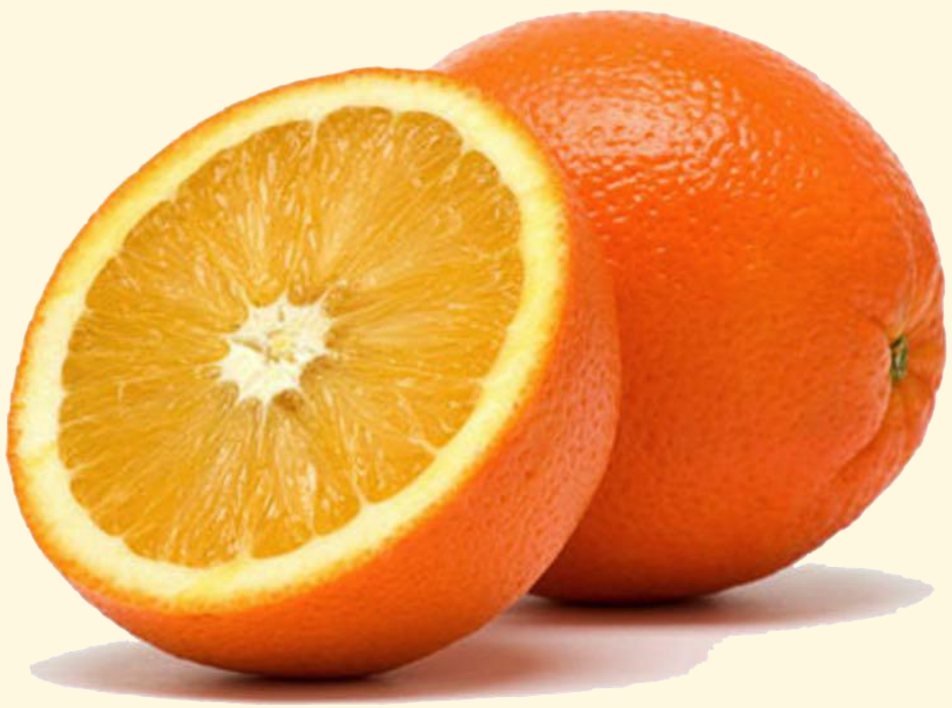
ریاضی

صنف نهم

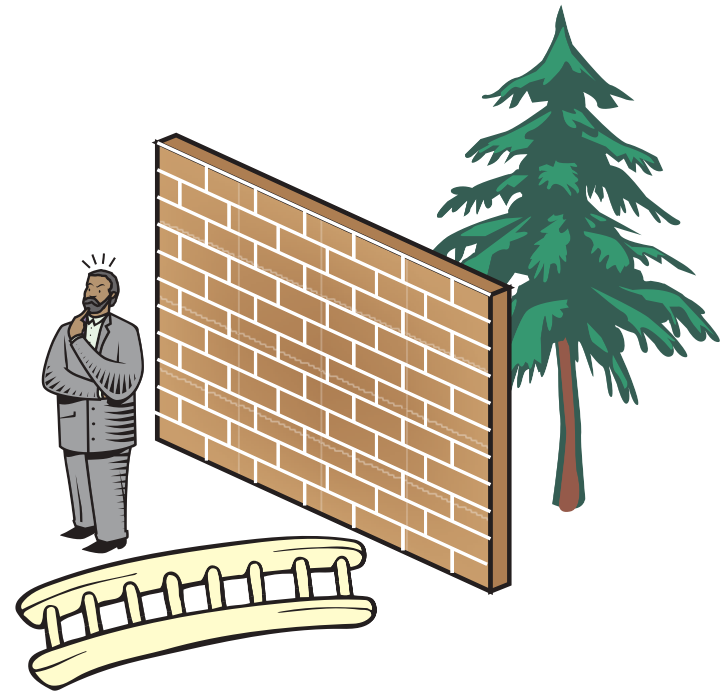
برای مدارس دینی

جمهوری اسلامی افغانستان
وزارت معارف
ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی



۱۳۹۸ هـ . ش.

ریاضی صنف نهم (برای مدارس دینی)



curriculum@moe.gov.af

ریاضی صنف

۹

(برای مدارس دینی)

۱۳۹۶

هـ.ش

مؤلفان

- سرمولف میرنقیب الله عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- مولف مهناز توخی آمر دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- معاون مولف رحیمه هدایت زی عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ادیتوران علمی

- پوهنیار عبیدالله صافی عضو تیم پروژهٔ ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ادیتور زبان

- مؤلف الحاج سید محمد پایمناری عضو دیپارتمنت دری ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

کمیتهٔ دینی، سیاسی و فرهنگی:

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

إشراف:

- دکتور شیر علی ظریفی رئیس پروژه انکشاف نصاب تعلیمی.

بسم الله الرحمن الرحيم

سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه بان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

پیام وزیر معارف

الحمدلله رب العالمین والصلاة والسلام علی رسوله محمد وعلی آله وأصحابه أجمعین، أما بعد:

نصاب تعلیمی معارف اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعهٔ علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد.

نصاب تعلیمی با گذشت زمان و تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زندگی، مطابق با نیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضهٔ معلومات، تطور و انکشاف نماید.

یکی از عرصه های نصاب تعلیمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعلیمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین مبین اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زندگی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.

علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنامندی سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصا انکشاف تدریجی نصاب تعلیمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفاء کرده اند.

مطالعهٔ دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان می دهد که نصاب تعلیمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پا بر جای دین اسلام، که برای همهٔ انسانها در همهٔ زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است.

کشور عزیز ما افغانستان با سابقهٔ درخشان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی مانند عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه و غیره، گواه واضح آنچه گفته شد می

باشد.

همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند.

وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت ورسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعهٔ کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.

درین راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصین باتجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی، را با شرح و توضیح متون، جا بجا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت.

امیدوارم این تلاشهای قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده وسبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفیق

دکتور میرویس بلخی

وزیر معارف

مقدمه

استادان عالیقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است که قوانین طبیعت را فورمول بندی می کند و مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارایه می نماید.

انسان ها در زنده گی روز مره به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکاء، تعین زکات و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.

برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری داشته باشند، مسائل روزمرۀ زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل مانند میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.

به گونۀ که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسایل ضروری این علم را با درنظرداشت به فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تالیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند برود و رول مؤثر و مثمر را در جامعه بازی نمایند.

و الله ولی التوفیق

فهرست
صفحه

فهرست | صفحه

فصل اول

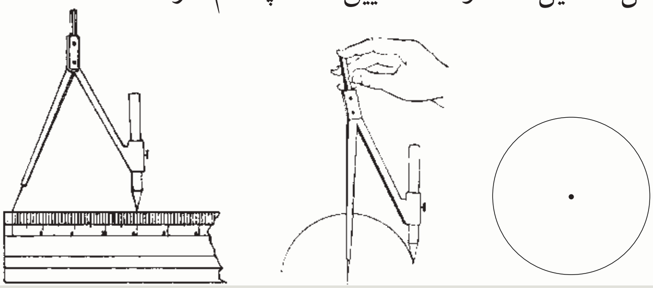
دایـره

دایــره
CIRCLE

به شــکل مقابل توجه کنید اشــکال هندســی که در شکل دیده می شود نام ببرید.

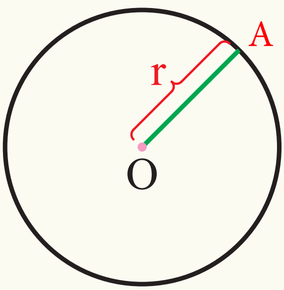
فعالیت

یک نقطه را به روی کاغذ تعیین و به اطراف این نقطه به فاصلهٔ 4cm پرکار را مکمل دور بدهید شکل تشکیل شده و نقطهٔ تعیین شده چه نام دارد؟

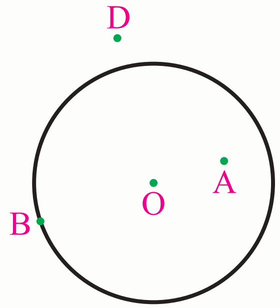


تعریف

ســت تمام نقاط یک مستوی که از یک نقطه ثابت فاصله مساوی داشته باشد دایره نامیده می‌شود. یا به عبارت دیگر دایره منحنی بســته ایست که از یک نقطهٔ ثابت فاصله مساوی داشته باشد. منحنی بسته را بـه نام محیـط دایره و نقطـه ثابـت را مرکز دایره می گویند و به شکل $C(o,r)$ نمایش داده می‌شود، در شکل مرکز دایره به حرف (O) و شعاع دایره به حرف r نشان داده شده است.



فعالیت



- در شکل مقابل موقعیت نقاط B, A و D را نظر به دایره تعیین نمایید.
- فاصلهٔ نقاط را از مرکز دایره اندازه نموده و با طول شعاع مقایسه کنید.
- سه نقطهٔ دلخواه یکی در داخل دایره، دوم روی دایره و سومی را بیرون دایره در نظر بگیرید. آیا رابطه دریافت شده برای این نقاط نیز درست است؟

از انجام فعالیت فوق نتایج زیر به دست می آید:

1- ست نقاطی که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره کوچکتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحهٔ داخلی دایره گفته می‌شوند.

2- ست نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره مساوی به شعاع دایره باشد نقاط محیط دایره گفته می‌شوند.

3- ست نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره بزرگتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحهٔ خارجی دایره گفته می‌شوند.

4- قسمتی از مستوی که توسط محیط دایره و سطح داخلی آن جدا می شود سطح دایره نامیده می‌شود.

تمرین

1- یک دایره به شعاع 2cm رسم کنید. کدام یک از نقاط زیر در داخل دایره، خارج دایره و یا هم روی محیط دایره قرار دارند:

- فاصلهٔ نقطه A از مرکز دایره 1.4cm است.
- فاصلهٔ نقطه B از مرکز دایره 2.3cm است.
- فاصلهٔ نقطه C از مرکز دایره صفر است.
- فاصلهٔ نقطه D از مرکز دایره $\frac{4}{2}$ cm است.

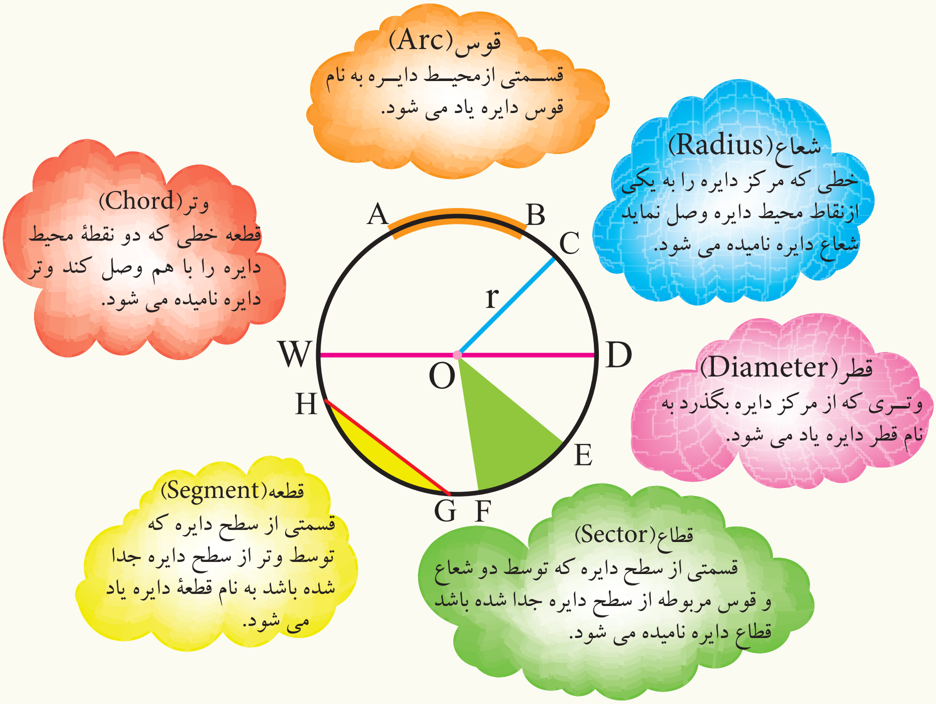
2- توضیح دهید چه وقت یک نقطه روی محیط دایره قرار می گیرد؟

عناصر دایره
Elements of a Circle

به شـکل مقابل توجـه نمایید، کیک کدام شـکل هندسـی دارد؟ قسمت قطع شـدۀ آن کدام عنصـر دایره را نشان می دهد؟

تعریف

ابتدا شـکل دایـره و تعریفات مربوط عناصـر آن را در کتابچه های تـان انتقال و بعد تعریفات مربوطۀ هر عنصر دایره را با شکل مربوطۀ آن وصل کنید.



فعالیت

- دایره‌یی را به شعاع 4 سانتی متر رسم بعد دایرهٔ مذکور را از کاغذ قیچی کنید.
- این دایره را طوری قات کنید که دو نیم دایره بالای هم قرار گیرند.
- کاغذ را باز نموده خط قات شده یی را که روی کاغذ می‌بینید چه نام دارد؟
- این بار دو نیم دایره را دوباره قات نموده آن را بازکنید. طوری که چهار قسمت مساوی تشکیل شود. چند قطعه خط را می‌بینید؟ هر کدام چه نام دارد؟
- چهار زاویهٔ تشکیل شده را اندازه نموده، بگویید که با هم دیگر چه رابطه دارند؟
- رابطه قطر با شعاع دایره چیست؟
- دایره را طوری قات کنید که دو قسمت نامساوی تشکیل شود. آن را باز کنید خط تشکیل شده چه نام دارد؟ اندازهٔ آن را با قطر دایره مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید:

- همان طوری که دیدیم هرگاه در هر دایره دو نقطهٔ محیط دایره را به هم وصل کنیم یک وتر تشکیل می شود.
- در هر دایره بزرگترین وتر، قطر دایره است که دو چند شعاع می‌باشد.
- در یک دایره هر قطر وتر است ولی هر وتر قطر نیست.
- قوسی که از نصف محیط دایره کوچکتر باشد به نام قوس کوچک (minor Arc) یاد می گردد.
- قوسی که از نصف محیط دایره بزرگتر باشد، به نام قوس بزرگ (majorArc) یاد می گردد.

تمرین

دایره $C(O,4)$ را رسم نمایید.

a) شعاع، قطر، قطعه و قطاع را در شکل نشان دهید.
b) طول قطر دایره را تعیین نمایید.
c) محیط آنرا به چهار حصهٔ مساوی تقسیم نموده، از آن چه نتیجه می گیرید.
d) ساحهٔ خارجی، داخلی و محیط دایره را به رنگ های مختلف نشان دهید.

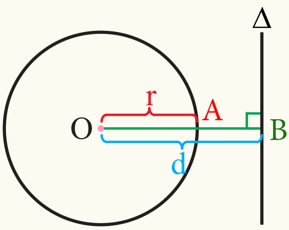
حالات یک خط مستقیم با دایره

به شــکل مقابل توجه نموده وبگویید که قلم ها و بکس هندسی با دایره در کــدام حالات قرار دارنــد هر یک را توضیح دهید.

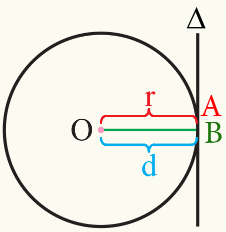
فعالیت

- یک دایره ویک خط مســتقیم را طوری رســم نمایید که خط مستقیم با دایره یک نقطه، دو نقطه و هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشد.
- از مرکز دایره به هر یکی از این خطوط عمودها رســم نموده فاصلهٔ مرکز دایره الی خط را اندازه نمایید و هر حالت را با شعاع دایره مقایسه نمایید.

از انجام فعالیت بالا دیده می‌شــود که یک خط مستقیم و دایره نسبت به هم دیگر سه حالت زیر را دارد:

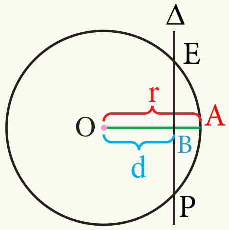


1- اگر مستقیم Δ با دایره هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشد خط مستقیم خارج دایره قرار دارد. در اینصورت فاصله خط مستقیم از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است، یعنی: $d > r$

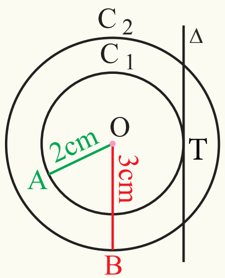


2- اگر مســتقیم Δ با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشــد خط مســتقیم را به دایره مماس گویند. در این حالت فاصله خط مســتقیم از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است، یعنی: $d = r$

3- اگر مســـتقیم Δ با دایره دو نقطه مشـــترک داشته باشد مستقیم را قاطع گویند. در این حالت فاصله خط مستقیم از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره بوده، یعنی: $d < r$



مثال: نقطهٔ O را در نظر گرفته دو دایرهٔ متحدالمرکز با مرکز O با شعاع 2 و 3 سانتی متر را رسم نمایید. فاصلهٔ مستقیم Δ از مرکز دایره به شعاع هر دو دایره C_1 و C_2 چه رابطه دارد؟



حل: در شکل دیده می‌شود که:

فاصلهٔ خط مستقیم (Δ) از مرکز دایره C_1 برابر با شعاع آن دایره است یعنی $d=r$.

فاصلهٔ خط مستقیم (Δ) از مرکز دایره C_2 کوچکتر از شعاع دایره است یعنی $d<r$

تمرین

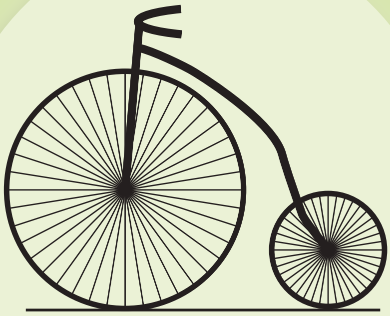
دایرهٔ به شـــعاع 3cm رســـم نموده در این دایره خطوطی به فاصله های داده شدهٔ زیر رسم و حالت های آنرا بیان نمایید.

الف: فاصلهٔ خط از مرکز دایره 2.5cm باشد.

ب: فاصلهٔ خط از مرکز دایره 4cm باشد.

ج: فاصلهٔ خط از مرکز دایره برابر با شعاع دایره باشد.

موقعیت دو دایره نسبت با یکدیگر



به شکل مقابل توجه نموده بگویید که:

1- عرابه بایسکل کدام شکل هندسی را دارد.

2- عرابه ها به چند حالت با یکدیگر قرار گرفته می توانند توضیح دهید.

فعالیت

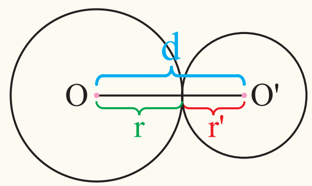
- دو دایره را طوری رسم نمایید که:

1: با هم یک نقطهٔ مشترک داشته باشند. **2**: با هم دو نقطهٔ مشترک داشته باشند.

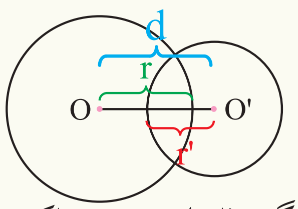
3: با هم هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند.

- فاصله مراکز دایره ها را در هر یک از حالات فوق با شعاع آنها مقایسه کنید.

از انجام فعالیت فوق به نتایج زیر میرسیم که:

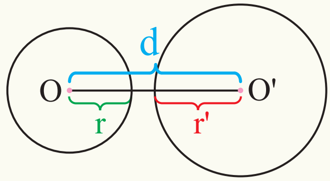


اگر فاصله بین مراکز دو دایره (d) مساوی به مجموع طول شعاع ها باشد در این صورت دو دایره را خارجاً مماس گویند، یعنی: $d = r + r'$



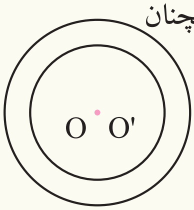
اگر فاصله بین مراکز دو دایره (d) کوچکتر از مجموع طول شعاع ها و بزرگتر از حاصل تفریق قیمت مطلقه شعاع های دوایر باشد دو دایره با هم متقاطع اند.

$$|r - r'| < d < r + r'$$



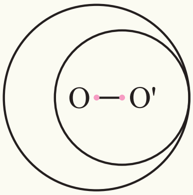
اگر فاصله بین مراکز دو دایره بزرگتر از مجموع طول شعاع‌های دوایر باشد، در این صورت دوایر را غیر متقاطع گویند، یعنی: $d > r + r'$

و همچنان



اگر فاصله بین مراکز دو دایره صفر باشد به نام دوایر متحد المرکز یاد می شوند، یعنی:

$d = 0$

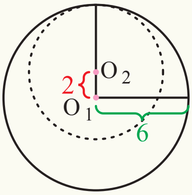


اگر فاصله بین مراکز دو دایره مساوی به حاصل تفریق قیمت مطلقه شعاع‌های دو دایره باشد دوایر را داخلاً مماس گویند، یعنی: $d = |r - r'|$

مثال: دو دایره را طوری رسم نمایید که شعاع دایره اولی 6unit، فاصله مرکز دایره دوم از مرکز دایره اول 2unit و شعاع دایره دوم $\frac{2}{3}$ شعاع دایره اول باشد. در این حالت دو دایره نسبت به هم کدام حالت دارند؟

حل: اگر شعاع دایره اول را r_1 و شعاع دایره دوم را r_2 بنامیم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= 6unit \\ r_2 &= \frac{2}{3} r_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} r_2 &= \frac{2}{3} \cdot 6unit \\ r_2 &= 4unit \end{aligned}$$



چون: $d = |r_1 - r_2| = |6 - 4| = |2| = 2$

بنابراین دوایر با هم داخلاً مماس اند.

تمرین

دو دایره به شعاع‌های 6cm و 4cm را در نظر گرفته طور زیر آن‌ها را رسم نمایید.

الف: دوایر خارجاً مماس باشند.　　ب: دوایر داخلاً مماس باشند.

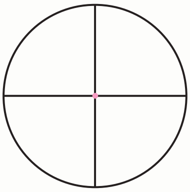
ج: دوایر متقاطع باشند.　　د: دوایر غیر متقاطع باشند.

هـ: دوایر متحد المرکز باشند.　　و: حالات فوق را به زبان بیان نمایید.

زوایایی مربوط به دایره
Angles of a Circle

به تصویر مقابل توجه نمایید:
اشـــکال هندســـی که در آن مشاهده میگردد نام ببرید.

فعالیت

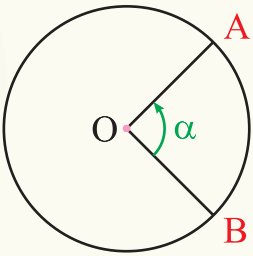


- در شکل ورودی چند زاویه دیده می‌شود؟
- خصوصیات مشترک این زوایا چیست؟ بیان دارید.
- یک دایرۀ کیفی رسم کنید.
- دو قطریکه بالای یکدیگر عمود باشند در این دایره رسم نمایید.
- چند زاویۀ مرکزی تشکیل می گردد؟ اندازۀ قوس مقابل هر زاویه چند درجه است؟
- محیط این دایره چند درجه است؟

از نتیجۀ فعالیت فوق می توانیم بنویسیم:
طول یک قوس به وسعت زاویۀ مرکزی آن ارتباط دارد یعنی:

$$\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}}$$

تعریف



زاویـــۀ که رأس آن در مرکز دایره و اضلاع آن از دو شـــعاع دایره تشـــکیل شده باشـــد به نام زاویۀ مرکزی یاد می گردد، مانند زاویۀ AOB یا زاویه α.

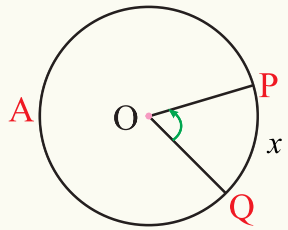
اضـــلاع هر زاویهٔ مرکزی از محیـــط دایره یک قوس را جدا مـــی نماید که این قوس مساوی به زاویهٔ مرکزی می‌باشد مانند قوس $\overset{\frown}{AB}$ که مساوی به زاویهٔ α است.
بناءً می گوییم که: اندازهٔ قوس مقابل زاویهٔ مرکزی در دایره بر حســـب درجه مســـاوی به زاویهٔ مرکزی است.

یعنی: $$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = \hat{\alpha}$$

مثـال: در دایره $C(O,r)$ قوس بـــزرگ(major Arc) پنج چند قوس کوچک(minor Arc) است. اندازه قوس کوچک، اندازه قوس بزرگ و زاویه مرکزی مقابل آنها را دریابید.

حل: اگر قوس کوچک $\overset{\frown}{PQ}_{\min or} = x$ باشد پس قوس بزرگ آن $P\overset{\frown}{A}Q_{major} = 360^\circ - x$ است. لذا می توانیم بنویسیم که:

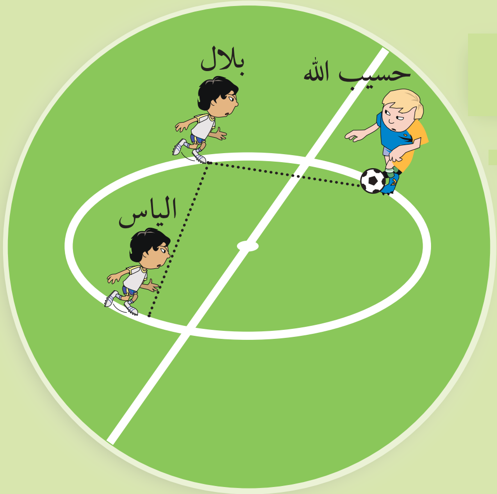
$$\overset{\frown}{PQ} + P\overset{\frown}{A}Q = 360^\circ$$
$$P\overset{\frown}{A}Q_{maj} = 5\overset{\frown}{PQ}_{\min}$$
$$x + 5x = 360^\circ$$
$$6x = 360^\circ$$
$$x = 60^\circ \quad \Rightarrow P\hat{O}Q = x = 60^\circ$$
$$P\overset{\frown}{A}Q = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$$



تمرین

ســه نقطهٔ A, B و C بـــالای محیط دایره $C(O,r)$ طوری قـــرار دارند اگر $A\hat{O}B = 75^\circ$ و $B\hat{O}C = 136^\circ$ دو زاویه دو طرفه خط OB باشد اندازهٔ قوس $\overset{\frown}{AC}$ را دریافت نمایید.

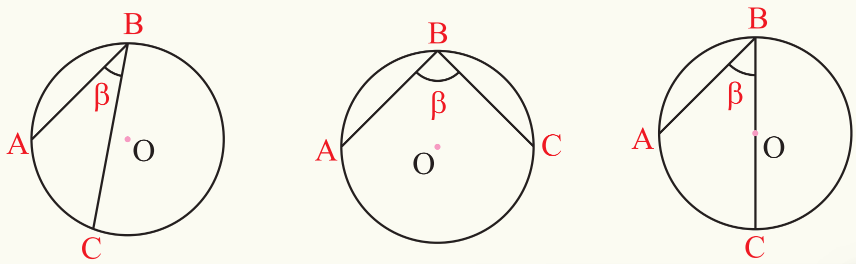
زاویهٔ محیطی دایره
Inscribed Angel of Circle



در شکل مقابل در دایرهٔ مرکزی میدان فوتبال، حسیب الله به بلال و بلال به الیاس توپ را پاس میدهد. شکلی که از مسیر پاس دادن توپ تشکیل میگردد نام بگیرید.

تعریف

زاویهٔ که رأس آن بالای محیط دایره واقع باشد و اضلاع آن از دو وتر دایره تشکیل شده باشد زاویهٔ محیطی نامیده می شود؛ مانند: زاویهٔ ABC یا زاویهٔ β اشکال زیر:

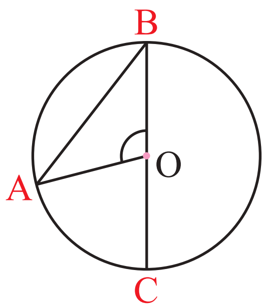


فعالیت

- در دایره $C(O,r)$ زاویهٔ محیطی $\hat{ABC}$ را طوری رسم کنید که ضلع $\overline{BC}$ آن بالای قطر دایره واقع باشد.
- نقطهٔ A را به مرکز دایره O وصل نمایید. چه نوع مثلث تشکیل می‌شود؟
- زوایای A و B در مثلث OAB با هم چه ارتباط دارند؟
- زاویهٔ AOC و زوایای A و B چه نوع زوایای اند، نام ببرید؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را می توانیم این طور بیان نماییم:

وسعت هر زاویهٔ محیطی مساوی به نصف قوس مقابل آن می باشد.



$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

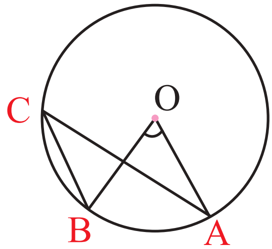
وسعت زاویهٔ محیطی ABC برابر به $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ است.

مثال: در دایرهٔ $C(O,r)$ اگر زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = 60^\circ$ باشد طول قوس AB و اندازهٔ زاویهٔ محیطی $A\hat{C}B$ را دریابید.

حل: در یک دایره از رابطه بین زاویهٔ مرکزی و قوس مقابل آن نوشته کرده می توانیم که:

$$\left.\begin{aligned} A\hat{O}B &= 60^\circ \\ A\hat{O}B &= \overset{\frown}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} A\hat{C}B &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\hat{C}B = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

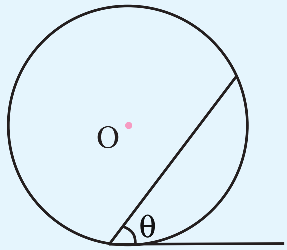


تمرین

1- در یک دایره زاویهٔ محیطی را رسم کنید که اندازهٔ آن 90° باشد؟

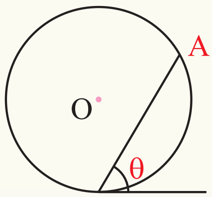
2- دو نقطهٔ A و B را روی محیط دایره در نظر بگیرید. چند زاویهٔ محیطی مساوی مقابل به قوس AB وجود دارد؟

زاویهٔ‌مماسی دایره



به شکل مقابل نگاه کنید خطوط مستقیمی که زاویهٔ θ را تشکیل نموده نام بگیرید و بگویید که رأس زاویه در کدام قسمت دایره واقع است؟

تعریف



زاویهٔ که یک ضلع آن با دایره مماس، ضلع دیگر آن وتر دایره بوده و رأس آن در نقطه تماس بالای محیط دایره قرار داشته باشد زاویهٔ مماسی گفته می شود، مانند زاویهٔ θ در شکل مقابل.

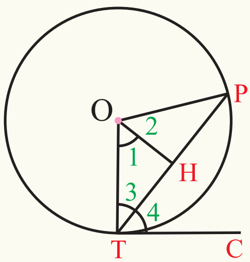
فعالیت

- دایره $C(o,r)$ را ترسیم نمایید.
- به دایره متذکره یک زاویهٔ مماسی رسم نمایید.
- انجام های وتر دایره را به مرکز دایره وصل نموده و بگویید چه نوع مثلث تشکیل می گردد؟
- از مرکز دایره بالای وتر یک عمود رسم نمایید.
- اندازهٔ زاویهٔ مرکزی و زاویهٔ مماسی را باهم مقایسه کنید.

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می نماییم.

در یک دایره وسعت هر زاویه مماسی مساوی به نصف قوس مقابل آن است.

$$P\hat{T}C = \frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$$



مثال 1: در شکل زیر اگر در دایرهٔ $C(O,r)$ زاویهٔ مرکزی 45° باشد وسعت زوایای محیطی و مماسی را دریابید.

حل: با استفاده از رابطه بین زاویهٔ مرکزی و قوس مقابل آن می‌توانیم بنویسیم که:

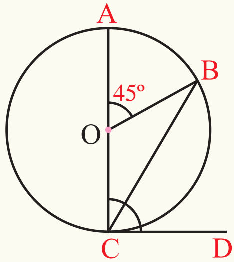
$$A\hat{O}B = 45^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 45^\circ$$

$$B\hat{O}C = 180^\circ - 45^\circ$$

$$B\hat{O}C = 135^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 135^\circ$$

$$B\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$



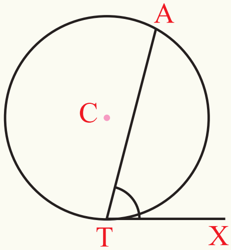
مثال 2: در شکل زیر اندازهٔ قوس AT، $(2\alpha - 6)^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ مماسی ATX را دریابید.

حل: با استفاده از رابطهٔ وسعت زاویهٔ مماسی با قوس مقابل می‌توانیم بنویسیم که:

$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$$

$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}(2\alpha - 6)^\circ$$

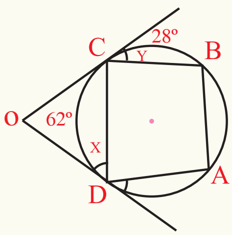
$$= (\alpha - 3)^\circ$$

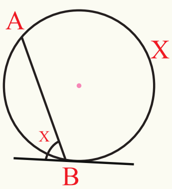


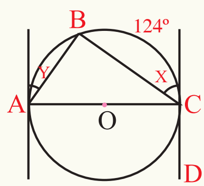
زاویه های مماسی و محیطی که به مقابل عین قوس واقع باشند باهم مساوی اند.
زاویهٔ مماسی نصف قوس مقابل آن است.

تمرین

اندازهٔ زاویه‌های مماسی را در شکل‌های زیر به دست آرید.







خلاصهٔ فصل اول

- **دایره:** ست تمام نقاط یک مستوی که از یک نقطهٔ ثابت فاصلهٔ مساوی داشته باشند دایره نامیده می‌شود.
- ست تمام نقاطی که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره کوچکتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحه داخلی دایره گفته می‌شوند.
- ست تمام نقاطی که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره مساوی به شعاع دایره باشد نقاط محیط دایره گفته می‌شوند.
- ست تمام نقاطی که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره بزرگتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحه خارجی دایره گفته می‌شوند.
- قسمتی از مستوی که توسط محیط دایره احاطه شده باشد سطح دایره نامیده می شود.
- **شعاع دایره:** خطی که مرکز دایره را به یکی از نقاط محیط دایره وصل نماید شعاع دایره نامیده می‌شود.
- **وتر دایره:** قطعه خطی که دو نقطهٔ محیط دایره را با هم وصل نماید وتر دایره نامیده می‌شود.
- **قطر دایره:** وتری که از مرکز دایره بگذرد قطر دایره نامیده می‌شود.
- **قوس دایره:** یک قسمت از محیط دایره که توسط دو نقطه مشخص شده باشد به نام قوس دایره یاد می‌شود.
- **مماس دایره:** خط مستقیمی که با دایره تنها یک نقطهٔ مشترک داشته به نام مماس دایره یاد می‌شود.
- **قطعه دایره:** قسمتی از سطح دایره که توسط وتر از سطح دایره جدا شده باشد قطعهٔ دایره یاد می‌شود.
- **قطاع دایره:** قسمتی از دایره که توسط دو شعاع و قوس مربوط از سطح دایره جدا شده باشد قطاع دایره نامیده می‌شود.
- اگر یک خط مستقیم با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد مماس و اگر دو نقطهٔ مشترک داشته باشد قاطع گفته می‌شود.
- **زاویهٔ مرکزی:** زاویهٔ که رأس آن در مرکز دایره و اضلاع آن از شعاع دایره تشکیل شده باشد زاویهٔ مرکزی گفته می شود.
- اندازهٔ وسعت هر زاویه مرکزی مساوی به قوس مقابل آن است.

- طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ از رابطهٔ $\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}}$ به دســت می آید.
- **زاویــهٔ محیطی:** زاویهٔ که رأس آن در محیــط دایره واقع بوده و اضلاع آن از دو وتر دایره تشکیل شده باشد، زاویهٔ محیطی نامیده می شود.
- در یک دایره زوایای مرکزی که مقابل وترهای مســاوی واقع باشــند باهم مســاوی اند.
- وســعت هر زاویه محیطی مســاوی به نصف قوس مقابل که توســط آن قطع شــده می‌باشد.
- هر زاویه محیطی نصف زاویهٔ مرکزی است که به مقابل عین قوس واقع باشد.
- **زاویهٔ مماســی:** زاویهٔ که یک ضلع آن با دایره مماس و ضلع دیگر آن وتر دایره بوده و رأس آن در نقطه تماس قرار داشته باشد زاویهٔ مماسی گفته می شود.
- وسعت هر زاویه مماسی مساوی به نصف قوس مقابل آن است.
- وسعت زوایایی مماسی و محیطی که مقابل عین قوس واقع باشد با هم مساوی‌اند.
- هر زاویهٔ مماسی نصف زاویهٔ مرکزی بوده که به مقابل عین قوس واقع باشند.
- **موقعیت دو دایره با همدیگر:**

ـ اگر فاصلهٔ بین مراکز دو دایره بزرگتر از مجموع طول شــعاع‌های دوایر باشد دوایر را غیرمتقاطع می گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دو دایره برابر به مجموع طول شــعاع‌های دوایر باشــد دوایر را خارجاً مماس می گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دو دایره کوچکتر از مجموعهٔ طول شعاع‌های دوایر و بزرگتر از قیمت مطلقه حاصل تفریق شعاع‌های دوایر باشد دوایر را متقاطع می گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دوایر مســاوی به قیمت مطلقه حاصل تفریق شــعاع های دوایر باشد دوایر را با هم داخلاً مماس می گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دو دایره صفر باشد دوایر را متحدالمرکز می گویند.

تمرینات فصل اول

- در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- طول قطر دایره مساوی است به:

a) $3r$ b) π c) 2π d) $2r$

2- دایره به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

a) 0   b) $(1,2)$ c) (b,a) d) $C(o,r)$

3- خط مستقیم که با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد به نام:

a) وتر یاد می شود.   b) مماس یاد می شود.

c) قاطع یاد می شود   d) محیط یاد می شود.

4- اگر یک خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع کند آنرا:

a) مستقیم و دایره گویند.   b) مماس گویند.

c) قاطع گویند.   d) موازی گویند.

5- یک خط مستقیم با دایره در یک مستوی چند حالت دارد؟

a) 3   b) 7   c) 4   d) 1

6- زاویهٔ که رأس آن بالای محیط و اضلاع آن وترهای دایره باشند:

a) زاویه مرکزی است.   b) زاویه مماس است.

c) زاویه محیطی است.

- جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- قسمتی از سطح دایره که توسط وتر از دایره جدا می شود.................................. .....دایره نامیده می شود.

2- بزرگترین وتر دایره .... است.

3- ست نقاطی که .... آنها از مرکز دایره کوچکتر از شعاع دایره باشد ساحهٔ .... دایره گفته می شود.

4- وقتی که خط مستقیم با دایره هیچ .... مشترک نداشته باشد .... دایره گفته می شود.

5- در هر مثلث قایم الزاویه .... وتر مساوی به مجموعهٔ مربعات اضلاع .... است.

6- در هر دایره وتریکه به مرکز نزدیکتر است .... می باشد.

• کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام‌ها غلط‌اند در مقابل صحیح حرف(ص) و در مقابل غلط حرف(غ) بگذارید.

1- (   ) ست تمام نقاط یک مستوی که از یک نقطهٔ مستقر(O) به نام مرکز به اندازهٔ r فاصلهٔ مساوی داشته باشد، دایره نامیده می شود.

2- (   ) معمولاً دایره را به نام محیط آن یاد می کنند.

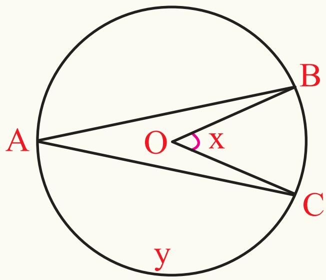
3- (   )قطعه خطی که دو نقطهٔ محیط دایره را وصل می کند قطر نامیده می شود.

4- (   ) شعاع دایره نصف قطر است.

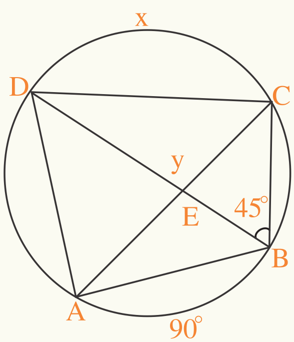
5- (   )در رابطهٔ $d=2r$, d قطر و r شعاع دایره است.

• سؤالات زیر را حل نمایید.

1- در شکل زیر اگر $\overset{\frown}{y}=155^\circ$ و $\overset{\frown}{AB}=155^\circ$ باشد $\hat{x}$ را دریابید.



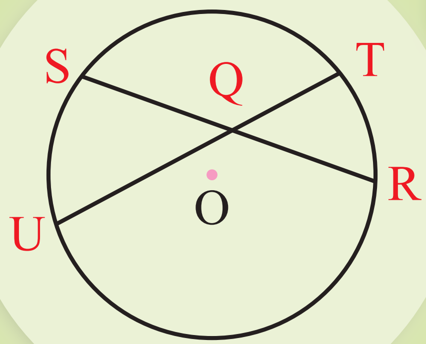
2- در شکل زیر اندازه های x و y را دریابید.



فصل دوم

روابط بین دایره و خطوط مستقیم

طاقت یک نقطه نظر به یک دایره

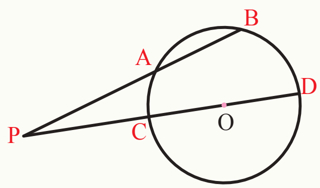


به شکل مقابل توجه کنید.

آیا در این شکل تساوی زیر حقیقت دارد؟

$$\overline{QR}.\overline{QS}=\overline{QU}.\overline{QT}$$

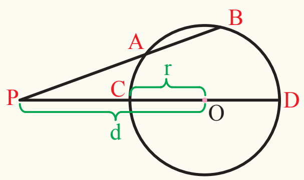
فعالیت



- از نقطهٔ مستقر P که در خارج دایره $C(O,r)$ قرار دارد قاطع $\overline{PB}$ را رسم نمایید.
- از نقطهٔ P قاطع دیگری $\overline{PD}$ را طوری رسم نمایید که از مرکز دایره $C(O,r)$ بگذرد .
- نسبت بین قطعات $\overline{PB}$ و $\overline{PD}$ را بنویسید.
- در رابطهٔ بالا فاصله‌های $\overline{PC}$ و $\overline{PD}$ را بر حسب فواصل تا مرکز دایره بنویسید.
- اگر فاصلهٔ نقطهٔ P از مرکز دایره d و شعاع دایره را r بنامیم رابطهٔ بالا را بر حسب r و d بنویسید.

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

اگر از یک نقطهٔ خارج به دایره دو قاطع طوری رسم گردد که قاطع دومی از مرکز دایره بگذرد در اینصورت حاصل ضرب قطعات قاطع اولی مساوی به یک مقدار ثابت d^2-r^2 بوده که در آن، d فاصله نقطهٔ ثابت از مرکز دایره و r شعاع دایره است.



$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

تعریف

رابطهٔ اخیر به نام طاقت یک نقطهٔ P نظر به یک دایره $C(O,r)$ یاد می‌شـود و مقدار $d^2 - r^2$ ثابت می‌باشد که به شکل $P_{(o)} = d^2 - r^2$ نیز آنرا نمایش می‌دهند.

مثال: اگر قطر یک دایره 10cm باشد، یک نقطهٔ P به فاصله 13cm از مرکز دایره قرار دارد طاقت نقطهٔ P را نظر به دایرهٔ $C(O,r)$ دریابید.

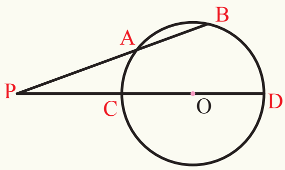
حل: چون قطر دایره داده شده بناءً ابتدا شعاع دایره را دریافت نموده بعداً طاقت نقطهٔ P را نظر به دایره دریافت می نماییم:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5\,\text{cm}$$

$$P_{(O)} = d^2 - r^2$$

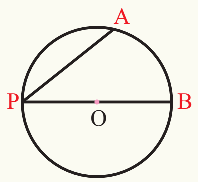
$$P_{(O)} = (13)^2 - (5)^2$$

$$P_{(O)} = 169 - 25 \Rightarrow P_{(O)} = 144$$



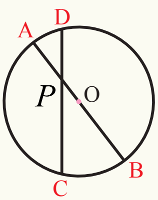
• اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مثبت باشـد نقطه خارج دایره قرار دارد. شکل مقابل، یعنی:

$$P_{(o)} = d^2 - r^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad d^2 > r^2$$



• اگـر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره صفر باشـد نقطه بالای محیط دایره واقع است، یعنی:

$$P_{(o)} = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$$

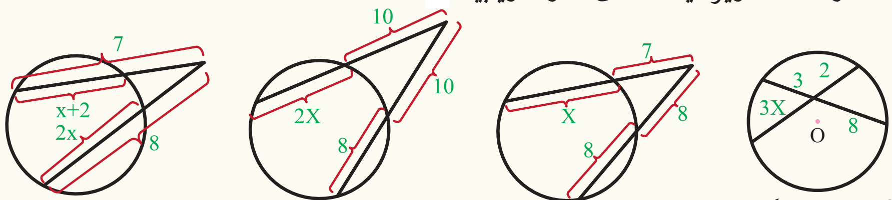


• اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره کوچکتر از صفر یا منفی باشد نقطه در داخل دایره واقع است، یعنی:

$$P_{(o)} = d^2 - r^2 < 0 \quad \Rightarrow d^2 < r^2$$

تمرین

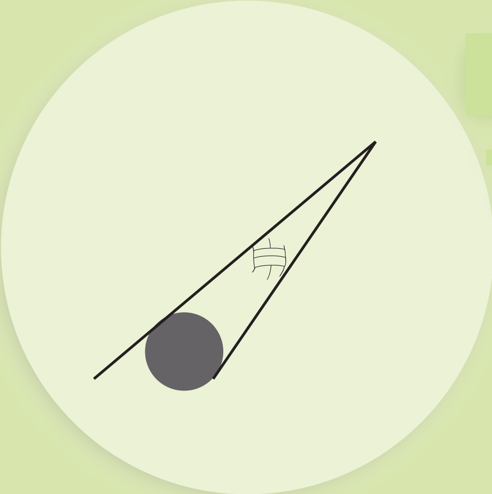
1– در اشکال زیر قیمت‌های x را دریابید.



2– طاقت یک نقطه را در حالات زیر پیدا کنید.

الف) اگر $d = 7$ و $r = 4$ باشد ب) اگر $d = 3$ و $r = 3$ باشد ج) اگر $d = 3$ و $r = 5$ باشد

خط مماس به دایره

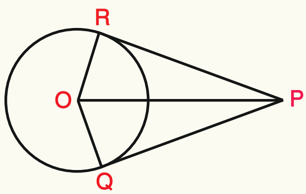


به شکل مقابل توجه کنید:
هر گاه حرکت اشعهٔ نور را به صورت مستقیم قبول نماییم این خطوط نسبت به توپ و سایهٔ آن چه رابطه دارد؟

فعالیت

- از یک نقطهٔ خارج دایرهٔ P به دایره $C(O,r)$ دو مماس $\overline{PR}$ و $\overline{PQ}$ را رسم نمایید.
- نقاط Q و R نقاط تماس خط مماس با دایره اند.آیا مماس دیگری از نقطهٔ P به دایره رسم شده می تواند؟
- نقطهٔ O را به نقاط Q، R و P وصل نمایید.
- مثلث‌های تشکیل شده با هم چه رابطه دارند؟
- آیا طول مماس های رسم شده با هم مساوی اند؟

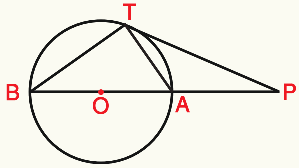
نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم.
اگر از یک نقطهٔ خارج دایره به دایره دو مماس رسم گردد طول این مماس ها باهم مساوی می باشند.



$$\overline{PR} = \overline{PQ}$$

هر گاه از یک نقطهٔ خارج دایره یک خط قاطع و یک خط مماس رسم گردد مربع مماس مساوی به طاقت نقطه نظر به دایره است.

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \qquad \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$



مثال: در شکل زیر طول PT و PT' را به دست آرید.

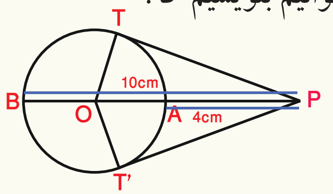
حل: می‌دانیم که رابطه بین مماس و یک قاطع عبارت از $PA.PB= PT^2$ است لذا می توانیم بنویسیم که:

$$PA = 4cm \qquad PT^2 = PA \cdot PB$$

$$PB = 10cm \qquad PT^2 = 4 \times 10 = 40$$

$$PT = ? \qquad PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ cm$$

$$PT' = ?$$



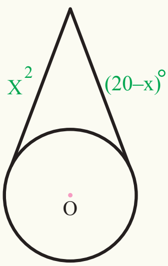
می دانیم وقتی که از یک نقطهٔ خارج دایره به دایره دو مماس رسم شود، طول این مماس ها با هم مساوی است. $PT = PT' = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ cm$

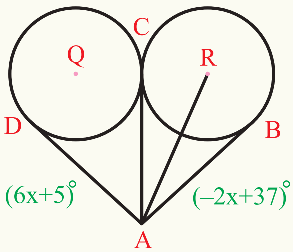
– اگر از یک نقطهٔ خارج یک دایره دو مماس به دایرهٔ مذکور رسم گردد طول این مماس ها باهم مساوی است.

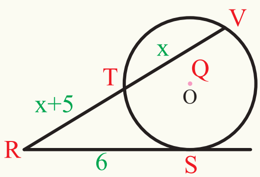
– هر گاه از یک نقطهٔ خارج یک دایره یک خط قاطع و یک خط مماس به دایرهٔ مذکور رسم گردد. مربع مماس مساوی به طاقت نقطه نظر به دایره است.

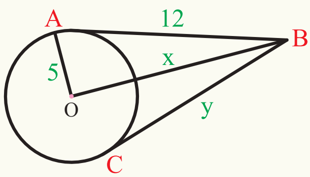
تمرین

در اشکال زیر قیمت های x را به دست آورید.



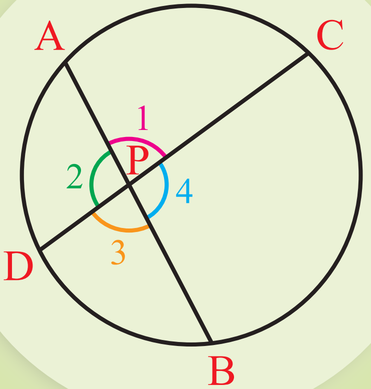






زاویهٔ داخلی دایره

دو وتر متقاطع را در داخل دایره رسم کنید و بگویید که چند زاویه تشکیل شده و چه نام دارند؟



تعریف

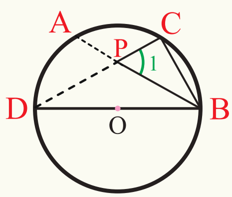
زوایای که از تقاطع دو وتر در داخل دایره تشـــکیل شــده باشــند به نام زوایای داخلی دایره یاد می‌شوند. مانند زوایای $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ شکل فوق.

فعالیت

- دایرهٔ $C(O,r)$ را رسم و در آن دو وتر AB و CD را طوری رسم نمایید که در نقطهٔ P یکدیگر را قطع نمایند. زوایای تشکیل شده چه نام دارند؟
- نقطه D و C را به B وصل نمایید در مثلث PDB زاویهٔ خارجی CPB مثلث با دو زاویه غیر مجاور چه رابطه دارد.

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم.

وســعت هر زاویهٔ داخلی دایره مساوی به نصف مجموعهٔ قوس‌هایی که توسط اضلاع زاویـــه و امتداد یافتهٔ اضلاع این زاویه قطع شده باشند می‌باشد.



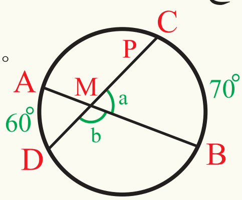
$$C\hat{P}B=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$$

مثال 1: به کمک شکل پایین وسعت زوایای $\hat{a}$ و $\hat{b}$ را دریابید.

حل: وسعت هر زاویهٔ داخلی دایره مساوی به نصف مجموعهٔ قوس‌های متقابل زاویه و امتداد یافتهٔ اضلاع این زاویه است، لذا می‌توانیم بنویسیم:

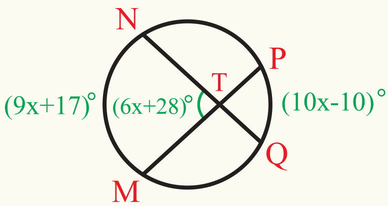
$$C\hat{M}B = \hat{a} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{60+70}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$



مثال 2: در شکل زیر قیمت x و اندازه زاویه $N\hat{T}M$ را تعیین کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ وسعت زوایای داخلی یک دایره می‌توانیم بنویسیم که:



$$\overset{\frown}{NM} = 9x+17 \quad , \quad \overset{\frown}{PQ} = 10x-10$$

$$N\hat{T}M = 6x+28 \Rightarrow N\hat{T}M = \frac{\overset{\frown}{NM} + \overset{\frown}{PQ}}{2}$$

$$6x+28 = \frac{9x+17+10x-10}{2} \Rightarrow 12x+56 = 19x+7$$

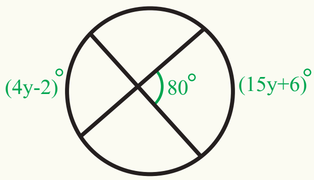
$$12x-19x = 7-56 \Rightarrow -7x = -49 \Rightarrow x = 7$$

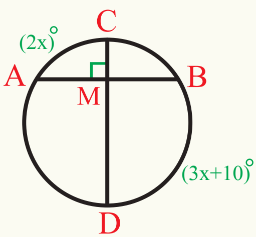
$$N\hat{T}M = 6x+28 = 6\cdot 7+28 = 42+28 = 70$$

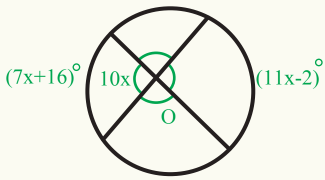
$$N\hat{T}M = 70^\circ$$

تمرین

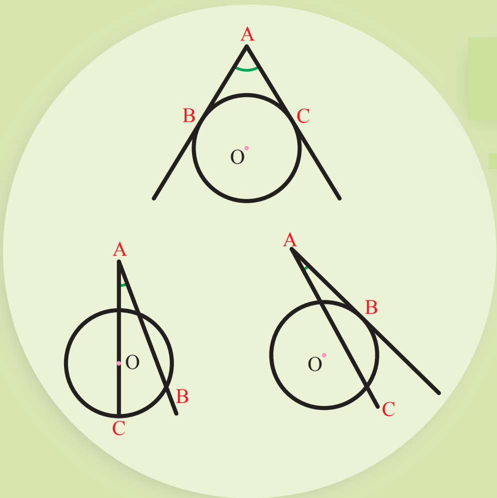
در اشکال زیر قیمت‌های x و y را محاسبه کنید.







زاویهٔ خارجی دایره



در اشــکال مقابــل قطعــه خــط ها و زوایایی مقابل را نام ببرید.

تعریف

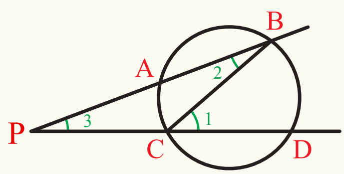
زاویه یــی که از تقاطــع دو خط قاطع، دو خط مماس و یا یــک خط قاطع و یک خط مماس در خارج دایره تشکیل گردیده باشد به نام زاویهٔ خارجی دایره یاد می شود.

فعالیت

- در دایرهٔ $C(O,r)$ دو وتر غیرموازی AB و CD را امتداد میدهیم که زاویهٔ خارجی BPD را تشکیل دهد. نقطه C را به B وصل نمایید.
- زاویــه خارجی مثلث BPC یعنی $(\hat{1})$ بــا دو زاویه غیر مجــاور مثلث چه ارتباط دارد؟

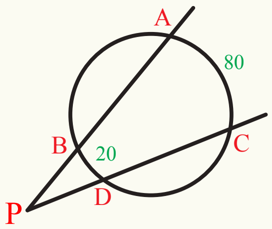
نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم.
وسعت زاویهٔ خارجی یک دایره مساوی به نصف تفاضل قوس‌هایی است که توسط وترها قطع می گردد.

$$B\hat{P}D = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$$



مثال: در شکل زیر وسعت زاویهٔ APC را دریابید.

در حالیکه $\overset{\frown}{AC} = 80^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = 20^\circ$ باشد:



حل: با استفاده از وسعت زاویهٔ خارجی دایره می‌توانیم بنویسیم:

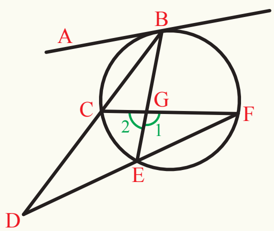
$$A\hat{P}C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD})$$

$$= \frac{1}{2}(80 - 20)^\circ = \frac{1}{2}60^\circ$$

$$A\hat{P}C = 30^\circ$$

تمرین

در شکل‌های زیر زاویه‌های نامعلوم را دریابید.

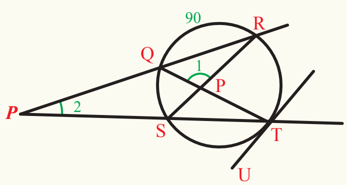


$\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$

$\overset{\frown}{BF} = 110^\circ$

$\overset{\frown}{EF} = 110^\circ$

$A\hat{B}C = ?\ ,\quad \hat{1} = ?\ ,\ \hat{2} = ?,\ \hat{D} = ?$



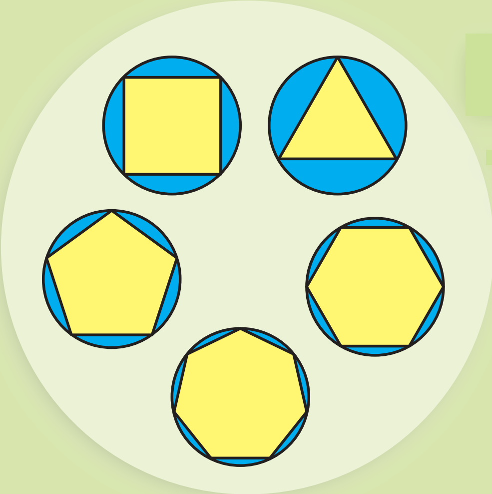
$\overset{\frown}{QR} = 120^\circ$

$\overset{\frown}{RT} = 90^\circ$

$\overset{\frown}{QS} = 50^\circ$

$S\hat{T}U = ?\ ,\quad \hat{1} = ?\ ,\ \hat{2} = ?$

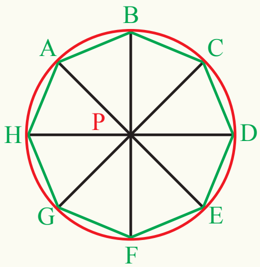
دایرهٔ محیطی



به شکل مقابل توجه کنید.
کدام اشکال هندسی دیده می‌شوند،
نام ببرید.

تعریف

دایره یی که از راس های یک مضلع بگذرد به نام دایرهٔ محیطی مضلع یاد می گردد و مضلع را مضلع مرسوم به دایره می‌نامند مانند شکل مقابل.



دایرهٔ محیطی مثلث: دایره یی که از تمام رأس‌های یک مثلث بگذرد(خارجاً به رأسهای مثلث مماس باشد) دایرهٔ محیطی مثلث نامیده می‌شود.

فعالیت

- مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم نمایید.
- ناصف های عمودی اضلاع AB ، AC و BC را ترسیم نمایید.
- ناصف های عمودی فوق در چند نقطه یکدیگر را قطع می کنند؟ نقطهٔ تقاطع آنها را O بنامید.
- طول های OB,OA و OC را با هم مقایسه کنید.
- دایره یی به مرکز O و شعاع OA رسم نمایید. آیا این دایره از نقاط B و C نیز می گذرد؟ چرا؟
- دایرهٔ ترسیم شده نسبت به مثلث چه نامیده می شود؟

نتیجهٔ فعالیت را می توان چنین بیان نمود:

نقطهٔ تقاطع ناصف های عمودی اضلاع یک مثلث مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث می باشد.

مثال: مثلث قایم الزاویهٔ ABC را طوری رسم نمایید که طول اضلاع قایم آن به ترتیب 8unit و 6unit باشد. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را به دست آورید.

حل: می دانیم که در هر مثلث قایم الزاویه، مرکز دایرهٔ محیطی آن بالای وتر مثلث قرار دارد. ابتدا طول وتر مثلث قایم الزاویه را دریافت می نماییم. که نقطه وسطی آن مرکز دایرهٔ محیطی است.

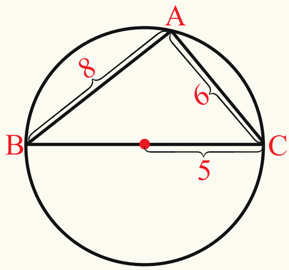
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{100}$$

$$\overline{BC} = 10\text{unit}$$

$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5\text{unit}$$



دایرهٔ که با رأس های یک مضلع مماس باشد به نام دایرهٔ محیطی یاد می گردد و مضلع را مضلع مرسوم به دایره می نامند.

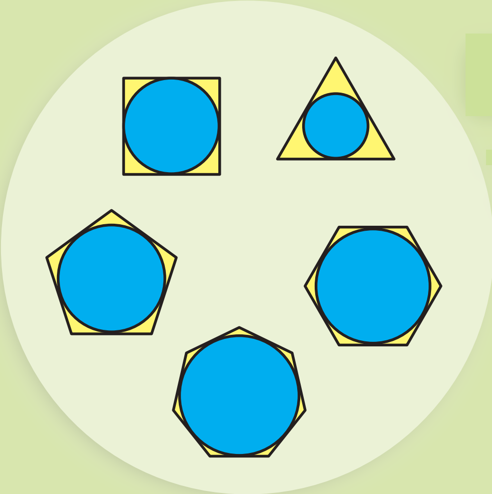
نقطهٔ تقاطع ناصف های عمودی اضلاع یک مثلث مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث می باشد.

تمرین

1- مثلثی که اضلاع آن به ترتیب 4,3 و 5 سانتی متر است، رسم نموده شعاع دایرهٔ محیطی آنرا محاسبه کنید.

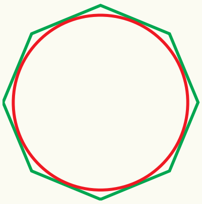
2- مرکز دایره محیطی مثلثی قایم الزاویهٔ متساوی الاضلاع و متساوی الساقین در کجا واقع است؟ در شکل نشان دهید.

دایرهٔ محاطی



- اشکال هندســی را که در شکل مقابل مشاهده می کنید نام ببرید.
- چه را بطهٔ بین شکل ها می‌بینید؟

تعریف



دایره یی که محیط آن به اضلاع مضلع مماس باشد دایره محاطی گفته می‌شود مانند شکل مقابل که دایره توسط مضلع احاطه شده است.

دایرهٔ محاطی مثلث: دایره یی که محیط آن به تمام اضلاع یک مثلث مماس باشد به نام دایرهٔ محاطی مثلث یاد می گردد.

فعالیت

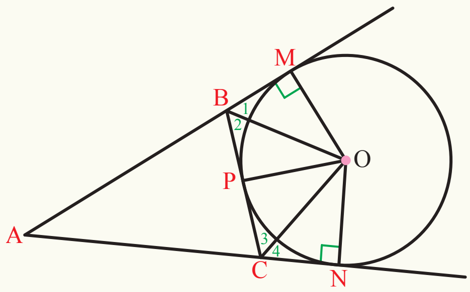
- مثلث کیفی $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم نمایید.
- ناصف الزاویه‌های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم و نقطهٔ تقاطع را به (O) نشان دهید.
- از نقطه O بالای اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ عمودهای $\overline{OM}, \overline{ON}$ و $\overline{OP}$ را رسم کنید.
- طول عمودهای $\overline{OM}, \overline{ON}$ و $\overline{OP}$ را باهم مقایسه کنید.
- آیا دایره یی که به مرکز O و شعاع $\overline{ON}$ رسم شود از نقاط M و P می گذرد؟ چرا؟
- دایره ترسیم شده چه نامیده می‌شود؟

نتیجهٔ فعالیت را میتوان چنین بیان کرد:

– نقطهٔ تقاطع ناصف الزوایای داخلی هر مثلث مرکز دایرهٔ محاطی است.

دایرهٔخارجی محاطی مثلث

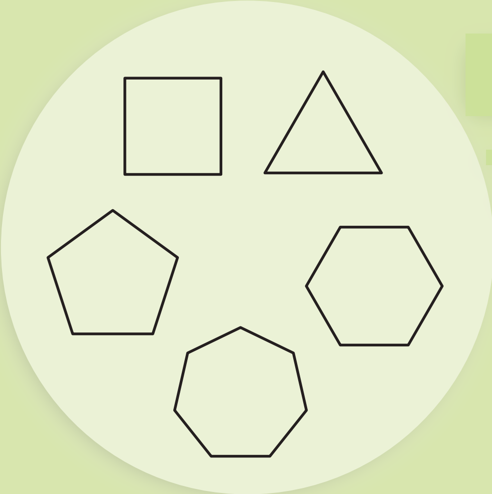
دایره‌یی که به یک ضلع مثلث و دو ضلع امتداد یافته مثلث مماس باشد دایره خارجی محاطی مثلث گفته می‌شود.



تمرین

1- در کدام نوع مثلث‌ها مرکز دایرهٔ محیطی و محاطی باهم دیگر منطبق‌اند رسم کنید؟

ترسیم مضلع منتظم



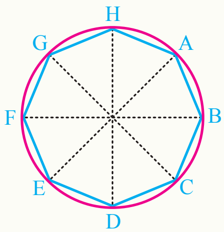
دقت کنید:

– در شکل چند نوع مضلع را می بینید؟

– به نظر شما این مضلعات را چگونه رسم کرده اند؟

فعالیت

- دایرهٔ $C(O,r)$ را رسم نموده در مرکز آن 8 زاویهٔ مرکزی مساوی را رسم کنید.
- اگر n تعداد اضلاع یک مضلع و θ زاویهٔ مرکزی مقابل اضلاع مضلع باشد آیا رابطهٔ $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ حقیقت دارد؟



- نقاط تقاطع اضلاع زوایا با محیط دایره را به هم وصل نمایید.
- آیا اضلاع مضلع تشکیل شده باهم مساوی اند. چرا؟
- مضلع تشکیل شده چه نوع مضلع است؟ هر زاویهٔ مرکزی مقابل اضلاع این مضلع چند درجه است؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید:

وسعت زاویهٔ مرکزی مقابل هر ضلع یک nضلعی منظم مساوی‌به $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ است.

فعالیت

- در دایرهٔ $C(O,r)$ یک شش ضلعی منظم محاط شده است.
- مرکز دایره را به رأس‌های شش ضلعی وصل کنید؟چند مثلث تشکیل می‌شود؟
- اندازهٔ هر یک از زوایای مرکزی مقابل اضلاع این شش ضلعی چند درجه است؟
- مثلث‌های تشکیل شده چه نوع مثلث‌هااند؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

طول ضلع هر شش ضلعی منظم مساوی به شعاع دایرهٔ محیطی آن است.

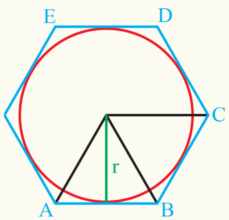
مثال: دایرهٔ که شعاع آن $2\ cm$ است چطور می‌توانیم آنرا به یک شش ضلعی منظم محاط نماییم؟

حل: می‌دانیم که اندازهٔ هر ضلع شش ضلعی منظم مساوی به شعاع دایرهٔ محیطی آن است.

پس دهانهٔ پرکار را به اندازهٔ شعاع دایره یعنی $2\ cm$ باز نموده به صورت پیوست روی محیط دایره قوس‌های مساوی جدا می‌نماییم. از وصل نمودن نقاط مشخص شده یک شش ضلعی منظم به دست می‌آید.

مساحت مضلع منظم از جنس محیط و شعاع دایره محاطی

هرگاه مساحت مضلع منظم را به A، محیط آنرا به P و شعاع دایره محاطی یک n ضلعی را به r نشان دهیم؛ پس مساحت مضلع عبارت از $A=\frac{1}{2}P\cdot r$ است. برای ثبوت به صورت زیر عمل می نماییم:



$$A=\frac{1}{2}AB\cdot r\cdot n$$

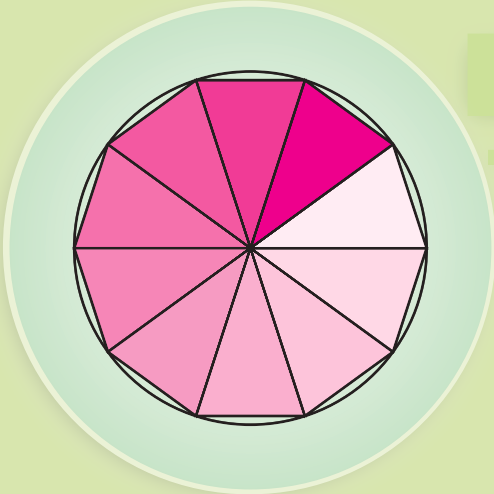
$P = AB\cdot n$ محیط مضلع

در نتیجه: $$A=\frac{1}{2}P\cdot r$$

تمرین

1- در دایرهٔ به شعاع $3cm$ یک مثلث متساوی الاضلاع رسم نمایید که محاط به دایره باشد.

محیط و مساحت دایره



در شــکل داده شــده، روابــط بین مجموع مساحت مثلث ها با مجموع مســاحت دایــره و مجمــوع طول اضلاع کوچک مثلث ها را با طول محیط دایره مقایسه کنید؟

در دایره $C(O,r)$ اگر قطر به حرف d و محیط دایره به حرف C نمایش داده شود بین این دو عنصر دایره ارتباط زیر موجود است.

$$\frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}} = \frac{C}{d} = \pi = \text{Constant}$$

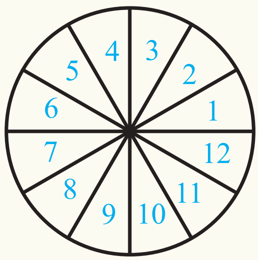
$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = \pi d \quad ... \quad (I) \qquad [\pi \approx 3.14159 \ ...]$$

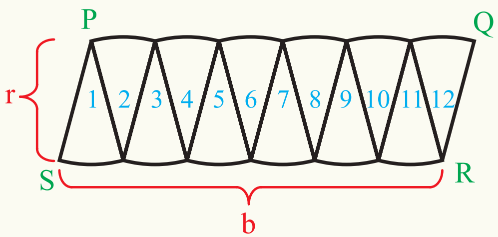
می‌دانیم که $r = \frac{d}{2}$ یا $d = 2r$ است، اگر این قیمت را در رابطه(I) وضع نماییم محیط دایره از رابطه زیر به دست می آید:

$C = \pi d$

$C = 2\pi r$

برای محاســبهٔ مســاحت دایره به ریاضیات عالی ضرورت داریم. بدین منظور در اینجا از روش مشــاهده برای محاســبهٔ مساحت دایره اســتفاده می کنیم. برای این کار دایرهٔ را توســط اقطار به 12 حصهٔ مســاوی تقســیم می‌نماییم و هر قســمت را از 1 الی 12 شماره زده، قطع می‌نماییم آن‌ها را پهلو به پهلو مطابق شکل زیر ترتیب می نماییم، به وضاحت دیده می‌شود که یک شکل مشابه متوازی الاضلاع را به وجود می آورد.





می دانیم که قاعده b نصف محیط دایره است. چرا؟ یعنی: $\frac{1}{2}C =$ محیط دایره $\times \frac{1}{2} =$ قاعده
می دانیم که مساحت متوازی الاضلاع از رابطه زیر به دست می آید.

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = b \cdot r = \frac{1}{2} C \cdot r$$

چون ($C = 2\pi r =$ محیط دایره) می باشد، پس داریم که:

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

از طرف دیگر میدانیم که مساحت متوازی الاضلاع و دایره تقریباً باهم مساوی اند بنابراین میتوانیم بنویسیم که: $\text{مساحت دایره}\,(A) = \pi r^2$

در نتیجه گفته می توانیم که مساحت دایره را از رابطهٔ $A = \pi r^2$ و محیط آن از رابطهٔ $C = 2\pi r$ به دست می آید.

مثال 1: شعاع یک دایره 14 cm است مساحت دایره را محاسبه نمایید.

حل: می دانیم که مساحت دایره $A = \pi r^2$ می باشد بناءً داریم که:

$$A = \pi r^2$$

$$A = (3.14159) \cdot (14cm)^2$$

$$A = (3.14159) \cdot 196cm^2 \quad \Rightarrow \quad A = 615.75cm^2$$

مثال 2: قطر یک دایره 70 cm است شعاع و مساحت دایره را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از رابطهٔ مساحت دایره داریم که:

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \quad \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \quad \Rightarrow A = 3848.4\,cm^2$$

مثال 3: اگر محیط یک دایره $14\pi\,cm$ باشد شعاع و مساحت دایره را دریابید.

حل: چون محیط دایره داده شده، جهت یافتن مساحت دایره اول باید شعاع دایره را محاسبه نماییم.

$$C = 14\pi cm$$

$$2\pi r = 14\pi \quad \Rightarrow 2r = 14 \quad \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159) \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow A \cong 153.93\,cm^2$$

- مساحت یک دایره به شعاع r را می توانیم از رابطهٔ $A = \pi r^2$ به دست آوریم.
- محیط یک دایره به شعاع r را می توانیم از رابطهٔ $C = 2\pi r$ به دست آوریم.

تمرین

1- اگر محیط دایره 41 cm باشد شعاع دایره را به دست آرید.
2- محیط دایرهٔ را به دست آرید که شعاع آن یک واحد طول باشد.
3- مساحت دایره را به دست آرید که شعاع آن یک واحد طول باشد.

خلاصهٔ فصل دوم

- اگر از یک نقطهٔ خارجی بالای یک دایره دو مماس رسم گردد طول این مماس ها باهم مساوی است.
- اگر $d^2 - r^2 > 0$ باشد نقطه خارج دایره، اگر $d^2 - r^2 = 0$ باشد نقطه بالای محیط دایره و اگر $d^2 - r^2 < 0$ باشد نقطه داخل دایره واقع است.

زاویهٔ داخلی دایره:

- هر زاویه یی که از تقاطع دو قاطع در داخل دایره تشکیل شده باشد زاویهٔ داخلی دایره نامیده می‌شود.
- وسعت هر زاویه دا÷خلی دایره مساوی به نصف حاصل جمع قوس های مقابل این زاویه و امتداد یافتهٔ اضلاع این زاویه است، اگر α یک زاویهٔ داخلی دایره باشد؛ پس: $\hat{\alpha} = \dfrac{\widehat{a} + \widehat{b}}{2}$

زاویهٔ خارجی دایره:

- زاویهٔ که از اثر تقاطع دو مماس، دو قاطع و یک مماس و یک قاطع در خارج دایره تشکیل شده باشد زاویهٔ خارجی دایره نامیده می‌شود.
- وسعت هر زاویه خارجی مساوی به نصف تفاضل قوس‌های مقابل آن است، اگر α یک زاویهٔ خارجی دایره باشد؛ پس: $\hat{\alpha} = \dfrac{\widehat{a} - \widehat{b}}{2}$

مضلع:

- شـکلی که از تقاطع چند قطعه خط تشکیل شده باشد و هیچ دو قطعه خط به امتداد یک خط مستقیم نباشد و هر رأس آن فقط و فقط نقطهٔ تقاطع دو قطعه خط باشد مضلع نامیده می‌شود.

- مضلع که اضلاع و زوایای آن با هم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می شود.

دایره محیطی مضلع: دایره‌یی که به رأس های مضلع مماس باشد دایره محیطی نامیده می‌شود.

دایره محاطی مضلع: دایره‌یی که به اضلاع مضلع مماس باشد دایره محاطی مضلع گفته می شود.

دایره خارجی محاطی مثلث: دایره‌یی که به یک ضلع مثلث و دو ضلع امتداد یافته مثلث مماس باشد دایره یی خارجی محاطی مثلث نامیده می شود.

- مجموعهٔ زوایای مقابل یک چهار ضلعی مرسوم به دایره $180°$ است.
- محیط دایره از رابطه $C = 2\pi r$ به دست می آید.
- مساحت دایره از رابطه $A = \pi r^2$ به دست می آید.

تمرینات فصل دوم

• در سؤالهای زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح حلقه کنید.

1- اگر یک نقطهٔ p به روی محیط دایره واقع باشد طاقت نقطهٔ مذکور نظر به دایره عبارت است از:

a) 1 　　b) 2

c) 0 　　d) هر سه جواب درست است.

2- اگر نقطهٔ P خارج یک دایره واقع شود طاقت نقطه مذکور نظر به دایره در صورتی که شعاع دایره r و فاصله نقطهٔ مذکور از مرکز دایره d باشد عبارت است از:

a) $d-r>0$ 　　b) $d^2-r^2>0$

c) $d-r<0$ 　　d) $r^2-d^2>0$

3- یک نقطه به اندازهٔ 13cm از مرکز دایره C(O,r) فاصله دارد اگر قطر دایره 10 cm باشد طول قسمت خارجی قاطع از نقطهٔ مذکور عبارت است از:

a) 13 cm 　　b) 10 cm

c) 12 cm 　　d) 8 cm

4- اگر طول مماس از نقطهٔ P به دایره (O,r) مساوی به 12cm و قطر دایره 10 cm باشد فاصلهٔ P از O عبارت است از:

a) 13 cm 　　b) 12 cm

c) 10 cm 　　d) 5 cm

5- اگر وتر $\overline{AB}$ دایره C(O,r) را تا نقطهٔ P امتداد دهیم طوری که $\overline{AP}=8\text{cm}$ و $\overline{BP}=2\text{cm}$ باشد طول مماس $\overline{PT}$ عبارت است از:

a) 4 cm 　　b) 8 cm

c) 2 cm 　　d) هر سه جواب غلط است.

• در سؤالات زیر جاهای خالی را با کلمات مناسب خانه پری نمایید.

1- $d^2 - r^2$ عبارت از .... نقطه نظر به یک دایره است.

2- اگر خط $\overline{PT}$ به دایرهٔ $C(O,r)$ مماس باشد طاقت نقطهٔ P نظر به دایرهٔ $C(O,r)$ عبارت از...................... = $\overline{PT}^2$ است.

3- طاقت یک نقطهٔ P نظر به یک دایره .... است، در صورتی که نقطه بالای محیط دایره واقع باشد.

4- طاقت یک نقطه نظر به یک دایره .... است، در صورتی که نقطه داخل دایره واقع باشد.

5- طاقت یک نقطه نظر به یک دایره .... است، در صورتی که نقطه خارج دایره واقع باشد.

6- اگر $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$ باشد نقاط C,B,A و D بالای محیط .... واقع بوده بناءً نقطهٔ P خارج و یا داخل .... واقع است.

7- اگر B,A و T بالای محیط دایره واقع باشند نقاط B,A و P روی یک مستقیم واقع اند در این صورت .... = $\overline{PT}^2$ است در صورتی که P خارج دایره واقع باشد.

• در مقابل جمله‌های صحیح حرف(ص) و در مقابل جمله‌های غلط حرف(غ) را بنویسید.

1- (   )طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مساوی به مربع فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره است.

2- (   )اگر یک نقطه به روی محیط یک دایره واقع باشد طاقت آن نظر به دایره صفر است.

3- (   )اگر یک نقطه داخل یک دایره واقع باشد طاقت نقطه نظر به دایره مذکور منفی است.

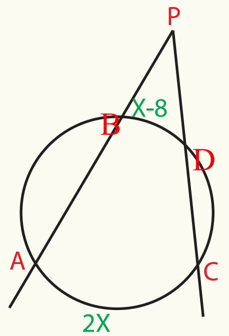
4- (   )اگر یک نقطه خارج یک دایره واقع باشد طاقت نقطهٔ مذکور نظر به دایره متذکره مثبت است.

5- (   )طاقت یک نقطه نظر به هر دایره مثبت است.

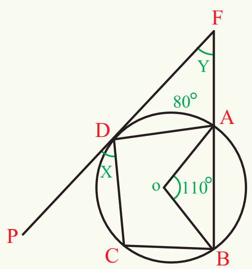
6- (   )طاقت یک نقطه نظر به یک دایره $d^2 - r^2$ است. در صورتی که d فاصله نقطه از مرکز دایره و r شعاع دایره باشد.

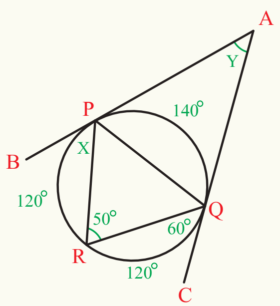
• سؤالات زیر را حل نمایید.

1- در شکل زیر اگر $\hat{P} = 43^\circ$ و قوس‌هایی مقابل آن به ترتیب $(2x)^\circ$ و $(x-8)^\circ$ باشد اندازه زاویه $A\hat{P}C$ را دریابید.

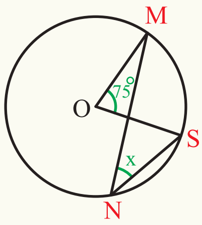


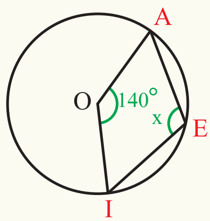
2- اندازه‌هایی $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را در اشکال زیر پیدا کنید.



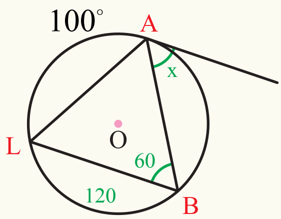


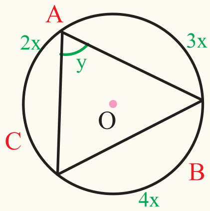
3- اندازهٔ $\hat{x}$ را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.

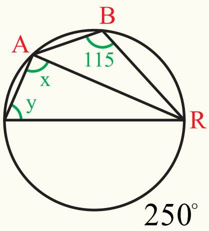




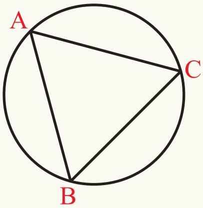
4- اندازه زاویه‌های $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را در اشکال زیر دریابید.







5- با استفاده از تعریف دایرهٔ محاطی نشان دهید که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.



فصـــل ســـوم

هندسهٔ تحلیلی

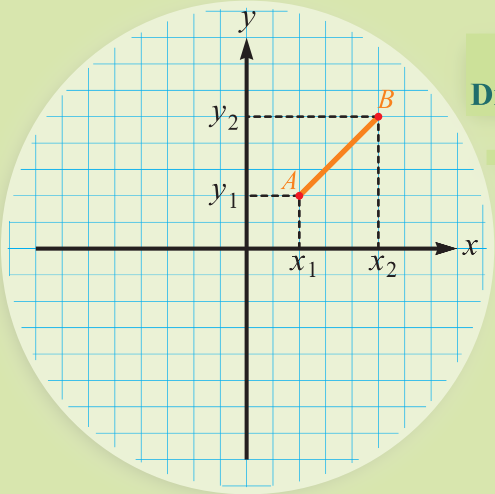
هندسه تحلیلی

Analytic Geometry

هندسه تحلیلی عبارت از علمی رابطه بین الجبر و هندسه است که روابط بین معادلات الجبری و اشــکال هندســی را مورد بحث قرار می دهد، ریاضیدان فرانسوی دیکارت برای اولین بار، رابطه بین اشــکال معین هندســی و معادلات الجبری را به دست آورد. و اظهار داشــت که: بعضی از معادلات الجبری یک شــکل معین هندسی دارد. از این که اساس علم هندسه را نقطه و اساس معادلات الجبری را عدد تشکیل می دهد بدین منظور لازم است که ابتدا رابطه بین نقطه و عدد را مورد مطالعه قرار دهیم.

دیکارت برای رابطه بین عدد و نقطه یک سیستم یا دستگاه قایم محورات را معرفی نمود که تا فعلاً به نام وی یاد می گردد.

فاصله بین دو نقطه
Distance between two Points



هر دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ در مستوی مختصات قایم یک قطعه خط مانند AB را تعیین می کند. به نظر شما چگونه می توان فاصله بین دو نقطهٔ A و B را محاسبه کرد؟

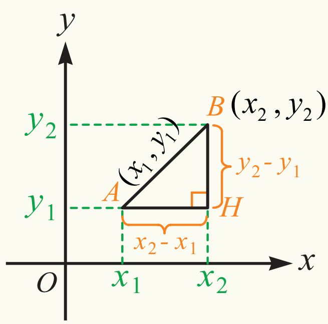
فعالیت

- موقعیت نقاط $A(3,5)$ و $B(5,4)$ را در سیستم کمیات وضعیه نشان دهید.
- قطعه خط $\overline{AB}$ را رسم کنید.
- فاصله بین نقاط A و B را محاسبه نمایید.

از فعالیت فوق می توانیم به صورت عمومی فاصله بین دو نقطهٔ کیفی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را طور زیر به دست آریم:

در شکل زیر مثلث AHB یک مثلث قایم الزاویه است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می توانیم فاصله بین دو نقطهٔ A و B را طور زیر دریافت نماییم.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$$ .... نظر به قضیهٔ فیثاغورث



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AH} = x_2 - x_1\\ \overline{BH} = y_2 - y_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1: فاصله بین نقاط $A(1,7)$ و $B(5,4)$ را دریابید.

حل: با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه داریم که:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5 \ unit$$

مثال 2: فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,4)$ را از مبدأ کمیات وضعیه محاسبه نمایید.

حل: چون مختصات مبدأ $O(0,0)$ بوده بناءً فورمول فاصله بین دو نقطه شکل $\overline{OA} = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$ را به خود اختیار می کند.

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow \overline{OA} = 5 \, \text{unit}$$

فاصله بین دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ عبارت است از:

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$$

فاصله بین این دو نقطهٔ اختیاری را میتوان به d نیز نمایش داد؛ طور زیر:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصله هر نقطهٔ اختیاری $P(x, y)$ از مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تمرین

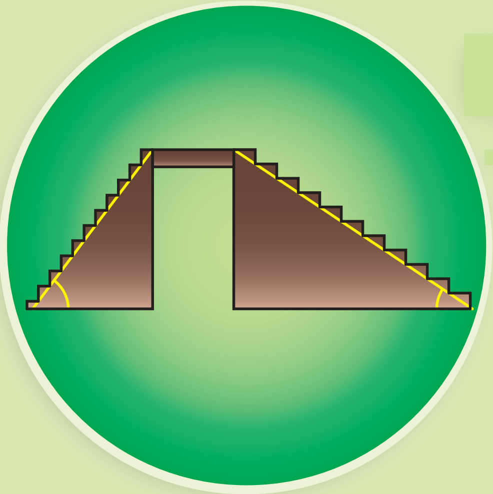
1- فاصله بین نقاط $A(0,3)$ و $B(2,0)$ را دریابید؟

2- فاصله بین نقاط $P(1,3)$ و $Q(3,7)$ را دریابید؟

3- اگر $A(-1,4)$ ، $B(-3,-7)$ و $C(1 \ ,9)$ مختصات رأس های یک مثلث باشد، محیط مثلث را محاسبه نمایید؟

4- مساحت مثلثی را به دست آرید که رأس های آن از نقاط زیر $A(2,0), B(6,2)$ و $C(1,2)$ بگذرد؟

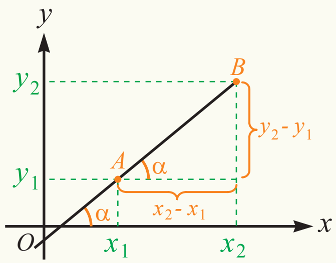
میل خط مستقیم



به شکل مقابل نگاه کنید بالای کدام یکی از زینه ها به آسانی بالا شده می توانید. چرا؟ علت آنرا بیان نمایید.

اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دو نقطهٔ کیفی خط مستقیم $\overline{AB}$ باشد نسبت $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ را میل خط مستقیم $\overline{AB}$ گویند و طور زیر می نوشته می شود:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



مثال 1: میل خط مستقیمی را دریافت کنید که از نقاط $A(3,5)$ ، $B(4,6)$ بگذرد.

حل: می دانیم که میل یک خط مستقیم از رابطهٔ $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ به دست می آید لذا داریم که:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-5}{4-3}=1$$

مثال 2: خط مستقیمی که از نقاط A(2,5) و $B(4,k)$ می گذرد در آن قیمت k را طوری تعیین نمایید. که میل خط مستقیم AB مساوی به 3 باشد.

حل: جهت محاسبهٔ قیمت k از رابطهٔ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ طوری زیر استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k - 5}{4 - 2}$$

$$k - 5 = 6$$

$$K = 11$$

مثال 3: میل خط مستقیمی را به دست آرید که از نقطهٔ $P(2,3)$ و مبدأ کمیات وضعیه بگذرد.

حل: چون خط مستقیم از مبدأ کمیات وضعیه می گذرد و مختصات مبدأ $O(0,0)$ است میل آنرا طور زیر به دست می آریم:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{0-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

تمرین

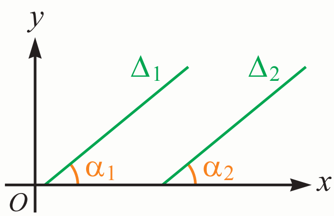
1- میل خط مستقیمی را به دست آرید که از نقاط $A(1,1)$ و $B(-1,-1)$ بگذرد؟

2- در خط مستقیمی که از نقاط $A(-2,2\sqrt{3})$ و $B(1,a)$ می گذرد قیمت a را طوری تعیین نمایید که میل خط مستقیم $\sqrt{3}$ باشد؟

میل خطوط مستقیم موازی

در شکل داده شده زینه را در نظر گرفته بگویید که چه رابطه بین دو بازوی زینه موجود است.

فعالیت



- در کمیات وضعیهٔ مختصات قایم، دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 را باهم طوری موازی رسم کنید که با جهت مثبت محور x زوایای حاده را بسازند.
- میل خطوط Δ_1 و Δ_2 را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. ببینید آنها با هم چه رابطه دارند؟
- اگر خط مستقیم Δ_1 با جهت مثبت محور x زاویهٔ α_1 وخط مستقیم Δ_2 با جهت مثبت محور x زاویهٔ α_2 را بسازد، آنگاه α_1 و α_2 با یکدیگر چه رابطه دارند؟

به صورت عمومی نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می نماییم:

خطوط مستقیم موازی دارای میل های مساوی می باشند.

اگر دو خط مستقیم میل‌های مساوی داشته باشند در نتیجه زوایای که با جهت مثبت محور x می‌سازند نیز با هم مساوی‌اند.

مثال: اگر خط مستقیم Δ_1 از نقاط $A(2,5)$ و $B(-6,-11)$ و خط مستقیم Δ_2 از نقاط $C(-4,-6)$ و $D(3,8)$ بگذرد خطوط Δ_1 و Δ_2 بین هم دیگر چه رابطه دارند.

حل: میل های خطوط مستقیم Δ_1 و Δ_2 را محاسبه می کنیم:

$$\left.\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\overline{AB}} &= m_{\Delta_1} = \frac{-11-5}{-6-2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\overline{CD}} &= m_{\Delta_2} = \frac{8-(-6)}{3-(-4)} = \frac{8+6}{3+4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

چون میل های خطوط مستقیم Δ_2 و Δ_1 باهم مساوی اند بناءً این خطوط با هم موازی اند.

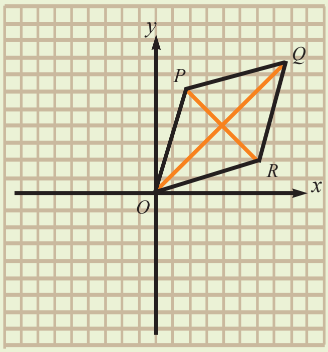
تمرین

اگر نقاط $A(3,0)$، $B(0,5)$، $C(-3,0)$ و $D(0,-5)$ رأس های یک چهار ضلعی باشند.

الف: اضلاع مقابل چهار ضلعی باهم چه ارتباط دارد؟

ب: میل قطرهای آنرا دریابید.

میل مستقیم های عمود با هم



چهار ضلعی OPQR یک لوزی است. آیا می توانید خصوصیات لوزی را با کمک مختصات رأس آن بیان کنید.

فعالیت

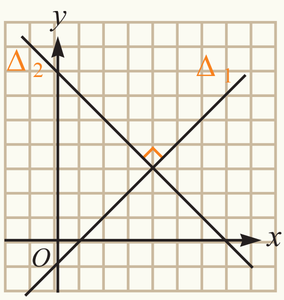
- نقاط $O(0,0)$، $B(1,3)$، $C(4,4)$ و $D(3,1)$ را در مختصات کمیات وضعیه قایم نشان دهید.
- با وصل نمودن نقاط O,B,C و D شکل $OBCD$ را به دست آرید.
- طول اضلاع $\overline{OB},\overline{BC},\overline{CD}$ و $\overline{DO}$ را محاسبه کنید.
- نشان دهید که قطرهای OC و BD با هم دیگر عمود اند.

از نتیجهٔ فعالیت فوق تعریف زیر به دست می آید:

تعریف

دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 با میل های m_1 و m_2 وقتی بر یکدیگر عموداند که رابطه زیر بین آنها برقرار باشد.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$



مثال 1: خط مستقیمی کـه از نقاط A(7,5) و B(1,1) و خط مستقیمی که از نقاط C(0,5) و D(2,2) می گذرد با هم چه رابطه دارند؟

حل:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-5}{1-7}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}}=\frac{2-5}{2-0}=\frac{-3}{2}$$

چون $m_{\overline{AB}}\cdot m_{\overline{CD}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-3}{2}=-1$ است، بناءً خطوط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ با هم عمود اند.

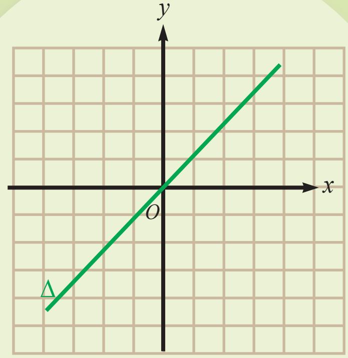
تمرین

1- نقاط $A(6,1)$, $B(8,3)$ و $C(6,5)$ سه رأس یک مثلث اند. نشان دهید که مثلث قایم الزاویه است.

2- وضعیت قطعه خطی که از نقاط $A(7,5)$, $B(1,1)$ و قطعه خطی که از نقاط $C(0,5)$, $D(2,2)$ می گذرد با هم دیگر تعیین کنید.

3- وضعیت قطعه خطی که از نقاط $A(2,4)$ و $B(7,5)$ و قطعه خطی که از نقاط $C(1,-4)$ و $D(-3,-5)$ می گذرد با هم دیگر تعیین کنید.

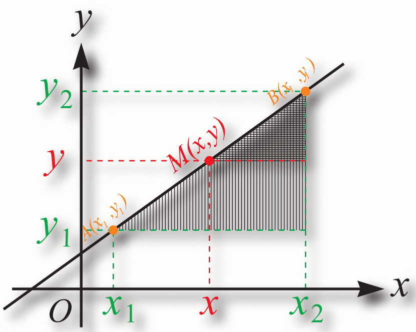
معادلهٔ خطی مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد



چند نقطه را روی خط شکل مقابل انتخاب کنید.

چه رابطه یی بین فاصله و ترتیب نقاط روی خط می بینید؟

فعالیت



- دو نقطهٔ کیفی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را در سیستم کمیات وضعیه مشخص کنید.
- اگر نقاط A و B باهم وصل شوند چه به دست می آید.
- یــک نقطهٔ کیفی دیگری مانند $M(x,y)$ را بــالای خط مســتقیم $\overline{AB}$ در نظر گرفته نشانی کنید؟
- از نقاط A , M و B بالای محورهای x و y عمودها رسم و نام گذاری کنید؟

از انجام فعالیت فوق چنین نتیجه گیری می نماییم:

معادلهٔ خط مستقیمی که از نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ بگذرد و نقطهٔ $M(x,y)$ نیز بالای این خط مستقیم قرار داشته باشد دارای شکل زیر است:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

مثال: معادلهٔ خط مستقیمی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(3,4)$ و $B(2,-1)$ بگذرد.

حل: با استفاده از معادلهٔ خط مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-1-4}{2-3}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=\frac{-5}{-1}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=5$$

$$y-4=5(x-3)$$

$$y=5x-15+4=5x-11$$

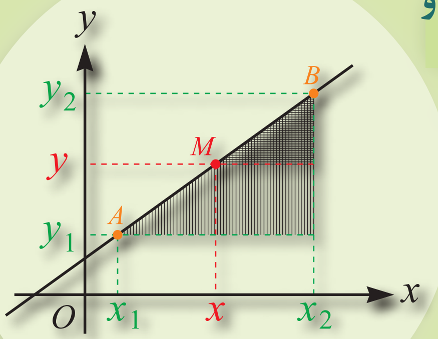
$$y=5x-11$$

تمرین

1- معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که از نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,4)$ بگذرد؟

2- معادلهٔ میانه $\overline{AM}$ مثلث را دریابید که رأس‌های آن $A(1,3)$, $B(-1,4)$ و $C(5,6)$ باشد.

معادلهٔ خطی مستقیمی که میل و یک نقطهٔ آن معلوم باشد



در شکل مقابل میل $\overline{AB}$ با میل $\overline{MA}$ چه رابطهٔ دارند؟
آیا میل هر قطعه خط مستقیم دیگری که روی خط $\overline{AB}$ ویا موازی با خط $\overline{AB}$ انتخاب کنیم با میل خط $\overline{AB}$ برابر است یا خیر اگر است چرا؟

می‌دانیم معادلهٔ یک خط مستقیم که دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ آن معلوم باشد عبارت است از:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

یا

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

چون $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ میل خط مستقیم را نشان می دهد بناءً معادلهٔ فوق شکل زیر را به خود اختیار می کند.

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

معادلهٔ اخیر معادلهٔ خط مستقیمی است که یک نقطهٔ آن $A(x_1, y_1)$ و میل آن یعنی m معلوم است.

مثال 1: معادلهٔ مستقیمی را بنویسید که از نقطهٔ (2,3) می گذرد و میل آن $\frac{1}{2}$ باشد.

حل: چون میل و یک نقطهٔ خط مستقیم داده شده پس از معادلهٔ $y-y_1=m(x-x_1)$ می توانیم بنویسیم:

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$$
$$2(y-3)=(x-2)$$
$$2y-6=x-2$$
$$2y=x+6-x$$
$$2y=x+4$$
$$y=\frac{1}{2}x+2$$

شکل عمومی معادلهٔ خط مستقیم $y=mx+b$ می باشد که در آن m میل خط مستقیم و b ترتیب نقطهٔ تقاطع با محور y است.

مثال 2: معادلهٔ خطوط مستقیم $3x+4y=5$ و $4x-3y=-1$ باهم چه رابطه دارند؟

حل: با استفاده از ضرایب معادلات دو خط مستقیم داریم که:

$a_1=3$ $\quad b_1=4$ $\quad c_1=-5$

$a_2=4$ $\quad b_2=-3$ $\quad c_2=1$

1- چون $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{a_1}{a_2}$ یعنی $\frac{4}{-3}\neq\frac{3}{4}$ است، بناً خطوط داده شده متقاطع اند.

2- چون $\frac{b_1}{b_2}\times\frac{a_1}{a_2}=-1$ یعنی $\frac{4}{-3}\times\frac{3}{4}=-1$ است، پس این دو خط مستقیم در نقطهٔ تقاطع با هم عمود اند.

تمرین

1- معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که میل آن 4 و محور y را در نقطهٔ 3- قطع کند.

2- معادلهٔ خط مستقیمی را به دست آرید که از نقطهٔ $P(5,-4)$ گذشته و میل آن -2 باشد.

3- حالات خطوط $4x+3y-1=0$ و $8x+6y+5=0$ را معلوم کنید.

خلاصهٔ فصل سوم

- فاصلــه بین دو نقطهٔ A و B از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ به دســت می آید.
- میل هر خط مستقیم از رابطهٔ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ به دست می آید.
- مستقیم های موازی دارای میل های مساوی اند.
- میل هر مستقیم مواز ی با محور X صفر و میل هر مستقیم عمود بر محور X تعریف نشده.
- دو خط مســتقیم وقتی باهم عمود اند که حاصل ضرب میل‌های آنها مساوی به (-1) شود.
- سه نقطهٔ اختیاری زمانی بالای یک خط مستقیم قرار می گیرند که میل هر قطعه خط آنها با هم مساوی باشند. یا $AB+BC=AC$

تمرین فصل سوم

• در سؤالات زیر به هر سؤال چهار جواب داده شده است جواب صحیح آن را انتخاب کنید.

1- حاصل ضرب میل های دو خط عمود بالای همدیگر:

a) (1) است.   b) صفر است.   c) ∞ است.   d)منفی یک است.

2- معادله خط مستقیم که میل و نقطهٔ تقاطع آن با محور y معلوم باشد عبارت است از:

a) $y = mx$ b) $y = b$ c) $y = mx + b$ d) $y - y_1 = m(x - x_1)$

3- معادله خط مستقیم که دو نقطهٔ آن معلوم باشد عبارت است از:

a) $y = mx + b$ b) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ c) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $y = mx$

4- فاصله بین دو نقطه A و B از کدام فورمول زیر به دست می آید:

a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ b) $\mathrm{AB} = \sqrt{(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)^2 - (\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2)^2}$

c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

5- فاصله بین یک نقطه و مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از:

a) $d = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$ b) $d = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

c) $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $d = \sqrt{x^2 - y^2}$

6- میل یک خط مستقیم عبارت است از:

a) $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ b) $m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

7- دو مستقیم وقتی با هم موازی اند که:

a) میل های آنها با هم مساوی باشد.   b) میل های آنها مساوی نباشند.

c)حاصل ضرب میل های آنها منفی یک باشد.   d) همه درست است.

• جا های خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- درسیستم کمیات وضعیه محور x را محور ...... و محور y را محور .... گویند.

2- در ناحیهٔ دوم نقاطی قرار دارند که x آنها .... و y آنها .... است.

3- در ناحیهٔ سوم نقاطی قرار دارند که هم x و هم y آنها.............................. است.

4- دو مستقیم موازی با جهت مثبت محور x زوایای .... می‌سازد.

5- میل هر مستقیم موازی با محور x .... است.

6- سه نقطه زمانی بر یک خط مستقیم قرار دارند که میل هر قطعه خط آنها با هم............... باشد.

7- اگر میل دو خط با یکدیگر مساوی نباشد آن دو خط .... اند.

• کدام یک از جملات زیرصحیح و کدام یک از آن ها غلط‌اند. در مقابل صحیح حرف(ص) و در مقابل غلط حرف (غ) بگذارید.

1- (   ) مستقیم های موازی دارای میل های مساوی اند.

2- (   ) دو مستقیم وقتی باهم عمود اند که حاصل ضرب میل های شان مساوی به (+1) باشد.

3- (   ) شکل عمومی معادلهٔ خط مستقیم $y = mx$ است.

• سؤالات زیر را حل نمایید.

1- نقطه‌های که کمیات وضعیهٔ آن ذیلاً داده شده در مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید.

$1:\ (0,1)$ $\quad 2:\ (2,3)$ $\quad 3:\ (0,-4)$ $\quad 4:\ (5,0)$

2- فاصله بین هر جوره از نقطه های را که کمیات وضعیهٔ آنها ذیلاً داده شده است معلوم کنید؟

$1:\ (0,9),(-5,4)$ $\quad 2:\ (4,1),(3,-2)$ $\quad 3:\ (-7,4),(1,-11)$

3- نشان دهید که نقطه های داده شده زیر رأس های یک مثلث قایم الزاویه بوده و مساحت آن را نیز به دست آرید؟

$(0,9)\ ,\ (-4,-1)\ ,\ (3,2)$

4- نشان دهید که نقطه های داده شدهٔ زیر بالای یک خط مستقیم قرار دارند.

$1:\ (0,4)\ ,\ (3,-2)\ ,\ (-2,8)$ $\quad 2:\ (1,2)\ ,\ (-3,10)\ ,\ (4,-4)$

5- میل و یک نقطهٔ خطوط در زیر داده شده است، معادله های آنها را به دست آرید؟

$1:\ (2,3)\ ,\ m=-\frac{1}{2}$ $\quad 2:\ (-4,1)\ ,\ m=-\frac{2}{3}$ $\quad 3:\ (-1,-4)\ ,\ m=-2$

6- اگر رأس‌های یک مستطیل $(-3,1)$, $(-1,3)$, $(3,-1)$ و $(1,-3)$ باشد مساحت آنرا دریافت نمایید؟

7- اگر رأس های یک متوازی الاضلاع $(2,4)$,$(5,9)$, $(4,9)$ و $(4,\ 1)$باشد طول اقطار آنرا دریابید؟

8- نشـان دهید که نقاط $(-3,1)$, $(-9,4)$, $(12,0)$و $(6,3)$رأس هــای یک متوازی الاضلاع است؟

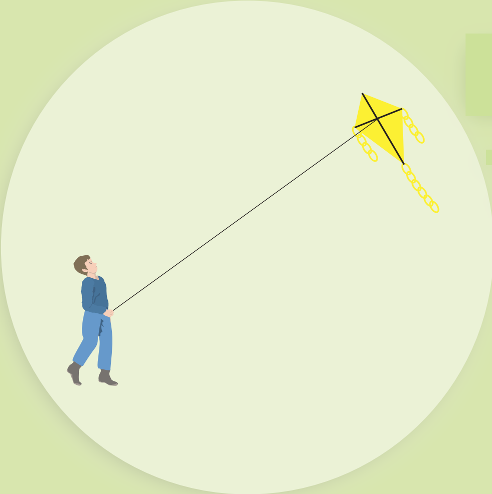
9- اگر رأس های یک مثلث $(5,0)$, $(-3,2)$ و $(1,-3)$ باشند کمیات وضعیهٔ نقطه های وسطی اضلاع آن را به دست آرید؟

10- معادلات خطوط مستقیمی را دریابید که از نقطهٔ $P(4,5)$ گذشته و به ترتیب یکی آن با محور x و دیگر آن با محور y موازی باشد.

فصل چهارم

مثلثات

ساین یک زاویهٔ حاده

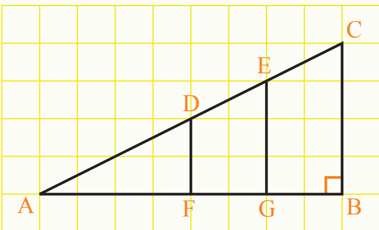


اگر یک کاغذ پران در هوا در حالت پرواز باشد چگونه می توانید فاصلهٔ آن را از زمین محاسبه کنید؟

فعالیت

• در مثلث قایم الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ بالای وتر $\overline{AC}$ نقاط D و E را انتخاب کرده‌ایم، از این نقاط به ضلع $\overline{CB}$ در مثلث خطوط موازی ها رسم نموده نقاط تقاطع آنها به ضلع AB را به ترتیب F و G بنامید.

• با استـفاده از خط کش اضلاع مثلث را اندازه گرفتـه و نسـبت‌های $\frac{FD}{AB}=\frac{GE}{AE}$ و $\frac{BC}{AC}$ را محاسبه نموده با هم مقایسه کنید.



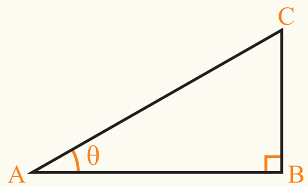
• آیا با تغییر محل نقاط D و E نسبتهای $\frac{FD}{AB}=\frac{GE}{AE}$ و $\frac{BC}{AC}$ تغییر می کند؟

• آیا با تغییر محل نقاط روی $\overline{AC}$، در مقدار زاویهٔ A تغییری ایجاد می گردد؟

• اکنون طول خط $\overline{AB}$ را ثابت نگه‌دارید و زاویهٔ $\hat{A}$ را افزایش دهید. فکر کنید تساوی نسبت‌های فوق چگونه اتفاق می‌افتد؟ تحقیق کنید.

تعریف

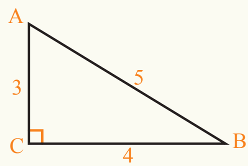
در هر مثلث قایم‌الزاویه نسـبت ضلع مقابل یک زاویهٔ حاده بر طول وتر همیشه مساوی به یک مقدار ثابت اســت که به وسعت زاویهٔ حاده بسته گی دارد. این نسبت را $\sin\theta$ (ساین زاویهٔ حاده) می‌نامیم:



$$\sin\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

مثال: در شکل زیر مقدار $\sin A$ و $\sin B$ را به دست آورید.

حل:

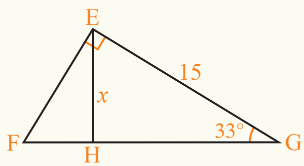


$$\sin\hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\hat{A} = 0.8$$

$$\sin\hat{B} = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ B}}{\text{طول ضلع وتر}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\hat{B} = 0.6$$

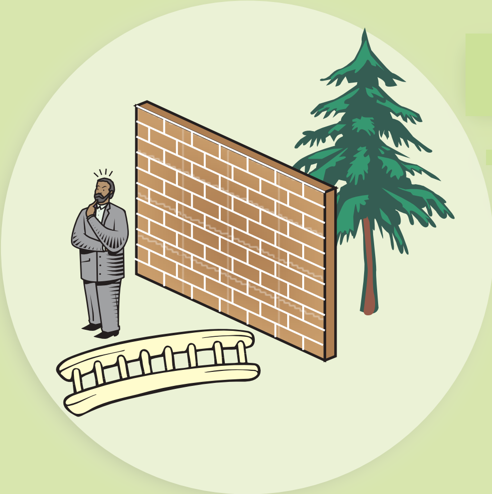
تمرین

1- اگر $\sin 33^\circ$ مساوی 0.5446 باشد، در شکل زیر قیمت عددی x را دریابید.



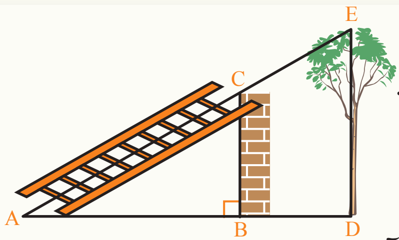
2- زوایای 40°، 65° و 80° را به ترتیب رسم نموده سپس بر روی هر زاویه یک مثلث قایم‌الزاویــه جداگانــه رســم نمایید با اســتفاده از خط کــش و اندازه گیــری اضلاع $\sin 65^\circ$ ، $\sin 40^\circ$ و $\sin 80^\circ$ را دریابید و با هم مقایسه کنید.

کوساین یک زاویهٔ حاده



یک درخت ناجو عقب یک دیوار قرار دارد. یک شاگرد می خواهد بداند درخت از دیوار چقدر فاصله دارد. برای دریافت فاصله فقط یک زینه در اختیار دارد، بگویید که او راجع به چه فکر می کند

فعالیت



- مثلث‌های تشکیل شده در شکل مقابل را نام ببرید.
- $\overline{BC}$ و $\overline{DE}$ با هم چه رابطهٔ دارند؟ چرا؟
- مثلث‌های ABC و ADE باهم چه رابطه دارند؟
- فاصلهٔ زینه را الی دیوار و بعد الی درخت به‌دست آرید.
- به کمک قضیهٔ تالس مساوات زیر را تکمیل و طول $\overline{AE}$ را به دست آرید.

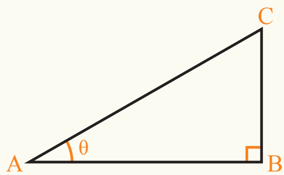
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\ldots}{\overline{AE}}$$

- این مقدار به چه چیزی بسته گی دارد؟

از انجام فعالیت فوق تعریف زیر به دست می آید:

تعریف

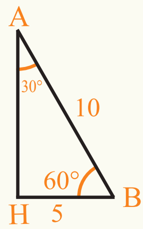
به صورت عموم در مثلث قایم الزاویهٔ ABC که یک زاویهٔ حادهٔ آن θ است، نسبت طول ضلع مجاور این زاویه برطول وتر مثلث را به نام $\cos$ineθ (کوساین زاویهٔ θ) یاد می کنند.



$$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

مثال: در مثلث قایم الزاویه AHB اگر زاویه $\hat{A}=30^\circ$ و زاویهٔ $\hat{B}=60^\circ$ باشد، نشان دهید که: $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ و $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

حل: با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث ارتفاع AH را می توانیم چنین بدست آریم:



$$AB^2=AH^2+HB^2$$

$$10^2=AH^2+5^2\Rightarrow AH^2=100-25=75$$

$$AH=\sqrt{75}\Rightarrow AH=5\sqrt{3}$$

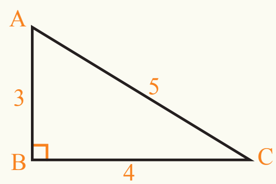
$$\sin 60^\circ=\frac{AH}{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad \cos 60^\circ=\frac{BH}{AB}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{BH}{AB}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ \cos 30^\circ=\frac{AH}{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرین

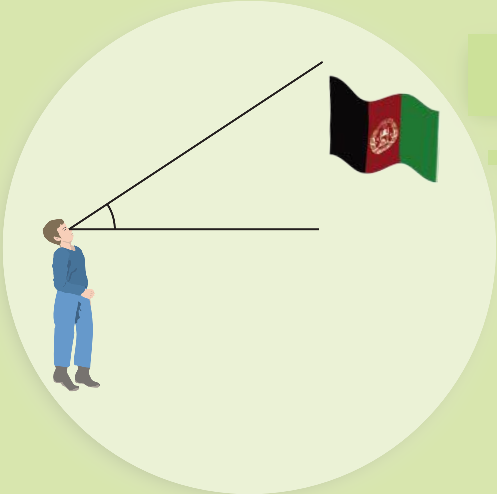
1- رابطهٔ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ را برای زاویه های 30°, 45° و 60° تحقیق کنید.

2- در مثلث قایم الزاویهٔ زیر قیمت عددی $\sin A$ و $\cos A$ را دریابید.



3- در مثلث قایم الزاویه ABC که طول اضلاع آن 8,6 و 10 واحد طول است نسبت‌های مثلثاتی $\sin A$ و $\cos A$ را محاسبه نمایید.

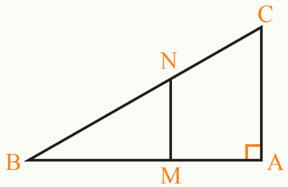
تانجنت یک زاویهٔ حاده



یک شاگرد به مقابل بیرق ایستاد شده، فکـر می کنـد که طـول میله بیـرق را چگونه دریافت کند؟

فعالیت

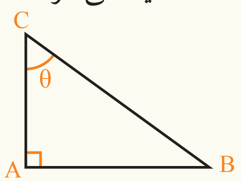
در مثلـث $\overset{\Delta}{ABC}$ کـه زاویـه A در آن قایمه اسـت نسـبت هـای مثلثاتـی زاویهٔ B $(\sin\hat{B}, \cos\hat{B})$ را در نظر بگیرید. طوریکه قطعه خط MN موازی به AC رسم شده است.



- بـا در نظر داشــت مثلــث $\overset{\Delta}{ABC}$، sinB و cosB را بر حسب اضلاع مثلث ABC بنویسید.
- $\dfrac{\sin B}{\cos B}$ را بر حسب اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ بنویسید.
- با استفاده از مثلث $\overset{\Delta}{BMN}$، sinB، cosB و $\dfrac{\sin B}{\cos B}$ را بر حسب اضلاع مثلث بنویسید.
- فکـر می کنید اگر در مثلث فوق $\dfrac{\cos B}{\sin B}$ را پیدا کنیم، آیا این نسـبت به طول اضلاع ارتباط می گیرد یا تنها به مقدار زاویه بسته گی دارد؟

از انجام فعالیت فوق نتایج زیر به دست می آید:

نتیجه 1: در یک مثلث قایم الزاویه نسبت طول ضلع مقابل یک زاویهٔ حاده بر طول ضلع مجاور آن زاویه مقدار ثابتی است که به نام $\tan\theta$ (تانجانت زاویهٔ حاده) یاد می گردد.

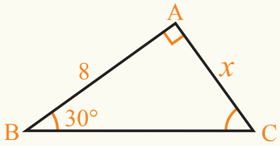


$$\tan\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ } \theta}{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ } \theta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

نتیجه 2: تانجانت زاویهٔ حاده (θ) مساوی است با نسبت ساین زاویهٔ حاده بر کوساین همان زاویه.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

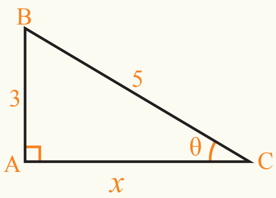
نتیجه 3: نسبت $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ مقدار دیگری است که آن را به نام $\text{cotangent}\,\theta$ (کوتانجانت زاویهٔ θ) یاد می کنند یا به عبارهٔ دیگر نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ θ بر طول ضلع مقابل زاویهٔ θ را $\cot\theta$ می گویند این نسبت مانند نسبت‌های مثلثاتی دیگر تنها به اندازهٔ زاویه ارتباط دارد.



مثال 1: درمثلث مقابل اگر $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ باشد قیمت $\tan 30^\circ$ را به دست آرید.

حل: با استفاده از تعریف $\tan\theta$ می توانیم بنویسیم که:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \div 8 \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



مثال 2: مثلث قایم الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ در زیر ترسیم گردیده است. در این مثلث نسبتهای $\tan\theta$ ، $\cos\theta$ و $\cot\theta$ را به دست آورده و رابطه $\tan\theta$ را با نسبت $\cos\theta$ و $\sin\theta$ مقایسه کنید.

حل: ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ طول $\overline{AC}$ را پیدا می کنیم.

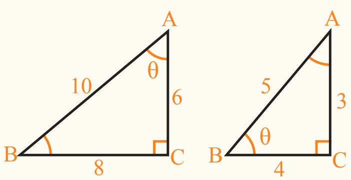
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan\theta = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot\theta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

تمرین

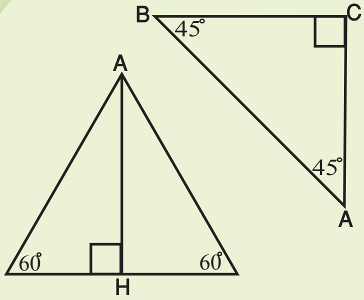


1- از شکل های مقابل $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را دریابید.

2- در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ که اضلاع آن با هم مساوی است $\tan\hat{A}$ و $\tan\hat{B}$ را دریابید.

3- در یک مثلث قایم الزاویه اگر قاعدهٔ آن ثابت نگه داشته شود و زاویهٔ حادهٔ آن بزرگ شود، در نسبت $\tan\theta$ آن چه تغییری رخ می دهد؟

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص
(90° و 45°، 60°,30°)



مثلـث های مقابـل چه نـوع مثلث ها بوده، آنها را نام گرفته طول اضلاع آن را مشخص کنید.

فعالیت

- یک مثلث متساوی الاضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم نمایید.
- ارتفاع $\overline{AH}$ آن را رسم نمایید، ارتفاع در این نوع مثلث کدام خاصیت‌ها را داراست؟
- با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث اندازه ارتفاع مثلث مذکور را دریافت نمایید.
- آیا می توانید قیمت‌های عددی نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° و 60° را دریافت کنید؟
- یک مثلث متساوی الساقین قایم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ را طوری رسم نمایید که طول ساق‌های آن یک واحدطول باشد.
- هر یک از زاویه‌های حاده چند درجه است؟ چرا؟ اندازهٔ طول وتر آن را محاسبه کنید.
- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 45° را به دست آرید.

برای انجام فعالیت بالا می توانیم از جدول زیر استفاده نماییم:

زاویه / نسبت های مثلثاتی	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده

مثال: در رابطه‌های زیر قیمت‌های عددی x و y را دریابید:

1) $x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ 2) $y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$

3) $x=\tan 60^\circ-\sin 30^\circ$ 4) $y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ$

5) $x=\tan 45^\circ-\sin 45^\circ$ 6) $y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ$

حل: در روابط فوق به عوض هر نسبت مثلثاتی قیمت عددی آن را وضع می‌نماییم:

$$1)\ x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$2)\ y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$3)\ x=\tan 60^\circ-\sin 30^\circ=\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

$$4)\ y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

$$5)\ x=\tan 45^\circ-\sin 45^\circ=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

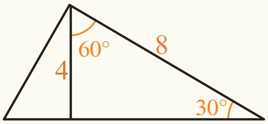
$$6)\ y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

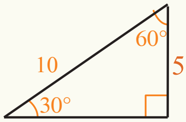
یادداشت: در هر مثلث قایم الزاویه داریم که:

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

تمرین

در اشکال زیر نسبت‌های مثلثاتی sin ، cos ، tan و cot زوایای 30° و 60° را دریابید:





خلاصهٔ فصل چهارم

• مثلثـات(Trrigonometry) از دو کلمــه یونانــی(Trigon) یعنــی مثلــث و (metron) یعنی اندازه کردن تشــکیل شده و عبارت از علمی است که از روابط بین عناصر مثلث بحث می کند.

• در هــر مثلث قایم الزاویه نســبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده بــر طول وتر را به نام sine زاویه حاده یاد می کنند.

• در هر مثلث قایم الزاویه نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده بر وتر را به نام cosine زاویهٔ حاده یاد می کنند.

• در هر مثلث قایم الزاویه نسبت sin یک زاویهٔ حاده θ بر cos زاویهٔ حاده θ را به نام tan زاویهٔ حاده θ یاد می کنند.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

• در هر مثلث قایم الزاویه نســبت cos یک زاویهٔ حاده θ بر sin زاویهٔ حاده θ را به نام cot زاویهٔ حاده θ یاد می کنند.

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot an\theta$$

• در هر مثلث قایم الزوایه رابطه $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ موجود است.

• نسبت های مثلثاتی sin، cos و tan بدون ذکر زاویه در مقابل آنها بی معنی اند.

• قیمت $\sin 30^\circ$ با $\cos 60^\circ$ مساوی است.

• قیمت $\cos 30^\circ$ با $\sin 60^\circ$ مساوی است.

• قیمت $\cos 45^\circ$ با $\sin 45^\circ$ مساوی است.

تمرینات فصل چهارم

• در سؤالات زیر به هر سؤال چهار جواب داده شده که یکی از آنها صحیح است، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- نسبت $\sin\alpha$ یک زاویه حاده عبارت است از:

a) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده}}{\text{طول وتر}}$

b) $\dfrac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده}}$

c) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده}}{\text{طول وتر}}$

d) $\dfrac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده}}$

2- نسبت $\tan\alpha$ مساوی است به:

a) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ c) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ d) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$

3- قیمت افاده $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ مساوی است به:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

4- $\sin 45^\circ$ و $\cos 45^\circ$ مساوی است به:

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

5- قیمت افاده $\dfrac{\sin 30^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$ مساوی است به:

a) 0 b) 1 c) -1 d) هر سه جواب صحیح است.

• جاهای خالی را با جمله های مناسب تکمیل کنید.

1- در یک مثلث قایم الزاویه مجموع دو زاویهٔ حادهٔ آن .... است.

2- نسبت ساین یک زاویه حاده عبارت است از..................................... .

3- Trigonometry از دو کلمهٔ .... و .... تشکیل گردیده است.

4- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ مساوی به.........................است .

• کـدام یـک از جملات زیر صحیح و کدام آن ها غلـط اند در مقابل صحیح حرف (ص) و در مقابل غلط حرف (غ) را بگذارید.

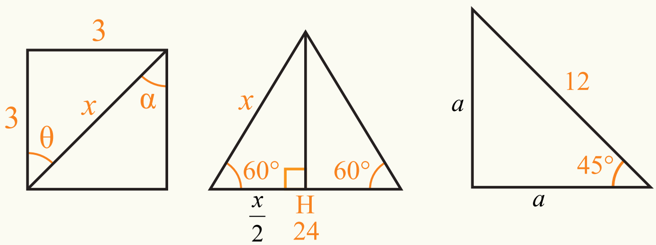
1- (   ) نسبت $\sin\theta$ مساوی به $\frac{\text{طول ضلع مقابل } \theta}{\text{طول وتر}}$ است.

2- (   ) $\sin 30^\circ$ و $\cos 60^\circ$ با هم مساوی اند.

3- (   ) نسبت $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ مساوی به $\cot\theta$ است.

• سؤالات زیر راحل نمایید.

1- در اشکال زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده شده را دریافت نمایید.



2- در سؤالات زیر قیمت‌های A و B را محاسبه کنید.

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

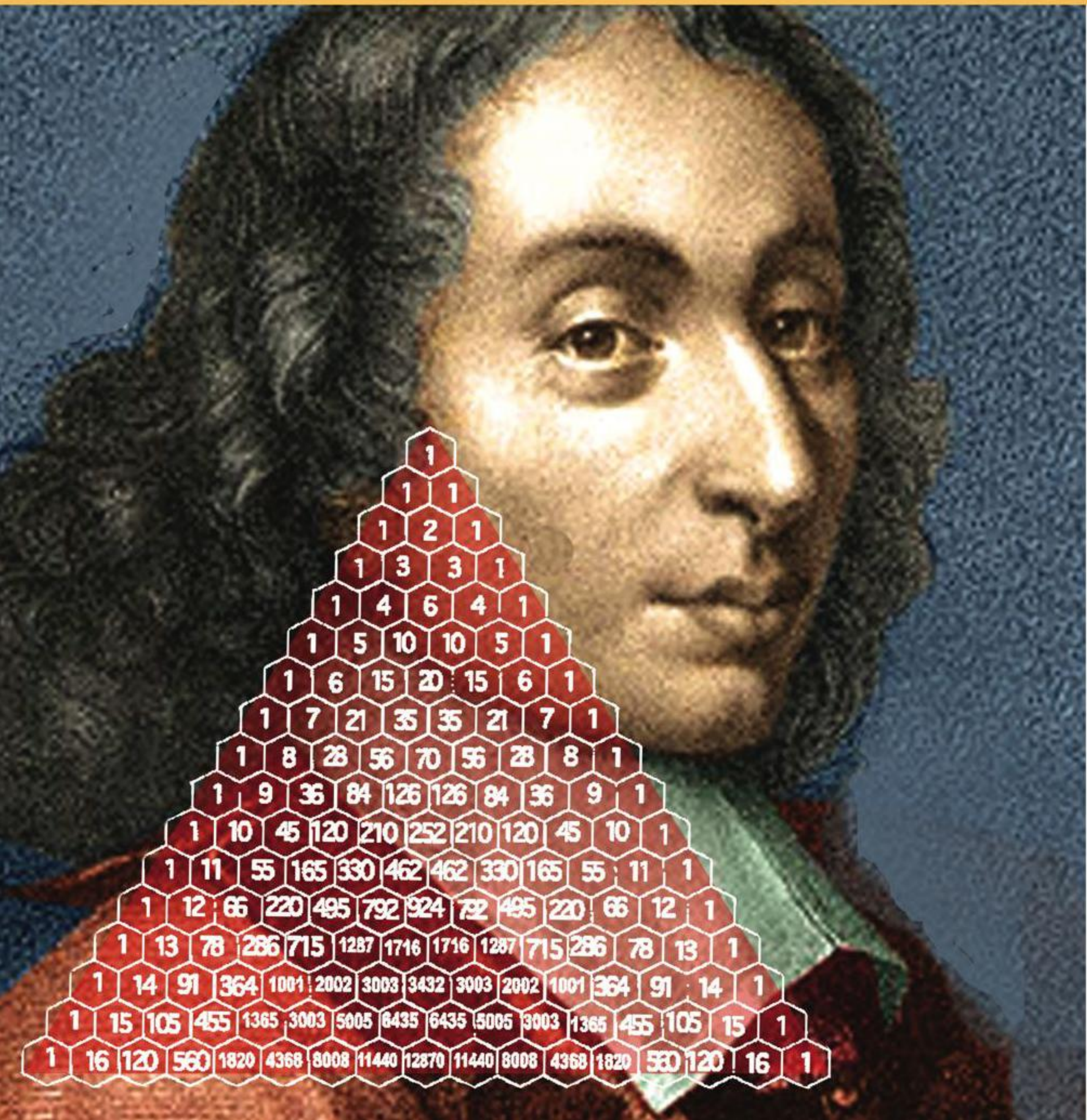
3- اگر $\sin\alpha = \frac{7}{12}$ باشد $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ را دریابید.

4- اگر $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد نسبت‌های مثلثاتی $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را دریابید.

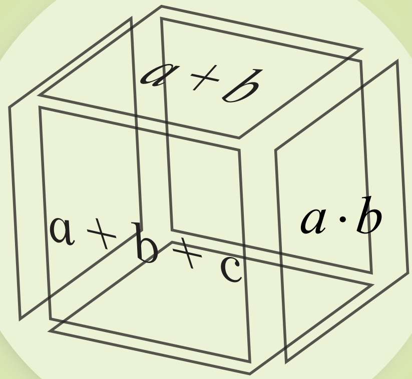
فصل پنجم
افاده های الجبری

بلز پاسکال، عالم، ادیب، فیلسوف دینی، ریاضیدان، فزیکدان و یکی از متفکرین جهان، متولد در کلرمون مرکز فرانسه است.

چون وی در ریاضیات استعداد فوق العاده داشت تاسیس نظریهٔ احتمال، قضیه های هندسه اقلیدسی، قضیهٔ از هندسهٔ تصویری، قضیهٔ پاسکال، نخستین ماشین حساب، مثلث پاسکال یا گراف ضریب دو جمله یی، حساب دیفرانسیل و انتیگرال و بعضی از خواص منحنی سیکلوئید به او منسوب است که سرانجام در سال 1662 درگذشت.



افاده های الجبری



افاده های الجبری را که در سطوح شکل مقابل تحریر شده نامگذاری نمایید.

فعالیت

افاده های زیر را در نظر بگیرید:

$a)\quad 2x \qquad b)\quad \frac{1}{3}xy^3 \qquad c)\quad \sqrt{2}xym^t \qquad d)\quad 9x^2$

$e)\quad 5x \qquad f)\quad 2xy^3 \qquad g)\quad 3x^2 \qquad h)\quad \frac{4x^2}{x-1}$

- یک حده های که باهم مشابه اند نشانی کنید.
- افاده‌های الجبری زیر را تا حد ممکن ساده کنید.

$a)\, 2x + 6x^2 + \sqrt{2}xym^4 \qquad b)\, 3x^2 + 6x^2 \qquad c)\, \frac{1}{3}xy^3 + 2x \qquad d)\, \frac{1}{3}xy^3 + 2xy^3$

- افاده‌هایی که ساده نمی‌شوند آن را چگونه باید نوشت و برای هر یک چه نام هایی پیشنهاد می کنید.
- بزرگ ترین توان افاده ها را نظر به x در هر حالت تعیین کنید.

از فعالیت فوق می توانیم بنویسیم که:

هرگاه در یک افادهٔ الجبری پس از ساده کردن حدهای مشابه، یک حد داشته باشیم آن را یک حده(Monomial)، اگر جمع ویا تفریق دو حد را داشته باشیم آن را دو حده(Binomial) اگر جمع و یا تفریق سه حد داشته باشیم آن را به نام سه حده(Trinomial) و افادهٔ الجبری یک یا چند حده را پولینوم(Polynomial) می‌نامیم، به شرطیکه توانهای حروف(متحولین) شان در ست اعداد مکمل $C = \{0, 1, 2 \ldots\}$ شامل باشند.

در هر افادهٔ الجبری بزرگترین توان نظر به یک متحول خاص را درجهٔ آن افادهٔ الجبری نظر به آن متحول می گویند.

مثال: جدول زیر را کامل کنید:

درجهٔ افاده		نامگذاری				افاده های الجبری
نظر به x	نظر به y	یک حده	دو حده	سه حده	چند حده	
						$\sqrt{32}\,y^2 - 3y + 2y^3$
2			✓			$3x^2 - 7x$
						$6x^2 - 4x - 1$
						$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$
						$13x - 2y^3 + 6x^3y$
						$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$
						$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$

تمرین

1- افاده‌های زیر را ساده نموده بعد درجهٔ آنها را نظر به هر یک از متحول‌ها تعیین کنید.

$a)\ \ x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x$ $\qquad$ $b)\ \ \sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$

2- افاده‌های الجبری زیر چندحده بوده، درجهٔ هر کدام آن‌ها را نظر به هر یک از متحول‌ها تعیین کنید:

$a)\ \ 6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5$ $\qquad$ $b)\ \ 8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$

3- درافاده‌های A و B زیر حدود مشابه را مشخص و چند حده را ساده کنید.

$$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$$

$$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$$

ضرب افاده‌های الجبری

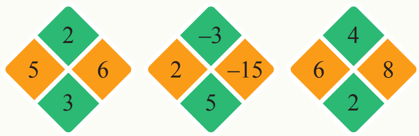
$$(x+a)(x+b)$$
$$= x^2 + (a+b)\,x + ab$$

ضرب افاده های دو حده

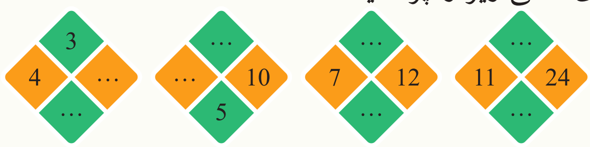
اگر a و b دو عدد باشند با ضرب نمودن قوس های مقابل بگویید که حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد مذکور مساوی به کدام عدد ها اند؟

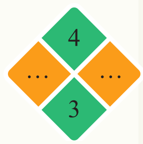
فعالیت

- چه رابطه یی بین اعداد در هر مربع وجود دارد؟

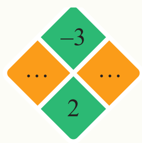


- بااستفاده از رابطه فوق جاهای خالی زیر را پر کنید:



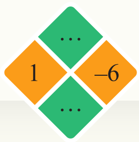


$(x+4)(x+3) = x^2 + \ldots\ldots x + \ldots\ldots. x + \ldots\ldots\ldots. = x^2 + \ldots..\ x + \ldots$



$(x-3)(x+2) = x^2 + \ldots\ldots x - \ldots..\ x - \ldots. = x^2 - \ldots.\ x - \ldots.$

$x^2 + 8x + 12 = (x + \ldots\ldots..)(x + \ldots\ldots\ldots)$



$x^2 + x - 6 = (x - \ldots\ldots\ldots)(x + \ldots\ldots\ldots.)$

از فعالیت ذکر شده به مشاهده می رسد که:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+a\times b$$

مثال: عملیه های ضرب زیر را انجام دهید.

$a)\quad (t-4)(t+5)$ $\qquad b)\quad (a+3)(a+4)$

$c)\quad (x-4)(x+2)$ $\qquad d)\quad (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$

حل:

$a)\quad (t-4)(t+5)=t^2+(-4+5)t+(-4\times 5)=t^2+t-20$

$b)\quad (a+3)(a+4)=a^2+(3+4)a+(3\times 4)=a^2+7a+12$

$c)\quad (x-4)(x-2)=x^2+(-4-2)x+(-4\times -2)=x^2-6x+8$

$d)\quad (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})=y^2+(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})y+(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2})=y^2+\frac{7}{6}y+\frac{2}{6}$

تمرین

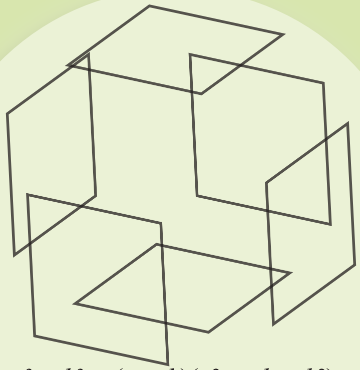
افاده های الجبری زیر را باهم ضرب نمایید:

$a)\quad (2x-1)(x+3)$ $\qquad b)\quad (\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{2})$

$c)\quad (a-3)(a+4)$ $\qquad d)\quad (0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

مجموع و تفاضل مکعبات

به شکل مقابل توجه نموده و بگویید که این سطوح کدام شکل منظم هندسی را می سازند؟



فعالیت

• در جدول زیر جاهی خالی را پر کنید:

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
–3	2				
3	–2				
4	4				

• چه رابطه یی بین دو ستون تحت a^3+b^3 و $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ مشاهده می کنید؟

• آیا می توانید یک رابطهٔ مشابه را برای a^3-b^3 بنویسید؟

از فعالیت بالا می توان نتیجه گرفت:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

این روابط را می توانیم به شکل الجبری ثبوت نمود:

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2) \\
&= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 \\
&= a^3-b^3
\end{aligned}
$$

مثال 1: افاده های الجبری زیر را به اساس مطابقتهای a^3+b^3 و a^3-b^3 تجزیه کنید:

$a)\ b^3-8 \qquad b)\ a^6b^6-x^3y^3 \qquad c)\ h^3+\dfrac{1}{h^3}$

حل: ابتدا افاده های الجبری را به شکل مطابقت $a^3 \pm b^3$ تبدیل نموده، بعداً به کمک مطابقت آن را تجزیه می نماییم:

$a)\ b^3-8=b^3-2^3=(b-2)(b^2+2b+4)$

$b)\ a^6b^6-x^3y^3=(a^2b^2)^3-(xy)^3=(a^2b^2-xy)(a^4b^4+a^2b^2xy+x^2y^2)$

$c)\ h^3+\dfrac{1}{h^3}=h^3+(\dfrac{1}{h})^3=(h+\dfrac{1}{h})(h^2-1+\dfrac{1}{h^2})$

مثال 2: افادهٔ $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ را ساده کنید.

حل: ابتدا مطابقت صورت را به شکل انکشاف یافتهٔ آن می نویسیم:

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=x-y$$

تمرین

افاده های زیر را توسط مطابقت ها تجزیه نمایید.

$a)\ a^6b^6+x^3y^3 \qquad b)\ 8+b^3 \qquad c)\ x^{12}-y^{12}$

$d)\ 125x^3+y^3 \qquad e)\ 0.125x^3-1 \qquad f)\ \dfrac{1}{x^3}+1$

$g)\ 8-64a^3b^6 \qquad h)\ 8a^3-27b^3 \qquad i)\ b^6-1$

تقسیم افاد های الجبری

$$\frac{2xy^2-4x^2y^4}{-2xy^2}=?$$

توجه نمایید! افادهٔ مخرج به کدام افادهٔ صورت ارتباط دارد؟ می توانید آن را ساده سازید؟

فعالیت

- وقتی کسری مانند $\frac{995}{7}$ را دیگر نتوانیم ساده‌یا اختصار کنیم، چه عملی انجام می‌دهیم؟
- افاده‌های الجبری زیر را تا آنجا که ممکن است ساده کنید:

$a)\ \frac{2m^2y-3x^3y^4+24xy^3}{-3xy^2}\ ,\quad x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$ $\qquad b)\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}\ ,\quad x\neq 2$

$c)\ \frac{x^3-x^2-x-6}{x+2}\ ,\quad x\neq -2$

- به عملیات زیر توجه نموده توضیح دهید که در حل پی در پی چه کاری انجام شده است؟ چرا؟

$$a)\quad \begin{array}{r|l} 995 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{-7} & 142 \\ 29 & \\ \underline{28} & \\ 15 & \\ \underline{14} & \\ 1 & \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{r|l} x^3-2x^2-11x-6 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{\pm x^3\pm 2x^2} & x^2-4x-3 \\ -4x^2-11x & \\ \underline{\mp 4x^2\mp 8x} & \\ -3x-6 & \\ \underline{\mp 3x\mp 6} & \\ 0 & \end{array}$$

- در حل جز (a) چراعملیهٔ تقسیم را از اولین رقم چپ یعنی عدد 9 شروع کردیم؟
- فکر کنید! عملیهٔ تقسیم در جز (b) را چرا از x^3 آغاز نمودیم؟

مرتب کردن و نوشتن یک افادهٔالجبری از بزرگترین به کوچکترین توان را ترتیب نزولی پولینوم ها می‌نامند.

در تقسیم دو افادهٔالجبری مراحل زیر را انجام می دهیم:

1- پولینوم مقسوم و مقسوم علیه را به شکل نزولی ترتیب می‌نماییم.

2- حد اول پولینوم مقسوم را بالای حد اول پولینوم مقسوم علیه تقسیم می نماییم و حاصل تقسیم آن حد اول خارج قسمت می‌باشد.

3- خارج قسمت حاصل شده را به هر حد مقسوم علیه ضرب نموده و حاصل ضرب را از حدود مشابه مقسوم تفریق می‌نماییم.

4- حد بعدی مقسوم را پایین نموده پهلوی باقی مانده می گذاریم، بعداً حد اول افاده را بالای حد اول مقسوم علیه تقسیم و حاصل آن را به همه حدود مقسوم علیه ضرب، حاصل آن را از افادهٔ باقی ماندهٔ مقسوم تفریق می نماییم.

5- مراحل 2، 3 و 4 را تا وقتی ادامه می‌دهیم که حدود باقی مانده صفر و یا درجهٔ آن به اندازهٔ یک از مقسوم علیه کمتر گردد.

مثال 1: افاده $x^3-3x^2-23x+30$ را بالای $x-6$ تقسیم نمایید.

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2-23x+30 & x-6 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 \mp 6x^2} & x^2+3x-5 \\ 3x^2-23x & \\ \underline{-3x^2 \mp 18x} & \\ -5x+30 & \\ \underline{\mp 5x \pm 30} & \\ 0 & \end{array}$$

مراحل تقسیم

$$\left.\begin{array}{l} I-\quad \dfrac{x^3}{x}=x^2 \\ II-\quad \dfrac{3x^2}{x}=3x \\ III-\quad \dfrac{-5x}{x}=-5 \end{array}\right\}$$

مثال 2: افادهٔ $x^5-2x^3+x^2-8x+4$ را بالای افادهٔ x^2-x-4 تقسیم کنید.

حل: پولینوم مقسوم و مقسوم علیه را به شکل نزولی ترتیب نموده بعداً عملیه تقسیم را انجام می‌دهیم.

مراحل تقسیم

$$
\left.\begin{array}{l}
I- \quad \dfrac{x^5}{x^2}=x^3 \\[2ex]
II- \quad \dfrac{x^4}{x^2}=x^2 \\[2ex]
III- \quad \dfrac{3x^3}{x^2}=3x \\[2ex]
IV- \quad \dfrac{8x^2}{x^2}=8
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+0.x^4-2x^3+x^2-8x+4 & x^2-x-4 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5\mp x^4\mp 4x^3} & x^3+x^2+3x+8 \\
x^4+2x^3+x^2 & \\
\underline{-x^4\mp x^3\mp 4x^2} & \\
3x^3+5x^2-8x & \\
\underline{-3x^3\mp 3x^2\mp 12x} & \\
8x^2+4x+4 & \\
\underline{-8x^2\mp 8x\mp 32} & \\
12x+36 &
\end{array}
$$

همان‌طوریکه برای یافتن صحت تقسیم دو عدد بالای همدیگر دو شرط را بررسی می‌کردیم، برای یافتن صحت تقسیم دو افادهٔ الجبری بالای همدیگر نیز دو شرط زیر باید بررسی شود:

1- حاصل‌ضرب خارج قسمت و مقسوم‌علیه جمع باقیمانده باید با افادهٔالجبری مقسوم برابر باشد.

2- درجهٔ باقیمانده از درجهٔ مقسوم‌علیه باید به اندازهٔ یک کوچکتر باشد.

طوریکه در مثال 2:

$$(x^2-x-4)(x^3+x^2+3x+8)+12x+36$$
$$=x^5-2x^3+x^2-8x+4$$

مثال 3: افادهٔ $2x^2+x^4-3x+1$ را بالای افادهٔ $x+3$ تقسیم کنید.

حل: ابتدا افاده های مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل نزولی ترتیب می‌دهیم.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0\cdot x^3 & +2x^2 & -3x & +1 & x+3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & \pm 3x^3 & & & & x^3-3x^2+11x-36 \\ \cline{1-2}
 & -3x^3 & +2x^2 & & & \\
 & \mp 3x^3 & \mp 9x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 11x^2 & -3x & & \\
 & & \pm 11x^2 & \pm 33x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -36x & +1 & \\
 & & & \mp 36x & \mp 108 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 109 &
\end{array}
$$

تمرین

– تقسیم نمایید در پایان درست بودن تقسیم را بررسی کنید.

1) $(2t^3-4t^2-2t-6)\div(t^2+9t+7)$

2) $(1-x^2-x)\div(1-x)$

3) $(2y^3+y-3y)\div(y^2-3y-1)$

4) $(2x^3+5x^2-x-1)\div(x+3)$

خلاصهٔ فصل پنجم

• افاده الجبری که از یک حد تشکیل شده باشد به نام مونوم یا یک حده یاد می‌شود،

مانند: ax^n ، $2x$, $-5x^3y^2$

• افاده‌الجبری که از دو حد تشکیل شده باشد به نام باینوم یا دو حده یاد می‌شوند،

مانند: ax^2+b

• افاده‌الجبری که از سه حد تشکیل شده باشند به نام ترینوم یا سه حده یاد می‌شوند،

مانند: ax^2+bx+c

• افاده‌الجبری که از یک یا چندین حد تشکیل شده باشند و توانهای حروف آنها در ست اعداد مکمل شامل باشند به نام پولینوم یاد می‌شوند.

مانند: $12,-2x^2$ و $12,x,\ ax^5+bx^3+cx^2-x-d$ ... .

• بزرگترین توان نظر به یک متحول خاص به نام درجهٔ پولینوم نظر به آن متحول یاد می شود.

• ترتیب پولینوم که از چپ به راست از بزرگترین توان به طرف کوچکترین توان ترتیب شده باشد به نام ترتیب نزولی یاد می‌شود.

• مجموعه و تفاضل مکعبات:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

تمرینات فصل پنجم

• در سـؤالات زیر برای هر سـؤال چهار جواب داده شـده اسـت، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- حاصل ضرب افاده های $(x-2)(x+3)$ عبارت است از:

a) x^2+5x+6 b) x^2-5x-6

c) x^2+x-6 d) x^2-x+6

2- حاصل تقسیم $\dfrac{2x-4x^3+2x^2+16x-8}{2x^2-8}$ عبارت است از:

a) $-2x+1$ b) $(-2x+1)(2x)+\dfrac{-2x}{2x^2-8}$

c) الف و ب d) هیچکدام

3- افادۀالجبری $6x^2y^6m^9$ چند حده است:

a) سه حده b) شش حده

c) یک حده d) دو حده

• جاهای خالی را با کلمات و جملات مناسب پر کنید.

1- افادهٔ الجبری $2x^3-4x^2+3x-1$ یک افادهٔ............. درجه..................است.

2- حاصل تقسیم $\frac{x^2-1}{x+1}$ عبارت از........................ است.

3- حاصل ضرب $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$ عبارت از....................... است.

4- $a^3+b^3=(............)(..............................)$

5- در هر افادهٔ الجبری ....توان نظر به یک متحول خاص را درجهٔ آن افادهٔ الجبری نظر به آن .... می گوییم.

• کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام آن غلط است، در مقابل صحیح علامهٔ(ص) و در مقابل غلط علامهٔ(غ) بگذارید.

1- (   )افادهالجبری که از یک یا چندین حد تشکیل شده باشند و توانهای متحولین آنها در ست اعداد مکمل شامل باشند به‌نام پولینوم یاد می گردند.

2- (   ) $a^3-b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$

3- (   ) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

4- (   ) مرتب کردن و نوشتن یک افادهٔالجبری از بزرگترین به کوچکترین توان را ترتیب نزولی چند حده می‌نامیم.

• سؤالات زیر را حل کنید.

1- ساده سازید.

$$a)\ \frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}$$

$$b)\ \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$c)\ \frac{a^2b^{-2}-b^2a^{-2}}{ab^{-1}-ba^{-1}}$$

2- تقسیم نمایید.

$$a)\ \frac{12a^2-4a+20}{40-5a}$$

$$b)\ \frac{a^4-b^4}{a-b}$$

$$c)\ 2x^3-x^2-4\div(x-\frac{1}{2})$$

$$d)\ (x^3-5x+6)\div(x-2)$$

$$e)\ x^2-5x+64\div(-x+5)$$

فصل ششم

نامساوات

نـامسـاوات
Inequality

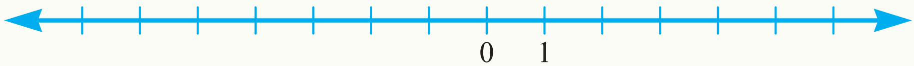
ترازو در کدام حالت قرار دارد چرا؟

در زنده گی روزانه عموماً نیازمند به مقایســه کمیت‌های نامســاوی هســتیم، مثلاً برای درجه‌بندی شــاگردان یک صنــف مجموعه نمرات آن‌ها از زیــاد به کم درجه بندی می‌شود، آیا شما می توانید نمونه‌های دیگری از زنده گی روزانه مثال دهید، که در آن کمیت غیرمساوی با هم مقایسه شده باشند.

هر گاه اعداد توســط یکی از علایم $<,\leq,>$ و $\geq$ با هم ارتباط داشــته باشــند به نام نامساوات یاد می‌شوند. مانند: $4>5,\ \ 2<3-\ ...$

فعالیت

موقعیت اعداد $3,\frac{-3}{2},\sqrt{2},-4,\frac{2}{3}$ را بالای محور اعداد زیر تعیین کنید.



- با استفاده از علامت مناسب، اعداد فوق را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید.
- چه رابطه یی بین ترتیب اعداد و محل قرار گرفتن آنها روی محور اعداد ملاحظه می گردد.

مشاهدات فعالیت فوق را می توان طور زیر خلاصه کرد:

بالای محور اعداد، عددی که به طرف راســت عــددی دیگری قرار دارد، بزرگتر از عددی است که طرف چپ آن قرار دارد.

بصــورت عموم گاه b,a و c ســه عــدد حقیقی باشــند، مــی توانیم بنویســیم که:

$$a<b\ ,\ b<c\quad\Rightarrow\quad a<c$$

فعالیت

- دو عدد نامساوی را انتخاب نموده رابطه بین آنها را با استفاده از علامت بزرگتر یا کوچکتر نشان دهید.
- به هر دو طرف نا مساوات فوق عدد 5 را جمع کنید، آیا در جهت نامساوات تغییری به میان می آید؟
- از هر دو طرف نامساوات عدد 3 را تفریق کنید، آیا در جهت نامساوات تغییری به میان می آید؟

بصورت عموم نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر می توان بیان کرد:

برای همه اعداد حقیقی b, a و c اگر $a<b$ باشد پس: $a+c<b+c$

$a-c<b-c$

فعالیت

- دو عدد نامساوی را انتخاب‌نموده و رابطه بین آنها را با استفاده از علامهٔ نامساوی ($<$)نشان دهید.
- هر دو طرف نامساوات فوق را در عدد 4 ضرب کنید، آیا در جهت علامهٔ نامساوات تغییری به وجود می آید؟
- هر دو طرف نامساوات فوق را در عدد -4 ضرب کنید، آیا در جهت نامساوی تغییری به میان می آید؟
- در نامساوات $4<7$ اگر در هر دو طرف نا مساوی، اعداد را معکوس نماییم، آیا در جهت علامهٔ نامساوات تغییری به وجود می آید؟

بصورت عموم مشاهدات فعالیت فوق را می توان طور زیر بیان کرد:

برای همه اعداد حقیقی b, a و c داریم که اگر: $a<b$ ، $0<c \Rightarrow ac<bc$

$a<b$ ، $c<0 \Rightarrow ac>bc$

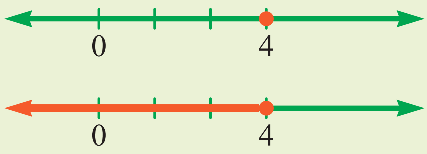
$0<a<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

به یاد داشته باشید که عملیهٔ تقسیم عکس عملیهٔ ضرب است، یعنی اگر بخواهیم عددی را بر عدد a تقسیم کنیم مثل آن است که آن عدد را در $\frac{1}{a}$ ضرب کنیم، بنابرآن همهٔ خواص ضرب نامساوات ها برای عملیهٔ تقسیم نیز قابل تطبیق است.

تمرین

با جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کردن یک عدد مثبت دلخواه و یک عدد منفی به اطراف نامساوات $-3<9$ خواص نامساوات را تحقیق کنید.

حل نامساوات خطی



دو جملهٔ الجبری $x=4$ و $x\leq 4$ را در نظر بگیرید.

چه شباهت و چه فرقی بین این دو عبارت می‌بینید؟

فعالیت

- برای کدام قیمت عددی x معادلهٔ $x+3=7$ صدق می کند؟
- آیا به غیر از قیمت عددی دریافت شدهٔ x، قیمت دیگری وجود دارد که، در معادله صدق کند؟
- برای کدام قیمت عددی x نامساوات $x+3<7$ صدق می کند؟
- آیا غیر از قیمت عددی دریافت شدهٔ x، قیمت دیگری وجود دارد که به نامساوات فوق صدق کند؟
- برای چند قیمت عددی x نامساوی فوق صحیح است؟

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود که نامساوات‌ها برخلاف مساوات‌ها دارای حل‌های زیادی اند.

افاده های الجبری که توسط یکی از علایم $>$، $<$، $\leq$, $\geq$ با هم دیگر مرتبط شده باشند و در آن متحول دارای توان یک باشد به نام نامساوات یک مجهولهٔ درجه یک و یا نامساوات خطی یاد می‌شود.

نامساوات‌های زیر نمونه‌هایی از نامساوات‌های درجه یک یا خطی می‌باشند.

$$x+3<0 \qquad , \qquad 2x-\frac{1}{3}>3-x$$

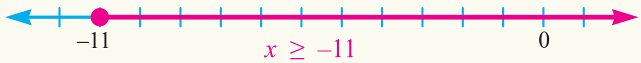
$$6x+7\leq 5 \qquad , \qquad \frac{x}{5}+\sqrt{2}\geq 12$$

بصـورت عموم برای پیدا کردن قیمت‌های عددی x که در نامسـاوات صدق کند آن نامسـاوات را با اسـتفاده از خواص آنها طوری تغییر می‌دهیـم که در یک طرف آن مجهول و در طرف دیگر آن اعداد قرار گیرد.
هدف از حل نامساوات این است که برای متحول آن ساحه، قیمت‌هایی را دریابیم که در آن ساحه نامساوات حقیقت داشته باشد که این ساحه را به نام ساحهٔ حل نامساوات یاد می کنند.

مثال 1: نامساوی $x+4 \geq -7$ را حل کنید و ساحهٔ حل نامساوات را روی محور اعداد نشان دهید.

حل: با اضافه کردن عدد -4 به اطراف نامساوات داریم:

$$x+4-4 \geq -7-4$$
$$x \geq -11$$



مثال 2: نامساوات $2x+1>5$ را حل کنید.

حل: با استفاده از خواص نامساوات می‌توانیم معلوم را در یک طرف و مجهول را به طرف دیگر نامساوات به شکل زیر انتقال دهیم:

$$2x+1>5$$

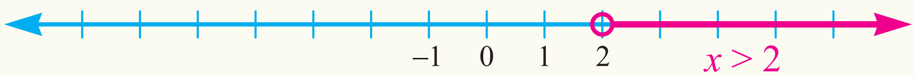
از اطراف نامساوات، عدد 1 را تفریق می کنیم:

$$2x+1-1>5-1$$
$$2x>4$$

اطراف نامساوات را به 2 تقسیم یا در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم:

$$\frac{1}{2}\times(2x)>\frac{1}{2}\times 4$$
$$x>2$$

یعنی برای تمام قیمت‌های بزرگتر از 2 نامساوات فوق صدق می کند. این ساحهٔ اعداد را روی محور اعداد طور زیر نشان داده می توانیم.



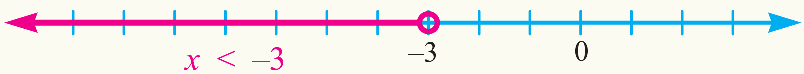
برای حل غیر مساوات نکات زیر را در نظر می گیریم:

- معلوم را به یک طرف و مجهول را به طرف دیگر نا مساوات با در نظر داشت خواص نامساوات انتقال می دهیم.
- اعداد معلوم را باهم و حدود مجهول را با هم جمع می کنیم.
- جهت یافتن قیمت‌های عددی متحول اطراف نامساوات را با در نظر داشت خواص نامساوات بر ضریب متحول تقسیم می کنیم.

مثال 3: نامساوات $3x+1<x-5$ را حل کنید.

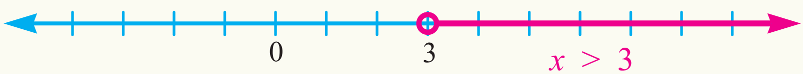
حل:

$$3x-x<-5-1$$
$$2x<-6$$
$$x<-\frac{6}{2}$$
$$x<-3$$



مثال 4: نامساوات زیر را حل کنید.

$$x+5<3x-1$$
$$x-3x<-1-5$$
$$-2x<-6$$
$$\frac{-2x}{-2}>\frac{-6}{-2}$$
$$x>3$$



تمرین

حل نامساوات‌های زیر را به دست‌آورده ساحهٔ حل آن را بالای محور اعداد نشان دهید.

$a)\ 4x \geq 8$

$b)\ 8 + x < 5$

$c)\ 5 + x < 2x - 1$

$d)\ -3x - 4 > x + 7$

$e)\ \frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

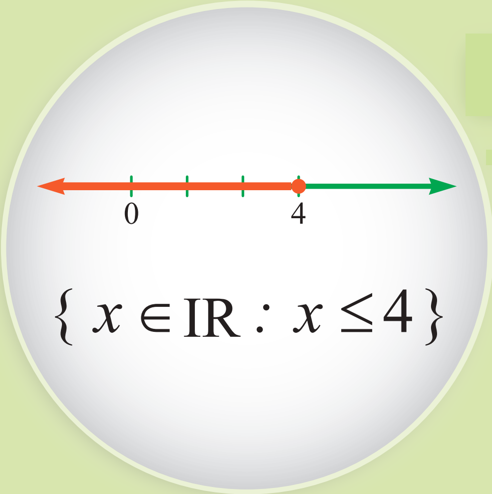
$f)\ 0.5 - x < 3x - 1$

$g)\ 2 - x \leq 2$

$h)\ 2x - 5 - 7x > 0$

$i)\ 5x + 6 > 0$

انتروال‌ها

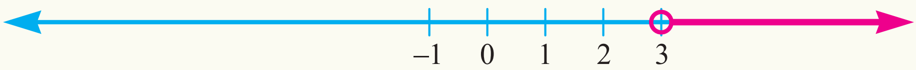


در حل یک نامساوات اعداد زیادی را می‌توان به دست آورد که حل آن نامساوات باشند. همهٔ اینگونه اعداد حقیقی را در یک ست در نظر گرفته آن را ست حل نامساوات می‌نامیم.

طور مثال $x > 3$ ست حل نامساوات $3x - 2 > 7$ است. زیرا هر عدد بزرگتر از 3 در نامساوات $3x - 2 > 7$ صدق می کند، این ست حل ها را به زبان ریاضی طور زیر نشان می‌دهیم: $\{x \in IR : x > 3\}$

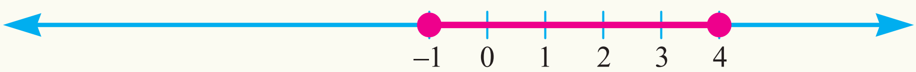
و می خوانیم که: x شامل اعداد حقیقی طوری که x بزرگتر از 3 باشد.

این ست اعداد را همچنین روی خط اعداد طور زیر نشان می دهیم:



مشاهده می‌شود که این مجموعهٔ اعداد در یک قسمت از محور اعداد شامل می شود که در ریاضی آن را به نام انتروال معرفی می کنیم.

در محور اعداد زیر انتروال مشـخص شده شامل اعدادی است که بزرگتر یا مساوی از -1 و کوچکتر یا مساوی از 4 است.

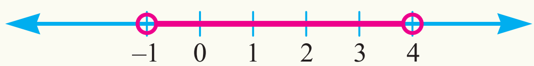


این انتروال را به شکل $[-1,4]$ یا مجموعهٔ $\{x \in IR : -1 \le x \le 4\}$ نشان می‌دهیم.

دقت کنید که اعداد -1 و 4 در انتروال شامل هستند. در حالتی که نقاط انتهایی خود شامل انتروال باشند، انتروال را انتروال بسته می گویند.

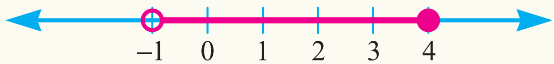
اگر انتروال نقاط -1 و 4 را در بر نداشته باشد، آن را به نام انتروال باز یاد می کنند و طور زیر آن را نمایش می‌دهیم.

$$(-1,4) = \{x \in IR : -1 < x < 4\}$$



اگــر انتروال قبل تنها یکی از نقاط انتهایی مثلاً 4 را در بر داشــته باشــد، آن را به نام انتروال نیمه باز یا(نیمه بسته) می‌خوانیم و آن را طور زیر نمایش می‌دهیم:

$(-1,4]=\{x \in IR : -1 < x \leq 4\}$



در حالت کلی برای هر دو عدد حقیقی a و b که در آن a<b باشد داریم:

انتروال بستهٔ a و b — $[a,b]=\{x\in IR : a\leq x\leq b\}$

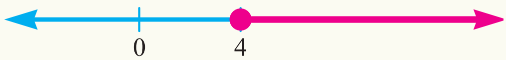
انتروال باز a و b — $(a,b)=\{x\in IR : a< x< b\}$

انتروال نیمه باز a و b — $(a,b]=\{x\in IR : a< x\leq b\}$

انتروال نیمه بسته a و b — $[a,b)=\{x\in IR : a\leq x< b\}$

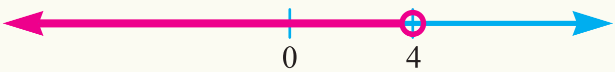
توجه کنید که روی محور اعداد می توانیم انتروال‌هایی را در نظر بگیریم که از یک طرف محدود نباشد. در این حالت انتروال را با استفاده از علامت ∞ که آن را بی‌نهایت می‌خوانیم، نمایش می‌دهیم. مثلاً ست اعداد بزرگتر یا مساوی به 4 را به صورت زیر نشان می دهیم:

$\{x\in IR : 4\leq x\}=[4,\infty)$



و اعداد کوچکتر از 4 عبارت اند از:

$\{x\in IR:4>x\}=(-\infty,4)$



بصورت عموم اگر a یک عدد حقیقی باشد داریم:

اعداد حقیقی بزرگتر از a — $(a,\infty)=\{x\in IR : a< x\}$

اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی از a — $[a,\infty)=\{x\in IR : a\leq x\}$

اعداد حقیقی کوچکتر از a — $(-\infty,a)=\{x\in IR : x< a\}$

اعداد حقیقی کوچکتریا مساوی از a — $(-\infty,a]=\{x\in IR : x\leq a\}$

تمرین

1– انتروال‌های زیر را به شکل ست بنویسید بعد به‌روی خط اعداد نشان دهید:

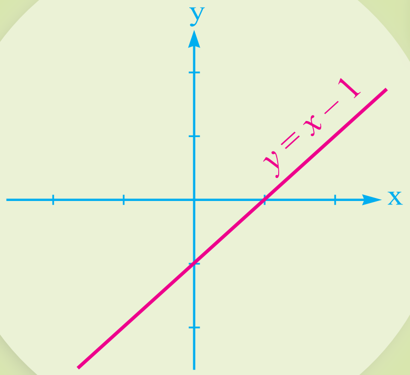
1) $[5,7]$ 2) $(9,-3)$ 3) $[-2,8)$ 4) $(6,1]$ 5) $[2,\infty)$

2– ست‌های زیر را به شکل انتروال بنویسید:

1) $A=\{x\in IR:2< x< 6\}$ 2) $B=\{x\in IR:-3\leq x\leq 5\}$

3) $C=\{x\in IR:0\leq x< 4\}$

تعیین اشاره(علامه) بینوم درجه اول



در شکل مقابل برای کدام قیمت‌های x خط مستقیم $y=x-1$ بالای محور x و برای کدام قیمت‌های x خط پایین محور x است؟

فعالیت

- افادهٔ الجبری $2x-4$ چند حده است؟
- این افاده به کدام قیمت متحول x صفر است؟
- این افاده به کدام قیمت های متحول x مثبت است؟
- این افاده به کدام قیمت های متحول x منفی است؟

ارائهٔ ریاضیکی مطالب فوق را به طور خلاصه در یک جدول به صورت زیر نشان می دهند.

x	$x<2$	2	$x>2$
$2x-4$	$-$	0	$+$

در این جدول به مشاهده می رسد که بینوم $2x-4$ در عدد 2 مساوی صفر بوده، برای قیمتهای کوچکتر از 2 بینوم دارای اشارهٔ منفی در حالیکه برای قیمتهای بزرگتر از 2 بینوم دارای اشارهٔ مثبت است.

مثال: اشارهٔ بینوم $-\frac{1}{2}x+3$ را تعیین نمایید.

حل: اول قیمتی که بینوم در برابر آن صفر می گردد، تعیین می کنیم:

$$-\frac{1}{2}x+3=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x=-3 \quad \Rightarrow \quad x=6$$

سپس قیمت‌هایی که بینوم در برابر آنها مثبت می‌شود به دست می آوریم:

$$-\frac{1}{2}x+3>0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x>-3 \quad \Rightarrow \quad x<6$$

به همین ترتیب قیمت‌هایی که در برابر آن بینوم منفی می‌شود عبارت اند از:

$$-\frac{1}{2}x+3<0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x<-3 \quad \Rightarrow \quad x>6$$

نتایج به دست آمده را در جدول زیر خلاصه می کنیم:

x	$x<6$	6	$x>6$
$-\frac{1}{2}x+3$	$+$	0	$-$

یادداشت: در حالت کلی برای تعیین اشارهٔ $y=ax+b$ اول قیمتی که بینوم در آن مساوی به صفر می گردد به دست می‌آوریم و جدول تعیین اشارهٔ آن را طور زیر تشکیل می دهیم؛ اگر $a>0$ باشد داریم که:

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	مخالف علامهٔ a	0	موافق علامهٔ a

اگر $a<0$ باشد داریم که:

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	موافق علامهٔ a	0	مخالف علامهٔ a

تمرین

اشارهٔ افاده‌های الجبری زیر را تعیین کنید.

1) $3x-9$ 2) $7x-2$ 3) $\frac{3}{4}x-1$

4) $0.5x+10$ 5) $2x-4+x-1$ 6) $\frac{1}{2}x+3$

خلاصهٔ فصل ششم

• هرگاه اعداد توسط یکی از علایم $<, \leq, >, \geq$ باهم مرتبط شده باشند به نام نامساوات یاد می‌شوند.

• اگر به اطراف یک نامساوی یک عدد حقیقی را جمع و یا تفریق نماییم جهت نامساوی تغییر نمی کند.

• اگر اطراف یک نامساوی را به عددی حقیقی مثبت خلاف صفر ضرب و یا تقسیم نماییم جهت نامساوی تغییر نمی کند.

• اگر اطرف یک نامساوی را به یک عدد حقیقی منفی ضرب و یا تقسیم نماییم جهت نامساوی تغییر می کند.

انتروال بسته $[a,b]=\{x\in IR : a\leq x\leq b\}$

انتروال باز $(a,b)=\{x\in IR : a< x< b\}$

انتروال نیم باز $(a,b]=\{x\in IR : a< x\leq b\}$

انتروال نیم بسته $[a,b)=\{x\in IR : a\leq x< b\}$

تمرینات فصل ششم

• در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1– کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح است؟

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{6}\leq 2-\frac{1}{3}$ $\qquad b)\ \frac{3}{2}>\sqrt{2}$ $\qquad c)\ \sqrt{9+16}\geq 5$ $\qquad d)$ هر سه درست است.

2– کدام یک از ست‌های زیر ست حل نامساوی $x+3\leq 5$ است؟

$a)\ \{x\in IR: x\leq 2\}$ $\qquad b)\ \{x\in IR: 2\leq x\}$

$c)\ \{x\in IR: x\leq 8\}$ $\qquad d)\ \{x\in IR: x<-2\}$

3– کدام یک از انتروال‌های زیر حل نامساوات $2x+3>-1$ است؟

$a)\ [-2,\infty)$ $b)\ (2,\infty)$ $c)\ (1,\infty)$ $d)\ (-2,\infty)$

4- اگر $0 < a < b$ باشد، کدام یک از رابطه‌های زیر صحیح است؟

$a)\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ $b)\ \frac{-1}{b} < \frac{-1}{a}$ $c)\ -b < -a$ $d)$ جواب‌های a، b و c درست اند

• جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- در نامساوی $ax + b < 0$ ست همهٔ .... که نامساوی را صدق کند، به نام ست حل نامساوی فوق یاد می‌شود.

2- انتروال $[4,5]$ را به نام انتروال .... یاد می‌کنند.

3- بینوم $2x + 4$ برای قیمت‌های .... منفی می‌گردد.

• کدام یک از جمله های زیر صحیح و کدام یک آن غلط است، در مقابل صحیح حرف(ص) و در مقابل غلط حرف(غ) بگذارید.

1- (   )ست حل های یک نامساوی یک عنصر دارد.

2- (   )ست $\{x \in IR: 2 \le x < 5\}$ یک انتروال بسته است.

3- (   )ست حل های یک نامساوی خطی همیشه حل بی شمار دارد.

• سؤالات زیر را حل نمایید.

1- حل نامساوی های زیر را به دست آرید؟

$a)\ x - 2 < 3(2x - 9)$ $b)\ (x-3)(x+3) < 0$

2- انتروال‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید:

$a)\ [-1,2]$ $b)\ (-2,1]$ $c)\ [-1,1)$ $d)\ (-2,2)$

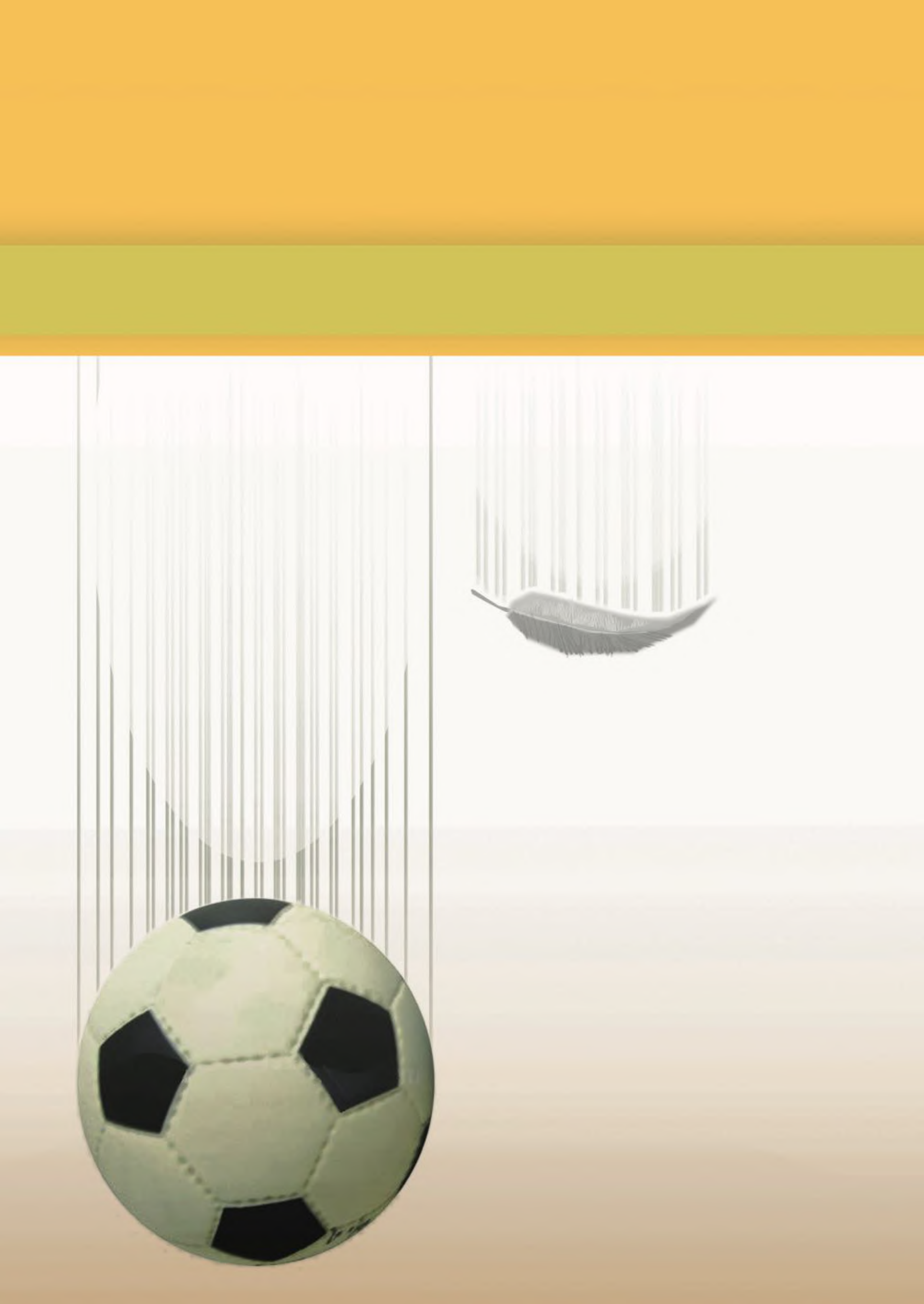
3- ست اعداد زیر را به شکل انتروال بنویسید و به روی محور اعداد نشان دهید.

$a)\ \{x \in IR: x \le 2\}$ $b)\ \{x \in IR: x \le 5\}$

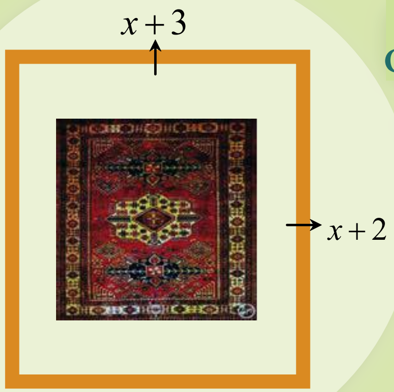
$c)\ \{x \in IR: -1 \le x \le 6\}$ $d)\ \{x \in IR: -4 < x < 2\}$

فصل هفتم

معادلات یک مجهوله درجه دوم



معادلات یک مجهوله درجه دوم
Quadratic Equations



اگر یک اطاق توسط یک قالین مربع شکل طوری فرش شود که طول اطاق به اندازهٔ $3m$ و عرض آن به اندازهٔ $2m$ از کنار قالین زیاد باشد مانند شکل مقابل بگویید که مساحت اطاق مذکور چقدر است؟

فعالیت

- افادهٔ الجبری را تعریف کنید.
- معادله را تعریف کنید.
- یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه اول را مثال دهید.
- شکل عمومی معادلهٔ یک مجهوله درجه یک را بنویسید.
- در معادلهٔ $(x-2)(x+3)=0$ حاصل ضرب قوس ها را به دست آرید؟
- درجهٔ معادله بالا را با درجهٔ معادلهٔ $x+4=3x-1$ مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید:

معادلاتی که یک مجهول داشته و درجهٔ متحول آن مساوی به 2 باشد به نام معادلات یک مجهوله درجه دوم یاد می‌شوند. که شکل عمومی آن $ax^2+bx+c=0$ ، $a\neq 0$ بوده درحالیکه b,a و c اعداد حقیقی و x را مجهول درمعادله می گویند. اگر b=0 یا $c=0$ باشد در این صورت معادلهٔ درجه دو را معادلهٔ ناقص گویند.

مثال 1: عددی را به‌دست آرید که مربع آن به اندازهٔ عدد شش از خود عدد زیادتر باشد.

حل: اگر عدد را x بنامیم بناءً سؤال فوق را به شکل ریاضی طور زیر می نویسیم:

$x^2 = 6 + x$ یا $x^2 - x - 6 = 0$

برای حل این گونه معادلات از روشی باید استفاده کرد که از آن حل های معادله به دست آید، حل اینگونه مثالها را در درس بعدی بررسی خواهیم کرد.

مثال 2: در معادلات زیر ضرایب a، b و c را بنویسید:

حل:

$a)\ 2x^2 - 4x + 1 = 0$ $b)\ 3x - x^2 = 4$

$c)\ 4x^2 - 1 = 0$ $d)\ 7x^2 = 49$

جزء	معادلات	ضریب a	ضریب b	ضریب c
a	$2x^2 - 4x + 1 = 0$	2	–4	1
b	$3x - x^2 = 4$	–1	3	–4
c	$4x^2 - 1 = 0$	4	0	–1
d	$7x^2 = 49$	7	0	–49

تمرین

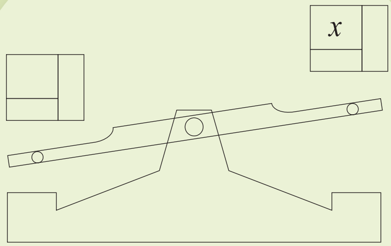
1- در معادلات زیر معادلهٔ درجه دوم کامل و ناقص را مشخص کنید؟

$a)\ 6 - 2x + x^2 = 0$ $b)\ 5x^2 - 3x + 1$ $c)\ \sqrt{2}x^2 - 4x = 0$ $d)\ -x^2 = 3$

2- در معادلات زیر ضریب های b, a و c را مشخص کنید.

$a)\ 6x^2 - 4x = 2$ $b)\ 3x - 4 = x^2$ $c)\ 4x - x^2 - 6 = 4x^2$

حل معادلات یک مجهولهٔ درجه دوم



آیا می‌توانید قیمتی را برای x پیدا نمایید تا ترازو به حالت تعادل آید؟

فعالیت

x	$2x+4$	$3x-1$
-3		
-2		
0		
5		

- حل معادلهٔ $2x+4=3x-1$ را به دست آرید.
- تساوی بالا را برای قیمت های مختلف x در جدول مقابل بررسی کنید.
- با توجه به جدول و سؤال فوق توضیح دهید که پیدا کردن حل‌های معادله یعنی چه؟
- جدول مقابل را تکمیل نموده از روی آن حل‌های معادلهٔ $x^2-4x+3=0$ را به دست آرید.

x	x^2-4x+3
-3	
-2	
-1	
0	
1	

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید:

قیمت‌هایی که مساوات را در یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم بر قرار می کند، حل معادلهٔ درجه دوم می‌نامند.

مثال 1: مطلوب است دریافت عددی که مربع آن مساوی به 12 واحد بیشتر از خودش باشد؟

حل: هرگاه عدد مذکور را x بنامیم. بیان الجبری آن شکل زیر را خواهد داشت.

$$x^2=x+12$$

چگونه می توان از مساوات فوق حل‌های آن را دریافت نمود.

هرگاه $x=1$ را در معادله قرار دهیم دیده می‌شود که طرف راست عدد 13 و طرف چپ عدد 1 به دست می آید.
با وضع نمودن یک قیمت دیگر $x=2$ در معادله مشاهده می‌نماییم که طرف راست مساوات عدد 14 و طرف چپ عدد 4 به دست می آید.
با وضع نمودن قیمت بعدی مثلاً $x=3$ مشاهده می گردد که طرف راست عدد 15 و طرف چپ عدد 9 است.
بالاخره با وضع نمودن قیمت بعدی $x=4$ مشاهده می نماییم که طرف راست عدد 16 و طرف چپ نیز عدد 16 است به مشاهده رسید که برای $x=4$، تساوی عددی $16=16$ بر قرار گردید، بنا بر این $x=4$ یک حل معادله می‌باشد.

خلاصه روش بالا را که برای دریافت حل معادله به کار بردیم می توانیم در جدول مقابل خلاصه کنیم.

x	x^2	$x+12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

آیا می توان طریقه عمومی حل یک معادله درجه دوم را به دست آورد؟

مثال 2: مطلوب است عددی که حاصل جمع مربع آن با عدد 1 مساوی به صفر باشد؟

حل: هرگاه عدد مذکور را x بنامیم افادهٔ الجبری سؤال فوق عبارت است از:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$$

مانند روش فوق با وضع نمودن اعداد جستجوی خود را برای حل معادله آغاز نموده پیش می‌رویم، به این منظور مانند بالا جدول روبرو را در نظر می گیریم.

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

از روی جدول می‌بینیم که با این روش نمی توان تعادل را بر قرار نمود، یعنی نمی‌توانیم عددی را برای x دریابیم که برای آن هر دو طرف معادله باهم مساوی گردد. از طرف دیگر مستقیماً از معادله دیده می شود که هر گاه عددی را مربع نموده با یک جمع نماییم هیچ وقت مساوی به صفر شده نمی‌تواند.
بنابر این معادله فوق حل ندارد.

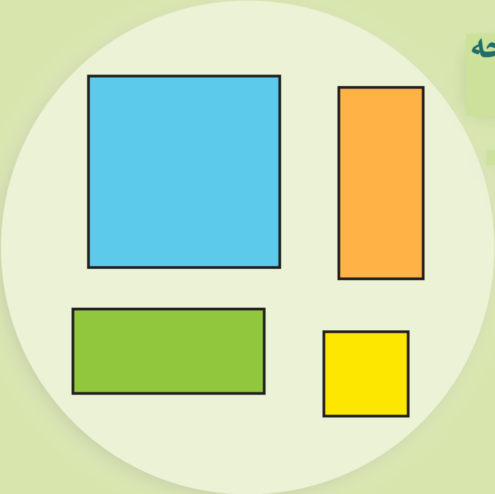
تمرین

1- یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم را بنویسید که حل نداشته باشد.

2- معادلات مقابل را حل کنید.

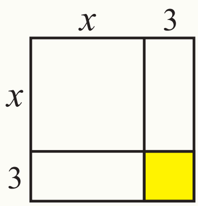
$a)\ x^2-1=0 \qquad b)\ x^2=0$

حـل معـادلات یک مجهولـه درجه دوم به طریقهٔ تکمیل مربع



سعی کنید با یکجا کردن این قطعات یک مربع کامل بسازید.

فعالیت



- طول ضلع مربع بزرگ چقدر است؟
- مساحت هر قسمت مربعات مستقل را روی شکل بنویسید.
- معادلهٔ $x^2+6x-40=0$ را در نظر بگیرید طوری آن را ترتیب کنید که عدد ثابت یک طرف و حدود شامل متحول در طرف دیگر آن قرار گیرند.
- مساحت مربع بزرگ چقدر است؟
- برای این که افادهٔ الجبری شامل متحول با مساحت مربع بزرگ برابر شود چه عددی به دو طرف مساوات اضافه شود؟
- با استفاده از رابطهٔ به‌دست آمدهٔ قیمت x (حل معادلهٔ درجه دوم) را به‌دست آرید.

از انجام فعالیت فوق می توان گفت که:

محمد بن موسی این روش را برای حل معادلات درجه دوم پیدا نمود با تأمین این روش در حل معادلات درجه دوم به صورت عمومی از آن استفاده به عمل می آید در این روش معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ به شکل $(x+p)^2=q^2$ در می آید. که مراحل تجزیه آن عبارت است از:

در صورتیکه $a=1$ باشد.

- ابتدا p را مساوی به نصف ضریب x قرار می‌دهیم، یعنی $p=\frac{b}{2}$
- سپس $q^2=-c+(\frac{b}{2})^2$ قرار می دهیم.
- درقدم آخر معادلهٔ $x+p=q$ را حل می کنیم.

مثال : معادلهٔ $x^2+2x-8=0$ را به طریقهٔ تکمیل مربع حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به شکل زیر می‌نویسیم.

$x^2+2x=8$

نصف ضریب x را به دست آورده، مربع آنرا به هر دو طرف معادله علاوه می‌نماییم:

$x^2+2x+1^2=8+1^2$

$x^2+2x+1=9$

$(x+1)^2=9$

$x+1=\pm 3 \Rightarrow x=2 \quad , \quad x=-4$

تمرین

معادلات زیر را به طریقهٔ تکمیل مربع حل نمایید.

$a)\ x^2+8x-24=0 \qquad b)\ x^2-x-\frac{5}{4}=0 \qquad c)\ x^2-6x-13=0$

فورمول محمد بن موسی

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

با تقسیم نمودن اطراف معادله $ax^2+bx+c=0$ به ضریب x^2 بگویید که مساوات مقابل درست است یا خیر؟

مشاهده نمودیم که معادله‌های درجه دوم یک مجهوله را در حالت عمومی به شکل $ax^2+bx+c=0$ می‌نویسیم، که در آن a ، b و c اعداد حقیقی و a خلاف صفر می‌باشد، برای حل کردن آن طوری زیر عمل می نماییم:

- برای معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ طرفین رابه عدد خلاف صفر مانند a تقسیم کنید.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

- اعداد ثابت را به یک طرف معادله و اعداد مجهول را به طرف دیگر قرار داده، مربع نصف ضریب x را به طرفین جمع می نماییم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-(\frac{c}{a})$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

برای ساده نویسی b^2-4ac را به Δ نشان میدهیم.

فعالیت

برای هر معادلهٔ درجه دوم به شکل $ax^2+bx+c=0$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

1- هر گاه $\Delta=b^2-4ac=0$ باشد، حل‌های معادله کدام‌هااند؟

2- هر گاه $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد، حل‌های معادله کدام‌هااند؟

3- هر گاه $\Delta=b^2-4ac<0$ باشد آیا معادله در ست اعداد حقیقی حل دارد؟

از فعالیت فوق نتایج زیر به دست می آید:

نتیجهٔ 1: حل هر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ در حالیکه اعداد a,b و c

حقیقی و $a \neq 0$ باشد $\Delta = b^2 - 4ac$ گردیده داریم که:

1- اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دو حله (جذر) مختلف دارد؛ که عبارت اند از:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- اگر $\Delta = 0$ باشد معادله دارای دو حله (جذر) مساوی یا مضاعف می باشد که قرار زیر است:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3- اگر $\Delta < 0$ باشد معادله حل (جذر های) حقیقی ندارد:

نتیجهٔ 2: حاصل جمع و حاصل ضرب حله ها (جذرها):

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

مثال 1: حله‌های معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ را دریافت کنید.

حل: در قدم اول قیمت Δ را پیدا می کنیم. $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\times1\times1 = 5$

چون $\Delta > 0$ است بناءً معادله دو حل مختلف العلامه دارد؛ که عبارت اند از:

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

مثال 2: حله‌های معادلهٔ $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را در صورت موجودیت پیدا کنید.

حل: داریم که: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4\times9\times4) = 144 - 144 = 0$

چون $\Delta = 0$ است معادله دو حل مساوی دارد. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2\cdot9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

مثال 3: معادلهٔ $5x^2 + 2x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: معادلهٔ مذکور حل ندارد زیرا $\Delta < 0$ است، یعنی:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times5\times1 = 4 - 20 = -16$$

مثال 4: در معادلهٔ $4x^2 - 3x - 1 = 0$ حاصل ضرب و حاصل جمع جذور معادله را دریابید.

حل: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad , \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$

تمرین

معادلات زیر را حل نمایید.

c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$ a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

خلاصهٔ فصل هفتم

- شکل عمومی هر معادلهٔ درجه دوم عبارت از $ax^2+bx+c=0$ بوده، طوریکه $a\neq 0$ باشد.
- معادلات شکل $ax^2+c=0$ و $ax^2+bx=0$ را به نام معادلات درجه دوم ناقص یاد می کنند.
- حل های معادلات $ax^2+bx=0$ عبارت از $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$ است.
- حاصل جمع جذرها از رابطهٔ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب جذور از رابطهٔ $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ به دست می آید.
- به‌صورت عمومی حل های هر معادلهٔ درجه دوم توسط فورمول $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به‌دست می آید که $\Delta=b^2-4ac$ است.
- هرگاه $\Delta>0$ باشد معادله دو حل حقیقی مختلف دارد.
- هرگاه $\Delta=0$ باشد معادله دو حل مساوی دارد.
- هرگاه $\Delta<0$ باشد معادله در ست اعداد حقیقی حل ندارد.
- جهت تشکیل معادلات درجه دوم از رابطهٔ $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\times x_2=0$ یا $(x-x_1)(x-x_2)=0$ استفاده می گردد.

تمرین فصل هفتم

• در سؤالات زیر به هر سؤال چهار جواب داده شده، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- در معادلهٔ $4x = 3x^2 - 1$ ضرایب b, a و c عبارت از:

الف) $a = 3 \ , \ b = 4 \ , \ c = 1$ ب) $a = -3 \ , \ b = 4 \ , \ c = 1$

ج) $a = 4 \ , \ b = 3 \ , \ c = -1$ د) هیچ کدام

2- حل های معادلهٔ $3x^2 - 8x + 5 = 0$ عبارتند از:

الف) $x_1 = 1 \ , \ x_2 = \frac{5}{3}$ ب) $x_2 = 1 \ , \ x_1 = -\frac{5}{3}$

ج) الف و ب د) هیچ کدام

3- حاصل جمع جذور معادلهٔ $x^2 - 10x + 16 = 0$ مساوی است به:

الف) $x_1 + x_2 = 5$ ب) $x_1 + x_2 = -5$

ج) $x_1 + x_2 = 8$ د) $x_1 + x_2 = 10$

4- اگر $\Delta > 0$ باشد:

الف) دو حل مساوی دارد. ب) معادله دوحل حقیقی و مختلف دارد.

ج) حل ندارد. د) یک حل دارد.

• جاهای خالی را پر کنید.

1- شکل عمومی معادلات یک مجهوله درجه دوم .... است.

2- $-\frac{b}{a}$ حاصل .... و $\frac{c}{a}$ حاصل .... است.

3- اگر .... باشد معادلهٔ درجه دوم حل ندارد.

4- اگر درجهٔ یک معادله برابر دو باشد معادله .... دارد.

• سؤالات های زیر را بخوانید به مقابل سؤالات صحیح آن حرف(ص) و در مقابل سؤالات غلط آن حرف(غ) بگذارید.

1- (   ) اگر $b^2-4ac<0$ باشد معادله در ست اعداد حقیقی حل ندارد.

2- (   ) فورمول محمد بن موسی $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ است.

3- (   ) برای تشکیل معادلات درجه دو از رابطه‌های $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\times x_2$ و $(x-x_1)(x-x_2)=0$ استفاده می گردد.

4- (   ) معادلاتی که یک مجهول داشته باشند و درجهٔ مجهول(متحول) آن مساوی به 2 باشد به نام معادلات یک مجهوله درجه دوم یاد می‌شوند.

• سؤالات زیر را حل کنید.

1- در معادلات زیر ضرایب b, a و c را نشان دهید و بگویید که کدام آنها معادلهٔ کامل و کدام آنها ناقص است:

$a)\ 3x^2-4x+1=0$ $\quad$ $b)\ 3x^2-1=0$ $\quad$ $c)\ 2x^2-6x=0$

2- معادلات زیر را توسط تکمیل مربع حل کنید:

$a)\ 4x^2+3x-1=0$ $\quad$ $b)\ x^2+\dfrac{x}{5}=\dfrac{6}{5}$

$c)\ 2x^2+3x+1=0$ $\quad$ $d)\ x^2+3x=0$

3- با استفاده از فورمول عمومی معادلات درجه دوم حله‌های معادلات زیر را دریابید.

$a)\ 7x^2-8x+1=0$ $\quad$ $b)\ x^2-3x+2=0$

$c)\ t^2-0.27+0.6t=0$

4- جذرها یا حل های معادلات درجه دوم در زیر داده شده‌اند معادلهٔ آن را بنویسید.

$a)\ -2, 0.5$ $\quad$ $b)\ 3,-1$ $\quad$ $c)\ 0,2$ $\quad$ $d)\ \sqrt{2}-1, 2$