Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και

Μηχανικών Υπολογιστών

Ρομποτική Ι: Ανάλυση, Έλεγχος και Εργαστήριο

Εξαμηνιαία Εργασία

Βιομηχανικός Ρομποτικός Βραχίονας

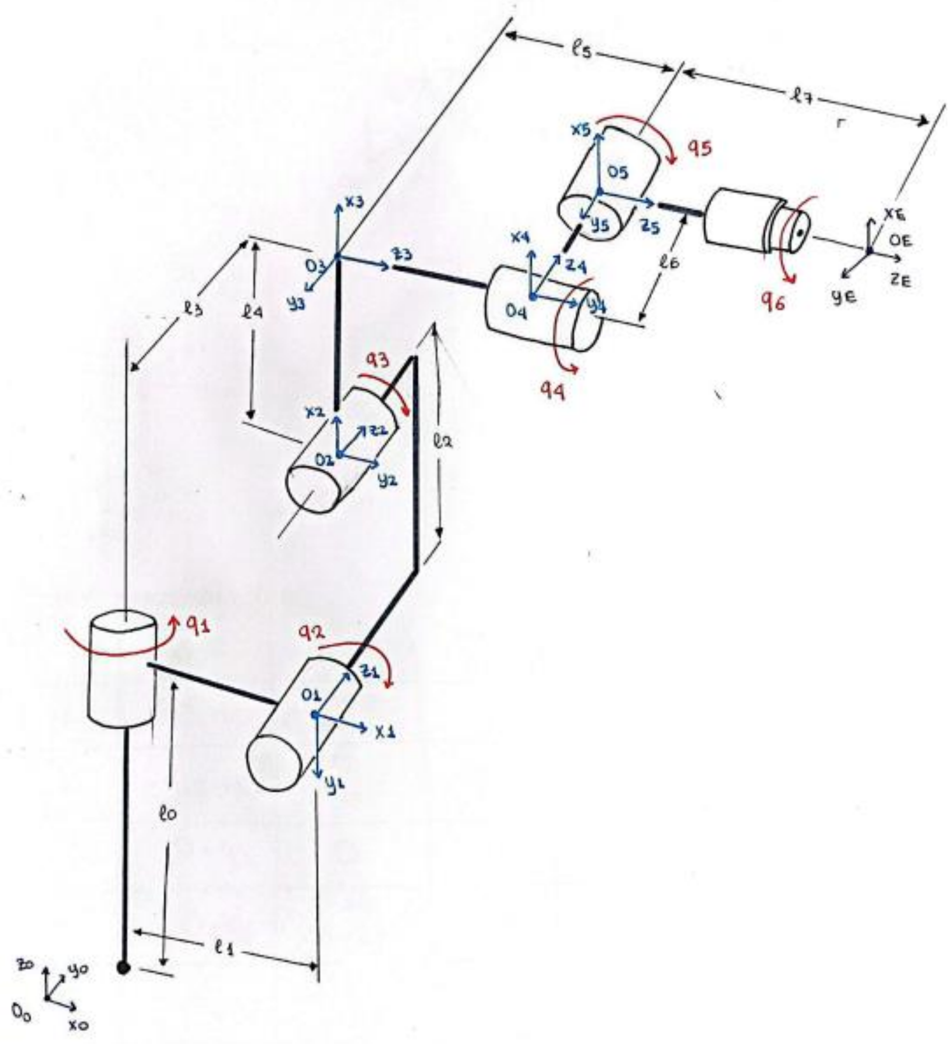
(KUKA Industrial Robot Manipulator)

Ονοματεπώνυμο: Αποστολία Χρυσοβαλάντου Σκέντζου

Εξάμηνο: 9ο Αριθμός Μητρώου: 03120054

1ο Ερώτημα – Μέθοδος Denavit – Hartenberg

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η τοποθέτηση πλαισίων σύμφωνα με τους κανόνες της μεθόδου Denavit-Hartenberg (D-H). Δεν έχει τοποθετηθεί κάποιο βοηθητικό πλαίσιο καθώς το πλαίσιο βάσης αλλά και το πλαίσιο του end effector είναι συμβατικά τοποθετημένα.



Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας παραμέτρων της μεθόδου:

i	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	q_1	l_0	$-\pi/2$	l_1
2	$q_2 - \pi/2$	l_3	0	l_2
3	q_3	0	$-\pi/2$	l_4
4	q_4	l_5	$\pi/2$	0
5	q_5	l_6	$-\pi/2$	0
E	q_6	l_7	0	0

2ο Ερώτημα – Ευθεία Κινηματική Εξίσωση

Θεωρείται για το τρέχον ερώτημα καθώς και για τα επόμενα πως οι αρθρώσεις 4 έως 6 είναι ανενεργές, δηλαδή $q_4 = q_5 = q_6 = 0$. Θα προσδιορίσουμε με βάση αυτά τα δεδομένα την ευθεία κινηματική εξίσωση του ρομποτικού βραχίονα σύμφωνα με την εξίσωση:

$$A_E^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_5^4 \cdot A_E^5 \qquad (1)$$

Κάθε πίνακας A_i^{i-1} που παρουσιάζεται στην παραπάνω σχέση θα προσδιοριστεί σύμφωνα με την μήτρα Denavit-Hartenberg:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i \cdot cosa_i & sin\theta_i \cdot sina_i & a_i \cdot cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i \cdot cosa_i & -cos\theta_i \cdot sina_i & a_i \cdot sin\theta_i \\ 0 & sina_i & cosa_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν σε κάθε μήτρα με τις αντίστοιχες παραμέτρους που βρίσκονται στον πίνακα παραμέτρων που παρουσιάστηκε βρίσκουμε*:*

$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 200 \cdot c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & 200 \cdot s_1 \\ 0 & -1 & 0 & 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 600s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -600c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & 140c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & 140s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Καθώς στο επόμενο ερώτημα της εργασίας θα προσδιορίσουμε την Ιακωβιανή μήτρα είναι χρήσιμο να εκτελέσουμε αριστερά προσεταιριστικά τους πολλαπλασιασμούς των πινάκων της σχέσης (1) υπολογίζοντας τους πίνακες A_i^0:

$$A_2^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & -30s_1 + 600c_1 s_2 + 200c_1 \\ s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & 600 s_1 s_2 + 200 s_1 + 30 c_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & 600c_2 + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^0 = A_2^0 \cdot A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & -30s_1 + 600c_1 s_2 + 140\, c_1 s_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & 600 s_1 s_2 + 140 s_1 s_{23} + 200 s_1 + 30 c_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^0 = A_3^0 \cdot A_4^3 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & c_1 c_{23} & -s_1 & -30s_1 + 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 550c_1 c_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & s_1 c_{23} & c_1 & 600 s_1 s_2 + 140 s_1 s_{23} + 550 s_1 s_{23} + 200 s_1 + 30 c_1 \\ c_{23} & -s_{23} & 0 & -550 s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^0 = A_4^0 \cdot A_5^4 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & -130s_1 + 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 550c_1 c_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & 600 s_1 s_2 + 140 s_1 s_{23} + 550 s_1 c_{23} + 200 s_1 + 130 c_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & -550 s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^0 = A_5^0 \cdot A_E^5 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & -130s_1 + 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & 600 s_1 s_2 + 140 s_1 s_{23} + 650 s_1 c_{23} + 200 s_1 + 130 c_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & -650 s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το ζητούμενο του ερωτήματος είναι η μήτρα που υπολογίσαμε:

$$A_E^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & -130s_1 + 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & 600 s_1 s_2 + 140 s_1 s_{23} + 650 s_1 c_{23} + 200 s_1 + 130 c_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & -650 s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα αυτή συσχετίζει τη θέση και τον προσανατολισμό του end effector με τις γωνίες q_1 q_2 q_3 των αρθρώσεων.

<u>Σημείωση</u>: Στους παραπάνω πίνακες αλλά και στους επόμενους πίνακες που θα ακολουθήσουν σε αυτή την εργασία ακολουθούμε τον συμβολισμό:
$s_i \rightarrow sin(q_i)$, $c_i \rightarrow cos(q_i)$, $s_{ij} \rightarrow sin(q_i+q_j)$ $c_{ij} \rightarrow cos(q_i+q_j)$

3^o Ερώτημα – Ιακωβιανή Μήτρα

Σε αυτό το ερώτημα θα υπολογίσουμε την Ιακωβιανή μήτρα (J) που περιγράφει το ευθύ διαφορικό κινηματικό μοντέλο για τη δοθείσα διάταξη του ρομποτικού μηχανισμού.

Ο υπολογισμός της Ιακωβιανής μήτρας μπορεί να σπάσει στους παρακάτω επιμέρους υπολογισμούς:

$$J = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & J_{L3} \\ J_{A1} & J_{A2} & J_{A3} \end{bmatrix},$$

όπου J_{Li} η συνεισφορά της άρθρωσης i στην γραμμική ταχύτητα τελικού στοιχείου δράσης και J_{Ai} η συνεισφορά της άρθρωσης i στην γωνιακή ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης.

Αφού οι τρεις τελευταίες αρθρώσεις του βραχίονα είναι ανενεργές η Ιακωβιανή μήτρα που περιγράφει το διαφορικό μοντέλο θα είναι μόνο συναρτήσει των q_1, q_2 και q_3, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα.

Οι αρθρώσεις 1 2 και 3 είναι περιστροφικές άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα παραπάνω διανύσματα για κάθε άρθρωση από τους τύπους:

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i-1} \times r_{i-1,E} \\ b_{i-1} \end{bmatrix}$$

όπου:

$b_{i-1} = R_{i-1}^0(q_1 .. q_{i-1}) \cdot \hat{b}$, με $\hat{b} = [0, 0 ,1]^T$ αφού στην ανάλυση έχουμε ακολουθήσει μέθοδο DH και ξέρουμε πως ο άξονας z ορίζει κάθε φορά την γωνία της άρθρωσης

$r_{i-1,E} = r_{0,E} - r_{0,i-1} \quad και \quad r_{0,i} = A_i^0[1:3,4]$

Χρειάζεται λοιπόν να προσδιορίσουμε τα διανύσματα b_0, b_1, b_2, $r_{0,E}$, $r_{1,E}$, $r_{2,E}$.

<u>Άρθρωση 1</u>

$b_0 = z_0 = [0 ,0 ,1]^T$

$$r_{0,E} = A_E^0[1:3,4] = \begin{bmatrix} -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 200s_1 + 130c_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix}$$

$$J_{L1} = b_0 \times r_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 200s_1 + 130c_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -600s_1s_2 - 140s_1s_{23} - 650s_1c_{23} - 200s_1 - 130c_1 \\ -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{A1} = b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρθρωση 2

$$b_1 = z_1 = A_1^0[1:3,3] = \ [-s_1\ , c_1\ ,0]^T\ , \qquad r_{0,1} = A_1^0[1:3,4] = \begin{bmatrix} 200c_1 \\ 200s_1 \\ 810 \end{bmatrix}$$

$$r_{1,E} = r_{0,E} - \ r_{0,1} = \ \begin{bmatrix} -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 200s_1 + 130c_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200c_1 \\ 200s_1 \\ 810 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 130c_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{L2} = b_1 \times r_{1,E} = \ \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 130c_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -650c_1s_{23} + 600c_1c_2 + 140c_1c_{23} \\ -650s_1s_{23} + 600s_1c_2 + 140s_1c_{23} \\ -600s_2 - 140s_{23} - 650c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{A2} = b_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρθρωση 3

$$b_2 = z_2 = A_2^0[1:3,3] = \ [-s_1\ , c_1\ ,0]^T\ ,$$

$$r_{0,2} = A_2^0[1:3,4] = \begin{bmatrix} -30s_1 + 600c_1s_2 + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 200s_1 + 30c_1 \\ 600c_2 + \ 810 \end{bmatrix}$$

$$r_{2,E} = r_{0,E} - \ r_{0,2} = \begin{bmatrix} -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 200s_1 + 130c_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -30s_1 + 600c_1s_2 + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 200s_1 + 30c_1 \\ 600c_2 + \ 810 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -100s_1 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} \\ 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 100c_1 \\ -650s_{23} + 140c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{L3} = b_2 \times r_{2,E} = \ \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -100s_1 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} \\ 140s_1s_{23} + 550s_1c_{23} + 100c_1 \\ -650s_{23} + 140c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -650c_1s_{23} \ + 140c_1c_{23} \\ -650\ s_1s_{23} + 140s_1c_{23} \\ -140s_{23} - 650\ c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{A3} = b_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει τα μερικά αποτελέσματα μπορούμε να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή μήτρα J:

$$J = \begin{bmatrix} -600s_1s_2 - 140s_1s_{23} - 650s_1c_{23} - 200s_1 - 130c_1 & -650c_1s_{23} + 600c_1c_2 + 140c_1c_{23} & -650c_1s_{23} + 140c_1c_{23} \\ -130s_1 + 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 & -650s_1s_{23} + 600s_1c_2 + 140s_1c_{23} & -650\, s_1s_{23} + 140s_1c_{23} \\ 0 & -600s_2 - 140s_{23} - 650c_{23} & -140s_{23} - 650\, c_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4ο Ερώτημα - Αντίστροφο Διαφορικό Μοντέλο – Ιδιόμορφες διατάξεις

Στο επόμενο μέρος της άσκησης καθώς και για την ανάλυση που ακολουθεί από εδώ και πέρα θα θεωρήσουμε μηδενικά τα μεγέθη $l_3 = l_6 = 0$

Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε από την αρχή τους πίνακες δεδομένου των μηδενισμών αυτών.

Ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία με το ερώτημα 2.

$$A_E^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_5^4 \cdot A_E^5$$

$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 200 \cdot c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & 200 \cdot s_1 \\ 0 & -1 & 0 & 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 600s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -600c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & 140c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & 140s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_E^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε εξ αριστερών τους πίνακες:

$$A_2^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 = \begin{bmatrix} c_1s_2 & c_1c_2 & -s_1 & 600c_1s_2 + 200c_1 \\ s_1s_2 & s_1c_2 & c_1 & 600s_1s_2 + 200s_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & 600c_2 + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^0 = A_2^0 \cdot A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1s_{23} & s_1 & c_1c_{23} & 600c_1s_2 + 140\, c_1s_{23} + 200c_1 \\ s_1s_{23} & -c_1 & s_1c_{23} & 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 200s_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^0 = A_3^0 \cdot A_4^3 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & c_1 c_{23} & -s_1 & 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 550c_1 c_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & s_1 c_{23} & c_1 & 600s_1 s_2 + 140s_1 s_{23} + 550s_1 s_{23} + 200s_1 \\ c_{23} & -s_{23} & 0 & -550s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^0 = A_4^0 \cdot A_5^4 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 550c_1 c_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & 600s_1 s_2 + 140s_1 s_{23} + 550s_1 c_{23} + 200s_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & -550s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^0 = A_5^0 \cdot A_E^5 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 s_{23} & 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} + 200c_1 \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & 600s_1 s_2 + 140s_1 s_{23} + 650s_1 c_{23} + 200s_1 \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία και την Ιακωβιανή Μήτρα:

Άρθρωση 1

$b_0 = z_0 = [0\,,0\,,1]^T$

$$r_{0,E} = A_E^0[1{:}3{,}4] = \begin{bmatrix} 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1 s_2 + 140s_1 s_{23} + 650s_1 c_{23} + 200s_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix}$$

$$J_{L1} = b_0 \times r_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1 s_2 + 140s_1 s_{23} + 650s_1 c_{23} + 200s_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -600s_1 s_2 - 140s_1 s_{23} - 650s_1 c_{23} - 200s_1 \\ 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} + 200c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{A1} = b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρθρωση 2

$b_1 = z_1 = A_1^0[1{:}3{,}3] = \ [-s_1\,, c_1\,,0]^T$, $\qquad r_{0,1} = A_1^0[1{:}3{,}4] = \begin{bmatrix} 200c_1 \\ 200s_1 \\ 810 \end{bmatrix}$

$$r_{1,E} = r_{0,E} - r_{0,1} = \begin{bmatrix} 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1 s_2 + 140s_1 s_{23} + 650s_1 c_{23} + 200s_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200c_1 \\ 200s_1 \\ 810 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 600c_1 s_2 + 140c_1 s_{23} + 650c_1 c_{23} \\ 600s_1 s_2 + 140s_1 s_{23} + 650s_1 c_{23} \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{L2} = b_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 650s_1c_{23} \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -650c_1s_{23} + 600c_1c_2 + 140c_1c_{23} \\ -650s_1s_{23} + 600s_1c_2 + 140s_1c_{23} \\ -600s_2 - 140s_{23} - 650c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{A2} = b_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Άρθρωση 3</u>

$$b_2 = z_2 = A_2^0[1:3,3] = \ [-s_1\,, c_1\,, 0]^T \ ,$$

$$r_{0,2} = A_2^0[1:3,4] = \begin{bmatrix} 600c_1s_2 + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 200s_1 \\ 600c_2 + \ 810 \end{bmatrix}$$

$$r_{2,E} = r_{0,E} - \ r_{0,2} = \begin{bmatrix} 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 140s_1s_{23} + 650s_1c_{23} + 200s_1 \\ -650s_{23} + 600c_2 + 140c_{23} + 810 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 600c_1s_2 + 200c_1 \\ 600s_1s_2 + 200s_1 \\ 600c_2 + \ 810 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} \\ 140s_1s_{23} + 650s_1c_{23} \\ -650s_{23} + 140c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{L3} = b_2 \times r_{2,E} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} \\ 140s_1s_{23} + 650s_1c_{23} \\ -650s_{23} + 140c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -650c_1s_{23} \ + 140c_1c_{23} \\ -650\ s_1s_{23} + 140s_1c_{23} \\ -140s_{23} - 650\ c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{A3} = b_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει τα μερικά αποτελέσματα μπορούμε να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή μήτρα J:

$$J = \begin{bmatrix} -600s_1s_2 - 140s_1s_{23} - 650s_1c_{23} - 200s_1 & -650c_1s_{23} + 600c_1c_2 + 140c_1c_{23} & -650c_1s_{23} \ + 140c_1c_{23} \\ 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 & -650s_1s_{23} + 600s_1c_2 + 140s_1c_{23} & -650\ s_1s_{23} + 140s_1c_{23} \\ 0 & -600s_2 - 140s_{23} - 650c_{23} & -140s_{23} - 650\ c_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να μελετήσουμε το αντίστροφο διαφορικό μοντέλο του ρομποτικού βραχίονα ως προς τη γραμμική ταχύτητα αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα J_L^{-1}.

Δηλαδή αρκεί να προσδιορίσουμε τον πίνακα

$$J_L^{-1} = \begin{bmatrix} -600s_1s_2 - 140s_1s_{23} - 650s_1c_{23} - 200s_1 & -650c_1s_{23} + 600c_1c_2 + 140c_1c_{23} & -650c_1s_{23} \ + 140c_1c_{23} \\ 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 & -650s_1s_{23} + 600s_1c_2 + 140s_1c_{23} & -650\ s_1s_{23} + 140s_1c_{23} \\ 0 & -600s_2 - 140s_{23} - 650c_{23} & -140s_{23} - 650\ c_{23} \end{bmatrix}^{-1}$$

Για να προσδιορίσουμε έπειτα τις ιδιόμορφες διατάξεις της κινηματικής διάταξης ως προς την γραμμική ταχύτητα, αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των γωνιών των αρθρώσεων που μηδενίζουν την ορίζουσα του πίνακα J_L.

Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα του πίνακα:

$$\det(J_L) = \begin{vmatrix} -600s_1s_2 - 140s_1s_{23} - 650s_1c_{23} - 200s_1 & -650c_1s_{23} + 600c_1c_2 + 140c_1c_{23} & -650c_1s_{23} + 140c_1c_{23} \\ 600c_1s_2 + 140c_1s_{23} + 650c_1c_{23} + 200c_1 & -650s_1s_{23} + 600s_1c_2 + 140s_1c_{23} & -650\,s_1s_{23} + 140s_1c_{23} \\ 0 & -600s_2 - 140s_{23} - 650c_{23} & -140s_{23} - 650\,c_{23} \end{vmatrix}$$

$$= 504 \cdot 10^5 s_2s_3 + 324 \cdot 10^6\, s_2c_3 + 1176 \cdot 10^4 s_3s_{23} + 546 \cdot 10^5 s_3c_{23} + 168 \cdot 10^5 s_3 + 546 \cdot 10^5 c_3c_{23} + 78 \cdot 10^6 c_3$$

Λύνουμε την εξίσωση $det(J_L) = 0$.

$$\Rightarrow 504 \cdot 10^5 s_2s_3 + 324 \cdot 10^6\, s_2c_3 + 1176 \cdot 10^4 s_3s_{23} + 546 \cdot 10^5 s_3c_{23} + 168 \cdot 10^5 s_3 + 546 \cdot 10^5 c_3c_{23} + 78 \cdot 10^6 c_3 = 0$$

$$\Rightarrow 5040\, s_2s_3 + 23400s_2c_3 + 1176s_3s_{23} + 5460\, s_3c_{23} + 5460c_3s_{23} + 25350c_3c_{23} + 1680s_3 + 7800c_3 = 0$$

$$\Rightarrow s_2(5040s_3 + 23400c_3) + s_3(1176s_{23} + 5460\, c_{23}) + c_3(5460s_{23} + 25350c_{23}) + (1680s_3 + 7800c_3) = 0$$

$$\Rightarrow 5040s_2\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right) + 1176s_3\left(s_{23} + \frac{65}{14}c_{23}\right) + 5460c_3\left(s_{23} + \frac{65}{14}c_{23}\right) + 1680\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right) = 0$$

$$\Rightarrow 5040S_2\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right) + (1176s_3 + 5460c_3)\left(s_{23} + \frac{65}{14}c_{23}\right) + 1680\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right) = 0$$

$$\Rightarrow 5040S_2\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right) + 1176\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right)\left(s_{23} + \frac{65}{14}c_{23}\right) + 1680\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right)\left(5040s_2 + 1176\left(s_{23} + \frac{65}{14}c_{23}\right) + 1680\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right)(5040s_2 + 1176s_{23} + 5460c_{23} + 1680) = 0$$

Άρα είτε $\left(s_3 + \frac{65}{14}c_3\right) = 0$ (2) είτε $(5040s_2 + 1176s_{23} + 5460c_{23} + 1680) = 0$ (3)

$$(2) \Rightarrow s_3 + \frac{65}{14}c_3 = 0 \Rightarrow \tan(q_3) = -\frac{65}{14} \Rightarrow q3 = \arctan\left(-\frac{65}{14}\right) \Rightarrow q_3 \approx 78°$$

$$(3) \Rightarrow 5040S_2 + 1176S_{23} + 5460C_{23} + 1680 = 0$$

$$\Rightarrow 5040s_2 + 1176c_2c_3 + 1176s_2s_3 + 5460c_2c_3 - 5460s_2s_3 + 1680 = 0$$

$$\Rightarrow s_2(5040 + 1176c_3 - 5460s_3) + c_2(5460c_3 + 1176s_3) + 1680 = 0$$

$$\Rightarrow s_2(5040 + 1176c_3 - 5460s_3) + c_2(5460c_3 + 1176s_3) + 1680 = 0$$

Στην παραπάνω σχέση θέτουμε:

$$d_1 = 5040 + 1176c_3 - 5460s_3\,, d_2 = 5460c_3 + 1176s_3$$

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \quad \textit{και}\ \omega = atan2(d_2, d_1)$$

Άρα:

$$ds_2c_\omega + d\, c_2 s_\omega = -1680 \Rightarrow \cos(q_2+\omega) = -\frac{1680}{d}$$

$$\sin(q_2+\omega) = \sqrt{1-\frac{1680^2}{d^2}}$$

$$\Rightarrow q_2+\omega = atan2\left(\sqrt{1-\frac{1680^2}{d^2}}, -\frac{1680}{d}\right)$$

$$\Rightarrow q_2 = atan2\left(\sqrt{1-\frac{1680^2}{d^2}}, -\frac{1680}{d}\right) - atan2(5460c_3+1176s_3, 5040+1176c_3-5460s_3)$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία:</u>

Οι γωνίες αυτές αντιστοιχούν σε διατάξεις όπου το τελικό στοιχείο δράσης ευθυγραμμίζεται με τον άξονα κάποιας άρθρωσής του και έτσι χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας στην κίνηση εκείνη τη στιγμή.

5^{o} Ερώτημα - Αντίστροφο Γεωμετρικό Μουτέλο

Θα προσδιορίσουμε το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο του ρομποτικού βραχίονα για δεδομένη θέση του τελικού στοιχείου δράσης $p_E = [\ p_{Ex}, p_{Ey}, p_{Ez}\ ]^T$.

Χρειάζεται λοιπόν να επιλύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων ως προς q_1, q_2 και q_3:

$$\begin{cases} p_{Ex} = c_1(600s_2+140s_{23}+650c_{23}+200) & (4) \\ p_{Ey} = s_1(600s_2+140s_{23}+650c_{23}+200) & (5) \\ p_{Ez} = -650s_{23}+600c_2+140c_{23}+810 & (6) \end{cases}$$

Διαιρούμε πρώτα τις σχέσεις (4) και (5) κατά μέλη:

$$\frac{(5)}{(4)} \Rightarrow \quad \frac{p_{Ey}}{p_{Ex}} = \frac{s_1}{c_1} \Rightarrow q_1 = atan2(p_{Ey}, p_{Ex})$$

$$(5) \Rightarrow \frac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = 600s_2+140s_{23}+650c_{23} \qquad (7)$$

$$(6) \Rightarrow p_{Ez} - 810 = -650s_{23}+600c_2+140c_{23} \qquad (8)$$

Θέτουμε $d = \sqrt{650^2+140^2}$ *και* $\varphi = atan2(650, 140)$. *Ισχύει λοιπόν πως* $sin\varphi = \frac{650}{d}, cos\varphi = \frac{140}{d}$

Ξαναγράφουμε λοιπόν τις παραπάνω σχέσεις ως:

$$(7),(8) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = 600s_2 + dc_\varphi s_{23} + ds_\varphi c_{23} \\ \\ p_{Ez} - 810 = 600c_2 + ds_\varphi s_{23} + d\, c_\varphi c_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = 600s_2 + ds_{23\varphi} \\ \\ p_{Ez} - 810 = 600c_2 + d\, c_{23\varphi} \end{cases}$$

Θέτουμε $q_3' = q_3 + \varphi = q_3 + atan2(140, 650)$ (9), *άρα:*

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = 600s_2 + d\, s_{23'} \\ \\ p_{Ez} - 810 = 600c_2 + d\, c_{23'} \end{cases}$$

Στην παραπάνω σύστημα υψώνουμε τις δύο εξισώσεις στο τετράγωνο και ύστερα προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\left(\frac{p_{Ey}^2}{s_1} - 200\right)^2 + (p_{Ez} - 810)^2 = 600^2(s_2^2 + c_2^2) + d^2\left(s_{23'}^2 + c_{23'}^2\right) + 1200\, d\, s_2 s_{23'} + 1200d\, c_2 c_{23'}$$

$$\Rightarrow (s_2 s_{23'} + c_2 c_{23'}) = \frac{\left(\frac{p_{Ey}}{s_1} - 200\right)^2 + (p_{Ez} - 810)^2 - 600^2 - 650^2 - 140^2}{1200d}$$

Θέτουμε $A = \frac{\left(\frac{p_{Ey}}{s_1} - 200\right)^2 + (p_{Ez} - 810)^2 - 600^2 - 650^2 - 140^2}{1200d}$ προκειμένου να είναι πιο ευκρινή τα αποτελέσματά μας.

$\Rightarrow \cos(q_2 + q_{3'} - q_2) = A \Rightarrow \cos(q_{3'}) = A$ *και* $\sin(q_{3'}) = \sqrt{1 - A^2}$

$$\Rightarrow q_{3'} = atan2\left(\sqrt{1 - A^2}, A\right) \overset{(9)}{\Rightarrow} q_3 + \varphi = atan2\left(\sqrt{1 - A^2}, A\right)$$

$$\Rightarrow \quad q_3 = atan2\left(\sqrt{1 - A^2}, A\right) - atan2(650,140)$$

Θα γράψουμε πάλι τις σχέσεις (7) και (8) για να υπολογίσουμε την γωνία q_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = 600s_2 + ds_2\, c_{3'} + d\, c_2 s_{3'} \\ \\ p_{Ez} - 810 = 600c_2 + dc_2 c_{3'} - d\, s_2 s_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = (600 + d\, c_{3'})s_2 + (d\, s_{3'})c_2 \\ \\ p_{Ez} - 810 = (600 + d\, c_{3'})c_2 + (d\, s_{3'})s_2 \end{cases}$$

Θέτουμε για το παραπάνω σύστημα:

$$k_1 = 600 + d\, c_{3'}\, ,\ k_2 = ds_{3'}\, , k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \ \ \text{και}\ \theta = atan2(k_2, k_1) = atan2(ds_{3'}, 600 + d\, c_{3'})$$

$$\begin{cases} \dfrac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = kc_\theta s_2 + k\, s_\theta c_2 \\ \\ p_{Ez} - 810 = kc_\theta c_2 + ks_\theta s_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p_{Ey}}{s_1} - 200 = k\sin(q_2 + \theta) \\ \\ p_{Ez} - 810 = k\cos(q_2 + \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_2 + \theta = atan2\left(\frac{p_{Ey}}{s_1} - 200, p_{Ez} - 810\right)$$

$$\Rightarrow q_2 = atan2\left(\frac{p_{Ey}}{s_1} - 200, p_{Ez} - 810\right) - atan2(\, d s_{3'}, 600 + d\, c_{3'})$$

$$\Rightarrow q_2 = atan2\left(\frac{p_{Ey}}{s_1} - 200, p_{Ez} - 810\right) - atan2\left(\, d\sqrt{1 - A^2}, 600 + d\, A\right)$$

Λύνοντας λοιπόν το σύστημα εξισώσεων βρίσκουμε πως το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο του βραχίονα για δεδομένη θέση του τελικού στοιχείου δράσης είναι:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} atan2(p_{Ey}, p_{Ex}) \\ atan2\left(\frac{p_{Ey}}{s_1} - 200, p_{Ez} - 810\right) - atan2\left(\, d\sqrt{1 - A^2}, 600 + d\, A\right) \\ atan2\left(\, \sqrt{1 - A^2}, A\right) - atan2(650, 140) \end{bmatrix},$$

όπου $A = \frac{\left(\frac{p_{Ey}}{s_1} - 200\right)^2 + (p_{Ez} - 810)^2 - 600^2 - 650^2 - 140^2}{1200d}$ και $d = \sqrt{650^2 + 600^2}$

ΜΕΡΟΣ Β – Κινηματική Προσομοίωση

6ο Ερώτημα – Σχεδιασμός Επιθυμητής Τροχιάς

Σε αυτό το ερώτημα θα σχεδιάσουμε τις εξισώσεις τροχιάς που περιγράφουν την θέση του τελικού στοιχείου δράσης σε σχέση με τον χρόνο. Επιθυμούμε ο end effector να εκτελέσει ευθύγραμμη περιοδική κίνηση χρόνου 2T sec από ένα σημείο $P_A(x_A, y_A, z_A)$ σε ένα σημείο $P_B(x_B, y_B, z_B)$, με $z_A = z_B = h$.

Για την κίνηση από το σημείο A στο σημείο B – χρόνου T sec.

Θα χωρίσουμε την κίνηση σε τρεις φάσεις, για να εξασφαλίσουμε την ομαλή κίνηση του εργαλείου:

1) Επιταχυνόμενη κίνηση για $0 \leq t \leq T/4$
2) Σταθερή ταχύτητα για $T/4 < t < 3T/4$
3) Επιβραδυνόμενη κίνηση για $3T/4 \leq t \leq T$

Θα μοντελοποιήσουμε την συνάρτηση της τροχιάς για κάθε φάση της κίνησης με ένα πολυώνυμο, για την περίπτωση της επιταχυνόμενης και της επιβραδυνόμενης κίνησης θα χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμο 4ου βαθμού (εξασφαλίζοντας έτσι συνέχεια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης) και για την φάση της σταθερής κίνησης πολυώνυμο 1ου βαθμού.

1η φάση – επιταχυνόμενη κίνηση

Θα προσδιορίσουμε μαθηματικά το πολυώνυμο της τροχιάς για την κίνηση στον άξονα x. Θεωρούμε λοιπόν το πολυώνυμο:

$$p_{X1}(t) = \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + a_0 \qquad (10)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (10) παίρνουμε τις εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης:

$$\dot{p_{X1}}(t) = 4\alpha_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \qquad (11)$$

$$\ddot{p_{X1}}(t) = 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2 \qquad (12)$$

Για την κίνηση αυτή γνωρίζουμε κάποιες αρχικές και τελικές συνθήκες, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$p_{X1}(t=0) = x_A, \quad \text{αρχική θέση του end effector}$$

$$\dot{p_{X1}}(t=0) = 0, \quad \text{μηδενική αρχική ταχύτητα}$$

$$\ddot{p_{X1}}(t=0) = 0, \quad \text{μηδενική αρχική επιτάχυνση}$$

$$\dot{p_{X1}}\left(t = \frac{T}{4}\right) = v_{x,max}, \quad \text{τελική ταχύτητα v\_xmax}$$

$$\ddot{p_{X1}}\left(t = \frac{T}{4}\right) = 0, \quad \text{μηδενική τελική επιτάχυνση}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στις σχέσεις (10), (11) και (12) και επιλύοντας το σύστημα 5x5 που προκύπτει βρίσκουμε την εξίσωση τροχιάς στον άξονα x:

$$p_{X1}(t) = x_A + \frac{16v_{x,max}}{T^2}t^3 - \frac{64t^4 v_{x,max}}{T^3}t^4 \quad t \in \left[0, \frac{T}{4}\right] \qquad (13)$$

Η ταχύτητα v_{xmax} προσδιορίζεται από τον τύπο $v_{x,max} = \frac{x_B - x_A}{T - T/4}$, για να μην έχουμε overshoot.

Για την κίνηση στον άξονα y στην 1η φάση αρκεί να αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση με $x_A \leftrightarrow y_A$, $v_{x,max} \leftrightarrow v_{y,max}$ με $v_{y,max} = \frac{y_B - y_A}{T - T/4}$και παίρνουμε τη σχέση:

$$p_{Y1}(t) = y_A + \frac{16v_{y,max}}{T^2}t^3 - \frac{64t^4 v_{y,max}}{T^3}t^4 \quad t \in \left[0, \frac{T}{4}\right] \qquad (14)$$

2η φάση – σταθερή ταχύτητα

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p_X(t) = b_1 t + b_0$, παραγωγίζοντας βρίσκουμε $\dot{p_X} = b_1$

Μπορούμε από την πρώτη φάση της κίνησης να βρούμε την θέση του τελικού στοιχείου δράσης την t = T/4 αντικαθιστώντας στη σχέση (13). Άρα για αυτή τη φάση της κίνησης μπορούμε να πάρουμε τις αρχικές συνθήκες:

$$p_{X1}\left(\frac{T}{4}\right) = p_{X2}\left(\frac{T}{4}\right)$$

$$\dot{p_{X2}}(t) \; = v_{x,max}$$

Επιλύοντας λοιπόν το σύστημα βρίσκουμε:

$$p_{X2}(t) = x_A + \frac{V_{X,max}\,T}{8} + \; V_{X,max}\left(t - \frac{T}{4}\right) \qquad t \; \in \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right) \quad (15)$$

Αντίστοιχα για την κίνηση στον άξονα y βρίσκουμε:

$$p_{Y2}(t) = y_A + \frac{V_{y,max}\,T}{8} + \; V_{y,max}\left(t - \frac{T}{4}\right) \qquad t \; \in \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right) \quad (16)$$

3η φάση – επιβραδυνόμενη κίνηση

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p_{X3}(t) = \; c_4t^4 + \; c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$

$$\dot{p_{X3}}(t) = 4c_4t^3 + 3c_3t^2 + 2c_2t + c_1$$

$$\ddot{p_{X3}}\,(t) = 12c_4t^2 + \; 6c_3t + 2c_2$$

Για αυτή τη φάση της κίνησης μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική θέση του end effector από την εξίσωση τροχιάς της δεύτερης φάσης. Άρα μπορούμε να πάρουμε αρχικές και τελικές συνθήκες για το σύστημα:

$$p_{X3}\left(t = \frac{3T}{4}\right) = p_{X2}\left(\frac{3T}{4}\right), \quad \textit{αρχική θέση του end effector}$$

$$\dot{p_{X3}}\left(t = \frac{3T}{4}\right) = v_{x,max}, \qquad \textit{αρχική ταχύτητα}$$

$$\ddot{p_{X3}}\left(t = \frac{3T}{4}\right) = 0, \qquad \textit{μηδενική αρχική επιτάχυνση}$$

$$\dot{p_{X1}}(t = T) = 0\,, \qquad \textit{τελική μηδενική ταχύτητα}$$
$$\ddot{p_{X1}}(t = T) = 0, \qquad \textit{μηδενική τελική επιτάχυνση}$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις και λύνοντας το σύστημα 5x5 που προκύπτει προσδιορίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου και προκύπτει:

$$\begin{aligned} p_{X3}(t) = {} & -7344Tv_{X,max} - 10240x_A + 10241x_B + t\,\frac{31543Tv_{X,max} + 368648x_A - 368648x_B}{T} \\ & + t^2\,\frac{-49536Tv_{X,max} - 57929x_A + 57929x_B}{T^2} + t^3\,\frac{34505Tv_{X,max} + 4037x_A - 4037x_B}{T^3} \\ & + \; t^4\,\frac{-8996Tv_{X,max} - 10533x_A + 10533x_B}{T^4} \qquad t \; \in \left[\frac{3T}{4}, T\right] \; (17) \end{aligned}$$

Και αντίστοιχα για τον άξονα στον y με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$p_{Y3}(t) = -7344Tv_{Y,max} - 10240\, y_A + 10241 y_B + t\frac{31543Tv_{y,max} + 368648y_A - 368648y_B}{T}$$
$$+\, t^2 \frac{-49536Tv_{y,max} - 57929y_A + 57929y_B}{T^2} + t^3 \frac{34505Tv_{y,max} + 4037y_A - 4037y_B}{T^3}$$
$$+\ t^4 \frac{-8996Tv_{y,max} - 10533y_A + 10533y_B}{T^4} \qquad t\ \in \left[\frac{3T}{4}, T\right] \quad (18)$$

Άρα συνολικά συνδυάζοντας τις σχέσεις (13)-(18) παίρνουμε τις εξισώσεις τροχιάς για την κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης στους άξονες x και y:

$$p_x(t) = \begin{cases} x_A + \dfrac{16v_{x,max}}{T^2}t^3 - \dfrac{64t^4 v_{x,max}}{T^3}t^4 & t\ \in \left[0, \dfrac{T}{4}\right] \\ x_A + \dfrac{V_{X,max}\,T}{8} +\ V_{X,max}\left(t - \dfrac{T}{4}\right) & t\ \in \left(\dfrac{T}{4}, \dfrac{3T}{4}\right) \\ -7344Tv_{X,max} - 10240x_A + 10241x_B + t\dfrac{31543Tv_{X,max} + 368648x_A - 368648x_B}{T} & \\ +t^2 \dfrac{-49536Tv_{X,max} - 57929x_A + 57929x_B}{T^2} + t^3 \dfrac{34505Tv_{X,max} + 4037x_A - 4037x_B}{T^3} & \\ +\, t^4 \dfrac{-8996Tv_{X,max} - 10533x_A + 10533x_B}{T^4} & t\ \in \left[\dfrac{3T}{4}, T\right] \end{cases}$$

$$p_Y(t) = \begin{cases} y_A + \dfrac{16v_{y,max}}{T^2}t^3 - \dfrac{64t^4 v_{y,max}}{T^3}t^4 & t\ \in \left[0, \dfrac{T}{4}\right] \\ y_A + \dfrac{V_{y,max}\,T}{8} +\ V_{y,max}\left(t - \dfrac{T}{4}\right) & t\ \in \left(\dfrac{T}{4}, \dfrac{3T}{4}\right) \\ -7344Tv_{Y,max} - 10240\, y_A + 10241y_B + t\dfrac{31543Tv_{y,max} + 368648y_A - 368648y_B}{T} & \\ +t^2 \dfrac{-49536Tv_{y,max} - 57929y_A + 57929y_B}{T^2} + t^3 \dfrac{34505Tv_{y,max} + 4037y_A - 4037y_B}{T^3} & \\ +\, t^4 \dfrac{-8996Tv_{y,max} - 10533y_A + 10533y_B}{T^4} & t\ \in \left[\dfrac{3T}{4}, T\right] \end{cases}$$

Το τελικό στοιχείο δράσης είναι ακίνητο ως προς τον άξονα z

$$p_z(t) = h$$

Αντίστοιχα για την κίνηση από το σημείο B στο σημείο A θα πάρουμε τις ίδιες εξισώσεις τροχιάς με προηγουμένως αρκεί να εναλλάξουμε τις θέσεις $x_A \leftrightarrow x_B$ και $y_A \leftrightarrow y_B$. και αντικαθιστώντας κατάλληλα και τον χρόνο για να υπάρχει σωστή αντιστοίχιση.

7ο Ερώτημα – Κινηματική Προσομοίωση

Για την κινηματική προσομοίωση του ρομποτικού βραχίονα αναπτύξαμε κώδικα σε python, ο οποίος έχει παρατεθεί μαζί με την αναφορά.

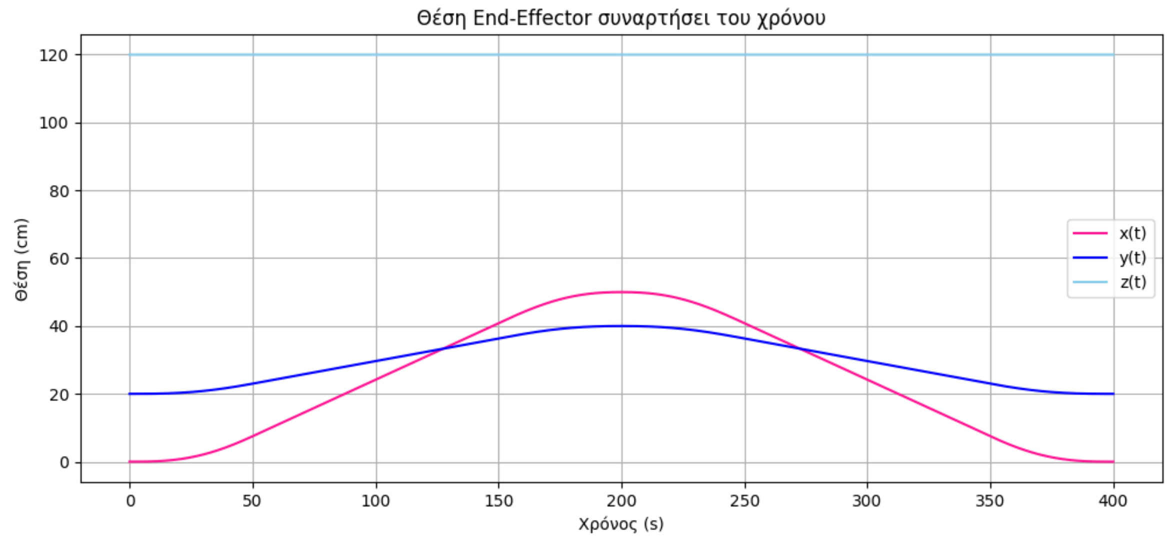
Για την προσομοίωση χρησιμοποιήσαμε τις τιμές A(0,20,120) B(50, 40, 120) και T = 200sec – 400sec συνολική κίνηση.

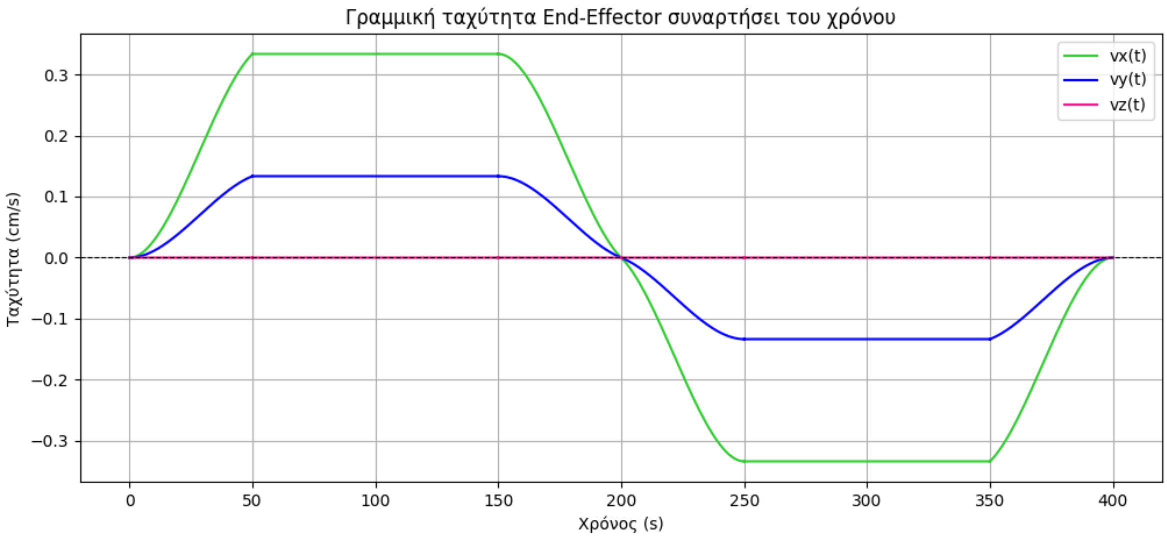
(α) Διαγράμματα θέσης και γραμμικής ταχύτητα του end effector

Χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις τροχιάς που προσδιορίσαμε παραπάνω για τις σταθερές που επιλέξαμε για την προσομοίωση για να πάρουμε το διάγραμμα κίνησης του τελικού στοιχείου δράσης. Παραγογίζοντας τις εξισώσεις τροχιάς πήραμε τις εξισώσεις της γραμμικής του ταχύτητας.

Σημειώνεται πως ήταν κομβικής σημασίας η κατάλληλη επιλογή της ταχύτητας με την οποία θα κινηθεί το εργαλείο στη φάση σ=της σταθερής ταχύτητας, προκειμένου να έχουμε ομαλή κίνηση και να μην υπάρχει overshoot.

Παρατίθενται τώρα τα διαγράμματα που προέκυψαν για χρόνο κίνησης ίσο με 400sec





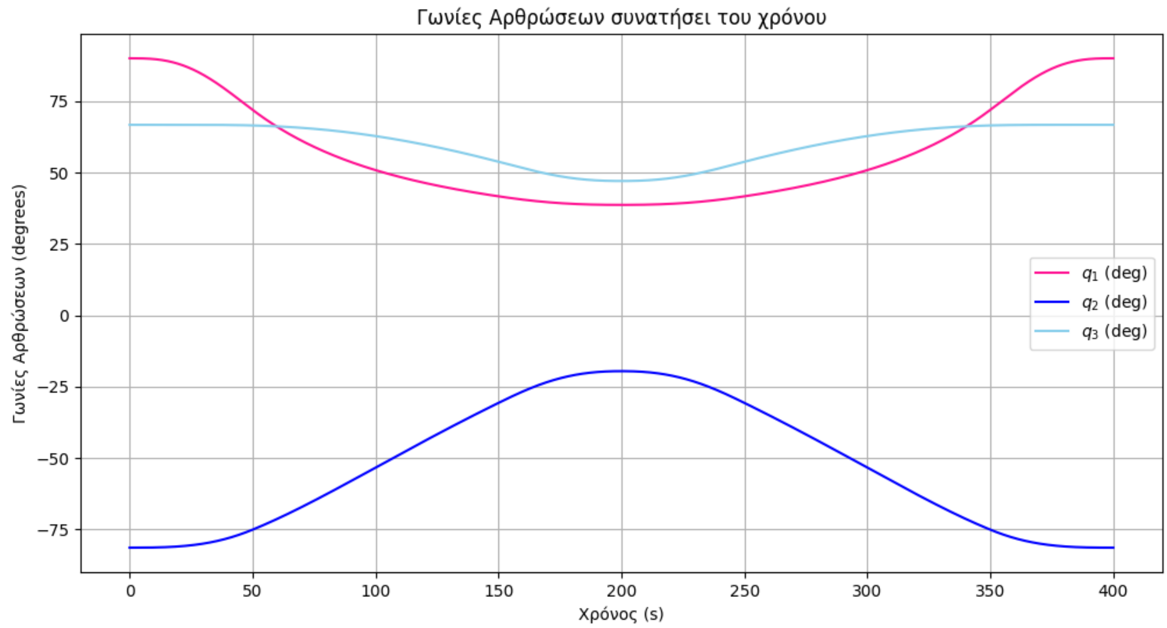
Παρατηρούμε πως πράγματι ο βραχίονας μετακινείται στους άξονες x και y από το σημείο εκκίνησης στο σημείο προορισμού, ακολουθώντας ομαλή πορεία. Το διάγραμμα της ταχύτητας υποδεικνύει πράγματι την ομαλή κίνηση του βραχίονα.

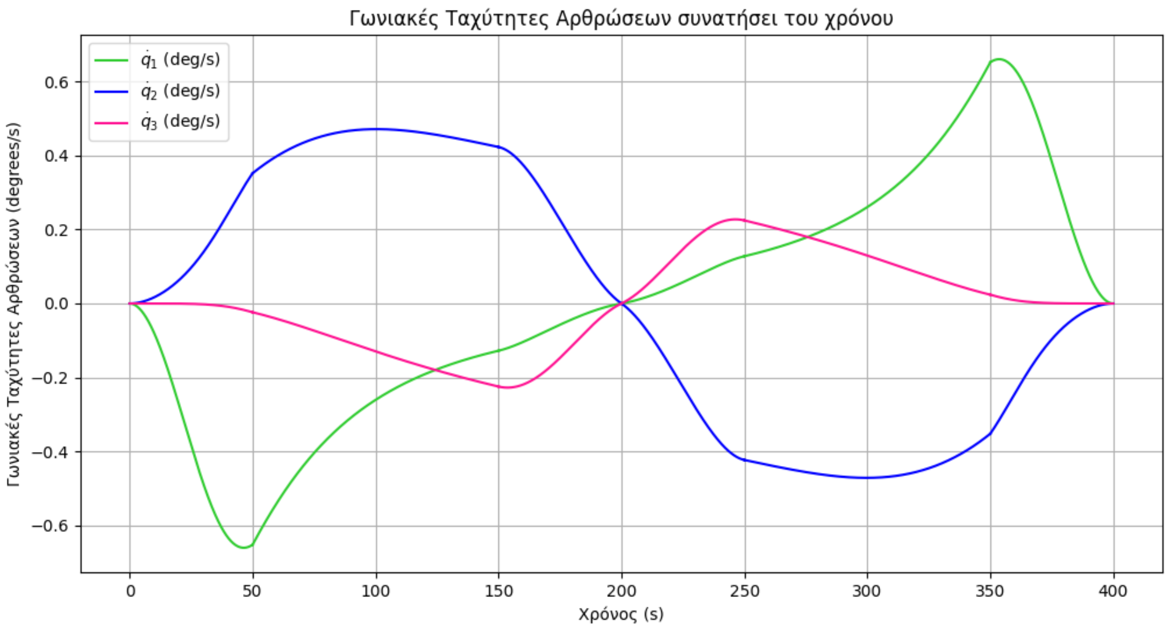
(β) Διαγράμματα θέσης και ταχύτητας των αρθρώσεων του βραχίονα

Γι' αυτά τα διαγράμματα χρησιμοποιήσαμε το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο του βραχίονα που προσδιορίσαμε στο 6ο ερώτημα της εργασίας. Αυτό μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε τη θέση του τελικού στοιχείου δράσης με τις θέσεις των αρθρώσεων

Ύστερα για να προσδιορίσουμε τις ταχύτητες των αρθρώσεων παραγωγίσαμε τις σχέσεις του αντίστροφου γεωμετρικού μοντέλου.

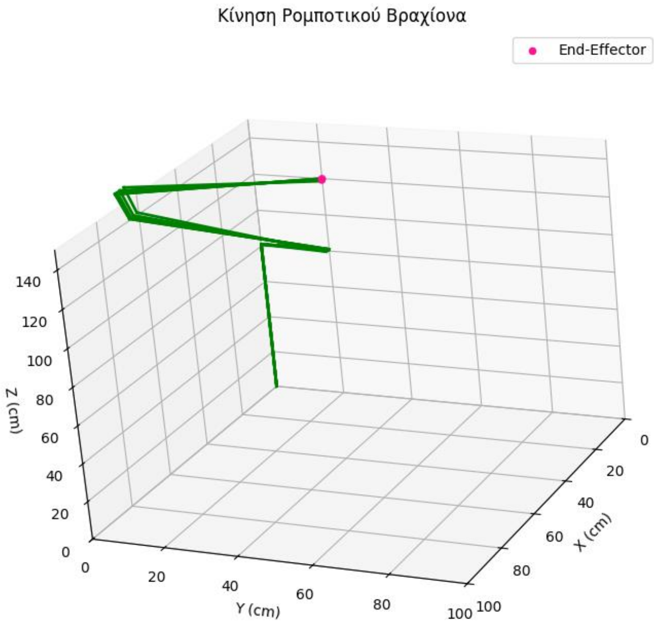
Παρακάτω παραθέτουμε τα διαγράμματα θέσης και γραμμικής ταχύτητας των αρθρώσεων:

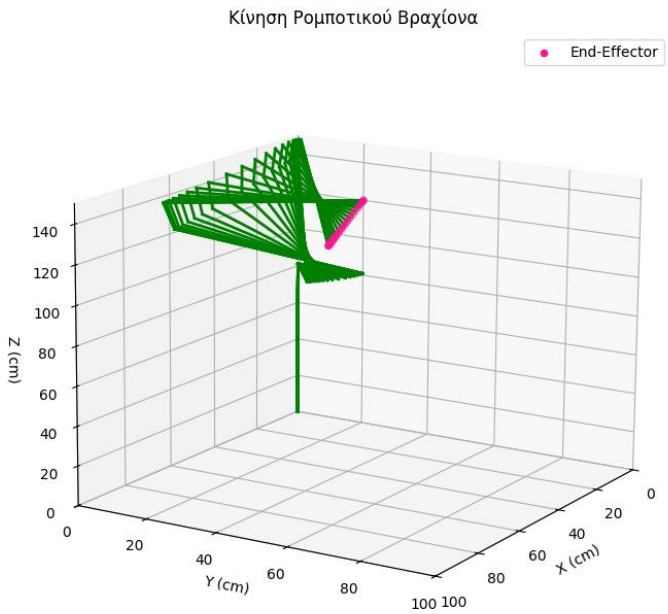


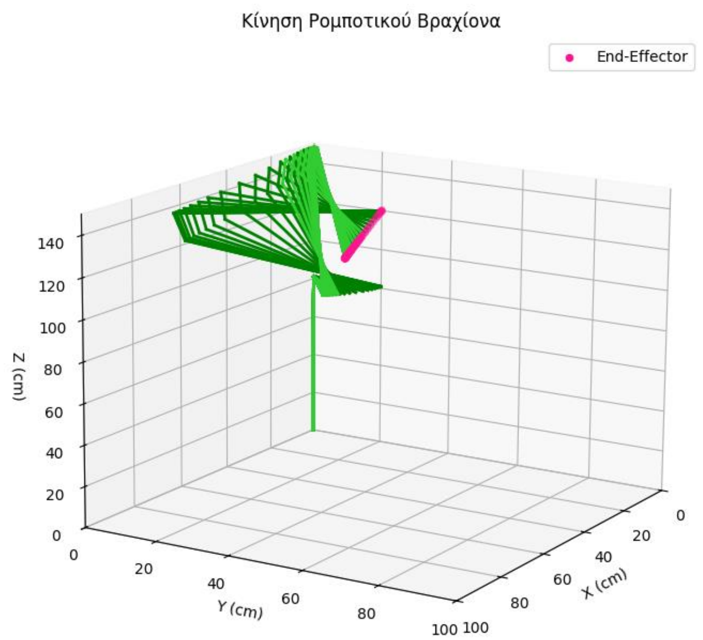


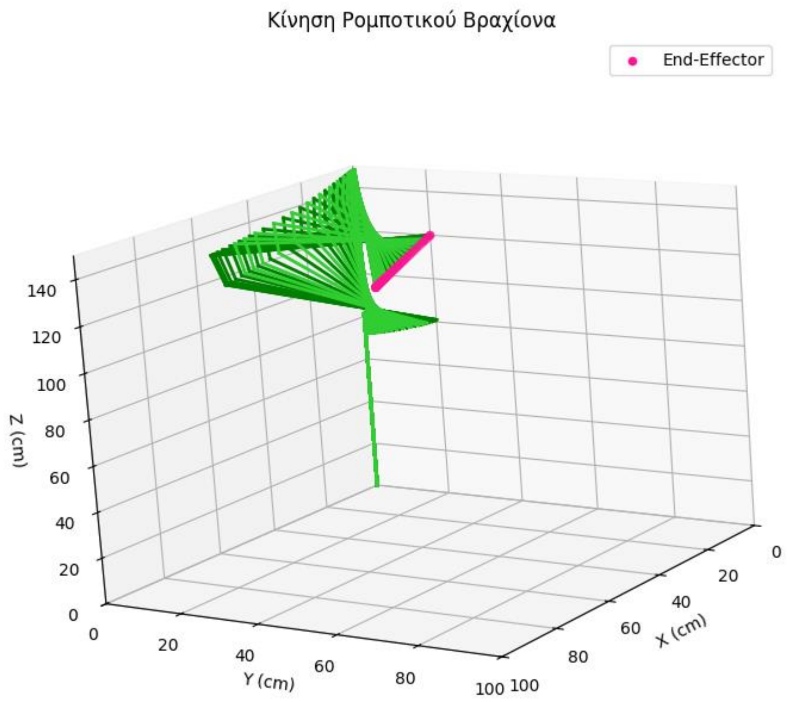
(γ) Διάγραμμα Κίνησης

Παραθέτουμε τέλος το διάγραμμα κίνησης του βραχίονα που απεικονίζει τις ενδιάμεσες θέσεις της κίνησης:






Κίνηση Ρομποτικού Βραχίονα
End-Effector
Z (cm)
Y (cm)
X (cm)


Κίνηση Ρομποτικού Βραχίονα
End-Effector
Z (cm)
Y (cm)
X (cm)