

索取号： O413/7·141

密级：公 开

南京师范大学

硕士学位论文



Bethe-Salpeter方程及其在介子谱的应用

研究生： 李伯林

指导教师： 平加伦 教授

培养单位： 物理科学与技术学院

一级学科： 物理学

二级学科： 理论物理

完成时间： 2014年3月

答辩时间： 2014年5月21日

Bethe-Salpeter equations and their applications to meson spectrums

A dissertation submitted to
Nanjing Normal University
in partial fulfillment of
the requirements for the degree of
Master in Science

Author: LI Bo-Lin

Supervisor: Professor PING Jia-Lun

Subject: Theoretical Physics

*Institute of Physics Science and Technology,
Nanjing Normal University, Nanjing, 210023, People's Republic of China
April, 2014*

学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位是本人在导师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。本论文中除引文外，所有实验、数据和有关材料均是真实的。本论文中除引文和致谢的内容外，不包含其他人或其它机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了声明并表示了谢意。

学位论文作者签名：李伯林

日期：2014.5.27

学位论文使用授权声明

研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属南京师范大学。学校有权保存本学位论文的电子和纸质文档，可以借阅或上网公布本学位论文的部分或全部内容，可以采用影印、复印等手段保存、汇编本学位论文。学校可以向国家有关机关或机构送交论文的电子和纸质文档，允许论文被查阅和借阅。（保密论文在解密后遵守此规定）

保密论文注释：本学位论文属于保密论文，密级：公开，保密期限为_____年。

学位论文作者签名：李伯林

日期：2014.5.27

指导教师签名：

日期：

2014.5.27

摘要

量子色动力学是强子物理的基本理论，描述夸克和胶子之间色相互作用。它是一种渐近自由的规范理论，由于这一特征，夸克、胶子在高能区的问题可以通过微扰论来计算。动力学手征对称性破缺是量子色动力学的另一个特征，可以通过戴森-施温格(DS)方程来研究其特性。

强子可以通过强相互作用下守恒的重子数来分成两大类：重子和介子。重子是重子数为1的强子，而介子是重子数为0的强子。重子是费米子，而介子是玻色子。在组分夸克模型里，一个介子可以简单地描述成由一个重子数是 $\frac{1}{3}$ 的夸克和一个重子数是 $-\frac{1}{3}$ 的反夸克构成。组分夸克模型成功地描述了强子谱，以及利用群论通过味道量子数对介子进行了分类。但是组分夸克模型在对轻赝标量介子八重态(π , K , η 介子)的计算时存在一些问题。

量子色动力学对强相互作用的描述是相当成功的。量子色动力学的基本自由度是夸克和胶子。在低能领域，量子色动力学具有手征对称性动力学破缺的特征，产生的Goldstone玻色子就是轻赝标量介子，因而它们具有相对较轻的质量。它们仍然可以按照夸克模型那样来分类。

在标准模型框架下，为了对介子有一个自洽的描述，我们需要将介子视为量子色动力学框架下的复合态。这样就需要用到非微扰的方法。正规化的格点量子色动力学已经成功地解释了强子谱的基态和一部分激发态。在本工作中，我们将介子当做量子色动力学的相对论束缚态，并采用戴森-施温格方程和贝斯-萨匹塔(BS)方程来研究它们的性质。在解夸克传播子的DS方程和介子的BS方程的时候，我们采用了彩虹-梯近似和Maris-Tandy模型。MT模型的有效相互作用在红外区有一个显著的增强，这在手征对称性的动力学破缺中扮演了很重要的角色。而彩虹-梯近似只适用于计算赝标量和矢量介子的味道多重态。最后我们在戴森-施温格方程和贝斯-萨匹塔方程里面加入电磁相互作用以及考虑同位旋对称的破缺，试图来解释 π 介子以及 K 介子不同电荷态的质量分裂问题。对赝标量介子的解释结果与实验值符合的很好，但是对矢量介子的描述结果就差强人意了。

关键词： 量子色动力学，介子，戴森-施温格方程，贝斯-萨匹塔方程，电磁相互作用

影响

Abstract

Quantum Chromodynamics(QCD) is a fundamental field theory of hadron physics. It describes the color interaction between quarks and gluons. QCD is an asymptotically free gauge theory, the high-energy problem of quark and gluon can be calculated perturbatively. Dynamical chiral symmetry breaking is another feature of QCD, which can be learnt via Dyson-Schwinger equations.

Hadrons can be divided into two classes, baryons and mesons, which can be distinguished since the baryon number is a conserved quantum number. Thus, a baryon is characterized as a hadron with baryon number one, while a meson is characterized as a hadron with baryon number zero. Also a baryon is a fermion while a meson is a boson. A meson, in their simplest form, can be considered as a bound state of a quark with baryon number $\frac{1}{3}$ and an antiquark with baryon number $-\frac{1}{3}$, in the constituent quark model. These type of models are very successfully in describing the hadron spectrum and providing a consistent classification scheme for mesonic states according to their flavor content via group theory argument. Nevertheless, the calculation of the meson spectrum in terms of constitute quarks has certain drawbacks. Especially the masses of the low-lying pseudoscalar meson octet(π , K, η , η' mesons) are not easily described by constituents with masses of approximately 300 MeV.

The strong interaction is well described by the relativistic quantum field theory of QCD. And the elementary degrees of freedom of QCD are quarks and gluons. In low-energy region, the dynamical chiral symmetry breaking characterizes the QCD. The appeared (pseudo) Goldstone bosons are taken as the light pseudoscalar mesons, so they have the comparatively light masses. These particles can still be classified in the same way as in the quark model.

In order to provide a consistent description of mesons within the standard model of particle physics, it is necessary to treat the pseudoscalar mesons as composite states in the framework of QCD. Non-perturbative methods are necessary in this context, and

lattice-regularized QCD has successfully described the hadron spectrum for ground states and some excited states. Here we use a different approach which is provided by the Dyson-Schwinger equation and Bethe-Salpeter equation formalism, and we employ them in the following to study the mesons as relativistic bound states of strong interaction. In solving the quark DSE and meson BSE, we use the rainbow-ladder truncation and Maris-Tandy model in which the enhancement of the effective interaction in the infrared region plays a significant impact on the dynamical chiral symmetry breaking. The rainbow-ladder truncation is only suitable for the flavor-nonsinglet states in pseudoscalar and vector channel. For the mass splitting of pion and kaon, we introduce the electromagnetic interaction into both DSE and BSE and consider the isospin symmetry breaking. And the results for the pseudoscalar mesons are good while it is not the case for the vector mesons.

Key words: QCD, meson, Dyson-Schwinger equation, Bethe-Salpeter equation, electromagnetic effect

目 录

摘要	i
Abstract	iii
第一章 格林函数和Dyson-Schwinger/Bethe-Salpeter 方程	1
1.1 生成泛函和格林函数	1
1.2 Dyson-Schwinger 方程和Bethe-Salpeter 方程.....	4
1.3 齐次Bethe-Salpeter 方程及其归一化	6
第二章 QCD 框架下的Dyson-Schwinger 方程和Bethe-Salpeter 方程 ..	9
2.1 量子色动力学 (QCD)	9
2.2 可重整化的夸克传播子Dyson-Schwinger 方程及其解	11
2.3 Bethe-Salpeter 方程	14
2.4 介子谱	21
2.4.1 质标量介子(0^-)	21
2.4.2 矢量介子(1^-)	22
第三章 电磁相互作用对介子谱的影响	25
第四章 总结与展望	28
附录A 欧几里得空间	29
附录B 参数化和积分方法	31
§B.1 参数化	31
§B.2 积分方法	32
附录C 模型和参数	34
附录D 狄拉克结构、C 宇称和切比雪夫多项式	36
§D.1 狄拉克结构	36
§D.2 C 宇称和切比雪夫多项式	37
附录E 幂方法近似求解矩阵的最大本征值	40
参考文献	43

第一章 格林函数和Dyson-Schwinger/Bethe-Salpeter 方程

首先，我们简单地介绍一下量子场论的泛函分析方法。对n-点格林函数、n-点连接格林函数和n-点完全（单粒子不可约）格林函数给出定义（具体参见[1] 的第二章）。然后，我们根据[2]，通过对CJT 有效作用量分别求一阶、二阶泛函导数推导出Dyson-Schwinger、Bethe-Salpeter 方程。最后简要地分析齐次BS方程，从而得出它的归一化条件。

1.1 生成泛函和格林函数

为了用路径积分的方法对一个场论进行量子化，我们需要从格林函数的生成泛函开始学习。生成泛函是外源的泛函。以下各种格林函数的定义我仅仅从玻色子场的角度作简单探讨，至于费米子场的形式应该很容易推广，且后面会提到。

一个场论的完全格林函数的生成泛函可以这样定义：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\phi] \exp[i(S[\phi] + \int d^4x \phi(x) J(x))], \quad (1-1)$$

这里的 $S[\phi]$ 是场 $\phi(x)$ 的经典作用量， $J(x)$ 是与场 $\phi(x)$ 相关的外源，积分 $\int \mathcal{D}[\phi]$ 是泛函积分。

场 $\phi(x)$ 的经典作用量 $S[\phi]$ 可以这样表述：

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad (1-2)$$

这里的 $\mathcal{L}(x)$ 是场 $\phi(x)$ 的有效拉格朗日量。当需要讨论一个规范理论的时候，这个有效拉氏量里面就必须包含规范场和鬼场。当然，场 $\phi(x)$ 可以含有分量，为了表达式的简洁，各种指标暂时没有标出来。

经典作用量也可以这样表达：

$$S[\phi] = \int d^4x d^4y \phi(x) D^{-1}(x-y) \phi(y) + S_{int}[\phi] \quad (1-3)$$

$$S_{int}[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x), \quad (1-4)$$

这里的 $\mathcal{L}_{int}(x)$ 是这个理论的相互作用部分，而且通常包含至少场 $\phi(x)$ 的三次方的相互作用； $D^{-1}(x - y)$ 是场 $\phi(x)$ 的自由（裸）传播子，并且它满足这样的方程：

$$(\partial^2 + m^2)D(x - y) = -i\delta^4(x - y). \quad (1-5)$$

可见裸传播子是 $(\partial^2 + m^2)$ 的格林函数。

我们定义场 $\phi(x)$ 的n-点格林函数为

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | 0 \rangle \quad (1-6)$$

$$= \frac{1}{Z[J]} (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} Z[J] |_{J=0}. \quad (1-7)$$

特别地，两点格林函数 $G(x_1, x_2)$ 称为场 $\phi(x)$ 的传播子，因为它代表了一个粒子从 x_1 到 x_2 （或者相反）的传播特征。按照(1-6) 定义出来的格林函数一般来讲不是连接的格林函数，因为它的内部包含了非连接的部分。从费曼图的角度来讲，连接格林函数中的每一个部分都是通过至少一个传播子和余下的部分相连的。

接下来连接格林函数的生成泛函我们这样定义：

$$W[J] = -i \ln Z[J]. \quad (1-8)$$

这样n-点连接格林函数就可以仿照式(1-6) 的定义得到

$$G_c^n(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} W[J] |_{J=0}. \quad (1-9)$$

接下来，我们讲引进n-点完全（单粒子不可约）格林函数 $G_p^n(x_1, \dots, x_n)$ 的定义。从图像的角度来讲，单粒子不可约的图是一个截断的连接的费曼图。当里面的任意一根内线被切断的时候，它是不可能被分成非连接的部分的。完全格林函数的生成泛函是连接格林函数的生成泛函的勒让德变换。同时，它也被称作有效作用量。它的具体形式如下：

$$\Gamma[\nu] = W[J] - \int d^4x \phi(x) J(x), \quad (1-10)$$

这里的新的变量 $\nu(x)$ 被定义为

$$\nu(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \phi(x) \rangle_J, \quad (1-11)$$

它是场 $\phi(x)$ 在具有外源的情况下真空期望值。方程(1-10)可以看作是一种从 $[J, W]$ 到 $[\nu, \Gamma]$ 的变量代换。如果一个理论的真空态是稳定的话，当 $J = 0$ 时 $\nu = 0$ 。也就是说，除非需要考虑对称性的自发破缺，否则当 $J = 0$ 时 ν 必须等于零。

接下来，完全n-点格林函数 $G_p^n(x_1, \dots, x_n)$ 可以这样求得：

$$G_p^n(x_1, \dots, x_n) = i \frac{\delta^n}{\delta \nu(x_1) \dots \delta \nu(x_n)} \Gamma[\nu]|_{\nu=0}. \quad (1-12)$$

这样的话，有效作用量也可以写成 $\nu(x)$ 的级数展开的形式：

$$\Gamma[\nu] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_p^n(x_1, \dots, x_n) \nu(x_1) \dots \nu(x_n). \quad (1-13)$$

这里我们将给出一个简单且重要的例子。将方程(1-11)对 $J(y)$ 进行泛函求导，我们可以得出

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} = \frac{\delta \nu(x)}{\delta J(y)}. \quad (1-14)$$

另外一方面，从方程(1-10)我们可以得到

$$\frac{\delta \Gamma}{\nu(y)} = -J(y). \quad (1-15)$$

将方程(1-15)对 $\nu(y)$ 求泛函导数，我们得到

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \nu(y) \delta \nu(z)} = -\frac{\delta \nu(y)}{\delta \nu(z)}. \quad (1-16)$$

整理一下方程(1-14)和(1-16)，我们发现

$$\int d^4y \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \nu(y) \delta \nu(z)} = -\delta^4(x-z). \quad (1-17)$$

对于 $J = 0$ ，函数 $-i \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)}$ 是传播子（两点格林函数），由此我们可以得出 $-i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \nu(y) \delta \nu(z)}$ 是传播子的逆。尽管传播子包含了无数个完全的自能修正部分，但是传播子仍然是非完全的（单粒子可约的），但是传播子的逆却是单粒子不可约的。

如果我们将 $G_p^2(x, y)$ 定义为(-1)乘以传播子的逆，我们可以得到 $G_p^2(x, y)$ 的表达式：

$$G_p^2(x, y) = i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \nu(x) \delta \nu(y)}. \quad (1-18)$$

这个表达式正是方程(1-12)在 $n = 2$ 的时候的特殊表达式。接下来根据方程(1-17)，我们有

$$\int d^4y G_c^2(x, y) G_p^2(y, x) = -\delta^4(x-z). \quad (1-19)$$

以上我们定义的外源 $J(x)$ 以及经典场 $\nu(x)$ 都是一个时空点 x 的函数，因此它们可以被称为“定域”的函数。这个对于探讨基本场的性质和相互作用是非常方便的。然

而，量子场论中的束缚态并不是用基本场表示的，而是用复合场表示的。复合场被定义为多个场在同一时空点的乘积。

为了探讨复合场理论，我们跟随文献[2]，引进一个新的被称为“双定域”的源 $J(x, y)$ ，这个源依赖于两个不同的时空点 x 和 y ，同时它可以连接两个不同时空点的场。

引入双局域的源以后，生成泛函 $\mathcal{Z}[J]$ 变为

$$\mathcal{Z}_{[2]}[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp(i(S[\phi] + \int d^4x d^4y \phi(x) J(x, y) \phi(y))) . \quad (1-20)$$

这里我们仅仅考虑 $J(x) = 0$ 的简单情况。正如之前的定义 $W[J]$ 和 $\Gamma[B]$ 可以重新写成下面的形式：

$$W_{[2]}[J] = -i \ln \mathcal{Z}[J] \quad (1-21)$$

$$\Gamma_{[2]}[B] = W[J] - \int d^4x d^4y B(x, y) J(y, x) , \quad (1-22)$$

这里 $B(x, y)$ 是与源 $J(y, x)$ 对应的经典的双定域场。 $\Gamma[B]$ 可以看作为两粒子不可约有效作用量， $\Gamma[B]$ 的各阶泛函导数是各点两粒子不可约格林函数。这种情况下的 $W[J]$ 的泛函导数不是连接的，但是是双局域连接的。

1.2 Dyson-Schwinger 方程和Bethe-Salpeter 方程

Dyson-Schwinger 方程 (DSE) [3] [4] 是一个无限耦合的积分方程，它展示了量子场论的各点格林函数之间的关系，因此有时它也被称为量子场论的运动方程。我们可以从所谓的主方程(master equation)推导出Dyson-Schwinger 方程，当然主方程也是从生成泛函 $\mathcal{Z}[J]$ 推导出来的。在单粒子不可约情况下的主方程可以表述成[5]：

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} [\phi(x) + \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} \frac{\delta}{\delta \phi(y)}] = 0 , \quad (1-23)$$

方程左边第二项后面的方括号中的项是作用量求了一阶导数后的参数，也就是说在对作用量泛函求导 $\frac{\delta S}{\delta \phi(x)}$ 后得到的表达式里面的每一项 $\phi(x)$ 都要被替换成相对应的 $\phi(x) + \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} \frac{\delta}{\delta \phi(y)}$ 。这个方程就是单粒子的Dyson-Schwinger 方程。为了得到多点格林函数之间的方程，我们需要对主方程求更多阶的泛函导数。

在我们当前的工作中，需要用到一种Dyson-Schwinger 方程，也就是所谓的隙方程 (gap equation)。为了推导出隙方程以及下面要讲到的Bethe-Salpeter 方程 (BSE)，

我们根据文献[2]，而且这些方程都可以轻易的得到，只要我们将两粒子不可约的有效作用量 $\Gamma_{[2]}[B]$ 写成如下的形式：

$$\Gamma_{[2]}[B] = Tr[S_0^{-1}B] - Tr \ln[B] + \tilde{\Gamma}[B], \quad (1-24)$$

这里的 S_0 是费米子的自由（裸）传播子， $\tilde{\Gamma}[B]$ 代表的是两粒子有效作用量的“相互作用”部分。此时，经典场 $B_{\psi\bar{\psi}}$ 的真空期望值为

$$B_{\psi\bar{\psi}}|_{J_{\psi\bar{\psi}}=0} = S, \quad (1-25)$$

这里的 S 是费米子的穿衣（完全）传播子。

如果将两粒子不可约的有效作用量求泛函导数，我们可以得到如下的方程：

$$\frac{\delta \Gamma_{[2]}[B]}{\delta B_{\psi\bar{\psi}}} = S_0^{-1} - B_{\psi\bar{\psi}}^{-1} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}[B]}{\delta B_{\psi\bar{\psi}}}, \quad (1-26)$$

在真空中，所有外源都消失的情况下，我们可以得出这样的条件：

$$-J_{\psi\bar{\psi}} = \frac{\delta \Gamma_{[2]}[B]}{\delta B_{\psi\bar{\psi}}}|_{B_{\psi\bar{\psi}}=S} = 0, \quad (1-27)$$

这样就很同意得到如下的关系式：

$$S^{-1} = S_0^{-1} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}[S]}{\delta S}. \quad (1-28)$$

这个方程就是费米子传播子的逆所满足的完全的运动方程，这里的 $\frac{\delta \tilde{\Gamma}[S]}{\delta S}$ 表示的就是自能修正的贡献。

为了得到一个类似于上面的关于费米子-反费米子系统的两粒子传播子的运动的方程，也就是关于 $G_{[2]}^{(2)} = \delta^2 W_{[2]}[J]/(\delta J_{\psi\bar{\psi}} \delta J_{\psi\bar{\psi}})$ 的运动方程，我们需要对方程(1-26)求第二次泛函导数，这样便可以得到

$$\begin{aligned} (G_{[2]}^{(2)})^{-1} &= \delta^2 \Gamma_{[2]}[B]/(\delta B_{\psi\bar{\psi}} \delta B_{\psi\bar{\psi}})|_{B_{\psi\bar{\psi}}=S} \\ &= S^{-1} S^{-1} + \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}[S]}{\delta S \delta S}. \end{aligned} \quad (1-29)$$

接下来我们将定义一个不可约作用核

$$K \equiv -\frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}[S]}{\delta S \delta S}, \quad (1-30)$$

如此一来，方程(1-29)就可以被写成更加熟悉的形式：

$$(G_{[2]}^{(2)})^{-1} = S^{-1} S^{-1} - K, \quad (1-31)$$

也就是说

$$G_{[2]}^{(2)} = SS + SSKG_{[2]}^{(2)}, \quad (1-32)$$

这就是著名的费米子-反费米子系统的传播子之间的非齐次Bethe-Salpeter 方程，也叫做费米子-反费米子体系的相对论束缚态方程。

我们已经知道，费米子传播子的自能部分和费米子-反费米子系统的相互作用核分别是 $\tilde{\Gamma}[S]$ 的一次和两次泛函导数，这就给我们寻找自洽的且数值上合适的截断提供了理论依据。对 $\tilde{\Gamma}$ 来讲，一个简单且非常有效地选择如图(1-1) 所示可以表述成：

$$\tilde{\Gamma}[B] = Tr[\Gamma_\mu B \Gamma_\nu B D_{\mu\nu}], \quad (1-33)$$

这里的求迹运算是泛函意义上的且是对所有空间的一种操作。上面定义的 $\tilde{\Gamma}$ 对应于一直以来广泛采用的对于费米子自能以及费米子-反费米子系统相互作用核的一种截断方式，彩虹-梯截断（Rainbow-Ladder Truncation）。彩虹-梯截断很好地保证了手征对称性，并且与接下来在附录(C) 中将要在模型中定义的有效相互作用 G 的具体的泛函形式无关。这篇论文的主要的数值计算都是在彩虹-梯截断的近似下进行的，使用的被称为Maris-Tandy (MT) 模型里的相互作用将在附录(C) 中展示。

1.3 齐次Bethe-Salpeter 方程及其归一化

当一个费米子-反费米子组成的系统形成束缚态时，非齐次的Bethe-Salpeter 方程(1-32) 就会在质量点有一个奇点，此时的在壳条件为

$$P_i^2 = M_i^2, \quad (1-34)$$

这里的指标*i* 表示的是束缚态的形式，束缚态的总动量和质量分别表示为 P 和 M 。这时候的两粒子传播子可以表达成有奇点的贡献和规则的项（标记为 $R(p, q, P)$ ），如

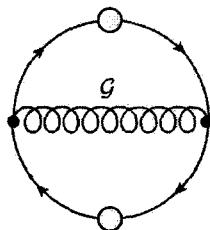


图 1-1 这是在著名的彩虹-梯截断下的 $\tilde{\Gamma}$ 的图形表示，这里的有效相互作用 G 将会在附录(C) 中给出具体形式。

下[6] [7]

$$G_{[2]}^{(2)}(p, q, P) = \sum_i \frac{\chi(p, P_i)\bar{\chi}(q, -P_i)}{P^2 - P_i^2} + R(p, q, P), \quad (1-35)$$

这里的 $\chi(p, P_i) \equiv S^\alpha(p_+) \Gamma(p, P_i) S^\beta(p_-)$ 被定义为由 Bethe-Salpeter 振幅 $\Gamma(p, P_i)$ 和费米子和反费米子传播子 S 组成的 Bethe-Salpeter 波函数，指标 α 和 β 是费米子的标记（例如夸克的味道等等。）。电荷共轭的波函数 $\bar{\chi}$ 定义为：

$$\bar{\chi}(p, -P_i) = [C\chi(-p, -P_i)C^{-1}]^T, \quad (1-36)$$

这里的 $C \equiv \gamma^2 \gamma^0$ 代表的是电荷共轭矩阵，上指标 T 表示的是矩阵的转置。 p_\pm 的定义是 $p_\pm = p \pm \eta_\pm P$ ，这里的 η_\pm 是动量分配参数，它满足 $\eta_+ + \eta_- = 1$ 。

将方程(1-35) 插入到方程(1-32)，让等式两边的束缚态奇点 $P_i^2 = M_i^2$ 处的留数分别相等，我们很容易就能得到如下方程：

$$\Gamma(q, P_i) = \int_k K(k, q, P_i) S^\alpha(k_+) \Gamma(k, P_i) S^\beta(k_-). \quad (1-37)$$

这就是著名的 Bethe-Salpeter 振幅 (BSA) $\Gamma(p, P_i)$ 在壳条件下的齐次 Bethe-Salpeter 方程，并且此方程仅在满足在壳条件 $P_i^2 = M_i^2$ 时才有效。

接下来我们打算推导 Bethe-Salpeter 振幅的归一化条件。正则归一化条件是使得两粒子传播子在束缚态奇点的留数等于1。这使得(1-35) 的分解是非常有价值的。获得归一化条件的方法有很多，这里介绍一个比较简单的方法。我们先从一般的情况开始，两粒子传播子 $G_{[2]}^{(2)}$ 的任意一个奇点的留数 r_i 可以表示为（在奇点附近规则项可以直接忽略，因为它们的值总是有限的。）：

$$\begin{aligned} G_{[2]}^{(2)} &= r_i \frac{\chi(p, P_i)\bar{\chi}(q, -P_i)}{P^2 - P_i^2} \\ &= \frac{r_i}{P_\mu + (P_i)_\mu} \frac{\chi(p, P_i)\bar{\chi}(q, -P_i)}{P_\mu - (P_i)_\mu}, \end{aligned} \quad (1-38)$$

这里可以明显看出变量 P_μ 有一个一阶奇点。一般来讲，一个函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有一个简单奇点，这时 $f(x)$ 可以表示为 $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ，此时它在点 x_0 的留数可以表示为 $Res(f, x_0) = \frac{g(x_0)}{h'(x_0)}$ 。我们下面就用这样简单的方法来求出两粒子传播子 $G_{[2]}^{(2)}$ 的留数。

我们可以从方程(1-31) 得到

$$G_{[2]}^{(2)} = (S^{-1}S^{-1} - K)^{-1}. \quad (1-39)$$

将方程(1-38) 插入到方程(1-39)，使得方程(1-39) 两边在奇点处的留数相等，我们就可以得到

$$\frac{r_i}{2(P_i)_\mu} \chi(p, P_i)\bar{\chi}(q, -P_i) = [\frac{\partial}{\partial P_\mu} ([S^\alpha(q + \eta_+ P) S^\beta(q - \eta_- P)]^{-1} \delta(p - q))$$

$$-K(p, q, P))]^{-1}|_{P^2=P_i^2=M_i^2} \quad (1-40)$$

将这些项稍作整理，并且对两边的所有空间（Dirac 空间、颜色空间等等）求迹，我们可以得到

$$\frac{2(P_i)_\mu}{r_i} = Tr[\int_p \int_q \bar{\chi}(q, -P) \frac{\partial}{\partial P_\mu} ([S^\alpha(q + \eta_+ P) S^\beta(q - \eta_- P)]^{-1} \delta(p - q) - K(p, q, P)) \chi(p, P_i)]|_{P^2=P_i^2=M_i^2} \quad (1-41)$$

如果根据我们之前对正则归一化的定义，让 $r_i = 1$ ，我们将很容易地得到Bethe-Salpeter 波函数 χ 的归一化条件[6] [7]。将 χ 用BSA Γ 和费米子传播子 S 代替后，正则归一化条件可以表述为

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{1}{r_i} = -\frac{(P_i)_\mu}{2P_i^2} Tr[\int_q \bar{\Gamma}(q, -P_i) \frac{\partial S^\alpha(q + \eta_+ P)}{\partial P_\mu} \Gamma(q, P_i) S^\beta(q - \eta_- P) \\ &\quad + \int_q \bar{\Gamma}(q, -P_i) S^\alpha(q + \eta_+ P) \Gamma(q, P_i) \frac{\partial S^\beta(q - \eta_- P)}{\partial P_\mu} \\ &\quad + \int_q \int_k \bar{\chi}(q, -P_i) \frac{\partial K(q, k, P)}{\partial P_\mu} \Gamma(k, P_i)]|_{P^2=P_i^2=M_i^2} \end{aligned} \quad (1-42)$$

$$\begin{aligned} &= -Tr[\int_q \bar{\Gamma}(q, -P_i) \frac{\partial S^\alpha(q + \eta_+ P)}{\partial P^2} \Gamma(q, P_i) S^\beta(q - \eta_- P) \\ &\quad + \int_q \bar{\Gamma}(q, -P_i) S^\alpha(q + \eta_+ P) \Gamma(q, P_i) \frac{\partial S^\beta(q - \eta_- P)}{\partial P^2} \\ &\quad + \int_q \int_k \bar{\chi}(q, -P_i) \frac{\partial K(q, k, P)}{\partial P^2} \Gamma(k, P_i)]|_{P^2=P_i^2=M_i^2}, \end{aligned} \quad (1-43)$$

此处的 $\bar{\Gamma}$ 和 $\bar{\chi}$ 的定义是一样的，也就是说 $\bar{\Gamma}(p, -P_i) = [C\Gamma(-p, -P_i)C^{-1}]^T$ 。我们将 $\frac{\partial}{\partial P_\mu} = 2P_\mu \frac{\partial}{\partial P^2}$ 代入了上面的方程。为了得到单位留数，也就是使得 $r_i = 1$ ，BSA Γ 必须要除以 N 。

第二章 QCD 框架下的Dyson-Schwinger 方程 和Bethe-Salpeter 方程

量子色动力学（QCD）是描述强子内部夸克、胶子之间的强相互作用的基本理论。它有两个基本的特征：颜色禁闭和动力学手征对称性的破缺。对于颜色禁闭来说，强子内部的基本自由度夸克、和胶子由于都带有颜色，它们是不能在强子外部看到的。关于这一点，仍然没有被人们很好地理解。我们还知道QCD 是一种渐近自由的规范理论[8] [9] [10]，从这一方面探索或许可以解释颜色禁闭的问题。对于动力学手征对称性的破缺（DCSB），它能够从“无”中产生出质量，这是QCD 非微扰特性的理论基础[11]。这一现象我们可以从下面将要讲到的质量函数 $M(p^2)$ 的曲线图很容易地看出来。质量函数 $M(p^2)$ 是穿衣夸克传播子的基本元素，可以从夸克传播子的Dyson-Schwinger 方程求得。Dyson-Schwinger 方程是一种研究量子场论的非微扰的方法。Dyson-Schwinger 方程可以从一个理论的欧几里得空间的生成泛函推导出来。它们是可数的无穷阶的耦合积分方程。它的解是n-点施温格方程（欧几里得空间的格林函数），这和格点QCD 数值模拟出来的矩阵元是一致的。Bethe-Salpeter 方程[12]是两体束缚态相对论运动方程。Bethe-Salpeter 方程对介子的性质提供了很好的描述。这些好的描述不仅仅体现在基态质量谱上，还体现在其他介子性质上，比如电磁-弱衰变常数、电荷半径、电磁形状因子[13] [14] [15]，以及对强子的衰变描述[16] [17] [18]。

2.1 量子色动力学（QCD）

我们都知道QCD 是一个非阿贝尔的规范场论，非阿贝尔效应使得QCD 比作为阿贝尔理论的QED 具有更特殊的行为，比如动力学手征对称性的破缺和颜色禁闭。同时由于QCD 是QED 从 $U(1)$ 到 $SU(3)$ 的推广，又因为 $SU(3)$ 的生成元之间互不对易，这就使得规范玻色子之间有了相互作用，间接导致了渐近自由的行为。

QCD 的基本拉格拉日量通常写成如下形式:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^a] = \int d^4x [\bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}] , \quad (2-1)$$

此处

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c , \\ D_\mu &= \partial_\mu - igA_\mu^a T^a . \end{aligned}$$

场 $A_\mu^a(x)$ 是规范 (胶子) 场, $\psi(x)$ 是夸克场, $T^a(a = 1, 2, \dots, 8)$ 是 $SU(3)$ 群的八个生成元。这些表达式里面的重复指标都要在相应空间求和。

由于路径积分要对所有的等效规范场的空间积分, 因此需要解决产生的无穷大的规范体积问题。Faddeev 和 Popov [19]早就通过在拉氏量里面加入一个非物理的辅助场(\bar{c}^a, c^a)解决了这一问题。加入辅助场的目的是为了保持规范不变性以及在各个协变规范下的么正性。这些被称为鬼场的场是反对易的自旋为零的场。当然在定义 QCD 的生成泛函 \mathcal{Z} 的时候, 必须也要对鬼场进行路径积分。

具有夸克场、胶子场、鬼场, 以及规范固定项的 QCD 生成泛函可以写成:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\bar{\eta}, \eta, J_\mu^a, \bar{\sigma}^a, \sigma^a] &= \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^a, \bar{c}^a, c^a] \exp[iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^a, \bar{c}^a, c^a]] \\ &\quad + i \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + A_\mu^a J^{a\mu} + \bar{c}^a \sigma^a + \bar{\sigma}^a c^a) , \end{aligned} \quad (2-2)$$

此处

$$\begin{aligned} S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^a, \bar{c}^a, c^a] &= \int d^4x [\bar{\psi}[i\cancel{D} - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a)(\delta^{ab}\partial^{mu} - gf^{abc}A^{c\mu})c^b] , \end{aligned} \quad (2-3)$$

这里的 ξ 是裸的规范固定参数。为了得到一个可以重整化的理论, 我们需要向 QCD 作用量(2-3) 中引进一些合适的抵消项。因此我们打算通过下面的关系定义可以重整化的作用量 $S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^a, \bar{c}^a, c^a] = S[\psi_0, \bar{\psi}_0, A_{0\mu}^a, \bar{c}_0^a, c_0^a]$,

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2}\psi, A_{0\mu}^a = \sqrt{Z_3}A_\mu^a, c_0^a = \sqrt{\tilde{Z}_3}c^a , \quad (2-4)$$

$$g_0 = Z_g g, \xi_0 = Z_3 \xi, m_0 = Z_m m , \quad (2-5)$$

这里的常数 Z_2 、 Z_3 和 \tilde{Z}_3 分别是夸克场、胶子场和鬼场的重整化常数, 而这些常数 Z_g 和 Z_m 被认为是耦合系数和质量项的重整化常数。规范固定参数 ξ 的重整化常数和

胶子场 $A_\mu^a(x)$ 的重整化系数是一致的，这样以来规范固定项按照上面重新定义出来是不变的。从重整化乘积关系的要求出发，我们可以得到三胶子顶点、四胶子顶点、鬼场-胶子场耦合顶点和夸克-胶子耦合顶点系数的重整化常数 Z_1 、 Z_4 、 \tilde{Z}_1 和 Z_{1F} 所满足的关系

$$Z_1 = Z_g Z_3^{\frac{3}{2}}, Z_4 = Z_g^2 Z_3^2, \tilde{Z}_1 = Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{\frac{1}{2}}, Z_{1F} = Z_g Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}, \quad (2-6)$$

如果方程(2-6) 中的重整化常数 Z_g s 都一样的话，那么以上这四个重整化常数就不是互不相关的，它们之间存在着以下的关系：

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1}. \quad (2-7)$$

方程(2-7) 在某种意义上被称为Slavnov-Taylor 恒等式[2]，并且和QED 中的关系 $Z_{1F} = Z_2$ 类似。这个Slavnov-Taylor 恒等式确保了全局所有的耦合系数 g 都一样。

2.2 可重整化的夸克传播子Dyson-Schwinger 方程及其解

接下来的所有推导和计算都是在欧几里得空间里进行的，详情请参照附录(A)。为了探讨夸克和胶子的一些性质，我们需要探索隙方程，它的具体形式为：

$$S^{-1}(p) = Z_2(i\gamma^\mu + Z_m m) + g^2 Z_{1F} \int_q \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu^a(p, q) D_{\mu\nu}(p - q). \quad (2-8)$$

这个方程就是图(2-1) 里面准确描述的夸克传播子所满足的Dyson-Schwinger 方程。但是由于作为输入的胶子传播子、夸克-胶子相互作用顶点都是未知的，所以我们不能直接地解出这样的方程。因此，在我们接下来的计算里，我们必须采用一些特殊的截断和模型来近似计算。这里我们将采用著名的彩虹-梯截断来简化夸克-胶子相互作用顶点，采用Maris-Tandy 模型（见附录(C)）来简化胶子传播子。做了这样的截断和近似之后，夸克传播子的Dyson-Schwinger 方程可以简化为如下形式：

$$S^{-1}(p) = Z_2 i\gamma^\mu + Z_4 m(\mu^2) + \int_q \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \frac{G((p-q)^2)}{(p-q)^2} T_{\mu\nu}(p-q), \quad (2-9)$$

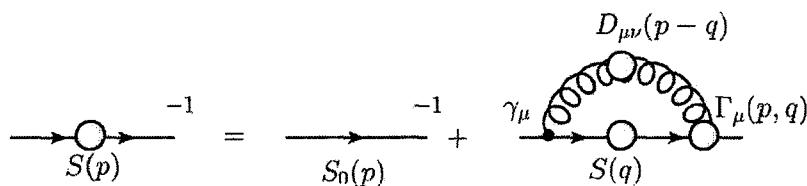


图 2-1 这是夸克传播子所满足的Dyson-Schwinger 方程。所有的团都是代表穿衣的传播子或者顶点。

这里我们让 $Z_2 Z_m m \equiv Z_4 m(\mu^2)$, 并且 $m(\mu^2)$ 是 Λ 有关的流夸克质量。 μ^2 是重整化标度, 我们这里的计算将其设置得足够大以至于明显属于微扰区, 即 $\mu = 19\text{GeV}$ 。 $T_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$ 是横向投影算符。 $\int_q^\Lambda = \int_q^\Lambda \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ 表示洛伦兹变换不变的正规化积分, 这里的 Λ 是正规化质量标度。在方程(2-8) 中, S 、 Γ_ν^α 和 m 都是依赖于夸克的味道, 尽管我们没有明确地表示出这一点来。并且这里探讨的表达式都是味道无关的, 以及我们引入的是味道无关的重整化机制, 因此所有的重整化常数都是味道无关的。 $\mathcal{G}((p-q)^2)$ 是夸克-反夸克有效作用势, 它包括了重整化常数 Z_{1F} , 耦合系数 g^2 , 夸克-胶子相互作用顶点的动量依赖以及胶子传播子的穿衣函数。在附录(C) 里面我们还将看到, Maris-Tandy 模型里面还有一个系数 $\frac{1}{Z_2^2}$, 这个系数的作用是保证了重整化方案里的乘积关系[20], 以及质量函数 $M(p^2)$ 不会随着重整化点的变化而变化, 这一点讲在接下来的讨论中被看到。

方程(2-8)的解是一个非线性、非齐次的积分方程。从狄拉克和洛伦兹结构上来分析, 它的解具有如下一般的形式:

$$S^{-1}(p) = i\gamma^\mu A(p^2) + B(p^2), \quad (2-10)$$

此处 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 是依赖于重整化点 (μ^2) 的穿衣函数, 并且是 p^2 标量函数。为了数值解出方程(2-9) 同时得到标量函数 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 对动量 p^2 的依赖关系, 我们先将方程(2-10) 插入到方程(2-9), 由此得到

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu A(p^2) + B(p^2) &= Z_2 i\gamma^\mu + Z_4 m(\mu^2) \\ &+ \int_q^\Lambda \frac{\lambda^\alpha}{2} \gamma_\mu S(q) \frac{\lambda^\alpha}{2} \gamma_\nu \frac{\mathcal{G}((p-q)^2)}{(p-q)^2} T_{\mu\nu}(p-q). \end{aligned} \quad (2-11)$$

为了得到关于 $A(p^2)$ 的方程, 将方程(2-11) 两边同时乘以 $-i\gamma^\mu$, 然后同时对狄拉克空间和颜色空间求迹, 我们就得到如下有关于 $A(p^2)$ 的方程

$$\begin{aligned} A(p^2) &= Z_2 + \frac{3}{3P^2} \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}((p-q)^2)}{(p-q)^2} \frac{A(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} \\ &\times (p \cdot q + 2 \frac{((p-q) \cdot q)((p-q) \cdot p)}{(p-q)^2}). \end{aligned} \quad (2-12)$$

对于关于 $B(p^2)$ 函数的方程, 我们只要将方程(2-11) 两边同时对狄拉克空间和颜色空间求迹就可以得到

$$B(p^2) = Z_4 m(\mu^2) + 4 \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}((p-q)^2)}{(p-q)^2} \frac{B(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)}. \quad (2-13)$$

解出上面两个非线性、非齐次的积分方程最简单的方法就是迭代, 这也是我们整篇工作所采用的主要方法。在积分部分, 我们先将动量 q^2 进行离散化, 然后利用高斯积分

方法求解。高斯积分方法是一种将积分化成求和的有效方法，该方法中每一个离散化的点对应一个权重，具体操作如下

$$\int f(x)dx \rightarrow \sum_{i=1}^n w(i)f(x_i). \quad (2-14)$$

对于方程(2-12) 和方程(2-13)，我们采用的同一组离散化的点以及相对应的参数。这两个方程的积分必须要正规化，在这里我们选择了横向变换不变的正规化方法，也叫做Pauli-Villars 截断[21]，这个方案就是引进一个参数 τ ，然后将 $\frac{\tau^2}{\tau^2 + q^2}$ 放到积分里面，所选择的参数 τ 必须满足 $\mu^2 \ll \tau^2 \ll \Lambda^2$ 。

方程(2-10) 有时可以写成如下形式

$$S^{-1}(p) = \frac{1}{Z(p^2, \mu^2)} [i\gamma + M(p^2, \mu^2)], \quad (2-15)$$

此处

$$Z(p^2, \mu^2) = \frac{1}{A(p^2, \mu^2)},$$

并且

$$M(p^2, \mu^2) = \frac{B(p^2, \mu^2)}{A(p^2, \mu^2)}, \quad (2-17)$$

就是所谓的质量函数。质量函数的行为也是动力学手征对称性破缺的直观反映[22] [23]。

接下来我们根据[23]，采用减除的重整化方案，设置 Z_2 和 Z_4 使得它们在大动量的微扰区域穿衣传播子变成裸的传播子，也就是说

$$S^{-1}(p)|_{p^2=\mu^2} = i\gamma + m(\mu^2), \quad (2-18)$$

这样就得出下面的限制条件

$$\begin{aligned} A(\mu^2) &= 1, \\ B(\mu^2) &= m(\mu^2). \end{aligned} \quad (2-19)$$

从QCD 的重整化的乘积关系来看，可以得出以下关系[23]，

$$\frac{A(p^2, \mu^2)}{A(p^2, \mu'^2)} = \frac{Z_2(\mu^2, \Lambda^2)}{Z_2(\mu'^2, \Lambda^2)} = A(\mu'^2, \mu^2) = \frac{1}{A(\mu^2, \mu'^2)}, \quad (2-20)$$

因此，在任意重整化点处 $A(\mu^2, \mu^2) = 1$ ，这个结论和方程(2-19) 是一致的。质量函数 $M(p^2, \mu^2)$ 的形式与在微扰区域的重整化点 μ^2 无关，也就是说即使 $\mu \neq \mu'$ ，我们仍然有

$$M(p^2, \mu^2) = M(p^2, \mu'^2) = M(p^2), \forall p^2, \quad (2-21)$$

图(2-4) 直观地显示了这一点。

接下来，我们要对方程(2-9) 进行如下改写：

$$S^{-1}(p) = Z_2 i\gamma + Z_4 m(\mu^2) + i\gamma(A'(p^2) - 1) + (B'(p^2) - m(\mu^2)) , \quad (2-22)$$

这里的 $A'(p^2)$ 和 $B'(p^2)$ 是正规化的但是非重整化的穿衣函数（分别由方程(2-12) 和 方程(2-13) 在条件 $Z_2 = 1, Z_4 = 1$ 下定义而得。）。在手征对称性明确破缺的情况下，也就是说 $m \neq 0$ ，我们可以得到重整化条件

$$A(p^2, \mu^2) = 1 + A'(p^2, \Lambda^2) - A'(\mu^2, \Lambda^2) , \quad (2-23)$$

$$B(p^2, \mu^2) = m(\mu^2) + B'(p^2, \Lambda^2) - B'(\mu^2, \Lambda^2) . \quad (2-24)$$

重整化常数可以表示为

$$Z_2 = 2 - A'(\mu^2, \Lambda^2) , \quad (2-25)$$

$$Z_4 = 2 - \frac{B'(\mu^2, \Lambda^2)}{m(\mu^2)} . \quad (2-26)$$

在手征极限的情况下，即 $m = 0$, $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 的解为

$$A(p^2, \mu^2) = 1 + A'(p^2, \Lambda^2) - A'(\mu^2, \Lambda^2) , \quad (2-27)$$

$$B(p^2, \mu^2) = B'(p^2, \Lambda^2) . \quad (2-28)$$

我们跟随文献[23] 进行的上述理论分析以及数值计算，将重整化点设置在 $\mu = 19 GeV$ 处。穿衣函数 $A(p^2)$ 随动量变化的图像如图(2-2) 所示，穿衣函数 $B(p^2)$ 的数值解的图像如图(2-3) 所示，质量函数 $M(p^2)$ 随动量变化的图像如图(2-4) 所示。这些曲线在红外区域上升得特别显著，这是因为在低能区夸克被一团厚厚的胶子云包裹着，这也正好解释了为什么一个在大动量区质量几乎为零的类部分子夸克在低能区却变成一个持有有效质量 $M_Q \approx m_p/3$ 的类组份夸克。

2.3 Bethe-Salpeter 方程

一个由夸克-反夸克组成的系统，它的齐次Bethe-Salpeter 方程表述为：

$$\Gamma(q, P) = \int_k K(k, q, P) S^\alpha(k_+) \Gamma(k, P) S^\beta(k_-) , \quad (2-29)$$

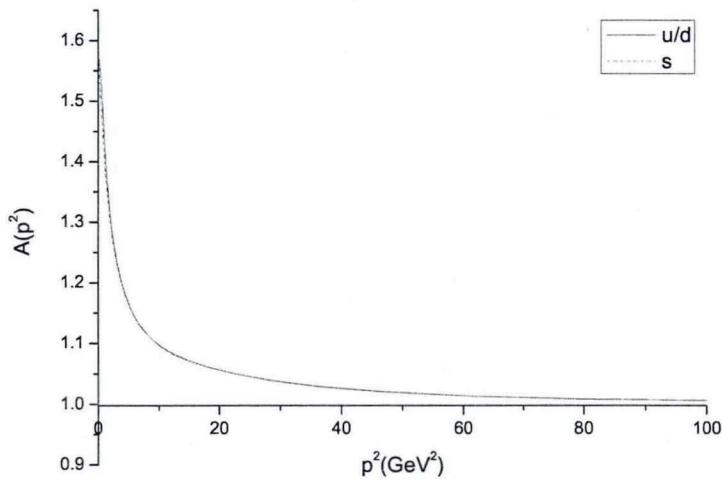


图 2-2 各个味道的夸克传播子的重整化穿衣函数 $A(p^2)$ ：蓝色的曲线代表的是 u/d 夸克，红色虚线代表的是 s 夸克。从图上我们很容易发现夸克传播子的重整化穿衣函数 $A(p^2)$ 对于不同味道的夸克几乎是一样的，并且在大动量区域 $A(p^2)$ 趋向于 1，这也是微扰论所要求的。

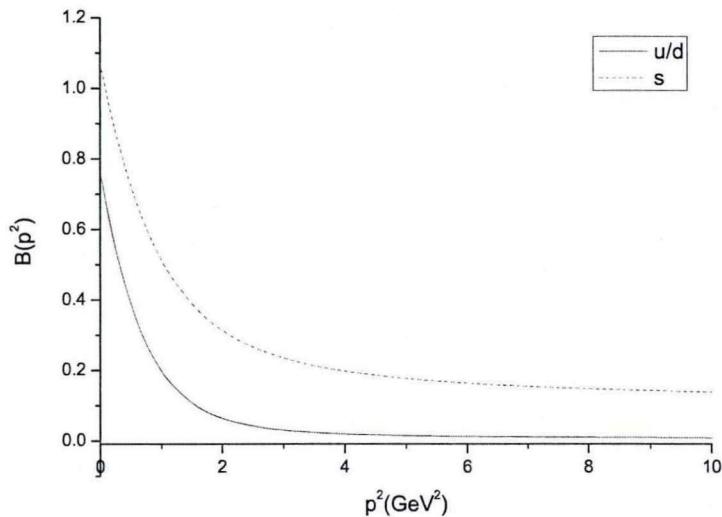


图 2-3 各个味道的夸克传播子的重整化穿衣函数 $B(p^2)$ ：蓝色的曲线代表的是 u/d 夸克，红色虚线代表的是 s 夸克。从图上我们很容易发现在每一个动量点 s 夸克传播子的重整化穿衣函数 $B(p^2)$ 比 u/d 大，这是因为夸克传播子的重整化穿衣函数 $B(p^2)$ 与该夸克的质量函数有直接的关系，而且 s 夸克的质量比 u/d 夸克的质量大。

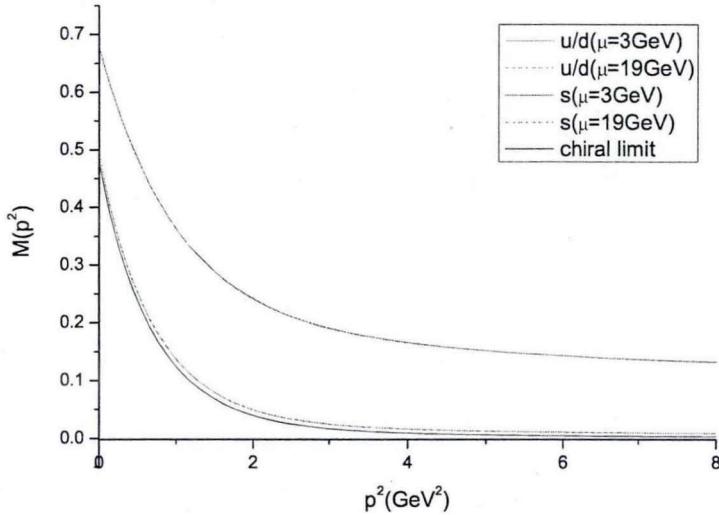


图 2-4 通过方程(2-17)求得的各个味道的夸克传播子的重整化质量函数 $M(p^2)$ ：绿色实线代表的是重整化点设在 $\mu = 3\text{GeV}$ 处的 u/d 夸克的质量函数曲线，红色虚线代表的是重整化点设在 $\mu = 19\text{GeV}$ 处的 u/d 夸克的质量函数曲线；蓝色实线代表的是重整化点设在 $\mu = 3\text{GeV}$ 处的 s 夸克的质量函数曲线，粉红色虚线代表的是重整化点设在 $\mu = 19\text{GeV}$ 处的 s 夸克的质量函数曲线；黑色实线代表的是重整化点设在 $\mu = 19\text{GeV}$ 处的质量为零的夸克的质量函数曲线。从图上我们可以明显看出来，绿色实线和红色虚线重叠在一起，蓝色实线和粉红色虚线也是重叠在一起的。这些都表明了质量函数不随着重整化点的变化而变化。同样我们从图中可以看出质量函数在红外区域明显得大于紫外区域，这个特征表明了动力学手征对称性的破缺从而产生了动力学质量。

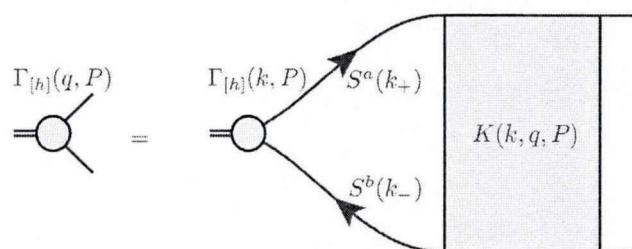


图 2-5 方程(2-29)所表示的齐次Bethe-Salpeter 方程。 $\Gamma(q, P)$ 是夸克-介子顶点， $S^\alpha(k_+)$ 和 $S^\beta(k_-)$ 分别代表夸克和反夸克的传播子， $K(k, q, P)$ 是夸克-反夸克的相互作用核，并且这个相互作用核只包含两粒子不可约的费曼图。

这里的 $\Gamma(q, P)$ 夸克-介子顶点, $S^\alpha(k_+)$ 和 $S^\beta(k_-)$ 分别表示夸克和反夸克传播子, 指标 α 和 β 分别代表不同的夸克味道 (例如对于 π^+ 来讲, $\alpha = u$, $\beta = \bar{d}$)。以上齐次Bethe-Salpeter 方程的费曼图表示如图(2-5)所示。

为了数值地解出这样的方程, 我们需要对Bethe-Salpeter 振幅 $\Gamma(q, P)$ 作洛伦兹结构和狄拉克结构的分析。 $\Gamma(q, P)$ 里面的结构在洛伦兹变换下满足一些特殊的对称性, 包括自旋和宇称。因此齐次的Bethe-Salpeter 振幅 $\Gamma(q, P)$ 必须被分解成洛伦兹协变部分 $T_i(q, P)$ 和洛伦兹不变部分 $F_i(q, P)$,

$$\Gamma(q, P) = \sum_{i=1}^N T_i(q, P) F_i(q, P), \quad (2-30)$$

这里项数 N 的多少和 $T_i(q, P)$ s 以及 $\Gamma(q, P)$ 的张量结构都依赖于夸克-反夸克系统的量子数 J^{PC} (举例说来, 如果是赝标量介子 0^- , 那么 $N = 4$; 如果是矢量介子 1^- , 那么 $N = 8$.)。分量 $T_i(q, P)$ s 通常携带了洛伦兹和狄拉克结构, 通常被称为洛伦兹协变量, 而 $F_i(q, P)$ s 是洛伦兹和狄拉克标量函数, 所以通常被称为BSA $\Gamma(q, P)$ 的标量分量。 $T_i(q, P)$ s 可以看作BSA $\Gamma(q, P)$ 的基矢, 并且它们具体的内容可以完全自由地选择。

为了我们下面数值计算的方便, 我们构造洛伦兹协变量 $T_i(q, P)$ s 的时候选择了一种类似矢量空间基矢的正交性的方式:

$$Tr[T_i \cdot T_j] = \delta_{ij}, \quad (2-31)$$

这个表达式里面所有的洛伦兹和狄拉克相同的指标都必须求和。在附录(D) 中, 我们详细地讨论了Bethe-Salpeter 振幅 $\Gamma(q, P)$ 的基矢 $T_i(q, P)$ s 的具体结构。当然我们必须注意到仅仅利用洛伦兹协变量 $T_i(q, P)$ s 是不能够决定夸克-反夸克系统的所有的量子数的。对于电中性的例粒子, 例如 π^0 和 ρ^0 , 它们同时又是式(1-36) 所定义的电荷共轭的本征态, 这样又多出了一个量子数, 电荷共轭量子数 (C-宇称量子数), 仅有分立的两个值 $C = \pm 1$ 。这个量子数决定了洛伦兹标量分量关于 $q \cdot P$ 的对称性 (详情请见附录(D)), 因此在构造洛伦兹标量分量的时候, 要严格对待电荷共轭宇称的本征值, 到底 $C = +1$ 还是 $C = -1$ 。我们这里的计算都是采用的将洛伦兹标量分量利用切比雪夫第二类多项式对 $q \cdot P$ 进行展开的方法, 但是要做这样的展开必须满足一个条件, 那就是夸克和反夸克传播子里面的动量分配参数必须满足 $\eta_+ = \eta_- = 0.5$, 这是因为物理客

观测量都是与 η_{\pm} 无关的。通过以上的讨论，电荷共轭的量子数也被确定了，

$$F_i(q, P) = \sum_{j=0}^{N_{max}} F_i^j(q, P) U^j(z), \quad (2-32)$$

这里的 z 表示动量 q 和 P 之间的夹角的余弦值。具体的解释请参照附录(D)。

通过以上几段的一些详细探讨，夸克-反夸克体系的Bethe-Salpeter 方程可以写成下面的具体形式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{N_{max}} T_i(q, P) F_i^j(q^2, P^2) U^j(z) = \\ & \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^{N_{max}} \int_k^\Lambda K(k, q, P) S^\alpha(k_+) T_l(k, P) S^\beta(k_-) F_l^m(k^2, P^2) U^m(z'). \end{aligned} \quad (2-33)$$

接下来我们打算采用彩虹-梯截断（具体的做法可以参照附录(C) 和[23] [24]），

$$K(k, q, P) \rightarrow -\frac{\mathcal{G}((k-q)^2)}{(k-q)^2} T_{\mu\nu}(k-q) \gamma_\mu \frac{\lambda^\alpha}{2} \otimes \gamma_\nu \frac{\lambda^\alpha}{2}, \quad (2-34)$$

切比雪夫第二类多项式也具有一个简单的正交性关系，

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{1-z^2} U^i(z) U^j(z) = \delta^{ij}, \quad (2-35)$$

将方程(2-33) 投影到 $T_i(q, P)$ 上，然后将该方程对狄拉克和颜色空间求迹，方程(2-33) 可以被重新写成如下形式：

$$\begin{aligned} F_i^j(q^2, P^2) &= \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^{N_{max}} -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{1-z^2} U^j(z) \\ &\times \int_k^\Lambda \frac{-\mathcal{G}((k-q)^2)}{(k-q)^2} T_{\mu\nu}(k-q) Tr[T_i(q, P) \gamma_\mu \frac{\lambda^\alpha}{2} S^\alpha(k_+) T_l(k, P) S^\beta(k_-) \gamma_\nu \frac{\lambda^\alpha}{2}] \\ &\times F_l^m(k^2, P^2) U^m(z'). \end{aligned} \quad (2-36)$$

为了简化记号，我们定义一个算符 $K_{jl}^{im}(k, q, P)$ 为

$$\begin{aligned} K_{jl}^{im}(k, q, P) &\rightarrow -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{1-z^2} U^j(z) \\ &\int_k^\Lambda \frac{-\mathcal{G}((k-q)^2)}{(k-q)^2} T_{\mu\nu}(k-q) Tr[T_i(q, P) \gamma_\mu \frac{\lambda^\alpha}{2} S^\alpha(k_+) T_l(k, P) S^\beta(k_-) \gamma_\nu \frac{\lambda^\alpha}{2}] \\ &\times U^m(z'). \end{aligned} \quad (2-37)$$

那么方程(2-36) 变成一个矩阵乘以列矢量的问题了，

$$F_i^j(q, P) = K_{jl}^{im}(k, q, P) F_l^m(k, P), \quad (2-38)$$

这里所有的重复指标都要求求和，包括动量 k ，因为此前都已经离散化好了的。因此，在某个介子质量奇点处，Bethe-Salpeter 方程变成一个本征值问题。那也就是说不同介子态的总动量 P_s 是分立的谱。当时为了计算的方便，我们刚开始将其推广到连续谱的情形，并且定义 $\lambda(P^2)$ 为给定不同 P^2 的情况下，矩阵 $K_{il}^{jm}(k, q, P)$ 的本征值。如此一来方程(2-38) 变成了如下形式

$$\lambda(P^2) F_i^j(q, P) = K_{jl}^{im}(k, q, P) F_l^m(k, P). \quad (2-39)$$

当我们做数值计算的时候，我们仅仅挑选出那些使得 $\lambda(P^2)$ 等于 1 的动量作为那些具有确定的量子数的介子系统的总动量。此时我们有理由说我们找出了夸克-反夸克系统的束缚态质量，并且就等于 $\sqrt{-P^2}$ 。在求本征值的时候，由于我们仅仅计算了基态的质量谱，所以只需要计算出矩阵 $K_{il}^{jm}(k, q, P)$ 的最大本征值及其对应的本征矢就可以了。这里我们采用了一个简单的方法，叫做幂方法（详细地算法见附录(E)）。对于矩阵 $K_{il}^{jm}(k, q, P)$ 的构造，也可以详细参考[25]。

以上讲解了Bethe-Salpeter 方程的具体结构分析，和求解过程的理论推导。但是想要数值地解出矩阵 $K_{il}^{jm}(k, q, P)$ 的本征值和相应的本征矢量还需要解决一个问题，那就是夸克和反夸克传播子在复空间的数值计算问题。下面我们将通过两种方法来解决这一问题。

由于我们的数值计算都要在欧几里得空间进行，介子系统总动量的平方是负数，这样得到的介子体系的总动量的长度 P 是纯粹的虚数，因此我们需要将夸克和反夸克的传播子解析延拓到复平面。比如， $S(k_+)$

$$S(k_+) = i\gamma_\mu(k + \eta_+ P)_\mu A(k_+^2) + B(k_+^2), \quad (2-40)$$

这里的 $k_+^2 = (k + \eta_+ P)^2 = k^2 - \eta_+^2 M^2 + 2\eta_+ k \cdot P$. 因此我们需要知道 A 和 B 在复平面的确定的值。

有两种方法可以达到这样的目的。

第一种方法：我们仅需要做一个从实数变量到复数变量的直接延拓即可。由于我们早就解出了夸克传播子的穿衣函数 A 和 B 在实轴上的解，我们只要将方程(2-12) 和方程(2-13) 重新写一下，使得这种解析延拓变得特别直接。改写后的方程如下：

$$A(k_+^2) = Z_2 + \frac{3}{3k_+^2} \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}((k_+ - q)^2)}{(k_+ - q)^2} \frac{A(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} \\ \times (k_+ \cdot q + 2 \frac{((k_+ - q) \cdot q)((k_+ - q) \cdot k_+)}{(k_+ - q)^2}), \quad (2-41)$$

$$B(k_+^2) = Z_4 m(\mu^2) + 4 \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}((k_+ - q)^2)}{(k_+ - q)^2} \frac{B(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)}, \quad (2-42)$$

这里的夸克-反夸克有效相互作用 $\mathcal{G}(s^2)$ 的参数也直接解析延拓到了复数平面，尽管之前 Maris-Tandy 模型是通过分析实数范围，即 $s^2 > 0$ 的区域内的数据提出来的。

另外一种方法（这种方法目前被认为是最现实可靠的方法，它的第一次是在文献[26]提出来的。）：对于每一个确定的介子（也就是说具有确定量子数 J^{PC} 的介子）的总动量 P ，我们只需要知道在复数 $p^2 -$ 平面上的小抛物线范围内的穿衣函数 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 的具体数值（详情请见附录(B)）。我们先对方程(2-12) 和方程(2-13) 对积分变量做变量平移，这样一来，复数的总动量仅仅出现在夸克和反夸克传播子里面了，而此时的胶子传播子里面的变量都是实数了，就像这样

$$A(k_+^2) = Z_2 + \frac{3}{3k_+^2} \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}(q^2)}{q^2} \frac{A((q+k_+)^2)}{(q+k_+)^2 A^2((q+k_+)^2) + B^2((q+k_+)^2)} \\ \times (k_+ \cdot (q+k_+) + 2 \frac{(q \cdot (q+k_+))(q \cdot k_+)}{q^2}), \quad (2-43)$$

$$B(k_+^2) = Z_4 m(\mu^2) + 4 \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}(q^2)}{q^2} \frac{B((q+k_+)^2)}{(q+k_+)^2 A^2((q+k_+)^2) + B^2((q+k_+)^2)}, \quad (2-44)$$

因此对于有效作用 $\mathcal{G}(p^2)$ ，我们仅需要它在实数范围内的数值就可以了。这样做的最大的原因是由于 $\mathcal{G}(p^2)$ 总是构造出来模拟 QCD 的跑动耦合常数 $\alpha_s(p^2)$ 的行为的，而 $\alpha_s(p^2)$ 仅仅在实数范围内才有测量值[23]。

如果穿衣函数 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 被假设为在我们需要计算的抛物线区域内完全解析，我们可以通过我们已经熟悉的柯西积分公式来求解。柯西积分公式可以表述为：如果 a 是复区域内的一点，函数 $f(a)$ 的数值等于该函数除以 $(z - a)$ 在围绕这一点的外围的闭合曲线 z 上的环路积分，即

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad (2-45)$$

一般来讲，我们在复平面选择的抛物线会在紫外区域的某个点做个截断。在求解穿衣函数 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 的时候，有些在抛物线以外的紫外区域的值需要用来迭代，这些 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 的数值可以通过对实轴上解得的数值进行拟合再直接解析延拓而产生。

由于在计算柯西积分的时候，某些接近抛物线边界的点也需要参加计算，为了保证计算的稳定性，我们需要利用文献[27] 介绍的方法。这种方法也是从柯西积分推导出来的，并且允许数值计算在一个闭合的曲线内部任意一个解析函数在任意一点 z_0 处的

值。如果 $f(z)$ 是在区域 G 内的解析函数, $f(z_0)$ 可以通过以下的改进后的方法得到

$$f(z_0) = \left(\sum_{i=0}^N \frac{w(z_i)f(z_i)}{z_i - z_0} \right) / \left(\sum_{j=1}^N \frac{w(z_j)}{z_j - z_0} \right), \quad (2-46)$$

这里的 z_i 是外界抛物线边界上的离散点, $w(z_i)$ 是他们相应的权重, N 是计算积分时离散化的点的个数。求和是将边界线上的所有点进行求和的。而且取点的多少取决于你积分收敛的程度。由于在我们的工作中需要求介子的衰变常数, 那就要对齐次的BSA 归一化, 因此就必须先求出夸克和反夸克传播子在复平面的一阶导数, 这里我们也用了一个改进的方法[47]:

$$f'(z_0) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{w(z_i)f(z_i)}{(z_i - z_0)^2} - f(z_0) \sum_{i=1}^N \frac{w(z_i)}{(z_i - z_0)^2} \right) / \left(\sum_{j=1}^N \frac{w(z_j)}{z_j - z_0} \right). \quad (2-47)$$

2.4 介子谱

以上所讲的所有的理论和数值计算的方法都是为了利用DSE/BSE 来求解物理可观测量的, 比如介子的质量谱、电弱衰变常数等等。近几年已经有人在利用DSE/BSE 这套方法求解赝标量介子和矢量介子的基态能量了[23] [24] [33], 而且径向激发态的能量也算得比较好了[34] [35] [47]。这一章接下来的工作就是在统一的截断近似、模型和参数下, 计算赝标量介子和矢量介子的质量谱, 并且在同位旋对称性破缺的情况下计算带电介子与中性介子的质量差。

2.4.1 蕨标量介子(0^-)

对于量子数为 0^- 的赝标量介子, 我们采用四个洛伦兹协变变量 (详情请见附录(D)), 而且赝标量介子的BSE 归一化条件为

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_q^\Lambda Tr_{CD} [\bar{\Gamma}^{\beta\alpha}(q, -P^2) \frac{\partial S^\alpha(q_+)}{\partial P^2} \Gamma^{\alpha\beta}(q, P^2) S^\beta(q_-) \\ &\quad + \bar{\Gamma}^{\beta\alpha}(q, -P^2) S^\alpha(q_+) \Gamma^{\alpha\beta}(q, P^2) \frac{\partial S^\beta(q_-)}{\partial P^2}]|_{P^2=-M^2}, \end{aligned} \quad (2-48)$$

因为在我们采用的模型中, 夸克-反夸克相互作用内核是与介子的总动量 P 无关的, 方程(1-43) 第二项就可以直接忽略了。

赝标量介子的电弱衰变常数可以定义为

$$f_{PS} = -\frac{Z_2 N_c}{M_{PS}^2} \int_q^\Lambda P_\mu Tr_D [\Gamma_{PS}^{\alpha\beta}(q, P) S^\beta(q_-) \gamma_\mu \gamma_5 S^\beta(q_+)]|_{P^2=-M^2}, \quad (2-49)$$

这里的BSA $\Gamma(q, P)$ 必须根据式(2-48) 归一化以后才能使用。

以下表格中列举了我计算赝标量介子的结果，介子的质量用 m 标记，介子的电弱衰变常数用 f 标记。表格(2-1) 列出的是同位旋对称的计算结果，而表格(2-2) 列出的是同位旋破缺时的计算结果。

2.4.2 矢量介子(1^-)

对于量子数是 1^- 的矢量介子而言，我们选择了八个洛伦兹协变变量（详情请见附录(D))，矢量介子的BSE 归一化条件可表示为

$$\begin{aligned} N^2 = & \int_q^\Lambda \frac{1}{3} Tr_{CD} [\bar{\Gamma}_\mu^{\beta\alpha}(q, -P^2) \frac{\partial S^\alpha(q_+)}{\partial P^2} \Gamma_\mu^{\alpha\beta}(q, P^2) S^\beta(q_-) \\ & + \bar{\Gamma}^{\beta\alpha}(q, -P^2) S^\alpha(q_+) \Gamma^{\alpha\beta}(q, P^2) \frac{\partial S^\beta(q_-)}{\partial P^2}] |_{P^2=-M^2}, \end{aligned} \quad (2-50)$$

这里出现的因子 $1/3$ 是因为要对三个横向求和而产生的。

矢量介子的电弱衰变常数定义为

$$f_V = \frac{Z_2 N_c}{3 M_V} \int_q^\Lambda Tr_D [\Gamma_\mu^{\alpha\beta}(q, P) S^\beta(q_-) \gamma_\mu S^\beta(q_+)] |_{P^2=-M^2}, \quad (2-51)$$

这里的BSA $\Gamma(q, P)$ 必须先按照式(2-50) 进行归一化以后才能使用。

以下表格中列举了我计算矢量介子的结果，介子的质量用 m 标记，介子的电弱衰变常数用 f 标记。表格(2-3) 列出的是同位旋对称的计算结果，而表格(2-4) 列出的是同位旋破缺时的计算结果。

	π	k
Exp. $m(MeV)$	137.27	495.65
Cal. $m(MeV)$	136.64	494.79
Exp. $f(MeV)$	131	160
Cal. $f(MeV)$	131.74	155.48

表 2-1 同位旋对称的情形：这里我们使用的流夸克的质量为 $m_{u/d} = 3.66 MeV, m_s = 84.5 MeV$ 。 s 夸克和 u/d 夸克质量的比值 $m_s/m_{u/d} = 23.09$ 在试验数据公布的范围 $22 \sim 30$ 之内（具体数据可以参考各个版本的PDG）。表中 π, k 介子的实验值质量都是通过对电中性的粒子和带电粒子的质量求平均值得出的质量。从表中数据可以看出，对于赝标量粒子而言，质量和电弱衰变常数都计算得很好。

	π^0	π^\pm	$k^0(\bar{k}^0)$	k^\pm
Exp. $m(MeV)$	134.98	139.57	497.61	493.68
Cal. $m(MeV)$	134.85	136.55	497.88	491.66
Exp. $f(MeV)$	131	131	160	160
Cal. $f(MeV)$	131.80	131.75	156.03	154.96

表 2-2 同位旋对称性破缺的情形：这里我们使用的夸克的质量为 $m_u = 2.53 MeV, m_d = 4.78 MeV, m_s = 84.5 MeV$ 。 s 夸克和 u/d 夸克质量的比值 $m_s / ((m_u + m_d)/2) = 23.12$ 在试验数据公布的范围 $22 \sim 30$ 之内（具体数据可以参考各个版本的PDG）。同位旋对称性破缺以后， π^0 和 π^\pm 介子的质量差为 $\Delta m_\pi = m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 1.70 MeV$ ，而实验数据显示的质量差为 $\Delta m_\pi = 4.50 MeV$ 。同位旋对称性破缺的贡献大概占了 37%，这个说明了同位旋对称性的破缺不是 π^0 和 π^\pm 介子的质量差的主要来源。对于 K 介子，计算出来的质量差为 $\Delta m_k = m_{k^0} - m_{k^\pm} = 6.22 MeV$ ，而实验数据显示的质量差为 $\Delta m_k = 3.93 MeV$ ，比数值计算得出的质量差要小一些。以上的计算或许表明了电磁相互作用的引入对赝标量介子的质量分裂的贡献不可忽视，我们将在下一章详细讨论。

	ρ	k^*	ϕ
Exp. $m(MeV)$	775.49	893.80	1019.46
Cal. $m(MeV)$	735.35	950.28	1067.10
Exp. $f(MeV)$	216	225	237
Cal. $f(MeV)$	207.19	288.94	300.25

表 2-3 同位旋对称的情形：这里我们使用的流夸克的质量和计算赝标量介子在同位旋对称的情形时使用的流夸克的质量相同。表中 ρ, k^* 介子的实验值是通过计算的带电粒子和电中性粒子质量的平均值确定的。计算出来的 ρ 介子的质量比实验值要小一些，而计算出来的 k^* 和 ϕ 介子的质量要比实验值大一些。这种现象可能是由于彩虹-梯近似对矢量介子的描述不够好。

	ρ^0	ρ^\pm	$k^{*0}(\bar{k}^{*0})$	$k^{*\pm}$	ϕ
Exp. $m(MeV)$	775.49	775.49	895.94	891.66	1019.46
Cal. $m(MeV)$	735.29	733.11	950.83	949.81	1067.10
Exp. $f(MeV)$	216	216	225	225	237
Cal. $f(MeV)$	207.24	218.11	286.49	291.63	300.25

表 2-4 同位旋对称性破缺的情形：这里我们使用的流夸克的质量和计算赝标量介子在同位旋对称性破缺的情形时使用的流夸克的质量相同。从表中可以看出，我们计算出来的 ρ 介子的质量差为 $\Delta m_\rho = m_{\rho^0} - m_{\rho^\pm} = 2.18 MeV$ ，比实验数据略大（实验数据中计算得出的 ρ^0 与 ρ^\pm 介子的质量差大概是 $0.7 MeV$ ）。矢量K 介子的质量分裂为 $\Delta m_{k^*} = m_{k^{*0}} - m_{k^{*\pm}} = 1.02 MeV$ ，而实验数据计算出的矢量K 介子的质量分裂为 $4.28 MeV$ ，理论计算的数值比实验值要小一些。这种现象同样也可能是由于彩虹-梯近似对矢量介子的描述不够好。

第三章 电磁相互作用对介子谱的影响

几十年来，关于中性和带电 π 介子的质量分裂问题一直是人们研究的热点[36] [37] [38] [39] [40]。这里我们下面将要讨论的是在DSE/BSE 中加入单光子交换，来试图解释中性介子和带电介子的质量差，之前也有人做了相关工作[41] [42]，我们这里采用的是不同的方法并且体现了QCD 的很多特性。我们首先在同位旋对称性破缺的情形下，通过对 π^0, π^\pm 质量的实验数据的拟合，得出 u 夸克和 d 夸克的质量，然后，利用刚才算出的 d 夸克的质量来拟合 k^0 介子的质量的实验值，从而得到 s 夸克的质量。这样就得到了 u 、 d 、 s 夸克的质量。接下来，利用之前获得的参数进一步计算 k^\pm 介子的质量以及矢量介子的质量。我们得到的夸克质量为： $m_u = 2.53 MeV, m_d = 4.78 MeV, m_s = 84.5 MeV$ 。

加入了电磁相互作用的夸克传播子的DSE 变成如下形式：

$$\begin{aligned} S(p)^{-1} &= Z_2 i \gamma \cdot p + Z_4 m(\mu^2) \\ &+ \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}((p-q)^2)}{(p-q)^2} T_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \\ &+ Z_2 |Q|^2 \int_\ell^\Lambda 4\pi\alpha D_{\mu\nu}^{\text{photon}}(p-\ell) \gamma_\mu S(\ell) \gamma_\nu \end{aligned}$$

进而得到穿衣函数 $A(p^2)$ ：

$$\begin{aligned} A(p^2) &= Z_2 + \frac{4}{3p^2} \int_q^\Lambda \frac{\mathcal{G}((p-q)^2)}{(p-q)^2} T_{\mu\nu}(p-q) \\ &\times \frac{A(q^2)}{q^2 A(q^2) + B(q^2)} (p \cdot q + 2 \frac{((p-q) \cdot p)(p-q) \cdot q}{(p-q)^2}) \\ &+ Z_2 |Q|^2 \frac{1}{p^2} \int_\ell^\Lambda 4\pi\alpha D_{\mu\nu}^{\text{free}}(p-\ell) \\ &\times \frac{A(\ell^2)}{\ell^2 A(\ell^2) + B(\ell^2)} (p \cdot \ell + 2 \frac{((p-\ell) \cdot p)(p-\ell) \cdot \ell}{(p-\ell)^2}) \end{aligned}$$

和穿衣函数 $B(p^2)$ ：

$$\begin{aligned} B(p^2) &= Z_4 m(\mu^2) + 4 \times \int_\ell^\Lambda \frac{\mathcal{G}((p-q)^2)}{(p-q)^2} T_{\mu\nu}(p-q) \\ &\times \frac{B(q^2)}{q^2 A(q^2) + B(q^2)} \end{aligned}$$

$$+3 \times Z_2 |Q|^2 \int_{\ell}^{\Lambda} 4\pi\alpha D_{\mu\nu}^{photon}(p-\ell) \\ \times \frac{B(\ell^2)}{\ell^2 A(\ell^2) + B(\ell^2)} \quad (3-1)$$

同样的方式，在介子的BSE 里面加入电磁相互作用后，BSE 变为：

$$\Gamma_M(k; P) = - \int_q^{\Lambda} \frac{\mathcal{G}((p-q)^2)}{(p-q)^2} T_{\mu\nu}(p-q) \\ \times \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q_+) \Gamma_M(q; P) S(q_-) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \\ + Z_2 Q_q Q_{\bar{q}} \int_q^{\Lambda} 4\pi\alpha D_{\mu\nu}^{photon}(k-q) \\ \times S(q_+) \Gamma_M(q; P) S(q_-) \gamma_\nu \quad (3-2)$$

对于 π 介子，如果没有在DSE/BSE 中加入电磁相互作用的修正， π^0 和 π^\pm 之间的质量差为 $\Delta m_\pi = m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 1.7 MeV$ 。如果在DSE/BSE 中加入了电磁相互作用， π^0 和 π^\pm 之间的质量差就变为 $\Delta m_\pi = 4.49 MeV$ ，由此可见电磁相互作用对质量分裂的影响占到62.14%。这个结果表明， π 介子的质量分裂问题用单光子交换就可以来解释了。

对于K 介子，没有在DSE/BSE 中加入电磁相互作用的修正的时候，我们计算的 k^0 和 k^+ 的质量差为 $\Delta m_k = m_{k^0} - m_{k^+} = 6.22 MeV$ ，而加入电磁相互作用的修正之后，质量差变为 $\Delta m_k = 5.21 MeV$ 。只是因为， k^0 里面的组份夸克是 d 和 \bar{s} 夸克，而 k^+ 是由 u 和 \bar{s} 夸克组成的。在同位旋对称的情形下，也就是 $m_{u/d} = (m_u + m_d)/2 = 3.66 MeV$ 时，在DSE/BSE 加入了电磁相互作用的结果是 $m_{k^+} > m_{k^0}$, $m_{k^+} - m_{k^0} = 1.01 MeV$ ，但是当同位旋对称性破缺以后，由于 $m_d > m_u$ ，那么显然应该 $m_{k^0} > m_{k^+}$ ，由此可得，K 介子的质量分裂问题主要贡献是同位旋对称性的破缺效应。

对于 ρ 介子，如果没有在DSE/BSE 中加入电磁相互作用的修正， ρ^0 和 ρ^\pm 介子的质量差为 $\Delta m_\rho = m_{\rho^0} - m_{\rho^\pm} = 2.18 MeV$ ，如果在DSE/BSE 中加入了电磁相互作用，质量差变为 $\Delta m_\rho = 1.99 MeV$ ，这样计算出来的结果还是比实验值要大一些。

对于矢量K 介子，没有在DSE/BSE 中加入电磁相互作用的修正的时候，我们计算的 k^{*0} and $k^{*\pm}$ 的质量差为 $\Delta m_{k^*} = m_{k^{*0}} - m_{k^{*\pm}} = 1.02 MeV$ ，而加入电磁相互作用的修正之后，质量差变为 $\Delta m_{k^*} = 0.86 MeV$ ，仍然比实验数据要小很多。

	π^0	π^\pm	$k^0(\bar{k}^0)$	k^\pm
Exp. $m(MeV)$	134.98	139.57	497.61	493.68
Cal. $m(MeV)$	135.00	139.49	498.14	492.93

表 3-1 同位旋对称性破缺且在DSE/BSE 中加入电磁相互作用的情形：我们用DSE/BSE 计算出来的 π^0 和 π^\pm 介子的质量差为 $\Delta m_\pi = m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 4.49 MeV$ ，而实验上得到的质量差为 $\Delta m_\pi = 4.50 MeV$ ，因此， π 介子的质量分裂问题是由于同位旋对称性的破缺以及电磁相互作用的影响，并且电磁相互作用的影响占据了主要贡献。对于K 介子而言，我们用DSE/BSE 计算出来的质量差为 $\Delta m_k = m_{k^0} - m_{k^\pm} = 5.21 MeV$ ，比没有考虑电磁相互作用影响时候算的结果要小，而实验上测得的质量差为 $\Delta m_k = 3.93 MeV$ ，比我们理论计算的结果要小一点。这可以说明电磁相互作用对于K 介子的质量分裂影响不大，而同位旋对称性破缺的影响是最主要的。

	ρ^0	ρ^\pm	$k^{*0}(\bar{k}^{*0})$	$k^{*\pm}$	ϕ
Exp. $m(MeV)$	775.49	775.49	895.94	891.66	1019.46
Cal. $m(MeV)$	735.62	733.63	951.14	950.28	1067.73

表 3-2 同位旋对称性破缺且在DSE/BSE 中加入电磁相互作用的情形：我们用DSE/BSE 理论计算的 ρ^0 和 ρ^\pm 的质量差为 $\Delta m_\rho = m_{\rho^0} - m_{\rho^\pm} = 1.99 MeV$ ，而实验数据显示的质量差为 $\Delta m_\rho \approx 0.7 MeV$ 。对于矢量K 介子而言，我们理论计算的质量差为 $\Delta m_{k^*} = m_{k^{*0}} - m_{k^{*\pm}} = 0.86 MeV$ ，而实验数据显示的质量差为 $\Delta m_{k^*} = 4.28 MeV$ 。这似乎表明电磁相互作用对矢量K 介子的质量分裂几乎没有影响。

第四章 总结与展望

Dyson-Schwinger 方程和Bethe-Salpeter 方程结合的方法为研究QCD 唯象学提供了一个自洽的、非微扰的连续方法。这篇论文的工作主要是利用齐次Bethe-Salpeter 方程来求解赝标量介子和矢量介子的基态质量谱，并在DSE/BSE 中加入电磁相互作用来计算中性介子和带电介子的质量差。

BSE 一般被化简为一个本征值问题。由于我们仅仅计算了介子的基态质量，所以我们仅仅需要知道BSE 核的最大本征值以及对应的本征矢量，因此在这里我们采用了幂方法来求解大型矩阵的最大本征值及其本征矢量。

彩虹-梯近似是一个很好的近似，是由于它在计算中展开的每一阶费曼图里面都对手征对称性提供了自洽的描述以及保证了轴矢量的Ward-Takahashi 恒等式的成立，因此本文里面对夸克、胶子的性质作具体的描述时都采用了这个近似。在使用了彩虹-梯截断后，我们又使用了Maris-Tandy 胶子传播子模型，该模型在红外区域有一个明显的增强，正是这个增强在动力学手征对称性的破缺中起到了很重要的作用。本论文主要计算了味道多重态的赝标量介子和矢量介子的质量，在这两种道中，在任何一高阶的费曼图展开中，吸引作用都被排斥作用抵消了。

在讨论中性介子和带电介子的质量差的时候，对于 π 介子，单光子交换势的影响比同位旋对称性破缺的影响大，但是对于K 介子来讲，同位旋对称性破缺的影响是最主要的。但是对于矢量介子而言，整体计算的结果不是很好。但是计算的质量谱还是不错的，只是在计算质量分裂的时候不是那么明显。可能是因为单光子交换势对于矢量介子的质量分裂的贡献不明显，或许彩虹-梯近似也不能完全解释矢量介子内部的结构性质。

对于将来的研究方向，我们打算超越彩虹-梯近似去探究标量介子、轴矢量介子和张量介子的质量谱，甚至可以讨论介子其他方面的性质，比如电磁形状因子、部分子分布函数和分布振幅。

附录 A 欧几里得空间

在这篇论文里，我们对DSE/BSE 的所有计算都是在欧几里得动量空间进行的，从闵可夫斯基时空到欧几里得时空的转化是由Wick 首先提出来的[43]。下面我们来看看欧几里得空间的一些约定：

1) 欧几里得空间的四维矢量之间的内积计算使用的是非负的度规

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{\mu\nu} a_\mu b_\nu = \sum_{i=1}^4 a_i b_i . \quad (\text{A-1})$$

2) 在欧几里得空间的狄拉克矩阵也是厄米的且满足如下关系

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A-2})$$

因此，我们有

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 . \quad (\text{A-3})$$

这样一来

$$Tr[\gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho] = 4\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} , \quad (\text{A-4})$$

这里的 $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ 是完全反对称Levi-Civita 张量。欧几里得空间的狄拉克矩阵和闵可夫斯基时空的狄拉克矩阵的关系可以表述为

$$\gamma_4^E = \gamma^0 , \quad (\text{A-5})$$

$$\gamma_j^E = -i\gamma^j , j = 1, 2, 3 , \quad (\text{A-6})$$

具体来说是这样的：

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

在以上的约定下，夸克-反夸克束缚态系统的类时总动量 P 满足条件 $P^2 < 0$ ，相应的在壳条件为 $P^2 = -M^2$ ，这里的 $M \geq 0$ 是介子的质量。

附录 B 参数化和积分方法

§B.1 参数化

我们选择了在欧几里得空间做计算，就可以把所有的动量积分转化为四维的球坐标积分，

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk^2 \frac{k^2}{2} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} \int_{-1}^1 dy \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (\text{B-1})$$

积分动量 k_μ 可以这样参数化：

$$k_\mu = \sqrt{k^2}(\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-y^2}\sin(\phi), \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-y^2}\cos(\phi), y\sqrt{1-z^2}, z). \quad (\text{B-2})$$

我们的计算中，夸克-反夸克系统的总动量 P 等于夸克的动量 ($k_+ = k + \eta_+ P$) 和反夸克的动量 ($k_- = k - \eta_- P$) 之间的差。其中 η_\pm 为动量分配参数，他们满足 $\eta_+ + \eta_- = 1$ 。在 Bethe-Salpeter 方程里面有三个动量， P (夸克-反夸克系统的总动量)、 q (相对动量)、 k (积分圈动量)。根据式(B-2) 中对四维球坐标的参数化方法，在质心系中的总动量 P 表示为：

$$P = (0, 0, 0, \sqrt{P^2}). \quad (\text{B-3})$$

相对动量 q 可以参数化为：

$$q = \sqrt{q^2}(0, 0, \sqrt{1-z_q^2}, z_q). \quad (\text{B-4})$$

积分动量 k 参数化为：

$$k = \sqrt{k^2}(0, \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-y^2}, y\sqrt{1-y^2}, z). \quad (\text{B-5})$$

在我们的参数化方案中，积分 $\int_0^{2\pi} d\phi$ 直接地给出常数 2π 。由于在壳条件， $P^2 = -M^2$ ，我们的参数化方案使得齐次的 Bethe-Salpeter 方程中出现了复动量 $P = (0, 0, 0, iM)$ 。这个现象导致的直接结果就是夸克和反夸克传播子的动量参数都变成了复数。因此，夸克和反夸克传播子的穿衣函数 $A(k_\pm^2)$ 和 $B(k_\pm^2)$ 的动量参数变为

$$k_\pm^2 = k^2 - \eta_\pm^2 M^2 + 2i\eta_\pm Mz\sqrt{k^2}. \quad (\text{B-6})$$

这就迫使夸克和反夸克传播子的穿衣函数 $A(k_\pm^2)$ 和 $B(k_\pm^2)$ 的解析域从实轴扩大到临近的复平面的抛物线 $k_\pm^2 -$ 区域。抛物线的边界可以通过设置参数 $z = \pm 1$ 获得。

§B.2 积分方法

对所有的动量积分按照上面的方法参数化以后，我们接下来要做的就是离散化这些参数。这里我们使用的是一般的高斯积分的方法，如下

$$\int_0^\infty d(k^2) \frac{k^2}{2} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} \int_{-1}^1 dy \rightarrow \sum_{l=1}^{N_k} \sum_{m=1}^{N_z} \sum_{n=1}^{N_y} w(k_l^2) \frac{k^2}{2} w(z_m) w(y_n), \quad (\text{B-7})$$

这里的 $w(q_l^2), w(z_m), w(y_n)$ 表示的是积分的权重，而 q_l^2, z_m, y_n 都是相应的参数离散化以后的点。因子 $\sqrt{1-z^2}$ 吸收在积分权重里面了，这样做好处就是使得积分 $\int_{-1}^1 dz$ 具有很好的收敛性。下面我们就来给出这一做法的数学推导。

假设我们有这样的积分，

$$I = \int dz \sqrt{1-z^2} f(z). \quad (\text{B-8})$$

我们这里将Clenshaw-Curtis 积分方法[44]做了一个推广，并且将被积函数 $f(z)$ 用切比雪夫第一类多项式进行展开，得到

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(z), \quad (\text{B-9})$$

这里的 $T_n(z)$ 对于每一个 $n \geq 0$ 的具体形式为

$$T_n(z) = \cos(n \arccos(z)) \text{ if } -1 \leq z \leq 1 \quad (\text{B-10})$$

将式(B-9) 插入到式(B-8)，并且定义 $z = \cos(\theta)$ ，这样就可以得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{a_0}{2} \int_0^\pi d\theta \sin^2(\theta) T_0(\cos(\theta)) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\pi d\theta \sin^2(\theta) T_n(\cos(\theta)) \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^\pi d\theta \sin^2(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\pi d\theta \sin^2(\theta) \cos(n\theta) \\ &= a_0 \frac{\pi}{4} - a_2 \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

为了对积分 I 做数值计算，式(B-9) 必须在有限的 N 处截断，如此一来式(B-9) 就变为

$$f(z) \approx f^{(N)}(z) = \sum_{n=0}^N {}''a_n T_n(z), \quad (\text{B-12})$$

这里的求和标记 \sum'' 表明第一项和最后一项前面的系数必须再乘以 $\frac{1}{2}$ 。 $T_n(z)$ 是切比雪夫多项式，相应的系数 a_n 分别为

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N '' f(\cos(\frac{k\pi}{N})) \cos(\frac{n\pi k}{N}). \quad (\text{B-13})$$

将表达式(B-13) 插入到表达式(B-11)，我们就可以得到

$$I = \frac{\pi}{2N} \sum_{k=0}^N '' f(\cos(\frac{k\pi}{N})) (1 - \cos(\frac{2\pi k}{N})). \quad (\text{B-14})$$

这里，我们重新给出了一个积分法则， $\sum_{k=1}^{N-1} w(z_k) f(z_k)$ ，并且， $z_k = \cos(\frac{k\pi}{N})$, $w(z_k) = 1 - \cos(\frac{2\pi k}{N})$ 。

附录 C 模型和参数

在正文的(1.2) 我们已经提到了, DSE 和BSE 的截断是著名的彩虹-梯截断。连同阿贝尔近似, 图(1-1) 显示了夸克-反夸克的有效相互作用部分, 这样的近似对应的表达式可以做如下替换

$$Z_{1F} g^2 \Gamma_\mu(p, q) D_{\mu\nu}(p - q) \rightarrow \gamma_\mu \frac{\mathcal{G}((p - q)^2)}{(p - q)^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{(p - q)_\mu (p - q)_\nu}{(p - q)^2} \right), \quad (\text{C-1})$$

上式中的 $\Gamma_\mu(p - q)$ 是穿衣夸克-胶子相互作用顶点。 $D_{\mu\nu}(p - q)$ 是穿衣胶子传播子。因此在夸克DSE 和夸克-反夸克BSE 中, 穿衣的夸克-胶子相互作用顶点和穿衣的胶子传播子分别为它们对应的裸的量所替代, 然后再乘以所谓的有效相互作用 $\mathcal{G}((p - q)^2)$ 。在我们的计算中, 我们采用的是Maris-Tandy(MT) 胶子模型, 这是由Maris 和Tandy 首先提出来的[24]。MT 模型里的有效相互作用为

$$\frac{1}{Z_2^2} \frac{\mathcal{G}(k^2)}{k^2} = D \frac{4\pi^2}{\omega^6} k^2 e^{-k^2/\omega^2} + \mathcal{F}_{UV}(k^2), \quad (\text{C-2})$$

这里的

$$\mathcal{F}_{UV}(k^2) \equiv \frac{4\pi \gamma_m \pi \mathcal{F}(k^2)}{1/2 \ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)^2]}, \quad (\text{C-3})$$

$$\mathcal{F}(k^2) = [1 - \exp(-k^2/[4m_t^2])]/k^2. \quad (\text{C-4})$$

上面的因子 $1/Z_2^2$ 保证了重整化的乘积关系[20]。

上面的模型中其他的参数设置为 $D = 0.933 \text{GeV}^2$, $\omega = 0.4 \text{GeV}$, $m_t = 0.5 \text{ GeV}$, $\tau = e^2 - 1$, $N_f = 4$, $\Lambda_{\text{QCD}}^{N_f=4} = 0.234 \text{ GeV}$, $\gamma_m = 12/(33 - 2N_f)$ 。我们将重整化点设置在 $\mu = 19 \text{GeV}$ 处, 目的是为了保证夸克传播子在微扰区单圈修正下的渐近行为。有效作用(C-2) 第一项在红外区域有一个很大的增强, 而第二项在大动量类空 k^2 区域正比于 $\alpha(k^2)/k^2$ ($\alpha(k^2)$ 是QCD 的跑动耦合常数, 在微扰区的行为是完全确定的。), 并且在实 k^2 区域没有奇点。MT 的胶子模型的大体行为我们可以从图(3-1) 看出。

我们这篇论文的主要任务就是用DSE/BSE 的方法, 并在DSE/BSE 中加入电磁相互作用, 试图来解释带电介子和电中性介子的质量差。首先, 我们计算的是同位旋破缺的情形, 并且在DSE/BSE 中加入了单光子交换, 通过拟合 $\pi^0 \pi^\pm$ 介子质

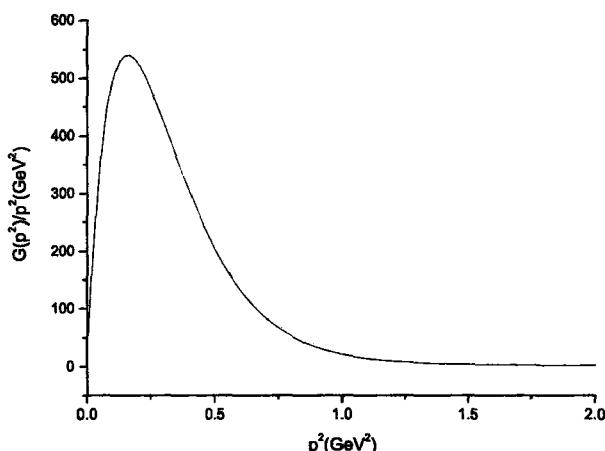


图 3-1 有效相互作用必须具有一些明确的性质，在红外区也就是 $k^2 < 1\text{GeV}^2$ 的区域，有效相互作用必须有一个增强，这是夸克传播子动力学手征对称性破缺的保证。

量的实验值，我们可以得到 u 、 d 夸克的质量， $m_u = 2.53\text{MeV}$, $m_d = 4.78\text{MeV}$ 。然后，再用以上拟合好的 d 夸克的质量拟合 k^0 介子质量的实验值，然后得到 s 夸克的质量， $m_s = 84.5\text{MeV}$ 。接下来的计算就很简单了，剩下的赝标量介子和矢量介子的质量都可以用上面拟合好的夸克的质量直接求出来。对于同位旋对称的情形，我们用的 u/d 夸克的质量是同位旋对称性破缺时拟合实验数据得到的 u 、 d 夸克质量的平均值，即 $m_{u/d} = (m_u + m_d)/2 = 3.66\text{MeV}$ ，而 s 夸克的质量仍然和同位旋对称性破缺时拟合实验数据得到的质量相同，即 $m_s = 84.5\text{MeV}$ 。

附录 D 狄拉克结构、C 宇称和切比雪夫多项式

§D.1 狄拉克结构

在构造Bethe-Salpeter 振幅的洛伦兹结构的时候，我们发现Bethe-Salpeter 方程中一共出现了三个四维矢量，即 γ_μ, q_μ, P_μ 。因此，构成一般的标量Bethe-Salpeter 振幅的四个基本洛伦兹协变量为

$$1, \not{P}, \not{q}, i/2[\not{q}, \not{P}], \quad (\text{D-1})$$

上面的 $[\not{q}, \not{P}] = \not{q}\not{P} - \not{P}\not{q}$ 代表对易关系。为了数值计算的方便，我们将上面的四个洛伦兹协变量做线性组合，使得它们满足如下的正交归一关系

$$\text{Tr}[T_i \cdot T_j] = \delta_{ij}, \quad (\text{D-2})$$

上面的点乘表示对所有的洛伦兹指标求和。最有效的方法就是将一种被称为Gram-Schmidt 的方法应用到式(D-1) 中，然后得到

$$\begin{aligned} T_1 &= 1, \quad T_2 = \frac{\not{P}}{2\sqrt{-P^2}}, \\ T_3 &= \frac{\not{q} - \frac{\not{P}\cdot\not{q}}{P^2}}{2i\sqrt{q^2 - \frac{(P\cdot q)^2}{P^2}}}, \quad T_4 = \frac{\frac{i}{2}[\not{q}, \not{P}]}{2i\sqrt{(P\cdot q)^2 - P^2 q^2}}. \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

以上这四个洛伦兹协变量描述的是夸克-反夸克组成的标量系统($J^P = 0^+$) (宇称为正) 的Bethe-Salpeter 振幅。为了得到赝标量介子($J^P = 0^-$)系统的洛伦兹协变量，上面所有的标量介子的洛伦兹协变量都要乘以 γ_5 ，即

$$\begin{aligned} T_1^{PS} &= \frac{\gamma_5}{2}, \quad T_2^{PS} = \frac{\gamma_5(\not{P})}{2\sqrt{-P^2}}, \\ T_3^{PS} &= \frac{\gamma_5(\not{q} - \frac{\not{P}\cdot\not{q}}{P^2})}{2i\sqrt{q^2 - \frac{(P\cdot q)^2}{P^2}}}, \quad T_4^{PS} = \frac{\frac{i}{2}\gamma_5([\not{q}, \not{P}])}{2i\sqrt{(P\cdot q)^2 - P^2 q^2}}, \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

当然这里所有的 T_i^{PS} 已经正交归一了，即满足式(D-2)。当然以上得到的洛伦兹协变量还没有确定的C 宇称，关于C 宇称我们下面会给出详细地讨论。

对于矢量介子(1^-)而言，它们的洛伦兹协变量必须是对称的、所有四维指标都满足横向条件、还必须满足洛伦兹求迹为零[45] [46]。为了达到这样的目的，我们先定义两个正交的四维矢量 $\{P_\mu, q_\mu^T, \gamma_\mu^{TT}\}$ [47]，如下

$$q_\mu^T \equiv (q_\mu - P_\mu \frac{P \cdot q}{P^2}) / (\sqrt{(q^2 - \frac{(q \cdot P)^2}{P^2})}), \quad (D-5)$$

$$\gamma_\mu^{TT} \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_\mu - P_\mu \frac{P}{P^2} - q_\mu^T q^T). \quad (D-6)$$

有了以上的定义，接下来要想得到矢量介子的八个洛伦兹协变量就容易多了。只要将式(D-3)乘以 q_μ^{TT} 我们就可以得到矢量介子的头四个洛伦兹协变量，再将式(D-3)乘以 γ_μ^{TT} 我们就可以得到矢量介子的另外四个洛伦兹协变量。由于 P_μ, q_μ^T 和 γ_μ^{TT} 相互两两正交，所以以上构造出来的八个洛伦兹协变量都满足横向条件。于是矢量介子的八个洛伦兹协变量的具体形式如下：

$$\begin{aligned} T_1^V &= \frac{1}{2}q_\mu^T, \quad T_2^V = \frac{iP}{2\sqrt{-P^2}}q_\mu^T, \\ T_3^V &= \frac{q-P\frac{P \cdot q}{P^2}}{2\sqrt{q^2 - \frac{(P \cdot q)^2}{P^2}}}q_\mu^T, \quad T_4^V = \frac{\frac{1}{2}[q, P]}{2i\sqrt{(P \cdot q)^2 - P^2 q^2}}q_\mu^T, \\ T_5^V &= 1\gamma_\mu^{TT}, \quad T_6^V = \frac{P}{\sqrt{-P^2}}\gamma_\mu^{TT}, \\ T_7^V &= \frac{i(q-P\frac{P \cdot q}{P^2})}{\sqrt{q^2 - \frac{(P \cdot q)^2}{P^2}}}\gamma_\mu^{TT}, \quad T_8^V = \frac{[q, P]}{2i\sqrt{(P \cdot q)^2 - P^2 q^2}}\gamma_\mu^{TT}. \end{aligned} \quad (D-7)$$

值得注意的是，以上所有的洛伦兹协变量都是通过 $\tilde{T}_i = \frac{T_i}{\sqrt{Tr[T_i \cdot T_i]}}$ 归一化的。

§D.2 C 宇称和切比雪夫多项式

正如(2.3)早已讨论过的那样，如果夸克和反夸克组成的系统是一个电中性的系统，那么这个系统除了具有确定的自旋和宇称外还必须是电荷共轭的本征态，也就是说这个系统具有C 宇称。从数学上来讲，一个夸克-反夸克系统的BSA $\Gamma(q, P_i)$ 是电荷共轭的本征态可以表述为：

$$\bar{\Gamma}(q, P_i) \equiv [C \Gamma(-q, P_i) C^{-1}]^T = \eta_c \Gamma(q, P_i), \quad (D-8)$$

这里的 $C = \gamma_2 \gamma_4$ 。本征值 $\eta_c = \pm 1$ 就是这个系统的C 宇称。之前我们也讨论过了BSA 可以被分解为洛伦兹协变量和洛伦兹不变量(2-30)，即

$$\Gamma(q, P_i) = \sum_{n=1}^N T_n(q, P_i) F^n(P_i^2, q^2, q \cdot P_i). \quad (D-9)$$

每个洛伦兹协变量具有一个确定的C 宇称 ξ_n , 即

$$\bar{T}_n(q, P_i) \equiv [C T_n(-q, P_i) C^{-1}]^t = \xi_n T_n(q, P_i), \quad (\text{D-10})$$

这里的 $\xi_n = \pm 1$ 。如此一来相对应的洛伦兹不变量的具体形式必须有一些限制。为了清楚地了解这些洛伦兹不变量受到的限制, 我们将分解后的方程(D-9) 和方程(D-10) 带入到方程(D-8), 然后我们就可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(q, P_i) &= \sum_{n=1}^N F^n(P_i^2, q^2, -q \cdot P_i) [C T_n(-q, P_i) C^{-1}]^T \\ &= \sum_{n=1}^N F^n(P_i^2, q^2, -q \cdot P_i) \xi_n T_n(q, P_i). \end{aligned} \quad (\text{D-11})$$

很明显, 这些洛伦兹不变量必须满足关于 $q \cdot P_i$ 具有确定的对称性或者反对称性。由于 $T_n(q, P_i)$ s 线性无关, 我们可以定义

$$F^n(P_i^2, q^2, -q \cdot P_i) = \tilde{\xi}_n F^n(P_i^2, q^2, q \cdot P_i), \quad (\text{D-12})$$

同样, 这里的 $\tilde{\xi}_n = \pm 1$, 这样方程(D-11) 变成

$$\eta_c \sum_{n=1}^N T_n(q, P_i) F^n(P_i^2, q^2, q \cdot P_i) = \sum_{n=1}^N (\xi_n \tilde{\xi}_n) T_n(q, P_i) F^n(P_i^2, q^2, q \cdot P_i). \quad (\text{D-13})$$

因此 η_c 可以由 $\xi_n \tilde{\xi}_n$ 表示出来, 并且如果所讨论的系统具有确定的C 宇称的话, 对于所有的 n 它都具有同样的值。举例来说, 如果我们需要探究C 宇称为正的系统, 即 $\eta_c = 1$, 那就是说乘积 $\xi_n \tilde{\xi}_n$ 对于每个不同的 n 来说必须总是正的, 如果对于其中某个 n 来讲, 洛伦兹协变量的C 宇称为负, 即 $\xi = -1$, 那么为了使得总的C 宇称为正, 它相对应的洛伦兹不变量必须是关于 $q \cdot P_i$ 反对称的, 即 $\tilde{\xi}_n = -1$ 。

正如在2.3 节提到的那样, 我们将要对洛伦兹不变量用切比雪夫第二类多项式展开, 其中 z_q 的定义如下

$$q \cdot P_i = q z_q \sqrt{P_i^2} = i q M_i z_q. \quad (\text{D-14})$$

可以对洛伦兹不变量用切比雪夫第二类多项式展开的条件是, 在我们的参数化框架下动量分配参数满足 $\eta_{\pm} = 0.5$ 。如此一来, 关于 $q \cdot P_i$ 的对称性就对应到关于参数 z_q 的对称性上来了。而且, 这样计算出来的洛伦兹不变量要么是纯粹的实数, 要么就是纯粹的虚数。

这里我们先给出切比雪夫第二类多项式的前六个:

$$U^0(z) = 1,$$

$$\begin{aligned}
 U^1(z) &= 2z, \\
 U^2(z) &= 4z^2 - 1, \\
 U^3(z) &= 8z^3 - 4z, \\
 U^4(z) &= 16z^4 - 12z^2 + 1, \\
 U^5(z) &= 32z^5 - 32z^3 + 6z. \tag{D-15}
 \end{aligned}$$

对于中性赝标量介子，即 π^0 ，洛伦兹协变变量 T_1^{PS}, T_2^{PS} 和 T_4^{PS} 具有偶的C 宇称，而 T_3^{PS} 具有奇的C 宇称。这样以来洛伦兹协变变量 T_1^{PS}, T_2^{PS} 和 T_4^{PS} 所对应的洛伦兹不变量仅仅需要用偶次项的切比雪夫多项式展开即可，而 T_3^{PS} 所对应的洛伦兹不变量仅需要奇次项来进行展开即可。

对于矢量中性介子，即 ρ^0 ，洛伦兹协变变量 T_2^V 和 T_7^V 具有偶C 宇称，而其它的洛伦兹协变变量具有奇的C 宇称。这样以来洛伦兹协变变量 T_2^V 和 T_7^V 所对应的洛伦兹不变量仅仅需要用奇次项的切比雪夫多项式展开即可，而其它的六个洛伦兹协变变量所对应的洛伦兹不变量仅需要偶次项来进行展开即可。

附录 E 幂方法近似求解矩阵的最大本征值

我们都知道一个 $n \times n$ 矩阵 A 的本征值可以通过求解其特征方程而获得,

$$\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_0 = 0. \quad (\text{E-1})$$

然而, 当矩阵的维数很大的时候, 解这样的多项式方程是很困难且相当耗时的。而且高阶多项式方程的根的数值解法对于误差很敏感。

接下来我们将介绍一个新的方法来近似求解矩阵的本征值, 幂方法。幂方法仅仅能够近似求出矩阵 A 的绝对值最大的本征值, 我们将其称为主本征值。

令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 $n \times n$ 的矩阵 A 的本征值。如果 λ_1 满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (\text{E-2})$$

我们就称其为主要本征值。与主要本征值 λ_1 相对应的本征矢量我们称其为主要本征矢量。

近似求解主要本征值的幂方法的主要思路就是迭代。首先, 我们假设矩阵 A 具有主要本征值以及相应的本征矢量。然后我们假设任意一个矢量 x_0 作为矩阵 A 的主要本征矢量的初始值。这个初始的矢量 x_0 在 \mathbb{R}^n 空间必须不为零。然后, 我们按照下面的步骤进行计算

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0, \\ x_2 &= Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0, \\ &\vdots \\ x_k &= Ax_{k-1} = A(A^{k-1}x_0) = A^kx_0. \end{aligned} \quad (\text{E-3})$$

如果 k 足够大, 且对于每一步我们都重新标度, 我们将会得到关于矩阵 A 的主要本征矢量的一个很好的近似。如果 x 是矩阵 A 的本征矢量, 那么它相应的本征值为

$$\lambda = \frac{Ax \cdot x}{x \cdot x}, \quad (\text{E-4})$$

这就是所谓的Ragleigh 商.

接下来，我们将要证明以上介绍的幂方法是否真的可以近似地求解出一个 $n \times n$ 矩阵 A 的主要本征值及其相对应的本征矢量。因为矩阵 A 是可以对角化的，所以矩阵 A 有 n 个线性无关的本征矢量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ ，相应的本征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。这里我们假设所有的本征值都按照绝对值从大到小的顺序排列好，因此 λ_1 是主要本征值， \mathbf{x}_1 为其相应的主要本征矢量。由于 n 个本征矢量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 都是线性无关的，所以它们可以作为空间 \mathbb{R}^n 的基矢。对于初始的近似本征矢量 \mathbf{x}_0 ，每一个分量一定要是非零的，因为我们将初始本征矢量做线性展开

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n \quad (\text{E-5})$$

主要本征矢量前面的系数一定不能为零（如果 $c_1 = 0$ ，那么计算就不会收敛，所以得重新选择初始本征矢量 \mathbf{x}_0 了。）。接下来将上面的方程两边同时左乘矩阵 A，得到

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_0 &= A(c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n) \\ &= c_1(A\mathbf{x}_1) + c_2(A\mathbf{x}_2) + \dots + c_n(A\mathbf{x}_n) \\ &= c_1(\lambda_1 \mathbf{x}_1) + c_2(\lambda_2 \mathbf{x}_2) + \dots + c_n(\lambda_n \mathbf{x}_n). \end{aligned} \quad (\text{E-6})$$

然后在此方程的两边同时重复左乘矩阵 A，最终得到

$$A^k \mathbf{x}_0 = c_1(\lambda_1^k \mathbf{x}_1) + c_2(\lambda_2^k \mathbf{x}_2) + \dots + c_n(\lambda_n^k \mathbf{x}_n), \quad (\text{E-7})$$

可以改写成

$$A^k \mathbf{x}_0 = \lambda_1^k [c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{x}_n]. \quad (\text{E-8})$$

从我们刚才的假设来看， λ_1 是矩阵 A 的所有的本征值中绝对值最大的一个本征值。那么下面的这些系数

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \quad (\text{E-9})$$

的绝对值都小于 1。因此，这里的每一个系数

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \quad (\text{E-10})$$

在 k 趋近于无穷大的时候都会趋近于 0。

这样就表明，当 k 逐渐增大时，

$$A^k \mathbf{x}_0 \approx \lambda_1^k c_1 \mathbf{x}_1, \quad c_1 \neq 0 \quad (\text{E-11})$$

这样的近似是合理的。既然 x_1 是主要本征矢量，那么任意一个由矩阵 A 左乘 x_1 得到的矢量仍然是矩阵 A 的主要本征矢量。所以，我们可以说 $A^k x_0$ 随着 k 不断增大，而越接近矩阵 A 的主要本征矢量。

由上面的证明，我们可以看出幂方法确实可以近似地给出一个矩阵的主要本征值及其相应的主要本征矢量。并且在我们求解BSE 的过程中，实数空间 \mathbb{R}^n 直接推广到复数空间。

参考文献

- [1] T. Muta, *Foundations Of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, 2000.
- [2] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **40**, 4151 (1974).
- [3] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949).
- [4] J. S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452 (1951).
- [5] K. Lichtenegger, *Aspects Of Confinement in a Functional Approach to Coulomb Gauge QCD*, PhD thesis, University of Graz, 2010.
- [6] C. H. Llewellyn-Smith, Ann. Phys. **53**, 521 (1969).
- [7] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **49**, 1 (1969).
- [8] H. D. Politzer, Proc. Nat. Acad. Sci. **102**, 7789 (2005).
- [9] F. Wilczek, Proc. Nat. Acad. Sci. **102**, 8403 (2005).
- [10] D. J. Gross, Proc. Nat. Acad. Sci. **102**, 9099 (2005).
- [11] C. D. Roberts and A. G. Williams, *Dyson-Schwinger Equations And Their Application To Hadronic Physics*, arXiv:hep-ph/9403224, 1997.
- [12] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [13] A. Höll, A. Krassnigg, P. Maris, C. D. Roberts, and S. V. Wright, Phys. Rev. C **71**, 065204 (2005).
- [14] M. S. Bhagwat and P. Maris, Phys. Rev. C **77**, 025203 (2008).
- [15] P. Maris and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **61**, 045202 (2000).
- [16] D. Jarecke, P. Maris, and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **67**, 035202 (2003).
- [17] V. Mader, Aspects of hadronic transitions of mesons and baryons in the dyson-schwinger approach to qcd, Master's thesis, University of Graz, Austria, 2010.

- [18] V. Mader, G. Eichmann, M. Blank, and A. Krassnigg, Phys. Rev. C **84**, 034012 (2011).
- [19] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967).
- [20] J. C. R. Bloch, Phys. Rev. D **66**, 034032 (2002).
- [21] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- [22] P. Maris, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, Phys. Lett. B **420**, 267 (1998).
- [23] P. Maris and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **56**, 3369 (1997).
- [24] P. Maris and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **60**, 055214 (1999).
- [25] M. Blank and A. Krassnigg, Comput. Phys. Commun. **182**, 1391 (2011).
- [26] C. S. Fischer and P. W. and W. Cassing, Phys. Rev. D **72**, 094025 (2005).
- [27] N. I. Ioakimidis and K. E. Papadakis, BIT **31(2)**, 276 (1991).
- [28] K. N. et al., J. Phys. G **37**, 075021 (2010).
- [29] S. D. et al., Scince **322**, 1224 (2008).
- [30] S. A. et al., Phys. Rev. D **81**, 074503 (2010).
- [31] G. P. Engel, C. B. Lang, M. Limmer, D. Mohler, and et al., Phys. Rev. D **82**, 034505 (2010).
- [32] J. J. Dudek, R. G. Edwards, M. J. Peardon, and D. G. R. et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 262001 (2009).
- [33] A. Krassnigg, Phys. Rev. D **80**, 114010 (2009).
- [34] A. Krassnigg, Excited mesons in a bethe-salpeter approach, in *PoS Confinement8*, volume 75, 2009.
- [35] A. Höll, A. Krassnigg, and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **70**, 042203(R) (2004).
- [36] T. Das, G. S. Guralnik, V. S. Mathur, F. E. Low, and J. E. Young, Phys. Rev. Lett. **18**, 759 (1967).

- [37] K. Fujikawa and P. J. O'Donnell, Phys. Rev. D **9**, 461 (1974).
- [38] J. F. Donoghue and A. F. Pérez, Phys. Rev. D **55**, 7075 (1997).
- [39] E. S. et al., arXiv:hep-lat **0710.0691** (2007).
- [40] R. H. et al., arXiv:hep-lat **1311.4554** (2013).
- [41] P. Jain and H. J. Munczek, Phys. Rev. D **48**, 5403 (1993).
- [42] H. J. Munczek and P. Jain, Phys. Rev. D **46**, 438 (1992).
- [43] G. C. Wick, Phys. Rev. **96**, 1124 (1954).
- [44] C. W. Clenshaw and A. R. Curtis, Numerische Mathematik **2**, 197 (1955).
- [45] E. M. Corson, *Introduction to tensors, spinors, and relativistic wave functions relation structure*, Blackie and Son, 1955.
- [46] C.-S. Huang, H.-Y. Jin, and Y.-B. Dai, Phys. Rev. D **51**, 2347 (1995).
- [47] M. Blank, *Properties of quarks and mesons in the Dyson-Schwinger/Bethe-Salpeter approach*, PhD thesis, University of Graz, 2011.

致谢

时光飞逝，岁月如梭，三年的时间犹如白驹过隙。在师大的这几年里，我过得特别幸福，因为我遇到了很多温暖的人。

首先要感谢的就是我的导师平加伦教授。他在粒子物理、群论和计算物理方面的造诣很深，听他的课如沐春风。平老师待人随和，体贴包容。不管是物理知识还是做人的道理，我都从他那里学到了很多。总之，他是一位优雅的绅士。

接下来要感谢的当然是我的师姐董芳芳。在我研一的时候，董师姐教会我很多学习的方法，给我分享了很多学习资料。她是一位非常热心的姑娘，且总是以大局为重不惜牺牲小我。我仍然记得那些她和我一起设计文化衫的日子。

徐书生和凌锐师兄也帮助了我不少。徐师兄的编程技能非常高超，凌师兄的理论功底非常扎实。在他们的帮助下，我工作进展得很顺利。

我仍然要感谢好多人。感谢蒋志伟、赵恒飞、叶晶晶、孙国凯一起讨论过很多问题。感谢组里的孟楠、陈晓云、闫召召、严雨亭、谢颖、王楠、杨刚、王慧经常在一起愉快地玩耍。感谢朱新梅师姐对我们体贴照顾，经常给我们买新鲜的水果。感谢黄虹霞师姐对我们答辩工作的关心和帮助。感谢金婷师妹经常请我吃饭，还带我和李亚、马爱军、王伟他们一起打羽毛球。还有那些笑靥如花的姑娘们，给我的生活增添了很多美好的瞬间。尤其感谢那位我喜欢过的姑娘，在追求她的过程中我成长了很多，虽然最终结果令人遗憾，但是过程依然是美好的，我仍然记得那一抹迷人的微笑。

最后，我得对我的家人表示真挚的感谢。感谢他们给我营造了一个和谐的家庭氛围，让我在外面求学的过程中无忧无虑。

人生苦短，且行且珍惜。