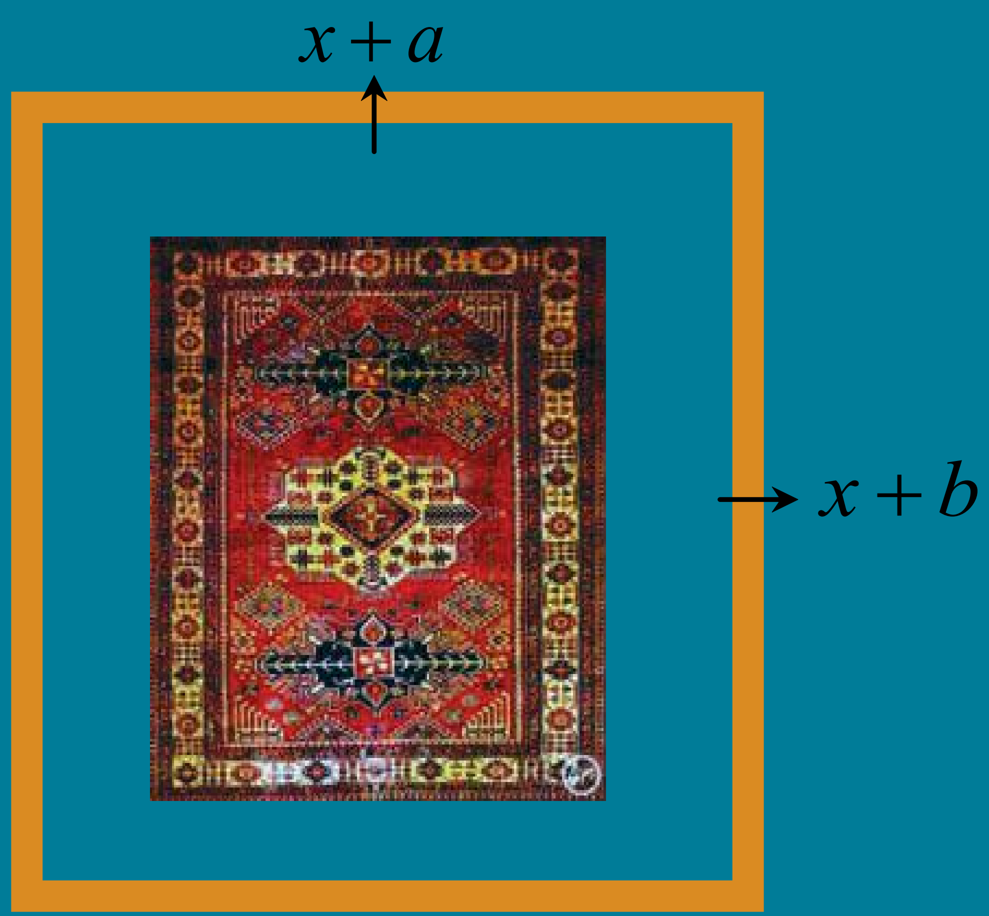
جمهوری اسلامی افغانستان
وزارت معارف
ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی

ریاضی

صنف دوازدهم

برای مدارس دینی



$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+a\cdot b$$

۱۳۹۸ هـ. ش.

ریاضی صنف دوازدهم (برای مدارس دینی)

curriculum@moe.gov.af

ریاضی
صنف دوازدهم

(برای مدارس دینی)

۱۳۹۸ هـ . ش.

مؤلفان

- سرمؤلف میرنقیب الله عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- حمدالله شیرزی عضو پروژۀ انکشاف نصاب تعلیمی.
- محمد داؤد غیرت عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- معاون مؤلف لینا صافی عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ایدیت علمی

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- سرمؤلف عبدالکبیر عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ایدیت زبان

- معاون مؤلف فرزانه شریف عضو علمی دیپارتمنت دری

کمیتۀ دینی، سیاسی و فرهنگی:

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

اشراف:

- دکتور شیر علی ظریفی رئیس پروژۀ انکشاف نصاب تعلیمی.

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحیم

پیام وزیر معارف

الحمدلله رب العالمین والصلاة والسلام علی رسوله محمد وعلی آله وأصحابه أجمعین، أما بعد:
نصاب تعلیمی معارف اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعهٔ علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد.
نصاب تعلیمی با گذشت زمان و تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زندگی، مطابق با نیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضهٔ معلومات، تطور و انکشاف نماید.
یکی از عرصه های نصاب تعلیمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعلیمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین مبین اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زندگی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.
علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنامندی سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصا انکشاف تدریجی نصاب تعلیمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفاء کرده اند.
مطالعهٔ دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان می دهد که نصاب تعلیمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پا بر جای دین اسلام، که برای همهٔ انسانها در همهٔ زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است.
کشور عزیز ما افغانستان با سابقهٔ درخشان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی مانند عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه و غیره، گواه واضح آنچه گفته شد می باشد.
همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند.
وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت ورسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعهٔ کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.
درین راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصین باتجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی، را با شرح و توضیح متون، جا بجا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت.
امیدوارم این تلاشهای قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده وسبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفیق

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

مقدمه

استادان عالیقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است که قوانین طبیعت را فورمول بندی می کند و مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارایه می نماید.

انسان ها در زنده گی روز مره به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکاء و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.

برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری داشته باشند، مسائل روزمرۀ زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل مانند میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.

به گونۀ که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسایل ضروری این علم را با درنظرداشت به فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تالیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند برود و رول مؤثر و مثمر را در جامعه بازی نمایند.

و الله ولی التوفیق

فهرست صفحه

فهرست

صفحه

فصل چهارم: افاده های الجبری

فصل پنجم: نامساوات

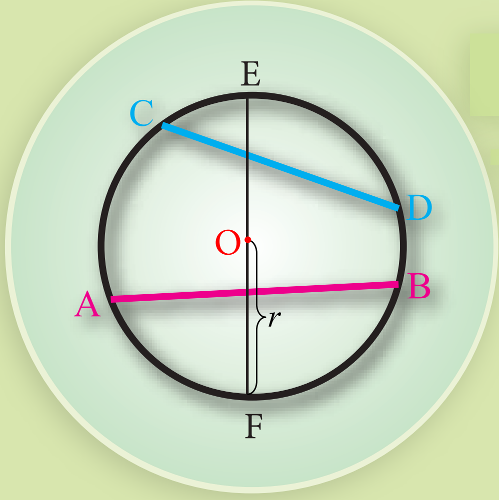
فصل ششم: معادلات یک مجهولۀ درجه دوم

فصل اول

خصوصیات بعضی عناصر دایـره


GITANE

خصوصیات وتر دایره



در شکل مقابل توجه نمایید آیا گفته میتوانید که خطوط $\overline{AB}$، $\overline{CD}$ و $\overline{EF}$ را به نام چه یاد میکنند.
خصوصیت مستقیم $\overline{EF}$ چیست و با $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ چه ارتباط دارد؟

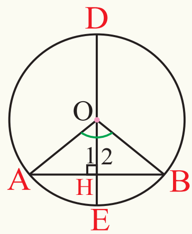
فعالیت

در دایرهٔ $C(O,r)$ وتر $\overline{AB}$ را رسم کنید.
قطر $\overline{ED}$ دایره را طوری رسم نمایید که مثلثی بر وتر $\overline{AB}$ در نقطهٔ H عمود باشد.
نقطهٔ (O) را به A و B وصل نمایید شکلی که به دست میاید چه نوع مثلث است؟
در جاهای خالی علامت مناسب($=, <$ یا $>$) را بگذارید.

$\overline{OA}\ \square\ \overline{OB}$, $\overset{\frown}{AE}\ \square\ \overset{\frown}{EB}$, $\overline{AH}\ \square\ \overline{HB}$

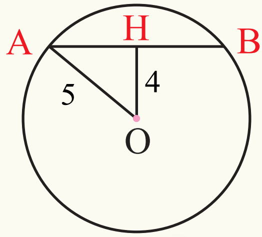
از نتیجهٔ این فعالیت می‌توانیم به گونهٔزیر قضیه را بیان و ثبوت‌نماییم.
قضیه: در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و قوس‌های مقابل آنها را تنصیف می‌کند.
ثبوت: از دو مثلث $\overset{\Delta}{BOH_2}$ و $\overset{\Delta}{AOH_1}$ می‌توانیم بنویسیم که:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OA}=\overline{OB}\text{.........} & \text{شعاع دایره} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2\text{..........} & \text{قایمه} \\ \overline{OH}=\overline{OH}\text{........} & \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{OHB}$$



بنابرآن از تساوی دو مثلث چنین نتیجه به دست می‌آید که $\overline{AH}=\overline{HB}$
چون زاویه های مرکزی BOH_2 و AOH_1 با هم مساوی بوده در نتیجه $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$ است.
مثال: دایرهٔ $C(O,5)$ داده شده است، اگر فاصلهٔ عمودی وتر AB از مرکز دایره 10 واحد باشدطول وتر AB را محاسبه کنید.

حل: در مثلث $\overset{\Delta}{OHA}$ نظر به قضیهٔ فیثاغورث داریم که:



$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$
$$5^2 = \overline{AH}^2 + 4^2$$
$$\overline{AH}^2 = 5^2 - 4^2$$
$$\overline{AH}^2 = 25 - 16 = 9$$
$$\overline{AH} = 3$$
$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\times 3 = 6unit$$

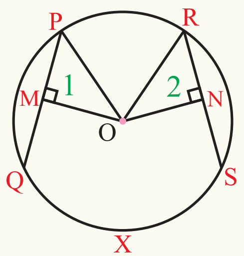
فعالیت

- دایرهٔ $C(O,3)$ را ترسیم نمایید.
- در دایره دو وتر مساوی $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ را رسم نمایید.
- از مرکز دایره بالای $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ عمودها را رسم نموده طول آنها را اندازه کنید.

از نتیجهٔ این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم.

قضیه: وترهای مساوی، از مرکز دایره هم فاصله‌اند.

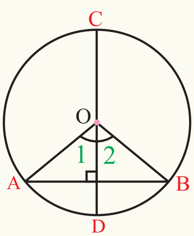
ثبوت: از دو مثلث $\overset{\Delta}{RON}$ و $\overset{\Delta}{POM}$ داریم که:



$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OP} = \overline{OR} & \text{شعاع دایره}.......... \\ \hat{1} = \hat{2} & \text{قایمه}....................... \\ \overline{PQ} = \overline{RS} & \text{وترهای مساوی}........ \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \overset{\Delta}{POM} \cong \overset{\Delta}{RON} \\ \overline{OM} = \overline{ON} \end{array}$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز هم فاصله‌اند.

تمرین

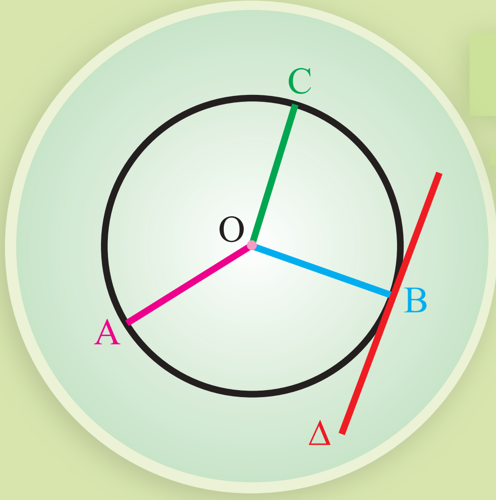


1- در دایرهٔ $C(O,13)$ وتر $\overline{AB}$ از مرکز دایره به فاصلهٔ پنج واحد قرار دارد، طول $\overline{AB}$ را دریابید.

2- ثبوت کنید، در هر دایره قطری که از وسط وتر بگذرد، بالای آن وتر عمود است.

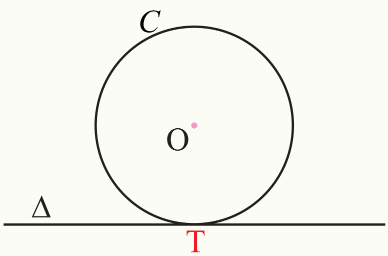
3- در یک دایره وتر $\overline{AB} = 8cm$ را رسم نموده اگر فاصلهٔ عمودی این وتر از مرکز دایره $\overline{OH} = 3cm$ باشد طول قطر و محیط دایره را محاسبه نمایید.

خصوصیت شعاع دایره



آیا گفته میتوانید که خطوط OC، OB و OA به نام چه یاد می شوند؟ ارتباط خط Δ با دایرهٔ O و شعاع OB چیست؟

فعالیت



- درشکل مقابل خط مستقیم Δ به دایرهٔ $C(O,r)$ در نقطهٔ T مماس است.
- بالای مماس نقاط A, B, C و D را به دو طرف نقطهٔ T انتخاب و آن‌ها را به مرکز دایره وصل نمایید.
- قطعه خط های تشکیل شده را توسط خط کش اندازه نمایید.
- کوتاه‌ترین فاصله بین مرکز دایره و مماس Δ را نشان دهید.
- کوتاه‌ترین فاصله بین یک نقطه و یک مستقیم کدام فاصله است؟
- از دو فقرهٔ اخیر چه نتیجه میگیرید؟

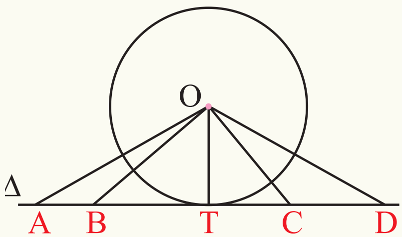
از نتیجه این فعالیت می‌توانیم قضیه زیر را بیان و ثبوت نماییم.

قضیه: شعاع دایره در نقطهٔ تماس بالای مماس عمود است.

ثبوت: در شکل زیر دیده می‌شود که:

$OT < OB < OA$

$OT < OC < OD$

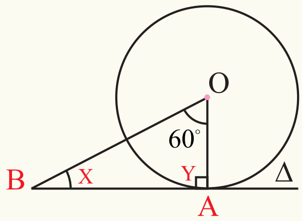


می‌دانیم که کوتاه ترین فاصله بین یک نقطه و یک خط مستقیم فاصلهٔ عمودی است.

در نتیجه گفته می توانیم که: $OT \perp \Delta$ است.

مثال 1: درشــکل زیر خط مســتقیم Δ در نقطهٔ A به دایرهٔ $c(o,r)$ مماس است. اگر زاویهٔ AOB مساوی به 60° باشد، اندازهٔ زاویهٔ x را دریابید.

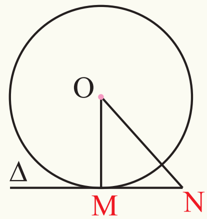
$$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$$
$$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$$
$$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\hat{x} = 180^\circ - 150^\circ$$
$$\hat{x} = 30^\circ$$



مثال 2: در شــکل زیر خط مســتقیم Δ بــه دایرهٔ $C(o,r)$ مماس اســت، اگر طول OM=4unit و ON=5unit باشد طول MN را دریابید.

حل: می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بالای مماس عمود است در نتیجه در مثلث قایم الزاویهٔ OMN با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می‌توانیم بنویسیم که:

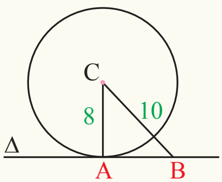
$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$$
$$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$$
$$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$
$$\overline{MN} = 3\,unit$$



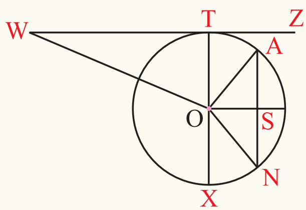
شعاع دایره در نقطهٔ تماس بالای مماس عمود است.
هر مماس در نقطهٔ تماس بالای شعاعی که از نقطهٔ تماس می‌گذرد، عمود است.

تمرین

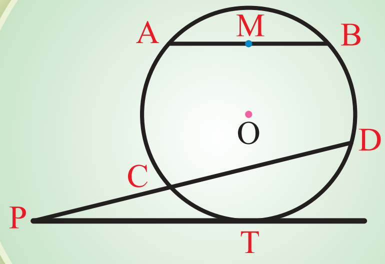
1- در شکل مقابل Δ بالای دایرهٔ $P(c,r)$ مماس است اگر AC=8unit و BC=10unit طول داشته باشد طول AB را دریابید.



2- درشــکل مقابــل اگــر WZ در نقطــهٔ T بــه دایــرهٔ $C(O,r)$ مماس باشد و اگر OS=1unit، TW=3unit و OT=2unit باشد طول قطعه خط های OW,SN,AS,OA و TX را دریابید.



روابط طولی در دایره



آیا میتوانید قطعـه خط‌هایی را که
دَر شکل می‌بینید نام بگیرید؟

تعریف

روابط طولی: روابطی که بین اندازه های اجزای خطی یک شکل هندسی موجود است، روابط طولی نامیده می‌شود.

فعالیت

- از نقطهٔ P خارج دایره C(O,r) قاطع PAB و PCD را رسم نمایید.
- نقطهٔ A را به D و B رابه C وصل نمایید.
- مثلث PAD و PCB را روی شکل نشان دهید و بگویید که آیا آن‌ها متشابه‌اند؟
- نسبت های تشابه را در دو مثلث فوق بنویسید.

کمک:

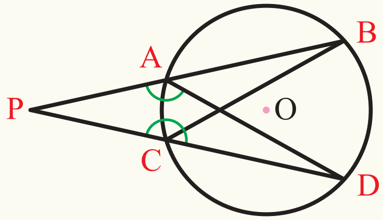
- هرگاه در دو مثلث، دو زاویهٔ مثلث با هم مساوی باشند زاویهٔ سوم آن لزوماً با هم مساوی می‌شود.
- در مثلث‌های متشابه اضلاع مقابل زاویه‌های مساوی، متناسب‌اند.

ازنتیجهٔ این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم.

قضیه: هرگاه از یک نقطهٔ خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر دو قاطع با قطعات خارجی آنها باهم مساوی اند. یعنی:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$

ثبوت:



بین مثلث های $\overset{\Delta}{PAD}$ و $\overset{\Delta}{PCB}$ روابط زیر موجود است:

$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{D} = \hat{B} & \text{زوایای محیطی عین قوس} \\ \hat{P} = \hat{P} & \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

از تساوی سه زاویهٔ فوق می توانیم بنویسیم که مثلث‌های PAD و PCB با هم مشابه‌اند، لذا می توانیم بنویسیم که:

$$\overset{\Delta}{PCB} \sim \overset{\Delta}{PAD} \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

مثال: در شکل زیر PA و PB دو قاطع دایرهٔ $C(O,r)$ اند، اگر طول $PA = 10\text{ cm}$, $PC = 6\text{ cm}$ و $PD = 4\text{ cm}$ باشد طول‌های PB و DB را دریابید.

حل: نظر به طول قطعاتی که از نقطهٔ P رسم شده‌اند و با استفاده از قضیهٔ قبلی می توانیم بنویسیم که:

$PA \cdot PC = PB \cdot PD$

$10 \times 6 = PB \cdot 4$

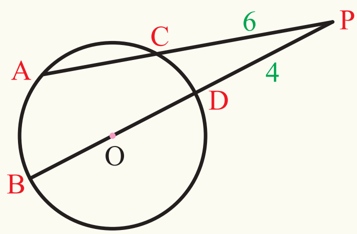
$60 = 4PB$

$PB = 15cm$

$DB = PB - PD$

$DB = 15 - 4$

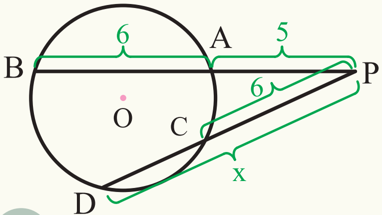
$DB = 11cm$

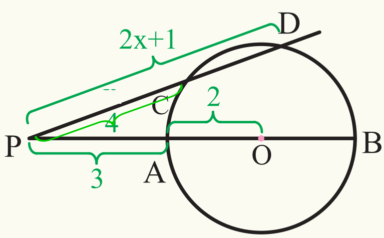


از حل مثال حقانیت قضیهٔ فوق به اثبات میرسد؛ یعنی: اگر از یک نقطهٔ خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد حاصل ضرب هر دو قاطع با قطعات خارجی آنها باهم مساوی اند.

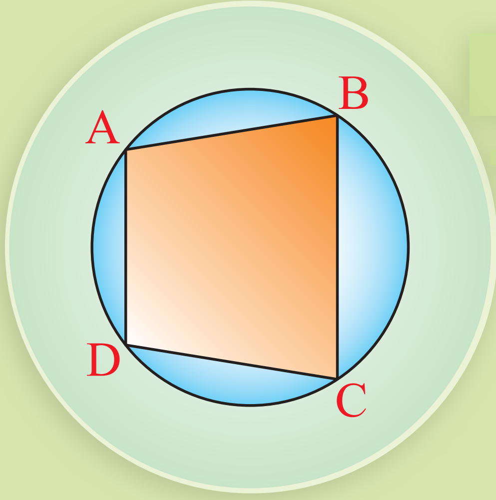
تمرین

در اشکال زیر قیمت عددی x را دریافت کنید.





خصوصیت های چهار ضلعی مرسوم به دایره



در شکل مقابل، آیا گفته میتوانید که بین دایره و رأس های چهار ضلعی چه رابطه ای وجود دارد؟

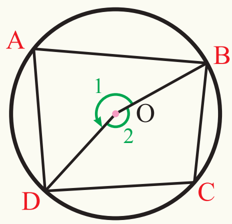
فعالیت

- چهار ضلعی ABCD و یک دایره را طوری رسم کنید که محیط دایره از رأسهای چهار ضلعی عبور نماید.
- زوایایی که رأس های آنها بالای محیط دایره قرار دارند به نام چی یاد می شوند؟
- مرکز دایره را به دو رأس چهار ضلعی وصل نمایید زاویۀ مرکزی‌یی که به دست می آید چند درجه است؟
- روابط زوایای مرکزی و محیطی را که مقابل عین قوس قرار دارند بنویسید.

از نتیجۀ این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

قضیه: مجموعه زوایای یک چهار ضلعی مرسوم به دایره 180° است.

ثبوت:



$$\hat{O}_1+\hat{O}_2=360^\circ$$

$$D\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{O}_1$$

$$D\hat{A}B=\frac{1}{2}\hat{O}_2$$

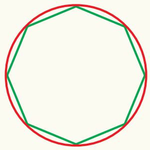
$$D\hat{C}B+D\hat{A}B=\frac{1}{2}(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

مضلع دو قسم است: مضلع منظم و مضلع غیر منظم

مضلع منظم

تعریف

مضلع که اضلاع و زوایای آن با هم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می شود.



اگر تعداد اضلاع را به n و مجموع زوایای داخلی مضلع را به S_n نشان دهیم؛ پس مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی $S_n = (n-2)\,(180°)$ درجه است.

مثال: مجموع زوایای داخلی یک چهار ضلعی و یک(10) ضلعی را به دست آرید.

حل: مجموع زوایای داخلی هر مضلع از رابطهٔ $S_n = (n-2)\,(180°)$ به دست می آید لذا داریم که:

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$
$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$
$$S_{10} = (10-2)(180)^\circ = 8 \times 180^\circ \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

به یاد داشته باشید:

- تعداد قطرهایی که از رأس یک n ضلعی رسم می گردد از رابطهٔ 3- n به دست می آید.
- تعداد مثلث هایی که در داخل مضلع از یک رأس تشکیل می شود از رابطهٔ 2- n به دست می آید.
- مجموع زوایای مقابل یک چهار ضلعی محاطی مرسوم به دایره 180° است.
- مضلعی که اضلاع و زوایای آن با هم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می‌شود.

تمرین

1- اندازهٔ زوایای یک شش ضلعی منظم چند درجه است؟
2- اندازهٔ زوایای یک n ضلعی منظم چند درجه است؟
3- مثلث‌هایی که توسط اقطار از یک رأس در یک 10 ضلعی تشکیل می‌شوند چند است؟

نکات مهم فصل اول

- در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و قوس های مقابل آنها را تنصیف می کند.
- وترهای مساوی از مرکز دایره هم فاصله اند.
- شعاع دایره در نقطهٔ تماس بالای مماس عمود است.
- روابطی که بین اندازه های اجزای خطی یک شکل هندسی موجود است روابط طولی نامیده می شوند.
- هرگاه از یک نقطهٔ خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر دو قاطع با قطعات خارجی آنها باهم مساوی اند.
- مجموعهٔ زوایای مقابل یک چهار ضلعی مرسوم به دایره 180° است.
- مضلعی که اضلاع و زوایای آن باهم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می شود.
- تعداد قطرهایی که از یک رأس n ضلعی رسم میگردد از رابطهٔ $n-3$ به دست می آید.
- تعداد مثلث هایی که ذریعهٔ ترسیم قطرهای مضلع، از یک رأس تشکیل می شوند از رابطهٔ $n-2$ به دست می آید.

تمرینات فصل اول

● در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- خط مستقیم که با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد به نام:

a) وتر دایره یاد می شود. b)مماس دایره یاد می شود.

c) قوس دایره یاد می شود. d) محیط دایره یاد می شود.

2- وتری که به مرکز دایره نزدیکتر است، در مقایسه به وترهایی که از مرکز دایره دورتراند:

a) طویلتر است. b)کوتاه تر است است.

c) مساوی است. d) هرسه جواب درست است.

3- اگر یک خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع کند آن را:

a) عمود به دایره گویند. b)مماس به دایره گویند.

c) قاطع به دایره گویند. d)موازی به دایره گویند.

● جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- بزرگترین وتر دایره .... است.

2- در هر دایره قطر .... بر هر وتر، وتر را تنصیف و قوس های .... از آن جدا می کنند.

3- در هر مثلث قایم الزاویه .... وتر مساوی به مجموعهٔ مربعات اضلاع .... است.

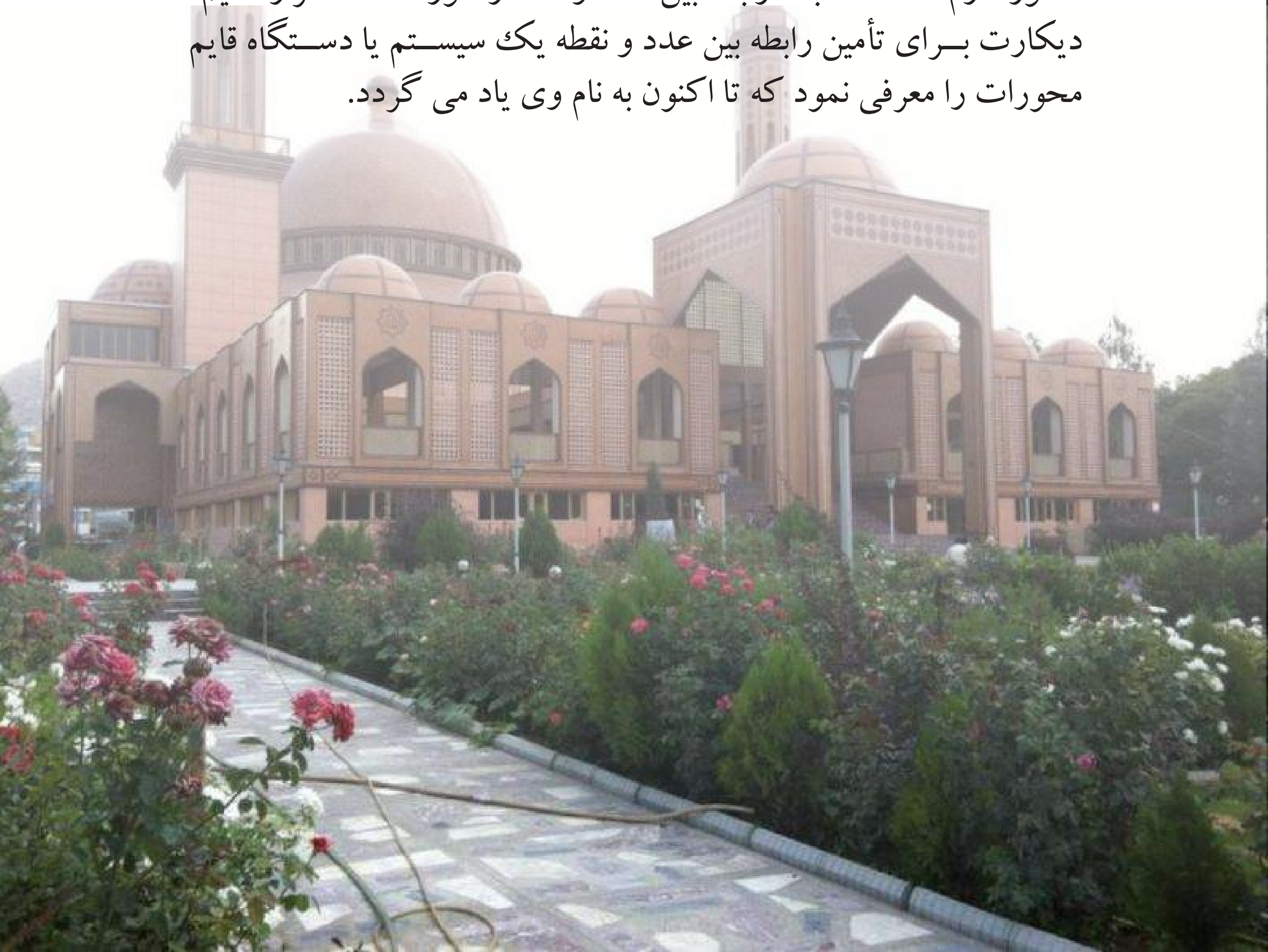
4- در هر دایره وتری که به مرکز نزدیک تر است .... می باشد.

فصـــــل دوم

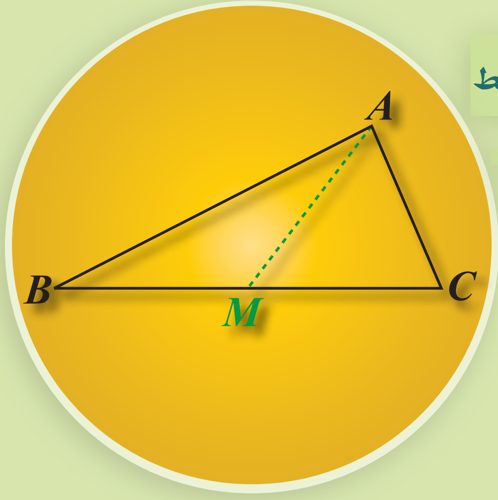
هندسهٔ تحلیلی

هندسه تحلیلی
Analytic Geometry

هندسـۀ تحلیلی عبارت از علـم رابطه بین الجبر و هندسـه بوده طوری که روابط بین الجبر و اشـکال هندسـی را توسـط معادلات الجبری برقرار می کند. ریاضیدان فرانسـوی دیکارت برای اولین بار، رابطه بین اشـکال معین هندسـی و معادلات الجبری را به دسـت آورد. او اظهار داشـت که بعضی از معادلات الجبری یک شـکل معین هندسـی دارد. از این که اساس علم هندسـه را نقطه و اسـاس معادلات الجبری را عدد تشـکیل می دهد بدین منظور لازم است که ابتدا رابطه بین نقطه و عدد را مورد مطالعه قرار دهیم. دیکارت بـرای تأمین رابطه بین عدد و نقطه یک سیسـتم یا دسـتگاه قایم محورات را معرفی نمود که تا اکنون به نام وی یاد می گردد.



مختصات نقطهٔ وسطی یک قطعه خط



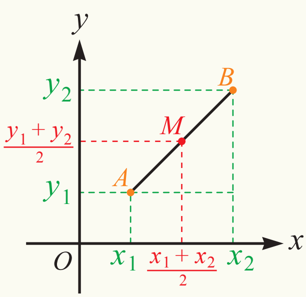
در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قطعه خط $\overline{AM}$ میانه است، آیا میتوانید مشخصات میانه را بیان کنید؟

فعالیت

- نقاط $D(2,0)$ و $E(6,0)$ را روی کمیات وضعیه تعیین کنید.
- اگر نقطهٔ C وسط قطعه خط $\overline{DE}$ باشد مختصات آن را بنویسید.
- مختصات نقطهٔ C چه رابطه‌یی با مختصات نقاط D و E دارد؟
- نقاط $P(0,1)$ و $Q(0,4)$ را روی کمیات وضعیه تعیین نمایید.
- اگر نقطهٔ R وسط قطعه خط $\overline{PQ}$ باشد مختصات آن را به دست آرید.
- مختصات نقطهٔ R چه رابطه یی با مختصات نقاط P و Q دارد؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را می‌توان به حالت کلی طور زیر بیان کرد:

اگر دو نقطهٔ $A(x_1,0)$ و $B(x_2,0)$ بالای محور x قرار داشته باشد، مختصات نقطهٔ M وسط $\overline{AB}$ از رابطهٔ $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ به دست می‌آید. اگر دو نقطهٔ $P(0,y_1)$ و $Q(0,y_2)$ بالای محور y قرار داشته باشند مختصات نقطهٔ M وسط $\overline{PQ}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

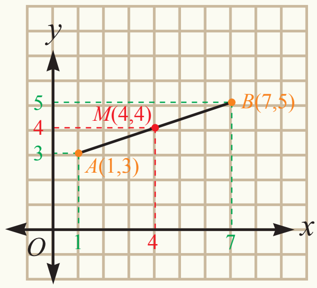


به صورت عموم اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دونقطه درکمیات وضعیه و M نقطهٔ وسطی قطعه خط $\overline{AB}$ باشد، آنگاه مختصات نقطهٔ M طور زیر به دست می‌آید.

$$M(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})$$

مثال 1: اگر $A(1,3)$ و $B(7,5)$ مختصات آغاز و انجام قطعه خط $\overline{AB}$ باشد مختصات نقطهٔ وسطی $\overline{AB}$ را به دست آورید:

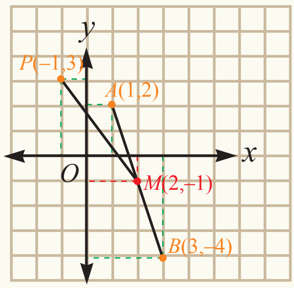
حل: با استفاده از مختصات نقطهٔ وسطی یک قطعه خط می‌توانیم بنویسیم که:



$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{1+7}{2}\ ,\ \frac{3+5}{2}\right)$$
$$M(4,4)$$

مثال 2: فاصلهٔ نقطهٔ $P(-1,3)$ را از نقطهٔ وسطی مستقیمی که از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,-4)$ می گذرد به دست آرید.

حل: برای دریافت فاصله بین نقطهٔ P و قطعه خط $\overline{AB}$ ابتدا نقطهٔ تنصیف قطعه خط $\overline{AB}$ را دریافت می‌کنیم و داریم که:



$$M_{\overline{AB}}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2-4}{2}\right)=(2,-1)\Rightarrow M_{\overline{AB}}=(2,-1)$$
$$\overline{PM}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$
$$\overline{PM}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$$
$$\overline{PM}=5\text{unit}$$

تمرین

1- سه رأس مثلث $A(5,-2)$، $B(3,-1)$، $C(1,5)$ داده شده اند، طول میانهٔ $\overline{AM}$ را دریابید.

2- اگر نقاط $A(2,4)$، $B(5,9)$، $C(14,9)$ و $D(11,4)$ رأس‌های یک متوازی الاضلاع باشند، مختصات نقاط تقاطع قطرهای متوازی الاضلاع را دریابید.

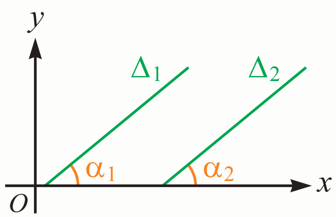
3- اگر $A(-1,4)$، $B(-3,-7)$ و $C(1,9)$ رأس‌های یک مثلث باشند طول میانه را که بالای ضلع $\overline{BC}$ رسم می گردد دریابید.

میل مستقیم های موازی

به شکل مقابل نگاه کنید آیا گفته میتوانید که چه رابطه ای بین دو بازوی زینه موجود است؟

فعالیت

- در کمیات وضعیهٔ مختصات قایم، دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 را باهم موازی طوری رسم کنید که با جهت مثبت محور x زوایای حاده را بسازند.



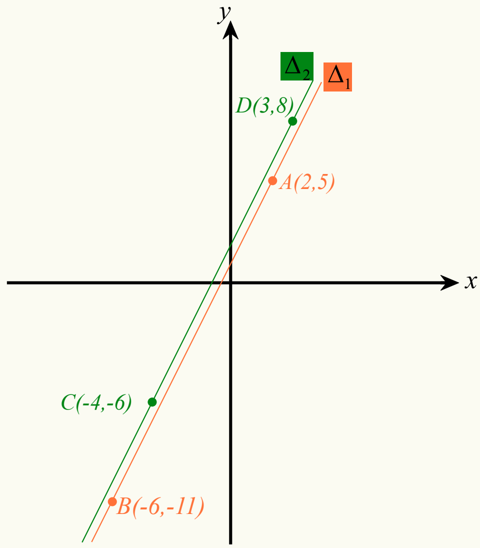
- میل خطوط Δ_1 و Δ_2 را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید، ببینید که آنها با هم چه رابطه دارند؟
- اگر Δ_1 با جهت مثبت محور x زاویهٔ α_1 و Δ_2 با جهت مثبت محور x زاویهٔ α_2 را بسازد، آنگاه α_1 و α_2 با یکدیگر چه رابطه دارند؟

در حالت کلی نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می نماییم:

مستقیم‌های موازی دارای میل های مساوی می باشند.

اگر دو خط مستقیم میل های مساوی داشته باشند در نتیجه زوایایی که با جهت مثبت محور x می‌سازند نیز با هم مساوی‌اند.

مثال: اگر مستقیم Δ_1 از نقاط $A(2,5)$ و $B(-6,-11)$ و مستقیم Δ_2 از نقاط $C(-4,-6)$ و $D(3,8)$ بگذرد دریابید که خطوط Δ_1 و Δ_2 نسبت به هم چه رابطه ای دارند؟



حل: میل های مستقیم‌های Δ_1 و Δ_2 را محاسبه می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ m_{\Delta_1}=\dfrac{-11-5}{-6-2}=\dfrac{-16}{-8}=2 \Rightarrow m_{\Delta_1}=2 \\ m_{\Delta_2}=\dfrac{6+8}{3+4}=\dfrac{14}{7}=2 \Rightarrow m_{\Delta_2}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{\Delta_1}=m_{\Delta_2}=\Delta_1 \parallel \Delta_2$$

چون میل های Δ_2 و Δ_1 باهم مساوی اند؛ بنا بر این خطوط با هم موازی اند.

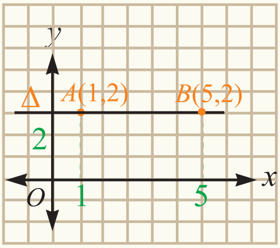
فعالیت

- نقاط $A(1,2)$ و $B(5,2)$ را در مستوی کمیات وضعیه مشخص کنید.
- مستقیمی که از نقاط A و B می گذرد ترسیم کرده آن را Δ بنامید.
- مستقیم Δ با جهت مثبت محور x چه نوع زاویه را می سازد؟
- میل مستقیم Δ را محاسبه کنید.

در حالت کلی نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

اگر نقاط کیفی A و B دارای ترتیب‌های مساوی باشند؛ مثلاً $A(x_1, a)$ ، $B(x_2, a)$

آنگاه مستقیمی که از نقاط A و B می گذرد موازی به محور x است ومیل آن مساوی به صفر است، یعنی: $m = \dfrac{a-a}{x_2 - x_1} = 0$



فعالیت

- نقاط $M(3,2)$ و $N(3,5)$ را در مستوی کمیات وضعیه مشخص کنید.
- مستقیمی را که از نقاط M و N می گذرد ترسیم کرده آن را Δ بنامید.
- مستقیم Δ با محور x چه نوع زاوی‌یی را می‌سازد. در مورد میل مستقیم Δ چه گفته می توانید؟

از فعالیت فوق به این نتیجه می رسیم:

میل مستقیمی را که با محور x زاویهٔ قایمه می‌سازد نمی توانیم محاسبه کنیم. در این حالت می گوییم مستقیم Δ میل معین ندارد.

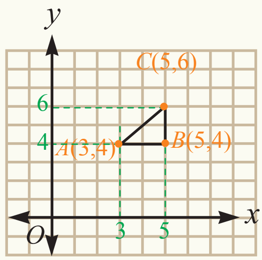
مثال: اگر نقاط $A(3,4)$ ، $B(5.4)$ و $C(5,6)$ رأس‌های یک مثلث باشند، نوعیت مثلث را مشخص نموده در مختصات کمیات وضعیه آن را رسم نمایید.

حل: چون $\overline{AB}$ موازی به محور x است؛ بنا بر آن میل آن صفر است.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

به همین ترتیب $\overline{BC}$ موازی به محور y است؛ لذا میل آن نا معین است.

$$m_{\overline{BC}} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty \quad \text{تعریف نشده}$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$
$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$
$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$

در نتیجه: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

چون قضیهٔفیثاغورث در مثلث تطبیق گردید؛ پس $\overline{AB}$ عمود بر $\overline{BC}$ است؛ لذا مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم الزاویه می‌باشد.

میل هر خط مستقیم موازی با محور x صفر است.
میل هر خط مستقیم عمود بر محور x تعریف نشده است.(عدد نامعین است)

تمرین

1- اگر $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ و $D(0,-5)$ رأس های یک چهار ضلعی باشند.

الف: اضلاع مقابل چهار ضلعی باهم چه ارتباط دارند؟

ب: میل قطرهای آن را دریابید.

2- نقاط $A(3,4)$, $B(-3,4)$, $C(3,-4)$ و $D(-3,-4)$ را در نظر بگیرید.

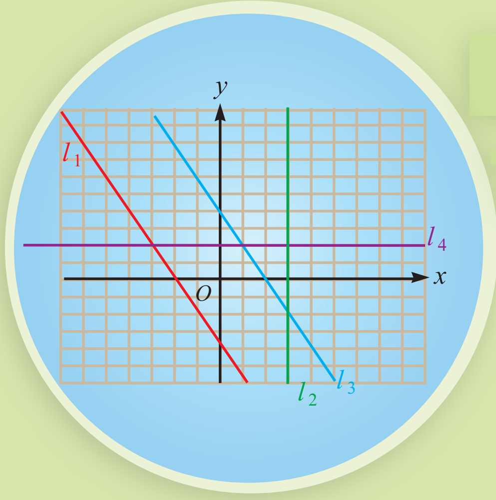
الف: مستقیمی که از نقاط A و B می گذرد چه رابطه یی با مستقیمی که از نقاط C و D می گذرد دارد؟

ب: مستقیمی که از نقاط A و C می گذرد چه رابطه یی با مستقیمی که از نقاط C و D می گذرد دارد؟

ج: چهار ضلعی ABCD چه نوع چهار ضلعی است؟

د: میل قطرهای آن را پیدا کنید.

شکل عمومی معادلهٔ خط مستقیم



آیا گفته میتوانید که چهار خط l_1 , l_2 , l_3 , l_4 نسبت به همدیگر در کدام وضعیت قرار دارند؟

معادلهٔ الجبری یک خط مستقیم که رابطه بین مختصات هر نقطه را روی یک خط نشان می دهد دانستیم. حال شکل عمومی معادلهٔ خط را طور زیر بیان می نماییم:
معادلهٔ خط مستقیم در حالت ستاندارد(معیاری) به شکل زیر است:

$$ax+by+c=0 \quad \text{یا} \quad y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$$

که در آن b,a و c اعداد حقیقی و $b\neq 0$ است.
در معادلهٔ فوق $\frac{-a}{b}$ میل خط و $\frac{-c}{b}$ نقطهٔ تقاطع با محور y را نشان می دهد.
به این ترتیب می توان گفت هر مستقیمی که در مستوی دارای معادله یی به شکل $y=mx+h$ باشد، در آن m میل خط مستقیم و h ترتیب نقطهٔ تقاطع با محور y است.
در حالت عمومی هر رابطهٔ خطی بر حسب x و y که در آن توان x و y یک باشد، معادلهٔ یک خط مستقیم می باشد.

فعالیت

- دو مستقیم $2x+3y-6=0$ و $y-x=2$ را در یک سیستم کمیات وضعیه رسم کنید.
- میل هر یک از این خطوط را به دست آرید.
- این دو خط نظر به یکدیگر در کدام وضعیت قرار دارند؟

از فعالیت فوق می توان نتیجه را طور زیر بیان نمود که:
اگر میل دو خط با یکدیگر مساوی نباشند آن دو خط یکدیگر را قطع می کنند.

در حالت معیاری اگر دو خط مستقیم $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$ متقاطع باشند، میل آنها با هم مساوی نبوده و از آن نتیجه می شود که:

$$\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{a_1}{a_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_2}{b_2}\neq\frac{a_1}{b_1}$$

فعالیت

- دو خط مستقیم $-3x+y-5=0$ و $6x-2y+1=0$ را در مختصات کمیات وضعیهٔ قایم رسم کنید.
- میل هر یک از این خطوط رابه دست آرید.
- این دو خط نظر به یکدیگر در چه وضعیتی قرار دارند؟ چرا؟

در حالت معیاری دو خط $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$ وقتی موازی می‌باشند که میل های آنها مساوی باشد، از اینجا می توان نتیجه گرفت که بین ضرایب متحولین آنها رابطهٔ زیر بر قرار است:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

اگر بین ضرایب و ثوابت رابطهٔ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ بر قرار باشد، در این صورت خطوط منطبق‌اند.

مثال: خطوط مستقیم $3x+4y=5$ و $4x-3y=-1$ باهم چه رابطه دارند؟

حل: با استفاده از ضرایب معادلات دو خط داریم که:

$a_1=3 \qquad b_1=4 \qquad c_1=-5$

$a_2=4 \qquad b_2=-3 \qquad c_2=1$

چون $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{a_1}{a_2}$ یعنی $\frac{4}{-3}\neq\frac{3}{4}$ است؛ پس این دو خط متقاطع اند.

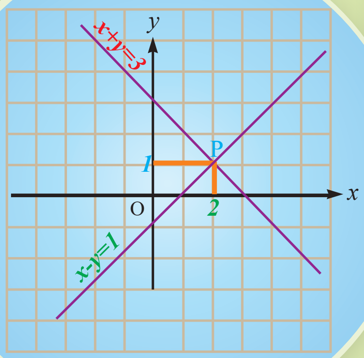
تمرین

1- حالات خطوط $4x+3y-1=0$ و $8x+6y+5=0$ را معلوم کنید.

2- حالات خطوط $8x-4y+10=0$ و $4x-2y+5=0$ را دریافت کنید.

3- قیمت k را در معادلات $(k+1)x+ky=0$ و $2x-3y+5=0$ طوری تعیین نمایید که خطوط با هم موازی باشند.

سیستم معادلات خطی



در شکل مقابل توجه نمایید، آیا گفته میتوانید که مختصات نقطهٔ P در هر دومعادلهٔ خطوط مستقیم، صدق می کند یا خیر؟

فعالیت

- میل خطوط $y=4x-2$ و $y=-3x+5$ را به دست آرید.
- این دو خط نظر به یکدیگر چه رابطه دارند؟ چرا؟
- دو خط فوق را در یک مستوی کمیات وضعیه رسم کنید. چه رابطه بین خطوط رسم شده مشاهده می شود؟

در فعالیت فوق به مشاهده میرسد که اگر میل این دو خط با هم مساوی نباشند همدیگر را در یک نقطهٔ مانند P قطع می کنند، چون نقطهٔ تقاطع بالای هر دو خط واقع است؛ پس مختصات نقطهٔ تقاطع در هر دو معادله صدق می کند، اگر مختصات نقطهٔ تقاطع P(x,y) باشد، آنگاه داریم که:

$$y=-3x+5 \quad \text{و} \quad y=4x-2$$

در نتیجه:

$$4x-2=-3x+5$$
$$7x=7$$
$$x=1$$

با وضع کردن قیمت x در معادلات فوق قیمت y را به دست می آوریم.

$$y=4x-2 \quad \Rightarrow y=4(1)-2 \quad \Rightarrow y=2$$

پس مختصات نقطهٔ تقاطع عبارت از $P(1,2)$ است در این حالت می گوییم $P(1,2)$ نقطه‌یی است که هر دو معادلهٔ خط ها را صدق می کند که حل سیستم معادلات خطی $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ می باشد.

فعالیت

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots \; \mathrm{I}$$

- سیستم معادلات خطی مقابل را مد نظر بگیرید.
- در این سیستم c_1, b_1, a_1 و c_2, b_2, a_2 را به نام چه یاد می کنند؟
- در معادلات فوق x و y را چه می گویند؟
- آیا نقطهٔ تقاطع خطوط، حل سیستم معادلات شده می تواند؟

برای حل سیســتم معادلات خطی،رابطهٔ (I) را می توانیم به شــکل زیر بنویســیم، در صورتی که b_1 و b_2 خلاف صفر باشند.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

پس سه حالت زیر را داریم:

1- اگر میل های خطوط مساوی نباشند در آنصورت دو خط یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

2- اگر میل های خطوط مساوی، ولی تقاطع آنها با محور y در نقاط مختلف باشد در آنصورت خطوط باهم موازی اند.

3- اگر میل خطوط و تقاطع آنها با محور y باهم مساوی باشد، در آنصورت خطوط منطبق اند.

مثال 1: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: برای حل، سیستم معادلات را به شکل زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} y = 7 - x \Rightarrow y = -x + 7 \\ y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5 \end{cases}$$

در معادلات اخیر میل دو خط فوق 1- و 2- است از اینکه میل دو خط مساوی نیستند پس دو خط یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند. برای دریافت مختصات نقطهٔ تقاطع طور زیر عمل می کنیم:

$$-x+7=-2x+5$$

$$-x+2x=5-7 \quad \Rightarrow x=-2$$

با گذاشتن 2- به عوض x در معادلهٔ یکی از خطوط، داریم که:

$$y=-x+7=-(-2)+7 \Rightarrow y=9$$

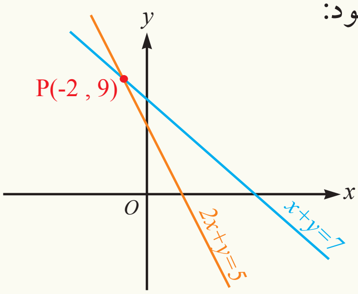
بنابر این $(-2,9)$ حل سیستم معادلات و محل تقاطع دو خط است که در شکل زیر دیده می شود:

$x+y=7$

x	0	7
y	7	0

$2x+y=5$

x	0	5/2
y	5	0



مثال 2: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3y=-6x+12 \end{cases}$$

حل: ابتدا معادلات را طور زیر می نویسیم:

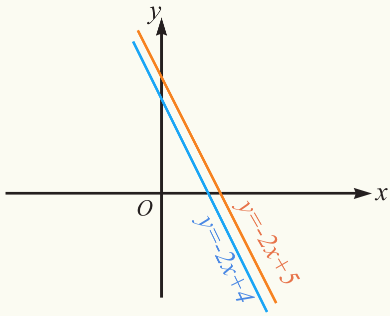
$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=-\frac{6}{3}x+\frac{12}{3} \end{cases}$$

$y=-2x+5$

x	0	5/2
y	5	0

$y=-2x+4$

x	0	2
y	4	0



چون میل هر دو خط مساوی به 2- است، در نتیجه خطوط بین خود موازی اند و یکدیگر را قطع نمی کنند؛ یعنی سیستم معادلات خطوط موازی، حل ندارد.

مثال 3: سیستم معادلات خطی را حل نمایید:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -28=-4x-4y \end{cases}$$

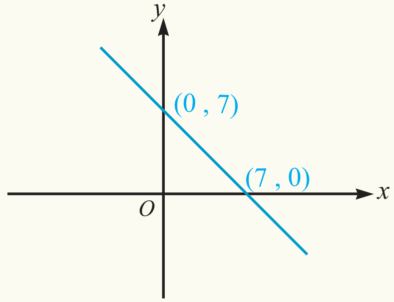
حل: ابتدا سیستم معادلات را طور زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ y=\dfrac{-4}{4}x+\dfrac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ \\ y=-x+7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



به مشـــاهده می رســـد که میل خطوط و تقاطع آنها بامحور y نیز مساوی است؛ پس دو خـــط باهم منطبق اند در این حالت دو خط نقاط مشـــترک بی شـــمار دارند، در نتیجه سیستم معادلات خطی حل های زیادی دارد.

اگر در یک سیســـتم معادلات a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 و c_2 اعداد حقیقی و x،y مجهول ها باشند، درآن صورت سیستم معادلات مذکور خطی اند؛ مانند سیستم معادلات‌زیر:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

نتیجه

- اگر خطوط یکدیگر را در یک نقطه قطع نمایند معادلات یک حل دارد.
- اگر خطوط با یکدیگر موازی باشند معادلات حل ندارند.
- اگر خطوط باهم منطبق باشند معادلات دارای بی نهایت حل می‌باشد.

تمرین

سیستم معادلات خطی زیر را حل نمایید.

1) $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=4x-3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x-2=y \\ 3x-y=2 \end{cases}$

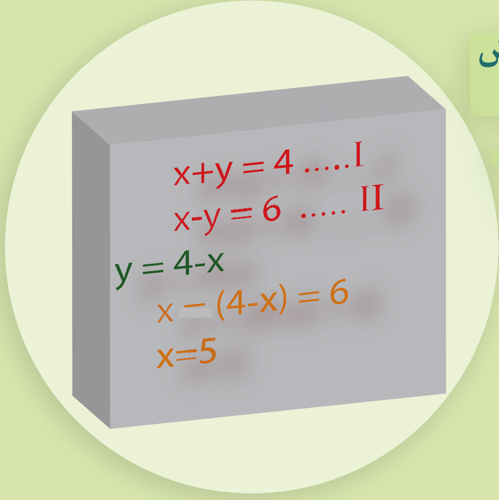
3) $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x-y=6 \\ 8x-2y=6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ -6x+2y=-10 \end{cases}$

حل سیستم معادلات خطی به روش تعویضی



به حل سیستم معادلات خطی توجه کنید. به نظر شما قیمت عددی مجهول x به چه ترتیب به دست آمده است؟

فعالیت

- مجموعهٔ دو زاویهٔ یک مثلث 100° و حاصل تفریق آن 20° است، معادلات الجبری آن را بنویسید.
- سیستم معادلات فوق چند مجهول دارد قیمت عددی هر یک را دریابید.
- قیمت های حاصلهٔ جذر معادلات را در سیستم امتحان کنید.

در نتیجه فعالیت فوق حل مسأله و حل طریقهٔ تعویضی سیستم معادلات خطی را در مثال زیربیان می نماییم.

حل: اگر زوایای مثلث را A و B بنامیم عبارت فوق را به شکل معادلات الجبری طور زیر می نویسیم:

$$\hat{A}+\hat{B}=100^\circ \quad ....\mathrm{I}$$

$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ \quad ....\mathrm{II}$$

حال قیمت A را از جنس B از معادلهٔ اول به دست می آوریم: $\hat{A}=100^\circ-\hat{B}$

این قیمت A را در معادلهٔ دوم به عوض $\hat{A}$ وضع نموده معادله را حل می نماییم.

$$100^\circ-\hat{B}-\hat{B}=20^\circ \Rightarrow -2\hat{B}=-80^\circ \Rightarrow \hat{B}=40^\circ$$

حال این قیمت B را در یکی از معادلات سیستم وضع نموده، قیمت عددی $\hat{A}$ را به دست می آوریم:

$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ$$

$$\hat{A}-40^\circ=20^\circ \Rightarrow \hat{A}=20^\circ+40^\circ \Rightarrow \hat{A}=60^\circ$$

مثال: سیستم معادلات دومجهولهٔ زیر را حل نمایید.
$$\begin{cases}2x+3y=0\\3x+2y=10\end{cases}$$

حل: اول قیمت یک مجهول را از جنس مجهول دیگر به دست آورده آن را در معادلهٔ دوم آن را وضع می نماییم:

$$2x+3y=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=-3y \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{3}{2}y$$

$$\left.\begin{aligned}&3x+2y=10\\&3\left(-\frac{3}{2}y\right)+2y=10\\&-\frac{9}{2}y+2y=10\\&\frac{-9+4}{2}y=10\\&-5y=20 \quad\Rightarrow\boxed{y=-4}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}&x=-\frac{3}{2}y\\&x=-\frac{3}{2}(-4)\\&x=-3(-2)\\&\boxed{x=6}\end{aligned}$$

برای حل سیستم معادلات دو مجهولهٔ درجه اول، طور زیر عمل می نماییم:
- قیمت یک مجهول را از جنس مجهول دیگر دریافت نموده در معادلهٔ دوم آن را وضع می نماییم.
- معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه یک حاصل شده را حل و قیمت مجهول را به دست می آوریم.
- این قیمت حاصل شدهٔ مجهول، در یکی از معادلات داده شدهٔ سیستم وضع می کنیم قیمت مجهول دیگر به دست می آید.
- قیمت های به دست آمدهٔ مجهول ها را در سیستم معادلات وضع نموده، اگر همزمان در هر دو معادله صدق کند حل معادله صحیح و در غیر آن صحیح نیست.

تمرین

حل سیستم معادلات خطی زیر را به روش تعویضی به دست آرید.

1) $\begin{cases}y=2x\\x+y=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7x-2y=15\\6x-y=10\end{cases}$ 3) $\begin{cases}a+2b=2\\2a-3b=25\end{cases}$

4) $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{y+2}{4}=4\\[2mm]\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{x-y}{3}\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=1\\[2mm]\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=7\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{5}=6\\[2mm]\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{2}=-4\end{cases}$

حل سیستم معادلات خطی به روش افنا

$$x + y = 15$$
$$\frac{1}{3}x + y = 5$$
$$x = ?$$
$$y = ?$$

عبدالله به عبدالرحمن گفت اگر پول هایت را برایم بدهی من صاحب 15 افغانی می شوم، عبدالرحمن به عبدالله گفت اگر سوم حصهٔ پول خود را به من بدهی من صاحب 5 افغانی می شوم، هرکدام آنها چند افغانی خواهند داشت.

فعالیت

- سیستم معادلات خطی را بنویسید که دو معادله با دو مجهول داشته باشد.
- حل سیستم فوق را به روش تعویضی به دست آورید.
- آیا روش دیگری برای حل سیستم فوق موجود است؟

یکی از روش های دیگر حل سیستم معادلات روش افنا می باشد که در مثال زیر آن را شرح می دهیم:

مثال 1: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$7x + 5y = 41 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{I}$$
$$5x - 2y = 7 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{II}$$

حل: اول معادلات را طوری تغییر شکل می دهیم که اگر آنها را طرف به طرف جمع یا تفریق نماییم یکی از مجهول ها افنا(حذف) گردد؛ مثلاً برای افنای مجهول x، اطراف معادلهٔ اول را در ضریب x معادلهٔ دوم یعنی 5 ضرب نموده و اطراف معادلهٔ دوم را در ضریب x معادلهٔ اول یعنی 7 ضرب می کنیم:

$$\begin{array}{l} 5\times \\ 7\times \end{array}\begin{cases} 7x + 5y = 41 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow 35x + 25y = 205 \\ \Rightarrow 35x - 14y = 49 \end{array}$$

حال معادلات جدید را از همدیگر تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} 35x+25y=205 \\ \underline{\begin{array}{r} 35x-14y=49 \\ - \quad + \quad - \end{array}} \\ 39y=156 \end{array} \Rightarrow y=\frac{156}{39} \Rightarrow y=4$$

حال قیمت y را در یکی از سیستم معادلات وضع نموده؛ قیمت x را به دست می آوریم.

$$5x-2y=7$$
$$5x-2(4)=7 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$$

مثال 2: سیستم معادلات زیر را به طریقهٔ افنا حل کنید:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$$

حل: ابتدا یکی از مجهول‌ها یعنی y را حذف می نماییم بنا بر این معادلهٔ اول را به 3- ضرب می کنیم و معادلهٔ دوم را به 2 ضرب نموده حاصل آن را طرف به طرف جمع می کنیم.

$$\begin{array}{ll} 3x+2y=4 & \Rightarrow -9x-6y=-12 \\ 2x-3y=-1 & \Rightarrow \underline{\overset{-}{}4x\underset{+}{-}6y=\underset{+}{-}2} \\ & -13x+0=-10 \\ & x=\frac{10}{13} \end{array} \Bigg\} \begin{array}{ll} 3(\frac{10}{13})+2y=4 & \Rightarrow \frac{30}{13}+2y=4 \\ 2y=4-\frac{30}{13} & \Rightarrow 2y=\frac{52-30}{13} \\ 2y=\frac{22}{13} & \Rightarrow y=\frac{11}{13} \end{array}$$

- هر مجهولی را که می خواهیم افنا نماییم ضریب آن را در معادلهٔ دوم ضرب می کنیم و همچنان ضریب عین مجهول معادلهٔ دوم را در معادلهٔ اول ضرب می کنیم.
- معادلات حاصل شده را از همدیگر تفریق می کنیم که قیمت یک مجهول به دست می آید. این قیمت حاصل شده را در یکی از معادلات سیستم وضع مینماییم، قیمت مجهول دومی به دست می آید.

تمرین

حل سیستم معادلات خطی زیر را به طریقهٔ افنا به دست آرید.

1) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-39 \\ x-y=9 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-4y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=5 \\ \frac{3}{x}+\frac{10}{y}=18 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y+x-1=0 \\ 2x+y-9=0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 10x+3y=26 \\ 8x+3y=18 \end{cases}$

نکات مهم فصل دوم

- مختصــات نقطهٔ وســطی هر قطعه خط از رابطهٔ $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ به دســت می آید.
- مستقیم های موازی دارای میل های مساوی می باشند.
- اگر دو مســتقیم میل های مســاوی داشته باشند، در نتیجه زوایایی که با جهت مثبت محور x می سازند نیز با هم مساوی اند.
- میل هر خط مســتقیم موازی با محور x، صفر و میل هر خط مستقیم عمود بر محور x تعریف نشده است.
- هر رابطهٔ خطی بر حسب x و y که در آن توان x و y یک باشد. معادلهٔ یک خط مستقیم می باشد.
- معادلهٔ خط مستقیم در حالت ستندرد به شکل زیر است:

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ یا $ax+by+c=0$ که در آن a,b و c اعداد حقیقی و $b\neq 0$ است.

- اگر دو خط مستقیم $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$ متقاطع باشند میل آنها باهم مساوی نبوده و در بین ضرایب رابطهٔ ذیل به وجود می آید: $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ یا $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$
- اگر در سیستم معادلات خطی معادله یک حل داشته باشد خطوط یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
- اگر خطوط با یکدیگر موازی باشند، سیستم معادلات حل ندارد یعنی:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\quad\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

- اگر خطوط باهم منطبق باشند سیستم معادلات بی نهایت حل دارد. که رابطهٔ زیر برقرار میشود:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

تمرینات فصل دوم

● در ســؤالهای زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح را حلقه کنید.

1- مختصات نقطهٔ وسطی دو نقطه $A(0,y_1)$ و $B(0,y_2)$ عبارت است از:

a) $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ b) $M(\frac{y_2+y_1}{2},0)$ c) $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

2- مختصات نقطهٔ وسطی دو نقطهٔ $A(x_1,0)$ و $B(x_2,0)$ عبارت است از:

a) $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ b) $M(\frac{y_2+y_1}{2},0)$ c) $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

3- میل یک خط مستقیم عبارت است از:

a) $m=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ b) $m=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$ c) $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ d) $m=\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$

4-دو مستقیم وقتی با هم موازی‌اند که:

a) میل های آنها با هم مساوی باشند. b) میل‌های آنها مساوی نباشند.

c)حاصل ضرب میل های آنها منفی یک باشد. d) همه درست است.

● جا های خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- درسیستم کمیات وضعیه محور x را محور ...... و محور y را محور .... گویند.

2- در ناحیهٔ دوم نقاطی قرار دارند که x آنها .... و y آنها .... است.

3- در ناحیهٔ سوم نقاطی قرار دارند که هم x و هم y آنها............................. است.

4- مستقیمی که با جهت مثبت محور x زاویهٔ حاده بسازد میل آن .... است.

5- دو مستقیم موازی با جهت مثبت محور x زوایای .... می‌سازند.

6- میل هر مستقیم موازی با محور x .... است.

7- اگر میل دو خط با یکدیگر مساوی نباشند آن دو خط .... اند.

فصل سوم

مثلثات

نسبت های مثلثاتی یک زاویه

$\sin\theta$ $\quad$ $\sec\theta$

$\cos\theta$ $\quad$ $\csc\theta$

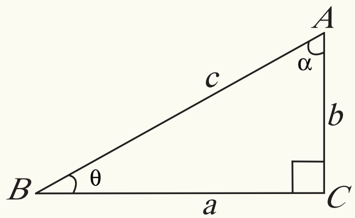
$\tan\theta$ $\quad$ $\cot\theta$

در شکل مقابل چند نسبت مثلثاتی وجود دارد؟ نام بگیرید.

فعالیت

• یک مثلث قایم الزاویه را رسم نمایید، با نظرداشت شکل شش نسبت مثلثاتی یک زاویه را بنویسید.

مثال ۱: مثلث قایم الزاویهٔ زیر را درنظر بگیرید و نسبت مثلثاتی زاویهٔ θ و α را بنویسید.



حل:

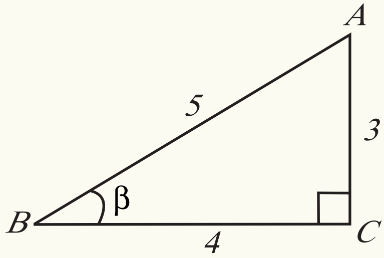
$$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \qquad \cot\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \qquad \sec\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \qquad \csc\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

یادداشت: نسبت های مثلثاتی زاویهٔ α را شاگردان بنویسند.

مثال ۲: در مثلث قایم الزاویهٔ زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ β را به دست آورید.



حل:

$$\sin\beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\beta = \frac{3}{4}$$

$$\cot\beta = \frac{4}{3}$$

$$\sec\beta = \frac{5}{4}$$

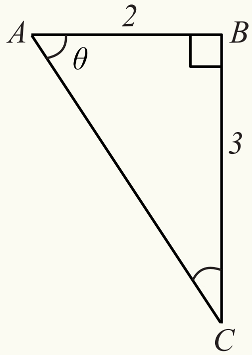
$$\csc\beta = \frac{5}{3}$$

تمرین

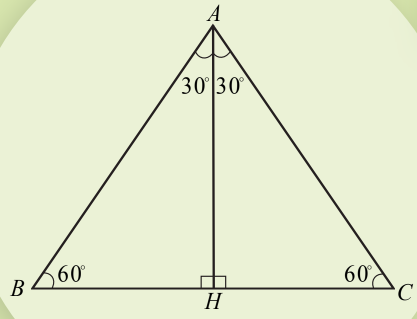
در مثلث قایم الزاویه زیر:

1 – طول وتر $\overline{AC}$ را معلوم کنید.

2 – نسبت های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.



نسبت های مثلثاتی زوایای معلوم

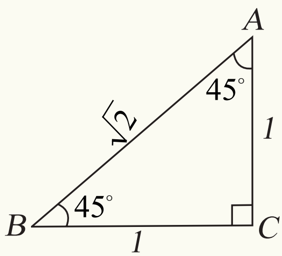


کدام زوایـا را زوایای معلوم گویند؟ بنویسید.

فعالیت

• یک مثلث متسـاوی الاضلاع را رسـم کنید، بعد ارتفاع AH آن را رسم نموده و سپس نسبت مثلثاتی 30° و 60° را به دست آرید.

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 45° را دریافت کنید.



حل:

$$\sin 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cot 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \csc 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

نتیجه:

نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایای خاص را می توان به آسانی به دست آورد؛ ولی محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی سایر زوایا کار مشکل است؛ بنا بر آن ازطرف بعضی علما توسط فورمول های خاص جدول ها ترتیب گردیده است که با استفاده از این جدول ها می توانیم نسبت های مثلثاتی هر زاویه را به دست آریم.

قابل تذکر است که در ترتیب جدول از مثلث قایم الزاویه، زاویه θ و رابطهٔ $(90-\theta)$ یا $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ استفاده گردیده است.

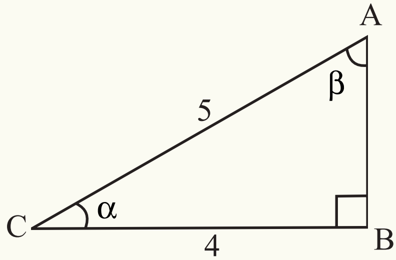
تمرین

در مثلث قایم الزاویهٔ زیر:

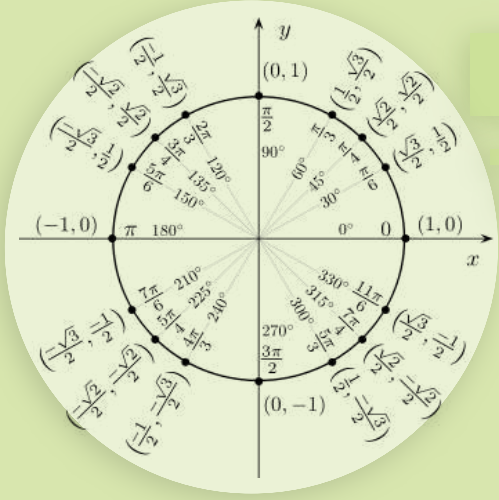
1 – طول ضلع قایم AB را معلوم کنید.

2 – نسبت های مثلثاتی زاویهٔ α را به دست آورید.

3 – نسبت های مثلثاتی زاویهٔ β را معلوم کنید.



جدول مثلثاتی و استعمال آن



در شــکل مقابل (دایــره مثلثاتی) آیا نسبت های مثلثاتی زوایا را نشان داده می توانید؟

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
0° 00′	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80° 00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79° 00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
12° 00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	**78°** 00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	**77°** 00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	**76°** 00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	**75°** 00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	**74°** 00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	**73°** 00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	**72°** 00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	**71°** 00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	**70°** 00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	**69°** 00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	**68°** 00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30′
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	**67°** 00′
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	**66°** 00′
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	**65°** 00′
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	**64°** 00′
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	**63°** 00′
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	**62°** 00′
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	**61°** 00′
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	**60°** 00′
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	**59°** 00′
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	**58°** 00′
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	**57°** 00′
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
34° 00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	**56°** 00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	**55°** 00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	**54°** 00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	**53°** 00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	**52°** 00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	**51°** 00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	**50°** 00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	**49°** 00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	**48°** 00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	**47°** 00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	**46°** 00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00′	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	**45°** 00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

فعالیت

به جدول توجه کنید.

- سطر و ستون اول جدول چه را نشان میدهد؟
- ستون اول طرف راست و چپ جدول به کدام زاویه شروع و به کدام زاویه ختم شده است؟
- هرگاه یک زاویه $45°$ و یا از $45°$ کوچکتر باشد، نسبت های مثلثاتی آن را در طرف چپ جدول در ستون درجه پیدا می نماییم از طرف بالا یا پایین می خوانیم اگر زاویه از $45°$ بزرگتر باشد چی باید کرد؟

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می نماییم:

اگر زاویه از $45°$ کوچکتر باشد آن زاویه را در ستون اول سمت چپ جدول و نسبت مثلثاتی آن را به طرف بالا در سطر اول پیدا می نماییم.

اگر زاویه از $45°$ بزرگتر باشد آن زاویه را در ستون اول سمت راست جدول و نسبت مثلثاتی آن را از پایین به طرف بالا در سطر آخر پیدا می نماییم.

مثال 1: کوساین $30° 10'$ را دریابید.

حل: ابتدا در ستون اول سمت چپ جدول، زاویهٔ مطلوب($30° 10'$) را می یابیم و در سطر اول جدول نسبت مثلثاتی آن را دریافت نموده تقاطع سطر و ستون، عدد (0,8646) را نشان می دهد که کوساین $30° 10'$ است.

$$\cos(30°10') = ?$$

$$\begin{array}{ccc} ° & & \cos \\ 30°10' & --- & 0{,}8\,6\,46 \end{array}$$

مثال 2: ساین $84° 50'$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا در ستون اول سمت راست جدول، زاویهٔ $84° 50'$ را پیدا می نماییم و در سطر اخیر جدول نسبت مثلثاتی مطلوب را می یابیم، تقاطع این سطر و ستون عدد (0,9959) را می دهد که ساین $84° 50'$ است.

$$\sin 84°50' = ? \qquad 0{,}9\,9\,59 - - - 84\;50° \quad (\sin)$$

یادداشت

نسبت های مثلثاتی زوایایی که تفاوت شان هرده دقیقه باشد در جدول موجود میباشد اما نسبت های مثلثاتی هر زاویه را نمی توانیم از این جدول به دست آوریم حالا می‌خواهیم طریقه یی را بیان نماییم که توسط آن نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را به دست می آوریم این طریقه را انترپولیشن(Interpolation) می نامند که در مثال های زیر آن را مطالعه می نماییم.

مثال: $\tan 42° 35'$ را به دست آرید.

حل: در جدول، تانجنت $42° 35'$ موجود نیست؛ اما تانجنت $42° 40'$ و $42° 30'$ در جدول موجود است که با استفاده از آن تانجنت زاویهٔ $42° 35'$ را دریافت می نماییم.

	فرق دو زاویه		فرق نسبت های مثلثاتی
$\tan\ 42° 40' = 0.9217$			
	$10'$	:	0.0054
$\tan\ 42° 35' = ?$			
	$5'$	:	x
$\tan\ 42° 30' = 0.9163$			

دیده می شود که فرق دو زاویهٔ اول و دوم $5'$ و فرق زوایای اول و سوم $10'$ است به همین ترتیب فرق تانجنت آن x است؛ یعنی اگر زاویه به اندازهٔ $10'$ فرق داشته باشد tan آن به اندازهٔ $0,0054$ فرق پیدا می کند و اگر زاویه به اندازه $5'$ فرق داشته باشد تانجنت آن به اندازه x فرق میکند که با استفاده از تناسب می توانیم بنویسیم.

$$\frac{5}{10}=\frac{x}{0,0054}\Rightarrow x=0,0027$$

قیمت را با زاویهٔ کوچک جمع می نماییم:

$$0,9163+0,0027=0,9190$$
$$\tan 42^\circ\ 35'=0,9190$$

تمرین

با استفاده از جدول نسبت های مثلثاتی:

1- $\cos\alpha,\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را به دست آرید، در صورتی که $\alpha=35^\circ\ 20'$ باشد.

2- $\cos\beta,\sin\beta$ و $\tan\beta$ را به دست آرید، در حالی که $\beta=75^\circ\ 10'$ باشد.

حل مثلث های قایم الزاویه

به شکل مقابل توجه نمایید، آیا گفته میتوانید که ارتفاع منار را چطور میتوان پیدا کرد؟

فعالیت

- هرگاه یک زاویهٔ مثلث قایم الزاویهٔ $30°\ 40'$ باشد، زاویهٔ دیگر آن را دریابید.
- هرگاه یک زاویهٔ مثلث قایم الزاویه $29°$ و وتر آن $25m$ باشد، عناصر نامعلوم مثلث را دریابید.
- هرگاه دو ضلع مثلث قایم الزاویه یا یک ضلع و یک زاویهٔ حاده آن معلوم باشد عناصر دیگر مثلث را چطور پیدا کرده می توانیم؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می نماییم:

در هر مثلث قایم الزاویه اگر زاویه حاده و دو ضلع آن معلوم باشد، متباقی اجزای مثلث را با استفاده از نسبت های مثلثاتی به دست می آوریم.

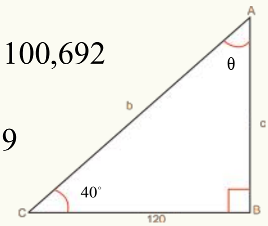
مثال 1: هرگاه یک زاویهٔ حاده مثلث قایم الزاویه $40°$ وضلع مجاور این زاویه 120 واحد طول باشد، مثلث مذکور را حل نمایید.

حل: از این که یک زاویه و دو ضلع مثلث نامعلوم است؛ بنابر این با استفاده از اجزای معلوم اجزای نامعلوم را طور زیر به دست می آوریم.

1, $\theta = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

2, $\tan 40^\circ = \dfrac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0{,}8391 = 100{,}692$

3, $\cos 40^\circ = \dfrac{120}{b} \Rightarrow b = \dfrac{120}{\cos 40^\circ} = \dfrac{120}{0{,}7660} = 156.6579$



مثال2: هر گاه وتر یک مثلث قایم الزاویه $49.7unit$ و یک ضلع قایم آن $25unit$ باشد مثلث مذکور را حل کنید.

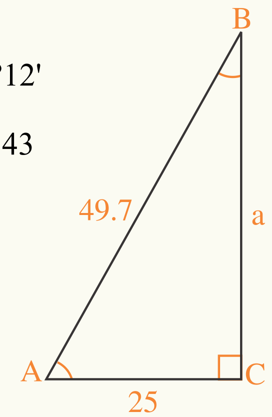
حل: دیده می شود که دو عنصر مثلث معلوم است؛ پس عناصر نامعلوم مثلث را طور زیر دریافت می نماییم:

$$1)\cos\hat{A} = \frac{25}{49,7} = 0,503$$

$$\cos\hat{A} = 0,503 \quad \Rightarrow \hat{A} = 59,8° = 59°,48'$$

$$2)\ \hat{B} = 90° - \hat{A} \quad \Rightarrow \hat{B} = 90° - 59,8° = 30,2° = 30°12'$$

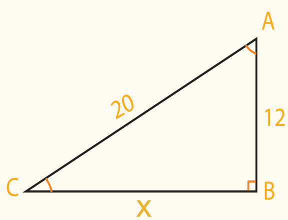
$$3)\tan\hat{A} = \frac{a}{25} \quad \Rightarrow a = \tan\hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1,7182 = 43$$



تمرین

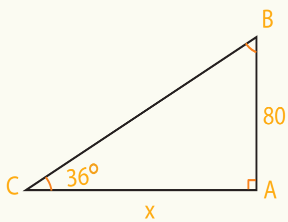
1- اگر یک زاویهٔ حادهٔ مثلث قایم الزاویه $38° 50'$ و ضلع مجاور این زاویه 311 واحد باشد، مثلث مذکور را حل نمایید.

2- در اشکال زیر عناصر مجهول را دریافت نمایید.



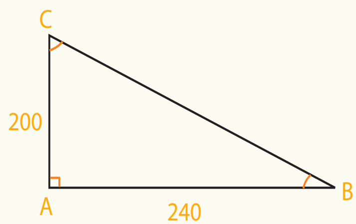
$x = ?$

$\hat{A} = ?$



$x = ?$

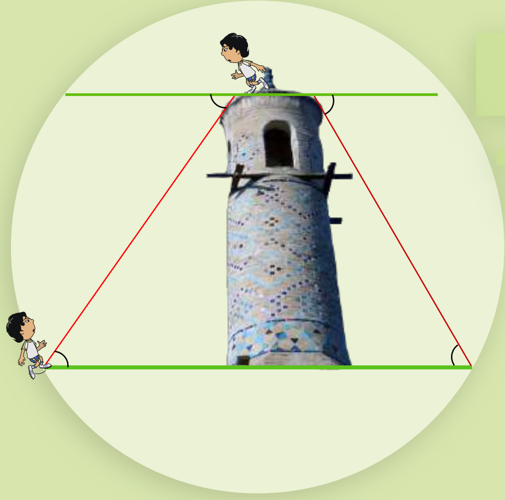
$\hat{B} = ?$



$\hat{B} = ?$

$\overline{BC} = ?$

زوایای میل، ارتفاع و تنزیل



در شکل مقابل توجه کنید، آیا میتوانید زوایای میل و تنزیل را نشان دهید؟

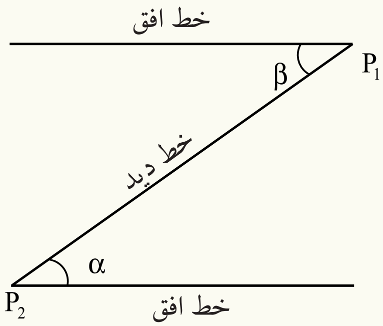
فعالیت

• هرگاه احمد در یک ارتفاع قرار گیرد خط دید وی با سطح افق چه نوع زاویه را می سازد و این زاویه به نام چه یاد میگردد؟
• هر گاه یک شخص دیگر در پایین قرار داشته باشد خط دید وی با سطح افق کدام زاویه را می سازد و این زاویه به نام چه یاد میگردد؟

نتیجه:

1- زاویهٔ ارتفاع Angle of Elevation

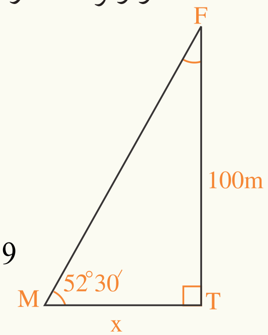
هرگاه یک شخص در پایین قرار داشته باشد و به یک ارتفاع نظر کند، خط دید وی با افق یک زاویه را تشــکل می دهد که زاویهٔ ارتفاع نامیده می شود؛ مانند زاویهٔ داده شدهٔ α .



2- زاویه تنزیل Angle of Depression

هرگاه یک شــخص دیگری در یک ارتفاع قرار داشــته باشد و به طرف پایین بنگرد خط دید وی با سطح افق یک زاویه را تشکیل میدهد که زاویه تنزیل نامیده می شود؛ مانند زاویهٔ β که در شکل نمایش داده شده است.

مثال 1: در مثلث قایم الزاویه $\overset{\Delta}{\mathrm{MTF}}$ زاویه ارتفاع $52^\circ\,30'$ و ارتفاع مثلث $100m$ است قاعده و وتر مثلث را دریابید.



$$\tan 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MT}} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52^\circ 30'} = \frac{100}{1.3032} \Rightarrow \ x = 76.73m$$

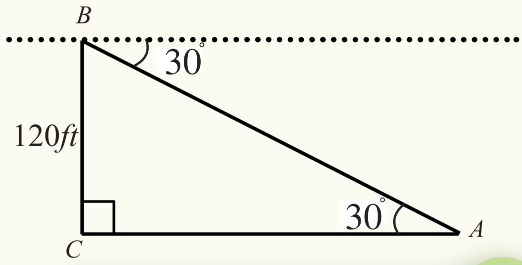
$$\overline{MF}^2 = \overline{FT}^2 + \overline{MT}^2 = (100)^2 + (76.73)^2 = 10000 + 5887.49$$

$$\overline{MF}^2 = 15887.49 = \sqrt{15887.49} = 126.04m$$

مثال2: طول تار یک کاغذ پران $120m$ است، زاویهٔ ارتفاع کاغذ پران 45° است ارتفاع کاغذ پران را دریابید.

$$\sin 45^\circ = \frac{\mathrm{h}}{120} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mathrm{h}}{120} \Rightarrow \mathrm{h} = \frac{120\sqrt{2}}{2} = 60\sqrt{2}\mathrm{m}$$

مثال3: یک برج ترصد از بحر $120\,ft$ ارتفاع دارد زاویهٔ نزولی که تحت آن کشتی از برج دیده می شود 30° است کشتی متذکره از برج چقدر فاصله دارد؟



$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{120}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 120 \cdot \cot 30^\circ = 120\ .1{,}7 = 204\,ft$$

تمرین

1- ارتفاع درختی را دریابید که زاویهٔ ارتفاع آن از 20° به 40° تبدیل گردد درین حالت مشاهد $75\,ft$ به درخت نزدیک میگردد.

2- یک درختی را باد از طرف بالا طوری شکستانده است که تنهٔ درخت و حصهٔ شکستهٔ آن یک مثلث قایم الزاویه را با زمین میسازند، اگر قسمت شکسته با زمین زاویهٔ 50° را تشکیل داده باشد و طول تنهٔ درخت $20\,ft$ باشد ارتفاع درخت را دریابید.

معادلات مثلثاتی

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

آیا گفته میتوانید که یک رابطهٔ مثلثاتی چی وقت معادلهٔ مثلثاتی می باشد؟

میدانیم که مطابقت مساواتی را گویند که برای همه قیمت های متحول اطراف مساوات باهم برابر گردد و معادله مساواتی است که برای بعضی از قیمت های متحول اطراف مساوات باهم برابر گردد.

فعالیت

- یک معادلهٔ مثلثاتی را بنویسید.
- در این معادله مجهول را نشان دهید.
- به کدام قیمت مجهول، معادله صدق می کند.

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می نماییم.

تعریف:

هر معادله‌یی که در آن یک یا چند نسبت مثلثاتی موجود باشد معادلهٔ مثلثاتی نامیده می‌شود؛ مانند $\sin x + \cos x = 1$، $\sin x - 1 = 0$ یا $2\cos x - 1 = 0$

- آن زاویه یا قوسی که نسبت مثلثاتی آن مطلوب باشد مجهول اصلی نامیده می شود مثلاً در معادله فوق x مجهول اصلی است.

برای حل معادلات مثلثاتی طور زیر عمل می نماییم:

1 - با استفاده از معادلات الجبری قیمت مجهول را به دست می آوریم.

2 - با کمک جدول نسبت های مثلثاتی قیمت مجهول اصلی را به دست می آوریم.

3 - چون معادلات مثلثاتی پیریودیک اند؛ بنابر این حل های بی شمار دارند؛ پس با استفاده از فورمول های زوایایی که نسبت‌های مثلثاتی یکسان دارند، حل های معادله را دریافت می کنیم.

مثال: حل های معادلات مثلثاتی $2\sin x-\sqrt{2}=0$ و $\cos x+\frac{1}{2}=1$ را دریابید.

$$\cos x+\frac{1}{2}=1$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=60^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x=45^\circ$$

تمرین

حل معادلات زیر را دریابید.

$a)\ \sqrt{3}\cot x-1=0$ $\quad b)\ 2\sin 3x+\sqrt{3}=0$ $\quad c)\ 2\cos 4x-\sqrt{2}=0$

نکات مهم فصل سوم

- مثلثات (Trigonometry) از دو کلمهٔ یونانی (Trigon) یعنی مثلث و (Metron) یعنی اندازه کردن تشکیل شده و عبارت از علمی است که از روابط بین عناصر مثلث بحث می کند.
- در هر مثلث قایم الزاویه برای زوایای قایمهٔ آن شش نسبت مثلثاتی تعریف شده است که عبارت اند از: $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec$ و $\csc$.
- زاویه‌یی که از پایین به بالا خط دید با افق می سازد به نام زاویه‌یی ارتفاع و زاویه‌یی که از بالا به پایین خط دید با افق می سازد به نام زاویهٔ تنزیل یاد می گردد.
- نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌یی که در جدول موجود نباشند از طریقهٔ انترپولیشن دریافت می گردند.

تمرینات فصل سوم

● در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- نسبت $\sin\alpha$ یک زاویه حاده عبارت است از:

a) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده}}{\text{طول وتر}}$

b) $\dfrac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده}}$

c) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده}}{\text{طول وتر}}$

d) $\dfrac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده}}$

2- نسبت $\tan x$ مساوی است به:

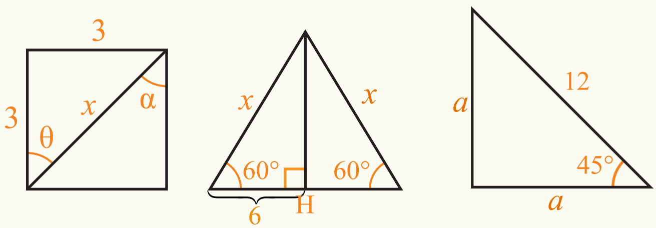
a) $\dfrac{1}{\cos x}$ b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ c) $\dfrac{1}{\sin x}$ d) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$

3- قیمت افادهٔ $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ مساوی است به:

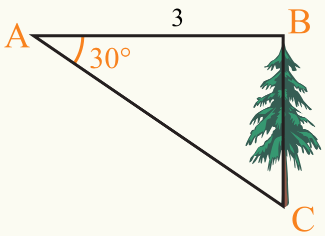
a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

● سؤالات زیر راحل نمایید:

1- در اشکال زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده شده را دریافت نمایید.



2- در شکل زیر اگر $\tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ باشد فاصله‌های AC و BC را محاسبه کنید.

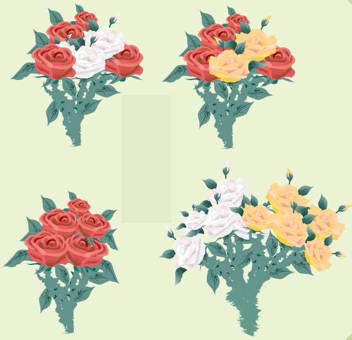


فصل چهارم

افاده های الجبری




تجزیه به فکتور(فکتور گیری)



درشکل مقابل چند دسته گل را می بینید؟
آیا گفته میتوانید که کدام دسته ها با هم مشابه اند؟
و چند شاخچه سازندهٔ یک دسته گل است؟

فعالیت

- جاهای خالی را با اعداد پر کنید.

$$5x = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)x = \ldots\ldots x + \ldots\ldots\ldots x$$

$$6y = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)y = \ldots\ldots y + \ldots\ldots\ldots y$$

- در روابط بالا از چه خاصیتی استفاده گردیده است؟
- ضرایب عددی طرف راست با ضریب متحول در طرف چپ چه رابطه یی دارد؟

$$3x + 2x = (\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)x = \ldots\ldots\ldots x$$

- آیا می توان $a+b$ راتجزیه کرد؟ $ax + bx = (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)x = \ldots\ldots\ldots x$

در فعالیت بالا به مشاهده رسید که:
در تجزیه برخی افاده های الجبری می توان از خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع استفاده کرد.
با تشخیص عامل مشترک در افاده ها، می توان یک افاده الجبری را تجزیه نماییم.

مثال 1: افاده های الجبری زیر را تجزیه کنید:

$a)\quad ab + ac - ad$ $\qquad b)\quad x^4 - x^3y + x^2y^2$

$c)\quad \frac{1}{2}m^2 - 2m$ $\qquad d)\quad 3xy - 6x^2$

حل: در افاده های داده شده ابتدا جملهٔ مشترک در همه حدود را دریافت نموده آن را پیش روی قوس می نویسیم، پس تمام حدود را به این جملهٔ مشترک تقسیم نموده و حاصل آن را در بین قوس می نویسیم.

$a)\quad ab+ac-ad=a(b+c-d)$

$b)\quad x^4-x^3y+x^2y^2=x^2(x^2-xy+y^2)$

$c)\quad \frac{1}{2}m^2-2m=m(\frac{1}{2}m-2)$

$d)\quad 3xy-6x^2=3x(y-2x)$

مثال 2: افاده‌های زیر را تجزیه کنید:

$a)\ Ax+Bx+Ay+By$

$b)\ x^2-4y^2+x+2y$

$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$

$d)\ 2x+2y+2x+2y$

حل: افاده ها را اول طوری ترتیب می کنیم که حدود مشترک پهلوی هم قرار گیرند بعد حدود مشترک را در افاده ها دریافت نموده و سپس آن را تجزیه می‌نماییم.

$$a)\ \underbrace{Ax+Bx}_{x}+\underbrace{Ay+By}_{y}$$
$$=x(A+B)+y(A+B)$$
$$=(A+B)(x+y)$$

$$b)\ x^2-4y^2+x+2y$$
$$=[x^2-(2y)^2]+(x+2y)$$
$$=(x-2y)(x+2y)+(x+2y)$$
$$=(x+2y)(x-2y+1)$$

$$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$$
$$=2x(x+y)+3(x+y)$$
$$=(x+y)(2x+3)$$

$$d)\ 2x+2y+2x+2y$$
$$=4x+4y$$
$$=4(x+y)$$

تمرین

افاده های زیر را تجزیه کنید.

1) $x^4-x^3y+x^2x$

2) $x(2x-3y)^2+8(2x-3y)$

3) $10ab-15ac$

4) $32x^2y-4xy^2$

5) $\sqrt{2}x^3y^2-\sqrt{8}xy$

6) $0.5mn^2-0.125m^4n^3$

7) $ab+b+b$

8) $\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{6}x^2-\frac{1}{2}x^2-x^4$

9) $mab+my+ny+nab$

10) $ab(b+a+c)+ac(a+b+c)+bc(c+b+a)$

کوچکترین مضرب مشترک (L.C.M)

برای پیدا کردن حاصل جمع $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ دریافت نمودن کوچکترین مضرب مشترک بین اعداد 6 و 4 (مخرج مشترک) ضرورت است. برای پیدا کردن حاصل جمع $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ کدام روش را پیشنهاد می کنید؟

فعالیت

- برای پیدا کردن حاصل جمع $\frac{2}{8}+\frac{3}{6}$ ابتدا کوچکترین مضرب مشترک 6 و 8 را پیدا می کردیم، مراحل آن را توضیح دهید.
- افاده‌های $2x+2$ و x^2-1 را به عوامل ضربی شان تجزیه کنید.
- عوامل ضربی مشترک و غیر مشترک را تعیین کنید.
- برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک $2x+2$ و x^2-1 فکر کنید چه عملی باید انجام شود؟
- کوچک‌ترین مضرب مشترک $2x+2$ و x^2-1 کدام است؟ آن را به‌دست بیاورید.
- حاصل جمع $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ را دریافت نمایید.

برای به دست آوردن کوچکترین مضرب مشترک، دو یا چند افادهٔ الجبری ابتدا آن‌ها را به عوامل ضربی اولیه تجزیه نموده؛ سپس عوامل مشترکی که بزرگترین توان را دارند، در عوامل ضربی غیر مشترک ضرب نموده؛ کوچکترین مضرب مشترک افاده‌ها به دست می‌آید.

مثال 1: کوچکترین مضرب مشترک افاده‌های $4x^2$، $2x+2$ و x^2-1 را به دست بیاورید.
حل: ابتدا افاده‌ها را به طور جداگانه تجزیه می کنیم:

$$4x^2 = 2^2x^2$$
$$2x+2 = 2(x+1)$$
$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

دیده می‌شود عامل مشترکی که بزرگترین توان را دارد $(x+1)$ و 2^2 است که حاصل ضرب آنها با عوامل غیرمشترک مساوی به $2^2(x+1)(x-1)x^2 = 4x^2(x^2-1)$ بوده که به نام کوچکترین مضرب مشترک یا L.C.M یاد می‌شود.

مثال 2: کوچکترین مضرب مشترک افاده‌های $6x^2-6$, $8x^2+40x+32$ و $4x^2+12x-16$ را به دست آرید.

$$4x^2+12x-16 = 4(x^2+3x-4) = 2^2(x+4)(x-1)$$
$$8x^2+40x+32 = 8(x^2+5x+4) = 2^3(x+4)(x+1)$$
$$6x^2-6 = 6(x^2-1) = 2\times3(x-1)(x+1)$$

در نتیجه کوچکترین مضرب مشترک افاده ها عبارت است از:

$$2^3\times3(x+1)(x+4)(x-1)$$

تمرین

با در نظر داشت کوچکترین مضرب مشترک، ساده سازید.

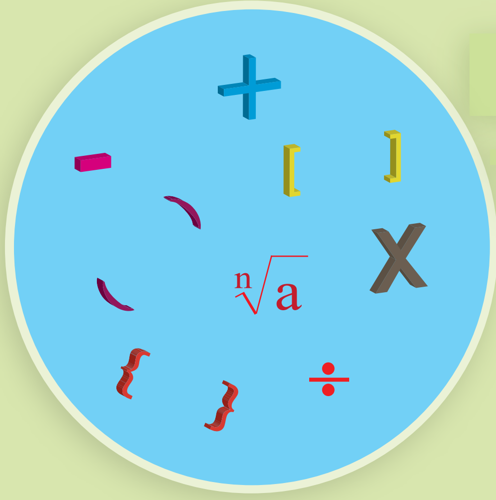
1) $\frac{2x}{3}-\frac{4}{5x}\div\frac{3}{10x}$

2) $\frac{3x-1}{x^2+2x-15}-\frac{2}{x+5}$

3) $\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$

4) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^3-1}+\frac{1}{x+1}$

ساده کردن افاده‌های الجبری



هر گاه در افاده های الجبری علامات مقابل موجود باشد آیا گفته میتوانید کــه به چه ترتیــب افاده ها را ســاده کرده می توانیم؟

فعالیت

• برای ساده کردن هر یک از افاده‌های زیر چه عملیه های باید انجام دهیم. این عملیه ها را به ترتیب شماره گذاری کنید.

$3-2^4\times5+(16\div4)$

$4\times5\div2-3(2+3^2)+2$

$3x^2-4x(2+x)$

$2x-3\{-2(x+1)(x+2)\}+6x\div2$

در فعالیت بالا دیدیم که ترتیب اجرای عملیه‌ها در افاده‌های الجبری از قانون ترتیب عملیات در اعداد پیروی می کند. برای ساده کردن یک افاده الجبری به ترتیب زیر عمل می کنیم:

1- توان را رفع می‌نماییم.

2- در صورت موجودیت قوس ها، در قدم نخست قوس خورد، قوس متوسط و قوس بزرگ را رفع می کنیم.

3- به ترتیب از چپ به راست عملیه های ضرب و تقسیم را انجام می‌دهیم.

4- به ترتیب از چپ به راست عملیه های جمع و تفریق را انجام می‌دهیم.

مثال 1: افاده‌های زیر را ساده سازید.

$$1)\ \frac{1}{2}m-3\left[\left\{5(m-\frac{1}{2}-m)\right\}-m-6\right]\div 2$$
$$=\frac{1}{2}m-3\left[5m-\frac{5}{2}-5m-m-6\right]\div 2$$
$$=\frac{1}{2}m-3\left[-m-\frac{17}{2}\right]\div 2$$
$$=\frac{1}{2}m+(3m+\frac{51}{2})\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m+\frac{51}{4}$$
$$=\frac{m+3m}{2}+\frac{51}{4}=\frac{4m}{2}+\frac{51}{4}$$
$$=2m+\frac{51}{4}$$

$$2)\ 2x-1-\{-2(x+2)\}+2x\div 2\times 5x$$
$$=2x-1-(-2x-4)+2x\div 2\times 5x$$
$$=2x-1+2x+4+x\times 5x$$
$$=2x-1+2x+4+5x^2$$
$$=4x+5x^2+3$$

فعالیت

- عبارت‌های زیر را ساده سازید:

$a)\ \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

$b)\ \sqrt{8x^3y^3}$

$c)\ \sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

- برای از بین بردن جذرهای مخرج $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ از کدام مطابقت می توان کمک گرفت؟
- با از بین بردن علامت جذر در مخرج کسرها، آن‌ها را ساده کنید.

عمل از بین بردن علامت جذر را در مخرج یک کسر به نام گویا کردن و یا ناطق ساختن کسر الجبری یاد میکنند.

مثال: مخرج کسرهای زیر را ناطق سازید.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a}}$

3) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

4) $\dfrac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

حل:

1) $$\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

2) $$\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

3) $$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}\times\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2}=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1}=\sqrt{a}+1$$

4) $$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1}=-5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

- برای ساده ساختن یک افادهٔ الجبری ابتدا به ترتیب طاقت و قوس ها را رفع می سازیم؛ سپس به ترتیب از چپ به راست عملیه های ضرب، تقسیم را طوری که اگر اول ضرب بود ضرب را و اگر اول تقسیم بود عملیهٔ تقسیم را و به همین ترتیب جمع و تفریق را انجام می دهیم.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}$ عبارت از $\sqrt{x}$ است.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}+1$ عبارت از $\sqrt{x}-1$ است.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ عبارت از $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ است.

تمرین

افاده‌های زیر را ساده سازید.

1) $2x-2\{3x-(2+x)-1\}\div 2$

2) $\frac{1}{3}y-5\left[-2\left\{6(y-\frac{1}{3}-y\right\}\right]\div 3$

3) $5+(-18)-\{24+(-30)\}(-7)$

4) $\{(-120)+(-330)\}\div 16+\{168+240-(-210)\}\div 6$

5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

6) $\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

7) $2\sqrt{2000ab}-\frac{b}{a}\sqrt{72ab}$

8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$

9) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

10) $2\sqrt{18x}+\sqrt{50x}-\frac{1}{2}\sqrt{20x}$

11) $(\sqrt{2}+1)(1-\sqrt{2})$

نکات مهم فصل چهارم

- حاصل ضرب عوامل مشترک افاده های الجبری کـه بزرگترین توان را دارند در عوامل غیر مشترک افاده های الجبری به نام کوچکترین مضرب مشترک یا $L.C.M$ یاد می کنند.
- ابتدابه ترتیب طاقت ها،قوس های خورد،متوسط وبزرگ رارفع؛سپس به ترتیب عملیه های تقسیم، ضرب، جمع و تفریق را از چپ به راست انجام می دهیم.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}$ عبارت از $\sqrt{x}$ است.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}+1$ عبارت از $\sqrt{x}-1$ است.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ عبارت از $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ است.

تمرینات فصل چهارم

- در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- در افادهٔ $2x^2 - \frac{1}{2}x$ عامل مشترک:

a) 2 است   b) x است   c) $2x$ است   d) ندارد

2- حاصل ضرب افاده های $(x-2)(x+3)$ عبارت است از:

a) x^2+5x+6 b) x^2-5x-6

c) x^2+x-6 d) x^2-x+6

3- کوچکترین مضرب مشترک افادهٔ $\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x+2}$ عبارت است از:

a) $2(x+1)(x-1)$ b) $(x+1)(x-1)$

c) $(2x+2)(x^2-1)$ d) هیچکدام.

4- عامل ناطق سازی افادهٔ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ عبارت است از:

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

- جاهای خالی را با کلمات و جملات مناسب پر کنید.

1- حاصل تقسیم $\frac{x^2-1}{x+1}$ عبارت از........................ است.

2- حاصل ضرب $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$ عبارت از........................ است.

- سؤالات زیر را حل نمایید.

1- کوچکترین مضرب مشترک $21x^2y^3$, $14x^3y^2$ را دریافت نمایید.

2- افادهٔ زیر را ساده سازید.

$$\frac{1}{x^2-4}+\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x-2}$$

فصل پنجم

نامساوات

$$\frac{?}{?} = +$$

$$\frac{?}{?} = -$$

تحلیل تعیین اشارهٔ افادهٔ کسری

آیا گفته میتوانید برای اعداد حقیقی a و b کسر $\frac{a}{b}$ چه وقت دارای علامت مثبت و چه وقت دارای علامت منفی است؟

فعالیت

- افادهٔ کسری $\frac{3x+5}{2x-2}$ در چه حالتی منفی می شود؟
- به کدام قیمت x، افادهٔ کسری صفر است؟
- آیا می توان در افادهٔ فوق به‌جای x ، قیمت 1 را قرار داد؟ چرا؟
- با تعیین اشارهٔ افاده‌های صورت و مخرج می توانیم علامت افادهٔ کسری فوق را از حاصل تقسیم اشاره‌های صورت و مخرج به دست آریم:

$$3x+5=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-5}{3}$$

مـی دانیم که برای $x<\frac{-5}{3}$ علامت صورت منفی و برای $x>\frac{-5}{3}$ علامت صورت مثبت است.

برای تعیین اشارهٔ مخرج کسر ابتدا قیمتی که $2x-2$ را صفر می سازند، به‌دست می آریم.

$$2x-2=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

در نتیجه برای $x<1$ علامت مخرج منفی و برای $x>1$ علامت مخرج مثبت است.
در اینجا باید توجه داشته باشیم که افادهٔ کسری که در آن قیمت مخرج کسر صفر می‌شود تعریف نشده است.

بحث فوق را تحلیل و تعیین علامت را در جدول به شکل زیر خلاصه می کنیم:

x	$x<-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}<x<1$	1	$x>1$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{3x+5}{2x-2}$	$+$	0	$-$	تعریف نشده	$+$

بنابر آن برای قیمت‌های $x<\frac{-5}{3}$ و $x>1$ اشـاره افادهٔ کسری $\frac{3x+5}{2x-2}$ مثبت است و برای قیمتهای $\frac{-5}{3}<x<1$ اشاره افادهٔ کسری $\frac{3x+5}{2x-2}$ منفی است.

برای $x=\frac{-5}{3}$ افادهٔ کسری صفر است.

برای $x=1$ افادهٔ کسری تعریف نشده است.

در حالت کلی برای تعیین اشـارهٔ یک افادهٔ کسری ابتدا اشارهٔ صورت و اشارهٔ مخرج افادهٔ کسـری را تعین می کنیم؛ سـپس از حاصل تقسیم اشـاره‌های صورت و مخرج اشارهٔ افادهٔ کسری را به دست می آوریم.

مثال: تغییر علامت افادهٔ کسری $\frac{-x+3}{x}$ را در یک جدول تعیین و تحلیل کنید.

حل:

$$-x+3=0 \quad \Rightarrow x=3$$

$$x=0$$

x		0		3	
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-x+3}{x}$	$-$	تعریف نشده	$+$	0	$-$

تمرین

اشارهٔ افاده‌های کسری زیر را تعیین کنید.

$a)\ \frac{-x+1}{5+x}$ $\quad b)\ \frac{x}{x+1}$ $\quad c)\ \frac{1}{x}+\frac{2}{7}$

نامساوی‌های کسری

$$y = \frac{x+1}{x}$$

$y > 0$

$y < 0$?

آیا گفته میتوانید برای کدام قیمت‌های x افادهٔ کسری مقابل مثبت و برای کدام قیمت‌های x، افادهٔ کسری مقابل منفی است؟

فعالیت

نامساوات کسری $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ را در نظر بگیرید.

- برای بر قراری نامساوی فوق صورت و مخرج افادهٔ کسری چه علامتی باید داشته باشد؟
- برای کدام قیمت های متحول x، صورت افادهٔ کسری فوق مثبت است؟
- برای کدام قیمت های متحول x، مخرج افادهٔ کسری فوق مثبت است؟
- برای کدام قیمت های متحول x، صورت افادهٔ کسری فوق منفی است؟
- برای کدام قیمت های متحول x، مخرج افادهٔ کسری فوق منفی است؟
- با توجه به نتایج از فعالیت‌فوق، برای کدام قیمت های متحول x نامساوی $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ صحت است؟

در انجام فعالیت فوق مشاهده گردید که برای حل نامساوی $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ حالتهای مختلفی را باید در نظر گرفت. یکی دیگر از راه‌های به دست آوردن ست حل‌های نامساوی کسری، تشکیل جدول تعیین علامت است. به‌طور مثال برای یافتن ست حل‌های نامساوی $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ طور زیر عمل می کنیم:

$$x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2$$

$$4 + 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2$$

x		-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{4+2x}$	$+$ حل نامساوات	تعریف نشده	$-$	0	$+$ حل نامساوات

بـا توجه به جدول تحلیل و تعیین اشـاره‌ها دیده می‌شـود که بـرای قیمت‌های $(x<-2)$ و قیمت‌های $(x>2)$ افادهٔ کسـری مثبت و برای قیمت‌های بزرگتـر از -2 و کوچکتر از 2 ، $(-2<x<2)$ منفی است در نتیجه ست حل های نا مساوی $\frac{x-2}{4+2x}>0$ عبارتند از:

$x<-2$ ویا $x>2$ یا $\{x\in IR : x<-2\}\cup\{x\in IR : x>2\}$

$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

مثال: نامساوات کسری $\frac{2x}{5x+3}\geq 1$ را حل کنید.

حل: جهت به دسـت آوردن ست حل نامساوات کسـری ابتدا آن را به صورت یک افادهٔ کسری کوچکتر یا بزرگتر از صفر به این گونه تغییر شکل میدهیم:

$$\frac{2x}{5x+3}\geq 1 \Rightarrow \frac{2x}{5x+3}-1\geq 0$$

$$\frac{2x-(5x+3)}{5x+3}\geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3}\geq 0$$

$$-3x-3=0\Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

حال با تشکیل جدول تحلیل و تعیین علامت حل نامساوی را به دست می‌آوریم:

x		-1		$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	$+$	0	$-$		$-$
$5x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	$-$	0	$+$ حل نامساوات	تعریف نشده	$-$

بنابر این با توجه به جدول فوق ست حل های نامساوات عبارت است از:

$\{x\in IR : -1\leq x<\frac{-3}{5}\}$

در حالت کلی برای دریافت حل نامساوی‌های کسری طورزیر عمل می نماییم:

– اول نامساوی را طوری می‌نویسیم که کوچکتر یا بزرگتر از صفر باشد.

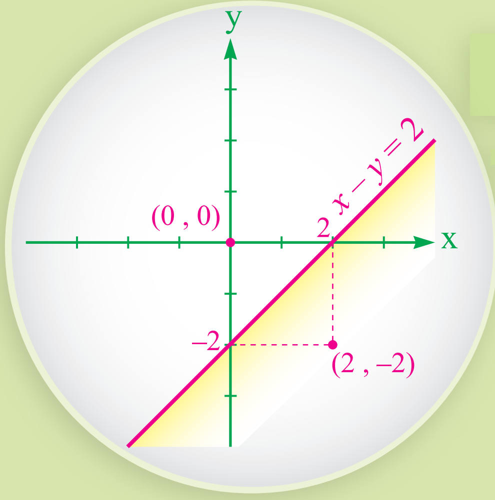
– با استفاده از جدول تحلیل و تعیین اشاره ست حل های نامساوی را به دست می‌آوریم.

تمرین

ست حل نامساوی‌های زیر را به دست آرید.

1) $\frac{-x-9}{2x+4}<0$ 2) $\frac{6x+7}{7-6x}\leq 0$ 3) $\frac{x+10}{2x-3}\geq 0$ 4) $\frac{7x-2}{3-2x}>3$

نامساوات خطی دو متحوله



خط مستقیم $x\text{-}y=2$، مستوی کمیات وضعیه را به دو ناحیهٔ بالا وپایین تقسیم می کند.

مختصات نقاط کدام ناحیه در نامساوی $x\text{-}y<2$ صدق می کند؟

نامساوی $x-y<2$ که در آن دو متحول x و y با درجهٔ یک وجود دارند یک نامساوی خطی دو متحوله خوانده می‌شود.

فعالیت

- جورهٔ مرتب (x,y) را طوری به دست آرید که در نامساوی $x-y<2$ صدق کند.
- آیا می‌توانید جورهٔ دیگری به دست آرید که در نامساوی فوق صدق کند؟
- چه تعداد جوره‌های مرتب وجود دارند که برای آنها نامساوی فوق صدق می کند؟

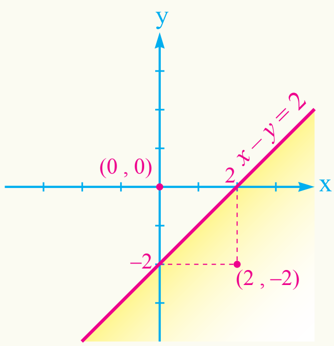
در حالت‌های فوق می گوییم که:

نامساوی $ax+by<c$ که در آن b,a و c اعداد حقیقی، $a\neq 0$ و $b\neq 0$ یک نامساوی خطی دو متحوله نامیده می‌شود.

ست حل این نامساوات، جوره‌های مرتب اعدادی اند که در نامساوی صدق می کنند.

مثال 1: ست حل نامساوی خطی دو متحوله $x-y<2$ را تعیین کنید.

حل: برای حل این نامساوی ابتدا خط $x-y=2$ را در مستوی کمیات وضعیه رسم می کنیم دیده می‌شود که خط مستقیم $x-y=2$ مستوی کمیات وضعیه را به دو ناحیه تقسیم می کند. جهت اینکه بدانیم جوره‌های مرتب کدام ناحیه در نامساوی فوق صدق می کند از هر ناحیه یک جورهٔ مرتب انتخاب نموده در نامساوات قرار می‌دهیم.



به طور مثال دیده می‌شود که جورهٔ مرتب $(0,0)$ در نامساوی صدق می کند.

$$0-0<2 \quad \Rightarrow \quad 0<2$$

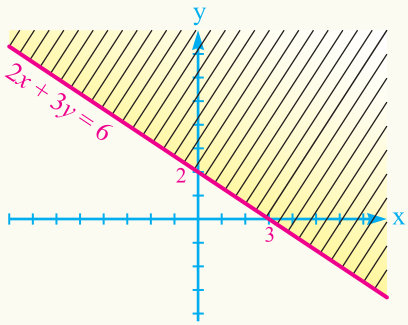
ولی جورهٔ مرتب $(2,-2)$ در نامساوی صدق نمی کند:

$$2-(-2) \nless 2$$

بنابراین نقاطی که در قسمت بالای خط مستقیم قرار دارند، حل های نامساوی اند.
برای نمایش ست حل، آن طرف خط مستقیم را که در نامساوی صدق نمی کند مخطط می کنیم.

یادداشت: چند نقطهٔ دیگری بالا و پایین خط مستقیم انتخاب کرده و نتیجهٔ فوق را تحقیق کنید.

مثال 2: ست حل های نامساوی $2x+3y<6$ را به دست آرید.



حل: ابتدا خط مستقیم $2x+3y=6$ را در مستوی کمیات وضعیه رسم می کنیم.
سپس ساحهٔ حل را با وضع کردن مختصات یک نقطهٔ بالا یا یک نقطهٔ پایین خط تعیین می کنیم. اگر نقطهٔ متذکره در نامساوات حقیقت داشت همان طرف خط حل نامساوی است و بالعکس آن حل نامساوی نیست.

طور مثال: جورهٔ مرتب $(0,0)$ یعنی مبداء کمیات وضعیه را در نظر می گیریم:

$$2x+3y<6$$

چون مختصات نقطهٔ متذکره در نامساوات صدق می کند؛ بنا بر این نقاطی که در قسمت پایین خط قرار دارند ست حل نامساوات اند.

$$2\times(0)+3\times(0)<6$$

$$0<6$$

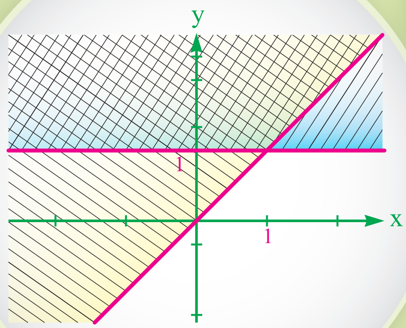
تمرین

ست حل نامساوی‌های زیر را به دست آرید.

1) $3x-2<5x+y$ 2) $2y<3x$ 3) $x+y>0$

4) $2x-6y\geq 8x+4y$ 5) $x+y<0$ 6) $5x-3y<-1$

سیستم نامساوی‌های خطی دو متحوله



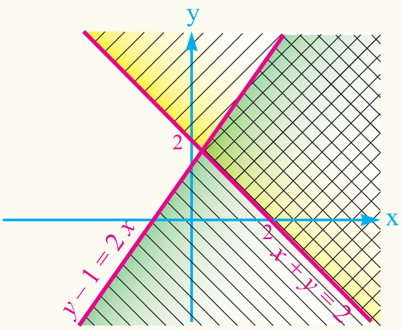
آیـا می توانید حدس بزنید که شــکل مقابل ساحهٔ حل های کدام نامساوی ها را نشان می دهد؟

سیستم نامساوی $\begin{cases} x+y<2 \\ y-1>2x \end{cases}$ که در آن دو نامســاوی خطی دو متحوله وجود دارد یک سیستم نامساوی گفته می شود.

منظور از حل سیســتم نامساوی یافتن آن جوره‌های مرتب است که همزمان در هر دو نامساوی صدق می کنند.

به طور مثال، برای حل سیستم $\begin{cases} x+y<2 \\ y-1>2x \end{cases}$ طور زیر عمل می کنیم:

ابتدا بعد از ترســیم خطوط ست حل هر یک از نامساوی‌ها را در مستوی کمیات وضعیه به دست می آوریم.



ناحیه یی که مشترکاً مخطط شده است، در Set حل همزمان نامســاوات ها قرار دارد، این ناحیه حل سیستم نامساوی است.

بــرای ترســیم $x+y=2$ اگر $x=0$ باشــد $y=2$ و اگر $y=0$ باشد $x=2$ میگردد.

برای مســتقیم $y-1=2x$، اگر $x=0$ باشد $y=1$ و اگر $y=0$ باشد $x=\frac{-1}{2}$ میگردد.

برای حل سیستم نامساوی خطی دو متحوله، طور زیر عمل می کنیم:
ابتدا ست حل هر یک از نامساوی‌های سیستم را در مستوی کمیات وضعیه تعیین می کنیم.
ناحیه‌یی که همزمان جزء ست حل هر دو نامساوی باشد حل سیستم است.

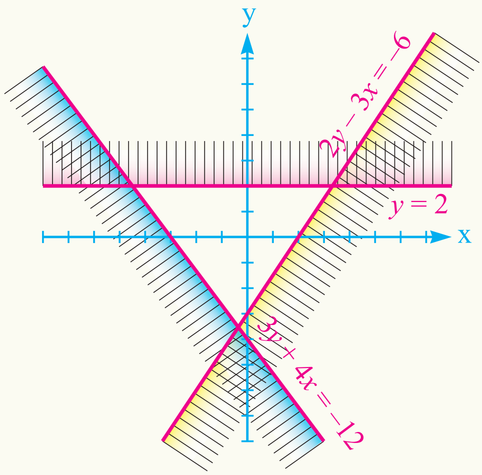
مثال: سیستم نامساوات زیر را حل نمایید:

$$\begin{cases} 2y-3x>-6 \\ y-2<0 \\ 3y+4x>-12 \end{cases}$$

حل: ابتدا هر یک از خطوط نامساوی‌های فوق را رسم می کنیم یعنی خطوط:

$2y-3x=-6$ ، $y-2=0$ و $3y+4x=-12$

برای ترسیم $2y-3x=-6$ اگر $x=0$ باشد $y=-3$ و برای ترسیم $y-2=0$ اگر $x=0$ باشد $y=2$ می گردد، و برای ترسیم مستقیم $3y+4x=-12$ ، $x=0$, $y=-4$ بوده با استفاده ازقیمت های فوق، آن را طور زیر رسم می نماییم.



سپس ساحهٔ حل هر یک از نامساوی‌ها را جدا جدا تحلیل و تعیین می‌نماییم.
ست حل سیستم نامساوی‌های داده شده به صورت ناحیه یی که مخطط نیست در شکل ملاحظه شده می تواند.

تمرین

ست حل سیستم های زیر را توسط گراف به دست آرید:

1) $\begin{cases} x<3 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y<9 \\ 5x-2y>5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<3 \\ y>2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y<-3 \\ 5x-2y>9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<3 \\ 5x-y>1 \end{cases}$

نکات مهم فصل پنجم

- برای تحلیل و تعیین نمودن اشــارهٔ یک افادهٔ کسری اول اشارهٔ صورت و مخرج را جداگانه تعیین می نماییم؛ سپس حاصل تقسیم علامت ها را به دست می آوریم.
- برای حل سیستم نامساوی خطی دو متحوله طور زیر عمل می کنیم:

ابتدا ســت حل هر یک از نامســاوی های سیستم را در مســتوی کمیات وضعیه تعیین می کنیم. ناحیه‌یی که همزمان جزء ست حل هر دو نامساوات باشد حل سیستم است.

تمرینات فصل پنجم

● در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح است؟

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{6}\leq 2-\frac{1}{3}$ $\quad b)\ \frac{3}{2}>\sqrt{2}$ $\quad c)\ \sqrt{9+16}\geq 5$ $\quad d)$ هر سه درست اند.

2- کدام یک از ست‌های زیر ست حل نامساوی $x+3\leq 5$ است؟

$a)\ \{x\in IR: x\leq 2\}$ $\quad b)\ \{x\in IR: 2\leq x\}$

$c)\ \{x\in IR: x\leq 8\}$ $\quad d)\ \{x\in IR: x<-2\}$

3- کدام یک از انتروال‌های زیر حل نامساوات $2x+3>-1$ است؟

$a)\ [-2,\infty)$ $\quad b)\ (2,\infty)$ $\quad c)\ (1,\infty)$ $\quad d)\ (-2,\infty)$

4- کدام یک از انتروال‌های زیر ست حل $\frac{x+3}{3-x}>0$ است؟

$a)\ (-3,3)$ $\quad b)\ (-\infty,3)$ $\quad c)\ (-3,\infty)$ $\quad d)\ (-3,3)$

● جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- در نامساوی $ax+b<0$ ست همهٔ .... که نامساوی را صدق کند به نام ست حل نامساوی فوق یاد می‌شود.

2- بینوم $2x+4$ برای قیمت‌های .... منفی می گردد.

3- بینوم $-x+\frac{1}{2}$ برای قیمت‌های .... مثبت می گردد.

4- ست حل نامساوی $2x+5\leq\frac{1}{5}-x$ عبارت است از ....

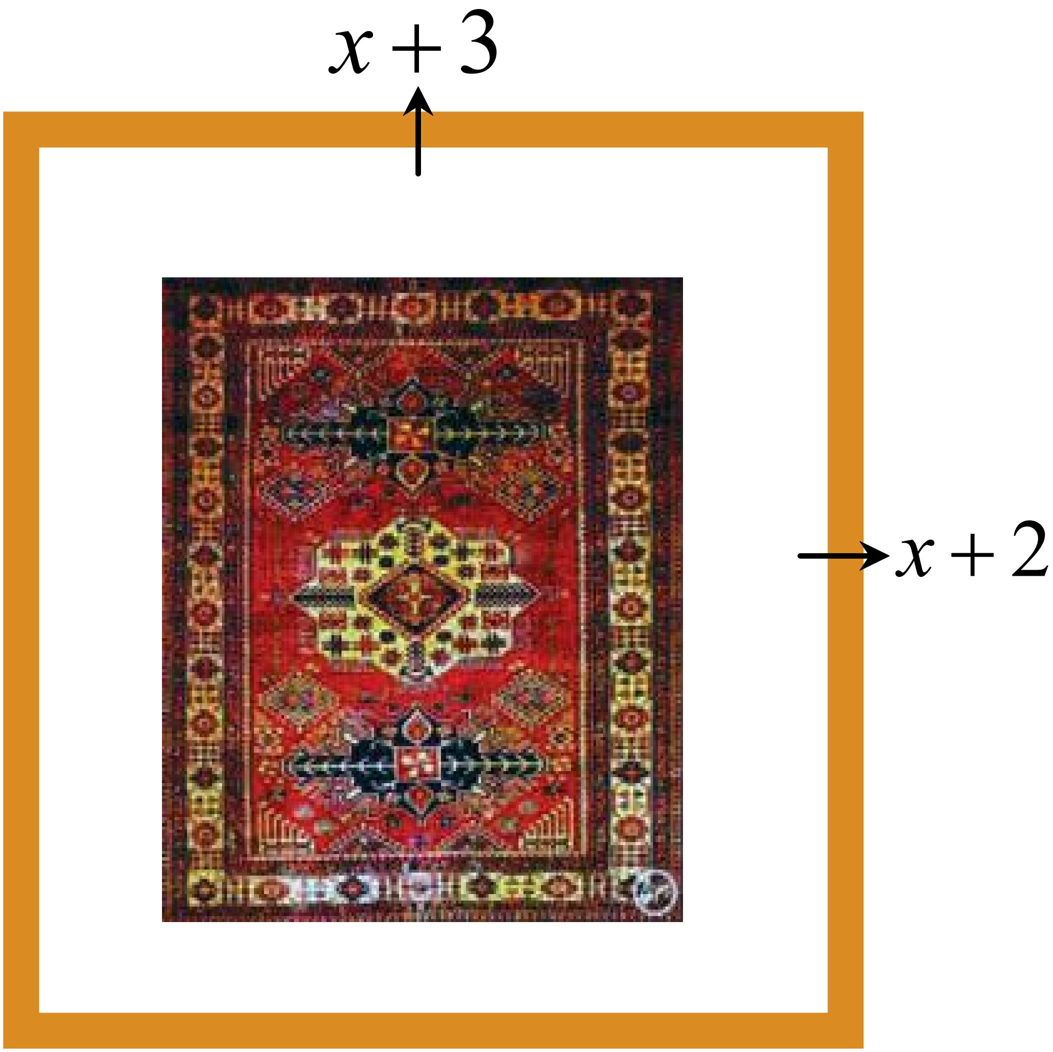
● حل سیستم‌های نامساوی زیر را به دست آرید:

$$a)\ \begin{cases} y>x \\ 3y<2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x+y<2 \\ y-4>2x \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x-y>0 \\ x-2y<0 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x+2y<8 \\ 3x-3y<9 \\ 10x-2y>2 \end{cases}$$

فصل ششم

معادلات یک مجهولهٔ درجه دوم


$x+3$
$x+2$

شکل عمومی معادلۀ یک مجهوله درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

به شکل مقابل توجه کنید گفته میتوانید
این شکل عمومی چه نوع معادله است؟
درجۀ آن چند است؟
حد ثابت کدام است؟
راجع به ضرایب a و b چه میدانید؟
آیا در این معادله $a=0$ شده میتواند؟

فعالیت

یک معادلۀ یک مجهولۀ درجه دوم ترتیب کنید طوری که:
- ضرایب a و b اعداد طبیعی باشند.
- حد ثابت آن یک عدد صفری باشد.

مثال 1: اگر $a=2$, $b=-4$ و $c=\frac{7}{8}$ باشد معادلۀ آن رابنویسید.

حل: می دانیم که شکل عمومی معادلۀ یک مجهوله درجه دوم عبارت است از:

$$ax^2+bx+c=0$$

حال به عوض a, b و c قیمت های آن ها را در معادله وضع نماییم معادلۀ زیر تشکیل می شود:

$$2x^2-4x+\frac{7}{8}=0$$

مثال 2: در معادلۀ $\frac{1}{2}x^2+3x+\sqrt{3}=0$ قیمت های a, b و c را نشان دهید.

حل:

$$a=\frac{1}{2} \quad , \quad b=3 \quad , \quad c=\sqrt{3}$$

مثال 3: معادلهٔ درجه دوم یک مجهوله را تشکیل نمایید که قیمت های a, b و c در آن به ترتیب $-2, -\sqrt{7}$ و $\frac{1}{5}$ باشند.

حل:

$$-2x^2 - \sqrt{7}x + \frac{1}{5} = 0$$

تمرین

- معادلات زیر را تشکیل دهید.

1- $a = 0.5$, $b = 2.8$ و $c = 7.5$

2- $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$ و $c = \frac{6}{7}$

3- $a = 3$, $b = \sqrt{6}$ و $c = \frac{7}{8}$

- در معادلات زیر قیمت های a, b و c را نشان دهید.

1) $4x^2 - 2x + 3 = 0$

2) $\frac{2}{3}x^2 - 5 = 3x$

3) $2x - \frac{1}{3}x^2 = \sqrt{\frac{7}{5}}$

طریقهٔ حل معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم که ضریب x در آن صفر باشد

$$ax^2 + c = 0$$

آیا گفته می‌توانید در شکل چه نوع معادله را می‌بینید؟
این معادله با شکل عمومی یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم چه تفاوت دارد؟
آیا این معادله را یک معادلهٔ مکمل

فعالیت

گفته میتوانیم؟

- شکل عمومی معادلهٔ یک مجهوله درجه دوم را بنویسید.
- اگر در این معادله $b = 0$ باشد معادله کدام شکل را به خود می گیرد؟
- چطور میتوان قیمت x را پیدا کرد.
- قیمت x چی را نشان می دهد. بیان کنید.

مثال 1: در معادلهٔ $2x^2 - 8 = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = +2$$

$$x_2 = -2$$

مثال 2: در معادلهٔ $\frac{1}{2}x^2 - 18 = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$\frac{1}{2}x^2 = 18$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm 6$$
$$x_1 = +6$$
$$x_2 = -6$$

مثال 3: قیمت x را در معادلهٔ $\sqrt[3]{x^2} = 2$ دریابید.

حل:

$$\sqrt[3]{x^2} = 2$$
$$(\sqrt[3]{x^2})^3 = (2)^3$$
$$x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8}$$
$$x = \sqrt{2 \cdot 4} = \pm 2\sqrt{2}$$
$$x_1 = +2\sqrt{2}$$
$$x_2 = -2\sqrt{2}$$

تمرین

قیمت x را در معادلات زیر به دست آورید.

1) $4x^2 - 8 = 0$

2) $3x^2 - 12 = 0$

3) $5x^2 - 75 = 0$

طریقهٔ حل معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم که حد ثابت آن صفر باشد

$$ax^2 + bx = 0$$

در شکل چه نوع معادله را می بینید؟
این معادله با شکل عمومی یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم چه تفاوت دارد؟
آیا این معادله را یک معادلهٔ مکمل گفته میتوانیم؟

فعالیت

- شکل عمومی یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم را بنویسید.
- اگر در این معادله $c = 0$ باشد معادله کدام شکل را به خود می گیرد بنویسید.
- قیمت x در این نوع معادله چطور دریافت می گردد؟
- قیمت x چی را نشان می دهد؟ بیان کنید.

مثال 1: در معادلهٔ $4x^2 - 8x = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$x(4x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$4x - 8 = 0$$

$$4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{4}$$

$$x_2 = 2$$

مثال 2: در معادلهٔ $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$x(\frac{1}{3}x - 2) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$\frac{1}{3}x - 2 = 0$$
$$\frac{1}{3}x = 2$$
$$x_2 = 6$$

مثال 3: معادلهٔ $x^2 + 4x = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x(x+4) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x + 4 = 0$$
$$x_2 = -4$$

تمرین

معادله های زیر را حل کنید.

1) $3x^2 - 5x = 0$

2) $5x^2 - 12.5x = 0$

3) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x = 0$

حل معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم که ضریب x و حد ثابت آن موجود باشد

$$ax^2+bx+c=0$$

در شکل چه نوع معادله را می بینید نام بگیرید:

دربارهٔ حل این معادله چی فکر می کنید؟

آیا گفته می توانید که این معادله دارای چند جذر است؟

فعالیت

- یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم را بنویسید که ضریب x و حد ثابت آن موجود باشد.
- اگر $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ باشد، قیمت های x_1 و x_2 را نظر به معادله‌یی که تحریر داشته اید دریافت کنید.
- قیمت های دریافت شدهٔ x_1 و x_2 را در اصل معادله وضع نمایید و ببینید که آیا معادله را صدق میکند یا خیر؟

مثال: قیمت های x_1 و x_2 را در معادلهٔ زیر به دست آرید:

$$-2x^2-3x+2=0$$

حل: دیده می شود که: $c=2,\ b=-3,\ a=-2$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{(-3)^2-4(-2\cdot 2)}}{2(-2)}$$

$$=\frac{3+\sqrt{9+16}}{-4}=\frac{3+\sqrt{25}}{-4}=\frac{3+5}{-4}=\frac{8}{-4}$$

$$x_1=-2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{(-3)^2-4(-2\cdot 2)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{9-\sqrt{9+16}}{-4} = \frac{9-\sqrt{25}}{-4} = \frac{9-5}{-4} = \frac{4}{-4}$$

$$x_2 = -1$$

تمرین

جذر معادلات زیر را به دست آورید.

1) $2x^2-5x-3=0$

2) $x^2-2x-3=0$

3) $2x^2+5x+3=0$

حل معادلات یک مجهولهٔ درجه دوم که دارای جذرهای مضاعف(مساوی) باشند

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x_1=x_2=d$$

آیا گفته می‌توانید در شکل چه نوع معادله را می‌بینید نام بگیرید:

دربارهٔ جذور x_1 و x_2 چی فکر می کنید.

آیا معادلات یک مجهولهٔ درجه دوم وجود دارد که دو جذر مساوی داشته باشد؟

فعالیت

- شکل عمومی یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم را بنویسید.
- اگر جذور این معادله $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ باشد، چی وقت x_1 مساوی x_2 می شود؟ بنویسید.
- اگر $+\sqrt{b^2-4ac}=0$ و $-\sqrt{b^2-4ac}=0$ شود قیمت های x_1 و x_2 را بنویسید.

مثال: جذرهای معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم زیر را به دست آرید:

$$x^2+4x+4=0$$

حل: در معادلهٔ داده شدهٔ $a=1,\ b=4,\ c=4$ اند.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{4^2-4(1\cdot 4)}}{2\cdot 1}$$
$$=\frac{-4+\sqrt{16-16}}{2}=\frac{-4+\sqrt{0}}{2}=\frac{-4}{2}$$
$$x_1=-2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{4^2-4(1\cdot 4)}}{2\cdot 1}$$
$$= \frac{-4-\sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4-\sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2}$$
$$x_2 = -2$$

تبصره: اگر در یک معادله، قیمت $b^2-4ac<0$ یعنی Δ منفی باشـد، معادلات در ست اعداد حقیقی جذر ندارند.

تمرین

جذور معادله های زیر را دریافت کنید.

1) $4x^2-4x+1=0$

2) $3x^2-6x+3=0$

3) $2x^2-8x+8=0$

نکات مهم فصل ششم

- شکل عمومی هر معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم عبارت از $ax^2+bx+c=0$ بوده، طوری که $a \neq 0$ باشد.
- معادلاتــی که شــکل $ax^2+c=0$ و $ax^2+bx=0$ را دارند، به نام معادلات یک مجهولهٔ درجه دوم ناقص یاد میکنند.
- حل معادلات $ax^2+bx=0$ عبارت از: $x_1=0$ و $x_2=-\frac{b}{a}$
- به صورت عمومی حل های هر معادلهٔ درجه دوم توسط فورمول $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

به دست می آید که $\Delta=b^2-4ac$ است.

- هر گاه $\Delta>0$ باشد؛ معادله دو حل حقیقی دارد.
- هر گاه $\Delta=0$ باشد؛ معادله دو حل مساوی دارد.
- هر گاه $\Delta<0$ باشــد؛ معادله در ســت اعداد حقیقی جذر ندارد، جذرآن در ســت اعداد موهومی می باشد.

تمرینات فصل ششم

● در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- در معادلهٔ $4x = 3x^2 - 1$ ضرایب a, b و c عبارت از:

الف) $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$ ب) $a = -3$, $b = 4$, $c = +1$

ج) $a = 4$, $b = 3$, $c = -1$ د) هیچ کدام.

2- حل‌های معادلهٔ $3x^2 - 8x + 5 = 0$ عبارتند از:

الف) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{3}$ ب) $x_2 = 1$, $x_1 = -\frac{5}{3}$

ج) الف و ب د) هیچ کدام.

3- اگر $\Delta > 0$ باشد معادله:

الف) دو حل مساوی دارد. ب) معادله دوحل حقیقی و مختلف دارد.

ج) حل ندارد. د) یک حل دارد.

● جاهای خالی را پر کنید.

1- شکل عمومی معادلات یک مجهوله درجه دوم .... است.

2- اگر .... باشد معادلهٔ درجه دوم حل ندارد.

3- اگر درجهٔ یک معادله(2) باشد معادله .... دارد.

● سؤالات زیر را بخوانید در مقابل سؤالات درست آن حرف(ص) و در مقابل سؤالات نادرست آن حرف(غ) بگذارید.

1- (   )اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد؛ معادله در ست اعداد حقیقی حل ندارد.

2- (   )فورمول محمد بن موسی $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است.

3- (   )در معادلهٔ $2x^2 - 4x = 0$ یک حل معادله صفر است.

● سؤال زیر را حل کنید.

1- در معادلات زیر ضرایب a, b و c را نشان دهید و بگویید که کدام آنها معادلهٔ کامل و کدام آنها ناقص است؟

$c)\ 2x^2 - 6x = 0$ $b)\ 3x^2 - 1 = 0$ $a)\ 3x^2 - 4x + 1 = 0$