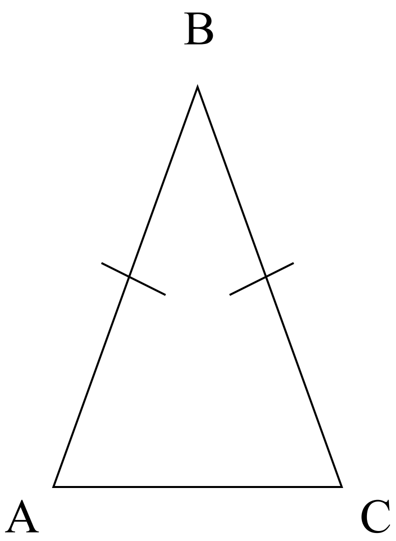
Linguaggi di Programmazione 2017/2018
Cenni di logica formale

Marco Antoniotti
Gabriella Pasi

Logica e ragionamento

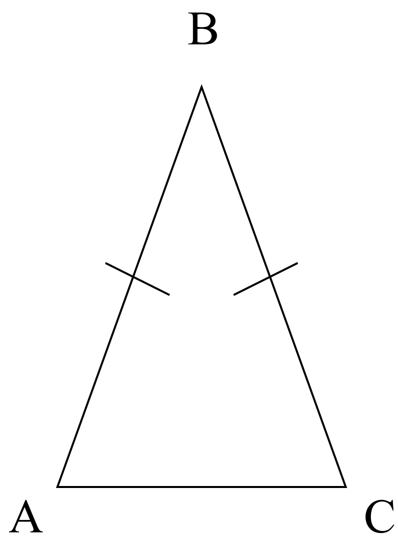
Euclide di Alessandria

Semplice Teorema di Geometria



Dato un triangolo isoscele ovvero con AB = BC, si vuole dimostrare che gli angoli $\angle A$ e $\angle C$ sono uguali

Semplice Teorema: conoscenze pregresse



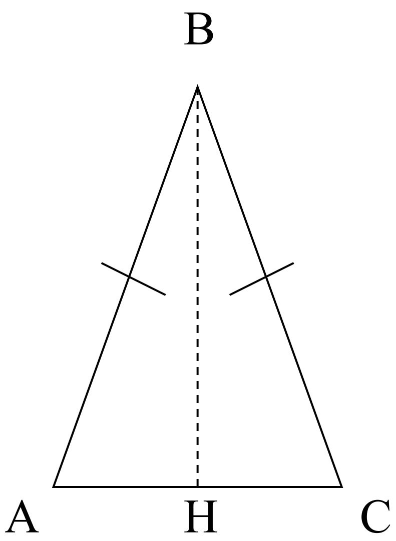
1. Se due triangoli sono uguali, i due triangoli hanno lati ed angoli uguali

2. Se due triangoli hanno due lati e l’angolo sotteso uguali, allora i due triangoli sono uguali

3. BH bisettrice di $\angle B$ cioè

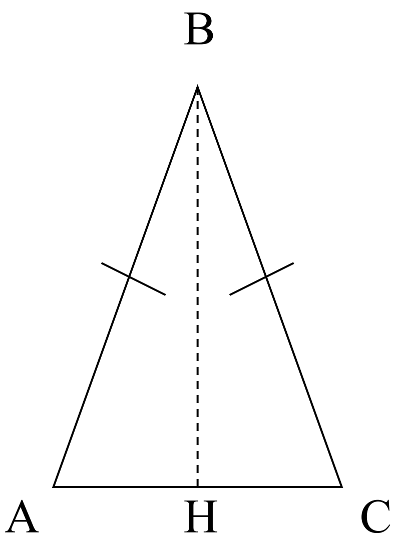
   $\angle ABH = \angle HBC$

Semplice Teorema: Dimostrazione



- **Dimostrazione**
  - AB = BC *per ipotesi*
  - ∠ABH = ∠HBC *per* (3)
  - Il triangolo HBC è uguale al triangolo ABH *per* (2)
  - ∠A e ∠C *per* (1)

Semplice Teorema: Dimostrazione



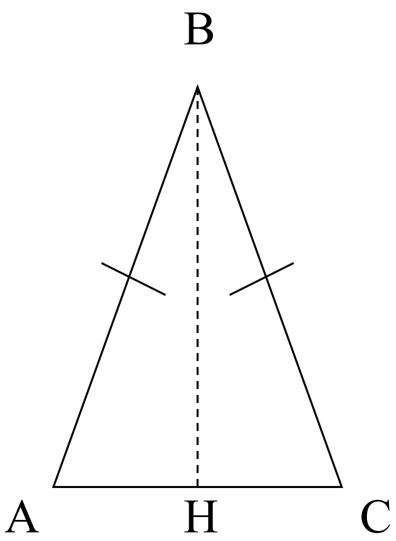
Abbiamo trasformato (2) in

⇒ ***Se*** AB = BC ***e*** BH = BH ***e*** ∠ ABH = ∠ HBC,
allora il triangolo ABH è uguale al triangolo HBC

Ed abbiamo trasformato (1) in

⇒ ***Se*** triangolo ABH è uguale al triangolo HBC,
allora AB = BC ***e*** BH = BH ***e*** AH = HC
e ∠ABH = ∠HBC ***e*** ∠AHB = ∠CHB ***e*** ∠A = ∠C

Semplice Teorema: Formalizzazione



Obbiettivo

Razionalizzare il processo che permette affermare:

$$AB = BC \vdash \angle A = \angle C$$

dove il *simbolo di* ***derivazione logica***
$\vdash$ significa “*consegue*”, “*segue che*”, “*allora*” ecc. ecc.

Semplice Teorema: Formalizzazione

$$AB = BC \vdash \angle A = \angle C$$

- Abbiamo assunto che:

  P = $\{AB = BC, \angle ABH = \angle HBC, BH = BH\}$

- Avevamo conoscenze pregresse:

  1. $AB = BC \wedge BH = BH \wedge \angle ABH = \angle HBC \Rightarrow \triangle ABH = \triangle HBC$
  2. $\triangle ABH = \triangle HBC \Rightarrow AB = BC \wedge BH = BH \wedge AH = HC \wedge \angle ABH = \angle HBC \wedge \angle AHB = \angle CHB \wedge \angle A = \angle C$

Semplice Teorema: Formalizzazione

$$AB = BC \vdash \angle A = \angle C$$

Abbiamo costruito una catena di formule:

P1: $AB = BC$ — da **P**

P2: $\angle ABH = \angle HBC$ — da **P**

P3: $BH = BH$ — da **P**

P4: $AB = BC \wedge BH = BH \wedge \angle ABH = \angle HBC$ — da P1, P2, P3, e **introduzione della congiunzione**

P5: $\triangle ABH = \triangle HBC$ — da P4, Regola_1 e **Modus Ponens**

P6: $AB = BC \wedge BH = BH \wedge AH = HC$
$\wedge \angle ABH = \angle HBC \wedge \angle AHB = \angle CHB \wedge \angle A = \angle C$ — da P5, Regola_2 e **Modus Ponens**

P7: $\angle A = \angle C$ — da P6 e l'**eliminazione della congiunzione** (il simbolo $\wedge$)

Regole di inferenza

Processo di dimostrazione

Una dimostrazione **DIM**

$$\mathbf{S} \quad \vdash \quad F$$

ovvero F **è conseguenza di S**

È una sequenza

DIM = < P_1, P_2, …, P_n >

dove

$P_n = F$
$P_i \in \mathbf{S}$
oppure P_i è ottenibile da $P_{i1},\ldots,P_{im}$ (con $i_1 < i$, …, $i_m < i$) applicando una **regola di inferenza**

Regole di inferenza e calcoli logici

- Un insieme di regole di inferenza costituisce la base di un **calcolo logico**
- *Diversi insiemi di regole danno vita a diversi calcoli logici*
- Lo scopo di un calcolo logico è di manipolare delle formule logiche in modo completamente **sintattico** al fine di stabilire una connessione tra un insieme di formule di partenza (di solito un insieme di formule dette assiomi) ed un insieme di conclusioni
- Nel seguito presenteremo due tipi di logica (due linguaggi logici) con il calcolo logico ad esse associato:
  - **Logica Proposizionale (Logica delle Proposizioni)**
  - **Logica dei Predicati del Primo Ordine**

Riferimenti

- Moltissimi libri, articoli, pagine web, etc
  - ***How to Prove It***, Daniel J. Vellman, Cambridge University Press, 2nd Edition, 2006
  - Capitolo 1 di ***Discrete Mathematics and Its Applications***, Kenneth H. Rosen, McGraw Hill, 2007 (Nth Edition and later ones)
  - ***A Mathematical Introduction to Logic***, H. B. Enderton, Academic Press, 2000

- Per i più avventurosi (regali di Natale o compleanno)
  - ***Gödel, Escher and Bach, An Eternal Golden Braid***, Douglas R. Hofstadter, Basic Books, 1979
  - ***Logicomix***, Apostolos Daxiadis, Christos Papadimitriou, Alecos Papadatos, Annie Di Donna, Bloomsbury, 2009
  - ***Il diavolo in cattedra***, Piergiorgio Odifreddi, Einaudi, 2003
  - ***Le menzogne di Ulisse***, Piergiorgio Odifreddi, Longanesi & C., 2004
    - I due libri di Odifreddi sono molto simili; il primo un po' più tecnico

Logica Proposizionale

- La logica proposizionale si occupa delle conclusioni che possiamo trarre da un insieme di - per l'appunto – **proposizioni.**

- Una logica proposizionale è sintatticamente definita da un insieme **P** di proposizioni

- **Esempi**

  P = $\{AB = BC, \angle ABH = \angle HBC, BH = BH\}$

  oppure

  P = {piove, l'unicorno è un animale mitico}

  oppure

  P = $\{p, q, r, s, w\}$

Logica Proposizionale

- All'insieme **P** è associata una funzione di verità, o di valutazione, ***V*** (spesso indicata con ***T*** o con ***I***)

  $$\boldsymbol{V} : \mathbf{P} \rightarrow \{vero, falso\}$$

  che associa un valore di verità ad **ogni** elemento di **P** (cioè ad ogni proposizione).

- La funzione di valutazione è il ponte di connessione tra la sintassi e la semantica di un linguaggio logico

- **Esempi**

  V(`q`) = *vero*, ***V***(`p`) = *vero*, ***V***(`w`) = *falso*

  V(`l'unicorno è un animale mitico`) = *vero*

  V(`piove`) = *falso*

Logica Proposizionale

- Le proposizioni in una logica proposizionale possono essere combinate utilizzando una serie di connettivi logici
  - Congiunzione $\wedge$
  - Disgiunzione $\vee$
  - Negazione $\neg$
  - Implicazione $\Rightarrow$

- Chiamiamo **FBF** l'insieme di tutte le formule formate dagli elementi di P e dalle loro combinazioni (formule ben formate)

- Le formule atomiche in **P** e le loro negazioni vengono anche chiamati **letterali** (positivi e negativi)

- **Esempi**

```
piove ∧ l'unicorno è un animale mitico
p ⇒ q
p ∨ q ⇒ ¬s
```

Logica Proposizionale

- Il valore di verità di una proposizione dipende dalla funzione di verità ***V***
- Il valore di verità di una formula composta dipende dal valore di verità delle sue componenti
- La definizione della funzione di valutazione ***V*** viene quindi estesa sul dominio **FBF** (formule ben formate)
- La funzione ***V*** associa un valore di verità ad un elemento di **FBF** secondo le regole seguenti:

$$\boldsymbol{V}(\neg\, \mathtt{s}) \equiv \text{non } \boldsymbol{V}(\mathtt{s})$$
$$\boldsymbol{V}(\mathtt{a} \wedge \mathtt{b}) \equiv \boldsymbol{V}(\mathtt{a}) \text{ e } \boldsymbol{V}(\mathtt{b})$$
$$\boldsymbol{V}(\mathtt{a} \vee \mathtt{b}) \equiv \boldsymbol{V}(\mathtt{a}) \text{ o } \boldsymbol{V}(\mathtt{b})$$
$$\boldsymbol{V}(\mathtt{p} \Rightarrow \mathtt{q}) \equiv (\text{non } \boldsymbol{V}(\mathtt{p})) \text{ o } \boldsymbol{V}(\mathtt{q})$$

Tavole di verità

- Un modo per calcolare il valore di verità di una proposizione (composta) è quello di utilizzare la tavola di verità:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
v	v	v	v	f	v
v	f	f	v		f
f	v	f	v	v	v
f	f	f	f		v

Calcoli logici

- Mentre la funzione di verità (o la tavola di verità) costituisce la parte ***semantica*** di un insieme di proposizioni - dice ciò che è vero e ciò che è falso sotto l'interpretazione considerata -, un calcolo logico dice come **generare** nuove formule (cioè espressioni sintattiche) a partire da un insieme di partenza (gli assiomi)

- Un calcolo deve garantire che tutte le nuove formule generate siano "vere" se l'insieme di assiomi consiste solo di formule "vere"

- Il processo di generazione si chiama **dimostrazione**

Calcolo Proposizionale – regole di inferenza

- Il calcolo proposizionale è basato su una serie di regole di inferenza che ci permettono di ottenere delle nuove formule a partire da un insieme di assiomi

- Una regola di inferenza ha la seguente forma generale:

$$\frac{F_1, F_2, \ldots, F_k}{R} \quad \text{[nome regola]}$$

dove ogni F_i rappresenta una formula (vera) in **FBF** e R è la formula generata da "inserire" in **FBF**; il "nome regola" ci dice che regola di inferenza stiamo usando

- L'esempio tipico di regola di inferenza è il cosiddetto modus ponens

Regole di inferenza: modus ponens

$$\frac{p \Rightarrow q, \quad p}{q} \quad \text{[modus ponens]}$$

- **Esempio**
  - Se piove, la strada è bagnata
  - Piove
  - Allora la strada è bagnata

Ovvero, la regola sintattica del modus ponens ci permette di aggiungere le conclusioni di una “regola” al nostro insieme di formule ben formate “vere”

Regole di inferenza: modus tollens

$$\frac{p \Rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p} \quad \text{[modus tollens]}$$

- **Esempio**
  - Se piove, la strada è bagnata
  - La strada non è bagnata
  - Allora non piove

Ovvero, la regola sintattica del modus tollens ci permette di aggiungere la premessa negata di una “regola” al nostro insieme di formule ben formate “vere”

Regole di inferenza
eliminazione ed introduzione di ‘e’

$$\frac{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n}{p_i} \quad \text{[eliminazione } \wedge\text{]}$$

$$\frac{p_1, p_2, \ldots, p_n}{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n} \quad \text{[introduzione } \wedge\text{]}$$

Esempio di applicazione di eliminazione di ‘e’:

- Piove e la strada è bagnata
- Piove

Ovvero, la regola sintattica dell’eliminazione della congiunzione ci permette di aggiungere all’insieme **FBF** i singoli componenti di una formula complessa

queste regole si chiamano anche “di congiunzione” e “di semplificazione”

Regole di inferenza
introduzione di ‘o’

$$\frac{p}{p \vee q} \quad \text{[introduzione } \vee\text{]}$$

- **Esempio**
  – Piove
  – Piove o c’è vita su Marte

- Ovvero, la regola sintattica dell’introduzione della disgiunzione ci permette di aggiungere i singoli componenti di una formula complessa
  – Questa regola è anche detta “di addizione”

Regole di inferenza
varie ed eventuali

$$\frac{p \vee \neg p}{\mathrm{vero}}$$ [terzo escluso]

$$\frac{\neg \neg p}{p}$$ [eliminazione ¬]

$$\frac{p \wedge \mathrm{vero}}{p}$$ [eliminazione ∧]

$$\frac{p \wedge \neg p}{q}$$ [contraddizione]

L'ultima regola (contraddizione) ci dice che da una contraddizione si può trarre qualunque conseguenza

Regole di inferenza

- Le regole di inferenza che abbiamo visto (introduzione ed eliminazione di congiunzione, modus ponens, introduzione della disgiunzione ed altre non citate) fanno parte del cosiddetto calcolo naturale o di Gentzen, il nome del loro formalizzatore.

- Il calcolo di Gentzen, e molte varianti, formalizzano i modi di derivare delle conclusioni a partire da un insieme di premesse
  - In particolare permettono di derivare "direttamente" una formula ben formata mediante una sequenza di passi ben codificati

- La regola del *modus pones* (eliminazione dell'implicazione) assieme al principio del terzo escluso, possono però essere usati in un *altro* modo, procedendo "per assurdo" alla dimostrazione di una data formula
- Questa vista "estesa" della regola del modus ponens è conosciuta come **principio di risoluzione**
- *Ma prima, un po' di esempi…*

Il principio di risoluzione

- Il **principio di risoluzione** è una regola di inferenza generalizzata semplice e facile da utilizzare e implementare
  - Opera su formule ben formate trasformate in *forma normale congiunta* (che vedremo successivamente)
  - Ognuno dei congiunti di queste formule viene detto **clausola**
- L'osservazione fondamentale alla base del principio di risoluzione è un'estensione della nozione di rimozione dell'implicazione sulla base del principio di contraddizione
  - Solitamente è usata per fare ***dimostrazioni per assurdo***

$$\frac{p \vee \neg r, \quad s \vee r}{p \vee s}$$

Clausola *risolvente*

$$\frac{\neg r, \quad r}{\perp}$$

Clausola *vuota*

Il principio di risoluzione

- Si noti che la generazione della clausola vuota, corrisponde all'aver dimostrato che il mio insieme di formule ben formate contiene una contraddizione
  - Se ho derivato r e $\neg r$ allora posso dedurre qualunque cosa, quindi anche la clausola vuota

$$\frac{\neg r, \quad r}{\perp}$$

Clausola *vuota*

Regole di inferenza: (unit) resolution

$$\frac{\neg p, \quad q_1 \vee q_2 \vee \boxed{?} q_k \vee p}{q_1 \vee q_2 \vee \boxed{?} q_k} \quad [\text{unit resolution}]$$

$$\frac{p, \quad q_1 \vee q_2 \vee \boxed{?} q_k \vee \neg p}{q_1 \vee q_2 \vee \boxed{?} q_k} \quad [\text{unit resolution}]$$

- La regola di risoluzione è molto generale (si vedano, ad esempio le nozioni di “risoluzione generale” e “risoluzione Davis-Putnam”)
- Quando una delle due clausole da risolvere è un *letterale* (ovvero una proposizione o, come vedremo, un predicato) anche negato, come nel caso di p nei due esempi qui sopra, allora si parla di *unit resolution*

- **Esempio**
  - <Non piove>, <piove o c’è il sole>
  - <C’è il sole>

Dimostrazioni per assurdo

- Supponiamo di avere a disposizione un insieme di formule **FBF** (vere, data una certa interpretazione ***V***)
- Supponiamo di voler dimostrare che una certa proposizione *p* (o formula atomica) è vera
- Possiamo procedere usando il metodo della **reductio ad absurdum** (dimostrazione per assurdo)
  - Assumiamo che $\neg p$ sia vera
  - Se, combinandola con le proposizioni in **FBF** ottengo una contraddizione, allora concludo che *p* deve essere vera

Dimostrazioni per assurdo

- Esempio 1: proviamo che p è vera (o, meglio, derivabile)
  - **FBF** = $\{p\}$
  - Assumiamo $\neg p$
  - **FBF** $\cup \{\neg p\}$ genera una contraddizione
  - Quindi p deve essere vera

- Esempio 2: proviamo che q è vera (o, meglio, derivabile)
  - **FBF** = $\{p \Rightarrow q, p, \neg w, e, r\}$
  - Assumiamo $\neg q$
  - **FBF** $\cup \{\neg q\}$ genera una contraddizione
    - Infatti

      $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ combinato con p (preso da ***FBF***, ovvero con un'applicazione del modus ponens) produce q

      quindi abbiamo $q \wedge \neg q$, la contraddizione che cerchiamo.

      Formalmente, se applico a q e a $\neg q$ il principio di risoluzione ottengo la clausola vuota $\perp$, cioè una contraddizione.

Ricapitolazione

- Un calcolo logico (proposizionale) manipola i seguenti elementi

- **Sintassi**
  - Un insieme di proposizioni **P**
  - Un insieme di formule ben formate **FBF**, tale che **P** $\subseteq$ **FBF**
  - Un sottoinsieme di assiomi **A** $\subseteq$ **FBF**
  - Un insieme di **regole di inferenza** che ci permettono di incrementare **FBF**

- **Semantica**
  - Una funzione di verità che ci permette di distinguere ciò che è vero da ciò che è falso rispetto a una data interpretazione
    - Funzione di Interpretazione: ***V*** (o ***I***)
    - tavole di verità

Assiomi (Conoscenze pregresse)

- Proposizioni sempre vere
  - **A1**: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  - **A2**: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  - **A3**: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$

  - **A4:** $\neg(A \wedge \neg A)$ principio di non-contraddizione
  - **A5:** $A \vee \neg A$ principio del terzo escluso

Esempio

Se l'unicorno è mitico, allora è immortale, ma se non è mitico allora è mortale. Se è mortale o immortale, allora è cornuto. L'unicorno è magico se è cornuto.

Domande

a) L'unicorno è mitico?

b) L'unicorno è magico?

c) L'unicorno è cornuto?

Procedimento

1. Esprimere il problema in forma di logica delle proposizioni
2. Individuare i teoremi da dimostrare
3. Dimostrare i teoremi

Esempio

*Se l'(**unicorno è mitico**), allora l'(**unicorno è immortale**), ma se non (**è mitico**) allora (**è mortale**). Se l'(**unicorno è mortale**) o l'(**unicorno è immortale**), allora (**unicorno è cornuto**). L'(**unicorno è magico**) se l'(**unicorno è cornuto**).*

Proposizioni:

UM = **unicorno è mitico**

UI = **unicorno è immortale**

UMag = **unicorno è magico**

UC = **unicorno è cornuto**

Esempio

*Se l'**(unicorno è mitico)**^{UM}**,** allora l'**(unicorno è immortale)**^{UI}**,** ma se non **(è mitico)** $^{\neg UM}$ allora **(è mortale)**$^{\neg UI}$. Se l'**(unicorno è mortale)**$^{\neg UI}$ o l'**(unicorno è immortale)**^{UI}, allora **(unicorno è cornuto)**^{UC}. L'**(unicorno è magico)**^{UMag} se l'**(unicorno è cornuto)**^{UC}.*

Trascrizione:

$$UM \Rightarrow UI$$

$$\neg UM \Rightarrow \neg UI$$

$$\neg UI \vee UI \Rightarrow UC$$

$$UC \Rightarrow UMag$$

Esempio

Supponiamo di voler rispondere alle domande di seguito (leggi: provare questi teoremi)

a) L'unicorno è mitico?

b) L'unicorno è magico?

c) L'unicorno è cornuto?

Rappresentazione:

$\boldsymbol{S} = \{UM \Rightarrow UI,\ \neg UM \Rightarrow \neg UI,\ \neg UI \vee UI \Rightarrow UC,\ UC \Rightarrow Umag\}$

a) $\boldsymbol{S} \vdash UM$?

b) $\boldsymbol{S} \vdash Umag$?

c) $\boldsymbol{S} \vdash UC$?

Esempio

$$\boldsymbol{S} \vdash \mathrm{UC}$$

P1: $\neg \mathrm{UI} \vee \mathrm{UI} \Rightarrow \mathrm{UC}$ da ***S***

P2: $\neg \mathrm{UI} \vee \mathrm{UI}$ da A5 (cfr., slides precedenti)

P3: UC da **P1**, **P2** e *modus ponens*

Esempio

$\boldsymbol{S} \vdash \text{UMag}$

P1: $\neg$UI $\vee$ UI $\Rightarrow$ UC da ***S***

P2: $\neg$UI $\vee$ UI da **A5**

P3: UC da **P1**, **P2** e *MP*

P4: UC $\Rightarrow$ Umag da **S**

P5: UMag da **P3**, **P4** e *MP*

Esercizio

Dimostrare (a)

Sintassi e semantica

- Come abbiamo già accennato esiste una differenza tra **sintassi** e **semantica** in logica
- Un argomento a sostegno dell'esistenza di questa differenza consiste nel considerare le seguenti "stringhe" di caratteri

  2A 42 XLII 33 101010

  Esse sono la rappresentazione (in "linguaggi" diversi) dello stesso oggetto

- Un calcolo logico fornisce una manipolazione sintattica (simbolica)
  - L'operatore di **derivazione** $\vdash$ è un operatore sintattico
- La semantica di un insieme di formule dipende dalla funzione di valutazione ***V***
  - Simmetricamente viene introdotto l'operatore di "**conseguenza logica**" (in Inglese entailment), denotato da **|=**

Sintassi e semantica

In particolare, data una particolare logica:

$$\mathbf{S} \vdash \boldsymbol{f} \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{S} \vDash \boldsymbol{f}$$

dove **S** è un insieme di formule iniziale ed ***f*** è una formula ben formata (fbf), il tutto in dipendenza da una particolare funzione di verità ***V***

Tautologie e modelli

- Una fbf sempre vera indipendentemente dal valore dei **letterali** viene detta **tautologia**

- Una particolare **interpretazione** ***V*** che rende vere tutte le formule in **S** viene detta **modello** di **S**

Logica del primo ordine

Logica proposizionale vs. logica del primo ordine

- La logica proposizionale è molto utile
  - Ha caratteristiche computazionali chiare
  - Ha una semantica altrettanto chiara

- La logica proposizionale ha numerose limitazioni
  - Non ci permette di fare asserzioni circa insiemi di elementi in maniera concisa

- **Esempio**
  Il classico sillogismo
  1. Tutti gli uomini sono mortali
  2. Socrate è un uomo
  3. Quindi Socrate è mortale

- Il problema è la prima frase, che non è "esprimibile" in logica proposizionale

Logica proposizionale vs. logica del primo ordine

- Per risolvere questi problemi, la **Logica del Primo Ordine** (LPO o, in Inglese, *First Order Logic* - FOL; ne esistono di "ordine" superiore) introduce le nozioni di:
  - Variabile
  - Costante
  - Relazione (o predicato)
  - Funzione
  - Quantificatore
- Ovvero, un linguaggio logico del primo ordine è costituito da **termini** (notare il nuovo termine!) costruiti a partire da:
  - **V** insieme di simboli di variabili
  - **C** insieme di simboli di costante
  - **R** insieme di simboli di relazione o predicati di varia arità
  - **F** insieme di simboli di funzione di varia arità
  - Connettivi logici (già visti) e simboli di quantificazione $\forall$ (universale) e $\exists$ (esistenziale)

Sintassi della logica del primo ordine

- La costruzione di un linguaggio logico del primo ordine è (ovviamente!!!) **ricorsiva**

- I termini più semplici sono i predicati

$$r \subseteq \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_1 \times \ldots \times \mathbf{C}_k$$

ovvero **relazioni** cartesiane su **C**, scritte come $r(c_1, c_2, \ldots, c_k)$

- Le funzioni sono definite con il seguente dominio e codominio

$$f : \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_1 \times \ldots \times \mathbf{C}_m \rightarrow \mathbf{C}$$

una funzione si scrive come $f(c_1, c_2, \ldots, c_m)$

Sintassi della logica del primo ordine

- Le **formule ben formate** (**FBF**; in Inglese, *well-formed formulae* - WFF) di un linguaggio logico sono costruite ricorsivamente nel seguente modo
  - Un **termine** t_j può essere un elemento di **C**, di **V**, oppure un'applicazione di funzione $f(t_1, t_2, \ldots, t_s)$
  - Un termine costituito da un **predicato** $r(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, dove ogni t_i è un termine, appartiene ad **FBF**
  - Diversi elementi di **FBF** connessi dai connettivi logici standard (congiunzione, disgiunzione, negazione, implicazione) appartengono ad **FBF**
    - Denotiamo con $\boldsymbol{t}(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ tale combinazione di termini
  - Le formule

    $\forall\, x\, .\, \boldsymbol{t}(t_1, t_2, \ldots, x, \ldots, t_r)$ e $\exists\, \mathrm{x}\, .\, \boldsymbol{t}(t_1, t_2, \ldots, x, \ldots, t_r)$ appartengono ad **FBF**

Logica del primo ordine

- Con le definizioni precedenti, possiamo ora rivedere l'esempio socratico
  - Socrate è un uomo.
  - Tutti gli uomini sono mortali.
  - Allora Socrate è mortale.

- Costanti individuali
  - **C** = {**Parmenide, Socrate, Platone, Aristotele, Crisippo, Pino, Gino, Rino, Ugo**}

- Predicati
  - **R** = {**uomo**, **mortale**}

Logica del primo ordine

- Rappresentiamo le frasi seguenti
  - Tutti gli uomini sono mortali.
  - Socrate è un uomo.
  - Allora Socrate è mortale.

- Traduzione delle asserzioni principali
  - **$\forall$ x . (uomo(x) $\Rightarrow$ mortale(x))**
  - **uomo(Socrate)**

- Traduzione della conclusione a cui vogliamo arrivare
  - **mortale(Socrate)**

Logica del primo ordine e calcoli logici

- Naturalmente non possiamo semplicemente dire che la nostra conclusione “segue” dalle asserzioni iniziali
- Dobbiamo giustificare questa conclusione sulla base della sintassi e della semantica del nostro linguaggio logico (del primo ordine)
- In altre parole dobbiamo usare di nuovo delle regole di calcolo per ottenere la conclusione
- Dato che il linguaggio è più ricco, dobbiamo costruire delle regole più sofisticate

Logica del primo ordine

Regola di eliminazione del quantificatore universale

$$\frac{\forall x.\, T(\ldots, x, \ldots), \quad c \in \mathbf{C}}{T(\ldots, c, \ldots)} \ [\text{eliminazione } \forall]$$

Logica del primo ordine

- Con la regola appena introdotta possiamo derivare la nostra conclusione a partire dalle asserzioni iniziali
  1. **uomo(Socrate)**
  2. **$\forall x$.(uomo(x) $\Rightarrow$ mortale(x))**
  3. **mortale(Socrate)**

$$\frac{(\forall x.\, \mathbf{uomo}(x) \Rightarrow \mathbf{mortale}(x)),\quad \mathbf{Socrate} \in \mathbf{C}}{\boxed{\mathbf{uomo}(\mathbf{Socrate}) \Rightarrow \mathbf{mortale}(\mathbf{Socrate})}}\ [\text{eliminazione } \forall]$$

$$\frac{\mathbf{uomo}(\mathbf{Socrate}),\quad \boxed{\mathbf{uomo}(\mathbf{Socrate}) \Rightarrow \mathbf{mortale}(\mathbf{Socrate})}}{\mathbf{mortale}(\mathbf{Socrate})}\ [\text{eliminazione } \Rightarrow]$$

Altre regole in LPO

- Date le regole per l'eliminazione del quantificatore universale, dobbiamo esibire delle regole per la manipolazione del quantificatore esistenziale

$$\frac{T(\ldots, c, \ldots), \quad c \in \mathbf{C}}{\exists x.\, T(\ldots, x, \ldots)} \quad [\text{introduzione } \exists]$$

- Valgono anche le seguenti identità riguardanti l'interazione tra quantificatori e negazione

$$\exists x.\, \neg\, T(\ldots, x, \ldots) \quad \equiv \quad \neg \forall x.\, T(\ldots, x, \ldots)$$

$$\forall x.\, \neg\, T(\ldots, x, \ldots) \quad \equiv \quad \neg \exists x.\, T(\ldots, x, \ldots)$$

Sommario

- Introduzione alla Logica Matematica

- Dimostrazioni
  - Concetto di Calcolo Logico e Regola di Inferenza
  - Concetto di Derivazione
  - Distinzione tra Sintassi e Semantica
  - Concetto di Conseguenza Logica (Entailment)
  - Significato dei teoremi di Consistenza e Completezza

- Calcoli Logici
  - Calcoli Naturali
  - Calcoli per Risoluzione

- Logica Proposizionale
- Logica del Primo Ordine
  - Universo, variabili, funzioni, predicati ed operatori universali ed esistenziali

- Per chi ha intenzione di vedere più in dettaglio questi argomenti, i libri citati precedentemente contengono tutte le informazioni necessarie