper, “*Comparison of alternative effective potentials for dynamical symmetry breaking*”, *Phys. Rev. D* **35**, 2567–2578 (1987).
- [185] R. W. Haymaker, “*Variational methods for composite operators*”, *Riv. Nuovo Cim.* **14**, 1–89 (1991).
- [186] Y. Mo, S.-x. Qin, and Y.-x. Liu, “*Temperature dependence of the effective bag constant and the radius of a nucleon in the global color symmetry model of QCD*”, *Phys. Rev. C* **82**, 025206 (2010).
- [187] R. Haymaker and T. Matsuki, “*Saddle-point instability in models of chiral-symmetry breaking*”, *Phys. Rev. D* **33**, 1137–1145 (1986).
- [188] A. Höll, P. Maris, and C. Roberts, “*Mean field exponents and small quark masses*”, *Phys. Rev. C* **59**, 1751–1755 (1999).
- [189] Y. Zhao, L. Chang, W. Yuan, and Y.-x. Liu, “*Chiral susceptibility and chiral phase transition in Nambu–Jona-Lasinio model*”, *Eur. Phys. J. C* **56**, 483–492 (2008).
- [190] Y. Hidaka, L. D. McLerran, and R. D. Pisarski, “*Baryons and the phase*

- diagram for a large number of colors and flavors”, Nucl. Phys. A **808**, 117–123 (2008).*
- [191] L. McLerran, K. Redlich, and C. Sasaki, “*Quarkyonic matter and chiral symmetry breaking*”, Nucl. Phys. A **824**, 86–100 (2009).
- [192] D. Rischke and G. Levin, “*Quark-Gluon Plasma. New Discoveries at RHIC: Case for the Strongly Interacting Quark-Gluon Plasma. Contributions from the RBRC Workshop held May 14-15, 2004*”, Nucl. Phys. A **750**, 1–172 (2005).
- [193] H. Song and U. Heinz, “*Extracting the QGP viscosity from RHIC data—a status report from viscous hydrodynamics*”, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **36**, 064033 (2009).
- [194] M. Müller, J. Schmalian, and L. Fritz, “*Graphene: A Nearly Perfect Fluid*”, Phys. Rev. Lett. **103**, 025301 (2009).
- [195] R. Pisarski, “*Scattering amplitudes in hot gauge theories*”, Phys. Rev. Lett. **63**, 1129–1132 (1989).
- [196] E. Braaten, R. Pisarski, and T. Yuan, “*Production of soft dileptons in the quark-gluon plasma*”, Phys. Rev. Lett. **64**, 2242–2245 (1990).
- [197] J.-P. Blaizot and E. Iancu, “*The quark-gluon plasma: collective dynamics and hard thermal loops*”, Phys. Rep. **359**, 355–528 (2002).
- [198] F. Karsch and M. Kitazawa, “*Quark propagator at finite temperature and finite momentum in quenched lattice QCD*”, Phys. Rev. D **80**, 056001 (2009).
- [199] M. Hamada, H. Kouno, A. Nakamura, T. Saito, and M. Yahiro, “*Quark propagators in confinement and deconfinement phases*”, Phys. Rev. D **81**, 094506 (2010).
- [200] P. Kovtun, D. Son, and A. Starinets, “*Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics*”, Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005).

- [201] N. Iqbal and H. Liu, “*Universality of the hydrodynamic limit in AdS/CFT and the membrane paradigm*”, *Phys. Rev. D* **79**, 025023 (2009).
- [202] A. Rebhan and D. Steineder, “*Violation of the Holographic Viscosity Bound in a Strongly Coupled Anisotropic Plasma*”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 021601 (2012).
- [203] R. Aouane, V. Bornyakov, E. Ilgenfritz, V. Mitrjushkin, M. Muller-Preussker, *et al.*, “*Landau gauge gluon and ghost propagators at finite temperature from quenched lattice QCD*”, *Phys. Rev. D* **85**, 034501 (2012).
- [204] B. Gruter, R. Alkofer, A. Maas, and J. Wambach, “*Temperature dependence of gluon and ghost propagators in Landau-gauge Yang-Mills theory below the phase transition*”, *Eur. Phys. J. C* **42**, 109–118 (2005).
- [205] A. Maas, J. Wambach, and R. Alkofer, “*The High-temperature phase of Landau-gauge Yang-Mills theory*”, *Eur. Phys. J. C* **42**, 93–107 (2005).
- [206] Y. Aoki, S. Borsányi, S. Dürr, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, and K. Szabo, “*The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II*”, *J. High Energy Phys.* **2009**, 088–088 (2009).
- [207] A. Bender, D. Blaschke, Y. Kalinovsky, and C. Roberts, “*Continuum Study of Deconfinement at Finite Temperature*”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3724–3727 (1996).
- [208] J.-P. Blaizot and J.-Y. Ollitrault, “*Collective fermionic excitations in systems with a large chemical potential*”, *Phys. Rev. D* **48**, 1390–1408 (1993).
- [209] H. Weldon, “*Structure of the quark propagator at high temperatures*”, *Phys. Rev. D* **61**, 036003 (2000).
- [210] R. Kubo, “*Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems*”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12**, 570–586 (1957).

- [211] H. Mori, “*Collective Motion of Particles at Finite Temperatures*”, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 763–783 (1962).
- [212] H. Mori, “*Transport Collective Motion and Brownian Motion*”, *Prog. Theor. Phys.* **33**, 423 (1965).
- [213] R. K. Bryan, “*Maximum entropy analysis of oversampled data problems*”, *Eur. Biophys. J.* **18**, 165–174 (1990).
- [214] D. Nickel, “*Extraction of spectral functions from Dyson-Schwinger studies via the maximum entropy method*”, *Ann. Phys.* **322**, 1949–1960 (2007).
- [215] J. A. Mueller, C. S. Fischer, and D. Nickel, “*Quark spectral properties above T_c from Dyson-Schwinger equations*”, *Eur. Phys. J. C* **70**, 1037–1049 (2010).
- [216] M. Asakawa, T. Hatsuda, and Y. Nakahara, “*Maximum entropy analysis of the spectral functions in lattice QCD*”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **46**, 459–508 (2001).
- [217] M. Kitazawa, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, “*Quark spectrum above but near critical temperature of chiral transition*”, *Phys. Lett. B* **633**, 269–274 (2006).
- [218] M. Asakawa and T. Hatsuda, “ *J/ψ and η_c in the Deconfined Plasma from Lattice QCD*”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 012001 (2004).
- [219] M. Kitazawa, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, “*Novel Collective Excitations and the Quasi-Particle Picture of Quarks Coupled with a Massive Boson at Finite Temperature*”, *Prog. Theor. Phys.* **117**, 103–138 (2007).
- [220] M. Kitazawa, T. Kunihiro, K. Mitsutani, and Y. Nemoto, “*Spectral properties of massless and massive quarks coupled with massive boson at finite temperature*”, *Phys. Rev. D* **77**, 045034 (2008).
- [221] **HotQCD** Collaboration, A. Bazavov *et al.*, “*Fluctuations and Correlations of net baryon number, electric charge, and strangeness: A comparison of lattice QCD results with the hadron resonance gas model*”, preprint (2012), [arXiv:1203.0784](https://arxiv.org/abs/1203.0784).

- [222] W.-j. Fu, Y.-x. Liu, and Y.-L. Wu, “*Fluctuations and Correlations of Conserved Charges in QCD at Finite Temperature with Effective Models*”, *Phys. Rev. D* **81**, 014028 (2010).
- [223] M. Cheng, P. Hendege, C. Jung, F. Karsch, O. Kaczmarek, *et al.*, “*Baryon Number, Strangeness and Electric Charge Fluctuations in QCD at High Temperature*”, *Phys. Rev. D* **79**, 074505 (2009).
- [224] T. J. Ypma, “*Historical Development of the Newton–Raphson Method*”, *SIAM Rev.* **37**, 531–551 (1995).
- [225] J. C. R. Bloch, “*Numerical Investigation of Fermion Mass Generation in QED*”, preprint (2002), [arXiv:hep-ph/0208074v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0208074v1).
- [226] C. G. Broyden, “*A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*”, *Math. Comp.* **19**, 577–577 (1965).
- [227] N. I. Ioakimidis, K. E. Papadakis, and E. A. Perdios, “*Numerical evaluation of analytic functions by Cauchy’s theorem*”, *BIT* **31**, 276–285 (1991).
- [228] W. Yuan, S.-x. Qin, H. Chen, and Y.-x. Liu, “*Dyson-Schwinger equations with a parametrized metric*”, *Phys. Rev. D* **81**, 114022 (2010).
- [229] M. Blank and A. Krassnigg, “*Matrix algorithms for solving (in)homogeneous bound state equations*”, *Comput. Phys. Commun.* **182**, 1391–1401 (2011).

发表文章

1. **S.-x. Qin**, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts (2011): *Phase diagram and critical endpoint for strongly-interacting quarks*, **Phys. Rev. Lett.** 106, 172301.
2. **S.-x. Qin**, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts, D. J. Wilson (2011): *Interaction model for the gap equation*, **Phys. Rev. C** 84, 042202(R).
3. **S.-x. Qin**, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts (2011): *Quark spectral density and a strongly-coupled QGP*, **Phys. Rev. D** 84, 014017.
4. **S.-x. Qin**, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts, D. J. Wilson (2012): *Investigation of rainbow-ladder truncation for excited states and exotics*, **Phys. Rev. C** 85, 035202.
5. W. Yuan, **S.-x. Qin**, H. Chen, Y.-x. Liu (2010): *Dyson-Schwinger equations with a parametrized metric*, **Phys. Rev. D** 81, 114022.
6. Y. Mo, **S.-x. Qin**, Y.-x. Liu (2010): *Temperature dependence of the effective bag constant and the radius of a nucleon in the global color symmetry model of QCD*, **Phys. Rev. C** 82, 025206.
7. **S.-x. Qin**, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts (2011): *Quark spectral function above T_c* , **AIP Conf. Proc.** 1354, 220.
8. Y.-x. Liu, **S.-x. Qin**, L. Chang, C. D. Roberts (2011): *QCD phase diagram using Dyson-Schwinger equations*, **AIP Conf. Proc.** 1354, 91.

致谢

在本文完成过程中，导师、同学、老师、家人和朋友给予了我莫大的帮助，在此一并表示感谢。

首先，感谢我的导师刘玉鑫教授，感谢他在过去五年中对我科研的悉心指导。他的严谨的治学态度和对学术的执着探索以及对学生的关心爱护使我获益良多。感谢他为课题组提供了自由宽松的科研和讨论环境，这些使得我有足够的积累完成此文。感谢他对我生活上的支持，使得我可以专心科研。感谢他支持我赴美交流学习，这是我十分珍贵的学术经历。

在此，我要感谢在美国交流研究期间的导师 C. D. Roberts 教授。他学术水平甚高，为人谦逊真诚，这使得我的美国之行十分愉快且颇具收获。他处事一丝不苟，事必躬亲的态度值得我学习终身。感谢他对我申请博士后所给予的极大帮助，这使我得到了满意的位置和新的学术起点。

我要感谢，四川大学的郭永康和吕晓夫教授，感谢他们在我选择科研方向时的指导。感谢北京大学理论物理研究所的各位老师，在他们的课上我奠定了科研的基础。感谢美国的 P. Tandy 教授和墨西哥的 A. Bashir 教授，与他们的交流讨论使我收获颇多。我要特别感谢常雷师兄，感谢他在科研中给我的极大帮助，以及在美期间对我生活上的照顾。我们的无数次讨论解决了很多科研中的实际问题，事实上，没有他的帮助，我的各项研究工作都不可能那么顺利地完成。

还要感谢与我合作的师兄和同学，袁玮、陈欢和莫原，与他们的合作十分愉快。感谢课题组的师兄师弟师妹，侯占峰、张宇、邵国运、王昆仑、辛现银、姜丽佳等，感谢他们为课题组营造和睦融洽的气氛。

感谢父母对我的默默支持和奉献。谨以此文献给我最敬爱的父母！

纪念敬爱的爷爷！

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

(必须装订在提交学校图书馆的印刷本)

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校在 一年 / 两年 / 三年以后在校园网上全文发布。

(保密论文在解密后遵守此规定)

论文作者签名： 导师签名： 日期： 年 月 日