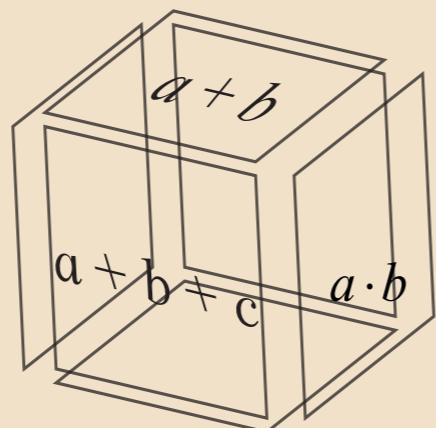
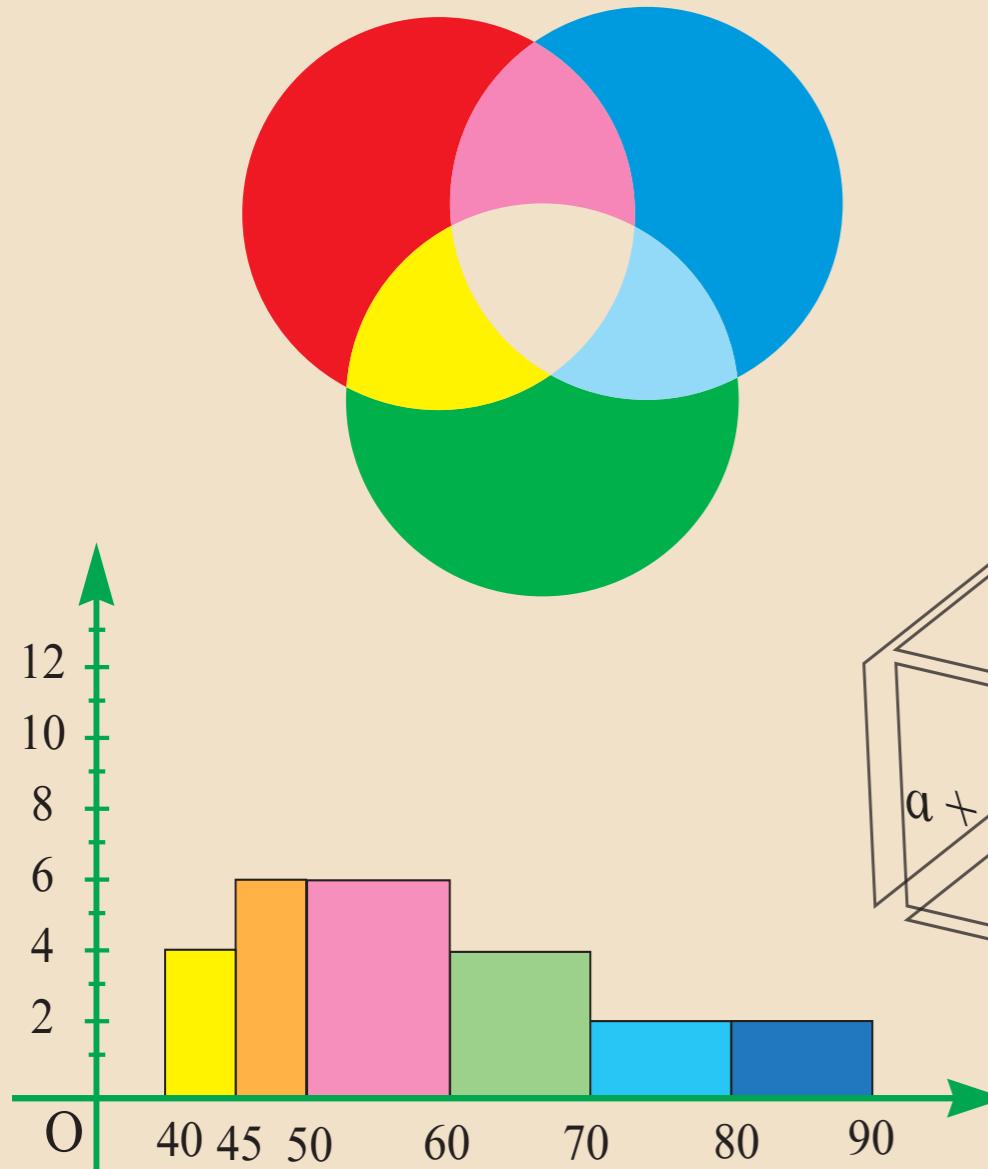


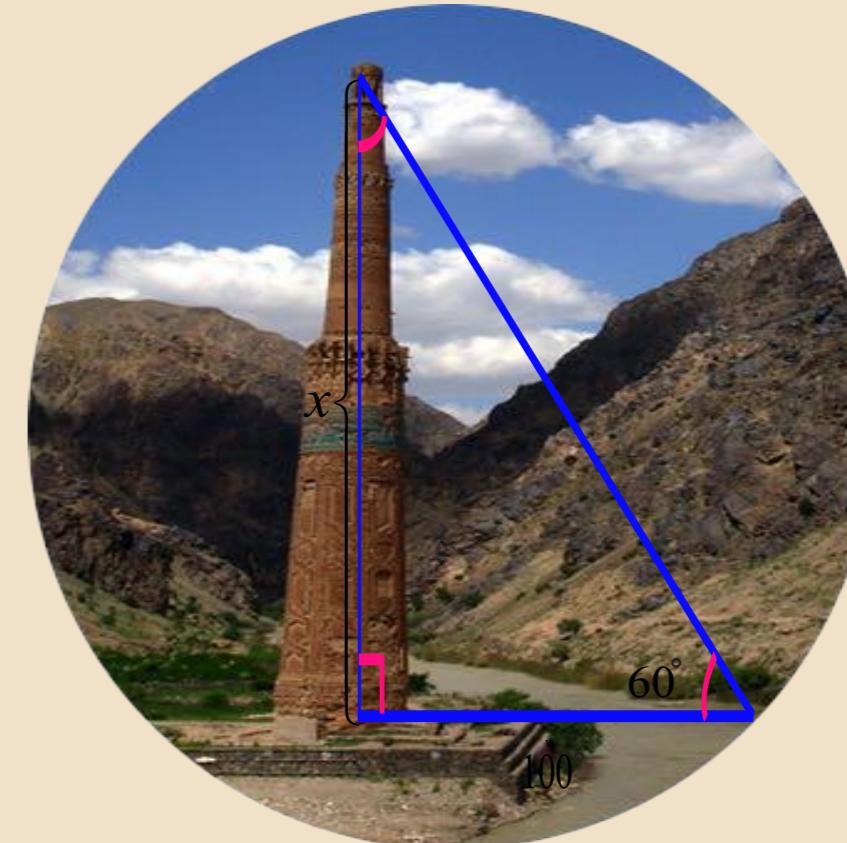
ریاضي

نهم ټولکۍ



د پوهنې
وزارت
د پوهنې
وزارت

۱۳۹۸ هـ. ش.





ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د توري
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجردی
براهوي دي، قزلاش دی
دا هپواد به تل څلپوي
په سينه کې د آسيا به
نوم د حق مودي رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچي يې قهرمان دی
د بلوخو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیريان، نورستانیان
هم ايماق، هم پشه يان
لكه لمري پرشنه آسمان
لكه زره وي جاوي دان
وايو الله اکبر وايو الله اکبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی
نهم
تولگی

١٣٩٨

ھ.ش

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضي دیپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفین

ادیت کوونکي: د پښتو ژبې د ادیت دیپارتمنت غږي

ټولگۍ: نهم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکي: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تأليف لوی ریاست

خپروونکي: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوی ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ خای: کابل

چاپ خونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دي. په بازار کې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغروونکو سره قانوني چلنديکړي.

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او بسونکي خدای ﷺ شکر په ئای کوو، چې مورد ته یې ژوند رابنلی، او د لوست او لیک له نعمت خخه یې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لمړنې پیغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

خرنګه چې ټولو ته بنکاره د ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه نومول شو، له دې امله به د گران هپواد بنوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. بنوونکي، زده کوونکي، کتاب، بنوونځي، اداره او د والدينو شوراګانې د هپواد د پوهنېز نظام شپږګونې بنستيز عناصر بلل کيري، چې د هپواد بنوونې او روزنې په پراختيا او پرمختيا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشترابه مقام، د هپواد په بنوونېز نظام کې د دوډي او پراختيا په لور بنستيزو بدلونونو ته زمن دي. له همدي امله د بنوونېز نصاب اصلاح او پراختيا، د پوهنې وزارت له مهمو لوړۍ ټوبونو خخه دي. همدارنګه په بنوونځي، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي بنوونېزو تأسیساتو کې، درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملننه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې خای لري. مور په دې باور يو، چې د باکيفيته درسي کتابونو له شتون پرته، د بنوونې او روزنې اساسی اهدافو ته رسپدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسپدو او د اغښناک بنوونېز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هپواد له ټولو زړه سواندو بنوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو خخه په درناوي هيله کوم، چې د هپواد بچيانو ته دې درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېردو لو کې، هیڅ دول هڅه او هاند ونه سېموي، او د یوه فعال او په دینې، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوشښن وکړي. هره ورڅ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤوليت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې دن ورځې ګران زده کوونکي به سبأ د یوه پرمختلي افغانستان معماران، او د ټولنې متمند او ګټور او سپدونکي وي.

همدا راز له خورو زده کوونکو خخه، چې د هپواد ارزښناکه پانګه ده، غوبښنه لرم، خو له هر فرصت خخه ګټه پورته کړي، او د زده کړي په پروسه کې د حیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او بنوونکو ته په درناوي سره، له تدریس خخه بنه او اغښناکه استفاده وکړي.

په پای کې د بنوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د بنوونېز نصاب له مسلکي همکارانو خخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستوي کېدونکي هلي خلې کړي دي، منته کوم، او د لوی خدای ﷺ له دربار خخه دوی ته په دې سېیخلې او انسان جوړونکي هڅي کې بریا غواړم. د معاري او پرمختلي بنوونېز نظام او د داسې ودان افغانستان په هيله چې وګړي پې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دكتور محمد ميرويس بلخي

فهرست

لومړۍ څېرکۍ: دایره

مخ

۱

- د دایري عناصر، د یوې مستقيمي کربنې حالتونه، د دایرو موقعيت نظر یو بل ته

- د دایري اپوند زاوې

- د دایري د وتر او شعاع خانګړتیاوه

- د دایري محیطي او مماسی زاوې

دویم څېرکۍ: په یوه دایره کې د اوردوالي اړیکې

- د یوه ټکي طاقت نظر دایري ته

- د دایري مماس کربنه، د دایري دنئ او باندنه زاوې

- محیطي او محاطي دایره

- په دایره کې د مرسموم خلور ضلعي خانګړتیاوه (خواص)

- د منظمي مصلح ترسیم، د دایري محیط او مساحت

درېم څېرکۍ: تحليلي هندسه

- د دوو ټکو تر منځ واهن (فاصله)

- د یوه قطعه خط (توټې کرشې) د منځني ټکي مختصات

- د مستقيمي کربنې ميل، د موازي او عمود کربنو ميلونه

- د مستقيمي کرشې معادله، د هغې مستقيمي کرشې معادله چې ميل او یو ټکي بې معلوم وي

- د مستقيمي کربنې عمومي معادله

- د خطې معادلو سيستم

- د خطې معادلو د سيستم حل په تعويضي او افنا طریقې سره

- د خای بدلون، انتقال، انعکاس او دوران

خلورم څېرکۍ: مثلثان

- په مثلث کې د تالس قضيء

- د حاده زاوې ساین، کوساین او تانجنت

- د خانګړو زاویومثلثاتي نسبتونه، د ميل او تانجنت تر منځ اړیکې

- مثلثاتي جدول، د قایم الزاویو مثلثونو حل

- مثلثاتي معادلي

۹۵

مخ

۱۲۷

فهرست

پنځم څېرکۍ: خو جمله يې ګانې

- په فکتورونو تجزیه
- د الجبری افادو ضرب، د مکعبونو مجموع او تفاضل
- کوچنۍ مشترک ضرب
- د الجبری افادو وېش
- د الجبری افادو د عملیو د سرته رسولو ترتیب

۱۵۱

شېرم څېرکۍ: نامساوات

- د خطې نا مساواتو حل
- فاصلې يا انتروالونه
- د بینوم د علامې ټاکل، د کسری افادو د علامو تحلیل او ټاکل
- کسری نامساواتونه، دوه متحوله خطې نامساوات
- د نامساواتو سیستمونه

۱۷۵

اووم څېرکۍ: یو مجھوله دویمه درجه معادلې

- د دویمې درجې د معادلو حل
- غیر خطې اړیکې

• په هندسيي لاره د دویمې درجې د معادلو حل د محمد بن موسى فورمول، تکمیل مریع

۱۹۵

اتم څېرکۍ: احصائيه

- د ډېټا data د دسته بندې لاره، د نښتو یا متصلو ډېټا ګانو دسته بندې او وزني او سط
- مستطيلي او دایروي ګرافونه
- ميانه، د تحول ساحه او د انحراف او سط

۲۲۱

نهم څېرکۍ: احتمالات

- د ناخاپه پېښو اتحاد او تقاطع
- بشپړ او مکمل ست
- په سټونو مدل جوړول
- د شمېرلو اصول

لومړی څېرکي

دایره





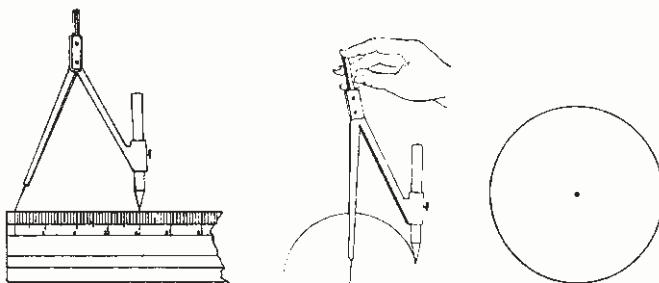
دایره (CIRCLE)



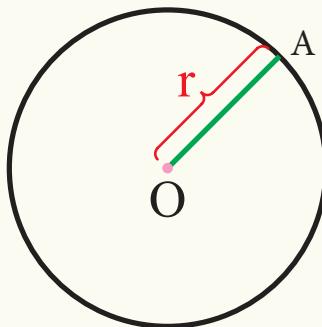
شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په تصویر کې وينۍ، نومونه يې واخلي.

فعالیت

يو ټکي د کاغذ پر مخ وتاکي، د 4cm په اوږدوالي د پرکار خوله خلاصه او ددي ټکي شاوخوانه، يو بشپړ دوران ورکړي، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوي ټکي خه نومېږي؟

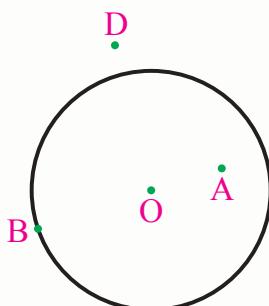


تعريف



په يوه مستوي کې د هغه ټولو ټکو سټ چې له يوه ټاکلې ټکي خخه مساوي واتېن (فاصله) ولري، دایره نومېږي، یا په بل عبارت دایره له يوې ترپلي منحنۍ خخه عبارت ده چې له يوه ټاکلې ټکي خخه مساوي واتېن ولري. ترپلي منحنۍ ته د دایري محیط او ټاکلې ټکي ته د دایري مرکز وابي چې په $C(O, r)$ بنودل کېږي. د دایري مرکز په شکل کې O او شعاع يې د r په تورو بنودل کېږي.

فعالیت



- په لاندې شکل کې د A و B او D ټکو خایونه (موقعیت) نظر O دایري ته وټاکي.
- د هغو ټکو واتېن د دایري له مرکز خخه اندازه او د دایري د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړي.
- په خپله خوبنه درې نور ټکي چې په دایره کې دننه او له دایري خخه بهر پراته وي، په پام کې ونيسي. آیا لاسته راغلي اړیکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پایله:

1- د هغو ټکو ست چې واتېنې د دایري له مرکز خخه د دایري له شعاع خخه کوچنی وي،

$$I = \{A / |\overline{OA}| < r\} \quad \text{د دایري دننه ساحه(منځ) بلل کېږي، یا}$$

2- د هغو ټکو ست چې واتېنې د دایري له مرکز خخه د دایري له شعاع سره مساوي وي،

$$C = \{B / |\overline{OB}| = r\} \quad \text{د دایري محیط یا مخ ویل کېږي، یا}$$

3- د هغو ټکو ست چې فاصله یې د دایري له مرکز خخه د دایري له شعاع خخه لوی وي،

$$E = \{D / |\overline{OD}| > r\} \quad \text{د دایري باندې ساحې په نامه یادېږي، یا}$$

4- د مستوي هغه برخه چې د دایري د محیط او د هغې د داخلي سطحې په واسطه جلا

شوي وي، د دایري د سطحې په نوم یادېږي.

پوښتني

1- یوه دایره د $2cm$ په شعاع رسم کړي. د لاندې ټکو خخه کوم یو یې د دایري په دننه، بهر او په محیط کې پروت دی:

• A ټکي واتېن د دایري له مرکز خخه $1.4cm$ دی.

• B ټکي واتېن د دایري له مرکز خخه $2.3cm$ دی.

• C ټکي واتېن د دایري له مرکز خخه صفر دی.

• D ټکي واتېن د دایري له مرکز خخه $\frac{4}{2}cm$ دی.

2- په کوم حالت کې یو ټکي د دایري پر محیط پروت وي.

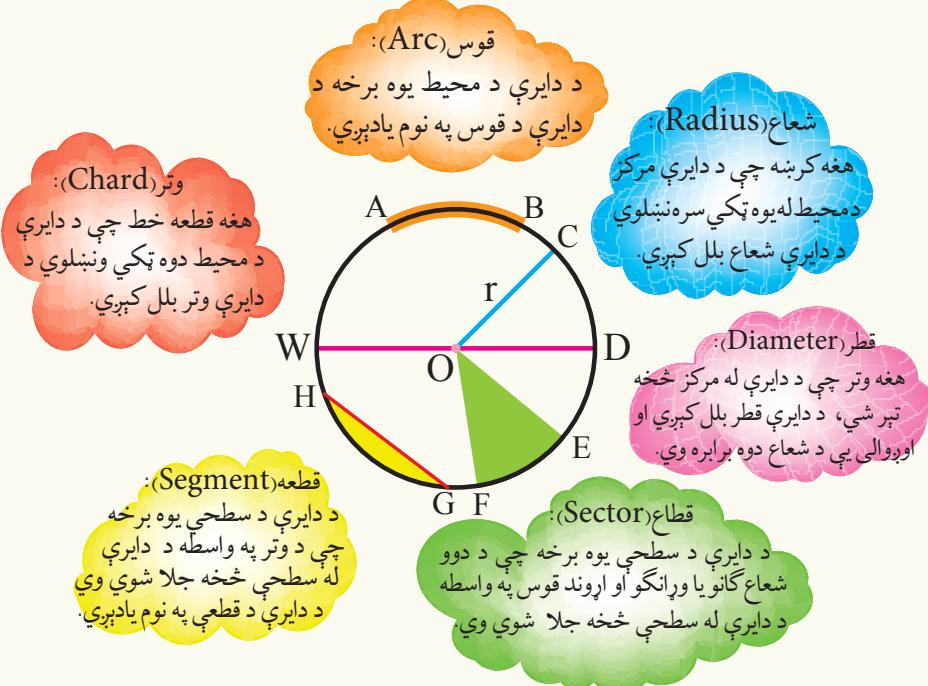
د دایرې عناصر (Elements of a Circle)



شکل ته پام وکړئ د کېک مخ کوم هندسي شکل را بنېي او پېږي شوې برخه یې د دایرې کوم عنصر رابنېي؟

د دایرې د عناصرو تعريف

لومړۍ شکل او د دایرې د عناصرو تعريفونه خپلو کتابچوته نقل او وروسته لاندې تعريفونه د شکل له اړوندو عناصرو سره، په خپلو کتابچوکې وښسلوئ.



فعالیت

- د شعاع په اندازه یوه دائیره رسم او له کاغذ خخه هغه پرې کړئ.
- د غه دائیره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دائیرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوې کربنه د خه په نامه یادېږي.
- دا خل دوه نیمې دائیرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ چې خلور مساوی برخې لاسته راغلې وي. خو قطعه خطونه (توپه کربنې) وينی، هر یو د خه په نامه یادېږي؟
- خلور لاسته راغلې زاوې اندازه کړئ او ووایاست چې یو له بل سره خه اړیکې لري؟
- د یوې دائیرې د قطر او شعاع تر منځ اړیکې خه دي؟
- دائیره داسې قات کړئ چې دوه نامساوی برخې جورې شي، هغه خلاصه کړئ، جوره شوې کربنه د خه په نامه یادېږي؟ د هغې او بدوالی د دائیرې له قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- ومو لیدل چې په هره دائیره کې که چېرې د دائیرې د محیط دوه تکي سره ونبسلوو، د دائیرې وتر لاسته راخېي.
- په هره دائیره کې تربولو لوی وتر، د دائیرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دي.
- د یوې دائیرې هر قطر، وتر، خو هر وتر قطر نه دي.
- هغه قوس چې د یوې دائیرې د محیط له نیمایی خخه کوچنۍ وي، د کوچنۍ قوس (minor Arc) په نامه یادېږي.
- هغه قوس چې د یوې دائیرې د محیط له نیمایی خخه لوی وي، د لوی قوس (major Arc) په نامه یادېږي.

پښتنې

- 1- د $C(0, 4)$ دائیره رسم کړئ.
- a) د دائیرې شعاع یا وړانګه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې وښیئ.
- b) د دائیرې د قطر او بدوالی وټاکې.
- c) د دائیرې محیط په خلورو مساوی برخو ووبشې، له دې خخه، کومه پایله په لاس راخېي؟
- d) د دائیرې داخلې ناحیه، خارجې ناحیه او د دائیرې محیط د مختلفو رنگونو په واسطه په نښه کړئ.

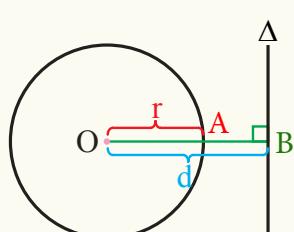
له دایرې سره د یوې مستقیمه کربنې حالتونه



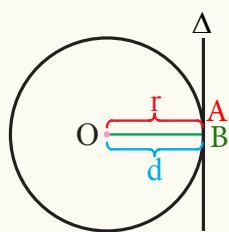
مخامنځ شکل ته پام وکړئ او ووایاست چې
قلمونه او هندسي بکس، له دایرې سره خه
اپیکې لري؟ هره یوه توضیح کړئ.

فعالیت

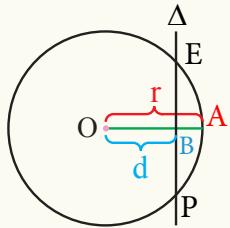
- یوه دایرہ او مستقیمونه داسې رسم کړئ چې له دایرې سره یوېکۍ، دوه ټکي او هېڅ ګډ(مشترک) ټکي ونه لري.
- د دایرې له مرکز خخه په هره مستقیمه کربنې باندې عمودي کربنې رسم کړئ، د دایرې د مرکز او کربنې تر منځ واتېن اندازه کړئ او هر حالت، د دایرې د شعاع له اوږوالې سره پر تله کړئ.



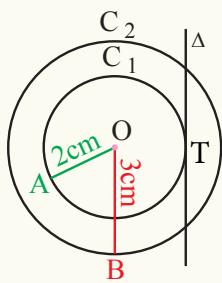
د پورتني فعالیت له کړنې خخه لیدل کېږي چې یوه مستقیمه
کربنې او دایرہ نظر یو بل ته درې لاندې حالتونه لري:
1- که چېږي مستقیمه Δ له دایرې سره ګډ ټکي ونه لري،
مستقیمه Δ له دایرې خخه بهر پرته ده، په دې حالت کې د
مستقیمي Δ واتېن د دایرې له مرکز خخه د دایرې له شعاع
خخه لوی دی یعنې: $d > r$



2- که چېږي Δ مستقیمه له دایرې سره یو ګډ ټکي ولري،
نو د مستقیمي Δ ته پر دایرہ مماس وايي. په دې حالت
کې د Δ مستقیمي واتېن د دایرې له مرکز خخه د دایرې
له شعاع سره برابر ده یعنې: $d = r$



3- که چیرې د Δ مستقیم له دایرې سره دوه گډ تکي ولري، مستقیم ته د دایرې قاطع وابي، په دې حالت کې د Δ مستقیم واتن د دایرې له مرکز خخه د دایرې له شاع خخه کوچنۍ دي،
يعني: $d < r$



(بېلگە) مثال: د (O) تکى په پام کې نيسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي مترو په شاع دوي متعدد المرکز دایرې رسم کړئ. د مستقیمي کربنې واتن د دایرې له مرکز خخه د C_1 او C_2 ، دوو دایرو له شاع ګانو سره خه اړیکې لري؟

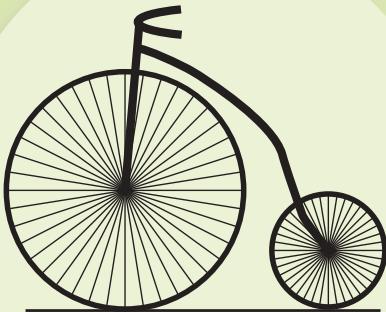
حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واتن د دایرې له مرکز خخه د هغې دایرې د وړانګې يا شاع سره برابر دی يعني: $d = r$

د Δ مستقیم واتن د C_2 دایرې له مرکز خخه د هغې دایرې له وړانګې يا شاع خخه کوچنۍ
دی يعني: $d < r$

پوښتسي

د 3 cm شاع په اوږدوالي سره یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کربنې، په لاندېنیو راکړل شویو واتنو کې رسم او حالتونه پې خرګند کړئ:
الف: د کربنې واتن د دایرې له مرکز خخه 2.5 cm وي.
ب: د کربنې واتن د دایرې له مرکز خخه 4 cm وي.
ج: د کربنې واتن د دایرې له مرکز خخه د دایرې له شاع سره برابره وي.

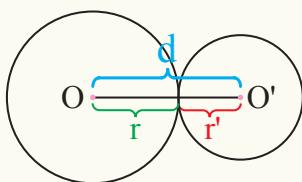
د دایرو موقعیت نسبت یو بل ته



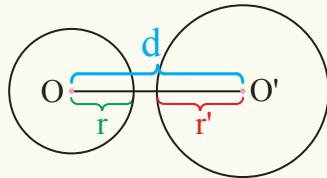
- مamaxخ شکل ته په پام سره ووایئ چې:
- 1- د بایسیکل تایروننه کوم هندسي شکل لري؟
 - 2- تایروننه یو له بل سره خو حالتونه غوره کولای شي؟

فعاليت

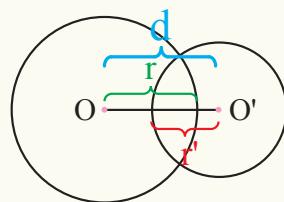
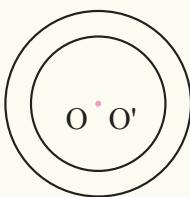
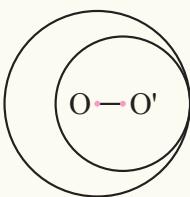
- دوي دايري داسي رسم کړئ چې:
- 1: یو له بل سره یو ګډه تکي ولري.
- 2: دو ګډه تکي ولري.
- 3: له یو بل سره ګډه تکي و نه لري.
- د دایرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالي په پورته حالتونو کې د هغوله شاع سره پرتله کړئ.
- له پورتنې فعالیت خخه لاندې پايلې په لاس راخي چې:



که چيرې د دوو دايرو د مرکزونو تر منځ واتن د هغو د شاع له مجموعې سره مساوې وي. په دې حالت کې، دايرو ته خارجا مماس وابي، یعنې $d = r + r'$



که چيرې د دوو دايرو د مرکزونو تر منځ واتن، د هغو د شاع له مجموعې اوږدوالي خخه زيات وي، په دې حالت کې دايرو ته ناپرېکړي یا نا متقاطع دايري وابي، یعنې $d > r + r'$



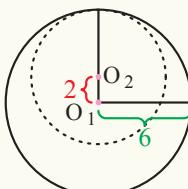
که د دوو دائرو د مرکزونو تر منځ واتېن، د هغود شعاع ګانو د مجموعې له اوردوالي خخه کوچنۍ او د شعاع ګانو د تفريقي حاصل له مطلقه قيمت سره مساوي وي، دائرو په نامه سره يادېږي، يعني $d = |r - r'|$

که د دوو دائرو د مرکزونو تر منځ واتېن، د هغود شعاع ګانو د مجموعې له اوردوالي خخه کوچنۍ او د شعاع ګانو د تفريقي حاصل له مطلقه قيمت خخه لوې وي، دائري يوله بل سره متقطع دي، يعني $|r - r'| < d < r + r'$

مثال (بېلگه): دوی دائري داسي رسم کړئ چې د لومړۍ دائري شعاع 6cm ، د دويمې دائري او لومړۍ دائري مرکزونو تر منځ واتېن 2cm او د دويمې دائري شعاع د لومړۍ دائري د شعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې، د دې دوو دائرو موقعیت نظر یو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنۍ دائري شعاع r_1 او د دويمې دائري شعاع r_2 ونوموو، نولرو:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 6\text{cm} \\ r_2 = \frac{2}{3} r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow r_2 = \frac{2}{3} \times 6 = 4\text{cm}$$



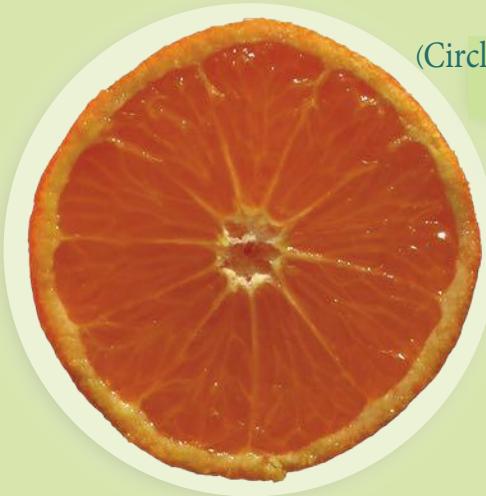
$$d = |r_1 - r_2| = |6 - 4| = |2| = 2$$

خرنګه چې:
نو له دائري سره داخلاً مماس دي.

پوښتې

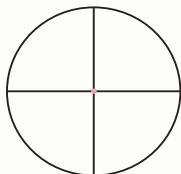
- 1- دوی دائري د 6cm او 4cm په شعاع په پام کې و نيسې او په لاندې توګه یې رسم کړئ.
- الف: دائري خارجأ (له باندې) سره مماس دي.
- ب: دائري داخلاً (له دنه) سره مماس وي.
- ج: له دائري سره غير متقطع (نپرپکړي) وي.
- ه: دائري متعددالمرکزه (ګله مرکز) وي.

د دایري ارونند زاويي (Circle of a Angles)



د دایري مرکزي زاويي

تصویر ته پام وکړئ، هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې لیدل کېږي، نوم یې واخلي؟



فعاليت

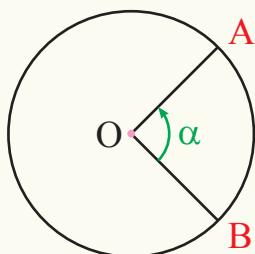
- په پورتنۍ شکل کې، خو زاويې ليدلای شئ.
- د دې زاویو ګډ خاصیتونه کوم دي؟
- د $C(0, 3)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاويې لاسته راخي؟ د هرې زاويې د مقابل قوس اندازه خو درجې 55°؟
- د دې دایري محیط خو درجې دي؟

د پورتنۍ فعالیت له نتيجې خخه لیکلای شو چې:

ديوه قوس او بدوالۍ د هغه د مرکزي زاويې په پراخواли پوري اړه لري، یعنې:

$$\frac{\text{د قوس او بدوالۍ}}{\text{د دایري محیط}} = \frac{\hat{AOB}}{360^\circ}$$

تعريف



هغه زاويه چې راس یې د دایري په مرکز پروت او ضلعې یې د دایري شعاع گانې وي، مرکزي زاويه بلل کېږي، لکه: د \hat{AOB} يا د α زاويه:

هره مرکزی زاویه له دایرې خخه یو قوس بېلوی چې دغه قوس د خپلې مخامنخ مرکزی زاویې سره مساوی اندازه لري، لکه: د \hat{AB} قوس چې له α زاویې سره مساوی دی.

د قرارداد له مخې ويلاي شو چې په يوه دایره کې د مخامنخ قوس اندازه درجې له مخې له مرکزی زاویې سره مساوی ده، یعنې: $\hat{AOB} = \hat{AB} = \alpha$

لومړۍ مثال: که د $C(O, r)$ په دایره کې لوی قوس د کوچنۍ قوس پنځه برابره وي، نو د کوچنۍ قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزی زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: که کوچنۍ قوس x د $\hat{PQ} = 360^\circ$ وي، نو لوی قوس یې $x - 360^\circ$ دی نولیکلادی شو، چې:

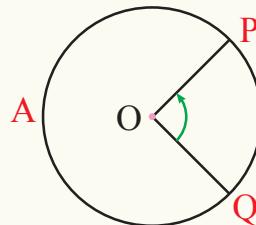
$$\hat{PQ} + \hat{PAQ} = 360^\circ$$

$$\hat{PAQ} = 5\hat{PQ}$$

$$x + 5x = 360^\circ$$

$$6x = 360^\circ$$

$$x = 60^\circ \Rightarrow \hat{POQ} = x = 60^\circ$$



$$\hat{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$$

دویم مثال: په لاندې شکل کې که \hat{EK} د دایرې قطر وي. د $\hat{EOK} = 31^\circ$ ، $\hat{EOJ} = 82^\circ$ ، $\hat{KOS} = 31^\circ$ قوسونه په درجه پیدا کړئ.

د مرکزی زاویې مخامنخ قوس د $\hat{SK} = \hat{SOK} = 31^\circ \Rightarrow \hat{SK} = 31^\circ$

$$\hat{KOJ} = 180^\circ - \hat{EOJ} = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

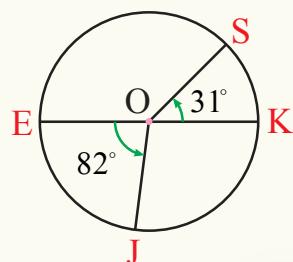
$$\hat{KOJ} = \hat{KJ} = 98^\circ$$

$$\hat{SJ} = \hat{SK} + \hat{KJ} = 31^\circ + 98^\circ = 129^\circ$$

$$\hat{JE} = \hat{EOJ} = 82^\circ$$

$$\hat{EOS} = 180^\circ - \hat{SOK} = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$$

$$\hat{EOS} = \hat{ES} = 149^\circ$$

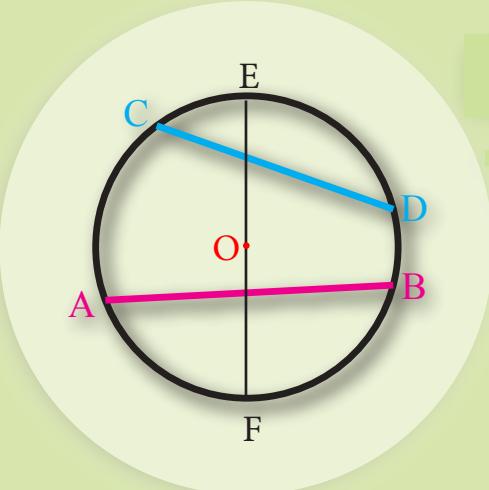


پښتې

1- $\hat{BOC} = 136^\circ$ ، $\hat{AOB} = 75^\circ$ د $C(O, r)$ پر دایرہ دا سې براته دي چې د \hat{AC} دواړو خواوو ته پرتې وي، حساب کړئ.

2- يوه مرکزی زاویه، د 180° په اندازه رسم کړئ.

د دایرې د وتر خواص



شکل ته پام و کرپی د EF، AB او CD مستقیمی کربنی په خه نامه یادپری؟ د EF کربنی خانګرتیا خه ده؟ او له AB او CD کربنی سره خه اړیکي لري؟

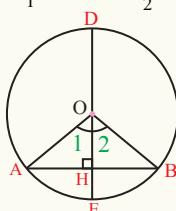
فَعَالٍ

- د $C(O, r)$ په دائیره کې د \overline{AB} وتر رسم کړئ.
 - د دائیرې د \overline{ED} قطر دا سې رسم کړئ چې د \overline{AB} په وتر د H په نقطه عمود وي.
 - د (O) پکۍ د A او B سره ونبليوئ، لاسته راغلی مثلث خه ډول مثلث دی؟
 - په لاندې تشو خایيونو کې د $(=, <, >)$ ور نښي ولیکړئ.

$$\overline{OA} \perp \overline{OB}, \quad \hat{\overline{AE}} \perp \hat{\overline{EB}}, \quad \overline{AH} \perp \overline{HB}$$

فعالیت له پایلې خخه کولای شو، لاندې قضیه بیان او ثبوت کرو.
قضیه: په هر دايره کې، يه وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابله، قوس نیموي.

ثبوت: دوو میلشونو خخه لیکلای شو چې: AHO او BHO



نو د دوو مثلثونو له تساوي خخه داسې پايله لاسته راخي، چې: $\overline{AH} = \overline{HB}$ او د $\overline{AE} = \overline{EB}$ دی.

مثال: د (O, 26) دایره را کوپل شوې ده، که چېرې پر وتر د عمود اوږدوالي، د دایري له مرکز خخه (2) واحده وي، د \overline{AB} وتر اوږدوالي حساب کړئ.

حل: د OAH په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$

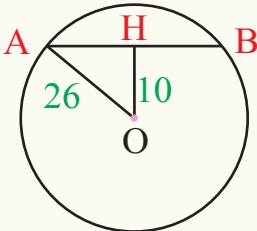
$$(26)^2 = \overline{AH}^2 + (10)^2$$

$$\overline{AH}^2 = (26)^2 - (10)^2$$

$$\overline{AH}^2 = 676 - 100 = 576$$

$$\overline{AH} = 24$$

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48 \text{ unit}$$



فَعَالْت

- د دی فعالیت له پایلې خخه لاندې قضیه بیان او ثبتوو.
 - د دایرې له مرکز خخه د \overline{PQ} او \overline{ER} په وترونو عمود کربنې رسم او اوږدوالی یې معلوم کړي.
 - په دایرې کې د \overline{PQ} او \overline{ER} دوه مساوی وترونه رسم کړي.
 - د دایرې رسم کړي. $C(0, 3)$ دایرې رسم کړي.

قضیه: په هر دایره کې د هغې مساوی وترونه، د دایري له مرکز خخه مساوی واتن لري.

ثبوت: د دوو مثالونو خخه لرو چې: RNO او PMO د $\overline{OP} = \overline{OR}$ د دایري شعاع.

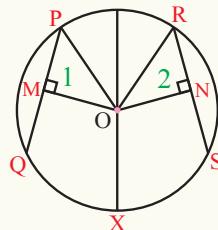
۲- نیرپا میخ

قایمه.....^۱_۲

$$\overline{PQ} = \overline{RS} \quad \dots \dots \text{مساوي وترونه} \Rightarrow PMO \cong RNO$$

$$\frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{\overline{RS}}{2} \Rightarrow PM = RN$$

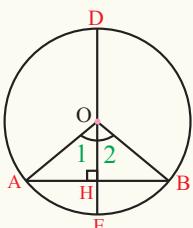
$$\overline{OM} = \overline{ON}$$



په پایله کي ويلاي شو چې په هره دايره کي مساوي وترونه له مرکز خخه مساوي واتن لري.

پوششی

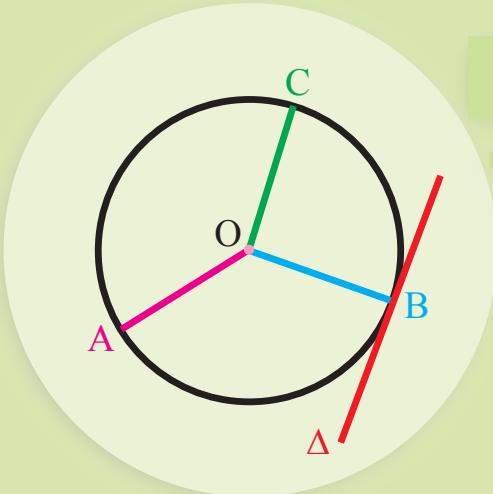
$C(0, 13)$ په دایره کې د \overline{AB} وتر د دایرې له مرکز خڅه 5 واحده واتېن لري، د اوړ دوالۍ پیدا کړي.



2- که چیری دیوپی دایری قطر د وتر له نیمایی خخه تبر شی، ثبوت
کرئ چی پر وتر عمود دی.

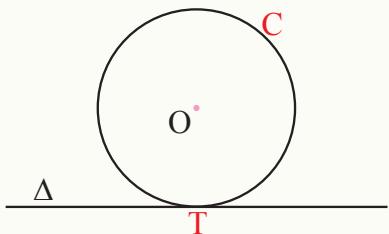
3- په یوې دایره کې $\overline{AB} = 8\text{cm}$ وتر رسم کړئ. که چیرې د وتر عمودي واپن له مرکز خخه $\overline{OH} = 3\text{cm}$ وي، د دایري قطر او محیط محسسه کړئ.

د دایرې د شعاع ځانګړیاوی



شکل ته په پام سره، د \overline{OB} ، \overline{OA} او \overline{OC} کرسې خه نومېږي او د Δ کربنې، د دایرې او له \overline{OB} وړانګې سره خه اړیکې لري؟

فعاليت



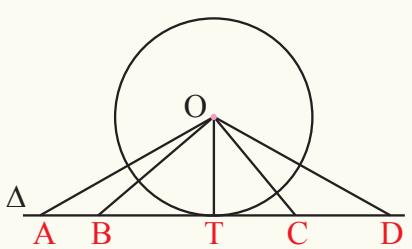
- په مخامنځ شکل (D) مستقيمه کربنې، د $C(0, 2)$ دایرې د T په ټکي کې مماس ده. د C, B, A او D ټکي، د مماس پر منځ د T ټکي دواړو خواوو کې وټاکۍ او د دایرې له مرکز سره ېې وښبلوئ.
- قطعه خطونه، د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دایرې د مرکز او مماس تر منځ لنډ واتېن وبنایاست؟
- تر ټولو کوچنۍ واتېن د یوه ټکي او یوې مستقيمي کربنې تر منځ، کوم واتېن دی؟
- له پورتنيو دوو حالتونو خڅه، خه پایله لاسته راوري؟
- دې فعالیت له پایلي څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبتوو.

قضیه: د دایرې شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود ده.

ثبت: په لاندې شکل کې ليدل کېږي چې:

$$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$$

$$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$$



پوهېرو چې تر ټولو کوچنۍ واتېن، د یوه ټکي او مستقيم تر منځ عمودي واتېن دی. په پایله کې ویلای شو چې مستقيمي کربنې: $\overline{OT} \perp \Delta$ دی.

لومړۍ مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقيمه کربنه، د A په ټکي، د $C(O, r)$ پر

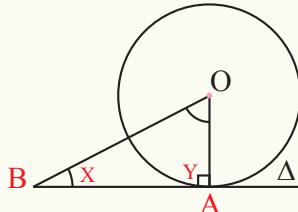
دایره مماس ده. که چېږي د \hat{AOB} مساوی 60° وي، د X زاویه پیدا کړي.
 $OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$

$$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$$

$$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 150^\circ$$

$$x = 30^\circ$$



دویم مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقيمه کربنه، د $C(O, r)$ پر دایره مماس ده، که او برداوالي ولري، د $\overline{MN} = 5\text{unit}$ او $\overline{OM} = 4\text{unit}$ اور $\overline{ON} = 3\text{unit}$.

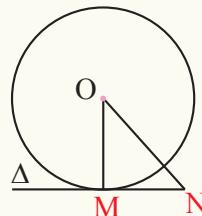
حل: پوهېږو، چې د دایري شعاع، د تماس په ټکي، پر مماس عمود ده په پایله کې د \overline{OMN} د فیثاغورث د قضيې پرنسپت لرو چې:
 په قایم الزاویه مثلث کې، د \overline{OMN} د مماس، د \overline{ON} اور \overline{OM} د شعاع.

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$$

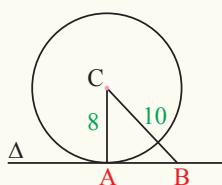
$$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\overline{MN} = 3$$

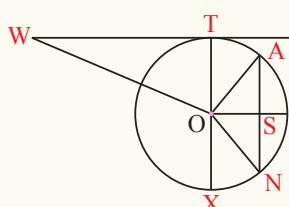


- د دایري شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود وي.
- هر مماس، په هغه شعاع چې د تماس له ټکي خخه تېږي، عمود دي.

پونسنج

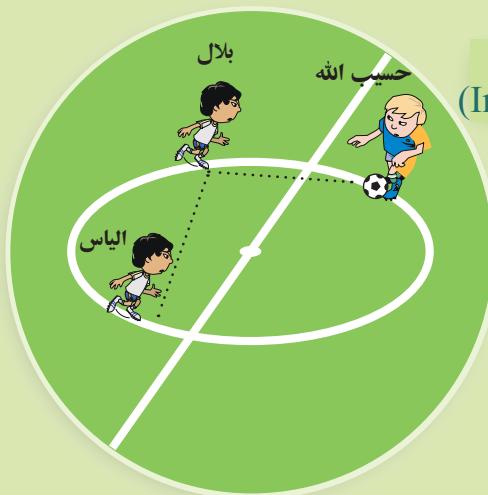


1- په مخامنځ شکل کې د Δ کربنه د $P(C, r)$ پر دایري مماس ده، که او برداوالي ولري، د $\overline{BC} = 10\text{unit}$ او $\overline{AC} = 8\text{unit}$ اور \overline{AB} د مماس وي، د \overline{AB} اور \overline{BC} د دایري پیدا کړي.



2- په مخامنځ شکل کې، که چېږي T د \overline{WZ} په ټکي، د $C(O, r)$ پر دایري مماس وي، د $OS = 1\text{unit}$ وی، د $TW = 3\text{unit}$ وی، د $TX = 4\text{unit}$ وی، د OW, SN, AS, OA اور TX د دایري پیدا کړي.

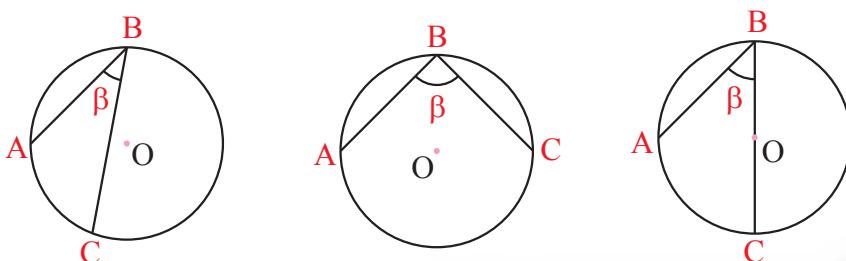
د داېرې محيطي زاویه (Inscribed Angle of a Circle)



د فوټبال د میدان په مرکزی دائرة کې حسیب الله، بلال ته او بلال الیاس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شوټ له مسیر خخه جوړېږي، خه ډول دي؟

تعريف

هغه زاویه چې رأس پې د دائري پر محیط او ضلعې پې د دائري دوه وترونه وي، محيطي زاویه بلل کېږي، لکه: د \hat{ABC} یا د β .



فعاليت

په یاد ولري چې:
• د مرکزی زاویې پراخواли د خپل مخامنځ قوس سره مساوي دي.
• په هر مثلث کې د خارجي زاویې پراخواли له مجاوري زاویې پرته د دوو داخلی زاویو له مجموعې سره مساوي دي.

- د $C(O, r)$ په دائري کې د \hat{ABC} محيطي زاویه چې د \hat{BC} ضلع پې د دائري له مرکز خخه تېره شي، رسم کړئ.
- د A ټکي د دائري له مرکز (O) سره ونبليوئ، خرنګه مثلث لاسته راخي؟
- د \hat{A} او \hat{B} زاویې د \hat{OAB} په مثلث کې يو له بل سره خه اړیکې لري؟
- د \hat{AOC} زاویه له \hat{A} او \hat{B} له زاویو سره خه اړیکې لري؟

د مخکيني مخ د فعالیت له پايلې خخه په لاندي توګه، قضيه بیان او ثبتوو.

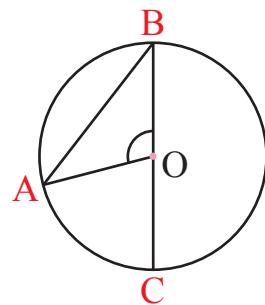
قضيه: د هري محيطي زاوې پراخوالی د خپل مخامنخ قوس نيمابي دي.

دلته قضيه په هغه حالت کې ثبتوو چې د محيطي زاوې يوه ضلع د دائري قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورني دندې په توګه، زده کوونکو ته پاتې شو.

ثبوت: د \hat{AOC} زاویه د $\triangle AOB$ د مثلث خارجی زاویه ده، لیکلای شو چې:

$$\hat{AOC} = \hat{A} + \hat{B} \quad \hat{AOC} = \hat{AC}$$

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{B} \dots \text{ولی} \\ \hat{AOC} &= \hat{B} + \hat{B} \\ \hat{AOC} &= 2\hat{B} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \hat{AOC} &= 2\hat{B} \\ \Rightarrow \hat{AC} &= 2\hat{B} \\ \hat{AC} &= \frac{\hat{AC}}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{نو:} \\ \text{په پايله کې} \end{aligned}$$



د \hat{ABC} د محيطي زاوې پراخوالی له $\frac{1}{2}\hat{AC}$ سره برابر دي.

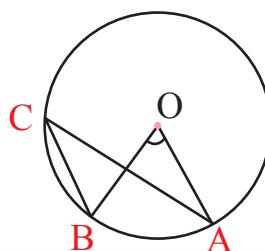
مثال: د $C(O, r)$ په دائيره کې که مرکزي زاویه $\hat{AOB} = 60^\circ$ وي، د \hat{ACB} محيطي

زاوې مخامنخ \hat{AB} قوس، يې پیدا کړئ.

حل: په یوه دائيره کې د مرکزي زاوې او د هغې د مخامنخ قوس له اړیکو خخه لیکلای شو

$$\begin{aligned} \hat{AOB} &= 60^\circ \\ \hat{AOB} &= \hat{AB} \end{aligned} \quad \Rightarrow \hat{AB} = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \hat{AB} &= 60^\circ \\ \hat{ACB} &= \frac{\hat{AB}}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \hat{ACB} &= \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \end{aligned}$$

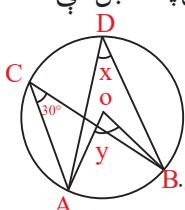


پونسني

1 - په یوه دائيره کې د 90° په اندازه، محيطي زاویه رسم کړئ.

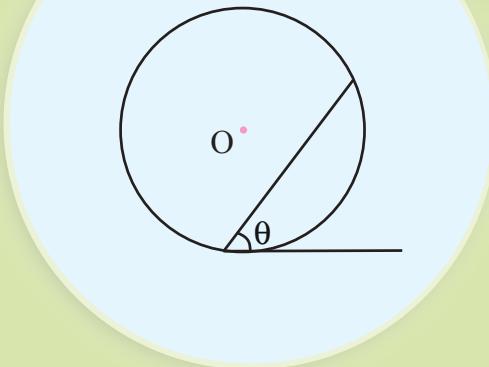
2 - د دائيرې پر محيط د A او B دوو تکي په پام کې ونيسي. د \hat{AB} د قوس په مقابل کې،

څو محيطي زاوې رسمولای شو.



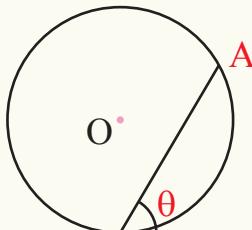
3 - په باندي شکل کې په پام کې ونيسي، د مجھول زاوې قيمت پیدا کړئ.

د دایرې مماسی زاویه



شکل ته پام وکړئ، هغو مستقیمو کربنو چې د θ زاویه یې جوړه کړي ده، نوم واخلي او د زاویې رأس چېرته پروت دی؟

تعريف



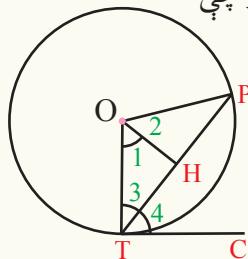
هغه زاویه چې یوه ضلع یې پر دایره مماس او دویمه ضلع یې د دایرې وتروي او رأس یې د تمساس په ټکي کې پروت وي مماسي زاویه بلکېږي، لکه: د θ زاویه.

فعالیت

- د دایرې $C(0,6)$ رسم کړئ.
 - په دې دایرې کې یوه مماسي زاویه \hat{CTP} رسم کړئ.
 - د دایرې د وتر انجامونه \overline{PT} له مرکز سره ونبيلوئ، خه ډول مثلث لاسته راخي؟
 - د دایرې له مرکز خخه پر وتر عمود رسم کړئ.
 - د \hat{TOP} مرکزي زاویه او د \hat{PTC} مماسي زاویې سره خه اړیکې لري؟
- د دې فعالیت له پایلې خخه لاندې قضیه ثبوتلوی شو.

قضیه: په یوه دایرې کې د مماسي زاویې پراخواли، د هغې د مخامنخ قوس نیمایي په اندازه دی.

ثبت: د \hat{OHT} قایم الزاویه مثلث او \hat{OTC} قایمې زاویې خخه لرو چې:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{3} + \hat{1} = 90^\circ \\ \hat{3} + \hat{4} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{3} + \hat{1} = \hat{3} + \hat{4} \Rightarrow \hat{1} = \hat{4}$$

$$\hat{1} = \frac{\hat{POT}}{2} = \frac{\hat{PT}}{2} \Rightarrow \hat{PTC} = \frac{\hat{PT}}{2}$$

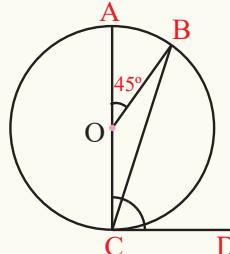
لوړۍ مثال: په لاندې شکل کې که د $C(0, r)$ په دائیره کې د هغې مرکزی زاویه 45° وي، د محیطی او مماسی زاویو پراخوالی پیدا کړي.
حل: د مرکزی زاویې او د هغې د مخامنځ قوس له اړیکو خڅه په ګټه لیکلای شو چې:

$$\hat{AOB} = 45^\circ \Rightarrow \hat{AB} = 45^\circ$$

$$\hat{BOC} = 135^\circ \Rightarrow \hat{BC} = 135^\circ$$

$$\hat{BCD} = \frac{\hat{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$\hat{ACB} = \frac{\hat{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$

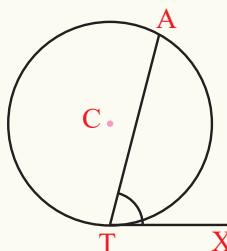


دویم مثال: په لاندې شکل کې د \hat{AT} قوس چې د \hat{ATX} زاویې مخامنځ ته واقع دي.
 $(2\alpha - 6)^\circ$ دی، د \hat{ATX} مماسی زاویې اندازه پیدا کړي.

حل: د مماسی زاویې او د هغې د مخامنځ قوس له اړیکو خڅه د ګټې اخیستولو له معنې لیکلای شو، چې:

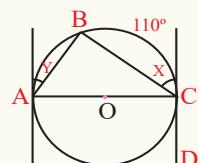
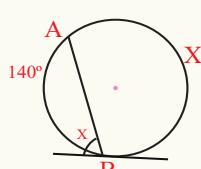
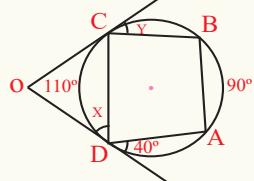
$$\hat{ATX} = \frac{1}{2} \hat{AT}$$

$$\begin{aligned} \hat{ATX} &= \frac{1}{2} (2\alpha - 6)^\circ \\ &= (\alpha - 3)^\circ \end{aligned}$$



پایله: محیطی او مماسی زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوی دي.
 مماسی زاویه، د مخامنځ قوس نیمايی دي.

پونسني



د لوړې خپرکي لنډيز

- د ايره: د هغه تکو سټ يا هندسي محل چې له یوه تاکلي تکي خخه مساوي واتن ولري، دايره بلل کېږي.
- د هغه تکو سټ چې واتن ېې د دايرې له شعاع خخه کوچنۍ وي، د دايرې دنه ساحه بلل کېږي.
- د هغه تکو سټ چې واتن ېې د دايرې له مرکز خخه د دايرې له شعاع سره مساوي وي، د دايرې محیط يا مخ بلل کېږي.
- د هغه تکو سټ چې واتن ېې د دايرې له مرکز خخه نسبت د دايرې شعاع ته لوی وي، د دايرې باندې ساحه بلل کېږي.
- د مستوی هغه برخه چې د منحنۍ او د دايرې د داخلې سطحې په واسطه بېله شوې وي، د دايرې سطحه بلل کېږي.
- د دايرې شعاع: هغه کربنه چې د دايرې مرکز او د محیط یو تکي سره نښلوي، د دايرې شعاع بلل کېږي.
- د دايرې ورق: هغه توپه کربنه چې د دايرې د محیط دوه تکي سره نښلوي، د دايرې وتر بلل کېږي.
- د دايرې قطر: د دايرې هغه وتر چې له مرکز خخه تېږې د دايرې قطر بلل کېږي. هر قطر، د شعاع دوه برابره دي.
- د دايرې قوس: د دايرې د محیط یو به برخه چې د دوو تکو په مرسته بېله شوې وي قوس بلل کېږي.
- د دايرې مماس: هغه کربنه چې له دايرې سره یو ګله تکي ولري، مماس بلل کېږي.
- د دايرې قطعه: د دايرې هغه برخه چې د دايرې د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي، د دايرې قطعه بلل کېږي.
- د دايرې قطاع: د دايرې یوه برخه ده چې د دوو شعاع ګانو او اړوند قوس په مرسته، د دايرې له سطحې خخه بېله شوې وي.
- که یو مستقیم له یوې دايرې سره یو ګله تکي ولري، د مماس او که چېږې دوه ګله تکي ولري، د قاطع په نوم یادېږي.
- په هره دایره کې د دايرې له مرکز خخه پر وتر عمودي کربنه، وتر او مخامنځ قوس نیمايې کوي.

- د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود ده.
- د یوې دایرې مساوی وترونه، د هغې له مرکز خخه مساوی واتېن لري.
- **مرکزي زاویه:** هغه زاویه چې رأس یې د دایرې په مرکز پروت او ضلعې یې د دایرې شعاع ګانې وي، مرکزي زاویه بلل کېږي.
- د هرې مرکزي زاوې اندازه، د هغې له مخامنځ قوس سره مساوی ده.
- $$\text{د مرکزي زاوې د مخامنځ قوس اوبردوالي د دې رابطې} = \frac{\hat{AOB}}{360^\circ} \text{ د دایرې محیط}$$
 خخه په لاس راخي.
- **محیطي زاویه:** هغه زاویه ده چې رأس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې وترونه وي، محیطي زاویه بلل کېږي.
- د هرې محیطي زاوې پراخوالۍ، د هغې د مخامنځ قوس له نیمایي سره مساوی ده.
- **هړه محیطي زاویه،** د هغې د مرکري زاوې نیمایي ده چې د عین قوس په مخامنځ کې پر ته ده.
- **مماسي زاویه:** هغه زاویه ده چې یوه ضلعه یې په دایرې مماس او بله یې د دایرې وتر او رأس یې د تماس په ټکي کې د دایرې پر محیط پروت وي، مماسي زاویه بلل کېږي.
- هړه مماسي زاویه د هغې مرکزي زاوې نیمایي ده چې د عین قوس په مخامنځ پر ته وي.
- د دوو دایرو حالتونه یو بل ته:

که د دوو دایرو د مرکز ونو د واتېن اوبردوالي د هغود شعاع ګانو له مجموعې خخه لوی وي دایرې غیر متقطع بلل کېږي.

که د دوو دایرو د مرکزونو د واتېن اوبردوالي د هغود شعاع ګانو له مجموعې سره مساوی وي دایرې له باندې خوا مماس بلل کېږي.

که د دوو دایرو د مرکزونو اوبردوالي د هغود شعاع ګانو له اوبردوالي خخه کوچني او د شعاع ګانو د تفريق حاصل ېې له مطلقه قيمت خخه لوی وي، متقطع بلل کېږي.

که د دایرو د مرکزونو تر منځ واتېن، د هغې د شعاع ګانو د تفريق حاصل مطلقه قيمت سره مساوی وي دایرې (دننه) مماس ده.

که د دایرو د مرکزونو تر منځ واتېن صفر وي دایرې متحدد المرکز (د یوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

د لومني خپرکي پونستي

• په لاندي پونستنو کې د هري پونستي لپاره، خلور خوابونه ورکړل شوي دي، سم خواب په نښه کړئ.

1- د یوې دايرې د قطر اوږدوالي مساوي دي په:

$$2r \text{ (d)} \qquad 2\pi \text{ (c)} \qquad \pi \text{ (b)} \qquad 3r \text{ (a)}$$

2- دايره په لاندي ډول بنودل کېږي:

$$C(o,r) \text{ (d)} \qquad (b,a) \text{ (c)} \qquad (1,2) \text{ (b)} \qquad 0 \text{ (a)}$$

3- هغه مستقيمه کربنه چې له دايرې سره یو ګډ تکي ولري:

(a) د وتر په نوم يادېږي.
(b) د فوس په نوم يادېږي.

(c) د مماس په نوم يادېږي.
(d) د محیط په نوم يادېږي.

4- د هغوتکو ست چې واهنې په دايرې له شاع خخه لوې وي:

(a) د دايرې مخ بلل کېږي.
(b) د دايرې خارج بلل کېږي.

(c) د دايرې داخل بلل کېږي.
(d) دايره بلل کېږي.

5- هغه وتر چې د دايرې مرکز ته له نورو وترونو خخه نزدې وي نظر نورو وترونوته:

(a) لنډ وتر دي.
(b) اوړد وتر دي.

(c) مساوي دي.
(d) هيڅي يو.

6- که یوه مستقيمه کربنه، دايره په دوو تکو کې پري کړي، هغې ته:

(a) عمود وايي.
(b) قاطع وايي.

(c) موازي وايي.
(d) مماس وايي.

7- که د یوې دايرې مرکزي زاویه 80° وي، د مخامنځ قوس اندازه یې مساوي په:

$$80^\circ \text{ (d)} \qquad 80'' \text{ (c)} \qquad 70' \text{ (b)} \qquad 90^\circ \text{ (a)}$$

8- یوه مستقيمه کربنه له یوې دايرې سره خو حالتونه لري:

$$1 \text{ (d)} \qquad 4 \text{ (c)} \qquad 7 \text{ (b)} \qquad 3 \text{ (a)}$$

9- هغه زاویه چې راس یې د ايرې پر محیط او ضلعې یې دوو وترونه وي:

(a) مرکзи زاویه ده.
(b) مماسي زاویه ده.

(c) محیطي زاویه ده.

• تشن خایونه په مناسبو کلمو ڈک کړئ:

- 1- د دایرې هغه برخه چې د وتر په واسطه د دایرې له سطحې خخه بېله شوې وي، د دایرې په نوم یادېږي.
- 2- د دایرې تر ټولو لوی وتر بلل کېږي.
- 3- د هغوتکو سټ چې د دایرې له شعاع خخه لړوي د دایرې بلل کېږي.
- 4- که مستقیمه کربنه له یوې دایرې سره هېڅ ګله ونلري هغه مستقیمه کربنه له دایرې خخه پر ته ۵۰.
- 5- په هره دایرہ کې پر وتر قطر، وتر نیمایی او قوسونه د هغې خخه بېلوی.
- 6- په هر قایم الزاویه مثلث کې د وتر د د ضلعو د مربعاتو له مجموعې سره مساوی ۵۰.
- 7- په هره دایرہ کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي، تر ټولو وتر دی.
- 8- د دایرې شعاع د تماس په تکي پر عمود وي.
- 9- مرکزي زاویه هغه زاویه ده چې یې د دایرې په مرکز او ضلعې یې د دایرې وي.
- 10- هغه زاویه چې یوه ضلع یې په دایرہ او بله یې د دایرې او راس یې د په تکي پروت وي د زاوې په نوم یادېږي.

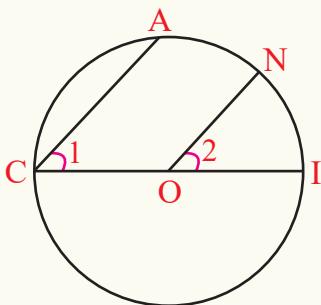
• په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې (ص) او (خ) د تورو په واسطه په نښه کړئ.

- 1- () دیوې مستوی د ټولو تکو سټ چې (O) له یوه تاکلي تکي خخه د (۲) مساوی فاصلې ولري، دایرہ بلل کېږي.
- 2- () دایرہ د خپل محیط په نامه یادېږي.
- 3- () هغه قطعه خط یا ټوټه کربنه چې د دایرې د محیط دوہ تکي سره نېټلوی، د دایرې د قطر په نامه یادېږي.
- 4- () په یوه دایرہ کې شعاع یا وړانګه د قطر نیمایی ۵۰.
- 5- () د دایرې قطعه د (۷) په نښه بنودل کېږي.

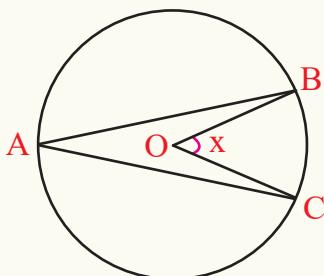
- 6- () د هغۇ تکو سىتە چې د دايىرى لە شعاع سىرە مساوی واتىن ولرى، د دايىرى د باندىنى ساھە بلل كېرىي.
- 7- () پە يوه دايىرە كې عمود قطربە وتر، وتر نىمايىي او دوه بېلاپىل قوسونە منجۇ تە راۋىرى.
- 8- () ټولە دايىرە، د دايىرى د قوس پە نوم يادېرىي.
- 9- () د $d = \frac{r}{2}$ پە رابطە كې د قطر او r د دايىرى شعاع ده.
- 10- () د يوپى دايىرى شعاع د تىماسى پە تېكىي پر مماس عمود وي.

• لاندى پۈستۈنى پە تفصىل سىرە حل كېئ.

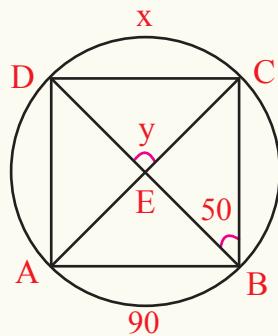
- 1- پە لاندى شكل كې كە د دايىرى قطر او $\overline{CA} \parallel \overline{ON}$ وي، ثبۈت كې ئىچى $\hat{AN} = \hat{NI}$ دى.



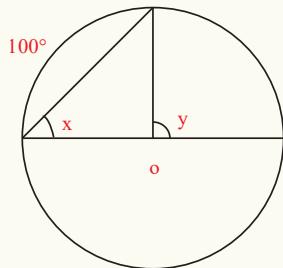
- 2- پە لاندى شكل كې كە $\hat{AB} = \hat{AC} = 155^\circ$ وي، د x پىدا كېئ.



3- په لاندې شکل کې د x او y اندازه وټاکړي.



4- په لاندې شکل کې د x او y اندازې پیدا کړئ.

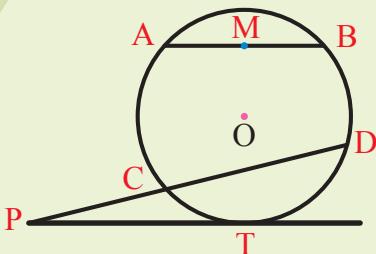


دویم خپرکی

په یوه دائیره کې د
اوبدوالی اړیگې



په دايره کې د اوبردواالي اړیکې



هغه ټوته کربنې چې په مخاخ شکل کې وينې، نوم یې واخلئ.

تعريف

د اوبردواالي اړیکې: په یوه هندسي شکل کې، د کربنود اجزاوو تر منځ اړیکې د اوبردواالي د اړیکو په نوم یادېږي.

فعالیت

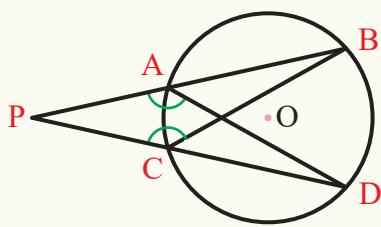
مرسته

- که چیرې په دوه مثلثونو کې دوہ زاویې سره مساوی وي، دريمه زاویه یې هم سره مساوی وي.
- په مشابه مثلثونو کې د مساوی زاویو مخامنځ ضلعې متناسبې دي.
- د له ټکي خخه چې د $C(O,r)$ دايرې په بهر کې پروت، د \overline{PCD} او \overline{PAB} قاطع کربنې رسم کړئ.
- د A او د B ټکي له C ټکي سره ونبليوئ.
- ويلاي شئ چې د $\triangle PAD$ او $\triangle PCB$ مثلثونه، مشابه دي.
- په پورته دوو مثلثونو کې، د تشابه نسبتونه ولیکئ؟

د دې فعالیت له پایلې خخه لاندې قضیه خرګندېږي.

قضیه 1-2: که چیرې دیوپ دايرې له بهرنې ټکي خخه پر دايره دوہ قاطع کربنې رسم شي، دیوپ قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوی دي.

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ یعنې:



ثبوت: د $\triangle PAD$ او $\triangle PCB$ مثلثونو تر منع، لاندي اپيکي شته دي.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B} \\ \hat{P} = \hat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

$$\text{د عين قوس محطي زاوي}\}$$

$$\text{گه}$$

د پورتنيو درې زاوېوله تساوي خخه پوهېبرو چې د $\triangle PCB$ او $\triangle PAD$ مثلثونه مشابه دی، نو
 $\triangle PCB \sim \triangle PAD \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$

مثال: په لاندي شکل کې، $C(O, r)$ د دايرې دووه قاطع کربنې دي.
 $\frac{PA}{DB} = \frac{PB}{PD} = 4cm$ او $\frac{PC}{PB} = 6cm$ ، $\frac{PA}{PB} = 10cm$ که او بدواړي پیداکړئ؟

حل: هغه قطعات (بتوهه کربنې) چې د له تکي خخه رسمېږي او د (1-2) قضې په مرسته
 $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$ لیکلای شو چې:

$$10 \cdot 6 = \overline{PB} \cdot 4$$

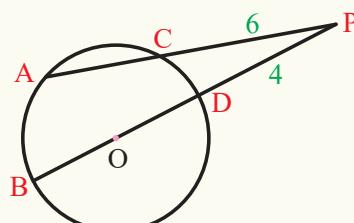
$$60 = 4 \overline{PB}$$

$$\overline{PB} = 15cm$$

$$\overline{DB} = \overline{PB} - \overline{PD}$$

$$\overline{DB} = 15 - 4$$

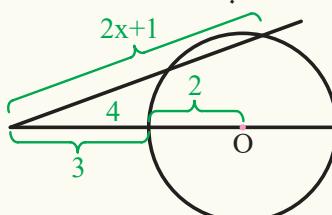
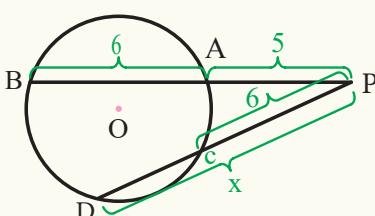
$$\overline{DB} = 11cm$$



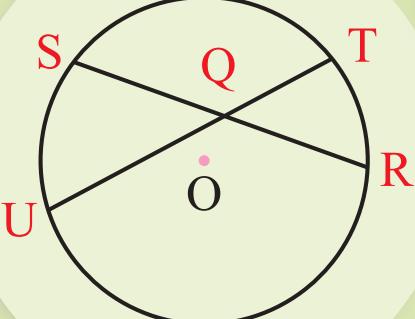
که چېري د ډيوپه دايرې له بهرنې تکي خخه، په دايره دووه قاطع کربنې رسم شوي، د ډيوپه قاطع د قطعاتونو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتونو د ضرب له حاصل سره مساوی دي.

پونسني

1- په لاندي شکلونو کې، د X عددی قيمت پیداکړئ.

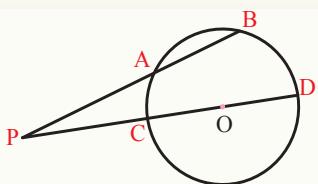


د یوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته



مخامنځ شکل ته پاملرنه وکړئ، ويلاي شی
چې د $\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$ مساوات
سم دي.

فعاليت



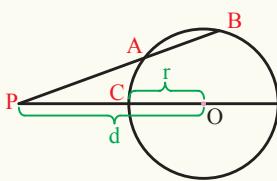
- د P له یوه ټاکلې ټکي خڅه چې $C(O, r)$ د دايرې
څخه بهر پروت دی پر هغه د \overline{PAB} قاطع رسم کړئ.
- د P له بهرنۍ ټکي خڅه، د PCD قاطع داسې رسم
کړئ چې د $C(O, r)$ دايرې له مرکز خڅه تپر شي.
- د \overline{PAB} او \overline{PCD} د قطعه خطونو تر منځ اړیکې د (2-1) قضیې له مخې ولیکي.
- په پورتنی اړیکه کې، د \overline{PC} او \overline{PD} او برداولي، د دايرې له مرکز خڅه ولیکي؟
- که د P ټکي واتېن، د دايرې له مرکز خڅه په (d) او شعاع يا وړانګه په (r) سره وښيو، پورتني
اړیکه د d او r تر منځ ولیکي.

د پاسني فعالیت له پایلي خڅه لاندې قضیه خرگندېږي.

قضیه 2: که د یوه ټاکلې ټکي خڅه دوې قاطع کربنې، په یوه دايره داسې رسم کړئ چې، دويمه قاطع
د دايرې له مرکز خڅه تپر شي. د لوړۍ قاطع د ټوپه کربنوتور منځ د ضرب حاصل د یوه ټاکلې اندازې
 $(d^2 - r^2)$ سره مساوی دی، (d) د ټاکلې ټکي او د دايرې د مرکز تر منځ واتېن او (r) د دايرې
شعاع يا وړانګه ده.

لومړۍ حالت: که چېږي ټاکلې ټکي د دايرې په بهر کې
پروت وي.

ثبت: که چېږي د P ټکي د دايرې په بهر کې او واتېن یې له
مرکز خڅه په (d) او د دايرې شعاع په (r) سره وښيو، د (2-1)



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \dots (2-1)$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PO} - \overline{CO})(\overline{PO} + \overline{OD})$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d - r)(d + r)$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

تعريف

$d^2 - r^2$ د اړیکه د P ټکي طاقت، نظر د $C(o, r)$ دایريٽه وایې چې ثابته
اندازه د چې د $P_{(o)} = d^2 - r^2$ په شکل بنودل کېږي.

لومړۍ مثال: که د یوې دایريٽه قطر 10cm او د P ټکي د 13cm په اندازه، د دایريٽه مرکز خخه واپن ولري، د P ټکي طاقت، نظر $C(o, r)$ دایريٽه پیدا کړئ.

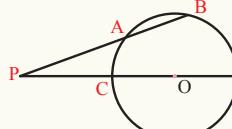
$$r = \frac{D}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{ cm}$$

$$P_{(o)} = d^2 - r^2$$

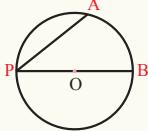
$$P_{(o)} = (13)^2 - (5)^2$$

$$P_{(o)} = 169 - 25 \Rightarrow P_{(o)} = 144$$

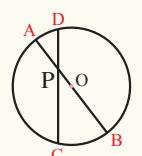
حل: خرنګه چې د دایريٽه راکړل شوي دي، لومړۍ دایريٽه د شاع وروسته د P ټکي طاقت، نظر دایريٽه پیدا کړئ.



- که د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایريٽه مثبت وي، ټکي له دایريٽه خخه بهر پروت دی، $P_{(o)} = d^2 - r^2 > 0 \Rightarrow d^2 > r^2$ لکه د $(2-2)$ قضې شکل



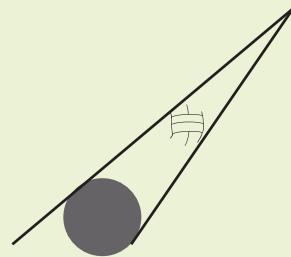
- که د یوه ټکي طاقت نظر دایريٽه صفر وي، ټکي د دایريٽه پر محیط پروت دی، یعنې $P_{(o)} = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$



- که د یوه ټکي طاقت، نظر دایريٽه منفي وي ټکي د دایريٽه دنه پروت دی، یعنې $P_{(o)} = d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow d^2 < r^2$

پوښتې

- ۱- په لاندې حالتونو کې د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایريٽه پیدا کړئ.
الف) که $d = 7$ او $r = 4$ وي. ب) که $d = 3$ او $r = 3$ وي. ج) که $d = 3$ او $r = 5$ وي.



شکل ته پام وکړئ.
که چېږي د نور د وړانګو د حرکت مسیر
مستقيمي ګربښي ومنل شي، دغه ګربښي
نظر توب او د هغه له سیوري سره خه
ارېکې لري؟

فعالیت

- د P له یوه بهرنې تکي نه د $C(O, r)$ او \overline{PQ} دوہ مماسونه رسم کړئ.
- که د Q او R تکي پر دایرو د تماس تکي وي. آیا د P د تکي پر دایري بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O تکي د Q او R پکو سره و نسلوئ.
- لاسته راغلي مثلثونه خه اړېکې سره لري؟
- آیا رسم شوي مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعالیت له پایلې خخه لاندې قضیه خرګندېږي.

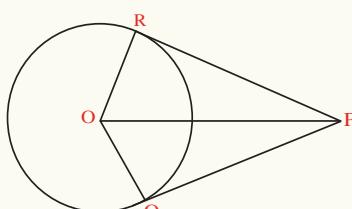
قضیه(3-2): د یوې دایري له بهرنې تکي خخه پر دایري دوہ مساوی مماسونه رسمېږي.

ثبت: په \overline{POQ} او \overline{POR} مثلثونو کې لیکلې شو چې:
 $\overline{OR} = \overline{OQ}$ د دایري شاع یا وړانګه
 $\overline{PO} = \overline{PO}$ ګډ

$$\hat{R} = \hat{Q} \dots\dots\dots\dots\dots 90^\circ$$

$$\triangle POR \cong \triangle POQ$$

$$\overline{PR} = \overline{PQ}$$



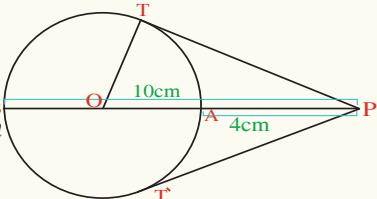
قضیه(4-2): که د P له تکي خخه د \overline{PT} مماس او د \overline{PB} یو قاطع پر یوه دایري رسم شي،
ثبت کړئ چې د یوه تکي طاقت، نظر دایري ته، د مماس له مربع سره مساوی دي.

ثبوت: د $C(O, r)$ په دائيره کې، \overline{PAB} مماس او \overline{PT} قاطع دی، که د T تکي له A او B تکوسره ونبليوو، د $\triangle PTA$ او $\triangle PTB$ مثلثونو خخه ليکلائي شو چې:

مثال: په لاندې شکل کې د \overline{PT} او $\overline{PT'}$ او بردوالی لاسته راوړئ.

حل:

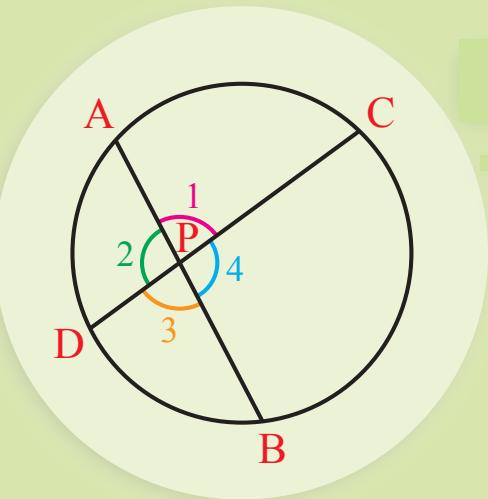
$$\begin{array}{l} PA = 4\text{cm} \\ PB = 10\text{cm} \\ PT = ? \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} PT^2 = PA \cdot PB \\ PT^2 = 4 \times 10 = 40 \\ PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\text{cm} \end{array} \right.$$



- د یوپی دایرپی له باندنسی تکی خخه پر هغې دوه مساوی مماسونه رسمولای شو.
که چېرپی د یوپی دایرپی له بهرنی تکی خخه پر دایرپی یو قاطع او یو مماس رسم شي، د یوه
تکی طاقت نظر دایرپی ته، دمماس له مریع سره مساوی دی.

پوشنشی

د دایرې دننۍ (داخلي) زاویه



د یوې دایرې په دننه کې، د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته رائي، د دایرې دننۍ زاوې بلل کېږي، لکه په پورتني شکل کې، د $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ زاوې.

تعريف

هغه زاوې چې د دایرې په دننه کې، د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته رائي، د دایرې دننۍ زاوې بلل کېږي، لکه په پورتني شکل کې، د $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ زاوې.

فعالیت

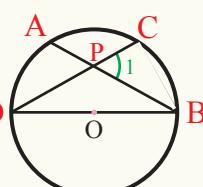
- د $C(O, r)$ دایرہ رسم کړئ، په هېڅي کې د \overline{AB} او \overline{CD} دوو هرې محیطي زاوې، د وترونه داسې رسم کړئ چې د P په ټکي که یو بل پرې کړي، هغه مخامنځ قوس نیمابي ده. په یوه مثلث کې، د هرې زاوې چې منځ ته راغلې د خه په نامه یادېږي؟
- د C او D ټکي د B سره ونبلوئ د \hat{CPB} زاوې چې د \hat{PBD} د دوو ناګاونديو زاوې له مجموعې سره برابره دي. باندニ زاوې ده، د مثلث د دوو ناګاونديو زاوې سره خه اړیکه لري؟

د دې فعالیت له پایلې خخه، لاندې قضیه بیان او ثبتوو.

قضیه(2-5): د یوې دایرې د هرې دننه (داخلي) زاوې پراخوالی، د هغه قوسونو د مجموعې له نیمابي سره مساوي دی چې د زاوید اضلاعو په مرسته د دایرې له محیط خخه جلا کېږي.

ثبت: خرنګه چې د \hat{B} او \hat{D} د دایرې محیطي زاوې دی، نوکولای شو ولیکو:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \frac{1}{2} \hat{AD} \quad \text{د محیطي زاوې وسعت} \\ \hat{D} = \frac{1}{2} \hat{BC} \quad \text{د محیطي زاوې وسعت} \\ \hat{CPB} = \hat{B} + \hat{D} \quad \text{د هر مثلث خارجي زاوې} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{CPB} = \frac{1}{2} \hat{AD} + \frac{1}{2} \hat{BC} \quad \hat{CPB} = \frac{1}{2} (\hat{AD} + \hat{BC})$$

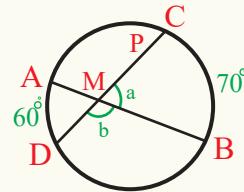


لومړۍ مثال: په لاندې شکل کې د \hat{a} او \hat{b} زاوې پیدا کړئ.

حل: خرنګه چې د ټولې دایري دنه زاوې پراخواли، د هغو قوسونو د مجموعې له نیمايې سره مساوي دي، چې د زاویو په مخامنځ کې پراته وي، یعنې:

$$\hat{CMB} = \hat{a} = \frac{\hat{AD} + \hat{BC}}{2} = \frac{60^\circ + 70^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$



دویم مثال: په لاندې شکل کې د \hat{x} او \hat{NTM} زاوې پراخواли وټاکئ.

حل: د ټولې دایري دنه زاویو د اړیکو له مخې لیکلای شو چې:

$$\hat{NM} = 9x + 17 \quad , \quad \hat{PQ} = 10x - 10$$

$$\hat{NTM} = 6x + 28$$

$$6x + 28 = \frac{\hat{NM} + \hat{PQ}}{2}$$

$$6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2}$$

$$12x + 56 = 19x + 7$$

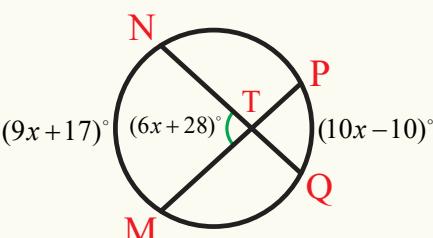
$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

$$\hat{NTM} = 6x + 28$$

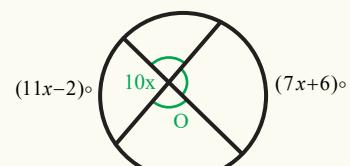
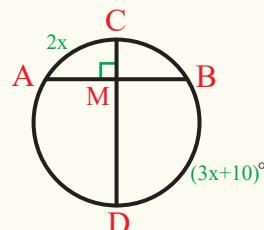
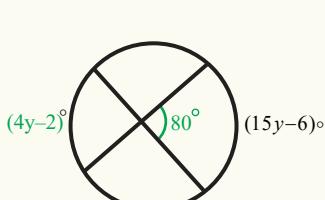
$$= 6 \times 7 + 28 = 42 + 28 \Rightarrow \hat{NTM} = 70^\circ$$

$$\hat{NTM} = 70^\circ$$

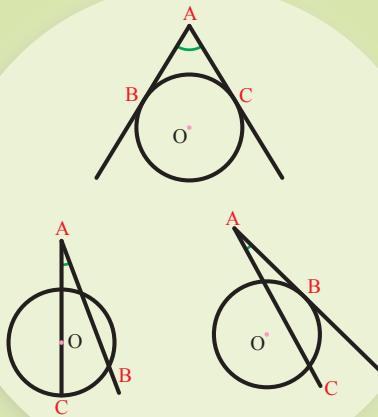


پوښتني

1- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې معلومې کړئ.



د دایرې باندنی زاویه



په مخامنځ شکلونو کې، د پوته کربنو او
د زاویو نومونه واخلی.

تعريف

هغه زاویه چې د دوو قاطع کربنو، دوو مماسونو یا د یو قاطع او یو مماس له پړکړې خخه د
دایرې په بهر کې منځ ته راغلی وي، د دایرې باندنی زاویه بلل کېږي.

فعالیت

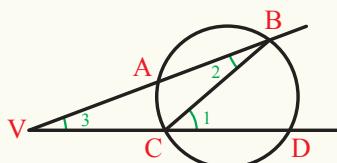
- د $\hat{C}(O,r)$ په دایرې کې د \overline{CD} او \overline{AB} دوه غیر موازی وترونه غزوو، ترڅو د \hat{BVD} بهرنی زاویه منځ ته راشی د C تکی له B سره ونبلوئ.
- د \hat{BVC} مثلث باندنی زاویه یعنې⁽¹⁾ د مثلث د دوو ناګاونډیو زاویو سره خه اړیکې لري؟

د دې فعالیت له پایلې خخه لاندې قضیه بیانېږي.

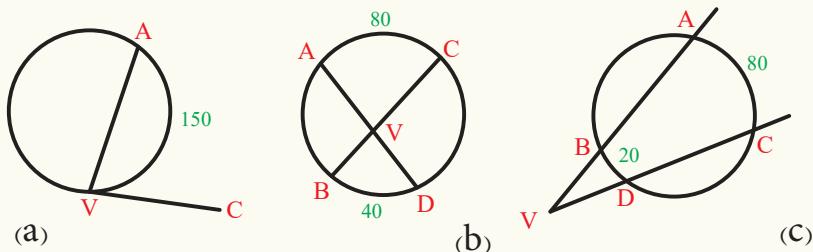
قضیه (2-6): د یو په دایرې د باندنی زاویې پر اخواли، د هغو قوسونو د تويير له نمایې سره مساوی دی چې د وترونونه تقاطع خخه منځ ته راغلی وي.

ثبت: د B تکی له C سره ونبلوو او \hat{VBC} مثلث کې لرو چې:

$\hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$ $\hat{3} = \hat{1} - \hat{2}$ $\hat{1} = \frac{1}{2} \hat{BD}$ $\hat{2} = \frac{1}{2} \hat{AC}$	$\left. \begin{array}{l} \text{د مثلث خارجې زاویې پر اخواли} \\ \text{د محیطی زاویې پر اخواли} \\ \text{د محیطی زاویې پر اخواли} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{3} = \frac{1}{2} \hat{BD} - \frac{1}{2} \hat{AC}$ $\hat{BVD} = \frac{1}{2} (\hat{BD} - \hat{AC})$
--	---



لوړۍ مثال: په لاندې شکلونو کې د \hat{AVC} زاویو پراخواли پیدا کړئ.



حل: په دائريه کې دننه، دباندې او مماسي زاویو له پراخوالي خڅه په ګټې اخستلو سره ليکلای شو، چې:

$$a) \hat{AVC} = \frac{1}{2} \hat{AV} \quad b) \hat{AVC} = \frac{1}{2} (\hat{AC} + \hat{BD}) \quad c) \hat{AVC} = \frac{1}{2} (\hat{AC} - \hat{BD})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (150)^\circ \quad = \frac{1}{2} \cdot (80 + 40)^\circ \quad = \frac{1}{2} \cdot (80 - 20)^\circ$$

$$\hat{AVC} = 75^\circ \quad \hat{AVC} = 60^\circ \quad \hat{AVC} = 30^\circ$$

دویم مثال: له لاندې شکل خڅه په ګټې اخستلو سره د X او قيمتونه پیدا کړئ.

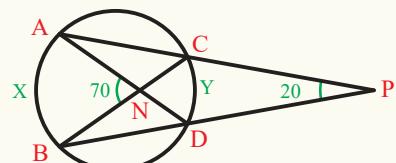
$$\hat{ANB} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140 \dots\dots I$$

$$\hat{APB} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 20 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 40 \dots\dots II$$

که چېږي د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:
 $2x = 180^\circ$

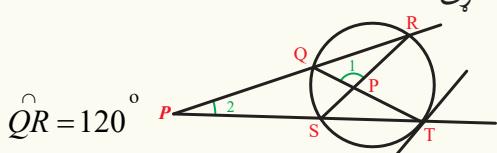
$$x = 90^\circ$$

$$y = 50^\circ$$



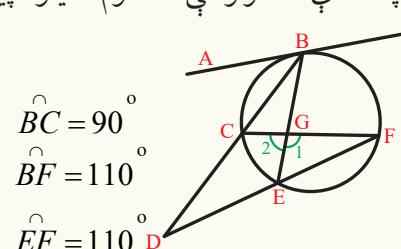
پونسني

په لاندې شکلونو کې نا معلوم کمیتونه پیدا کړئ.

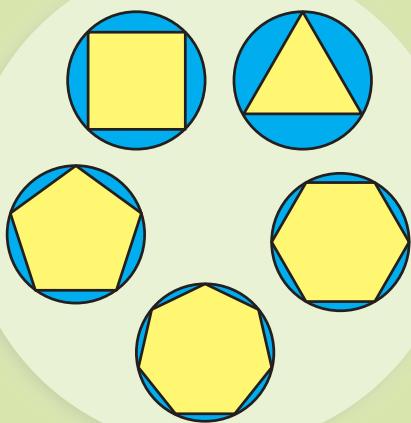


$$\hat{QS} = 50^\circ$$

$$\hat{STU} = ? \quad , \quad \hat{1} = ? \quad , \quad \hat{2} = ?$$

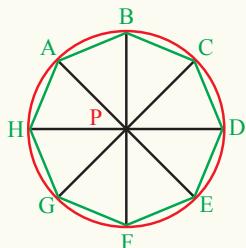


$$\hat{1} = ? \quad , \quad \hat{2} = ? \quad , \quad \hat{D} = ? \quad , \quad \hat{ABC} = ?$$



مخامنخ شکل ته پام وکرئ، کوم هندسي
شکلونه چې وينه نومونه پې واخلئ.

تعريف



هغه دایره چې د مضلع له رأسونو خخه تپه شوي وي
محیطی دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره کې بلل
کېږي، لکه په مخامنخ شکل کې:

د مثلث محیطی دایره: هغه دایره چې د مثلث له درې رأسونو خخه تپه شوي وي، د
مثلث د محیطی دایري په نامه يادېږي.

فعالیت

په یاد ولوي چې:
هغه دایره چې د مضلع
د راسونو خخه تيرېږي،
مضلع ته مرسوم په دایره
وايي.

- د مثلث $\triangle ABC$ رسم کړئ.
- د \overline{BC} او \overline{AC} د اضلاع ګانو عمودي ناصفوونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفوونه په خو تکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع تکي په O سره وښي.
- د \overline{OC} , \overline{OB} , \overline{OA} او \overline{OA} او بردواالی سره پرتله کړئ.
- که چېږي یوه دایره D په مرکز او \overline{OA} په شعاع رسم شي
آيا د B او C له تکو تپېږي او که نه؟
- آيا دا دایره D او C له تکو خخه هم تپېږي؟ ولې؟
- رسم شوي دایره، د مثلث د خه په نامه يادېږي؟

ددي فعالیت له پايلې خخه په لاندې چوں ليکلای شو:

پايله: د اضلاع گانو د وسطي عمودونو د پربکړې تکي، د مثلث د محطي دايرې مرکز د.

مثال: د $\triangle ABC$ قايم الزاويه مثلث داسې رسم کړئ چې د قايمو خنابو اوږدوالي يې، په

ترتیب سره $8cm$ او $6cm$ وي، د دې مثلث د محطي دايرې شاع لاس ته راوري؟

حل: پوهېرو چې به هر قايم الزاويه مثلث کې د هغې د محطي دايرې مرکز پر وتر باندې

پروت وي، نولومړۍ د قايم الزاويه مثلث د وتر اوږدوالي پیداکوو چې د نيمائي تکي يې د

محطي دايرې مرکز د.

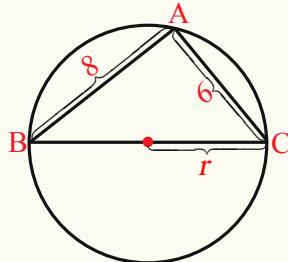
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = 100$$

$$\overline{BC} = 10cm$$

$$r = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5cm$$



• هغه دايره چې د مصلع له رأسونو خخه تېږدې د مصلع محطي دايرې په نامه یادېږي او
مصلع ته مرسوم په دايره ولېي.

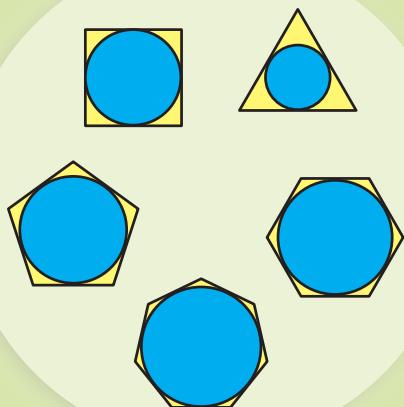
• د یوه مثلث د اضلاعو د منځنۍ(وسطي) عمودونو د تقاطع تکي د مثلث د محطي دايرې
مرکز د.

پښتې

1- یو مثلث چې د اضلاع اوږدوالي يې په ترتیب سره $5cm$, $3cm$, $4cm$ او $5cm$ وي، رسم
کړئ، د هغې د محطي دايرې شاع حساب کړئ.

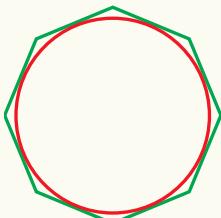
2 - د قايم الزاويه مثلث، متساوي الاصلاء او متساوي الساقين مثلثونو د محطي دايرو
مرکزونه په کومو څایونو کې موقعیت لري؟ په شکل کې يې وبنياست.

محاطی دایره



- هغه هندسي شکلونه چې په مخامنځ شکل کې ويني، نومونه يې واخلي.
- د شکلونو تر منځ خه اړیکې ويني؟

تعريف



هغه دایره چې محیط يې د مضلع پر ضلعو باندې مماس وي، د مضلع د محاطي دایري په نامه يادېږي، لکه: مخامنځ شکل، چې د مضلع په واسطه را چاپېره شوي دي.

د مثلث محاطي دایره: هغه دایره چې محیط يې د یو مثلث په درې ضلعو مماس وي، د مثلث محاطي دایره بلل کېږي.

فعاليت

موسته:
د یوه مثلث وسطي
عمودونه د مثلث دنه په
یوه تکي کې پربکوي

- د $\triangle ABC$ یو کيفي مثلث رسم کړئ.
- د \hat{C} او \hat{B} او \hat{A} زاویو ناصفونه رسم او د تقاطع تکي په (O) سره وبنیاست.
- د (O) له تکي خخه د مثلث پر اضلاعو د \overline{OP} , \overline{ON} , \overline{OM} او \overline{OP} , \overline{ON} , \overline{OM} عمود کړښې رسم کړئ.
- د \overline{OP} او \overline{ON} , \overline{OM} عمودونو او برداولي پر تله کړئ.
- آيا هغه دایره چې د (O) په مرکز او د \overline{ON} په شعاع رسم شي، د M او P له تکو خخه تېږېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دایره، د خه په نامه يادېږي؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شو به لاندی توگه خرگنده کړو.
د هر مثلث دنه ناصف الزاویو ترمنځ د تقاطع تکی، د مثلث د محاطی دایره له مرکز خڅه عبارت دي.

د مثلث محاطی دایره

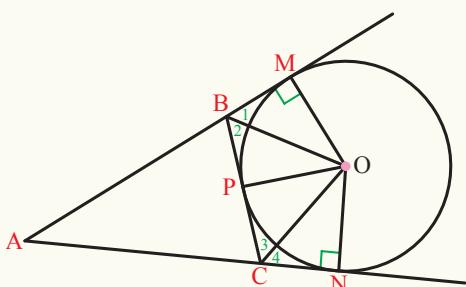
فعالیت

د مثلث محاطی دایره رسم کړئ.

- فکر او خپله وکړئ:**
- که چیرې د یوې خلور ضلعی د مخامنځ زاویو مجموعه 180° وي خلور ضلعی په دایره مرسوم دي.
- **په یاد ولري:**
هر منظمه مضلع محیطی او محاطی دایره لري.

- د مثلث $\triangle ABC$ او $\triangle ACB$ مثلث رسم کړئ او \overline{AB} او \overline{AC} ضلعو ته امتداد ورکړئ؟
- د مثلث $\triangle ABC$ او $\triangle CAB$ زاویو باندنه ناصف الزاویې رسم او د تقاطع تکی په (O) سره وښي.
- ایا د (O) تکی د مثلث د محاطی دایره مرکز کیدا شي؟ ولې؟
- د (O) له ثابت تکی خڅه د \overline{OM} , \overline{OP} , \overline{ON} او \overline{OM} عمودي کربنې، د مثلث په یوه ضلعه او د هغه په امتداد رسم او وښي چې د O دایره شاعګانې دي.

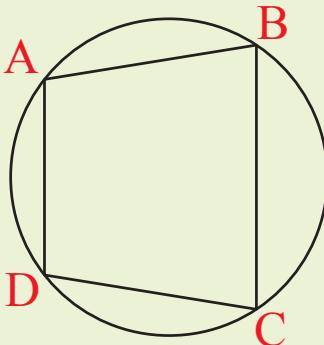
د پورتني فعالیت پایله کولای شو، په لاندی توگه خرگنده کړو.
هغه دایره چې د یوه مثلث په یوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد مماس وي، د هغه مثلث محاطی دایره بلل کېږي.



پونسټي

- 1- په کومو مثلثونو کې د محیطی دایره او محاطی دایره مرکزونه منطبق دي؟ هغه رسم او په شکل کې بې وښي.

په دایره کې د مرسوم خلور ضلعی حانګړ تیاوې (خواص)



په مخامنځ شکل کې دایره د خلور ضلعې
له رأسونو سره خه اړیکه لري؟

فعالیت

- د $ABCD$ یو کيفي خلور ضلعې مرسوم په دایره رسم کړئ.
- د محیطي دایرې منځ ته راغلي زاويې خه نومېږي؟
- د دایرې مرکز، د خلور ضلعې له دوو مخامنځ رأسونو سره ونبسلوئ، د منځ ته راغلي مرکزي زاويې مجموعه خو درجې ۵؟
- د مرکزي او محیطي زاویو اړیکې چې د عین قوس مخامنځ پرتې وي د پورته مرکزي زاويو لپاره ولیکي.

د دې فعالیت له پايلې خخه لاندې قضیه داسې بيانولای شي:

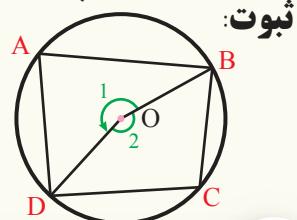
قضیه: په یوه دایره کې، د مرسوم خلور ضلعې د مخامنځ زاویو مجموعه 180° ده.

$$\hat{O_1} + \hat{O_2} = 360^{\circ}$$

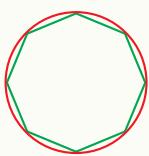
$$\hat{DCB} = \frac{1}{2} \hat{O_1}$$

$$\hat{DAB} = \frac{1}{2} \hat{O_2}$$

$$\hat{DCB} + \hat{DAB} = \frac{1}{2} (\hat{O_1} + \hat{O_2}) = \frac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ}$$



فعالیت



- منظم درې ضلعې، د خه په نامه یادېږي، د هرې زاويې پراخوالی خو درجې دی؟
- منظم خلور ضلعې خرنګه نوموو؟
- د هغې د هرې زاويې پراخوالی خو درجې دی؟

تعريف

هغه مضلع چې اصلاح او زاوېي يې يو له بل سره مساوي وي، منظمه مضلع بلل کېږي.

فعاليت

- په خپله خوبنې، يوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- يو رأس چې د هغې له ناګاوندې رأس سره ونبلوئ، خو مثلثونه منځ ته راخي؟
- دې مثلثونو دننیو زاویو مجموعه خو درجې ده؟
- د پنځه ضلعي دننیو زاویو مجموعې په هکله، شه فکر کوي؟
- دغه فعالیت ديو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چيرې n ضلعي مضلع ولرو، د هغې دنه زاویو مجموعه به يې خو درجې وي؟

که چيرې ديوې مضلع د ضلую شمېر، په n او د هغې دنه زاویو مجموعه په S_n وبنیو، نو د

هر n ضلعي دننیو زاویو مجموعه $(n-2)180^\circ = S_n$ درجې ده.

مثال: ديوه خلور ضلعي او لس ضلعي دننیو زاویو مجموعه پیدا کړئ.

حل: ده مضلع دننیو زاویو مجموعه، د $(n-2)180^\circ = S_n$ اړیکې له مخې تاکل کېږي.

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

$$S_{10} = (10-2)(180^\circ) \Rightarrow 8 \times 180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

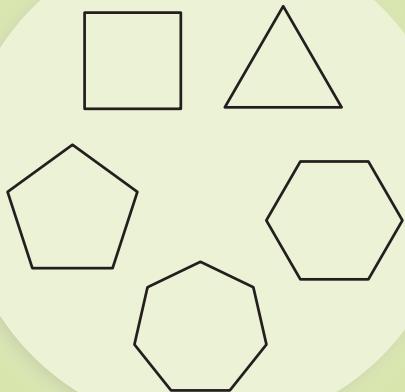
په یاد ولري چې:

- د قطرونو شمېر د n ضلعي له يوه رأس خخه د $n-3$ اړیکې په مرسته لاس ته راخي.
- له يوه رأس خخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر د $n-2$ اړیکې په مرسته لاسته راخي.
- په يوه دائيره کې د مرسم خلور ضلعي د مخامنځ زاویو مجموعه 180° ده.
- هغه مضلع چې د ضلую اوردوالي يې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

پونښې

- 1- ديوې منظمې شپږ ضلعي مضلع، د زاویو پراخوالی خو درجې دي؟
- 2- ديوې منظمې n ضلعي مضلع، د زاویو اندازه خو درجې ده؟
- 3- په يوه لس ضلعي مضلع کې، د قطرونو په مرسته له يوه رأس خخه خو مثلثونه منځ ته راخي؟

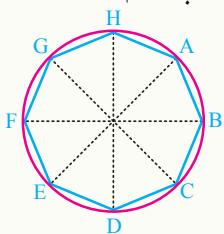
د منظمي مضلع ترسیم



- پام وکړئ.
- په مخامنځ شکل کې، خه ډول مضلع گانې ويني.
- ستاسې په نظر، دغه مضلع گانې په خه ډول رسم شوې دي؟

فعالیت

- د $C(O, r)$ دایره رسم کړئ او د هغې په مرکز کې (8) مساوي مرکزي زاوې رسم کړئ.
- که چیرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامنځ ضلعی مرکزي زاویه وي، آیا د $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ اړیکه سمه ده؟
- یو 8 ضلعی مضلع، د $C(O, r)$ په دایره کې رسم کړئ.
- د دایري له محیط سره د مرکزي زاویو د ضلعو د تقاطع ټکي ونبلوی.
- آیا د منځ ته راغلي ضلعی مضلع، سره مساوي دي؟ ولې؟
- منځ ته راغلي ضلع خه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعې د مخامنځ مرکزي زاوې پراخواли خو درجې ده؟



دیوه منظم n ضلعی مضلع، دهر ضلع مخامنځ د مرکزي زاوې پراخواли مساوي په $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ ده.

فعالیت

- د $C(O, r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعې رابنده ده.
- د دایري مرکز د مضلع له شپږ رأسونو سره نبلوو، خو مثلثونه منځ ته رائحي؟
- د شپږ ضلعی د مخامنځ ضلعو د مرکزي زاویو پراخواли خو درجې ده؟
- منځ ته راغلي مثلثونه خه چول مثلثونه دي؟

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو، په لاندې توګه خرګنده کړو.

د يوې شپږ ضلعی، د هرې ضلعی اوړدوالی، د هغې د محیطي دایري له شعاع سره مساوی دی.

مثال: هغه دایره چې شعاع یې 2cm دی، خرنګه کولای شو چې هغه په یوه منظم شپږ ضلعی مصلع محاط کړو؟

حل: پوهېبرو چې د هرې منظمې شپږ ضلعی مصلع هره ضلع، د هغې د محیطي دایري له شعاع سره مساوی ده، نو د پرکار خوله د 2cm په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توګه، د دایري له محیط خخه مساوی قوسونه جلاکوو. د تاکل شويو ټکو له نېبلولو خخه منظم شپږ ضلعی منځ ته راخي.

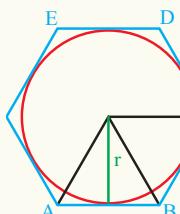
د محاطي دایري د شعاع له مخي، د منظمې مصلع مساحت

فعالیت

- د $C(O, r)$ محاطي دایره او د $ABCDEF$ منظمه مصلع رسم کړئ.
- د O ټکي د A, B او C رأسونو سره ونبلوئ. د $\triangle OBC$ او $\triangle OAB$ مثلثونه چې منځ ته راغلي دي، انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\triangle AOB$ په مثلث کې د \overline{AB} د ضلعې جګوالی (ارتفاع)، د محاطي دایري له شعاع سره مساوی دي؟ ولې؟
- د پورتنيو مثلثونو مساحت له کومې رابطي خخه په لاس راخي؟
- آياد منظمې n ضلعی مصلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو خخه جوړ دي؟
- د منظمې مصلع محیط د $P = AB \cdot n$ له اړیکې يا رابطي خخه لاسته ته راخي؟ ولې؟

که چيرې د منظمې مصلع مساحت په A ، محیط یې په P او د يوې منظمې n ضلعی مصلع د محاطي دایري شعاع، په r سره وښيو، نو د مصلع مساحت عبارت دی له: $A = \frac{1}{2} P \cdot r$

په لاندې ډول ثبوتېږي:



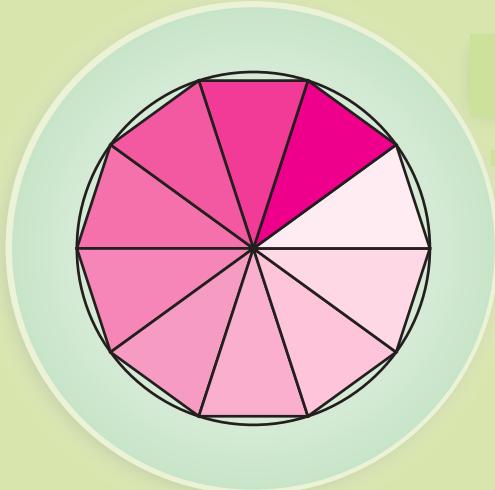
$$A = \frac{1}{2} AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \Rightarrow A = \frac{1}{2} P \cdot r$$

پونټې

- 1- په یوه دایره کې چې شعاع یې 3cm وي، یو متساوي الاضلاع مثلث داسي رسم کړئ چې محاط په دایري وي؟

د دایرې محيط او مساحت



په راکړل شوي شکل کې، د مثلثونو مجموعي مساحت د دایرې او د مثلثونو د یو شمېر ضلعو د مجموع اوږدوالي، د دایرې له محيط سره پرتله کړئ.

د $C(O, r)$ په دایرہ کې، که قطر په (d) او محيط یې د (C) په تورو وښودل شي، د دایرې د دې دوو غړو تر منځ لاندې اړکه شته؟

$$\frac{\text{د دایرې محيط}}{\text{د دایرې قطر}} = \frac{c}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi d \quad \dots\dots \text{(I)} \quad [\pi \approx 3.14159\dots]$$

پوهېږو چې $r = 2r$ یا $d = 2r$ که چېږي په (I) اړکه کې د (d) پر خای د $(2r)$ قيمت ولیکو، د دایرې محيط له لاندې اړکې خخه لاسته راخې:

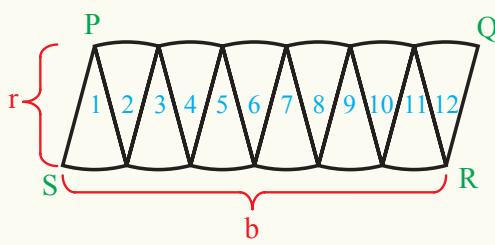
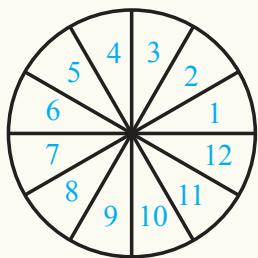
$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

د دایرې د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره، پرمختلې ریاضي ته اړيو، نو په دې ډول د دایرې د مساحت د محاسبې لپاره، په لاندې توګه عمل کوو:

یوه دایرہ د هغې د قطرنو په مرسته په (12) مساوي برخو وېشو او هره برخه یې، له 1 خخه تر 12 پوري په شمېرو سره وښيو، که چېږي د دایرې دغه مثلثي ټوبې غوخي او بيا هغوي خنګ په خنګ د لاندې شکل په خبر ترتیب کړو.

په روښانه ډول لیدل کېږي چې متوازي الاصلاع ته ورته شکل منځ ته راخې.



پوهېرو چې د b قاعده د دائري د محیط نیمایي ده، ولې؟ نو:

جګوالی \times قاعده = د متوازي الاصلع مساحت

$$= \frac{1}{2} Cr^2$$

له بلې خوا پوهېرو چې $C = 2\pi r$ = د دائري محیط ده، نولو چې:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

پوهېرو، چې د متوازي الاصلع مساحت او دائري سره ډېر نژدی دی، نولیکلای شو:

$A = \pi r^2$ اړیکې او محیط ېې، $D = 2\pi r$

اړیکې په مرسته په لاس راخی.

لومړۍ مثال: د یوې دائري شعاع $14cm$ ده، د دائري مساحت پیدا کړئ.

حل: د دائري د مساحت له اړیکې خخه په ګټې اخیستلو سره ینې $A = \pi r^2$ لرو چې:

$$A = \pi r$$

$$\pi = (3.14159)$$

$$A = (3.14159) \cdot 196cm^2 \Rightarrow A = 615.75cm^2$$

دویم مثال: که چېږي د دائري قطر $70cm$ وي، د دائري شعاع او مساحت پیدا کړئ.

حل: خرنګه چې د دائري محیط راکړل شوی ده، نولومړۍ شعاع او وروسته مساحت پیدا کړو.

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4 cm^2$$

دریم مثال: که چېږي د دائري محیط $14\pi cm$ وي، د دائري شعاع او مساحت پیدا کړئ.

$$C = 14\pi cm$$

$$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

حل: خرنګه چې د دائري محیط

راکړل شوی ده، نو د مساحت پیدا کړو.
کولو لپاره، لومړۍ شعاع پیدا کړو.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159) \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow A = 153.93 cm^2$$

• د یوې دائري مساحت، د r په شعاع د $A = \pi r^2$ له اړیکې خخه لاس ته راوړو.

• د یوې دائري محیط، د r په شعاع د $C = 2\pi r$ له اړیکې خخه لاس ته راوړو.

پونسني

1- که چېږي د یوې دائري محیط $41cm$ وي، د دائري شعاع ېې لاس ته راوړئ؟

2- د یوې دائري محیط چې شعاع ېې د اوږدوالي یو واحد وي، لاس ته راوړئ.

3- د یوې دائري مساحت چې شعاع ېې د اوږدوالي یو واحد وي لاس ته راوړئ.

د دویم خپرکي لنډيز:

په دايره کې د اوردوالي اړیکې:

- هغه اوپیکې چې د یو هندسي شکل د کربنو د اجزاوو تر منځ موجودې وي، د اوردوالي اړیکو په نامه یادېږي.

- که چيرې د یوې دايرې له یوه بهرنې تکي خخه پر دايره دوه قاطع کربنې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دي.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

يعني:

- که چيرې د یوې دايرې له بهرنې تکي خخه، دوه قاطع کربنې، پر یوه دايره داسې رسم شي چې دويم قاطع د دايرې له مرکز خخه تېر شي، نو د قاطع او د هغه د بهرنې قطعی د ضرب حاصل، له یوې تاکلي اندازې يعني: $r^2 - d^2$ سره مساوي دي.

- له یوه باندني تکي خخه، پر یوې دايرې دوه مساوي مماسونه رسماً دلاي شي.

- که چيرې $d^2 - r^2 > 0$ يا $d^2 > r^2$ وي تکي د دايرې په بهرنې کې پروت دي.

- که چيرې $d^2 = r^2$ يا $d = r$ وي، تکي د دايرې پر محیط پروت وي.

- که چيرې $d^2 - r^2 < 0$ يا $d^2 < r^2$ وي، تکي د دايرې په دنه کې پروت دي.

د دايرې داخلی زاوې: هغه زاوې چې د قاطع کربنو په مرسته، د دايرې په دنه کې منځ ته راخېي، د دايرې داخلی زاوې بلل کېږي.

- د یوې دايرې د هرې دننۍ زاوې پراخوالې، د هغې د مخامخ قوسونو د مجموعې له نيمائي

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}$$

سره مساوي دي.

باندني زاوې:

- هغه زاوې چې د دوو قاطع کربنو، دوو مماسونو، یا یو قاطع او یو مماس له تقاطع خخه د دايرې په بهر کې منځ ته راغلي وي، د دايرې باندني زاوې بلل کېږي.

- د یوې دايرې د هرې باندني زاوې پراخوالې د هغې د مخامخ قوسونو، تفاضل له نيمائي

$$\hat{A} = \frac{\hat{a} - \hat{b}}{2}$$

سره مساوي دي، يعني:

مصلع:

● هغه شکل چې د خو ټوچه کربنو په مرسته احاطه شوي وي، مصلع بلل کېږي.

په دې شرط چې:

● دوه ضلعې یې یوازې په خپلو انجامونو کې سره قطع کړئ.

● دوه ګاونډي ضلعې، د یوې مستقیمي کربنې په اوړدوالې پرې نه وي.

● هغه مصلع چې ضلعې او زاوې یې سره مساوی وي، منظم مصلع بلل کېږي.

د مصلع محیطي دایره: هغه دایره چې د مصلع له رأسونو شخه تپه شي، د مصلع محیطي دایره بلل کېږي.

د مصلع محاطي دایره: هغه دایره چې د مصلع پر ضلعو مماس وي، د مصلع محاطي دایره بلل کېږي.

د مثلث محاطي دایره: هغه دایره چې د مثلث پر یوه ضلعه او د دوو نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث محاطي دایره بلل کېږي.

● د دوو متقطع دایرو د مرکزونو ترمنځ کربنې په ګلوبټر عمود ده.

● که چیرې یوه خلور ضلعې مرسوم په دایره وي، د هغې د مخامنځ زاویو مجموعه 180° .

● د دایري محیط، د مخامنځ اړیکې په مرسته لاس ته راځي: $C = 2\pi r$

● د دایري مساحت، د مخامنځ اړیکې په مرسته لاسته راځي: $A = \pi r^2$

د دویم خپرگې پوښتې

● په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره خلور څوابونه ورکړل شوي دي، له سم څواب خخه دایره راتاوه کړئ.

1- که چیرې د P تکي، د دایري پر محیط پروت وي، د یوه تکي طاقت نظر دایري ته عبارت دي له:

- | | |
|-------------------------|-----|
| 2 | (b) |
| 1 | (a) |
| 0 | (c) |
| دري واره څوابونه سم دي. | |

2- که چیرې د P یو تکي د دایري په دنه کې پروت وي، د دې نقطې طاقت، نظريوې دایري ته عبارت دي، له:

- | | |
|----------------------------|-----|
| b | (b) |
| d | (c) |
| دري واره څوابونه سم نه دي. | |

3- که D تکي له دایري خخه د باندې پروت وي، D تکي طاقت نظريوې دایري ته، عبارت دي، له:

- | | |
|---------------------------------|-----|
| d ² - R ² | (b) |
| d - r | (a) |
| R ² - d ² | (d) |
| r - d | |

4- که چیرې د یوې دایري شعاع R او د دایري دنه تکي او د مرکز واتېن، په d سره وبنیو، د نوموری تکي طاقت نظر دایري ته، عبارت دي، له:

- | | |
|---------------------------------|-----|
| d ² = R ² | (b) |
| R ² = d ² | (a) |
| دواړه څوابونه نا سم دي. | |

5- یو تکي د 13cm په اندازه د $C(O, r)$ دایري له مرکز خخه واتېن لري، که د دایري قطر 10cm وي، د قاطع د بهرنې برخې اوږدوالي له نوموری تکي په لاندې څوابونو کې وبنیو:

- | | |
|-------|-----|
| 10 cm | (b) |
| 13 cm | (a) |
| 8 cm | (d) |
| 12 cm | |

6- که چیرې د P له تکي خخه د یو مماس اوږدوالي، د $C(O, r) = 12\text{cm}$ او قطر 10cm وي، د P او O د تکو تر منځ واتېن عبارت دي، له:

- | | |
|-------|-----|
| 12 cm | (b) |
| 13 cm | (a) |
| 5 cm | (d) |
| 10 cm | |

7- که چیرې د $C(O, r)$ د دایري \overline{AB} وتر ته، تر P تکي پوري امتداد ورکړو، داسې چې:

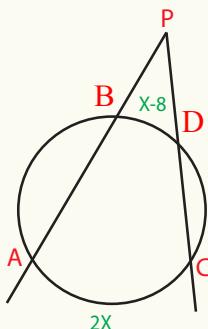
- | | |
|-------------------|-----|
| AP = 8 cm | (b) |
| 4 cm | (a) |
| $BP = 2\text{cm}$ | |

(d) درې واره څوابونه نا سم دي.

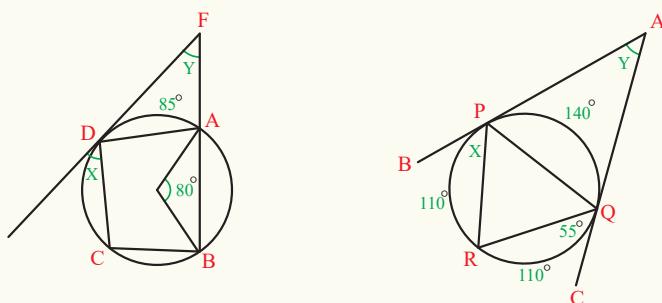
- په لاندې پوبشنوکې تشن خایونه په مناسبو کلمو سره ڈک کړئ:
 - 1 $d^2 - r^2$ د یوه ټکي نظر یوې دایرې ته دی.
 - 2 که چېږي \overline{PT} ، د $C(O,r)$ پر دایرہ مماس وي، د P د ټکي طاقت نظر (r) دایرې ته، عبارت دی له \overline{PT}^2 دی.
 - 3 که چېږي د P ټکي د دایرې پر محیط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.
 - 4 که ټکي د دایرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.
 - 5 که ټکي له دایرې خخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.
 - 6 که D او C, B, A د $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ پر محیط پرتې وي او د P ټکي د په دننه او یا بهرپروت دی.
 - 7 که D او T د ټکي د دایرې پر محیط پراته وي، د B, A او P د یوې کربنې په امتداد دی او د P ټکي د دایرې په بهر کې دی. په دې توګه $\overline{PT}^2 =$ دی.

- د سمو جملو په مخامنځ کې (د ص) او د ناسمو جملو مخامنځ کې (د غ) توری ولیکئ.
 - 1) د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته، د ټکي او د دایرې د مرکز واتن له مربع سره مساوی دی.
 - 2) که ټکي د دایرې پر محیط پروت وي، د ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر دی.
 - 3) که ټکي د دایرې په دننه کې وي، د ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي دی.
 - 4) که ټکي د د دایرې په بهر کې وي، د ټکي طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.
 - 5) د یوه ټکي طاقت، نظر هرې دایرې ته مثبت دی.
 - 6) د یوه ټکي طاقت، نظر دایرې ته $r^2 - d^2$ دی که د ټکي واتن دایرې ته او د دایرې شعاع وي.
 - 7) که دوہ دایرې مماس وي، د هغوي طاقت نظر ګډ مماس ته په هر ټکي کې مساوی وي.

- لاندې پوښتني په تفصیل سره حل کړئ:
- 1 - په لاندې شکل کې $p = 40$ او مخامخ قوسونه یې، په ترتیب سره $(2x)$ او $(x-8)$ وي د اوردوالي قوسونو \hat{BD} او \hat{AC} پیدا کړئ.

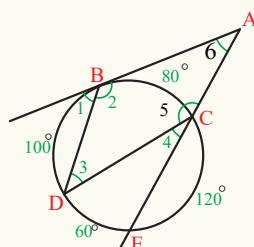


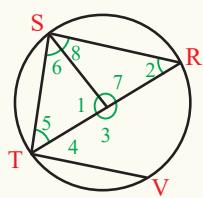
- 2 - په لاندې شکلونو کې د \hat{x} او \hat{y} د زاویو پراخواли پیدا کړئ.



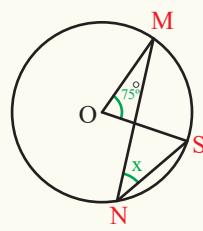
- 3- په لاندې شکل کې \overline{AB} پر دایره مماس دی، که $\hat{DE} = 60^\circ$, $\hat{DB} = 100^\circ$ وي، د $\hat{5}, \hat{4}, \hat{3}, \hat{2}, \hat{1}$ او $\hat{6}$ زاویو پراخواли پیدا کړئ.

- 4- د $C(O, r)$ په دایره کې، $\hat{RTS} = 50^\circ$, $RS // TV$ او د دایري قطر دی، د

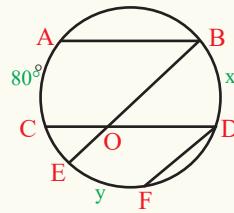
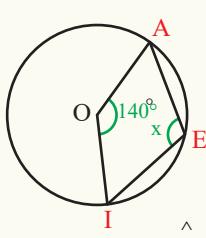




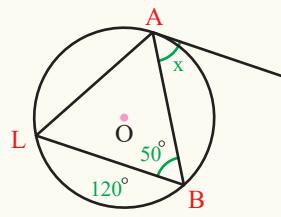
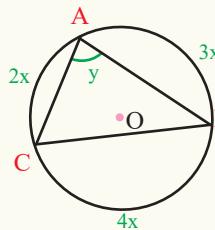
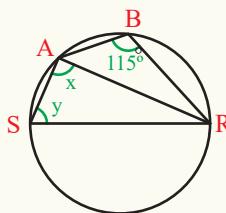
۸ او $\hat{8}, \hat{7}, \hat{6}, \hat{5}, \hat{4}, \hat{3}, \hat{2}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



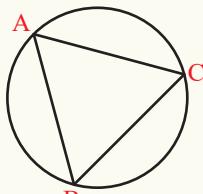
۵- په لاندې شکلونو کې د x, y زاویو اندازه، وټاکۍ.



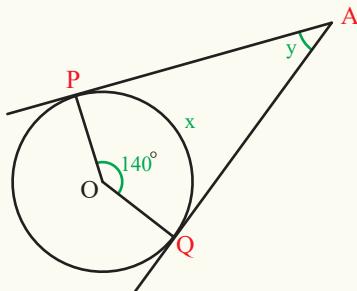
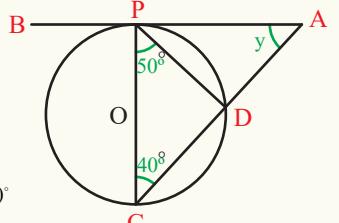
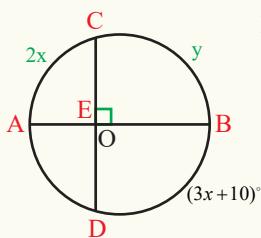
۶- په لاندې شکلونو کې د x او y زاویو اندازه، پیدا کړئ.



۷- د محاطي دایري د تعریف له مخې وښیع، چې د هر مثلث دننيو زاویو مجموعه 180° وي.



۸- په لاندې شکلونو کې، د x او y زاویو اندازه پیدا کړئ.



در بهم خپرگی

تحلیلی هندسه

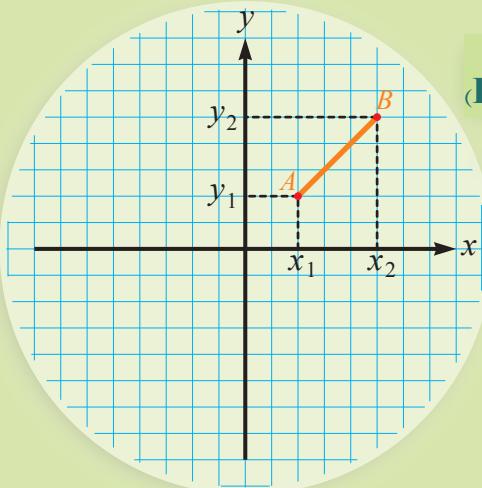
تحليلي هندسه

(Analytic Geometry)

د الجبر او هندسي تر منځ اړیکې، له تحليلي هندسي شخه عبارت دی چې د الجبري معادلو او هندسي شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نیول کېږي، فرانسوی رياضي پوه دیکارت، د لوړۍ خل لپاره، د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو تر منځ، اړیکه و خپله، وېږد: چې خینې الجيري معادلي، یو ټاکلۍ هندسي شکل لري. خرنګه چې د هندسي د علم د بنسته ټکي او د الجيري معادلو بنسته عدد جوروې، له لدې کبله، لوړۍ د ټکي او عدد تر منځ اړیکې تر خپنې لاندې نیسو، دیکارت د عدد او ټکي تر منځ د اړیکو د خپنې لپاره، د قایم مختصاتو د محورونو داسې یو سیستم راوېژاند چې تراوشه د دیکارت په نامه یادېږي.



د دوو ټکو ترمنځ واتېن (Distance between two Point)



د دوو ټکو ترمنځ واتېن او $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوو ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې، د AB یو قطعه خط تاکي. ستاسې په اند، خرنګه کولای شوچې، د A او B ټکو ترمنځ واتېن وشمېرو؟

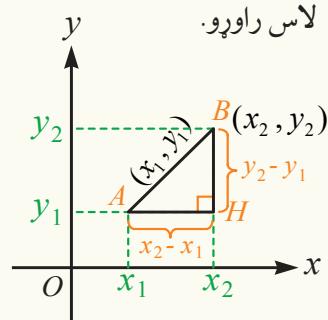
فعاليت

- د $(3, 5)$ او $(5, 4)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وبنیا ياست.
- د AB کربنه رسم کړئ.
- د A او B ټکو ترمنځ واتېن وشمېري؟

له پورتني فعالیت خخه کولای شو، په عمومي ډول، د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ د دوو ټکو ترمنځ واتېن په لاندې ډول په لاس راوړو. په لاندې شکل کې AHB مثلث يو قایم الزاویه مثلث دی. د فيثاغورث د قضیې په مرسته کولای شو، د A او B ټکو ترمنځ واتېن په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \\ \overline{AH} = x_2 - x_1 \\ \overline{BH} = y_2 - y_1 \end{aligned} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



لومندی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ تکو ترمنځ واتن پیدا کړي.

حل: د دوو تکو د واتن له فورمول خخه په ګټې اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ unit}$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ تکي واتن له مبدأ خخه حساب کړي.

حل: پوهېږو چې د مبدا مختصات $O(0,0)$ دی، نو د دوو تکو ترمنځ د واتن د فورمول

$$\text{خخه په لاس راخي: } \overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow \overline{OA} = 5$$

د $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ واتن عبارت دی، له: $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$

د $P(x, y)$ یو اختياری تکي واتن، د قایمو کمیاتو له مبدأ خخه عبارت دی، له:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

پښتنې

د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ تکو ترمنځ واتن پیدا کړي.

2- که $A(4,6)$ ، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث دراسونو مختصات وي، د مثلث ډول وټاکي.

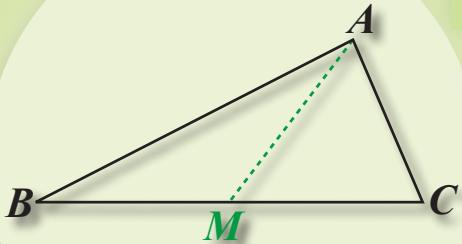
3- د K عددی قیمت داسې وټاکي، هغه توته کربنه، چې له $(A, 2, 3)$ او $(B, 5, 6)$ تکو خخه تېږۍ، او برداولي یې د \overline{AB} پنځه برابره شي.

4- د $P(1, \sqrt{3})$ او $Q(-1, 1 + \sqrt{3})$ ترمنځ واتن پیدا کړي.

5- که $C(1, 9)$ او $B(-3, -7)$, $A(-1, 4)$ د یوه مثلث درأسونو مختصات وي، د مثلث محیط حساب کړي.

6- د هغه مثلث مساحت پیدا کړي چې رأسونه یې، د $A(2, 0)$ ، $B(6, 2)$ او $C(1, 2)$ په تکوپراته وي.

7- که $A(10, 5)$ ، $B(3, 2)$ او $C(6, -5)$ د یوه مثلث د خوکو (رأسونه) مختصات وي، د مثلث ډول وټاکي.



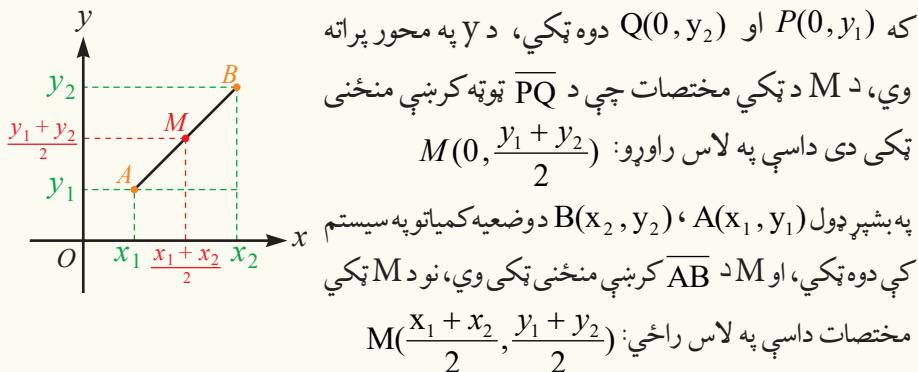
د مثلث $\triangle ABC$ په مثلث کې د \overline{AM} قطعه خط
د مثلث ميانه ده، د ميانې څانګړتیا بيان
کړئ.

فعاليت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وتاکي.
- که چیرې د C ټکي، د \overline{DE} قطعه خط منځني ټکي وي، د هغې مختصات ولیکي.
- د C ټکي مختصات د D او E ټکو له مختصاتو سره خه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وتاکي.
- که چیرې د R ټکي، د \overline{PQ} توپه کربنې منځني ټکي وي، د هغې مختصات په لاس راوري.
- د R ټکي مختصات، د P او Q ټکو له مختصاتو سره خه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شوچې په بشپړ دول داسي بيان کرو: که $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$ دو هه ټکو د X په محورو پراته وي، نو د M ټکي مختصات چې د \overline{AB} توپه کربنې منځني ټکي دي داسي په لاس راخي:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$$



لومړۍ مثال: که چېږي \overline{AB} د $B(7,5)$ او $A(1,3)$ ټوپه کربنې د پیل او پای مختصات

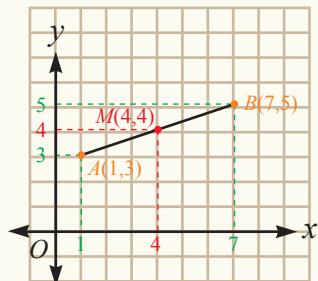
وي، د ټوپه کربنې د منځنې ټکي مختصات په لاس راورئ؟

حل: د یوې ټوپه کربنې د منځنې ټکي له مختصاتو خخه په ګته اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$M(4,4)$$



دومړۍ مثال: د $P(-1,3)$ ټکي واتېن، د هغې مستقيمي کربنې له منځنې ټکي خخه

پيداکړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو خخه تپرشي.

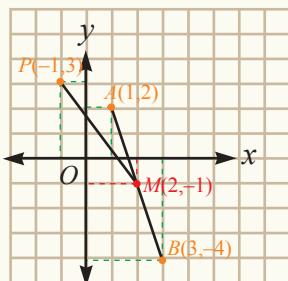
حل: د AB د مستقيمي کربنې، له منځنې ټکي خخه د P ټکي د واتېن د پیداکولو لپاره لومړۍ د AB منځنې ټکي مختصات، په لاس راورپو، نولیکلای شو چې:

$$\begin{aligned} M_{\overline{AB}} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = (2, -1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2, -1) \end{aligned}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$

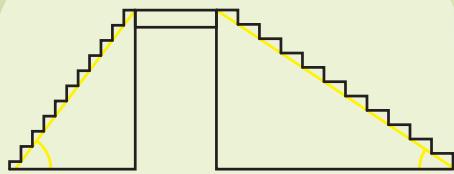


پوښتني

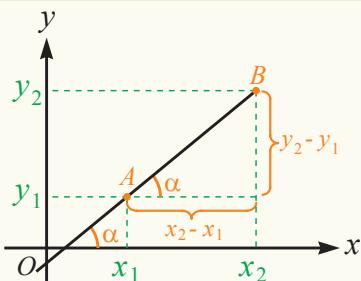
1 - د یوه مثلث درې رأسونه $(2, -1)$, $B(3, -1)$, $A(5, -2)$ او $C(1, 5)$ راکړل شوي دي، د \overline{AM} میانې اوږدوالي پيداکړئ.

2 - که چېږي $(4, 2)$, $D(11, 4)$, $C(14, 9)$, $B(5, 9)$ او $A(2, 4)$ د یوه متوازي الاضلاع رأسونه وي، د متوازي الاضلاع د قطرونو د تقاطع د ټکو مختصات پيداکړئ.

3 - که چېږي $(-1, 4)$, $A(-3, -7)$, $B(-3, -7)$ او $C(1, 9)$ د یوه مثلث رأسونه وي، نو د هغه د میانې یا منځنې کربنې اوږدوالي پيداکړئ چې د BC په ضلع رسميږي.



شکل ته وگورى، په کومه زينه، په آسانې سره ختلې شي، ولې؟ دليل يې بيان کړئ.



که \overline{AB} د مستقیمې کربنې دو ه اختياري تکي وي، د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت ته د مستقیمې کربنې میل وايي او په لاندي ډول يې ليکي: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

لومړۍ مثال: د هغې مستقیمې کربنې میل پیداکړئ چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ ټکو خخه تېرشي.

حل: پوهېپرو چې د مستقیمې کربنې میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ اړیکې خخه لاسته راخي، نو لرو چې:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 5}{4 - 3} = 1$$

دویم مثال: هغه مستقیم چې د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ ټکو خخه تېرېږي، د k قيمت په هغه کې داسې وتاکئ چې د مستقیمې کربنې میل ۳ وي.

حل: د k قيمت د لاسته راولو لپاره ددې رابطې $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ خخه په لاندي ډول ګټه اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad 3 = \frac{k - 5}{2}$$

$$3 = \frac{k - 5}{4 - 2} \quad K - 5 = 6$$

درېم مثال: د هغې مستقيمي کربنې ميل پیداکړئ چې د $P(2,3)$ تکي او د وضعیه کمیاتو له مبدأ خخه تېرشي.

حل: خرنګه چې مستقيمه کربنه د وضعیه کمیاتو له مبدأ خخه تېرېږي، نود مبدأ مختصات $O(0,0)$ او ميل يې په لاندې ډول په لاس راواړو:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

فعاليت

- د $A(2,3)$ او $B(4,6)$ تکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښی.
- هغه مستقيم چې د A او B ټکوڅخه تېرېږي، رسم کړئ او په Δ_1 سره يې وښی؟
- د Δ_1 مستقيم ميل په لاس راواړئ؟
- د Δ_1 مستقيم د X محور له مثبت جهت سره خه ډول زاویه جورووي.
- د $M(1,5)$ او $N(4,2)$ تکي په همغه وضعیه کمیاتوکې په بل رنگ وټاکۍ.
- هغه مستقيم چې د M او N ټکوڅخه تېرېږي، هغه ته Δ_2 ووایي.
- د Δ_2 مستقيم ميل په لاس راواړئ؟
- د Δ_2 مستقيم د X محور د مثبت جهت سره خه ډول زاویه جورووي؟
- د جوړ شویو زاویو او کربنوتمنځ، خه ډول اړیکه شته؟

له پورتني فعالیت خخه لاندې پایلې په لاس راخي.

د هري مستقيمي کربنې ميل په هغه زاوې پوري اړه لري چې مستقيمه کربنه يې، د X د محور له مثبت لوري سره جورووي.

که یوه مستقيمه کربنه، د X د محور له مثبت جهت سره حاده زاویه جوره کړي، ميل يې یومثبت عدد دی.

که یوه مستقيمه کربنه، د X د محور له مثبت جهت سره، منفرجه زاویه جوره کړي، ميل يې یو منفي عدد دی.

پونډني

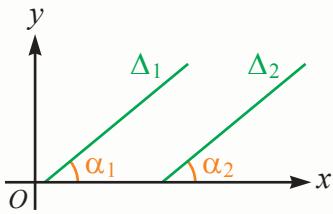
- 1 - د هغې مستقيمي کربنې ميل په لاس راواړئ چې د $A(1,1)$ او $B(-1,-1)$ ټکوڅخه تېرشي.
- 2 - هغه مستقيم چې د $A(1,a)$ او $B(2,-2\sqrt{3})$ ټکوڅخه تېرېږي، د a عددی قيمت داسې و ټاکۍ، چې د مستقيم ميل $\sqrt{3}$ وي.
- 3 - که چېږي $C(1,5)$ او $B(3,-1)$, $A(-2,5)$ د یوه مثلث رأسونه وي، د نوموري مثلث د BC ضلعې د ميانې ميل پیداکړئ.

د موازي گرښو ميل



په ورکړل شوي شکل کې، زينه په پام کې
ونيسۍ، د هغې د بازوګانو تر منځ خه ډول
اړیکه شتون لري؟

فعاليت



- د راکړل شويو وضعیه کمیاتو په سیستم کې Δ_1 او Δ_2 موازي گرښې له یوې بلې سره داسې رسم کړئ چې x محور له مثبت جهت سره حاده زاوې چورې کړي.
- Δ_1 او Δ_2 گرښو ميلونه حساب او له یو بل سره بې پرته کړئ، گرښې له یو بل سره خه اړیکې لري؟
- که چېږي Δ_1 مستقيم x محور له مثبت جهت سره α_1 زاویه Δ_2 مستقيم x محور له مثبت جهت سره α_2 زاویه جوره کړي، نو α_1 او α_2 یو له بل سره خه اړیکه لري؟

په عمومي ډول د پورتني فعالیت پایله، په لاندې ډول بيانو:
موازي گرښې، د مساوي ميلونو لرونکي دي.

که چېږي دوہ مستقيمي گرښې مساوي ميلونه ولري، په پایله کې هغه زاوې چې x محور له مثبت جهت سره بې جوروي، یو له بل سره مساوي دي؟

مثال: که چېږي Δ_1 مستقيم، د $B(-6,-11)$ او $A(2,5)$ ټکو او د Δ_2 مستقيم، د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ ټکو خخه تېرشي، د Δ_1 او Δ_2 گرښې یوه له بلې سره خه اړیکه لري؟

$$\left. \begin{array}{l} m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} = \frac{-11 - (5)}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} = \frac{8 + 6}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خزنگه چې د Δ_1 او Δ_2 میلونه سره مساوی دي، نونوموري کربنې يوه له بلې سره موازي دي.

فعالیت

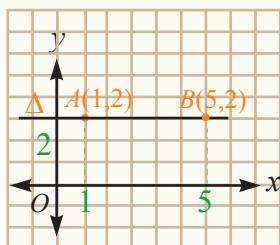
- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ تکي د وضعیه کمیاتو په مستوی کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کربنې چې له A او B ټکوڅخه تېږپري، رسم کړئ او په Δ بې نونموئ.
- د Δ مستقیم د X محور له مثبت جهت سره، خه ډول زاویه جوړوي؟
- د Δ مستقیم میل حساب کړئ.

د پورتني فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

که چېږي A او B دوو اختياري تکي او مساوی ترتیبونه ولري، لکه: $B(x_2, a), A(x_1, a)$

هغه کربنې چې د A او B ټکوڅخه تېږپري، د X له محور سره موازي دي. او میل بې، له

$$m = \frac{a - a}{x_2 - x_1} = 0 \quad \text{صفرسره مساوی دي. یعنې:}$$



فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ تکي، د وضعیه کمیاتو په مستوی کې وتاکي.
- هغه مستقیمه کربنه چې له M او N تکو خخه تپرپري، رسم کرئ او په Δ بې نوموئ.
- د Δ مستقیمه کربنه، د X له محور سره خه ډول زاویه جوړوي، د Δ مستقیمي کربنې د میل په اړه خه ویلای شئ؟

له پورتنی فعالیت خخه دې پایلې ته رسپرو، هغه مستقیمه کربنه چې د x له محور سره قایمه زاویه جوړه کړي، نشوکولای د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ویل کېږي چې د Δ مستقیم خط ټاکلی میل نه لري.

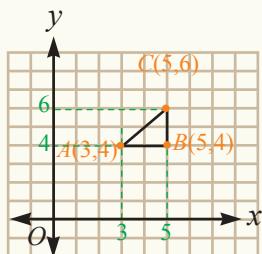
مثال: که چېږي د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ دیوه مثلث رأسونه وي، د مثلث ډول وتاکي او هغه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کرئ؟

حل: خرنګه چې، د AB مستقیمه کربنه د x له محور سره موازي ده، نو میل بې صفر دي.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

په هملې ډول، د BC مستقیمه کربنه د y له محور سره موازي ده، نومیل بې نامعین دي (نه دی تعریف شوی).

$$m_{\overline{BC}} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$

$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$

$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

په پایله کې:

خرنګه چې د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کېږي، نو د \overline{AB} مستقیمه کربنه، د \overline{AC} په ΔABC مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقيمه کربنه چې د x له محور سره موازي او یا د y په محور عمود وي، ميل يې صفردي.

هغه مستقيمه کربنه چې د x په محور عمود يا د y له محور سره موازي وي، ميل يې نه دي

تعريف شوي.(معين عدد نه دي)

پونسني

1- که د $(A(3,0), B(0,5), C(-3,0), D(0,-5))$ د يوې خلورضلعي راسونه وي:

الف: د خلورضلعي مخامنځ ضلعي يوه له بلې سره خه اړیکې لري؟

ب: د قطرنو ميلونه پيداکړي؟

2- $(A(3,4), B(-3,4), C(3,-4), D(-3,-4))$ تکي په پام کي ونيسي.

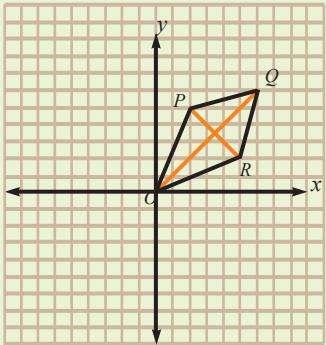
الف: هغه مستقيمه کربنه چې د A او B له ټکو خخه تېږدې، له هغې کربنې سره چې د C او D ټکو خخه تېږدې، خه اړیکې لري؟

ب: هغه مستقيمه کربنه چې د A او B ټکو او هغه کربنه چې د C او D ټکو خخه تېږدې خه اړیکه لري؟

ج: د $ABCD$ خلورضلعي، خه چول خلور ضلعي ده؟

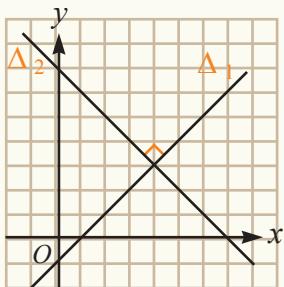
د: د قطرنو ميل يې پيداکړي.

د یو پر بل باندي د عمود مستقيميو کربنو ميل



خلورضلعي يولوزي دي.
کولاي شئ، د لوزي خانگرتيا، د
هغې د رأسونو د مختصاتو په مرسته
بيان کړئ؟

تعريف



د Δ_1 او Δ_2 دو همستقيمي کربني چې ميلونه یې m_1
او m_2 دي، هغه وخت یو پر بل عمود دي چې لاندي
 $m_1 \cdot m_2 = -1$. رابطه د هغوي ترمنځ موجوده وي.

لوړۍ مثال: هغه مستقيمه کربنه چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ پکو خخه تېږدې، له یوبل سره خه اړیکه لري؟

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{1 - 7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2 - 5}{2 - 0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې، د \overline{CD} د همستقيمي کربنې، یو پر بل عمود دي.

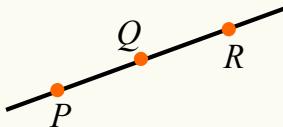
فعالیت

- د $D(3,1)$ ، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وبنایاست.
- د OB , BC , CD , DO شکل رسم کړئ.
- د \overline{DO} , \overline{CD} , \overline{BC} , \overline{OB} ضلعو اور دوالی پیدا کړئ.

- د OB خلورصلعی، خه دول خلورصلعی ده؟
- وبنیئ چې د \overline{OC} او \overline{BC} قطرونه، یو پر بل عمود دي؟
پوهېرو چې په يوه مستوي کې، له دوو تکو خخه، یوازې يو مستقیم تېربېري، په کوم حالت کې
له دربو تکو خخه يو مستقیم خط تېربېلاي شي؟

تعريف

د Q, P او R تکي هغه وخت پر يوه مستقیم پراته دي چې د \overline{PQ} ميل د \overline{QR} له ميل سره مساوي وي.



دويم مثال: د $C(-1, -3)$, $B(2, 3)$, $A(0, -1)$ درې تکي په پام کې ونيسي، دا وبنیئ چې دا درې واړه تکي په يوه مستقیمه کربنه پراته دي؟

حل: د AB ميل عبارت دی له:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3 - (-1)}{-1 - 0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{-3 - 3}{-1 - 2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

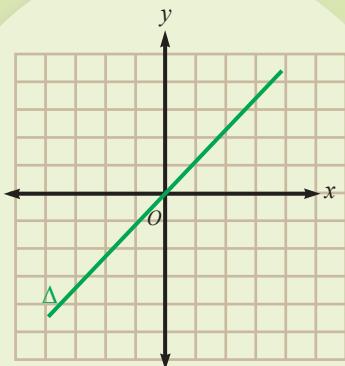
د AC ميل عبارت دی، له: \overline{BC} او \overline{AC} , \overline{AB} کربنو ميلونه سره مساوي دي، نو په پایله کې د A, B او C تکي په يوه مستقیمه کربنه پراته دي.

- که چېږي د دوو کربنو د ميلونو د ضرب حاصل $(-1)(-3) = 3$ وي، نو کربنې یو پر بل عمودي دي.
- درې تکي، هغه وخت په يوه کربنه پراته وي چې د ټوته کربنو ميلونه سره مساوي وي.

پونسني

- 1- که د $A(6, 1)$, $B(8, 3)$ او $C(6, 5)$ تکي، د يوه مثلث رأسونه وي، دا وبنیئ چې نوموري مثلث قايم الزاويه دي او که نه؟
- 2 - هغه ټوته کربنې چې د $(1, 1)$ او $(7, 5)$ او $(0, 5)$ او $(2, 2)$ تکو خخه تېربېري له هغې ټوته کربنې سره چې د یوه کربنه چې د $(7, 5)$ او $(1, -4)$ او $(-3, -5)$ تکو او بله د دواړو کربنواحالت یو له بل سره بیان کړئ.
- 3 - یوه کربنه چې د $(2, 4)$ او $(7, 5)$ تکو او بله د دواړو کربنواحالت یو له بل سره بیان کړئ.

د مستقیمې گربنې معادله



په مخامنځ شکل کې، د مستقیمې گربنې پرمخ خو تکي وتاکۍ، د گربنې پرمخ د تاکل شویو تکو د واين اوترتیب ترمنځ کومه اړیکه وینې؟

فعالیت

- د (1,-1) او (0,0) A د ګربنې د شکل پرمخ برانه دي اوکه نه؟ ولې؟
- د (1,1) او (0,0) B د ګربنې د شکل پرمخ برانه دي اوکه نه؟ ولې؟
- د دې تکوله تړلواخخه کوم شکل لاسته راخي؟
- د (1,-1) او (4,-4) C د ګربنې د ټکو د واين اوترتیب ترمنځ اړیکه رابنې، د مستقیمې گربنې معادله بلل کېږي.

د پورتنې فعالیت پایله، په عمومي ډول داسې بیانوو:
د $y = x$ او $y = -x$ رابطې چې د ګربنې پرمخ د ټکو د واين اوترتیب ترمنځ اړیکه رابنې، د مستقیمې گربنې معادله بلل کېږي.
پوهېرو چې د هرو دوو ټکو خخه چې په مستوی کې پرتې وي، یوازې او یوازې یوه مستقیمه ګربنې تېږېږي. اوس غواړو چې د هغې مستقیمې ګربنې معادله پیدا کړو چې له دوو اختیاري ټکو خخه تېږېږي.

فعالیت

- د (1,3) او (3,5) B دوو ټکي، د ګربنې د ګربنې معادله بلل کېږي.
- هغه مستقیمه کرسه رسم کړئ چې له A او B ټکو خخه تېره شي.
- دې لپاره چې د (x, y) M اختیاري ټکي د \overline{AB} کربنې پرمخ پروت وي، کوم شرط لازمي دي؟
- د \overline{AM} او \overline{AB} ټوټه کربنو میلونو له مساویتوب خخه کومه اړیکه لاسته راخي؟

د پورتنې فعالیت پایله کولای شو په عمومي ډول داسې بیان کړو.

د هغې کربنې معادله چې د (x_1, y_1) او (x_2, y_2) له دوو ټکو خخه تېرہ شي، داسې په لاس راخې:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

لومړۍ مثال: د هغې مستقیمې کربنې معادله وليکي چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له ټکو خخه تېرہ شي.

حل: د هغې مستقیمې کربنې د معادلې په مرسته چې دوه ټکي یې معلوم وي، ليکلای شو چې:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{y - 4}{x - 3} &= \frac{-1 - 4}{2 - 3} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - 3} = \frac{-5}{-1} = 5 \\ y - 4 &= 5(x - 3) \\ y &= 5x - 15 + 4 = 5x - 11 \end{aligned}$$

دویم مثال: د هغې مستقیمې کربنې معادله وليکي چې د x محور په واپن، د -3 ټکي کې او د y محور په ترتیب د $4 = y$ ټکي کې قطع کړي؟

حل: خرنګه چې، مستقیمه کربنې د X محور په $-3 = x$ ټکي کې قطع کوي، نو د مختصاتو په سیستم کې، ددې ټکي د تقاطع مختصات $(-3, 0)$ دی. په همداي ډول، د y له محور سره د تقاطع د ټکو د مختصات د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(0, 4)$ دی، اوس د یوه مستقیم د دوو ټکو پېژندلو په مرسته کولای شو، د مستقیمې کربنې معادله داسې وليکو:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 0}{x - (-3)} = \frac{4 - 0}{0 - (-3)}$$

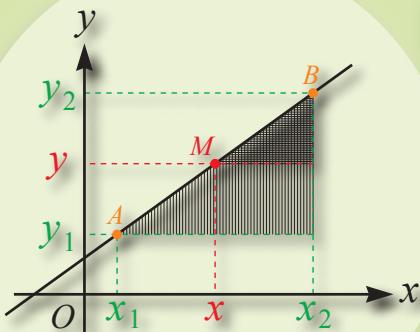
$$\frac{y}{x + 3} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = 4(x + 3)$$

$$3y - 4x = 12$$

پونسني

- 1- د هغې مستقیمې کربنې معادله وليکي چې د $A(2,-1)$ او $B(3,4)$ له ټکو خخه تېرہ شي؟
- 2- د هغه مثلث \overline{AM} ميانې معادله وليکي چې رأسونه یې $A(1,3), B(-1,4)$ او $C(5,6)$ وي؟
- 3- د هغې مستقیمې کربنې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3,0)$ او د y محور په $B(0,-2)$ ټکي کې قطع کړي؟

د هغې مستقیمې کربنې معادله چې میل او يو تکی يې معلوم وي



په مخامنځ شکل کې د \overline{AB} میل، د \overline{MA} له میل سره خه اړیکه لري؟
بله هره توټه کربنې چې ددې توټه کربنې پرمخ وټاکو، د \overline{AB} له میل سره برابر میل لري، ولې؟

پوهېرو چې د هغې کربنې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوو تکی بنسکاره کوي
عبارت ده، له:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

يا

خرنګه چې $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ د مستقیمې کربنې میل رابنيي، نو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

روستنۍ معادله، د هغې کربنې معادله ده چې میل يې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطې خخه تېږدې.

لومړۍ مثال: د هغې مستقیمې کربنې معادله ولیکئ چې له $(2, 3)$ تکی خخه تېره او میل

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

حل: خرنګه چې د مستقیمې کربنې میل او يو تکی را کړل شوي دي، نو د (a, b) معادلي خخه لیکلای شو:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2(y - 3) = (x - 2)$$

$$2y - 6 = x - 2$$

$$2y - x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

دوييم مثال: هغه مستقيمه کربنه چې د (3,1) تکي خخه تېره او د x له محور سره موازي وي، ولیکي؟

حل: خرنګه چې مستقيمه کربنه د x له محور سره موازي ده،
نوميل يې صفر ده. په پايله کې يې معادله په لاندي ډول ده.

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

درېم مثال: د هغې مستقيمي کربنه په معادله ولیکي چې له (3,1) تکي خخه تېره او د y له محور سره موازي وي؟

حل: خرنګه چې مستقيم د y له محور سره موازي ده، نوميل يې نه دیتعريف شوی (معين ميل نه لري)، خکه پوهېړو چې،
ددې کربنه پر منځ د هر تکي واتېن د (3,1) تکي سره مساوي ده
چې معادله يې په دې ډول $x = 3$ ده.
په عمومي ډول، هغه کربنه چې له (a,b) تکي خخه تېره او د x له محور سره موازي وي، عبارت له $y = b$ سره ده.

هغه کربنه چې د (a,b) تکي خخه تېږدي او د y له محور سره موازي وي، عبارت له $x = 1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ ټوټه کربنه د عمودي ناصف معادله پيدا کړئ چې د $A(2,-4)$ او $B(-2,4)$ تکو خخه تېره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلى د پيدا کولو لپاره لومړي د \overline{AB} ټوټه کربنه ميل په لاس راورو او بيا د هغې د منځ د \overline{AB} د منځني تکي مختصات په لاس راورو.

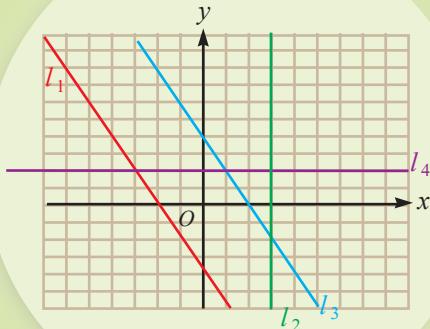
$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 + 4}{-2 - 2} = -2 \quad \Rightarrow \quad m_{\Delta} = -\frac{1}{m_{\overline{AB}}} = \frac{1}{2}$$

$$(x, y)_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{0}{2} \right) = (0, 0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

پونسني

- 1- د هغې مستقيمي کربنه پيدا کړئ چې ميل يې 4 او y محور د 3 په تکي کې پرې کړي؟
- 2- د هغې مستقيمي کربنه پيدا کړئ چې د $P(5, -4)$ تکي خخه تېره او ميل يې 2- وي؟
- 3- د $3x + 4y - 7 = 0$ معادله کې، د مستقيم ميل او د y له محور سره يې د تقاطع تکي پيدا کړئ؟



د l_1, l_2, l_3, l_4 خلورکربنې، نسبت یوې بلې ته، کوم وضعیتونه لري؟

د یوې گربنې الجبری معادله د هغه تکي د مختصاتو اړیکه چې په مستقیمه گربنې پروت دی رابني، په عمومي ډول د یوې مستقیمې گربنې معادله په لاندې ډول بیانوو: په معیاري یا ستپلارډ ډول، د یوې مستقیمې گربنې معادله په لاندې ډول ده.

$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ یا $ax + by + c = 0$ او c حقيقی عددونه او $b \neq 0$ دی.
په پورتنی معادله کې $\frac{-a}{b}$ د گربنې میل او $\frac{-c}{b}$ د یا له محور سره د تقاطع تکي بلکېږي،
نو ولاي شوچې د هرې گربنې معادله، په یوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

$y = mx + h$ چې m د مستقیمې گربنې میل او h د یا له محور سره د تقاطع تکي یا ترتیب دی په عمومي ډول، هره خطې اړیکه، د x او y له جنسه چې په هغه کې د x او y توان یو وي، د مستقیمې گربنې معادله بلکېږي.

فعالیت

- $2x + 3y - 6 = 0$ او $2x + 3y - 6 = 0$ د یوې مستقیمې گربنې، د وضعیه کمایتو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هریوه مستقیم میل پیدا کړئ.
- د یوې گربنې یوه له بلې سره خه وضعیتونه لري؟

له پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:
که د دو گربنو میلونه سره مساوی نه وي، نو گربنو یوه بله پرې کړي ده.
په عمومي ډول، که د $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ او $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ د یوې گربنې یوه بله قطع کړي. نو میلونه یې سره مساوی نه دي، له دې خخه داسې پایله په لاس راخي.

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \text{ یا } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

د $6x - 2y + 1 = 0$ او $3x + y - 5 = 0$ مستقیمی کربنې، د قایمو وضیعه کمیاتو په مستوی کې رسم کړئ.

د دې مستقیمی کربنې میل په لاس راوري.

د دوې مستقیمی کربنې، نسبت یوه بلې ته خه حالت لري؟ ولې؟

په عمومي ډول، د $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ او $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دوې مستقیمی کربنې، هغه

وخت موازي دي چې میلونه یې سره مساوي وي، له دې خایه دا پایله په لاس راخي چې د هغوي د

متحولینو د ضریبونو ترمنځ، لاندې اړیکه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

که د متحولینو د ضریبونو ترمنځ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ اړیکه وي، په دې حالت کې کربنې یو پر

بل پرتې(منطبق) دي.

لومړۍ مثال: د $3x + 4y = 5$ او $4x - 3y = -1$ د مستقیمو اړیکو، نظر یو بل ته بیان کړئ.

حل: د دوو کربنو د معادلاتو له ثابتوضریبونو خخه په ګټې اخیستنې سره لروچې:

$$a_1 = 3 \quad b_1 = 4 \quad c_1 = -5$$

$$a_2 = 4 \quad b_2 = -3 \quad c_2 = 1$$

1- خرنګه چې $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ دی په دې حالت کې کربنې یو بل قطع.

2- خرنګه چې، $\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} = -1$ نو $\frac{3}{4} \times \frac{4}{-3} = -1$ دی، نو د کربنو د تقاطع په ټکي کې یو پر بل عمود دی.

دویم مثال: په لاندې معادلوکې د k عددی قیمت داسې وټاکئ چې مستقیمونه له یو بل

سره عمودې وي، $2x - 6y + 3 = 0$ او $kx + 3y - 1 = 0$

$$kx + 3y - 1 = 0, 2x - 6y + 3 = 0$$

حل: د عمودیت شرط څېړو:

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

$$2 \cdot k + (-6)3 = 0 \Rightarrow k = 9$$

پونسني

د $4x + 3y - 1 = 0$ او $8x + 6y + 5 = 0$ کربنواحت، یو بل ته بیان کړئ.

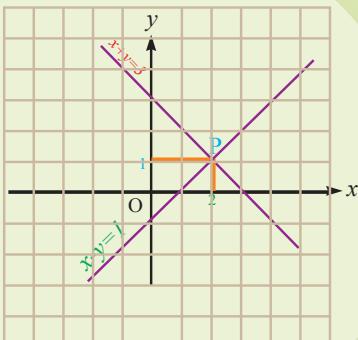
د $4x - 2y + 5 = 0$ او $8x - 4y + 10 = 0$ کربنواحت یو بل ته بیان کړئ.

د $(k+1)x + ky = 0$ او $2x - 3y + 5 = 0$ معادلوکې د k قیمت داسې وټاکئ چې

کربنې یوه له بلې سره موازي وي.

د خطی معادلو سیستم

(System of linear equations)



شکل ته پام و کړئ، آیا د P ټکي مختصات،
د کربنو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟

فعالیت

- د $y = 4x - 2$ او $y = 3x + 5$ د ګرسو میلونه پیدا کړئ.
- دا کربنې نظر یوې بلې ته خه اړیکې لري؟ ولې؟
- پورتنۍ دواړه کربنې، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شو یو کربنوتر منځ
خه اړیکه لیدل کېږي؟

په پورتنې فعالیت کې لیدل کېږي چې د هغه دوو کربنوتونه مساوی نه وي، یو بل د P په
ټکي کې قطع کوي.

څرنګه چې، تقاطع ټکي د دواړو کربنوتونه مخ پرائه دي، نو د هغه ټکي مختصات، د کربنوتونه
معادلو کې صدق کوي. که د تقاطع د ټکي مختصات، په $P(x, y)$ وبنیو، نو: $y = -3x + 5$
او $y = 4x - 2$ معادلو خخه لیکلای شو چې:

$$4x - 2 = -3x + 5$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

د کربنوتونه معادلو کې، د X قیمت په وضع کولو سره د y قیمت په لاس راولای شو:

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 \Rightarrow y = 2$$

نو د تقاطع ټکي مختصات عبارت دي له $(P(1, 2))$ په پایله کې ویلای شو چې

تکی داسې تکی دی چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري چې د $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ خطی معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

- مخامنځ، د خطی معادلو سیستم په پام کې ونيسي، $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ او $c_1, b_1, a_1, b_2, a_2, c_2$ د خه په نامه یادېږي؟
- په پورتنيو معادلو کې x او y ته خه ویل کېږي؟
- آیا ددې دوو کربنو د تقاطع د تکی، د مختصاتو د سیستم یو حل کېدای شي؟

د خطی سیستم د حل لپاره د (I) سیستم داسې لیکو چې په هغه حالت کې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

1- که چېږي، د دوو کربنو میلونه سره مساوی نه وي، نو دا کربنې یوه او بله، په یوه تکی کې قطع کوي.

2- که چېږي د کربنو میلونه سره مساوی وي، خود y محورې د تقاطع تکی سره مساوی نه وي، نو هغه وخت دا دوو کربنې سره موازي دي.

3- که چېږي د کربنو میلونه او د y محور سره، د تقاطع تکی مساوی وي، نو بیا هغه دوو کربنې سره منطبق وي.

لومړۍ مثال: د لاندې خطی معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره، نوموری سیستم په دې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y = 7 - x \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

لیدل کېري چې د پورتنيو کربنو د معادلو میلونه، 1- او 2- دی، خرنګه چې د دوو خطونو میلونه مساوی نه دی، نو کربنې يوه او بله په يوه تکي کې قطع کوي چې د تقاطع د تکي د مختصاتو د پيداکولو لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

$$-x + 7 = -2x + 5$$

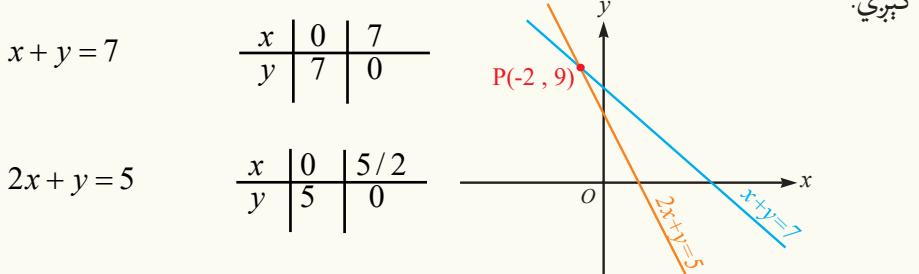
$$-x + 2x = 5 - 7 \Rightarrow x = -2$$

د کربنو په يوه معادله کې، د x پر خای د 2- په وضع کولو سره لرو چې:

$$y = -x + 7$$

$$y = -(-2) + 7 \Rightarrow y = 9$$

نو (9, 2)- د کربنو د معادلو د سیستم حل او د تقاطع خای دی چې په شکل کې لیدل



دویم مثال: د لاندې خطی معادلو سیستم حل کړئ.

حل: لوړۍ معادلي په لاندې ډول لیکو:

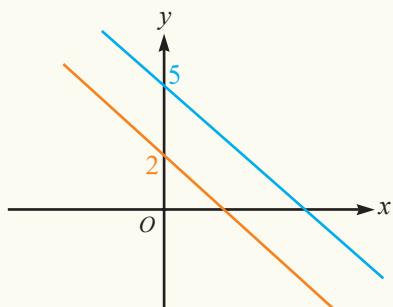
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 6y = -6x + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -\frac{6}{6}x + \frac{12}{6} \end{cases}$$

$$y = -x + 5$$

$$y = -x + 2$$

x	0	5
y	5	0
x	0	2
y	2	0



خرنګه چې د دواړو کربنو میل 1- دی، په پایله کې کربنې په خپل منځ کې موازي دي او يوه بله نه قطع کوي، یعنې د موازي کربنو د معادلو سیستم حل نه لري.

درېم مثال: د لاندې خطې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -2x = -4x - 4y \end{cases}$$

حل: لوړۍ د معادلاتو سیستم په لاندې ډول لیکو:

$$y = -x + 7$$

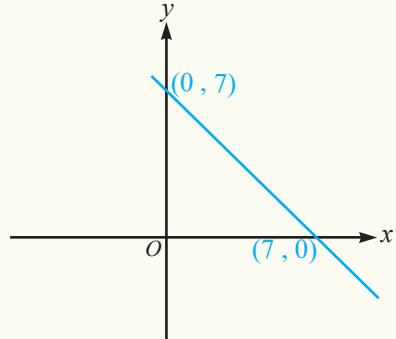
$$y = \frac{-4}{4}x + \frac{28}{4}$$

$$y = -x + 7$$

x	0	7
y	7	0

$$y = -x + 7$$

x	0	7
y	7	0



لیدل کېږي چې د کربنې میل او د y په محور د تقاطع تکي سره برابر دي، نو دواړه کربنې سره منطبق دي، په دې حالت کې کربنې ډېر ګډه تکي لري، په پایله کې د خطې معادلو سیستم ډېر حلونه لري.

که $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ د x و y مجھولونه د عدلونه او c_1 و c_2 حقيقی دی.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ دی.}$$

- که چېړې کربنې، یوه او بله په یوه تکي کې پړې کړي، معادلې یو حل لري.
- که چېړې کربنې یوه له بلې سره موازې وي، معادلې حل نه لري.
- که چېړې کربنې یو پر بل منطبق وي، معادلې پې ډېر حل لري.

پوښتني

د لاندې خطې معادلو سیستمونه حل کړئ:

$$1) \begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x - 2 = y \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4x - y = 6 \\ 8x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x - y = 6 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 x+y &= 4 \dots\dots\dots I \\
 x-y &= 6 \dots\dots\dots II \\
 y &= 4-x \\
 x - (4-x) &= 6 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

د خطی سیستم د معادلو حل ته پام وکړي
د X مجھول عددی قيمت، ستاسو په نظر
څنګه په لاس راغلی دی؟

فعالیت

- د یوه مثلث د دوو زاویو مجموعه، 100° او د تفریق حاصل بې، 20° دی، الجبری معادلې
بې ولیکۍ.
- د معادلاتو دا سیستم خو مجھوله لري؟ د هر یوه عددی قيمت پیدا کړئ؟
په لاس راغلی قيمتونه، د معادلاتو په سیستم کې واژمایي؟

له پورتنی فعالیت خخه د مسالې حل او د خطی معادلو سیستم د حل لاره، په لاندې ډول
داسې لیکو:

حل: که چېږي د مثلث زاوې په \hat{A} او \hat{B} نوموو پورتنی عبارت د الجبری معادلو په بنه
داسې لیکو:

$$\hat{A} + \hat{B} = 100^\circ \dots\dots\dots I$$

$$\hat{A} - \hat{B} = 20^\circ \dots\dots\dots II$$

$$\begin{aligned}
 \text{او د } \hat{A} \text{ زاوې قيمت، د } \hat{B} \text{ زاوې له جنسه، له لوړۍ معادلې خخه په لاس راوړو} \\
 \text{دا قيمت په دویمه معادله کې د } \hat{A} = 100^\circ - \hat{B} \text{ دا عوض وضع کوواو معادله حلولو:} \\
 100^\circ - \hat{B} - \hat{B} = 20^\circ \Rightarrow -2\hat{B} = -80^\circ \Rightarrow \hat{B} = 40^\circ \\
 \text{او س د } \hat{B} \text{ قيمت، د خطی معادلاتو په سیستم کې وضع کوو چې د } \hat{A} \text{ قيمت په لاس} \\
 \text{راخی:} \\
 \hat{A} - \hat{B} = 20^\circ
 \end{aligned}$$

$$\hat{A} - 40^\circ = 20^\circ \Rightarrow \hat{A} = 20^\circ + 40^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

دویم مثال: لاندې د دوه مجھوله معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

حل: لوړۍ د یوه مجھول قيمت، د بل مجھول له جنسه، د یوې معادلي خخه په لاس راورو او په بله معادله کې یې وضع کړو:

$$2x + 3y = 0 \Rightarrow 2x = -3y \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 10 \\ 3(-\frac{3}{2}y) + 2y = 10 \\ -\frac{9}{2}y + 2y = 10 \\ \frac{-9+4}{2}y = 10 \\ -5y = 20 \Rightarrow y = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}(-4) \\ x = -3(-2) \\ x = 6 \end{array}$$

د دوه مجھوله، لوړۍ درجو معادلو سیستم د حل لپاره، په لاندې ډول عمل کړو:

• د یوه مجھول قيمت، د بل مجھول له جنسه، د یوې معادلي خخه په لاس راورو او هغه په بله معادله کې د هغه په عوض وضع کړو.

• په لاس راغلې یو مجھوله لوړۍ درجه معادله حللو او د مجھول قيمت په لاس راورو.

• دا په لاس راغلې مجھول قيمت، د سیستم په معادلو کې وضع او د بل مجھول قيمت، په لاس راورو.

• په لاس راغلې قيمتونه، د سیستم په معادلو کې وضع کړو که سم له لاسه، په دواړو معادلو کې یې حقیقت ولري، د معادلي حل سم او پرته له هغه، د معادلي حل نه او سم نه دي.

پوښتني

د لاندې سیستمونو حل، په تعويضي طریقه په لاس راوري:

$$1) \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 7x - 2y = 15 \\ 6x - y = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a - 3b = 25 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{y+2}{4} = 4 \\ \frac{x+3}{3} = \frac{x-y}{3} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 7 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{2} = -4 \end{cases}$$

$$x + y = ?$$

$$\frac{1}{3}x + y = ?$$

$$x = ?$$

$$y = ?$$

حمیرا، زحل ته وویل: که ته خپلې پیسې
ما ته راکړې، زه د 15 افغانيو خښته
کېږم، زحل حمیرا ته وویل: که ته د خپلې
پیسو درېمه برخه ما ته راکړې، زه د 5 افغانيو
څښته کېږم، هره یوه خو افغانۍ لري؟

فعالیت

- د معادلو یو سیستم ولیکي چې دوو معادلې او دوی مجھوله ولري؟
- نوموری سیستم، د ګراف په مرسته حل کړئ.
- نومورې معادلې، په تعویضی طریقه حل کړئ.
- آیا بله طریقه شته، چې نومورې معادلې پرې حل شي؟

یوه بله لاره چې د دوو مجھوله معادلو سیستم پرې حلولای شو، د افنا طریقه یا لاره ده چې به
لاندې مثال کې بې څېرو.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 & \text{I} \\ 5x - 2y = 7 & \text{II} \end{cases}$$

مثال: د خطی معادلو دا سیستم حل کړئ.

حل: لوړۍ معادلو ته داسې بدلون ورکوو چې که هغوي خوا په خوا سره جمع یا تفریق کړو،
نو له مجھولونو خخه یو مجھول افنا یا له منځه لار شي، که د x مجھول وغواړو چې افنا یې
کړو، د لوړۍ معادلې دواړه خواوې، د دویمې معادلې د x په ضربې یعنې(5) کې ضربوو او
د دویمې معادلې دواړه خواوې، د لوړۍ معادلې د x په ضربې یعنې(7) کې ضربوو.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 205 & \Rightarrow 35x + 25y = 205 \\ 5x - 2y = 7 & \Rightarrow 35x - 14y = 49 \end{cases}$$

په لاس راغلي معادلې چې په هغه کې د x ضربونه مساوی دي، یو له بل خخه تفریقوو.

$$35x + 25y = 205$$

$$\begin{array}{rcl} 35x - 2y = 49 & \Rightarrow y = \frac{156}{39} & \Rightarrow y = 4 \\ - + - \\ 39y = 156 \end{array}$$

د y په لاس راغلی قيمت، د سيسنتم په يو معادله کې وضع کوو، تر خود بل مجھول قيمت په لاس راشي:

$$5x - 2y = 7$$

$$5x - 2(4) = 7 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

دويم مثال: د معادلو لاندي سيسنتم، د افنا په طريقه حل کړئ:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

حل: لومرۍ يو مجھول له منځه ورو، لکه: y ، نو لومرۍ معادله، په 3-کې او دويمه معادله په 3-کې ضربوو، په لاس راغلی معادلې خوا په خوا سره جمع کوو:

$$\begin{array}{lcl} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -9x - 6y = -12 \\ 4x + 6y = 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 3\left(\frac{10}{13}\right) + 2y = 4 \\ 2y = 4 - \frac{30}{13} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{30}{13} + 2y = 4 \\ 2y = \frac{52 - 30}{13} \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} -13x + 0 = -10 \\ x = \frac{10}{13} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2y = \frac{22}{13} \\ \Rightarrow y = \frac{11}{13} \end{array} \right. \end{array}$$

د دوه مجھوله معادلو سيسنتم د افنا په طريقه داسي حلولو:

- هر مجھول چې وغوارو، هغه افنا کرو، د هغې ضربونه په پام کې نيسو. لومرۍ معادله د دويمې معادلې د افنا شوي مجھول په ضرب کې او دويمه معادله، د لومرۍ معادلې د افنا شوي مجھول په ضرب کې ضربوو.

- په لاس راغلی معادلې يوه له بلې خخه تفرقه يا جمع کوو چې د يوه مجھول قيمت په لاس راخې، دا په لاس راغلی قيمت د سيسنتم په يوه معادله کې وضع کوو چې د بل مجھول قيمت په لاس راخې.

پوبستني

د معادلو لاندي سيسنتم د افنا په طريقه حل کړئ.

$$1) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = -39 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

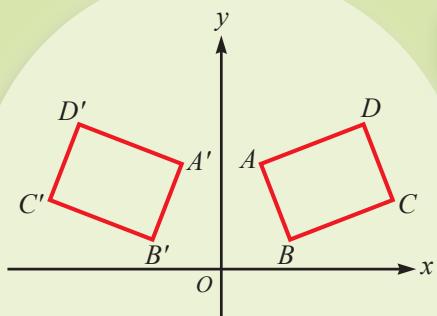
$$4) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{10}{y} = 18 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 10x + 3y = 26 \\ 8x + 3y = 18 \end{cases}$$

د ځای بدلون(تغییر مکان)

(Transformation)



$$(x, y) \xrightarrow{T} (-x, y)$$

په مخامنځ شکل کې کوم توپیرونه او خه ډول یووالی وینئ؟
ډول یووالی وینئ؟

فعالیت

- په مخامنځ شکل کې کوم توپیرونه او خه ډول یووالی وینئ؟
- د (1,2), A(2,-4), B(-2,3) او C(2,-2) په د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکي.
 - ددې ټکو د x په مختصه باندې، ۲ واحد در زیات کړئ.
 - په لاس راغلی ټکي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښی.

په پورتنې فعالیت کې ولیدل شول چې هر اختياری ټکي (x, y) په یوه مستوی کې کولای شو د $(y, x+2)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو چې په لاس راغلی ټکي د راکړل شوی ټکي خپري یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دی، هغه اړیکه چې د مستوی د هر ټکي د وضعیه کمیاتو په مستوی کې یوازې او یوازې، یوه نوی ټکي ته نسبت ورکړئ په مستوی کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کړي.

لومړۍ مثال: د $D(1,2)$, $E(4,1)$ او $C(2,4)$ ټکو خپري یا تصویر، د لاندې بدلون پر بنست د وضعیه کمیاتو په مستوی کې په لاس راوړئ.

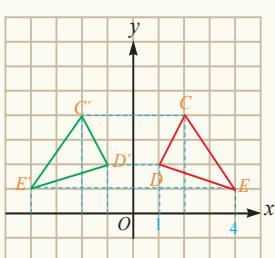
$$a: (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$$

$$b: (x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$$

$$c: (x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$$

$$d: (x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$$

حل: لومړۍ راکړل شوی ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکو:

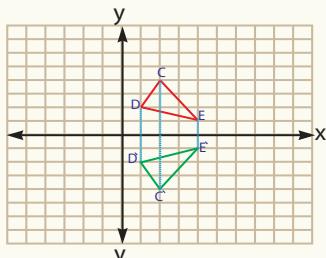


د a : $(x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$ تر بدلونې لاندې لرو چې:

$$T(4,1) = (-4,1)$$

$$T(1,2) = (-1,2)$$

$$T(2,4) = (-2,4)$$

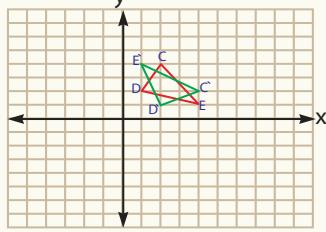


د b : $(x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$ تریدلون لاندی لرو چې:

$$R(4,1) = (4, -1)$$

$$R(1,2) = (1, -2)$$

$$R(2,4) = (2, -4)$$

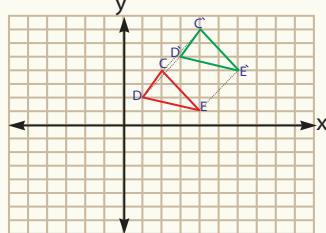


د c : $(x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$ تریدلون لاندی لرو چې:

$$M(4,1) = (1,4)$$

$$M(1,2) = (2,1)$$

$$M(2,4) = (4,2)$$



د d : $(x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$ تریدلون لاندی لرو چې:

$$S(4,1) = (6,4)$$

$$S(1,2) = (3,5)$$

$$S(2,4) = (4,7)$$

په پورتنيو مثالونوکې بنودلای شو چې د خای په بدلونونو سره د تکو ترمنځ واتېن، توپیرنه کوي.

د مثال په چول: که $c' = c$ او $T(c) = T(E)$ وی، نو $E' = EC$ د.

هغه بدلونونه چې د تکو ترمنځ واتېن ساتې، ايزومترۍ (Isometry)، بلل کېږي.

که یوشکل د ايزومترۍ په چول خپل خای بدل کړي، نو د اصل خپري یا شکل سره انطباقي منونکي دی.

پونسني

-1 د $(3,3), (-2,-2), (-3,1), (1,-1)$ او $(-3,1), (-2,-2), (3,3)$ تکو تصویر د لاندېنيو بدلونونو پر بنست د وضعیه کمیاتو په سیستم کې په لاس راوړئ.

$$a: (x, y) \xrightarrow{T} (x-1, y+2)$$

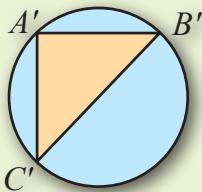
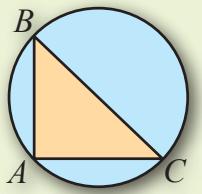
$$d: (x, y) \xrightarrow{R} (0, y-2)$$

$$b: (x, y) \xrightarrow{D} (2x, y)$$

$$e: (x, y) \xrightarrow{P} (3x-1, y+2)$$

$$c: (x, y) \xrightarrow{K} (x+5, 0)$$

انتقال (Translation)



په مخامنځ شکل کې، د $\triangle ABC$ مثلث چې په مستوی کې یې له لومړي حالته، دوم حالت، $\triangle A'B'C'$ غوره کړي دی، تاسو کولای شئ چې ددې حرکت د خای بدلون شرح کړئ؟

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوی کې د $\triangle ABC$ مثلث رسم او مختصات یې ولیکي.
- د $\triangle ABC$ مثلث رأسونه د محور په مثبت جهت، د (2) واحد په اندازه او د y محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړي، نويو حاصل شويو تکوته A' , B' , او C' ووایي.
- د A' , B' , او C' ټکي یو له بل سره وترې او د $\triangle A'B'C'$ مثلثونه، د اضلاعو د اوردوالي اوظاهري شکل له مخې پرتله کړي.

که چېږي، د یوه شکل تول ټکي په یوه تاکلی جهت (لوری) او یو واتېن حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دی، دې حرکت ته انتقال وایي او هغه په

$$\text{دې ډول بنودل ټکري: } T(x, y) = (x + h, y + k) \text{ او } h \text{ وو } k \text{ حقيقی عددونه دی.}$$

- لومړۍ مثال:** د (1,-5), C(0,0), B(3,4), A(2,-1) او E(-3,2) د وضعیه کمیاتو په سیستم کې د $T(x, y) = (x - 1, y + 2)$ انتقالی رابطې په اساس وښیئ.
- حل:** لومړۍ راکړل شوي ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښیئ اوبيا هغه ټکي چې د $T(x, y) = (x - 1, y + 2)$ اړیکې خخه لاسته راخي په لاس راوري.

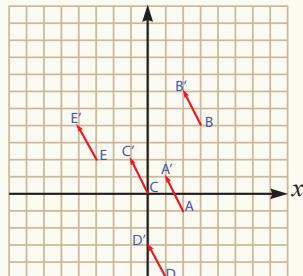
$$A(2, -1), T_A(2-1, -1+2) = (1, 1)$$

$$B(3, 4), T_B(3-1, 4+2) = (2, 6)$$

$$C(0, 0), T_C(0-1, 0+2) = (-1, 2)$$

$$D(1, -5), T_D(1-1, -5+2) = (0, -3)$$

$$E(-3, 2), T_E(-3-1, 2+2) = (-4, 4)$$



په پورتني مثال کې، د تکوله تړلواخه د شکل خبره لاسته راخي، ليدل کېږي چې د $\overline{EE'}$ او $\overline{DD'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{AA'}$ يوله بل سره موازي او مساوي دي.

دویم مثال: که چېري (6,1), C(6,5), B(8,3), A(4,3) او D(4,3) د یوې مریع راسونه وي، هغه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې تردي $T(x, y) = (x - 5, y - 2)$ اړیکې لاندې رسم کړئ.

الف: د مریع د اضلاع ګانو اوږدوالي اوصویر، نظر یوبل ته پرتله کړئ.

ب: د مریع د اضلاع ګانو میل اوڅېره یې، نظر یوبل ته پرتله کړئ.

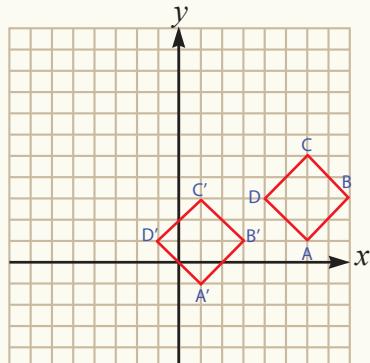
حل: د ABCD منطقله مریع ترانقال لاندې د $A'B'C'D'$ خلور ضلعې ده.

$$A(6,1), T_A = (6-5, 1-2) \Rightarrow A' = (1, -1)$$

$$B(8,3), T_B = (8-5, 3-2) \Rightarrow B' = (3, 1)$$

$$C(6,5), T_C = (6-5, 5-2) \Rightarrow C' = (1, 3)$$

$$D(4,3), T_D = (4-5, 3-2) \Rightarrow D' = (-1, 1)$$



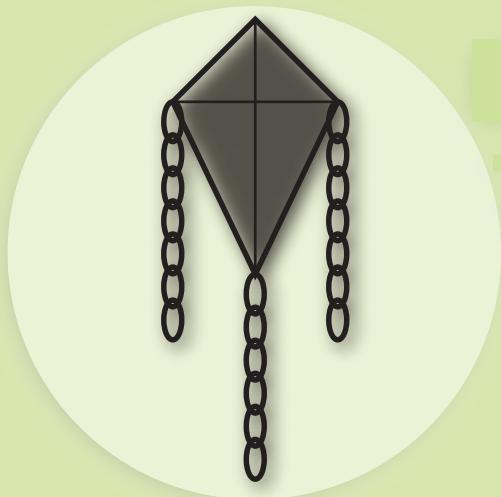
د (الف) او (ب) جزونو د زده کوونکو کورنې دنده ده.
اتقال یو ایزومتری رابطه ده.

پښتني

۱- که د $P(3,3)$ او $O(2,5)$, $N(2,-5)$, $M(1,-1)$ یوه خلور ضلعې وي، خلور ضلعې او د هغې تصویر تر دې رابطي $T(x, y) = (x + 9, -y)$ لاندې رسم کړئ.

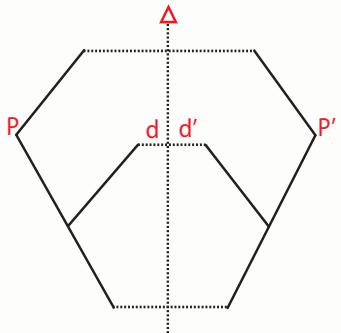
۲- که (5,3) او $L(7,0)$, $I(5,0)$ د یوه مثلث رأسونه وي، مثلث او د هغې تصویر یاڅېره د بدلون پرښت رسم کړئ. $F(x, y) = (-y + 3, x - 3)$

انعکاس (Reflection)



د کاغذ پران خبری ته پاملننه وکړئ،
ستاسو په نظر دا کاغذ پران نسبت کوم یوه
قطر ته متناظردي؟

فعالیت



- د یوې صفحې په نیمايی کې یوشکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کربنې په داسې رنګ رسم کړئ چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ چې د قات شوې لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، ووایئ چې کوم شکل د اصلی شکل مخامنځ پروت او د دوی ترمنځ خه توپیر دی؟

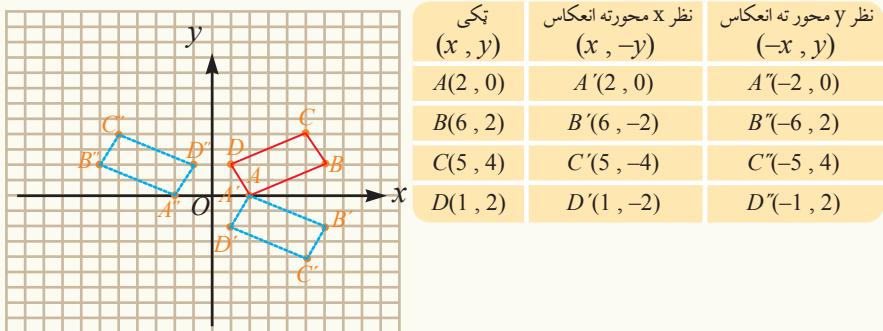
تعريف

که چیرې د P شکل یا خیرې هر ټکي، d' شکل یا خیرې په هر ټکي کې داسې بدل شي چې د P شکل یا خیرې د هر ټکي واتن، نظر Δ محورته d' د شکل د هر ټکي واتن سره مساوي وي، دې بدلون ته نظر Δ محورته انعکاس وایي او Δ محور ته، د انعکاس محورو ایي.

لومړۍ مثال: که چیرې د $A(2,0)$, $B(6,2)$, $C(5,4)$ او $D(1,2)$ ټکي د یوه مستطيل رأسونه وي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې مستطيل رسم، خېړه او تصویرې نظر x او y محورته رسم کړئ.

حل: که چیرې د $ABCD$ مستطيل خېړه نظر y محور ته رسم کړو په دې حالت کي یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلېږي او که چیرې خېړه یا تصویرې نسبت x محورته رسم کړو

یوازی د y مختصه یې، په $(-y)$ بدليپوي، لکه خرنگه چې په شکل کې ليدل کيږي.



- د لېردونه، نسبت y محورته یو انعکاس دي.
د لېردونه، نسبت x محورته یو انعکاس دي.
د لېردونه، نسبت $y = x$ مستقيم ته یو انعکاس دي.

پونسني

1- که $C(3,1)$ او $B(7,1)$, $(A(3,1)$ د یوه مثلث رأسونه وي، مثلث او د هغې تصویر یا خبره د لاندې ورکړل شویو د انعکاسي اړیکو پر بنسته رسم کړي.

$$a : R_1(x, y) = (-x, y)$$

$$b : R_2(x, y) = (x, -y)$$

$$c : R_3(x, y) = (y, x)$$

$$d : R_4(x, y) = (-y, -x)$$

2- که چېري $D(2, -3)$ او $C(-3, -5)$, $(B(-5, 0)$, $A(0, 2)$ ، مرتع

او د هغې تصویر د $R(x, y) = (-x, -y)$ انعکاسي اړیکې پر بنسته رسم کړي.

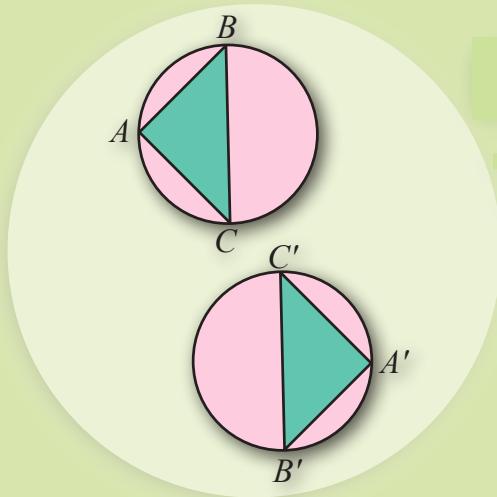
3- د $C(5, 1)$ او $B(3, -2)$, $(A(1, 4)$ د یوه مثلث رأسونه وي، د $\triangle ABC$ مثلث تصویر یا خبره،

تر انعکاس لاندې نسبت لاندې کړښو ته:

$$\bullet \quad x + 2 = 0 \quad \text{رسم کړئ او په } A'B'C' \text{ یې ونوموئ.}$$

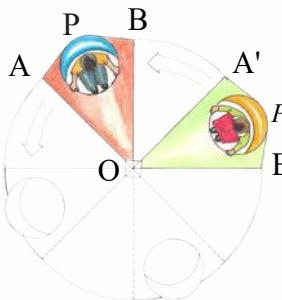
$$\bullet \quad y + 3 = 0 \quad \text{رسم کړئ او په } A''B''C'' \text{ یې ونوموئ.}$$

دوران (Rotations)



په مخامنخ شکل کې د $\triangle ABC$ د مثلث په مستوی کې حرکت کړي او د $\triangle A'B'C'$ د نوي خایي پې نیولی دي، تاسې کولای شي د دې چول بلدون حرکت شرح کړي؟

فعالیت



- مخامنخ مدل د ماشومانو د لویو د خرڅ ده بېلاپل خایونه رابنېي.
- له شکل خڅه لیدل کېږي چې A د A' ټکي متناظر او B د B' ټکي متناظر دي، د $\angle A'OA$ او $\angle B'OB$ زاوېي اندازه کړي او یوه له بلې سره پرتله کړي؟
- اوس د خرڅ د خوکې په لوړۍ خایي یوېکي وټاکۍ او هغه په P نونموي.
- P ټکي متناظر ټکي، د خوکې په دویم خایي کې پيداکړي او هغه P' نونموي.
- د $\angle POP'$ زاوېي اندازه کړي.

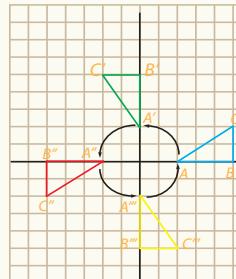
د پورتني فعالیت په پام کې نیولو سره، دوران په مستوی کې د لېړدونې په عنوان داسې تعريفو:

که یوشکل په یوه مستوی کې د یوه ټاکلې ټکي په شاوخوا د α زاوېي په اندازه دوران وکړي تول ټکي یې د α زاوېي په اندازه دوران کوي، په دې حالت کې، د O ثابت ټکي د دوران مرکز او د α ثابته زاوېي ته د دوران زاوېه وايي.

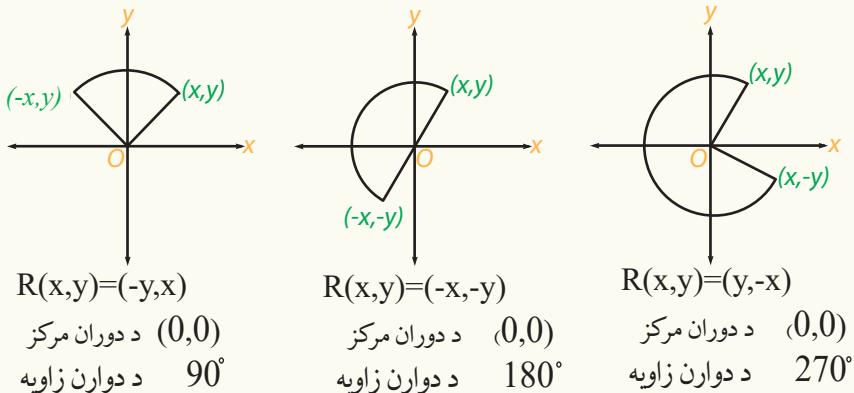
مثال: د $C(5,2)$ او $B(5,0)$, $A(2,0)$ د یوه مثلث رأسونه دي، د وضعیه کمیاتو په مستوی کې د $\triangle ABC$ مثلث او د هغه خېره یا تصویر لاندې تبدیل ورکړ شویو اړیکو په اساس رسم او یا هريو بلدون تشریح کړي.

الف: $R(x, y) = (y, -x)$: ج $R_2(x, y) = (-x, -y)$ ب: $R_1(x, y) = (-x, y)$
 حل:

ټکي	خپره (تصویر)		
(x, y)	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$
$A(2, 0)$	$A'(0, 2)$	$A''(-2, 0)$	$A'''(0, -2)$
$B(5, 0)$	$B'(0, 5)$	$B''(-5, 0)$	$B'''(0, -5)$
$C(5, 2)$	$C'(-2, 5)$	$C''(-5, -2)$	$C'''(2, -5)$



په شکل کې ليدل کېږي چې د R_3 , R_2 او R_1 بدلونونه، د وضعیه کمیاتو د مبدأ په مرکز دورانو، په ترتیب د 180° , 90° او 270° زاویوسره دي.



پونسني

1- که $C(7,1)$ او $B(6, -2)$ او $A(0,0)$ د یوه مثلث رأسونه وي.

الف: د $R(x, y) = (-y, x)$ ترتبدیل لاندې د ABC مثلث شکل او تصویر رسم کړئ.

ب: د مثلث د اضلاع ګانو او بردواالی د هغه له تصویر یا خپرې سره پرتله کړئ. آیا دا دوران یو ایزومنتري دی؟

2- که $D(-3,2)$ او $C(5,6)$, $B(7,2)$, $(A(-1,-2)$ د یو مستطیل رأسونه وي.

الف: $R(x, y) = (-y, -x)$ تر دوران لاندې مستطیل او د هغه تصویر یا خپرې رسم کړئ.

ب: د مستطیل د اضلاع ګانو او بردواالی او مساحت، د هغه له تصویر یا خپرې سره پرتله کړئ.

د درېم خپرکي لندېز:

- په یوه مستوی کې چې دوه افقی او عمودي محورونه یو بل په عمودي توګه قطع کړي، د وضعیه کمیاتو د سیستم په نامه یادېږي.
- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې افقی محورته، د فاصلې یا واتېن محور او عمودي محورته، د ترتیب محور او د تقاطع ټکي ته بې مبدأ وايی.
- د A او B دوو ټکو تر منځ واتېن، د $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ اړیکې خخه لاسته راخی.
- د یوې کربنې د منځ ټکي مختصات د $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ خخه لاسته راخی.
- هغه کربنې چې د Δ مختصه بې صفر وي د منځ ټکي مختصات بې $(0, \frac{x_1 + x_2}{2})$ دی.
- هغه کرسنه چې د X مختصه بې صفر وي، د منځ ټکي مختصات بې $(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$ د هرې مستقیمې کربنې میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ له اړیکو خخه لاسته راخی.
- د هر مستقیم خط میل، په هغه زاوې پوري اړه لري، چې مستقیم بې د X محور له مثبت جهت سره جوړ وي.
- هر مستقیم، چې د x محور د مثبت جهت سره حاده زاویه جوړه کړي، میل بې مثبت او که منفرجه زاویه جوړه کړي، میل بې منفی دی.
- موازی مستقيمهونه، د مساوی ميلونو لرونکي دي.
- هر مستقیم خط چې له x محور سره موازی وي، میل بې صفر او هر مستقیم خط چې د x پر محور عمود وي، میل بې نه دیتعريف شوي.
- دوہ مستقیم خطونه هغه وخت یو پرېل عمود دي چې د ميلونو د ضرب حاصل بې (1) وي.
- درې ټکي هغه وخت په یوې کربنې پرانه دي چې د هر قطعه خط ميلونه بې سره مساوی وي.
- د وضعیه کمیاتو په مستوی کې د یوه ټکي هغه اړیکه چې یوازې او یوازې یوه نوی ټکي ته نسبت ورکړي، یوه لېبدونه یاتغیر مکان بلل کېږي.
- که چېږي د یوه شکل ټولو ټکو ته، په یوه ټاکلي جهت او یوه واتېن کې حرکت ورکړو، په لاس راغلې شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي او دې حرکت ته انتقال وايی.
- که په یوه مستوی کې یوشکل د یوه ټاکلي ټکي په شاوخواد α زاوې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي بې په عین زاویه دوران کوي چې دې حرکت ته دوران وايی.

د درېم څېرګي پوښتني

• په لاندي پوښتنوکي هري پوښتنې ته خلورخوابونه ورکړ شوي دي، سم خواب وټاکي.

1- د دوو عمودي کربنود ميلونو د ضرب حاصل:

$$(d) \text{ منفي يو دي.} \quad (c) \text{ صفر دي.} \quad (b) \text{ د دى.} \quad (a)$$

2- د مستقيمي کربنې معادله چې له y محور سره يې د تقاطع ټکي او ميل يې بنکاره وي، عبارت له:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (d) \quad y = mx + b \quad (c) \quad y = b \quad (b) \quad y = mx + c \quad (a)$$

3- د هغې کربنې معادله چې دوه ټکي يې بنکاره وي، عبارت له:

$$y = mx \quad (d) \quad \frac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1} \quad (c) \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (b) \quad y = mx + b \quad (a)$$

4- د هغې کربنې معادله چې دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دي له: $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$

$$M(0, 0) \quad (d) \quad M\left(0, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad (c) \quad M\left(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0\right) \quad (b) \quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right) \quad (a)$$

5- د هغې کربنې معادله چې دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دي له: $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$

$$M(0, 0) \quad (d) \quad M\left(0, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad (c) \quad M\left(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0\right) \quad (b) \quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right) \quad (a)$$

6- د هغې کربنې معادله چې دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دي له: A او B

$$AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2} \quad (b) \quad AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \quad (a)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (d) \quad AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2} \quad (c)$$

7- د ډیو ټکي او د وضعیه کمیاتو د مبدأ ترمنځ واتېن، عبارت دي له:

$$AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2} \quad (b) \quad AB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (a)$$

$$AB = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (d) \quad AB = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (c)$$

8- د ډیو مستقيمي کربنې ميل عبارت دي له:

$$m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \quad (d) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (c) \quad m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \quad (b) \quad m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (a)$$

9- دوو مستقيمونه هغه وخت یو له بل سره موازي وي چې:

a: ميلونه يې مساوی وي.
b: هغه ميلونه سره مساوی وي.

c: د ميلونو د ضرب حاصل يې منفي یو وي.
d: ټول خوابونه سم دي.

- لاندې تشن خایونه، په مناسبو کلمو سره ڏک کړئ:
- ۱- د وضیعه کمیاتو په سیستم کې، $D X$ محورته، D او محورته د واي.
 - ۲- په دويمه ناحیه کې هغه ټکي پرائه دی چې X یې او Y یې دی.
 - ۳- په دربمه ناحیه کې هغه ټکي پرائه دی چې X او Y دواړه دی.
 - ۴- هغه مستقيم چې $D X$ محور له مثبت جهت سره مساوي حاده زاویه جوره کړي، ميل یې دی.
 - ۵- دوه مو azi مستقيمي کربنې چې $D X$ محورد مثبت جهت سره مساوي جور وي.
 - ۶- $D X$ له محورسره د هر مو azi مستقيم ميل دی.
 - ۷- درې ټکي، هغه وخت په یوه مستقيمه کربنې پرائه وي چې د ټوپه کربنو سره مساوي وي.
 - ۸- که د دووکربنو ميلونه، له یوبل سره مساوي نه وي، داکربنې دی.
- لاندې جملې، کومې سمې اوکومې یې ناسمې دی، د سموېه مخ کې (ص) توری او د ناسمې په مخ کې د (خ) توری ولیکي.
- ۱- () که د وضیعه کمیاتو په مستوي کې د هر ټکي لپاره يوازې او يوازې یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ، په مستوي کې بدلون رامنځ ته کېږي.
 - ۲- () که د P شکل هر ټکي $D P'$ شکل په یوه ټکي داسي تبدیل شي چې $D P$ د شکل د هر ټکي واتن، نظر یوه محورته، $D P'$ د شکل له هر ټکي سره مساوي وي، دې بدلون ته انعکاس واي.
 - ۳- () $T(x, y) = (-x, y)$ بدلون، نسبت y محورته، یوانعکاس دی.
 - ۴- () $T(x, y) = (x, -y)$ بدلون، نسبت x محورته، یوانعکاس دی.
 - ۵- () $T(x, y) = (y, x)$ بدلون، نسبت $x = y$ مستقيم ته، یوانعکاس دی.
 - ۶- () انتقال هغه تغییر مکان یا لېردونه ده چې په هغه کې د واتنوو او د زاویو پراخوالی ثابت پاتې شي.
 - ۷- () که په مستوي کې یوشکل (O) د ټاکلي ټکي په شاوخوا، د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي، د هغې ټول ټکي په عین زاویه دوارن ګوي.

• لاندې سوالونه حل کړئ:

1- لاندې تکي چې وضعیه کمیات یې ورکړ شوي دي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وتاکئ.

$$1: (0,1) \quad 2: (2,3) \quad 3: (0, -4) \quad 4: (5,0)$$

2- د لاندې ټکو د جورو ترمنځ واتېن چې وضعیه کمیات یې ورکړل شی بنکاره کړئ.

$$1: (0,9), (-5,4) \quad 2: (4,1), (3, -2) \quad 3: (-7,4), (1, -11)$$

3- دا وسیع چې لاندې تکي د یوه قایم الزاویه مثلث رأسونه دي او هم د مثلث مساحت پیدا کړئ.

$$1: (0,9), (-4,-1), (3,2) \quad 2: (3,-2), (-2,3), (4,-4)$$

4- دا خرګند کړئ چې لاندې ورکړ شوي تکي، د یوې مستقيمي کربنۍ له پاسه پراته دي.

$$1: (0,4), (3,-2), (-2,8) \quad 2: (1,2), (-3,10), (4,-4)$$

5- د یوې مستقيمي کربنې میل او یو تکي په لاندې ډول ورکړل شوي، د هغې معادله په لاس راوري.

$$1: (2,3), m = -\frac{1}{2} \quad 2: (-4,1), m = -\frac{2}{3} \quad 3: (-1,-4), m = -2$$

6- که د یوه مستطيل رأسونه $(-3,1), (-1,3), (3,-1)$ او $(-3,1), (1,-3)$ وي، مساحت یې پیدا کړئ.

7- که د یوه متوازي الاصلع رأسونه $(5,9), (2,4), (4,9)$ او $(1,4)$ وي، د قطرونو اوردوالي یې پیدا کړئ.

8- را وسیاست چې د $(-3,1), (-9,4), (12,0)$ او $(6,3)$ د یوه متوازي الاصلع رأسونه دي.

9- که $(1,-3), (5,0)$ او $(-3,2), (5,0)$ د یوه مثلث رأسونه وي د اصلع گانو د منحنۍ تکي وضعیه کمیات په لاس راوري.

10- ثبوت کړئ:

الف: چې د مرتعې قطرونه یو پریل عمود دي.

ب: چې د مستطيل قطرونه یو پل نیمايې کوي.

11- هغه مستقيم چې د $A(3,-1), B(5,3)$ او $P(4,5)$ له ټکي خخه تپر شي او په ترتیب سره د یې پیدا کړئ.

12- د هغه مستقيم معادله پیدا کړئ چې $T(x,y) = (-y+3, x-3)$ له ټکي خخه تپر شي او په ترتیب سره د x او y له محورونو سره موازي وي.

13- که چېږي $C(5,3), A(5,0)$ او $B(7,0)$ د یوه مثلث رأسونه وي.

الف: د $T(x,y) = (-y+3, x-3)$ ترتیب لاندې مثلث او د هغه تصویر یا خېړه رسم کړئ.

ب: د ABC مثلث تصویر، د $(x, y) = (-y, x)$ تر دوران لاندې پیدا کړئ او هغه ته $T(x, y) = (x+3, y-3)$ تصویر یا خېړه د ترانقال یا پردونې $A'B'C'$ ووای؛ وروسته د لاندې وتاکئ.

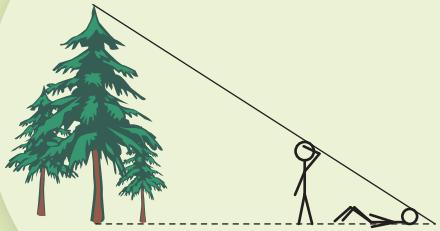


خلورم خپرگی

متلثات



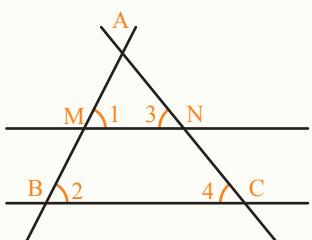




دوه زده کوونکي له يوبل سره خبرې کوي چې ديوې ونې جګ والي خنګه اندازه کري، په دوى کې يو په حمکه او برد پربوت او له خپل ملګري خخه يې وغونښتل چې دومره حرکت وکړي چې د ده سر او د ونې خوکه په يوه مستقيمه کربنه سره ووئني. د زده کوونکي په غونښته سوچ وکړي.

فعاليت

- د $\triangle ABC$ په مثلث کې، $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دی. د هري ټوټه کربنې اندازه، د خط کش په واسطه پیدا او په تشو څایونو کې بې ولیکي؟



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}}$$

- هغه زاوې چې يوه له بلې سره مساوي ده وښي؟

د $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}, \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ او $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{AN}}{\overline{BC}}$ نسبتوټه پیدا او يوله بل سره خه اړیکه لري؟

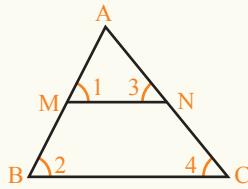
له پورتني فعالیت خخه د تالس قضيي داسې بیانوو؟

قضيي: که د $\triangle ABC$ مثلث په يو په ضلعې يا خنديې، موازي کربنه رسم کړو، د تشکيل شوي مثلث د اضلاعو نسبت، د $\triangle AMN$ مثلث پر اضلاعو يو له بل سره مساوي دي. دا قضيي په مثلث کې د تالس قضيي په نامه يادېږي.

ثبت: خرنګه چې د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دی، نوکولای شو ولیکو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \dots \dots \text{متوافقه} \\ \hat{3} = \hat{4} \dots \dots \text{متواافقه} \\ \hat{A} = \hat{A} \dots \dots \text{مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMN$$

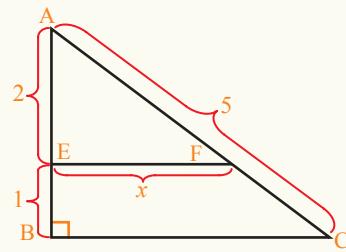
$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$



لومړۍ مثال: د $\triangle ABC$ په قایم الزاویه مثلث کې \overline{BC} له \overline{EF} سره موازي دی په پام کې ونيسي، د قایمو اضلاعو اود \overline{EF} د موازي کربنې او بردواли پیدا کړئ؟

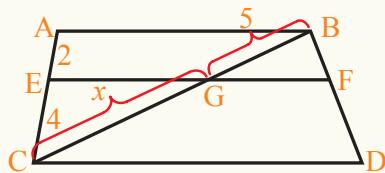
حل: خرنګه چې د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ سره دي، نو د تالس د قضيې پرنسپ دا دوه مثلثونه سره ورته يا مشابه دي، نو کولای شو ولکو چې:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} & \left| \begin{array}{l} \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \\ \frac{2}{3} = \frac{x}{4} \end{array} \right. \\ AC^2 &= BC^2 + AB^2 & 2 \\ 5^2 &= BC^2 + 3^2 & 3 \\ BC^2 &= 25 - 9 = 16 & 4 \\ BC &= 4 & 5\end{aligned}$$



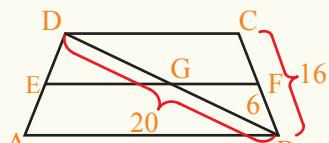
دویم مثال: په لاندې ذوقنه کې، $\overline{EF} \parallel \overline{BA}$ دی، د x مقدار وټاکي.

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}} &= \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \text{ یا } \frac{\overline{CG}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AE}} \\ \frac{x}{4} &= \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{20}{2} \\ x &= 10\end{aligned}$$

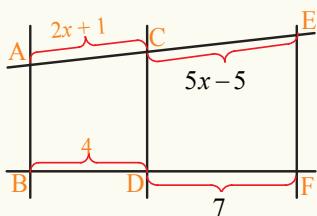


پونسني

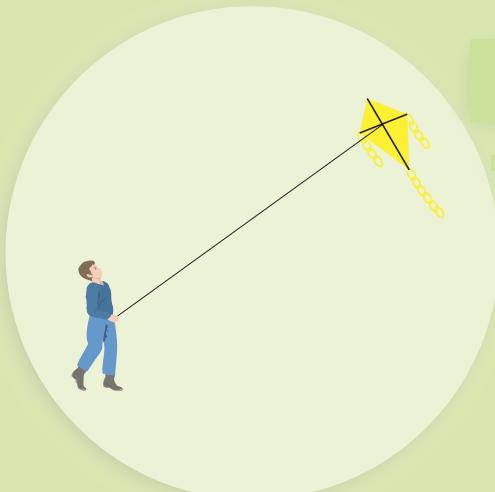
1- د ذوقنو په لاندې شکلونو کې د x مقدار وټاکي؟



2- په لاندې شکل کې، که $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ او $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$ وي، د x مقدار وټاکي؟



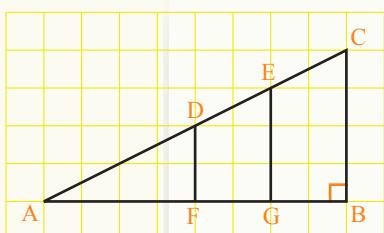
د یوی حاده زاویې ساین



که یو کاغذ پران په هوا کې د الولو په
حالت کې وي، کولاي شئ واتنې يې له
Ҳمکې خخه په لاس راوري؟

فعاليت

- په قایم الزاویه مثلث کې، د \overline{AC} په وتر باندي د D او E تکي تاکل شوي دي. له دې تکو خخه د مثلث په \overline{BC} ضلعه موازي رسم کړئ او د تقاطع تکي يې، په وار سره F او G نوموو.
- له خط کش خخه په ګټي اخیستنې سره، د مثلث اضلاعوې اندازه او د $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$ نسبتونه محاسبه او پرتله يې کړئ؟



- ایا د E او D تکو د څای په بدلون سره د $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ او $\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ د $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ ديوه تکي په تاکلو سره هغه وڅېږي.
- د AC د څای په بدلون، د \hat{A} زاوې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کېږي.

- اوس \overline{AC} ثابت پرېږدئ او د \hat{A} زاوې ته زیاتنوالي ورکړئ. سوچ وکړئ، چې په پورتنیو مساوی نسبتونو کې خه پېښېږي؟ وې خېږي؟

تعريف

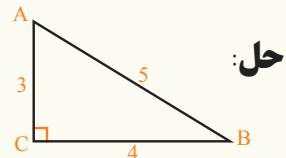
په هر قایم الزاویه مثلث کې، د یوی حاده زاوې د مخامنځ ضلعې او بدواли، د وتر پر او بدواли تل مساوی له یو ثابت مقدار سره دی، چې د حاده زاوې په اندازې پوري اړه لري. دې نسبت ته $\sin\theta$ (د حاده زاوې ساین) ويل کېږي.

$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ حاده زاوې د مخامنځ ضلعې او بدواли}}{\text{دوتور او بدوالي}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

لومړۍ مثال: په لاندې شکل کې، $\sin A$ او $\sin B$ په لاس را پړئ.

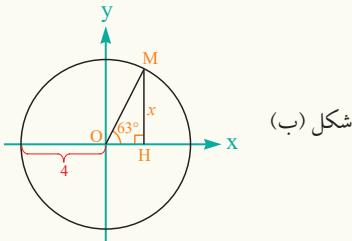
$$\sin A = \frac{\text{زاویې د مخامنځندی یا خسلی اوږدوالي}}{\text{دوتر اوږدوالي}} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = 0.8$$

$$\sin B = \frac{\text{زاویې د مخامنځندی یا خسلی اوږدوالي}}{\text{دوتر اوږدوالي}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

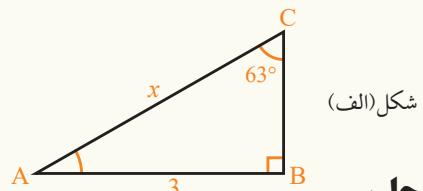


حل:

دویم مثال: که $\sin 63^\circ$ مساوی په 0.891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پیدا کړئ.



شكل (ب)



شكل (الف)

حل:

د الف جز: د یوې حاده زاویې له تعريف خخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو چې:

$$\sin 63^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

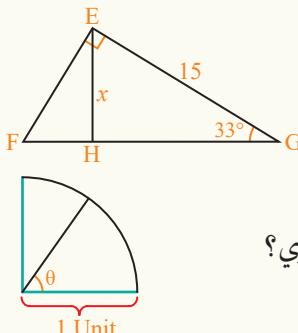
$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \Rightarrow x \approx 3.37$$

$$\sin 63^\circ = \frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}$$

$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

د ب جز:

پوښتني



1- که $\sin 33^\circ$ مساوی، په 0.5446 وي، په مخامنځندی شکل کې،

د x عددی قيمت پیدا کړئ.

2- د دائري د خلورمې برخې شکل په پام کې ونسی؟

الف: که د θ زاویه لویه شي $\sin \theta$ خرنګه بدلون مومي؟

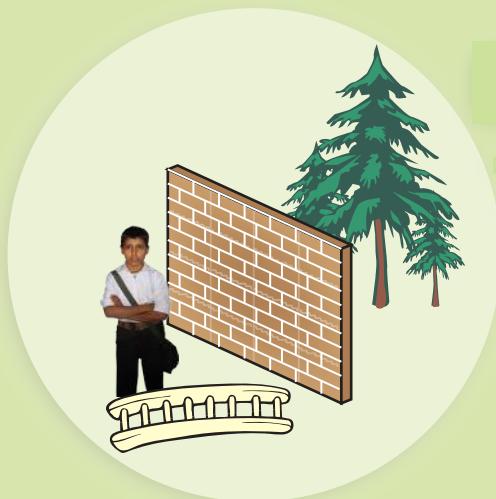
ب: که د θ زاویه صفر ته نزدي شي $\sin \theta$ کوم عدد ته نزدي کېږي؟

ج: که زاویه 90° ته نزدي شي، $\sin \theta$ کوم عدد ته نزدي کېږي.

3- د 40° او 80° او 65° زاویې په وار سره رسم او بیا هرہ زاویه یوه قايم الزاویه مثلث کې رسم کړئ، د ګربنې یا خط کش خخه په ګټې اخیستنې سره د مثلث اضلاعوی اندازه او $\sin 80^\circ$, $\sin 65^\circ$ او $\sin 40^\circ$ پیدا کړئ او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

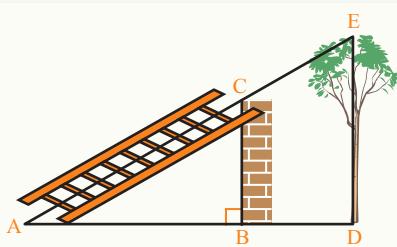
4- یو متساوي الساقین مثلث چې قاعده یې 8 واحده او $\hat{B} = 54^\circ$ وي، رسم کړئ. که یوه خنډه یا ضلعه یې 5 واحده وي د B زاویې \sin ساین پیدا کړئ.

د یوی حاده زاویي کوساین



د یوه دیوال شانه د ناجو یوه ونه ولاره ده.
یو زده کونکی غواړي و پوهېږي چې ونه
له دیواله خومره واتېن لري؟ د دې کار لپاره
ېې یوازې یوه لنډه زینه درلوده. فکر وکړئ
هغه خه سوچ کوي؟

فعاليت



- په مخامنځ شکل کې د تشکيل شویو مثلثونو نومونه واخلي.
- او \overline{DE} یوله بل سره خه اړیکه لري؟ ولې؟
- د $\triangle ADE$ او $\triangle ABC$ مثلثونه یو بل سره خه اړیکه لري؟

د زيني واتېن تر دیوال او بیا ېې تر ونې پوري پیدا کړئ.

د تالس د قصې په مرسته لاندې مساوات تکمیل او د \overline{AE} او بردواالی په لاس راوري.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{...}{AE}$$

په عمومي ډول د $\triangle ABC$ په قایم الزاویه مثلث کې چې یوه حاده زاویه ېې θ ده، د دې زاویه د گاونډی یا مجاوري ضلعې د او بردواالی او د وتر د او بردواالی نسبت ته کوساین ولې.

$$\cos\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاویه د گاونډی ضلعې او بردواالی}}{\text{دوتور او بردواالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

مثال: د $\triangle AHB$ په مثلث کې که $\hat{A} = 30^\circ$ او $\hat{B} = 60^\circ$ وي، وبنایاست چې

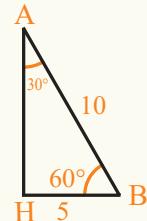
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ او } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل: د فيثاغورث له قضيې خخه په گټې اخیستنې سره د $\triangle AH$ جګوالی کولای شو وليکو چې:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2$$

$$10^2 = \overline{AH}^2 + 5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2 = 100 - 25 = 75$$

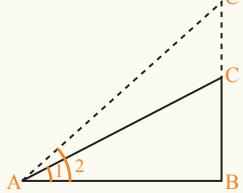
$$\overline{AH} = \sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH} = 5\sqrt{3}$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پونسنج



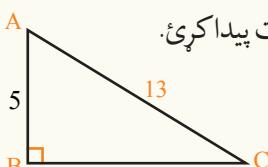
\overline{AC}	\square	$\overline{AC'}$
$\cos A_1$	\square	$\cos A_2$

1- که يوه حاده زاویه لویه شي د کوساین په اندازه کې خه بدلون راخي؟ د مخامنځ مثلث او مثلثاتي دائيرې په مرسته خپل نظر بیان کړئ.

د $\cos A_1$ لپاره یو نسبت وليکي.

د $\cos A_2$ لپاره یو نسبت وليکي.

په تشو څایونو کې مناسبې علامې وليکي.



3- په لانډي قایم الزاویه مثلث کې د $\sin A$ او $\cos A$ عددی قيمت پیدا کړئ.

4- د $\triangle ABC$ په مثلث کې چې د اصلاعو او بدواли يې 8,6 او 10 واحده وي، د $\sin A$ او $\cos A$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

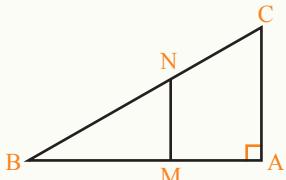
د حاده زاویي تانجنت



يو زده کونکی، د بیرغ مخکې ولاردي.
سوچ کوي چې د بيرغ د ميلې اوبردوالي
خنګه پیداکړي؟

فعاليت

د $\triangle BAC$ مثلث، چې د \hat{A} زاویه يې قایمه ده، د \hat{B} زاویه مثلثاتی نسبتونه $(\cos \hat{B}, \sin \hat{B})$



په پام کې ونيسي چې د \overline{MN} توبه کربنه په \overline{AC} موازي رسم شوې د.

• د $\triangle BAC$ مثلث به پام کې نیولو سره $\cos \hat{B}$ او $\sin \hat{B}$ اور

د $\triangle BAC$ مثلث د اضلاعو له مخې ولیکي.

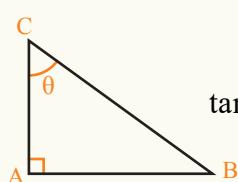
• د $\triangle BAC$ مثلث د اضلاعو له مخې د $\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$ نسبت ولیکي.

• له $\triangle BMN$ مثلث خخه په گټې اخيستني سره د اضلاعو له مخې $\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$ ولیکي.

د $\overline{MN}, \overline{BC}, \overline{AC}$ او \overline{BN} کربنو د مخامنځ اندازه کولو په مرسته پورتنې دوه نسبتونه سره پرتله کړئ.

• فکر وکړئ، که چېږي $\frac{\cos B}{\sin B}$ پیداکړو، نو دا نسبت د مخامنځ اضلاعو له اوبردوالي سره تراو لري یا یوازې د زاویې په مقدار پوري تراو لري؟

لومړۍ پایله: په یوه قایم الزاویه مثلث کې د یوې حاده زاویې د مخامنځ ضلعې اوبردوالي او د هغې زاویې د ګاونډي ضلعې د اوبردوالي نسبت، یو ثابت مقدار دی چې (د حاده زاویې تانجنت) په نامه یادېږي.



$$\tan \theta = \frac{\text{د زاویې د مخامنځ ضلعې اوبردوالي}}{\text{د زاویې د ګاونډي ضلعې اوبردوالي}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

دویمه پایله: د θ حاده زاویې تانجنت د حاده زاویې ساین پر کوساین له نسبت سره مساوی

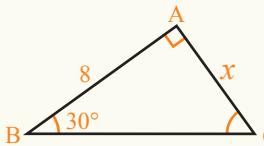
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{دی:}$$

دریمه پایله: $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ یوبل مقدار دی چې د حاده زاویې کوتانجنت (Cotangent θ)

یاد θ زاویې د گاوندي يا مجاوري ضلعي اوبردوالي د θ زاویې د مخامنځ خندي يا مقابلې ضلعي پر او بردوالي ته کوتانجنت $\cot\theta$ ويي. دان نسبت د نورو نسبتونو به خبر یوازې د زاویې په پراخوالي پوري اړه لري.

لومړۍ مثال: په لاندې مثلث کې که $\tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ووي، د $\tan 30^\circ$ عددی قيمت په لاس

راوړئ؟



حل: د $\tan\theta$ له تعريف خخه په ګټې اخيستني سره کولای شو وليکو

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{چې:}$$

دویم مثال: د $\triangle BAC$ مثلثي چې لاندې رسم شوي دي، په دې مثلث کې

$\tan c, \cos c, \sin c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د رابطه $\tan c = \frac{\sin c}{\cos c}$ او $\cot c = \frac{\cos c}{\sin c}$ نسبتونو سره پر تله کړئ؟

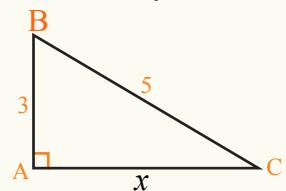
حل: لومړۍ د فيثاغورث د قضيې په مرسته، د $\triangle ABC$ په مثلث کې، د AC او بردوالي پیداکوو.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

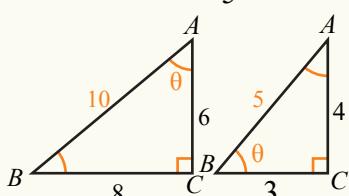
$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin C = \frac{3}{5} \quad \cos C = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan C = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot C = \frac{4}{3}$$



پونسني



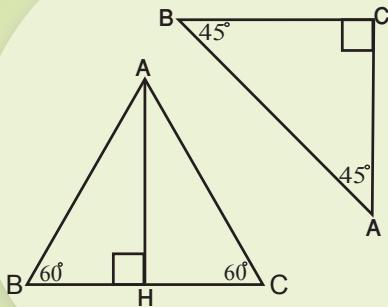
1- په مخامنځ شکلونو کې $\tan\theta, \cot\theta, \sin\theta, \cos\theta$ او $\tan\theta, \cot\theta, \sin\theta, \cos\theta$ پیدا کړئ.

2- د $\triangle ABC$ په مثلث کې چې ضلعي يې سره مساوی دي، $\tan A$ او $\tan B$ پیدا کړئ؟

3- که د یوه قایم الزاویه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاویه يې لویه شي د $\tan\theta$ په نسبت کې خه بدلون پیښېږي؟

د ځانګړو زاویو مثلاټي نسبتونه (90° , 45° , 60° , 30°)

مخامنځ مثلاټونه خه ډول مثلاټونه دي؟ د اضلاع او بدواли یې وتاکۍ.



فعاليت

- د $\triangle ABC$ یو متساوي الاصلع مثلاټ رسم کړئ.
- د \overline{AH} ارتفاع رسم کړئ، به دې ډول مثلاټونو کې ارتفاع کومې ځانګړتیاوا په لري؟
- د فيثاغورث له قضې خخه په ګټې اخیستې سره د مثلاټ ارتفاع پیدا کړئ؟
- آيا کولای شئ چې د 30° او 60° زاویو مثلاټي نسبتونو عددی قيمت پیدا کړئ؟
- د $\triangle ABC$ یو متساوي الساقین، قايم الزاویه مثلاټ رسم کړئ چې د هرې ضلعې او بدواли یې یو واحد وي؟
- هره حاده زاویه خو درجې ده؟ د وتر د او بدوالي اندازه یې حساب کړئ.
- د 45° زاویې مثلاټي نسبتونه به لاس راوري. له پورتنې فعالیت خخه لاندې جدول جوړ ولای شو:

زاویې مثلاټي نسبتونه	0°	30°	45°	60°	90°
\sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
\cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
\tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	نا تاکلې (نا معین)

مثال: په لاندې اړیکو کې د x او y عددی قیمت پیدا کړئ.

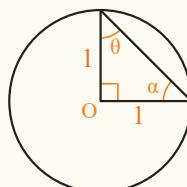
- | | |
|--|--|
| 1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ | 2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$ |
| 3) $\tan 60^\circ - \sin 30^\circ = ?$ | 4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$ |
| 5) $\tan 45^\circ - \sin 45^\circ = ?$ | 6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$ |

حل: په پورتنيو اړیکو کې د هر مثلثائي نسبت پر څای عددی قیمت وضع کوو:

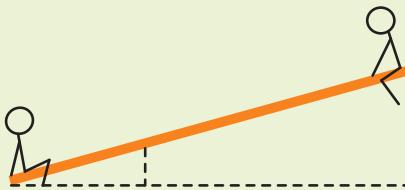
$$\begin{aligned}
 1) \quad x &= \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\
 2) \quad y &= \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\
 3) \quad x &= \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \\
 4) \quad y &= \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6} \\
 5) \quad x &= \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\
 6) \quad y &= \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

پونسټ

په لاندې شکلونو کې د $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ زاویو، د \tan, \cot, \sin, \cos او \tan, \cot, \sin, \cos مثلثائي نسبتونه پیدا کړئ.



د یوه مستقیم خط د میل او تانجنت ترمنځ اړیکه



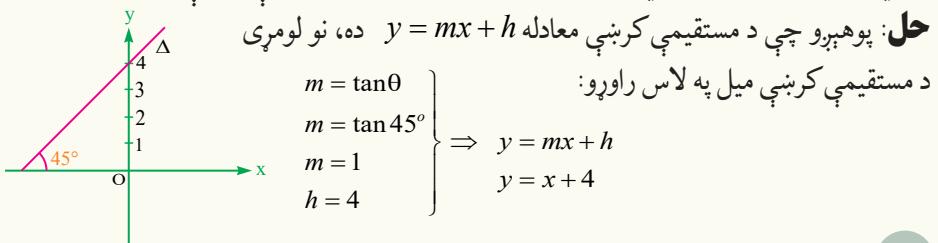
د رافعې میل بنی، یا کینې خواته په خه
پورې اړه لري؟

فعاليت

- د $A(1,3)$ او $B(0,0)$, $C(1,0)$ تکي، د وضعیه کمیاتو په مستوی کې وبنایاست، هغه مثلث چې رأسونه يې له دې تکو خخه جوړېږي، خه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- د \overline{AB} مستقیمې کربنې میل په لاس راوړئ.
- د \overline{AB} مستقیمې کربنې معادله د $y = mx + h$ په شکل ولیکي.
- د \overline{AB} په لاس راوړئ، د $\tan A$ د مستقیمې کربنې له میل سره خه اړیکه لري؟
- د \overline{AB} په مستقیم دوو اختياري تکي په پام کې ونيسي، د دې تکو په لرلوسره د مستقیمې کربنې میل پیدا کړئ. ايا د $\tan B$ د مستقیمې کربنې د میل برابرې ليدل کېږي؟

له پورتني فعالیت خخه ليدل کېږي چې د هغې مستقیمې کربنې میل چې د x له محور سره حاده زاویه جوړوي، د هغې زاویې له تانجنت سره چې د کربنې او د x محور مثبت جهت سره يې جوړوي، برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دی.

لومړۍ مثال: د Δ مستقیمه کربنه، د y محور په 4 کې پېړکوي او د x محور له مثبت لوري سره 45° زاویه جوړوي، که $\tan 45^\circ = 1$ وي، د Δ د مستقیمې کربنې معادله ولیکي؟



دویم مثال: د $\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3}$ مستقیمې کربنې په معادله کې د مستقیمې کربنې میل، د میل زاویه او د y له محور سره د تقاطع تکي په لاس راوري؟

حل: لوړۍ د مستقیمې کربنې معادله، په ستندرد شکل $y = mx + h$ بدلولو چې وروسته یې میل او له محور سره د تقاطع تکي، په آسانې سره پیدا کولای شو.

$$\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ, \quad h = 2$$

آیا کولای شئ د فیثاغورث د قضیې او مثلثات ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

فعالیت

• د $\triangle ABC$ یو قایم الزاویه مثلث چې قایمې جوړونکې ضلعې یې 6 او 8 دی رسم او قایمه زاویه یې په A وښی؟

• $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ ، $(\sin B)^2$ ، $\cos B$ ، $\sin B$ د BC ، AC ، AB د $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ او $(\sin B)^2$ ، $\cos B$ ، $\sin B$ اضلاعو له جنسه ولیکی، خه پایله ترې اخلى.

له پورتني فعالیت خخه بنکاری چې د یو حاده زاویې د ساین او کوساین د مریعاتو جمع، مساوی $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$ له 1 سره ده.

خینې وخت د مثلثائي نسبت د توان علامه په لاندې ډول سره بشودل کېږي.
 $(\sin A)^2 = \sin^2 A$

پاملنې وکړئ، چې د 2 توان د زاویې په ساین پورې اړه لري، نه په زاویه یې پورې

$$\sin A^2 \neq \sin^2 A$$

پونسني

1- د هغې مستقیمې کربنې معادله په لاس راوري چې د x محور له مثبت جهت سره 60° زاویه جوړه کړي او د y محور په (0,5) تکي کې قطع کړي.

2- د $x + 4 = y$ کربنې په معادله کې، میل، د میل زاویه او د y له محور سره د تقاطع تکي پیدا کړي.

a) $\frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = 1$

b) $1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

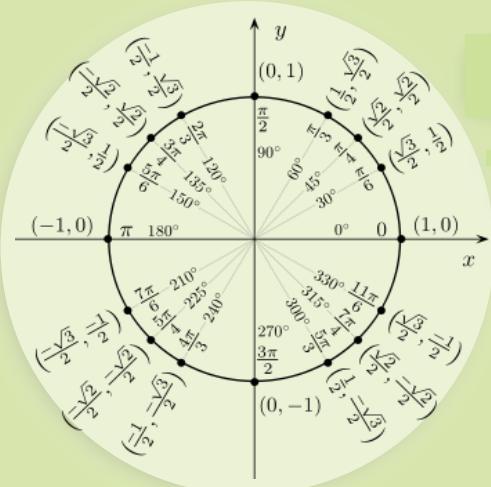
c) $\frac{\tan^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \times \tan^3 \theta$

d) $\frac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2 \sin A} = \cos A$

e) $\sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

3- ثبوت یې کړئ:

مثلثاتي جدول او د هغه استعمال



د مخامنځ شکل په مثلثاتي دایري کې،
دنومورو زاویو مثلثاتي نسبتونه بنودلای
شي؟

فعاليت

- يو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ او د هرې زاوې پراخواي بې وټاکئ؟
- په يو مثلث کې، د 30° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ؟
- د زاوې مثلثاتي نسبتونه، په يوه مثلث کې وټاکئ؟
- ایا د هرې زاوې مثلثاتي نسبتونه په پورتني شکل کې پیداکولای شو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانو:

پایله:

د څینوزاویو مثلثاتي نسبتونه کولای شو، په آسانۍ سره په لاس راوبرو، خو د یو شمېر نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو محاسبه، ګران کاردي، نو ددې کار لپاره، د څینو پوهانو له خوا مثلثاتي جدولونه، د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوي چې ددې ډول جدول په مرسته، د هرې زاوې مثلثاتي نسبتونه پیداکولای شو.

د یادونې وړ ده چې د جدول په ترتیب کې په يوه قایم الزاویه مثلث کې، د θ او $(\theta - 90^\circ)$ زاویو له اړیکو خخه ګټه اخیستل شوې ده.

مثلاطي جدول

θ	SIN θ	Cos θ	TAN θ	COT θ	
0° 00'	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00'
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00'	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00'
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00'	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00'
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00'	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00'
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00'	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00'
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00'	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00'
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	Cos θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	
6° 00'	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00'
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00'	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00'
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30'	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30'
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00'	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00'
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00'	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00'
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00'	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80° 00'
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00'	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79° 00'
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	COS θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	
$12^\circ 00'$	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	$78^\circ 00'$
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
$13^\circ 00'$	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	$77^\circ 00'$
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
$14^\circ 00'$	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	$76^\circ 00'$
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
$15^\circ 00'$	0.2588	0.9650	0.2679	3.7321	$75^\circ 00'$
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
$16^\circ 00'$	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	$74^\circ 00'$
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
$17^\circ 00'$	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	$73^\circ 00'$
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
$18^\circ 00'$	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	$72^\circ 00'$
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
$19^\circ 00'$	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	$71^\circ 00'$
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
$20^\circ 00'$	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	$70^\circ 00'$
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
$21^\circ 00'$	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	$69^\circ 00'$
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
$22^\circ 00'$	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	$68^\circ 00'$
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30'	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30'
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	
23° 00'	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67° 00'
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00'	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66° 00'
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00'	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65° 00'
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00'	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64° 00'
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00'	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63° 00'
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00'	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62° 00'
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00'	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61° 00'
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00'	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60° 00'
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00'	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59° 00'
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00'	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58° 00'
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00'	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57° 00'
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	
34° 00'	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56° 00'
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00'	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55° 00'
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00'	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54° 00'
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00'	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53° 00'
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00'	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52° 00'
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00'	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51° 00'
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00'	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50° 00'
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00'	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49° 00'
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00'	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48° 00'
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00'	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47° 00'
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00'	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46° 00'
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00'	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45° 00'
	COS θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

فعالیت

- د جدول لومړۍ پرته ليکه يا سطر او ولاړه ليکه يا ستون خه را بنيي؟
- د جدول د کينې او بنی خوا لومړۍ ولاړه ليکه يا ستون په کومه زاویه پيل او په کومه زاویه ختم شوي دي؟
- د جدول لومړۍ او وروستي کربنه خه را بنيي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه خخه کوچنۍ وي، هغه د جدول په کينه خوا کې د درجې په ستونکې پيداکوو او مثلثاتي نسبت ېې، له پورته خوا خخه لولو يا له بنکته خوا خخه او که زاویه له 45° خخه لویه وي، خه کوو؟

د پورتنې فعالیت پایله داسې بیانو:

که زاویه له 45° خخه کوچنۍ وي، هغه د جدول د کينې خوا په لومړۍ ولاړه ليکه يا ستون کې او مثلثاتي نسبت ېې، په پورته خوا لومړۍ پرته ليکه يا سطر کې گورو.

که زاویه له 45° خخه لویه وي، هغه زاویه د جدول د بنی خوا په لومړۍ ولاړه ليکه يا ستون کې او مثلثاتي نسبت ېې له بنکته خوا خخه پورته خوا ته په وروستي پرته ليکه يا سطر کې پيداکوو چې د پام ور زاوې د اړوند کربنې او د مثلثاتي نسبت د اړوندې ولاړې ليکې يا ستون تقاطع د زاوې مطلوب نسبت راکوي.

لومړۍ مثال: د $10^\circ 30'$ کوساین پیدا کړئ.

حل: لومړۍ د جدول له کينې خوا خخه په لومړۍ ولاړه ليکه يا ستون کې مطلوبه زاویه ($10^\circ 30'$) پیداکوو او د جدول په لومړۍ کربنه(سطر) کې مطلوب مثلثاتي نسبت پيدا کوو، ددې ولاړې او پرتې ليکې(سطر او ستون) تقاطع، د 0,8646 عدد راکوي چې دا د $(30^\circ 10')$ زاوې کوساین دي.

$$\cos(30^\circ 10') = ? \quad 30^\circ 10' 0,8646$$

دوييم مثال: د $50^\circ 84'$ ساین وټاکئ؟

حل: لومړۍ د جدول د بنی خوا په لومړۍ ستون کې د پام ور زاویه $50^\circ 84'$ پیداکوو او د جدول په وروستي کربنه(سطر) کې د پام ور مثلثاتي نسبت پيداکوو، ددې پرتې او ولاړو ليکو(سطر او ستون) تقاطع، د (0,9959) عدد راکوي چې د $50^\circ 84'$ زاوې کوساین دي.

$$\sin 84^\circ 50' = ? \quad \begin{array}{l} \vdots \\ 0.9959 \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdots \\ 84^\circ 50' \end{array}$$

sin

يادونه

هغه جدول چې تر او سه مو تري کار واخیست د هغو زاویو مثلثاتي نسبتونه چې توپیر یې لس دقیقې وي، رابنېي د هري زاوېي مثلثاتي نسبت د دې جدول په مرسته نه شو تاکلې، نو او س غواړو داسې طریقه بیان کړو، چې ددې جدول په مرسته د هري زاوېي مثلثاتي نسبتونه په لاس راړو، چې دا طریقه د انټرپولیشن Interpolation په نامه يادېږي او په لاندې مثلونو کې یې تري کار اخلو:

درېم مثال: د $35'$ $\tan 42^\circ$ زاوېي تانجنت په لاس راړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاوېي تانجنت نشه، خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاویو تانجانتونه شته دي چې د هغوي په مرسته $35'$ 42° زاوېي مثلثاتي نسبت داسې پیداکړو:

$$\begin{array}{l} \tan 42^\circ 40' \\ \tan 42^\circ 35' \\ \tan 42^\circ 30' \end{array} \left[\begin{array}{c} 5 \\ 10 = x \\ = 0,9163 \end{array} \right] = 0,9217] x \left[\begin{array}{c} 0,0054 \\ 5' : x \\ 10' : 0,0054 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{د دو زاویو توپیر} \\ \text{د مثلثاتي نسبتونو توپیر} \\ \text{0,0054} \end{array}$$

لیدل کېږي چې د لوړۍ او دویمه زاوېي توپير 5 او د لوړۍ او درېيمې زاوېي توپير، 10 دی. په همدې ترتیب سره، د \tan توپیر یې x او 0,0054 دی. یعنې که زاویه د 10 په اندازه توپير ولري، نو \tan یې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاویه د 5 په اندازه توپير وکړي، نو \tan د x په اندازه توپير کوي چې د تناسب په مرسته لیکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0,0054} \Rightarrow x = 0,0027$$

د x قيمت د کوچنۍ زاویو له \tan سره جمع کوو:

$$\tan 42^\circ 35' = 0,9190$$

پونډني

له مثلثاتي جدول خخه په ګټې اخیستنې سره $\tan\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ د مثلثاتي نسبونه د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاویو پیدا کړي.

د قایم الزاویه مثلثونو حل



مخامنځ شکل ته پام وکړئ، د خلي (منار)

جګوالی خنګه پیدا کولای شي؟

فعاليت

- که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه 40° وي، بله زاویه یې پیدا کړئ.
- که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه 29° او وتر یې 25cm وي، د مثلث مجھول عناصر پیدا کړئ.

که د قایم الزاویه مثلث دوې ضلعې یا یوه ضلعه او یوه حاده زاویه یې معلومه وي، د مثلث نور عناصر خنګه پیدا کولای شو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په هر قایم الزاویه مثلث کې که یوه حاده زاویه یا دوہ ضلعې معلومې وي، د مثلث پاتې اجزاوې د مثلثاتي توابعو په مرسته په لاس راورو.

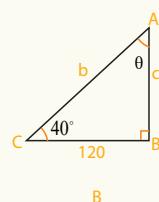
مثال: د یوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه، 40° ، که ددې زاویې مجاوره ضلعه، 120 واحده د اوروالي وي، نوموري مثلث حل کړئ؟

حل: خرنګه چې د مثلث یوه زاویه او دوہ ضلعې نا معلومې وي، نو ددې معلومو اجزاوو په مرسته، نا معلومې اجزاوې په لاندې ډول په لاس راورو:

$$1, \quad \theta = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$2, \quad \tan 40^\circ = \frac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0,8391 = 100,692$$

$$3, \quad \cos 40^\circ = \frac{120}{b} \Rightarrow b = \frac{120}{\cos 40^\circ} = \frac{120}{0,7660} = 156.6579$$



دویم مثال: د یوه قایمه الزاویه مثلث وتر 49.7cm او یوه قایمه ضلعه یې 25cm وي نومورى مثلث حل کړئ.

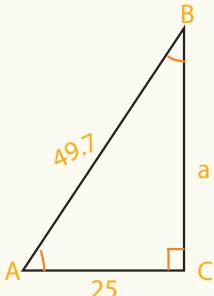
حل: لیدل کېږي چې د مثلث دوہ عناصر معلوم وي، نو نا معلوم عناصر یې داسې پیدا کړو:

$$1) \cos A = \frac{25}{49,7} = 0,503$$

$$\cos A = 0,503 \Rightarrow A = 59,8^\circ = 59^\circ 48'$$

$$2) B = 90^\circ - A \Rightarrow B = 90 - 59,8^\circ = 30,2^\circ = 30^\circ 12'$$

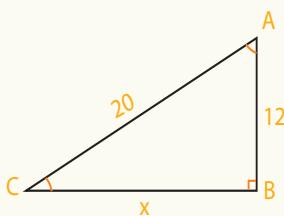
$$3) \tan A = \frac{a}{25} \Rightarrow a = \tan A \cdot 25 = 25 \cdot 1,7182 = 43$$



پونتني

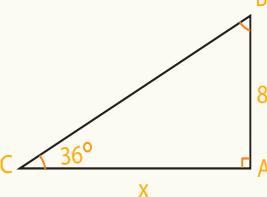
1 - د یوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه 50° او د دې زاویې مجا وره ضلعه 311 واحده ده، نو مورى مثلث حل کړئ.

2 - په لاندې شکلونو کې مجھول عناصر وټاکۍ.



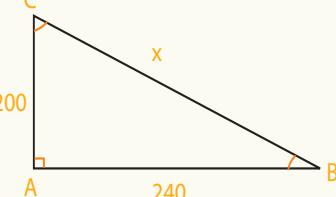
$$x = ?$$

$$\hat{A} = ?$$



$$x = ?$$

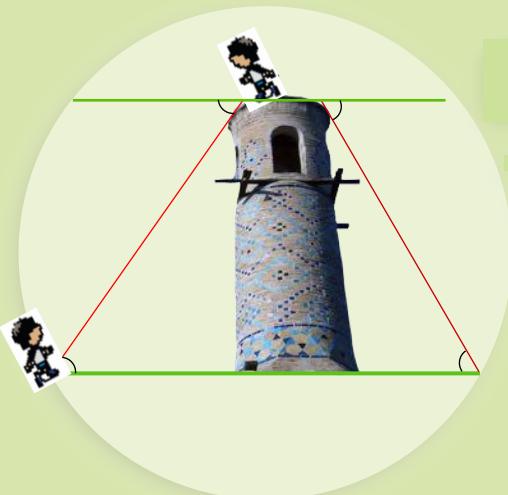
$$\hat{B} = ?$$



$$\hat{B} = ?$$

$$\overline{BC} = ?$$

د ميل يا ارتفاع او تنزيل زاويه



مخامنځ شکل ته پام وکړئ، د ميل او تنزيل زاويه وبنایاست؟

فعاليت

- که احمد په يو جګوالی پروت وي، د ليد کربنه له افقی سطحې سره، خه ډول زاویه جوروي او دا زاویه په کوم نوم یا دېږي (د تحول ساحه یې کومه فاصله ده)؟
- که يو شی په يوه سکته خای کې پروت وي، د ليد کربنه له افقی سطحې سره خه ډول زاویه جوروي او دا زاویه په کوم نامه یادېږي (د تحول ساحه یې په کومه فاصله ده)؟

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

1 - د ارتفاع زاویه (Angle of Elevation)

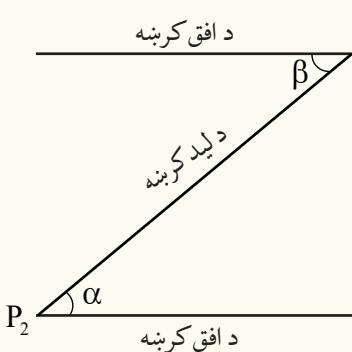
که يو شی په يوه ارتفاع پروت وي، نو د ليد کربنه له افق سره يوه زاویه جوروي چې د جګوالی زاویه بلل کېږي، لکه: په ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.

د افق کربنه

β

2 - د تنزيل زاویه (Angle of Depression)

که يو شی په تیپت خای کې پروت وي، د ليد کربنه له شي سره يوه زاویه جوروي چې د تنزيل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.



لومړۍ مثال: د $\triangle MTF$ قایم الزاویه مثلث کې ارتفاع زاویه 30° ده که د مثلث

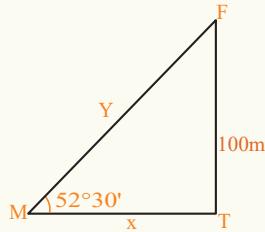
جګوالي $100m$ وي، د مثلث وتر او قاعده یې پیدا کړئ.

$$\tan 52^\circ 30' = \frac{TF}{MF} = \frac{100}{X}$$

$$X = \frac{100}{\tan 52^\circ 30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow X = 76.73m$$

$$\sin 52^\circ 30' = \frac{TF}{MF} = \frac{100}{y}$$

$$y = \frac{100}{\sin 52^\circ 30'} = \frac{100}{0.7934} \Rightarrow y = 126.04$$

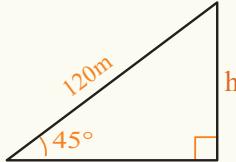


دومین مثال: د یوه کاغذ پران د تار اوږد دوالی $120m$ وي، د دې کاغذ پران د جګوالي یا ارتفاع زاویه 45° ده، د کاغذ پران (پتنګ) جګوالي وړاکئ.

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{120}$$

$$h = 120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

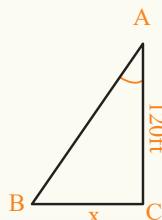
$$h = 60\sqrt{2}m$$



درېم مثال: یونوری (ترسد) برج له سمندر خخه $120ft$ جګوالي لري، هغه نزولي زاویه چې د برج نه یوه کښتی ليدل کېږي، 15° درجې ده، نوموري کښتی له برج خخه خومره واټن لري؟

$$\tan 30^\circ = \frac{X}{120}$$

$$X = 120 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 40\sqrt{3}ft$$

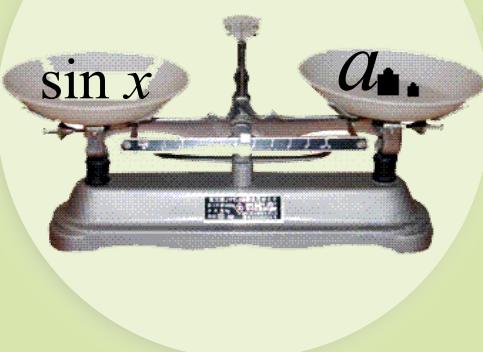


پوښتني

1- د هېڅي وې ارتفاع پیدا کړئ چې د ارتفاع زاویه یې له 20° خخه 40° واورې، نو په هغه حالت کې به لیدونکی $75ft$ وې ته نژدی شي.

2- یوه ونه باد له پورته خواخخه داسې ماته کړي چې د وې تنه او ماته برخه یې یو قایم الزاویه مثلث له څمکې سره جوړه کړي، که ماته برخه له څمکې سره 50° زاویه جوړه کړي وي او د وې تنه $20ft$ وي، د وې جګوالي پیدا کړي.

مئلثاتي معادلي



مئاخنخ مئلثاتي اريکپ له خه سره مساوي
دي؟ روښانه يې کړئ.

پوهېرو چې مطابقت هغه مساوات دی چې د تولو قيمتونو د متحول لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابري شي او معادله هغه مساوات دی چې د متحول د حینو بيو لپاره، د مساوات دواړه خواوې سره برابري شي.

فعاليت

- د فيثاغورث د قضيې او مئلثاتو ترمنځ اريکه وښيء، آيا دا اريکه مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله خه تو پير لري؟ دا توپير په مئلثاتي اريکو کې وڅېږي.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې x مجھول دی که

په یوه تعريف کې د پورتنې فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:
تعريف:

هره معادله چې په هغې کې يو يا خو مئلثاتي نسبتونه ګلدون ولري مئلثاتي معادله بلل کېږي،
لكه: $2 \cos x - 1 = 0$ يا $\sin x - 1 = 0$

- هغه قوس يا زاویه چې د هغې مئلثاتي نسبت مطلوب وي، اصلی مجھول بلل کېږي، لکه:
په پورتنیو معادلو کې X اصلی مجھول دي.
- د اصلی مجھول مئلثاتي نسبت ته فرعی مجھول وايي، لکه په پورتنیو معادلو کې $\cos x$
او $\sin x$ فرعی مجھول دي.

د مثلثاتي معادلو د حل لپاره په لاندي چول عمل کوو:

- 1 - د الجبری معادلو د حل په مرسته د فرعی مجھول قيمت په لاس راورو.
- 2 - د مثلثاتي نسبتونو د جدول په مرسته د اصلی مجھول قيمت په لاس راورو.
- 3 - خرنگه چې مثلثاتي معادلي پريوديك معادلي دي چې ډېر حلونه لري، نو د هغه زاویو د فورمولونو په مرسته چې يو چول نسبتونه لري، د معادلي حلونه دي.

مثال: $\cos x + \frac{1}{2} = 1$ او $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\cos x + \frac{1}{2} = 1$$

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

پونتې

د لاندي معادلو حل پيدا کړئ.

a) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$ b) $2 \sin 3x + \sqrt{3} = 0$ c) $2 \cos 4x - \sqrt{2} = 0$

د خلورم خپرکي لنډيز:

- مثلثات له دوو یوناني کلمو ترايگون او متري خخه چې د مثلث د اندازه کولو معنا لري، جور شوي دي او له هغه علم خخه عبارت دي چې د مثلث د عناصر و ترمنځ اړیکې خپری.
- که د مثلث له یوې ضلعې یوه موازي کربنه رسم شي، متقاطع ضلعې په مناسبو ټوټو وېشي چې دا قضيه د تالس د قضيء په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د مخامنخ ضلعې اوږدوالي، د وتر په اوږدوالي او د حاده زاوې د ساین sine په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د ګاونډي يا مجاوري ضلعې اوږدوالي، د وتر په اوږدوالي او د حاده زاوې د کوساین cosine په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د مخامنخ خنډي يا ضلعې اوږدوالي، د ګاونډي يا مجاوري خنډي يا ضلعې په اوږدوالي، د حاده زاوې د تانجنت tangent په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ نسبتونو نسبت، د حاده زاوې د $\tan\theta$ په نامه یادېږي
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$
.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د \cos او \sin نسبتونو نسبت، د حاده زاوې د
$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$
 په نامه یادېږي.
- هغه زاویه، لکه (α) چې مستقيمه کربنه یې د x محور له مثبت جهت سره جوروی، د ميل زاوې په نامه یادېږي او د دې کربنې ميل د $\tan\alpha$ سره مساوي ده $m = \tan\alpha$.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړیکه رسښتیا ده.
- د x او $\cos x, \sin x$ د $\tan x$ مثلثاتي نسبتونه، له زاوې پرته معنا نه لري.
- د x د معادله کې $m, y = mx + b$ له مادله کې m د هغې زاوې تانجنت دي چې مستقيمه کربنه یې د x محور له مثبت جهت سره جوروی او h د y له محور سره د تقاطع ټکي دي.
- $\tan 60^\circ$ له $\sin 30^\circ$ سره برابردي.
- $\tan 30^\circ$ له $\sin 60^\circ$ سره برابر دي.
- $\tan 45^\circ$ له $\sin 45^\circ$ برابر دي.

د خلورم خپرکی پونتنی

- د لاندی سوالونو کې هرې پونتنی لپاره خلور خوابونه ور کړل شوي دي، سم خواب يې په نښه کړئ:
1- د ډیوې حاده زاوې $\sin\alpha$ عبارت دي له:

$$\frac{\text{د حاده زاوې د ګاوندي (مجاورې) ضلعې اوږدوالي}}{\text{دوتر اوږدوالي}} \quad (c)$$

$$\frac{\text{دوتر اوږدوالي}}{\text{د حاده زاوې د مخامنځ ضلعې اوږدوالي}} \quad (d)$$

$$\frac{\text{د حاده زاوې د مخامنځ ضلعې اوږدوالي}}{\text{دوتر اوږدوالي}} \quad (a)$$

$$\frac{\text{دوتر اوږدوالي}}{\text{د حاده زاوې د ګاوندي (مجاورې) ضلعې اوږدوالي}} \quad (b)$$

-2- د $\tan x$ نسبت مساوی دي، په:

$$\frac{1}{\cos x} \quad (d) \qquad \frac{1}{\sin x} \quad (c)$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} \quad (b) \qquad \frac{\sin x}{\cos x} \quad (a)$$

-3- د $2y = 2x - 3$ په معادله کې د مستقيمي کربنې ميل عبارت دي، له:

$$a \text{ او } b \quad (d)$$

$$1 \quad (c)$$

$$-1 \quad (b) \qquad \frac{3}{2} \quad (a)$$

- 4- د هېډي مستقيمي کربنې معادله چې د y محور په $(0, 3)$ کې تقاطع او د x محور له مثبت جهت سره 45° زاویه جوړه کړي، عبارت ده له:

$$\text{هېڅي (d)} \qquad 2x - y = 0 \quad (c) \qquad 2y = 2x - 3 \quad (b) \qquad y = x + 3 \quad (a)$$

-5- د $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ افادي قيمت مساوی دي، له:

$$-1 \quad (d) \qquad -2 \quad (c) \qquad 2 \quad (b) \qquad 1 \quad (a)$$

-6- د $\cos 45^\circ$ او $\sin 45^\circ$ مساوی دي، له:

$$\sqrt{2} \quad (d) \qquad \frac{2}{\sqrt{2}} \quad (c) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (b) \qquad 1 \quad (a)$$

-7- د $\frac{\sin 30^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$ افادي قيمت عبارت دي له:

$$\text{درې واړه خوابونه سم دي. (d)} \qquad -1 \quad (c) \qquad 1 \quad (b) \qquad 0 \quad (a)$$

• لاندې تشن خایونه په مناسبو بیانونو سره ڈک کړئ:

1- په یوه قایم الزاویه مثلث کې د دوو نورو حاده زاویو مجموعه ده.

2- که د یوه متساواي الاصلاع مثلث یوه خنډه 10cm وي، جګوالی یې ده.

3- په هر قایمه الزاویه مثلث کې، د یوې حاده زاویې ساین عبارت دی له.....

4- Triganomitrity له دوو کلمو او او خخه جوره شوي ده.

$\tan\theta \cdot \cot\theta$ مساواي په ده. -5

• له لاندې جملو خخه کومه سمه او کومه ناسمه ده، د سمې جملې په مخ کې د (ص) توری او د ناسمي په مخ کې د (غ) توری ولیکي؟

-1 () د $x \sin$ نسبت، مساواي په $\frac{\text{د مخامخ ضلعې او بردواли}}{\text{د وتر او بردوالي}}$ ده.

-2 () او $\cos 60^\circ$ $\sin 30^\circ$ یوبل سره مساواي دي.

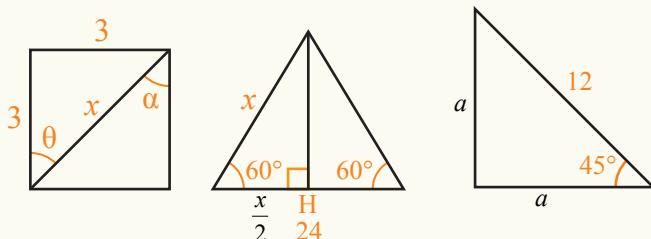
-3 () د $2y = 5x - 1$ معادله کې د دې کربنې ميل $\frac{2}{5}$ ده.

-4 () د $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ نسبت د $\tan\theta$ سره برابر ده.

-5 () برابر په $1 + \cos^2\theta$ ده.

• لاندې پونتنې حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړ شوو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟



2- په لاندې پونتنتو کې د A او B قيمتونه حساب کړئ:

$$1) A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$$

$$2) B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$$

$$3) A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$$

$$4) B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$$

$$5) A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$$

$$6) B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$$

$$7) A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$$

$$8) B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$$

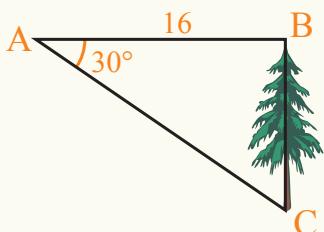
$$9) A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$$

3- که $\tan x$ و $\cos x$ او $\sin x$ پیداکړئ.

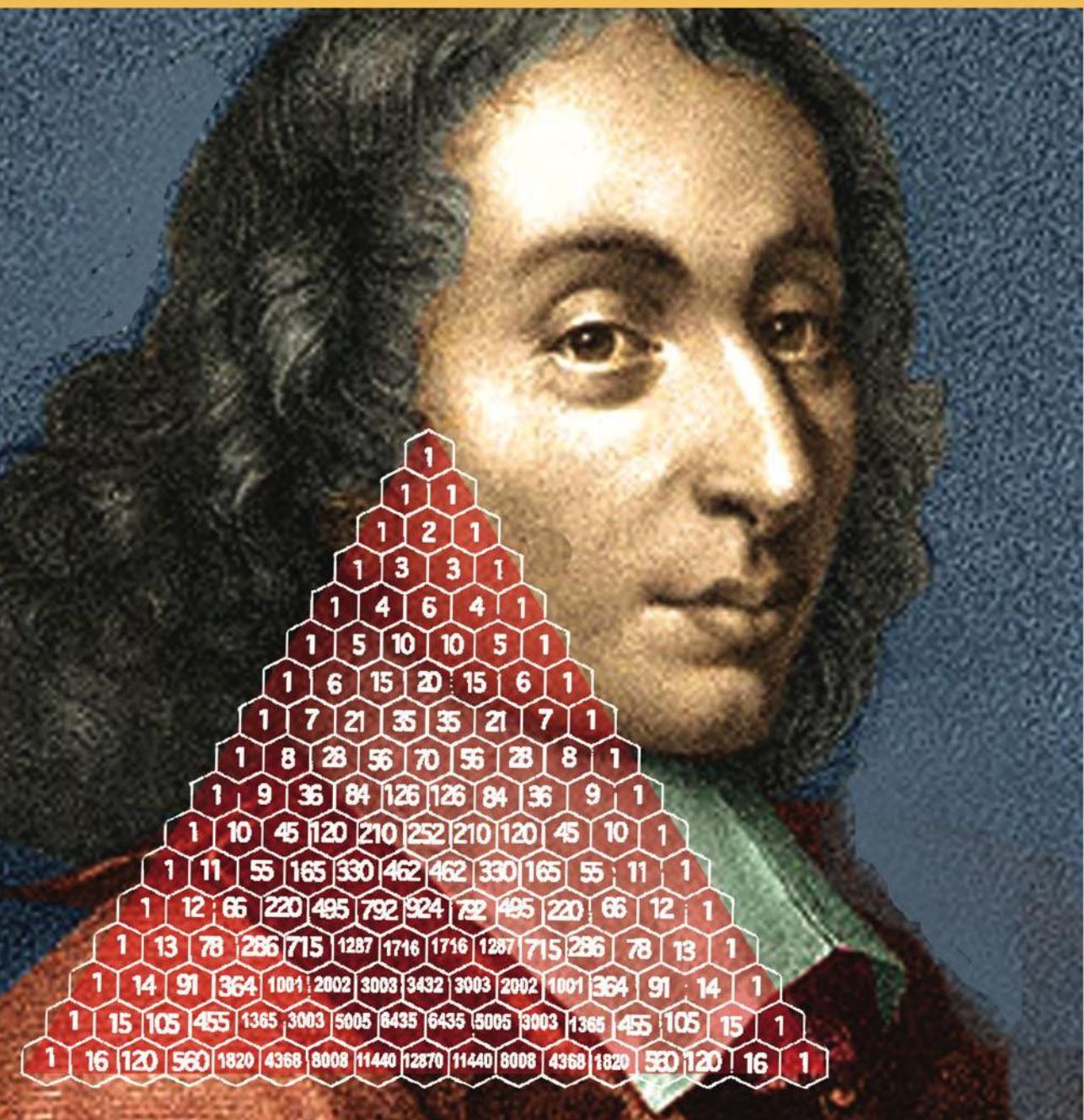
4- که $\tan x$ و $\sin x$ او $\cos x$ پیداکړئ.

5- که چېري α زاویه، صفر ته نزدې شي، $\tan \alpha$ کوم عدد ته نزدې کېږي؟ د شکل له مخې د خپلې وينا سموالي وښي.

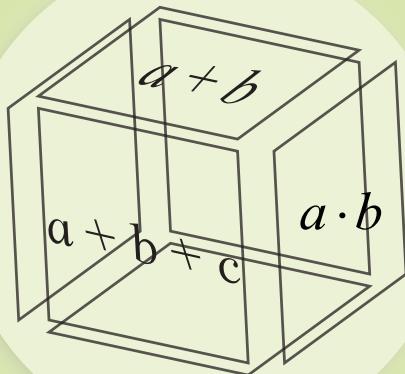
6- په لاندې شکل کې که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وې، د \overline{BC} واتېونه حساب کړئ.



پنجم خپرکی
خو جمله یی



خو جمله يي گانې (الجبري افادي)



د مخامنځ شکل په سطحو، د لیکل شويو
الجبري افادو نومونه واخلى.

فعاليت

لاندي افادي په پام کې ونيسي:

$$a) 2x \quad b) \frac{1}{3}xy^3 \quad c) \sqrt{2}xym^t \quad d) 9x^2$$

$$e) 5x \quad f) 2xy^3 \quad g) 3x^2 \quad h) \frac{4x^2}{x-1}$$

• يوبيل ته ورته افادي په نښه کړئ.

• لاندي الجبري افادي، تر ممکن حله پوري ساده کړئ.

$$a) 2x + 6x^2 + \sqrt{2}xym^4 \quad b) 3x^2 + 6x^2 \quad c) \frac{1}{3}xy^3 + 2x \quad d) \frac{1}{3}xy^3 + 2xy^3$$

• هغه افادي چې نه شي ساده کيدا، خنګه باید ولیکل شي، د هري یوې لپاره د کومونومونو
ورپاندیزو نه کوئ؟

• په هر حالت کې د افادو تر تولو لور توان، نسبت x ته وټاکۍ.

له پورتنې فعالیت خخه کولای شو، ولیکوچې:

که چيرې په يوه الجبري افاده کې د مشابه جملو له ساده کولو خخه وروسته، يوازې يوه
جمله ولرئ، هغې ته يوه جمله يې، (Monomial)، که جمع يا تفريق د دوو جملو لرو،
هغې ته دوو جمله يې يا (Bionomial)، که جمع يا تفريق د درې جملو لرو، هغې ته
درې جمله يې يا (Trinomial) او که له درې جملو خخه زیاتې جملې ولرو، خو جمله
يې يا (Polinomila) په نامه يادېږي. په هره الجبري افاده کې، تر تولو لور توان نسبت يوه
خانګړي متحول ته د الجibri افادي درجه، نظر هغه متحول ته بلل کېږي.

مثال: لاندی جدول بشپړ کړئ.

الجبری افادي	مناسې نومونې					درجة	
	شو جمله بي	درې جمله بي	دوه جمله بي	بوه جمله بي	نظر Y ته	نظر X ته	
$\sqrt{32} y^2 - 3y + 2y^3$							
$3x^2 - 7x$			✓			2	
$6x^2 - 4x - 1$							
$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$							
$13x - 2y^3 + 6x^3y$							
$\frac{2x - 4}{x}$							
$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$							
$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$							

ټولښې

1- لاندی الجبری افادي، ساده او د هرې یوې درجه نسبت هرمتتحول ته وټاکئ.

$$a) x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x \qquad b) \sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$$

$$c) -4x^2 + 2x^2 + 14x - 8 + 4x^3 - 16x - 2x^2 \qquad d) 4 - x^3y - 2 + yx^3 - 4xy - 1$$

2- لاندی الجبری افادي څو جمله بي دي؟ د هرې یوې درجه نسبت هر متتحول ته وټاکئ.

$$a) 6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5 \qquad b) 8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$$

$$c) 6x^2y^6m^9 \qquad d) \sqrt{3}x - y + 6x^2y^3 - 2y^2$$

$$e) 3pq^3 - 8p^4q^3 - 12q^4 - 0.5p^6 \qquad f) \frac{4m - 2n}{2m - n}$$

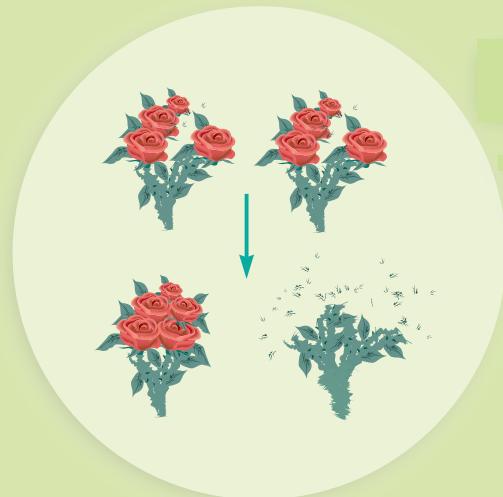
3- د A, B, C او د A, B, C په افادوکې ورته حدود وپنایاست او افادي ساده کړئ.

$$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$$

$$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$$

$$C = 2\sqrt{8x} + \sqrt{2} - 3\sqrt{8x} + \sqrt{32}$$

په فكتورونو تجزيه(فكتور نيونه)



په مخامنځ شکل کې خو غونچې ګلونه وينه؟
کومې غونچې، يو بل ته ورته دي؟ يوه غونچه له
څو ګلانونو خخه جوړه ده؟

فعاليت

- تشن څایونه ډک کړئ.
- $5x = (\dots + \dots) x = \dots x + \dots x$
- $6y = (\dots + \dots) y = \dots y + \dots y$
- په پاسنيو اړیکو کې له کومې خانګړیا خخه ګټه اخيستل شوې ده؟
- د ښې اړخ عددی ضربونه، د کین اړخ د متحولینو له ضربونو سره خه اړیکه لري؟
- $3x + 2x = (\dots + \dots) x = \dots x$
- $ax + bx = (\dots + \dots) x = \dots x$
- آیا کولای شو چې $a + b$ ساده کړو؟

په پورتني فعالیت کې لیدل کېږي چې:

د څینوالجري افادو په تجزيه کې کولای شو چې د ضرب له توزيعي خاصیت خخه پر جمع
باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پېژندلو سره په افاده کې کولای شو الجري افادې تجزيه کړو.
لومړۍ مثال: لاندې الجري افادې تجزيه کړئ.

a) $ab + ac - ad$

b) $x^4 - x^3 y + x^2 y^2$

c) $\frac{1}{2}m^2 - 2m$

d) $3xy - 6x^2$

حل: په راکړل شویوا فادو کې لومړۍ په ټولو حدونو کې ګټه حد پیدا کوو او هغه د قوس مخکې
ليکو، وروسته ټول حدونه بېل بېل په جملو وېشو او حاصل یې، د قوس په منځ کې ليکو:

- a) $ab + ac - ad = a(b + c - d)$
 b) $x^4 - x^3y + x^2y^2 = x^2(x^2 - xy + y^2)$
 c) $\frac{1}{2}m^2 - 2m = m(\frac{1}{2}m - 2)$
 d) $3xy - 6x^2 = 3x(y - 2x)$

دویم مثال: لاندی الجبری افادی تجزیه کرئ.

- a) $Ax + Bx + Ay + By$ b) $x^2 - 4y^2 + x + 2y$
 c) $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$ d) $2x - 2y + 2x + 2y$

حل: لومړی افاده داسې ترتیبوو چې ورته حلونه خنګ پر خنګ راشی او وروسته د افادې ګډ حدود پیداکړو او بیا یې تجزیه کړو:

$\begin{aligned} a) & \underbrace{Ax + Bx}_x + \underbrace{Ay + By}_y \\ &= x(A + B) + y(A + B) \\ &= (A + B)(x + y) \end{aligned}$	$\begin{aligned} b) & x^2 - 4y^2 + x + 2y \\ &= [x^2 - (2y)^2] + (x + 2y) \\ &= (x - 2y)(x + 2y) + (x + 2y) \\ &= (x + 2y)(x - 2y + 1) \end{aligned}$
$\begin{aligned} c) & 2x^2 + 2xy + 3x + 3y \\ &= 2x(x + y) + 3(x + y) \\ &= (x + y)(2x + 3) \end{aligned}$	$\begin{aligned} d) & 2x + 2y + 2x + 2y \\ &= 4x + 4y \\ &= 4(x + y) \end{aligned}$

پښتني

لاندی افادی تجزیه کړئ.

- 1) $x^4 - x^3y + x^2x$ 2) $x(2x - 3y)^2 + 8(2x - 3y)$
 3) $10ab - 15ac$ 4) $32x^2y - 4xy^2$
 5) $\sqrt{2}x^3y^2 - \sqrt{8}xy$ 6) $0.5mn^2 - 0.125m^4n^3$
 7) $ab + b + b$ 8) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^4$
 9) $mab + my + ny + nab$ 10) $ab(b + a + c) + ac(a + b + c) + bc(c + b + a)$

د الجري افادو ضرب چې يوه گډه جمله ولري

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

د مخامنځ قوسونو له ضرب خخه
وواياست چې د دوو عددونو د جمعې
او ضرب حاصل له کومو عددونو سره
برابر دي؟

فعاليت

- په هره مربع کې د عددونو ترمنځ خه ډول اړیکه لیدل کېږي؟



- له پورتني اړیکې خخه په ګټې اخیستني سره تشن څایونه ډک کړئ.



$$(x+4)(x+3) = x^2 + \dots x + \dots x + \dots = x^2 \dots x + \dots$$



$$(x-3)(x+2) = x^2 + \dots x + \dots x + \dots = x^2 \dots x + \dots$$

$$\begin{array}{c} \text{...} \\ \diamond \\ 8 \quad 12 \\ \diamond \\ \text{...} \end{array} \quad x^2 + 8x + 12 = (x + \dots)(x + \dots)$$



$$\begin{array}{c} \text{...} \\ \diamond \\ 1 \quad -6 \\ \diamond \\ \text{...} \end{array} \quad x^2 + x - 6(x + \dots)(x + \dots)$$

لہ پورتني فعالیت خخه لیدل کپری:

د دوو الجبری عبارتونوله ضرب خخه چې یوه گله جمله و لري، لیکلای شو چې:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$$

که چیري وغواړو یوه ترینوم الجبری افاده $x^2 + bx + c$ تجزیه کرو، نو لوړۍ باید دوه عددونه

داسي پیداکړو چې د ضرب حاصل ېې c او د جمع حاصل ېې b شي، که دې عددونو ته m او

$$x^2 + bx + c = x^2 + (m+n)x + m \cdot n$$

وویل شي، نو لرو چې:

مثال: د لاندي افادو ضرب او تجزیه سرته ورسوئ.

a) $(t-4)(t+5)$ b) $(a+3)(a+4)$ c) $(x-0.4)(x+0.2)$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$ e) $x^2 + 12x + 32$ f) $x^2 + 4x + 3$

g) $x^2 - 3x - 28$ h) $x^2 - 5x + 6$

حل:

a) $(t-4)(t+5) = t^2 + (-4+5)t + (-4 \times 5) = t^2 + t - 20$

b) $(a+3)(a+4) = a^2 + (3+4)a + (3 \times 4) = a^2 + 7a + 12$

c) $(x-4)(x-2) = x^2 + (-4-2)x + (-4 \times -2) = x^2 - 6x + 8$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2}) = y^2 + (\frac{1}{2} + \frac{2}{3})y + \frac{2}{6} = y^2 + \frac{7}{6}y + \frac{2}{6}$

e) $x^2 + 12x + 32 = x^2 + 4x + 8x + 32 = x(x+4) + 8(x+4) = (x+8)(x+4)$

f) $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 3x + x + 3 = x(x+3) + (x+3) = (x+3)(x+1)$

g) $x^2 - 3x - 28 = x^2 + (4-7)x + (4)(-7) = x^2 + 4x - 7x - 28$
 $= x(x+4) - 7(x+4) = (x-7)(x+4)$

h) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-3)(x-2)$

پښتنې

1- لاندي افادې تجزیه کړئ.

a) $x^2 + 7x + 12$ b) $m^2 - 6m - 7$

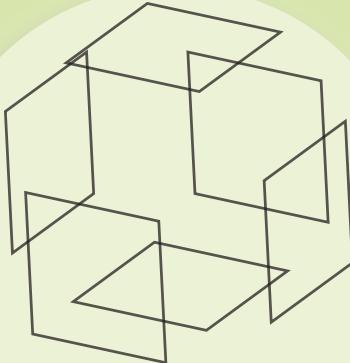
c) $a^2 + a - 2$ d) $x^2 - x - 20$

2- لاندي افادې ضرب کړئ.

a) $(2x-1)(x+3)$ b) $(\sqrt{2} + x^2)(x - \sqrt{2})$

c) $(a-3)(a+4)$ d) $(0.5xm - \frac{1}{2})(4xm + 0.5)$

د مکعبونو مجموع او تفاضل



$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

شکل ته پام وکړئ، ووایاست چې له دي
سطحو خخه که سره نژدي شي، کوم جسم
په لاس راخي؟

فعالیت

لاندې جدول ډک کړئ.

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
-3	2				
3	-2				
4	4				

- د دوو $a^3 + b^3$ او $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ولاړو لیکو ترمنځ، خه ډول اړیکې لیدل کېږي؟
- آیا کولای شي یوه ورته رابطه د $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ لپاره ولیکو.

له پورتني فعالیت خخه کولای شو، دا پایله ولیکو:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

دا اړیکه کولای شو چې په الجبری دول وبنیو:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

لومړۍ مثال: لاندې الجبری افادي تجزیه کړئ.

$$a) b^3 - 8$$

$$b) a^6b^6 - x^3y^3$$

$$c) h^3 + \frac{1}{h^3}$$

حل: لومړۍ الجبری افاده، د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړوو، وروسته د مطابقت په مرسته

$$a) b^3 - 8 = b^3 - 2^3 = (b-2)(b^2 + 2b + 4)$$

$$b) a^6b^6 - x^3y^3 = (a^2b^2)^3 - (xy)^3 = (a^2b^2 - xy)(a^4b^4 + a^2b^2xy + x^2y^2)$$

$$c) h^3 + \frac{1}{h^3} = h^3 + \left(\frac{1}{h}\right)^3 = (h + \frac{1}{h})(h^2 - 1 + \frac{1}{h^2})$$

دویم مثال: دیوه مکعب مستطیل حجم داسې $\frac{1}{8} 27x^3$ بنودل شوي دي، که د مکعب

مستطیل جګوالی $\frac{1}{2} 3x$ وي، ددي مکعب مستطیل د قاعدي مساحت به خومره وي؟

$$\text{د مکعب مستطیل حجم} = \text{د قاعدي مساحت} \times \text{ارتفاع} \Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{\text{د مکعب مستطیل حجم}}{\text{د قاعدي مساحت}}$$

$$= \frac{27x^3 - \frac{1}{8}}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{(3x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{\left(3x - \frac{1}{2}\right)[(3x)^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}]}{\left(3x - \frac{1}{2}\right)} = 9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

درېم مثال: د $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ افاده ساده کړئ؟

حل: لومړۍ د صورت مطابقت، په انکشافی یا غزیدلې بنه ليکو:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = x - y$$

$$x^3 + \frac{2}{x^3} = x^3 + \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3} = x^3 + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)^3 \quad \text{افاده تجزیه کړئ؟}$$

$$= (x + \frac{\sqrt[3]{2}}{x})(x^2 - \sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{4}}{x^2})$$

پونسني

-1 د $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ مساوات صحت، په الجبری بنه وښي.

$$a) a^6b^6 + x^3y^3$$

$$b) 8 + b^3$$

$$c) x^{12} - y^{12}$$

$$d) 125x^3 + y^3$$

$$e) 0.125x^3 - 1$$

$$f) \frac{1}{x^3} + 1$$

$$g) 8 - 64a^3b^6$$

$$h) 8a^3 - 27b^3$$

$$i) b^6 - 1$$

-2 لاندې افادي تجزیه کړئ.

کوچنی مشترک مضرب (L.C.M)

L.C.M

$$d = \frac{5}{4} + \frac{3}{6}$$

او 4 د کوچنی مشترک مضرب یا دواپرو
کسرنو گه مخرج پیدا کولو لپاره مويوه لاره

$$d = \frac{3}{x^2 - 1} + \frac{2}{2x + 2}$$

حاصل لپاره خه وراندیزونه کوئ؟

فعالیت

- د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرنو د جمع حاصل لپاره مولمری د 6 او 8 کوچنی گه مضرب یا دواپرو
کسرنو گه مخرج پیدا کولو پراونه توضیح کرئ؟
- د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ افادی په ضربی عواملو تجزیه کرئ؟
- ضربی گه او ناگه عوامل بی وتاکی؟
- د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گه مضرب پیدا کولو لپاره سوچ وکرئ، خه باید وکرو؟
- د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گه مضرب خودی؟ هغه په لاس راوري.
- د $\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{2}{2x + 2}$ کسرنو، د جمع حاصل په لاس راوري؟

ددوو ياخو الجيري افادو د کوچنی گه مضرب د پیدا کولو لپاره، لومړی هغوي په لومړنيو ضربی
عواملو تجزیه، وروسته هغه گه عوامل چې تر نولو لوی توان لري، له ناگه عواملو سره ضربوو چې
کوچنی گه مضرب په لاس راکړي.

لومړی مثال: د $4x^2 + 2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گه مضرب په لاس راوري؟

حل: لومړی افادی جلا جلا تجزیه کوو:

$$4x^2 = 2^2 x^2$$

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

لیدل کېږي چې هغه گډ عامل چې لوی توان لري، $(x+2)^2$ دی چې د ضرب حاصل یې له ناګاوو عواملو سره برابر په $2^2(x+1)(x-1)x^2 = 4x^2(x^2 - 1)$ دی چې د کوچنۍ گډ مضرب يا (L.C.M) په نامه یادپېږي.

دویم مثال: د $4x^2 + 12x - 16$ ، $6x^2 - 6$ ، $68x^2 + 40x + 32$ افادو کوچنۍ گډ مضرب پیدا کړئ.

$$4x^2 + 12x - 16 = 4(x^2 + 3x - 4) = 2^2(x + 4)(x - 1)$$

$$8x^2 + 40x + 32 = 8(x^2 + 5x + 4) = 2^3(x + 4)(x + 1)$$

$$6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 2 \times 3(x - 1)(x + 1)$$

په پا يله کې کوچنۍ گډ مضرب عبارت دی له:

$$2^3 \times 3(x + 1)(x + 4)(x - 1)$$

ټونسني

د کوچنۍ گډ مضرب په پام کې نیولو سره یې ساده کړئ.

$$1) \frac{2x}{3} - \frac{4}{5x} \div \frac{3}{10x}$$

$$2) \frac{3x - 1}{x^2 + 2x - 15} - \frac{2}{x + 5}$$

$$3) \frac{2}{x - 1} + \frac{x}{x + 1} - \frac{4}{x^2 - 1}$$

$$4) \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{3}{x^3 - 1} + \frac{1}{x + 1}$$

$$\frac{2xy^2 - 4x^2y^4}{-2xy^2} = ?$$

پام وکړئ چې د مخرج افاده د صورت په
کومې افادي پوري اړه لري، آیا کولای شي
هغه ساده کړئ؟

فعالیت

- کله چې د $\frac{995}{7}$ کسر، نور ونشوکړای، چې ساده یا اختصار کړو، نو پایله خه ده؟
- لاندې الجبری افادي ترممکن حده پوري ساده کړئ.

$$a) \frac{2m^2y - 3x^3y^4 + 24xy^3}{-3xy^2}, \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$b) \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad x \neq 2$$

$$c) \frac{x^3 - x^2 - x - 6}{x + 2}, \quad x \neq -2$$

- لاندې عملیو ته پام وکړئ او روښانه کړئ چې هرګام دکوم کارپه پایله کې لاس ته راخي؟
ولې؟

$$a) \begin{array}{r} 995 \\ -7 \\ \hline 142 \\ 29 \\ \hline 28 \\ 15 \\ \hline 14 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$b) \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 11x - 6 \\ \pm x^3 \pm 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 11x \\ \mp 4x^2 \mp 8x \\ \hline -3x - 6 \\ \mp 3x \mp 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

- د (a) په جز کې موولې وېش له کېښي خواله لوړۍ رقم ۹ خخه پیل وکړئ؟ فکر وکړئ،

په (b) جز کې موولې، له x^3 خخه د وېش عملیه پیل کړئ ده؟

- د یوپی الجبری افادې له کین لوري خخه بني لوري (خوا) ته ليکل او ترسيول د لوري درجې
 خخه کوچنی درجې ته د خوجمله يې ترتیب نزولي ترتیب نومېږي
 د دوو الجبری افادو د یوپړيل د وېش لپاره لاندې پراونه ترسره کړئ.
 1- د مقسوم او مقسوم عليه پولینومونه په نزولي ډول ترتیب کړئ.
 2- د مقسوم لومړي حد، د مقسوم عليه په لومړي حد وېښۍ چې حاصل يې د خارج قسمت
 لومړي حد دي.
 3- په لاس راغلي خارج قسمت، د مقسوم عليه په ټولوحدونو کې ضرب، حاصل يې د
 مقسوم له ورته حدودو خخه تفریق کړو.
 4- د مقسوم بل حد رابنكته کوو د پاتې افادې خنګ ته يې ليکو، وروسته ددې افادې لومړي
 حد د مقسوم عليه په لومړي حد وېشو او حاصل يې د مقسوم عليه په ټولوحدودو کې ضربو او
 حاصل يې له پاتې افادې خخه تفریق کړو.
 5- وروسته 1 ، 2 ، 4 پراونو ته تر هغه دوام ورکوو چې د پاتې حدودو درجه د مقسوم عليه
 د حدلونو له درجې خخه کوچنی شي.

لومړۍ مثال : د $x^3 - 3x^2 - 23x + 30$ افاده په 6 افادې باندې ووبېشي.

د تقسيم مراحل

$$\left. \begin{array}{l} I - \frac{x^3}{x} = x^2 \\ II - \frac{3x^2}{x} = 3x \\ III - \frac{-5x}{x} = -5 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 23x + 30 \\ -x^3 \mp 6x^2 \\ \hline 3x^2 - 23x \\ -3x^2 \mp 18x \\ \hline -5x + 30 \\ \mp 5x \pm 30 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} x-6 \\ x^2 + 3x - 5 \end{array} \right.$$

دویم مثال: د $x^2 - x - 4$ افاده په $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4$ افادې ووېشي.

حل: د مقسوم او مقسوم عليه پولینومونه په نزولي ډول ترتیبیو او بیا عملیه سرته رسوو:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{د تقسیم مراحل} \\
 I - \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\
 II - \frac{x^4}{x^2} = x^2 \\
 III - \frac{3x^3}{x^2} = 3x \\
 IV - \frac{8x^2}{x^2} = 8
 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{r}
 x^5 + 0 \cdot x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \\
 \underline{- x^5 - x^4 - 4x^3} \\
 \hline
 x^4 + 2x^3 + x^2 \\
 \underline{- x^4 - x^3 - 4x^2} \\
 \hline
 3x^3 + 5x^2 - 8x \\
 \underline{- 3x^3 - 3x^2 - 12x} \\
 \hline
 8x^2 + 4x + 4 \\
 \underline{- 8x^2 - 8x - 32} \\
 \hline
 12x + 36
 \end{array}$$

خرنگه چې د دوو عددونو وېش د سموالي لپاره مو دوه شرطونه وڅېړل، نو د دوو الجبری افادو د وېش د سموالي لپاره هم دوه شرطونه خېړو:

1- د خارج قسمت او مقسوم عليه د ضرب حاصل د جمع پاتې د مقسوم له الجبری افادې سره باید برابر وي.

2- پاتې درجه د مقسوم عليه له درجې خخه باید کوچنې وي.
لکه، په دویم مثال کې:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - x - 4)(x^3 + x^2 + 3x + 8) + 12x + 36 \\
 = x^5 - 2x^3 - 8x + 4
 \end{aligned}$$

لیدل کېږي چې د خارج قسمت او مقسوم عليه، د ضرب حاصل، جمع پاتې د مقسوم له افادې سره برابر دي او د خارج قسمت درجه، نظر x ته له 3 سره برابره ده پاتې درجه (1) ده، نو په لاس راغلي پایله سمه ده.

درېم مثال: د $x+3$ افاده په $2x^2 + x^4 - 3x + 1$ افاده ووبشي:

حل: لوړې د مقسوم او مقسوم عليه افادي، په نزولي ډول ترتیبوو.

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{- x^4 \pm 3x^3} \\ \hline - 3x^3 + 2x^2 \\ \underline{- 3x^3 \mp 9x^2} \\ \hline 11x^2 - 3x \\ \underline{- 11x^2 \pm 33x} \\ \hline - 36x + 1 \\ \underline{\pm 36x \mp 108} \\ \hline 109 \end{array}$$

پونتني

د لاندي افادو د پشن حاصل پیدا کړي.

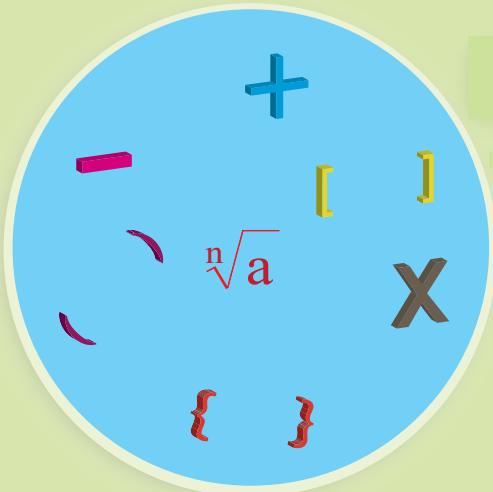
$$1) (2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$$

$$2) (1 - x^2 - x) \div (1 - x)$$

$$3) (2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$$

$$4) (2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$$

د الجبری افادو د عملیو د سرته رسولو ترتیب



که چېرې په الجبری افادو کې مخامنځ
نبې راغلې وي، په خه ډول یې په
ترتیب سره افاده ساده کوو؟

فعالیت

- د لاندې افادو د ساده کولو لپاره کومې عملیې سرته ورسوو؟ د عملیې د سرته رسولو ترتیب،
په شمېر سره ونوموئ.

$$3 - 2^4 \times 5 + (16 \div 4)$$

$$4 \times 5 \div 2 - 3(2 + 3^2) + 2$$

$$3x^2 - 4x(2 + x)$$

$$2x - 3\{-2(x+1)(x+2)\} + 6x \div 2$$

په پورتني فعالیت کې مو ولیدل، چې د الجبری افادو عملیې، په ترتیب سره سرته رسول د
عددونو د قانون له ترتیب خخه پیروی کوي. د یوې الجبری افادي د ساده کولو لپاره په ترتیب
سره، په لاندې ډول عمل کوو

- توان رفع کوو.

۲- د قوسونو په لرلو سره، لومړۍ هغه ساده کوو.

۳- په ترتیب سره له کین خخه سې اړخ ته د ضرب او وبش عملیې سرته رسوو.

۴- په ترتیب سره له کین خخه سې اړخ ته د جمع او تفریق عملیې سرته رسوو.

لومړۍ مثال :

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{1}{2}m - 3\left\{\left[5\left(m - \frac{1}{2} - m\right)\right] - m - 6\right\} \div 2 \\
 &= \frac{1}{2}m - 3\left\{5m - \frac{5}{2} - 5m - m - 6\right\} \div 2 \\
 &= \frac{1}{2}m - 3\left\{-m - \frac{17}{2}\right\} \div 2 \\
 &= \frac{1}{2}m + \left(3m + \frac{51}{2}\right) \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}m + \frac{51}{4} \\
 &= \frac{m+3m}{2} + \frac{51}{4} = \frac{4m}{2} + \frac{51}{4} \\
 &= 2m + \frac{51}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & 2x - 1 - \{-2(x+2)\} + 2x \div 2 \times 5x \\
 &= 2x - 1 - (-2x - 4) + 2x \div 2 \times 5x \\
 &= 2x - 1 + 2x + 4 + x \times 5x \\
 &= 2x - 1 + 2x + 4 + 5x^2 \\
 &= 4x + 5x^2 + 3
 \end{aligned}$$

فعالیت

a) $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

• مخامنځ عبارتونه ساده کړئ.

b) $\sqrt{8x^3y^3}$

c) $\sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

• د $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ او $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ کسرونو د مخرج د جذرنو د له منځه ورلولپاره چې مخرج ګویا شي $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ او $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ، له کوم مطابقت خخه مرسته اخیستلای شي؟

• د $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ او $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ کسرونو جذرنو په مخرج له منځه یوسی او ساده یې کړئ. د یوه کسرد مخرج د جذرنو له منځه ورلوعملیه، د الجبری کسر د ګویا کولو یا ناطق کولو

په نامه یادېږي.

مثال : د لاندی کسرونو مخرج ناطق کړئ.

$$1) \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$$

$$3) \frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$$

$$4) \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

حل:

$$\begin{aligned} 1) \frac{2}{\sqrt{x}} &= \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{2}{\sqrt[3]{a}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} &= \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} \times \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1} \\ &= \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2 - 1^2} \\ &= \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1} = \sqrt{a} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} \\ &= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1} = -5(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

د يوپي الجيري افادې د ساده کولو لپاره په ترتیب سره لومړي قوسونه له منځه ورو، وریسې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د وبش ضرب، جمع او تفریق عملې له نبی خخه کین اړخ ته سر ته رسوو.

- د \sqrt{x} د ناطق کولو عامل \sqrt{x} دی.
- د $\sqrt{x} + 1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x} - 1$ دی.
- د $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ دی.

پونسني

لاندي افادې ساده کړئ.

- 1) $2x \times -2 \{3x - (2 + x) - 1\} \div 2$
- 2) $\frac{1}{3}y - 5 \left[-2 \left\{ 6(y - \frac{1}{3} - y) \right\} \right] \div 3$
- 3) $5 + (-18) - [24 + (-30)](-7)$
- 4) $[-102] + (-330) \div 16 + [168 + 240 - (-210)] \div 6$
- 5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$
- 6) $\frac{3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
- 7) $2\sqrt{2000ab} - \frac{b}{a}\sqrt{72ab}$
- 8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$
- 9) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
- 10) $2\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \frac{1}{2}\sqrt{20x}$

د پنځم خپرکي لنډيز:

- هغه الجبری افادې يا الجبری جملې چې له یوې جملې خخه جورې شوې وي، دمونوم يا یو جمله بې په نامه یادېږي، لکه: ax^n
- هغه الجبری افاده چې له دوو حدونو خخه جوره شوې وي، دوه جمله یې یا یېښوم بلل کېږي، لکه: $ax^2 + b$
- هغه الجبری افاده چې له دربو حدونو خخه جوره شوې وي، درې جمله یې یا ترینوم بلل کېږي، لکه: $ax^2 + bx + c$
- هغه الجبری افاده چې له یوه یا خودونو خخه جورې شوې وي او د تورو توanonه بې بشپړ عددونه دي پولینوم بلل کېږي لکه: $ax^5 + bx^3 + cx^2 - x - d$
- په یوه الجبری افاده کې، د متحول تر ټولو لوی توان دالجبری افادې درجه بلل کېږي.
- د پولینوم هغه ترتیب چې له کینې خوا خخه بنۍ خواته، له لوی توان خخه کوچني ته ترتیب شوې وي، نزولي ترتیب بلل کېږي.
- د هر a او b لپاره لرو:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

- د الجبری افادو د ګلپو عواملو، چې تر ټولو لوی توان ولري، د ضرب حاصل، له ناګلو عواملو سره د L.C.M په نامه یادېږي.
- که چېږې په یوه الجبری افاده کې قوسونه او ($+ \cdot - \times \div \dots$) عملې راغلي وي، د ساده کولو لپاره بې په ترتیب سره لومړي کوچني، منځنې او بیا لوی قوس له منځه ورو، ورپسې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د وېش، ضرب، جمع او تفریق عملې له کین خخه بنې اړخ ته سرته رسوو.
- د \sqrt{x} د ناطق کولو عامل \sqrt{x} دی.
- د $\sqrt{x} + \sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $1 - \sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{y} + \sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل عبارت له $y - \sqrt{x}$ دی.

دېنځم خپرکي پونستې

• په لاندې پونستنو کې هره پونستني سوال ته خلورخوابونه ورکړل شوي، سم خواب یې

وټاکۍ.

$$d - 1 \quad 2x^2 - \frac{1}{2}x \quad \text{افاده کې ګډ عامل:}$$

(d) نه لري (c) $2x$ (b) x (a) 2 دی.

-2 (x - 2)(x + 3) الجبری افادو د ضرب حاصل عبارت دی، له:

$$x^2 - 5x - 6 \quad (b) \quad x^2 + 5x + 6 \quad (a)$$

$$x^2 - x + 6 \quad (d) \quad x^2 + x - 6 \quad (c)$$

$$d - 3 \quad \frac{3}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1} \quad \text{افادي کوچنی ګډ مضرب، عبارت دی، له:}$$

(b) $(x+1)(x-1)$ (a) $2(x+1)(x-1)$

(d) هېڅ یو. (c) $(2x+2)(x^2-1)$

$$d - 4 \quad \frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8} \quad \text{افادي، د وېش حاصل عبارت له:}$$

$$(-2x+1)(2x) + \frac{-2x}{2x^2-8} \quad (b) \quad (a) -2x+1$$

(d) هېڅ یو. (c) الف او ب

-5 د ناطق کولو عامل عبارت دی، له:

$$\sqrt{b} \quad (b) \quad \sqrt{a} \quad (a)$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (d) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (c)$$

• لاندې تشن خایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

$$1- \text{د} \quad 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 \quad \text{الجبری افاده، یوه حده درجه افاده ده.}$$

$$2- \text{د} \quad x^2 + 7x + 12 \quad \text{الجبری افادې ضربی عوامل او. . . . دی.}$$

$$3- \text{د} \quad \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \text{وبش حاصل عبارت له دی.}$$

$$4- \text{د} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$5- \text{د} \quad (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \quad \text{د ضرب حاصل عبارت له دی.}$$

• په لاندې جملو کې، کومه یوه سمه او کومه یوه ناسمه ده؟ د سمې مخ ته (ص) توری او د

ناسمي مخ ته (غ) توری ولیکي.

1-) هغه الجبری افادې چې له خو حدونو خخه جوره شوې وي او د تورو

تونونه یې بشپړ عددونه وي، د پولینوم په نامه یادېږي.

$$2- \text{د} \quad (x + a)(x + a) \quad \text{افادې تجزیه}$$

$$3- \text{د} \quad 14x^3y^2 \quad \text{او} \quad 42x^3y^4 \quad \text{کو چنی ګډ مضرب دی.}$$

$$4- \text{د} \quad a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$5- \text{د} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

• لاندې پونستني بشپړې حل کړئ:

1- تجزیه یې کړئ

a) $y^2 - y - 2$

c) $21a - 14ab + 28a^2$

a) $\frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{ax + 1}{x^2 - 4}$

b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{a^2 b^{-2} - b^2 a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

d) $72m^8n^6 - 98m^6n^8$

f) $1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

2- ساده یې کړئ

a) $\frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

b) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

c) $(3x^3 - x^2 - 4) \div (x - \frac{1}{2})$

d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

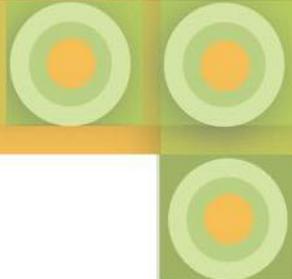
e) $(x^2 - 5x + 64) \div (-x + 5)$

3- وېړې وېشی



شپږم څېرکۍ

نامساوات





نامساوات (Inequality)

په دې انھور کې تله په کوم حالت کې ده؟
ولې؟



عموماً په ورخني ژوند کې د نامساوي کمیتونو پرتله کولو ته اړتیا لرو، لکه د یوه تولگي د زده کوونکو د نمره توګه (مجموعه) که نمرې له زیاتو خخه کمو نمره ته درجه بندی کرو، آیا تاسې کولای شئ چې داسې نور مثالونه په ورخني ژوند کې ووايئ چې نا مساوي عددونه سره پرتله شي.

که چیرې عددونه د ($<$, \leq , $>$, \geq) علامو په مرسته اړیکې ولري، د نامساوي په نامه يادېږي،
لکه: $18 < 4$, $5 \leq 18$, ...

فعالیت

۰ د عددونه، $\frac{2}{3}$ او $4, \sqrt{2}, \frac{-3}{2}, 3$ د عددونو په محورونو وټاکئ.



- له مناسبو علامو خخه په کار اخیستلو سره پورتنی عددونه په ترتیب سره له کوچني خخه تر لوی پوري ولیکي.
- د عددونو په محور، د عددونو د ترتیب او د عددونو د ځای تر منځ خه اړیکې وينې؟

د پورتنی فعالیت کتنی، په لاندې ډول داسې لنډوو:
د عددونو په محور، هغه عدد چې د عدد بشی خواته پروت وي لوی او له هغه عدد خخه چې د هغې کینې خواته پروت دي، کوچني عدد دي.
په بشپر ډول سره ويلاهي شو چې که د b, a او c درې حقیقي عددونه وي، نو صورت نیسي،
 $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$
چې:

فعالیت

- دوه نامساوی عددونه و تاکئ او د هغوي تر منځ اړیکه د کوچنيو یا لویو علامو په کار اخيستلوسره بیان کړئ؟
- د نامساوی دواړو خواوو ته د ۵ عدد ورجمع کړئ، ایا د نامساوی د علامې په لوري کې خه بدلون راخي؟
- د پورتنی نامساوی له دواړو خوا وو خخه د ۳ عدد تفریق کړئ، آیا د نامساوی علامې په جهت کې، خه بدلون راخي؟

په بشپړ ډول سره، د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

$$\begin{aligned} & a + c < b + c \quad \text{او} \quad c \text{ اختياري حقيقي عددونو لپاره لرو:} \\ & a - c < b - c \end{aligned}$$

فعالیت

- دوه نامساوی عددونه و تاکئ او د هغوي تر منځ اړیکه له کوچنۍ یا لوېي علامې (\leftarrow) خخه په کار اخيستلوسره ولیکئ؟
- د پورتنی نامساوی دواړه خواوې د ۴ په عدد کې ضرب کړئ، آیا د نامساوی علامې په لوري کې خه بدلون راخي؟
- د پورتنی نامساوی دواړه خواوې، د ۴ - په عدد کې ضرب کړئ، ایا د نامساوی د علامې په لوري کې خه بدلون راخي؟
- که د $7 < 4$ نامساوی دواړه خواوې معکوس کړو، آیا د نامساوی علامې په لوري کې بدلون راخي؟

$$a < b \quad , \quad c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

$$a < b \quad , \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

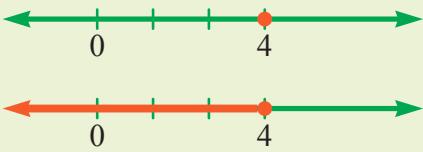
په بشپړ ډول، د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانو:

د b, a او c حقيقي عددونو لپاره لرو چې:

په یاد ولري چې د وېش عملیه د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعنې که وغوارو چې یو عدد په a ووېشو، هغه عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو، نو د نامساوات د ضرب عملیې ټول خواص، د وېش په عملیه کې هم ($a \neq 0$) صدق کوي.

پونسټې

د $9 < 3$ - په نامساوی کې د یوه اختياري عدد په جمع، تفریق، ضرب او تقسیم کولو سره د نامساوی ټول خواص و خپرئ؟



د $x = 4$ او $x \leq 4$ دوو الجبری جملې
په پام کې ونيسي، د دي عبارتونو تر منځ
څه ورته والي او توپیر وينې؟

فعاليت

- د $x + 3 = 7$ معادله، د x د کوم عددی قيمت لپاره سمه ده؟
- آياد x له په لاس راغلي قيمت خخه پرته بل قيمت x ته پيداکولای شئ چې په معادله
کې ربنتينوالی ولري؟
- د x د کوم عددی قيمت لپاره، د $x + 3 < 7$ نامساوي سمه ده؟
- آياد x په لاس راغلي قيمت خخه پرته بل قيمت شته چې نامساوي پري سمه وي؟
- د x د خو عددی قيمتونو لپاره پورتنۍ نامساوي سمه ده؟

د پورتنۍ فعاليت په ليدو سره نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.
هغه الجبری رابطي چې د ($<$, $>$, \leq او \geq) علامو په مرسته يوه له بلې سره اړیکې ولري او
په هغه کې د متحولو توان يو وي، لومړۍ درجه يو مجھوله یا خطی نامساوي بلل کېږي.
لاندې نامساوي د يو مجھوله لومړۍ درجې نامساواتو بېلګه ده.

$$x + 3 < 0 \quad , \quad 2x - \frac{1}{3} > 3 - x$$

$$6x + 7 \leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5} + \sqrt{2} \geq 12$$

په بشپړ ډول، د x د هغو قيمتونو د پیداکولو لپاره چې په نامساوي کې حقیقت ولري، د نامساواتو له خواصو خخه په ګنجي اخیستنې سره نامساوي ته داسي بللون ورکوو چې د نامساوي یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.

د نامساوي حل خخه موخته دا ده چې د x لپاره باید هغه قيمتونه پیداکړو چې د نامساوي په ساحه کې حقیقت ولري، دا ساحه د نامساوي د حل ساحه بلل کېږي.

لومړۍ مثال: د $-7 \geq -4 + x$ نامساوي حل کړئ او د نامساوي د حل ساحه یې د عددونو په محور وښيئ؟

حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې د $(-4) - (-4)$ عدد په جمع کولو سره لرو چې:

$$x + 4 - 4 \geq -7 - 4$$

$$x \geq -11$$



دویم مثال: د $2x + 1 > 5$ نامساوي حل کړئ؟

حل: د نامساوي له خواصو خخه په ګنجي اخیستنې سره کولای شو معلوم د نامساوي علامې یو اړخ ته او مجھوں بل اړخ ته انتقال کړو:

$$2x + 1 > 5$$

نو د نامساوي له دواړو خواوو خخه، د $(-1) - (-1)$ عدد تفریق کوو:

$$2x + 1 - 1 > 5 - 1$$

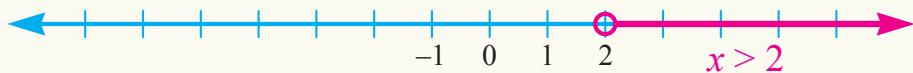
$$2x > 4$$

د نامساوي دواړه خواوې په 2 وېشو یا یې په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2} \times (2x) > \frac{1}{2} \times 4$$

$$x > 2$$

يعني د ټولو هغو قيمتو لپاره چې له 2 خخه لوی وي، نامساوي صدق کوي، دا مطلب د عددونو په محور داسي بشودلای شو:



پوښته: فکر و کړئ چې ولې په لومړي مثال کې د عددونو په محور 11- په (۰) او دویم مثال کې د عددونو په محور، په (۰) بنودل شوی دي؟
په دې دوو مثالونو کې هغه علامو ته چې د نامساوي د حل ساچې د تاکلو لپاره په کار ورل شوې دي پاملرنه وکړئ.

په عمومې حالت کې د $ax + b < cx + d$ الجبری عبارت چې په هغه کې a, b, c او d حقیقی عددونه او x متتحول وي، لومړي درجه یو مجھوله یا خطی نامساوي بلکېږي.
د نامساوي د حل لپاره لاندې تکي په پام کې نيسو:
• د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره معلوم یو اړخ او مجھول د نامساوي بل اړخ ته انتقالوو.

- معلوم عددونه په خپل منځ کې او مجھول حدونه په خپل منځ کې جمع کوو.
- د متتحول د عددی قيمت دېدا کولو لپاره د نامساوي دواړه خواوې د متتحول په ضرب، د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره وېشو.

درېم مثال: د $5 - 3x + 1 < x - 1$ نامساوي حل کړئ.

$$5 - 3x + 1 < x - 1$$

$$2x < -6$$

$$x < -\frac{6}{2}$$

$$x < -3$$



څلورم مثال: لاندې نامساوي حل کړئ.

$$x + 5 < 3x - 1$$

$$x - 3x < -1 - 5$$

$$-2x < -6$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{-6}{-2}$$

$$x > 3$$



1- د لاندي نامساوي گانو حل پيدا او د هغوي دحل ساحه د عددونو په محور کې وبنيء.

- a) $4x \geq 8$
- b) $8 + x < 5$
- c) $5 + x < 2x - 1$
- d) $-3x - 4 > x + 7$
- e) $\frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$
- f) $0.5 - x < 3x - 1$
- g) $2 - x \leq 2$
- h) $2x - 5 - 7x > 0$
- i) $5x + 6 > 0$

2- د 1325 دوبش پر 25 باید تر ټولولوی عدد پیدا کړو چې په 25 کې ضرب او له 1325
څخه کوچنۍ یا ورسه مساوي شي، دا عبارت په نامساوي وبنيء او خارج قسمت یې پيدا
کړئ.

3- که تاسې ته ووبل شي چې د یوه فعالیت د سرته رسولو لپاره حد اکثر 5 ورځې وخت
لري، دا عبارت په نامساوات وبنيء.



$$\{ x \in \mathbb{R} : x \leq 4 \}$$

ديوه نامساوي د حل لپاره کولاي شو،
دېر عددونه، په لاس راوبرو چې د هغه
نامساوي حل وي، داسې ټول حقيقی
عددونه که ديوه سټ په ډول په پام کې
ونيسو، دې سټ ته د نامساوي حل واي.

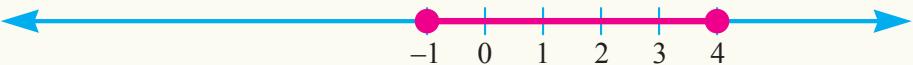
د مثال په ډول: $x > 3$ نامساوي حل دی، څکه هر هغه عدد چې له 3
څخه لوی وي، په نوموري نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ، د رياضي په ژبه داسې
بنودل کېږي:

داسې لوستل کېږي: د $x > 3$ ټول هغه حقيقی عددونه، چې له دربو(3) څخه لوی وي.



ليدل کېږي چې دوبل عددونو مجموعه، د عددونو د محور يوه برخه ده چې په رياضي
کې ورته واتېن يا انتروال واي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور تاکل شوي هغه واتېن (انتروال) دی، چې له 1- څخه
لوی يا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنۍ يا ورسره مساوي دی.



دا واتېن، په $[-1, 4]$ يا $[-1, 4]$ سره بنودل کېږي.
پاملنې وکړئ، چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې چې د
انتروال د پيل او پای تکي ګډون ولري، دې واتېن ته تړلي واتېن واي.
نوکه په پورتني واتېن کې، د -1 او 4 تکي ګډون و نه لري، دې واتېن ته خلاص واتېن واي
او په لاندې ډول یې بنودلای شو:

$$(-1, 4) = \{ x \in \mathbb{R} : -1 < x < 4 \}$$



که د مخکیني واتن د پاي له تکو خخه يوازي يوتکي، لكه 4 په واتن کپي شامل وي، هغه واتن ته نيمه خلاص يا نيم ترلي واتن وايي او هغه په لاندي شكل بشيو:

$$(-1, 4] = \{x \in IR : -1 < x \leq 4\}$$



په عمومي چول، د هرو دوو a او b حقيقی عددونو چې، $a \leq b$ خخه وي لرو:

$$[a, b] = \{x \in IR : a \leq x \leq b\}$$



$$(a, b) = \{x \in IR : a < x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in IR : a < x \leq b\}$$

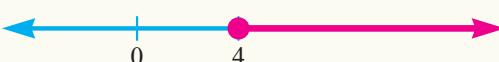


$$[a, b) = \{x \in IR : a \leq x < b\}$$



پاملننه وکړئ چې د عددونو په محور باندې کولای شو، هغه واتن په پام کې ونيسو چې له یوې خوا خخه ترلي نه وي، په دي حالت کې، واتن، د ∞ علامې خخه په ګټې اخیستنې سره، چې هغه بې نهايت لولو، بشيو، لکه: د هغه عددونو ست چې له 4 خخه لوی يا ورسره مساوي وي، داسي بشيو:

$$\{x \in IR : 4 \leq x\} = [4, \infty)$$



او هغه عددونه چې له 4 خخه کوچنۍ وي عبارت دي له:

$$\{x \in IR : 4 > x\} = (-\infty, 4)$$



نو په عمومي چول، که a یو حقيقی عدد وي، نو لرو چې:

$$(a, \infty) = \{x \in IR : a < x\}$$

له a خخه لوی حقيقی عددونه

$$[a, \infty) = \{x \in IR : a \leq x\}$$

له a خخه لوی يا ورسره مساوي حقيقی عددونه

$$(-\infty, a) = \{x \in IR : x < a\}$$

له a خخه کوچنۍ حقيقی عددونه وي.

$$(-\infty, a] = \{x \in IR : x \leq a\}$$

له a خخه کوچنۍ يا ورسره مساوي حقيقی عددونه.

پونسني

1- لاندي انتروالونه د ست په شکل ولیکۍ او د عددونو په محور بې وښي.

- 1) $[5, 7]$ 2) $(9, -3)$ 3) $[-2, 8]$ 4) $(6, 1]$ 5) $[2, \infty)$

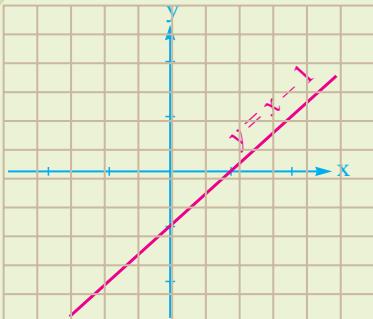
2- لاندي ستونه، د انتروال په چول ولیکۍ.

1) $A = \{x \in IR : 2 < x < 6\}$

2) $B = \{x \in IR : -3 \leq x \leq 5\}$

3) $C = \{x \in IR : 0 \leq x < 4\}$

د لوړۍ درجې بینوم د علامې تاکل



په مخامنځ شکل کې، x د کوم قيمت
لپاره د $y = x - 1$ مستقيمه کربنه، د
 x محور نه د پاسه او x د کوم قيمت
لپاره مستقيمه کربنه، د x محور نه
لاندې پرته د؟

فعاليت

- د $2x - 4$ الجبری افاده خو حده ده؟
- دا افاده د x متحول په کوم قيمت له صفر سره مساوی ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قيمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قيمتونو سره منفي ده؟
- د $P(x) = 2x - 4$ الجبری افادي ګراف رسم کړئ.

د پورتني فعالیت ریاضي بیان، په لاندې ډول په جدول کې لنډوو:

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$	-	0	+

په دې جدول کې ليدل کېږي چې د $2x - 4 \leq 0$ بینوم په $x = 2$ کې مساوی په صفر دی او د هغه قيمتونو لپاره چې له 2 نه کوچني وي، منفي علامه او په هغه قيمتونو کې چې له 2 نه
لوی وي، بینوم مثبته علامه لري.

لوړۍ مثال: د $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ د بینوم علامه وټاکي.

حل: لوړۍ هغه قيمت پیداکوو چې بینوم په هغې کې صفر وي:

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -3 \Rightarrow x = 6$$

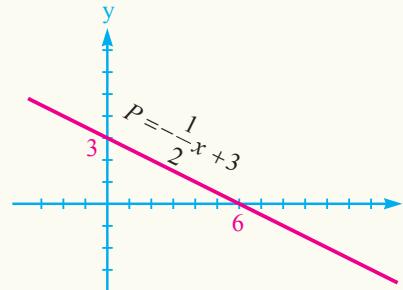
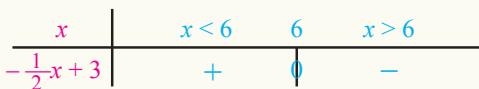
وروسته هغه قيمتونه چې بىنوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راپرو:

$$-\frac{1}{2}x + 3 > 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x > -3 \Rightarrow x < 6$$

په همدي ترتيب، هغه قيمتونه چې بىنوم په هغې کې منفي وي، عبارت دي له:

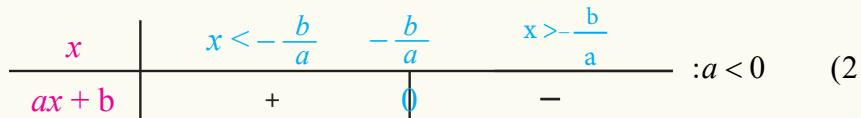
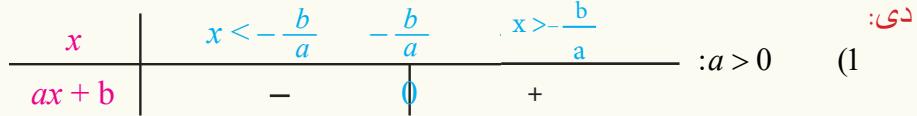
$$-\frac{1}{2}x + 3 < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x < -3 \Rightarrow x > 6$$

لاسته راغلي پايلې په لاندې جدول کې راتيولوو:



پونسته: د $-\frac{1}{2}x + 3$ بىنوم علامه، د $x = 7, x = 3, x = -1$ او $x = 12$ قيمتونو لپاره په لاس راپرئ او د بىنوم رسم شوي گراف شرح کړئ او د خواب سم والی له پورتني جدول سره پرتله کړئ.

نو په کلی حالت کې د $y = ax + b$ بىنوم د علامې د تاکلو لپاره لومړي هغه قيمت په لاس راپرو چې بىنوم په هغې کې صفر کېږي او د علامې د تاکلو جدول یې په لاندې ډول



پونسته

د لاندې الجبری افادو علامې وټاکئ.

- | | | |
|----------------|---------------------|-----------------------|
| 1) $3x - 9$ | 2) $7x - 2$ | 3) $\frac{3}{4}x - 1$ |
| 4) $0.5x + 10$ | 5) $2x - 4 + x - 1$ | 6) $\frac{1}{2}x + 3$ |

$$\frac{?}{?} = +$$

$$\frac{?}{?} = -$$

د a, b حقيقې عددونو لپاره، د $\frac{a}{b}$
کسر، خه وخت مثبت او خه وخت
منفي علامه لري؟

فعاليت

- د $P(x) = \frac{3x+5}{2x-2}$ کسری افاده په پام کې ونيسي.
- د $P(x)$ افاده په کوم حالت کې مثبت کېږي؟
- د $P(x)$ افاده په کوم حالت کې منفي کېږي؟
- د x په کوم قيمت سره د $P(x)$ کسری افاده مساوي په صفر ده؟
- آياکولای شئ د $P(x)$ په افاده کې د x په خاي(1) وضع کړئ؟ ولې.

د $P(x)$ د افادي د صورت او مخرج د علامې له تاکلو خخه وروسته کولاي شو، د $P(x)$ کسری افادي علامه د صورت او مخرج د علامو د پيش له حاصل خخه په لاس راورو:

$$3x+5=0 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

پوهېرو چې د $\frac{-5}{3}$ لپاره د بینوم د صورت علامه منفي او د لپاره د بینوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرج د علامې د تاکلو لپاره لوړۍ هغه قيمت پیدا کوو چې $2x-2$ په هغه کې صفر شي.
 $2x-2=0 \Rightarrow x=1$

په پايله کې له $x < 1$ د خخه بینوم د مخرج علامه منفي او د $x > 1$ لپاره د بینوم د مخرج علامه مثبت ده.

پاملننه وکړي، په هغه قيمت کې چې د کسری افادي مخرج صفر کېږي نه دی تعريف شوي، پورتنۍ بحث په لاندې ډول د علامو د تحليل او ټاکلو په جدول کې داسې لنډوو:

x	$x < -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3} < x < 1$	$1 < x$
$3x + 5$	-	0	+
$2x - 2$	-	-	0
$\frac{3x + 5}{2x - 2}$	+	0	-

نه دی تعريف شوي

نود $\frac{-5}{3} < x < 1$ او $x > 1$ قيمتونو لپاره د $\frac{3x + 5}{2x - 2}$ کسری افادي اشاره مثبت او د

قيمتونو لپاره د $\frac{3x + 5}{2x - 2}$ کسری افادي اشاره منفي ده.

او د $x = \frac{-5}{3}$ قيمت لپاره کسری افادة مساوي صفر ده.

په عمومي ډول، د کسری افادي د اشارې د تحليل او ټاکلو لپاره لومړي د کسر د صورت او مخرج اشاره ټاکو، وروسته د صورت او مخرج د اشارو او د وېش له حاصل خخه د کسری افادي اشاره په لاس را پرو.

مثال: د $\frac{-x + 3}{x}$ کسری افادي اشاره وټاکي.
حل:

$$x = 0$$

x	0	3	$-$
$-x + 3$	+	+	-
x	-	0	+
$\frac{-x + 3}{x}$	-	نه دی تعريف شوي	+

پوښتني

د لاندې کسری افادو اشاره وټاکي.

a) $\frac{-x + 1}{5 + x}$

b) $\frac{x}{x + 1}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{7}$

$$y = \frac{x + 1}{x}$$

$y > 0$?
 $y < 0$

د x په کوم قيمت سره د مخامخ
 کسری افاده مثبته او د x په کوم
 قيمت سره افاده منفي ده؟

فعاليت

د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ کسری نامساوي په پام کې ونيسي.

- د پورتنی نامساوي د رښتينوالي لپاره د کسری افادې صورت او مخرج باید کومه علامه ولري؟
- د x متحول د کومو قيمتونو لپاره د پورتنی کسری افادې صورت مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قيمتونو لپاره د پورتنی کسری افادې مخرج مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قيمتونو لپاره د پورتنی کسری افادې صورت منفي دی؟
- د x متحول د کومو قيمتونو لپاره د پورتنی کسری افادې مخرج منفي دی؟
- د پورتنی فعاليت د لاس ته راغلو پايلو په پام کې نيو لو سره د x متحول د کومو قيمتونو لپاره
 د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي سم دی؟

د پورتنی فعاليت له سرته رسولو خخه ولidel شول چې د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي حل لپاره

باید بېلاپل حالتونه په پام کې ونيسو. د کسری نامساواتو د حل د سټ پيداکولو یوه بله لاره،

د علامو د تاکلو او تحليل جدول دی، د مثال په ډول د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي د حل سټ

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 & \Rightarrow & x = 2 \\ 4 + 2x &= 0 & \Rightarrow & x = -2 \end{aligned}$$

پيداکولو لپاره داسې عمل کوو:

x	-2	2	
$x - 2$	-	-	0 +
$4 + 2x$	- 0	+ 0	
$\frac{x-2}{4+2x}$	+ نه دی تعریف شوی 0	- 0	+ د نامساوی حل

د علامو د تحلیل او تاکلو په جدول کې لیدل کېږي چې هغه قيمتونه چې له ($x < -2$) او له ($x > 2$) وي، افاده یې مثبته ده او له هغو قيمتونو خخه چې له ($-2 < x < 2$) کوچنی ($-2 < x < 2$) وي، منفي ده. په پایله کې نامساوی د حل سټ عبارت دی له $x < -2$ او $x > 2$ يا $\{x \in R : x < -2\} \cup \{x \in R : x > 2\}$ يا $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

مثال: د کسری نامساوی حل کړئ؟

حل: د نامساوی د حل سټ د پیداکولو لپاره، لوړۍ کسری افاده له صفر خخه یو وار کوچنی یا لويه ليکو:

$$\frac{2x}{5x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{2x}{5x+3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x - (5x+3)}{5x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3} \geq 0$$

$$-3x-3=0 \Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

اوسم د نامساواتو د علامو د تاکلو له جدول خخه د نامساوی حل په لاس راورو.

x	-1	$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	+	0	-
$5x+3$	-	-	0 +
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	- 0	+ نه دی تعریف شوی	- د نامساوی حل

پورتنی جدول ته په پاملرنې سره د نامساوی حل عبارت دی له: $\{x \in IR : -1 \leq x < \frac{-3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسری نامساوی د حل لپاره په لاندې ډول پر مخ ځو:

- نامساوی داسې ليکو چې له صفر خخه کوچنی یا لويه وي.

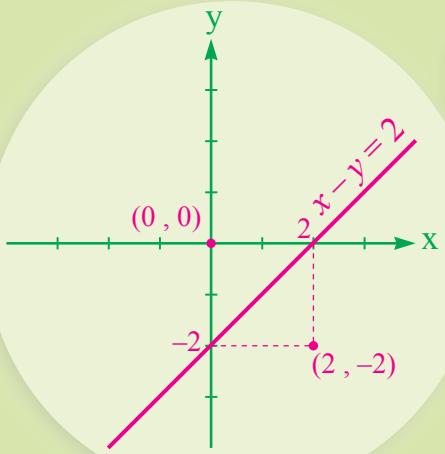
- نامساوی د علامو د تاکلو له جدول خخه د نامساوی د حل سټ په لاس راورو.

پونسني

د لاندې نامساواتو د حل سټ پیدا کړئ.

$$1) \frac{-x-9}{2x+4} < 0 \quad 2) \frac{6x+7}{7-6x} \leq 0 \quad 3) \frac{x+10}{2x-3} \geq 0 \quad 4) \frac{7x-2}{3-2x} > 3$$

خطي دوه متحوله نامساوات



د $x - y = 2$ مستقيمه کربنه، د وضعیه کمیاتو مستوی، په دوه پاسنی او لاندینې ناحیو و بشی د کومې ناحیې د تکو مختصات په $x - y < 2$ نامساوی کې صدق کوي؟

د $x - y < 2$ نامساوی چې په هغې کې د x او y متحولين لومړۍ درجه دي یو خطی دوه متحوله نامساوی بلل کېږي.

فعالیت

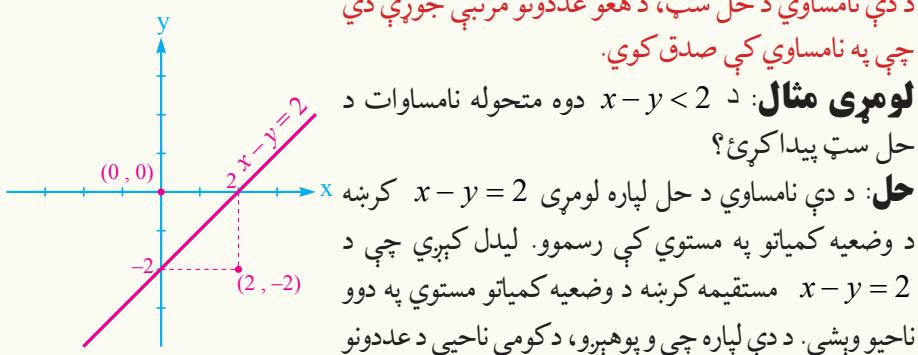
- د (x, y) مرتبې جورې داسي په لاس راوري چې په $x - y < 2$ نامساوی کې صدق وکړي.
- څومره مرتبې جورې پیداکولای شئ چې په پورتنې نامساوی کې حقیقت ولري؟
- آياکولای شئ نورې درې مرتبې جورې پیداکړئ چې په پورتنې نامساوی کې صدق وکړي؟

په پورتنیو حالاتو کې ويلاي شو چې:

د $ax + by < c$ نامساوی چې په هغه کې $a, b, a \neq 0$ يا c حقيقی عددونه او b, a وی، خطی دوه متحوله نامساوی بلل کېږي.

دې نامساوی د حل سټ، د هغۇ عددونو مرتبې جورې دې چې په نامساوی کې صدق کوي.

لومړۍ مثال: د $x - y < 2$ دوه متحوله نامساوات د حل سټ پیداکړئ؟



مرتبې جورې په نامساوی کې صدق کوي، له هري ناحيې خخه يوه مرتبه جوره تاکو او په نامساوی کې يې وضع کوو.

د مثال په چول، $(0, 0)$ مرتبه جوره په نامساوی کې صحيح ده.

$$0 - 0 < 2 \Rightarrow 0 < 2$$

نو هغه تکي چې د مستقيمي کربنې پورته خوا ته ده، د نامساوی حل ده.

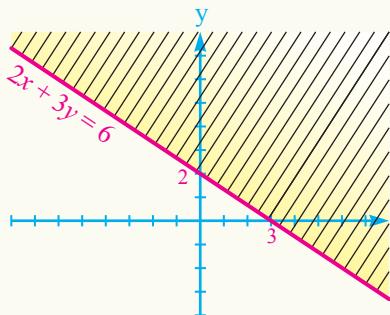
د نامساوی د حل سټ د بنودلو لپاره هغه اړخ د مستقيمي کربنې توروو چې په نامساوی کې سموالی نه لري.

پونسته: خونور تکي له مستقيمي کربنې خخه پورته او بنکته خواته وتاکي او بيا پورتنې پايله وڅېږئ؟

دویم مثال: د $2x + 3y < 6$ نامساوی د حل

سټ پیدا کړئ؟

حل: لوړۍ د $2x + 3y < 6$ کربنې د وضعیه کمیاتو په مستوی کې رسموو، وروسته د نامساوی د حل سټ د پیدا کولو لپاره د مستقیم د پاسه یا بنکته خواته د یوه تکي مختصات تاکو او په نامساوی کې يې وضع کوو، که حقیقت يې درلود، هغه اړخ د نامساوی حل ده او بل عکس نه ده.



لكه د $(0, 0)$ د وضعیه کمیاتو مبدأ مرتبه جوره به پام کې نیسو:

$$2x + 3y < 6$$

$$2 \times (0) + 3 \times (0) < 6$$

$$0 < 6$$

خرنګه چې د نوموري تکي مختصات په نامساوات کې حقیقت لري، نو د کربنې لاندې خوا تکي د نامساوی د حل سټ ده.

پونسته

1) $3x - 2 < 5x + y$

2) $2y < 3x$

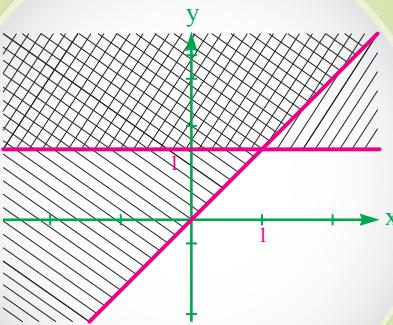
3) $x + y > 0$

4) $2x - 6y \geq 8x + 4y$

5) $x + y < 0$

6) $5x - 3y < -1$

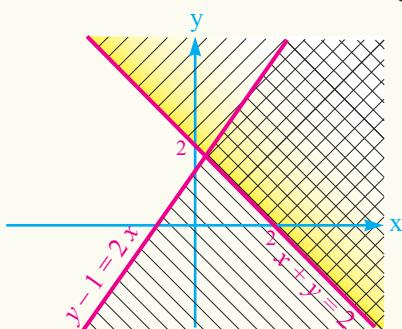
د دوه متحوله خطی نامساوی سیستمونه



د لاندې نامساوی گانو، د حل سټ پیدا کړئ. آیا کولای شې اټکل وکړئ چې مخامنځ شکل د کومو نامساواتو د حل ساحه رابنېي؟

د نامساواتو سیستم چې په هغه کې دوه خطی، دوه متحوله نامساوی دي، د نامساوی سیستم بلل کېږي.

د نامساواتو سیستم له حل خخه مطلب دا دی چې هغه مرتبې جوري پیدا کړو چې په یوه وخت کې په دواړو نامساواتو کې صدق وکړي.
لومړۍ د هر یوه نامساوی حل د وضعیه کمیاتو په مستوی کې په لاس راوړو.
هغه ناحیه چې ګله نه ده خط، خط شوې له نامساوات سره په یوه وخت کې د حل په سټ کې ګلپون لري او دا ناحیه د نامساوات د سیستم حل دي.



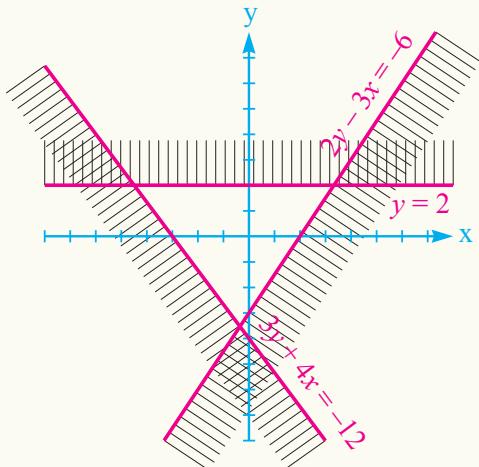
د $x + y = 2$ کربنې د رسمولو لپاره، که $x = 0$
وې، $y = 2$ اوکه، $y = 0$ وي، نو $x = 2$ کېږي
او $y - 1 = 2x$ کربنې کې که $x = 0$ وي،
اوکه $y = 0$ وي، نو $x = \frac{-1}{2}$ سره کېږي.

د دوه متحوله خطی نامساوی د سیستم د حل لپاره داسي عمل کوو:
لومړۍ د هر یوه دوه متحوله خطی نامساوی د سیستم حل، د وضعیه کمیاتو په مستوی کې تاکو.
هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل د ست یوه برخه وي، د سیستم حل دی.

مثال: د لاندی نامساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y - 3x > -6 \\ y - 2 < 0 \\ 3y + 4x > -12 \end{cases}$$

حل: لوړې د پورتنی نامساوی هره یوه ګربنې رسموو یعنې:
 $3y + 4x = -12$ او $y - 2 = 0$, $2y - 3x = -6$



د $x = 0$ 2y - 3x = -6 رسمولو لپاره که
 وي، $y = -3$ او د $y = 2$ ګراف
 لپاره که $x = 0$ وي، $y = 2$ کېږي او د
 3y + 4x = -12 ګربنې د رسمولو لپاره که
 وي، $y = -4$ کېږي چې د نومورو
 قيمتونو په مرسته یې ګراف په مخامنځ به
 رسموو .

وروسته د هرې یوې نامساوی د حل ساحه په بیل بیل ډول ټاکو.
 د ورکړل شوو نامساواتو سیستم د حل سټ په شکل کې د نه توري شوې ناحيې په شکل کې
 لیدل کېږي.

پوښتني

د لاندی سیستمونو د حل سټ د ګراف په مرسته په لاس راوړئ؟

1) $\begin{cases} x < 3 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 3y < 9 \\ 5x - 2y > 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x < 3 \\ y > 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 3y < -3 \\ 5x - 2y > 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y < 4 \\ x - y < 3 \\ 5x - y > 1 \end{cases}$

د شپرم خپرکي لنديز:

- که چيرې عددونه د دي علامو($<$, $,$ \leq , $>$, \geq) په مرسته يو له بل سره اړیکه ولري، د نامساوي په نامه یادپري.
- که د یوه نامساوي له دواړو خواوو سره یو حقيقی عدد جمع یا تفرقه کړو، په نامساوي کې بدلون نه راخې.
- که د یوه نامساوي دواړه خواوې، په یوه مثبت حقيقی عدد د صفر خلاف ضرب یا تقسيم شي په نامساوي کې بدلون نه راخې.
- که د یوه نامساوي دواړه خواوې، په یوه منفي حقيقی عدد د صفر خلاف ضرب یا ووبشل شي، د نامساوي لوري بدلون کوي.

$[a, b] = \{x \in IR : a \leq x \leq b\}$ ترلي انتروال

$(a, b) = \{x \in IR : a < x < b\}$ خلاص انتروال

$(a, b] = \{x \in IR : a < x \leq b\}$ نيمه خلاص انتروال

$[a, b) = \{x \in IR : a \leq x < b\}$ نيمه ترپلي انتروال

- د یوې کسري افادي د علامې د ټاکلو لپاره لوړۍ د صورت او مخرج علامه بېله ټاکو وروسته د علامو د وېش حاصل په لاس راړو.

- $x + 3 \leq 5$ دوہ متحوله خطې نامساوي د سیستم د حل لپاره داسي عمل کوو.
لوړۍ د هر دوہ متحوله خطې نامساوي د سیستم حل، د وضعیه کمیاتو په مستوی کې ټاکو. هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل ستي یوه برخه وي، د سیستم حل دي.

د شپرم خپرکي پونتنې

• په لاندي پونتنو کې د هري پونتنې لپاره خلور خوابونه ورکړل شوي دي، سم خواب په نښه کړئ:

1- له لاندي نامساواتو خخه کوم يو سم دي؟

$$a) \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \leq 2 - \frac{1}{3} \quad b) \frac{3}{2} > \sqrt{2} \quad c) \sqrt{9+16} \geq 5 \quad d) \text{ او } c \text{ او } b, a \text{ د خوابونه}$$

2- د $x+3 \leq 5$ نامساوي د حل سټ عبارت دي له:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $\{x \in IR : x \leq 2\}$ | b) $\{x \in IR : 2 \leq x\}$ |
| c) $\{x \in IR : x \leq 8\}$ | d) $\{x \in IR : x < -2\}$ |

3- د لاندي انتروالونو خخه کوم يو د $-1 < 2x+3 < 0$ نامساواتو د حل سټ دي.

- | | | | |
|-------------------|------------------|------------------|-------------------|
| a) $[-2, \infty)$ | b) $(2, \infty)$ | c) $(1, \infty)$ | d) $(-2, \infty)$ |
|-------------------|------------------|------------------|-------------------|
- 4- که $0 < a < b$ خخه وي، له لاندي اړیکو خخه کومه يوه سمه ده.

$$a) \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \quad b) \frac{-1}{b} < \frac{-1}{a} \quad c) -b < -a \quad d) \text{ او } b, a \text{ د خوابونه}$$

5- له لاندي انتروالونو خخه کوم يو د $\frac{x+3}{3-x} > 0$ نامساوي د حل سټ دي؟

- | | | | |
|--------------|-------------------|-------------------|--------------|
| a) $(-3, 3)$ | b) $(-\infty, 3)$ | c) $(-3, \infty)$ | d) $(-3, 3)$ |
|--------------|-------------------|-------------------|--------------|

• تشن خایونه، په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1- د $ax+by < 0$ نامساواتو کې د ټولو هغه سټ چې په نامساواتو کې

صدق وکړي، د پورتني نامساواتو د حل سټ بلل کېږي.

2- د $[4, 5]$ انتروال، د په نامه یادېږي.

3- د $2x+4 < 0$ بینوم، د قيمتونو لپاره منفي کېږي.

4- د $x + \frac{1}{2} < 0$ بینوم، د قيمتونو لپاره مثبت کېږي.

5- د $2x+5 \leq \frac{1}{5}-x$ نامساوي د حل سټ عبارت دي له

• له لاندې جملو خخه چې کومه يوه سمه وي، د هې په مخ کې د(s) توری او د ناسې

په مخ کې (x) توری ولیکي.

-1) د يوې نامساوي د حل سټ يو عنصر لري.

-2) د $\{x \in R : 2 \leq x < 5\}$ يو تړلی انتروال دي.

-3) د نامساوي ګانو د سیستم د حل سټ، د وضعیه کمیاتو د مستوی يوه برخه ده.

-4) د خطې نامساوي د حل سټونه بې شمیره دي.

-5) خرنګه چې $3 < 2 - \frac{x}{3} < 2$ - خخه دي نو، له دې ځایه دا پایله $-\frac{1}{2} < x < 0$ اخیستلای

شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

-1 د لاندې نامساوي ګانو حل په لاس راوړئ.

$$a) \frac{x-5}{4} - \frac{x-8}{3} < 0$$

$$b) x - 2 < 3(2x - 9)$$

$$c) x^2 - 9 < 0$$

$$d) \frac{3x+4}{x} - 1 < 0$$

$$e) 1 - \frac{2}{x} \leq 3$$

-2 لاندې انتروالونه د عددونو پر محور وښیع.

$$a) [-1, 2] \quad b) (-2, 1] \quad c) [-1, 1) \quad d) (-2, 2)$$

-3 د لاندې عددونو سټونه، د انتروال په بنه ولیکي او د عددونو پر محور یې وښیع.

$$a) \{x \in IR : x \leq 2\} \quad b) \{x \in IR : x \leq 5\}$$

$$c) \{x \in IR : -1 \leq x \leq 6\} \quad d) \{x \in IR : -4 < x < 2\}$$

4- د لاندې نامساوی د سیستم حل پیدا کړئ:

a)
$$\begin{cases} y > x \\ 3y < 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$$

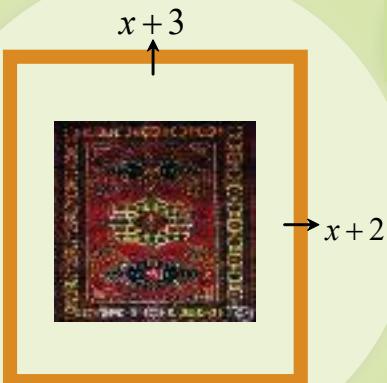
e)
$$\begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$$

اووم خپرکی
دویمه درجه یو مجهوله
معادلی



دويمه درجه يو مجھوله معادلي (Quadratic Equation)



که يوه کوتې، د يوې مریع شکل غالی
په وسیله فرش کړو، په دې شرط چې
د خونې اوږدوالي د غالی له اوږدوالي
څخه د $3m$ په اندازه او سورې په د غالی
له سور څخه د $2m$ په اندازه زیات وي،
د کوتې او غالی د مساحتونو معادلي خه
ډول لیکلای شو؟

فعاليت

- الجبری افاده تعريف کړئ.
 - معادله تعريف کړئ.
 - د يو مجھوله لوړۍ درجې معادلي یو مثال ولیکي.
 - د يو مجھوله لوړۍ درجې معادلي عمومي شکل ولیکي.
 - $(x-2)(x+3) = 0$ معادلي د قوسونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.
 - د پورتني معادلي درجه د $x+4=3x-1$ معادلي له درجې سره پرتله کړئ.
- هغه معادلي چې یو مجھول ولري او د هغې درجه دوه وي یو مجھوله دويمه درجه معادله بلل کېږي چې عمومي شکل یې $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ چې a, b, c حقيقی عددونه او x مجھول بلل کېږي، که چېږي $b = 0$ یا $c = 0$ وي، په دې حالت کې دې ډول معادلي ته نیمګړی دويمه درجه معادله وايي.

لوړۍ مثال: یو تار چې یو متر اوږدوالي لري غواړو له هغه څخه یو مستطيل چې مساحت یې 600cm^2 دی جوړ کړو، د دې مستطيل اوږدوالي او سور خرنګه وټاکو؟

حل: که د مستطيل اوږدوالي x او سورې په y وښيو، د مستطيل محيط د I

$$2(x+y) = 100 \dots I$$

او مساحت یې له $II \dots II$

$$x \times y = 600$$

$$\begin{cases} 2(x+y) = 100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \dots I \\ x \cdot y = 600 \dots II \end{cases}$$

د I له معادلې خخه د y قيمت د x له جنسه په لاس راوري او په II معادله کې بې وضع کوو:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \Rightarrow x(50-x) = 600$$

$$50x - x^2 = 600$$

خرنگه چې په پورتنی معادله کې د x درجه دوه ده، نو نوموري معادله دويمه درجه ده. د معادلو د حلونو پيدا کولو لپاره بېلاپېلې لاري شته چې هغه تر خېړې لاندي نيسو.

دويم مثال: هغه عدد په لاس راوري چې مرع يې د 6 په اندازه له خپل عدد خخه زياته وي.

حل: که چېږي عدد په X ونوموو، نو پورتنی بيان د رياضي په بنه داسې ليکو:

$$x^2 = 6 + x \quad x^2 - x - 6 = 0$$

د دي ډول معادلو حل به په راتلونکي لوست کې وڅېرو

درېم مثال: په لاندي معادلو کې د عمومي شکل له مخې د b, a او c ضربونو قيمتونه ولېکي.

حل:

a) $2x^2 - 4x + 1 = 0$	b) $3x - x^2 = 4$	c) $4x^2 - 1 = 0$
d) $7x^2 = 49$	e) $x^2 - 4 = 0$	f) $\frac{3}{4} - x^2 = \frac{2}{3}x$

جزء	معادلې	د ضرب a	د ضرب b	د ضرب c
a	$2x^2 - 4x + 1 = 0$	2	-4	1
b	$3x - x^2 = 4$	-1	3	-4
c	$4x^2 - 1 = 0$	4	0	-1
d	$7x^2 = 49$	7	0	-49

پونسي

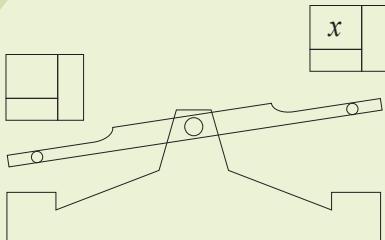
1- په لاندي معادلو کې پوره او نيمګړي دويمه درجه معادلې په ګونه کړئ.

a) $6 - 2x + x^2 = 0$ b) $5x^2 - 3x + 1 = 0$ c) $\sqrt{2}x^2 - 4x = 0$ d) $-x^2 = 3$

2- په لاندي معادلو کې د a, b او c ضربونه وښيئ.

a) $6x^2 - 4x = 2$ b) $3x - 4 = x^2$ c) $4x - x^2 - 6 = 4x^2$

د دويمه درجه يو مجھوله معادلي حل



آيا کولاي شئ چې د x لپاره داسې قيمت پيدا کړئ چې تله په تعادل کې راشي؟

فعاليت

x	$2x + 4$	$3x - 1$
-3		
-2		
0		
5		

- د $2x + 4 = 3x - 1$ معادلي حل پيدا کړئ.
- پورتني مساوات د x د بېلاښو قيمتونو لپاره په مخامنځ جدول کې وڅېږئ.

x	$x^2 - 4x + 3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	

- د جدول او پاسني پونستني په پام کې نیولو سره توضیح ورکړئ چې د معادلي د حلولو پيدا کول یعنې خه؟
- مخامنځ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2 - 4x + 3 = 0$ معادلي حلونه په لاس راوري؟

هغه قيمتونه چې په يوه دويمه درجه معادله کې برابرولي راولي، د يو مجھوله دويمې درجې معادلي حل بلل کېږي.

لومړۍ مثال: هغه عدد پيدا کړئ چې مربع يې د 12 واحدو په اندازه له عدد خخه زیاته وي.

حل: که چېږې عدد ته x ووایو، نو الجبری عبارت داسې بنه نیسي:

$$x^2 = x + 12$$

خرنګه کولاي شو چې له پورتني مساوات خخه د هغې حل پيدا کړو؟

که چېري $x = 1$ په معادله کې وضع کړو، نولیدل کېري چې د مساوات بني اړخ د 13 عدد او کين اړخ ته یې د 1 عدد په لاس راخي. په معادله کې د $x = 2$ قيمت په وضع کولو سره لیدل کېري چې د مساوات بني اړخ ته 14 او کين اړخ ته یې، د 4 عدد په لاس راخي او د $x = 3$ په وضع کولو سره لیدل کېري چې بني اړخ ته 15 عدد او کين اړخ ته د 9 عدد دي. په همدي ترتیب د نورو قیمتونو په وضع کولو سره، لکه په $x = 4$ لیدل کېري چې د مساوات بني اړخ ته د 16 عدد او کين اړخ ته هم 16 عدد په لاس راخي، لیدل کېري چې له $= 16$ مساوي کېري، نو $x = 4$ د معادلي یو حل دي.

x	x^2	$x + 12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د پورتنۍ لارې لنډيز چې د معادلي حل د پيدا کولو لپاره مو ترې گته واخیسته کولای شو، په مخامنځ جدول کې داسې وليکو: آيا کولای شو چې د دویمه درجې معادله د حل لپاره یوه بشپړه لاره پیدا کړو؟

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوري چې د هغې د مربع جمع له 1 سره مساوي په صفر شي.

حل: د پاسني بيان العتبري افадه عبارت ده له: $x^2 + 1 = 0$

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

د پورتنۍ لارې په خېر د اټکل شویو عددونو په وضع کولو سره د معادلي د حل په لټولو پیل کوو او پر مخ څو، دې کار لپاره د پورتنۍ جدول په خېر، مخامنځ جدول په پام کې نیسوا. په دې جدول کې لیدل کېري چې نه شو کولای تعادل وساتو، یعنې د X لپاره داسې قيمت نه شو پيدا کولای چې د معادلي دواړه خواوې مساوي کړي. له بلې خوا له معادلي خخنه خرګندېري کله چې یو عدد مربع کړو او یو ورسره جمع کړو، هیڅ وخت مساوي په صفر نه شي کیدالای، نو دا دویمه درجه معادله حل نه لري.

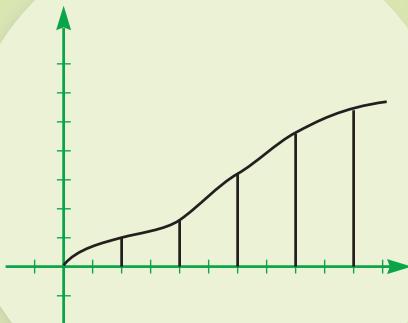
پښتنې

1- یوه دویمه درجه یو مجھوله معادله وليکي چې حل و نه لري.

2- لاندې معادلي حل کړي.

a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 = 0$

غیر خطی اړیکې



ډاکټران د یوه ماشوم د نې(قد) او بدواں په بېلابلو وختونو کې، په مخامنځراف کې خپرې. آیا تاسې تر او سه پوري د خپلې نې(قد) د او بدواں یې بدلون ته فکر کړي دی چې په بېلابلو وختونو کې خومره وو؟

فعالیت

- د یوه مربع د ضلعې د او بدواں او مساحت تر منځ اړیکه په پام کې ونيسي، د مربع د ضلعې او بدواں په x او مساحت یې په y بنیو.
- د x او y اړیکه په یوه معادله کې وبنیو.
- مخامنځ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y	4			25	

- د قایموم مختصاتو په سیستم کې د پورتنیو مرتبو جو رو تکي وتاکن او له یوبل سره یې ونبلوئ.
- د دقیق ګراف د رسماولو لپاره x ته ډېر سره نزدې قیمتونه ورکوو، لاندې جدول پوره کړئ، د پورته په خپر تکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وتاکن او ګراف یې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

- د پورتنی جدول په مرسته لاندې جدول په خپلوا کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	-3	-2.8	-2.6	-2.4	-2.2	-2	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	
$y = x^2$															0

- له پورتنیو جدولونو خخه په ګټې اخیستلو سره، $y = x^2$ معادلې ګراف په ډېر غور سره رسم کړئ.

له پورتنی فعالیت خخه، لاندې پایله په لاس راخی:

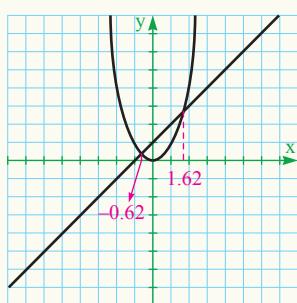
پايه: په پورتني فعالیت کې مو ولیدل چې د $y = x^2$ معادلي گراف کربنه نه ده.

مثال: د سیستم د معادلاتو گراف د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ او

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

ګډ حل یې پیدا کړئ؟

حل: له هغو لارو خخه چې مخکې مو د گراف د رسمولو لپاره ترې گټه واخښته، د پورتنيو معادلو د گرافونو د رسمولو لپاره د هغو د عددونو د مرتبو جو پو جدولونه ترتیب او د مختصاتو په سیستم کې د معادلو له ټاکلو خخه وروسته یې گرافونه رسموو.



د $y = x^2$ لپاره لرو:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

د $y = x + 1$ لپاره:

x	0	1
$y = x + 1$	1	2

د گراف له مخي د ګډ حل د ټکو ورنزدي قيمتونه یې مساوي په:

$$x_1 = 1.62, \quad x_2 = -0.62$$

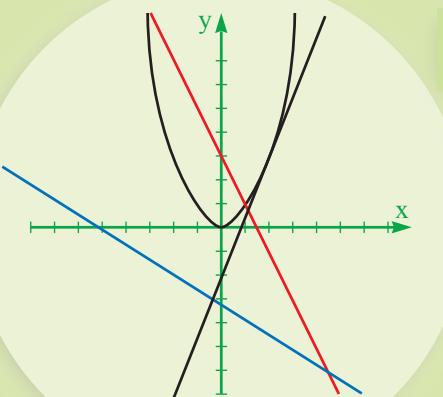
نوښتې

د لاندې سیستمونو گراف رسم کړئ.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

د دويمې درجي معادلي حل، په هندسي لاره (طريقه)



په مخامنځ شکل کې، مستقيمي کربنې،
له ورکړل شوي منحنۍ سره، په خو
حالتونو کې دي؟

فعاليت

- آياد $x^2 - 6x + 7 = 0$ معادله کولای شو چې داسي $x^2 = 6x - 7$ ولیکو؟
- که چېري نوموري مساوات له y سره مساوي وي، $y = x^2 = 6x - 7$ نو او $y = x^2$ دی $y = 6x + 7$.
- د معادلو د سيسنتم ګراف د مختصاتو په سيسنتم کې رسم کړئ؟
- د پورتنې سيسنتم ګرافونه یو بل په خو تکو کې پري کوي؟
- د پورتنې سيسنتم حل د ګرافونو د پرېکړي له تکو سره خه اړیکه لري؟

له پورتنې فعالیت خخه لاندې پایله په لاس راخي:

- هره دويمه درجه معادله کولای شو چې د $y = x^2$ معادلي او د $y = ax + b$ کربنه ایزو معادلو په څېر ولیکو.

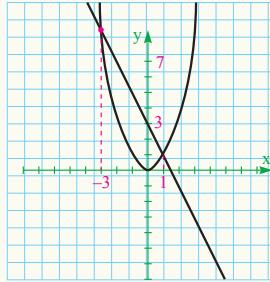
- x تکي د تقاطع مختصه (په هغه حالت کې چې وي) د دويمې درجي معادلي حل دي د پورتنې کرنې په مرسته د دويمه درجه معادلي حل پيداکول د هندسي حل په نامه یادېږي.

لومړۍ مثال: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادلي حل په هندسي لاره پيدا کړئ؟

حل: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو او ګراف یې رسم کړو.

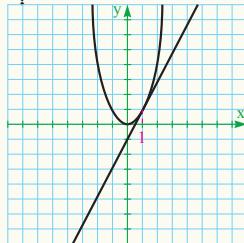
$$x^2 = -2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4
x	0	3			
y	3	-3			



له شکل خخه ليدل کېږي چې مستقيمه کربنه منحنۍ په دوو بېلو تکو کې قطع کوي چې د تقاطع تکي د x مختصه د دويمه درجه معادلي حل دي يعني $x_2 = 1$ ، $x_1 = -3$ دويم مثال: د $x^2 + 2x + 3 = 0$ معادلي حل د هندسي لارې په مرسته پيدا کړئ؟ حل: د $y = x^2$ معادلي او د $y = 2x - 1$ مستقيمي کربني شکلونه رسموو.

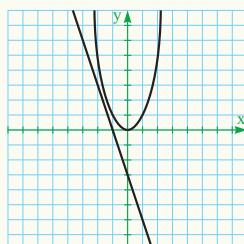
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	+9	4	1	0	1	4	9
	x	0	-1					
	y	-1	-3					



ليدل کېږي چې کربنه له منحنۍ سره په يوه تکي کې مماس ده چې د x نقطې مختصه (قيمت) د معادلي حل دي.

دريم مثال: د $x^2 + 3x + 3 = 0$ معادلي حل په هندسي لاره پيدا کړئ.

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	+9	4	1	0	1	4	9
	x	0	-1					
	y	-3	0					



ليدل کېږي چې مستقيمه کربنه منحنۍ نه قطع ، نو دويمه درجه معادله حل نه لري.
يادونه:

که چيرې منحنۍ په دوو تکو کې قطع کړي، معادله دوو حله لري.

که چيرې منحنۍ په يوه تکي کې قطع کړي، معادله يو حل لري.

که چيرې منحنۍ قطع يا غوشه نه کړي، معادله حل نه لري.

پونسټي

1- د لاندي معادلو حل په هندسي لاره پيدا کړئ.

- a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 - 6x + 8 = 0$ c) $x^2 - 5 + 7 = 0$



د دوو عددونو د ضرب حاصل، خه
وخت مساوي په صفر دي؟

فعاليت

- که a او b دوه حقيقي عددونه وي، خه وخت $a \times b = 0$ کېږي؟
- د $(x-1)(2x+3)$ د ضرب حاصل په پام کې ونيسي، آيا ويلای شئ چې خه وخت دا حاصل ضرب مساوي په صفر دي؟
- $2x^2 + x - 3 = 0$ معادله له $(x-1)(2x+3)$ حاصل ضرب سره خه اړیکه لري؟
- د مخکیني لاري (طريقي) خخه په ګټې اخیستنې سره د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادلي حلونه پیداکړئ او د $(x-1)(2x+3) = 0$ معادلي له حلونو سره بې پرتله کړئ؟

د پورتنې فعالیت پایله په لاندې ډول په لاس راړو:

- پایله:** که وغواړو، چې دويمه درجه معادله، د دوو خطې افادو د ضرب د حاصل په شکل واروو، نو په دې حالت کې، د معادلي حل ساده کېږي چې په لاندې ډول عمل کوو:
- د اعدادو له خاصيتونو خخه پوهېړو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل هغه وخت صفر دي چې یو د هغوي له ضربې اجزاءو خخه یو مساوي په صفر وي، دا مسئله د الجبری افادو لپاره هم سمه ده.
 - د هري خطې يا کربنه ايزې الجبری افادي حل چې د یوې دويمې درجه معادلي مساوي ده، د دويمې درجه معادلي حل دي.

لومړۍ مثال: د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حل د تجزې په مرسته په لاس راوړئ.

حل: د $x^2 - 7x + 6$ له تجزې خخه لرو چې:

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$$

دنوموږي ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغو فکټورونو خخه مساوی په صفر

وي او یا دواړه صفر وي یعنې:

$$1) \quad x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1$$

$$2) \quad x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=6$$

نو 1 او 6 د $x^2 - 7x + 6 = 0$ د معادلې حلونه دي.

دوييم مثال: د $2x^2 - 5x - 3 = 0$ معادلې حل د تجزې په لاره پیدا کړئ.

حل: تر او سه مو هغه معادلې په فکټورونو تجزې کړي، چې د x^2 ضریب (1) و، خود

هغو معادلو چې د x^2 ضریب یې یونه وي، په لاندې ډول یې بدلورو، د دې لپاره چې د

ضریب یو هې بشپړه مربع شي، نو د معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب کې ضریبوو:

$$A = 2x^2 - 5x - 3$$

$$2A = 4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

$$2A = (2x+1)(2x-6)$$

$$A = \frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A = (2x+1)(x-3)$$

$$1) \quad 2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{او د } A \text{ د معادلې د حل لپاره لرو:}$$

$$2) \quad x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

پونسني

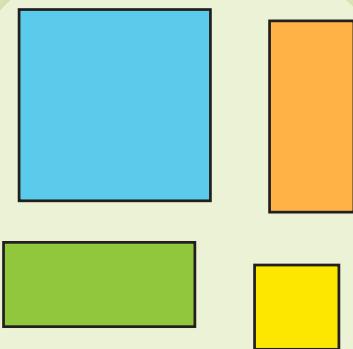
لاندې معادلې د تجزې په لاره حل کړئ.

$$1) \quad x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$2) \quad x^2 + x - 2 = 0$$

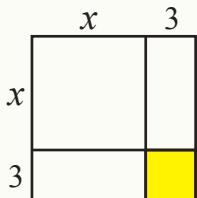
$$3) \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

د دويمې درجي معادلي حل د تكميل مربع په طرifice



هخه وکړئ چې د دې شکلونو په یو ئځای
کېدو سره یوه لویه مربع جوړه کړئ.

فعاليت



- د لوپي مربعې د ضلعې اوږدوالي خومره دي؟
- د هري برخې مساحت، د شکل پر مخ ولیکي.
- $0 = 0 - 40 + 6x^2 + 6x$ معادله داسې ترتیبورو چې متحول لرونکي
حدونه، یو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته نقلوو.
- متحول لرونکي الجبري افадه له رنګ شوي مساحت سره خه اړیکه
لري؟

• د مستطيلونو د مساحت عددې ضريب، د دويمې درجي معادلي د x له ضريب سره خه
اړیکه لري؟

- د لوپي مربع مساحت خومره دي؟
- د دي لپاره چې د متحول لرونکي الجبري افادي د لوپي مربع د مساحت سره برابره شي،
کوم عدد، د تساوي دواپو خواوو ته ورزیات کړو؟
- له په لاس راغلې اړیکې خخه د قيمت (د دويمې درجه معادلي حل) حل په لاس راوړو.

محمد بن موسى دالاره(طرifice)، د دويمې درجي معادلي لپاره پیدا کړله. د دې طرifice په پوره
کېدو سره د دويمې درجي د معادلو په حل کې په بشپړه توګه ګهه اخیستل کېږي، په دې روش
کې د $0 = 0 - 40 + 6x^2 + 6x$ دويمه درجه معادله په $(x + p)^2 = q^2$ بهه بدلتپري چې د تجزې
پړاوونه یې عبارت دي له:

- لومری p د x د ضریب له نیمایی سره وضع کوو، یعنی $P = \frac{b}{2}$
- وروسته $= -c + (\frac{b}{2})^2 = q^2$ وضع کوو.
- په پای کې د $x + p = q$ معادله لرو.

لومړۍ مثال: د $x^2 + 2x - 8 = 0$ معادله د تکمیل مریع په تګ لاره حل کړئ؟

حل: لومری معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2 + 2x = 8$$

د x د ضریب نیمایی په لاس راپرو، مریع بې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$x+1 = 3$$

$$x = 2$$

یادوونه: ټولې دویمه درجه معادلې نه شوکولاي په دې میتود حل کړو، خکه دا میتود هندسي بدلون ته اړتیا لري، نو خکه په دې میتود نه شوکولاي چې د هغه معادلو حل چې منفي جذرونې لري هم په لاس راپرو.

پوښتې

لاندې معادلې د تکمیل مریع په تګ لاره حل کړئ؟

a) $x^2 + 8x - 24 = 0$ b) $x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$ c) $x^2 - 6x - 13 = 0$

د محمد بن موسى فورمول یا د تکمیل مربع طریقې د حل پراختیا:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضرب ووېشی او ووایاست چې مخامنځ مساوات حقيقة لري، که نه؟

ومو لیدل چې دویمه درجه معادله په عمومي ډول داسې $ax^2 + bx + c = 0$ لیکو چې په هغې کې b, a او c حقيقة عددونه او a د صفر خلاف یو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \text{ معادلې دواړه خواوې په } a \text{ وېشو:}$$

• ثابت عددونه، د مساوات یو خوا او مجھول حدونه، د مساوات بلې خوا ته نقلوو، د x د ضرب د نیمایي مربعې دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د لنډې لیکنې لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ سره بنیوو.

فعالیت

هره دویمه درجه معادله چې $ax^2 + bx + c = 0$ بنه ولري، لاندې پوبنتنو ته خوابونه ووایسی:

1- که $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ وي، نو د حلونو د لرلو په صورت کې د معادلې حلونه کوم دي.

له پورتنی فعالیت خخه لاندې پایله په لاس راخي:

لومړۍ پایله: د $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادلې چې b, a او c حقيقې $a \neq 0$ وي.

$\Delta = b^2 - 4ac$ د چې د قاسمې په نوم یادېږي، له معنۍ لرو:

1- که $\Delta > 0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري چې عبارت دي له:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- که $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مساوی یا مضاعف حلونه لري چې عبارت دي له:

3- که $\Delta < 0$ وي، معادله د حقيقی عدلونو په سېټ کې حل نه لري.

دویمه پایله: د حلونو د جمع او ضرب حاصل

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرنووند جمع او ضرب له حاصل خخه کولای شو د دویمه درجه معادلې په تجزیه کولو کې گټه واخلو.

لومړۍ مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 1 = 5$$

حل: لومړۍ د Δ قيمت پیدا کوو:

خرنګه چې $\Delta > 0$ ده، نو معادله دوه بېلابېل حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

دویمه مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پیدا کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4 \times 9 \times 4) = 144 - 144 = 0$$

حل: لرو چې:

خرنګه چې $\Delta = 0$ ده، معادله دوه مساوی حلونه لري:

درېم مثال: د $5x^2 + 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نومورې معادله د حقيقی عدلونو په سېټ کې حل نه لري، خکه $\Delta < 0$ خخه ده یعنې

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 = -16$$

څلورم مثال: د $4x^2 - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرنووند جمع او ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتني

لاندې معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

داووم خپرکي لنديز

- د دويسي درجه معادلي عمومي بنه د $ax^2 + bx + c = 0$ چي $a \neq 0$ دول ده.
- هغه معادلي چي د $ax^2 + bx = 0$ او $ax^2 + c = 0$ په دول وي، د دويسي درجي نيمگري معادلي په نامه يادبري.
- د $0 = ax^2 + bx$ معادلي حل عبارت دی له $x_1 = 0$ او $x_2 = -\frac{b}{a}$.
- هره دويسي درجه معادله، له دوو برخو (مستقيمه کربنه او يوه منحنني) جوره شوي ده.
- که يو مستقيم منحنني په دوو تکوکي قطع معادله دوه حله لري.
- که يو مستقيم له منحنني سره مماس وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقيمه کربنه له منحنني سره تقاطع ونه لري، معادله په حقيقي عددونوکي حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل هغه وخت مساوي په صفر دی، چي لبتر لبه يو يې مساوي په صفر وي.
- د حلونو د جمع حاصل له دي اړيکې خخه $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ او د حلونو د ضرب حاصل له دي اړيکې $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ خخه په لاس راخي.
- په بشپر ډول، د هري دويسي درجي معادلي جذرونه يا حل $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول خخه په لاس راخي چي $\Delta = b^2 - 4ac$ دی.
- که چېري $\Delta > 0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري.
- که چېري $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که چېري $\Delta < 0$ وي، معادله د حقيقي عددونو په set کي حل نه لري.
- د دويمو درجو معادلو د تشکيل لپاره $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ يا $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ خخه ګته اخلو.

د اووم خپرگي پونتنې

• په لاندي سوالونو کې هر سوال ته خلور خوابونه ورکړل شوي دي، سم خواب يې وټاکۍ.

-1 د معادلي $4x^2 = 3x^2 - 1$ او c ضربونه عبارت دي له:

(الف) $a = -3, b = 4, c = 1$ (ب) $a = 3, b = 4, c = 1$

(ج) $a = 4, b = 3, c = -1$ (د) هېڅ يو.

-2 د معادلي حلونه عبارت دي له: $3x^2 - 8x + 5 = 0$

(الف) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 1$ (ب) $x_2 = \frac{5}{3}, x_1 = 1$

(ج) الف او ب (د) هېڅ يو.

-3 د $y = x^2$ معادلي ګراف عبارت دي له:

(الف) مستقيم دي. (ب) منحنۍ دي.

(ج) الف او ب. (د) هېڅ يو.

-4 د $x^2 - 10x + 16 = 0$ د حلونو د جمع حاصل برابر دي له:

(الف) $x_1 + x_2 = -5$ (ب) $x_1 + x_2 = 5$

(ج) $x_1 + x_2 = 8$ (د) $x_1 + x_2 = 0$

-5 که $\Delta > 0$ خخه وي معادله:

(الف) دوه مساوي حلونه لري. (ب) دوه حققيي او مختلف حلونه لري.

(ج) حل نه لري. (د) يو حل لري.

• تشن ځایونه ډک کړئ:

1- ديو مجھوله دویمه درجه معادلو عمومي بنه ۵۵

$$-\frac{b}{a} - \frac{c}{a} \text{ د حلونو او د حلونو دی.} \quad -2$$

3- که وي، معادله حل نه لري.

4- که د معادلي درجه دوه وي، معادله لري.

$$-5 \text{ د } x^2 - x + 0.25 = 0 \text{ د معادلي حلونه او دی.}$$

- لاندې پونستې ولوئ د سم په مخ کې (س) او د ناسم په مخ کې (غ) کلمه ولیکي.
- 1) که $b^2 - 4ac < 0$ وي، معادله د حقيقې عددونو په set کې حل نه لري.
- 2) د محمد بن موسى فورمول $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.
- 3) د $2x^2 - 4x = 0$ معادلي يو حل، صفر دی.
- 4) د دويمې درجه معادلي د تشکيل لپاره $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ خخه گټه اخلو.
- 5) که چېرې په يوه دويمه درجه معادله کې د علامو تحول نه وي، نو معادله يو منفي حل لري.

- لاندې پونستې حل کړئ:
- 1 - په لاندې معادلو کې a, b, c او ضربونه و بنیئ او ووایاست کومه معادله بشپړه او کومه معادله نیمګړي ده.
- a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 1 = 0$ c) $2x^2 - 6x = 0$
- 2 - د لاندې معادلو حل پیدا کړئ.
- a) $3x^2 + x - 4 = 0$ b) $x^2 + 4x - 32 = 0$ c) $6x^2 - x - 2 = 0$
- 3 - لاندې معادلي د تجزيې په لار(طريقه) حل کړئ.
- a) $3x^2 - 3x - 4 = 0$ b) $x^2 + 4x - 32 = 0$
c) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ d) $cx^2 - 2acx + ca^2 = 0$
- 4 - لاندې معادلي په هندسي تګ لاره یې سره حل کړئ.
- a) $2x^2 + 7x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$
- 5 - لاندې معادلي د تجزيې په طرقه حل کړئ.
- a) $4x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 + \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$
c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ d) $x^2 + 3x = 0$

6- لاندې معادلې له عمومي فورمول خخه په ګټې اخیستې سره حل کړئ.

a) $7x^2 - 8x + 1 = 0$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

c) $t^2 - 0.27 + 0.6t = 0$

7- که د یوه مستطيل مساحت 20cm^2 او اوبردواالی د سور دوه برابره وي، د مستطيل اوبردواالی او سور پیدا کړئ؟

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث د قایمو ضلعو اوبردواالی $2a$ او $2a + 1$ وي، د وتر اوبردواالی پیدا کړئ؟

9- که د یوه مستطيل مساحت 24cm^2 او محیط پې 36cm وي، اوبردواالی او سور پې پیدا کړئ؟

10- هغه معادلې ولیکی چې حلونه پې په لاندې ډول دي.

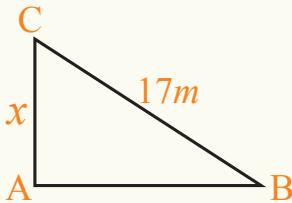
a) $-2, 0.5$

b) $3, -1$

c) $0, 2$

d) $-\sqrt{2}, 1, 2$

11- دوه تنه بايسیکل چلوونکي، A پکي خخه یو ختیئ لور ته او بل شمال لورته حرکت وکړ، په هغه وخت کې چې د دوى تر منځ واتن $17m$ دی، هغه بايسیکل چلوونکي چې ختیئ لور ته پې حرکت کړي دی $7m$ زیات واتن پې له هغه تن خخه چې شمال لور ته پې حرکت کړي وهلي دي. د هغه الجبری معادلې په واسطه د هريوه بايسیکل چلوونکي د وهل شوې لاري واتن معلوم او وې پې ولیکي.



اٹھ خپرکی

احصائیہ





آياتاسې په خپل ټولگي کې تر ټولو جګه
ونه لرئ؟ که چېږي فلپین او یا اندونیزیا
ته ولار شئ، خنګه؟

په کومه کچه په یوه هپواد کې جګ او په
بل هپواد کې لنډې ونې شمېرل کېږي؟
معیارونه ېک کوم دي؟

فعالیت

د یو شمېر کورنيو شمېر چې په خوکليو کې پرتې دي، د کليو په اړه ېې په لاندې ډول ليکل
شوي اطلاعات په لاس راغلي:

52	49	40	42	45	53	35	38	40	43
51	55	38	39	44	37	46	41	50	56

غواړو د اړکړل شوي دېټا data، په دریو صنفونو کې داسې څای پر ځای کړو، تر خوپوه شو،
چې کوم کلی ډېر، منځني او کم وګړي لري.

- آیا کولاۍ شو چې یو یا خو ورکړل شوې دېټا data له منځه یوسو؟

- تر ټولو لوې او تر ټولو کوچنۍ کورنۍ پیدا کړئ.

- د لبرو او ډېر دېټا ګانو data تر منځ وسعت (پراخوالی) خومره دي؟

- دا وسعت، د صنفونو په شمېر ووبشي، فکر وکړئ، دا عدد خه شی رابنیي؟

- له عددونو خخه په ګټې اخیستې سره جدول ډک کړئ.

- ميله یې ګراف یې رسم کړئ.

د کورنۍ شمېر	د کليو شمېر
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

- د ډپتا data د صنف بندی کولو لپاره لاندې گامونه په وار سره تر سره کړئ.
- د ډپتا ګانو د زیات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راورئ.
 - دا وسعت د دستو په تعداد ووبشی او د صنفونو اوبردواالی په لاس راورئ، که چېږي حاصل ې طبیعی عدد نه وي، کولای شی هغه (round up) کړئ.
 - له دې مقدارونو خخه صنفونه جوړ کړئ.

مثال: په لاندې جدول کې د 30 روغتونونو ناروغان چې په اټکلې دول نیول شوي، داسې راغلي دي:

152	151	152	160	157	140	161	165	163
164	166	170	172	174	154	146	153	149
172	175	165	172	170	169	146	158	177
160	165	168						

دا ډپتا په ې طبیعی عدد نه وي، کولای شی هغه جوړ کړئ.

- که چېږي د ناروغانو شمېر په یوه روغتون کې له 175 خخه زیات وي، هغه روغتون ته ازدهامي (گنه ګونه) یې روغتون وايي، خو روغتونونه ازدهامي (گنه ګونه) دي؟
- د ګنه ګونې د پرتله کولو لپاره ميله یې ګراف رسم کړئ.

حل: د ډپتا چې ډاډه شو، ټول ارقام په یوه جدول کې خای پر خای کوو او تر ټولو زیات او تر ټولو کم ارقام ې په لاس راورو.

$$= \text{تر ټولو تیت رقم} \quad 140$$

$$= \text{تر ټولو لوړ رقم} \quad 177$$

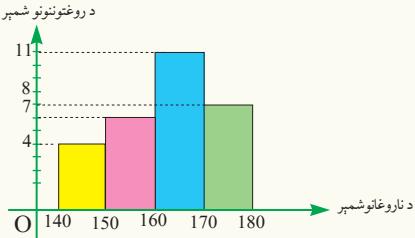
$$= \text{تیت رقم} - \text{لوړ رقم} \quad 177 - 140 = 37$$

د صنفونو د اوبردواالي دېدا کولو لپاره دا وسعت د صنفونو په شمېر وپشو $\frac{37}{4} = 9.25$ له دې

عدد خخه د صنف په وسعت کې ګټه اخلو، خود کار د آسانۍ لپاره دا عدد رونډ اپ په پام

کې نیسو چې په دې ډول، د صنف وسعت د(10) عدد په لاس راخخي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونونو کثرت f
140–150	4
150–160	7
160–170	11
170–180	$\frac{8}{n = 30}$



پاملرنە وکپئ، كە چېرى د صنف پراخوالى پورته خواپوره پەپام كې و نەنيسى، يعنى روند (Round up) يې نەكپو، د صنفونو د پراخوالى مىجىموعە، لە 37 خىخە لېپە لاس راخى چې پە دې دول يو شمېر دېتىا له جدول خىخە خارجىبى او دا سەم كار نەدى. پە ئىينى وختۇنۇ كې د صنفونو د شمېر پەر ئەي، د صنفونو د پراخوالى مورتە پېزندل شوي وي، پە دې حالت كې د صنفونو د شمېر مورتە اھمىت نەلىي. د صنفونو د پراخوالى پە لىلو سەداسىلىكىو چې د هەغۇ د پراخوالى د فرض شويو صنفونو سەرە برابر وي او وروستە يې جدول پورە كۈو.

مثال: پە پورتىنىي مثال كې كە د صنفونو د پەر ئەي د صنفونو د پراخوالى 8 فرض كپو، اوسط يې پىدا كې ؟

حل: تىيەت رقم يعنى 140 خىخە پىل كۈو. خىنگە چې د صنف پراخوالى 8 دى، د دوو لاندى پەرلە پىسى سەرحدونو تە منع واتىن باید 8 وي، يعنى د دويم صنف لاندى سەرحد باید 148 وي. اتە، اتە تە هەغە زىاتوو، تە خۇ دېپە دېتىا بە جدول كې ئەي بىر ئەي شى پە دې توگە، تە پايە دوام ورکۈو.

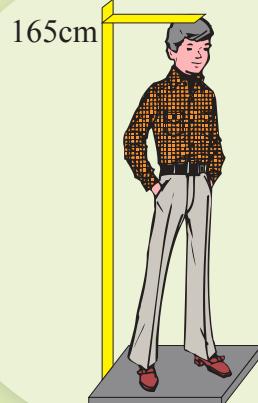
ناروغانو شمېر	دروغۇنۇنو شمېر f
140 – 147	3
148 – 155	6
156 – 163	6
164 – 171	9
172 – 179	$\frac{6}{n=30}$

1- لاندي ډېټا د 20 زده کوونکو د رسپڈلو وخت په دقیقو له کوره تر بنوونځي رابنیسي:

10	50	65	33
48	5	11	23
37	26	26	32
17	7	13	19
29	43	21	22

- پورتنۍ ډېټا په اووه ډلوکې صنف بندی کړئ؟
- د هر صنف کثرت پیدا کړئ.
- ميله يې ګراف يې رسم کړئ.
- که چېري ډېټا په هغه ډلوکې چې د صنف پراخواли يې 10 وي کېږدو، د کثرت جدول
يې جوړ کړئ؟
- 2- یو مثال راوړئ چې ډېټا د صنف بندی لپاره د صنفوونو له پراخواли خخه ګته اخیستل شوې
وې.
- 3- د موضوع د خېړلولپاره یو مثال ورکړئ چې د ډېټا د صنف بندی لپاره، د صنفوونو له شمېر
خخه ګته اخیستل شوې وې.

د نېښتو یا متصلو ډپتا گانو دسته بندی



که چېږي له تاسې خخه پونښته وشي چې ونه (قد) مو خومره جګه ده، خه څواب ورکوي؟ که ستاسوقد په متر اندازه شي ستاسو له اټکل سره به خومره سمون ولري؟

فعالیت

- که له تاسې خخه پونښته وشي چې خو ورونيه لرئ، خه وايئ؟ آيا کولای شی، ادعا وکړي چې د دغه ډول پونښې په څواب او یا نورو عمومي پونښتو چې لا تیک وسایل مو لري، کولای مو شول چې د خپلو ټولګیوالو شمېر په تیک ډول و وايئ؟
 - ناخاپې متحول مو خه شی دی او له کومو ډولونو خخه دی؟
 - که ستاسي یو دوست ووایي، د قد اوږدوالي یې 156 سانتي متره دی، آيا د ونې (قد) اوږدوالي یې پوره 156 سانتي متره دی؟
 - د 15 زده کوونکو د قدونو اوږدوالي وروسته له پونښې خخه داسې ورکړل شوي دي.
- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 153 | 148 | 151 | 138 | 136 |
| 142 | 131 | 141 | 141 | 139 |
| 152 | 159 | 139 | 132 | 146 |

لاندې جدول بشپړ کړئ:

د زده کوونکو د ونې جګوالي	د زده کوونکو شمېر
130 – 140	
140 – 150	
150 – 160	

- په فکر وکړئ او ووایي، چې ولې د 140 عدد یو وار د صنفونو د پورتني سرحد په خپر راول شوي دي؟
- که چېږي د یوه سې د قد اوږدوالي 140 سانتي متره وي، خه فکر کوي چې په کوم صنف کې به وي؟

که چېړې یو نښتی یا متصل متحول ولرو، د اطلاعاتو په صنف بندی کې د یوه صنف پورتنی سرحد به له کوزني سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې که دیتا د پورتنی صنف سره برابره وي، په وربې سرحد کې لوېږي.

مثال: د 25 ډول موټرونونو چټکتیا په لاندې ډول احصائيه نیول شوې ده:

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

- د کثرت جدول یې ډک کړئ.

- که چېړې په بنارکې د چلولو پرمهاں معجاز سرعت په یوه ساعت کې 30 کیلومتره وي، خو موټرونونه د چټکتیا له معجاز سرعت خڅه زیات چلپدلي دي؟

- د صنفوونو د کثرت د جمع حاصل خو دی؟ دا عدد له خه شي سره برابر دی؟

حل: خرنګه چې سرعت یو متصل متحول دی، نو د نښتی یا متصل متحول لپاره جدول جوروو. د 30 عدد په دویم صنف کې او د 40 عدد په درېم صنف کې لوېږي، د صنفوونو

سرعت	f تعداد
20 – 30	4
30 – 40	9
40 – 50	7
50 – 60	5
	25

د کثرت جمع له $n = 4 + 9 + 7 + 5 = 25$ سره برابره ده
چې د موټرونونو له شمېر سره مساوی ده او (21) موټرونونه له
خپل جواز خڅه چټک چلیدلي دي.

پښتني

1- لاندې دیتاګانې چې د 34 زده کوونکو د هوش ضرب، د بنوونځی په لومړي کال کې رابنېي، په پام کې ونسی:

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 صنفي جدول په جورو لو سره د صنفوونو د کثرت د جمع حاصل پیدا کړئ.

وزنی اوسط یا منحنی قیمت (Weighted Mean)



که خوک بنه کار سرته ورسوی، انعام یې
نظر کوم عدد ته خو برابره دی؟

فعالیت

اوریدلی مو دي چې هغه زده کونونکي چې دولسم ټولگى پائی ته ورسوی، د کانکور آزمونه په خلورو خانګوکې له خاصو ضریبونو سره سرته رسوی او د هغې د نمره په اساس د پوهنتونونویلایلو پوهنځیو ته وپشل کېږي. اړکل کوو چې د دوو زده کونونکو د کانکور نمرې په لاندې ډول دي:

مضمون	رژه او ادبیات د 3 په ضرب	ټولنیز علوم د 2 په ضرب	طبیعی علوم د 3 په ضرب	ریاضی د 4 په ضرب
ضریب	3	2	3	4
لومړی زده کونونکی	61	66	62	61
دویم زده کونونکی	61	66	62	60

مضemon	ضرب	د دویم زده کونونکی نمرې	مضemon	ضرب
ریاضی	4	61	ریاضی	4
طبیعی علوم	3	62	طبیعی علوم	3
ټولنیز علوم	2	66	ټولنیز علوم	2
رژه او ادبیات	3	61	رژه او ادبیات	3

- د دواړو زده کونونکو د نمره منحنی یا وسطي قيمت پیدا کړي.
- د کوم مضمون نمرې په منحنی یا وسطي قيمت ډېره اغیزه لري، ولې؟
- د کوم مضمون نمرې په منحنی یا وسطي قيمت لې اغیزه لري، ولې؟
- که د زده کونونکو د ریاضی د مضمون په نمره 5 نمرې او همدارنګه د ټولنیزو علوم په مضمون 5 نمرې ور زیاتې شي، منحنی یا وسطي قيمت، په کوم حالت کې ډېر بدلون مومي.

که چېري دېتا په خانګړي ضریب سره ورکړل شوې وي، دا په دې معنا ده چې د دېتا اغېزه يوشان نه ده، بلکې د هغې له ضریب سره تراو لري. په دې حالت کې د ضریبونو د کثرت جدول، د دېتا د کثرت په عنوان حسابېږي او په W سره بنودل کېږي. په لاس راغلي او سط ته، وزني او سط وايې:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

وزني او سط

مثال: به ئىن پوهنتونونو کې نمرې د تورو په اساس، لکه: D, C, B, A او F اعلاتېږي، په دې پوهنتونونو کې د A ارزښت خلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت يو او د F ارزښت صفر وي، يوه محصل لاندې نمرې اخیستې دي.

مضمون	نمرې	د کریدتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزيک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژی	B	3
ژبه	A	1

د دې محصل د نمره او سط خو دي؟
حل:

مضمون	حرفی نمره	د کریدتونو شمېر $x=$	عددی نمرې $w=$	$W \cdot X$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزيک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$
کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژی	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	A	1	4	$4 \times 1 = 4$

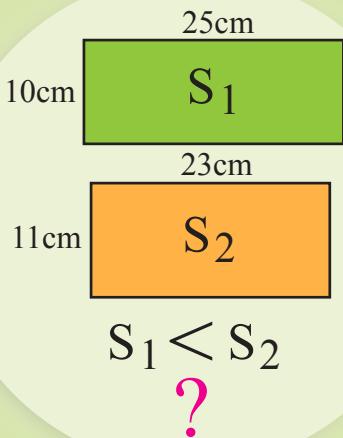
$n = 12$ د کریدتونو شمېر

$$\bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

پونسټې

که د کانکور په يوه آزمونه کې د يوه زده کوونکي نمرې په ترتیب سره 65, 61, 53 او 70 او ضریبونه یې، په ترتیب سره 3, 2, 1, 1 وي، د دې زده کوونکي د نمره او سط حساب کړئ؟

مستطيلي گراف (Histogram)

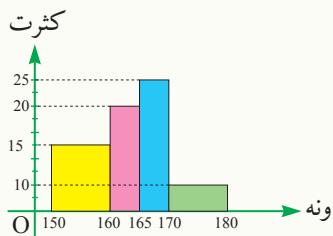


که د یوه مستطيل او بردوالى 25 سانتي
متره او سورېي 10 سانتي متره او د
بل مستطيل او بردوالى 23 سانتي متره
او سورېي 11 سانتي متره وي، د دې
دواړو مستطيلونو مساحتونه پيدا او یو له
بل سره يې پرتله کړئ؟

فعاليت

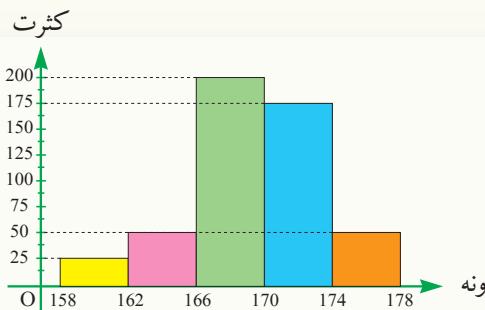
د یوه بنوونځي د 70 زده کوونکو د ونو(قدونو) اندازه، په لاندې ډول، په جدول کې ورکړل
شوي ده:

ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
f _{کثرت}	15	20	25	10



- په پورتنۍ گراف کې د مستطيلونو قاعدي خه شی رابنيي؟
 - د هر مستطيل مساحت په لاس راوړي. د مستطيل مساحت خه شی رابنيي؟
 - د مستطيلونو ارتفاع خه شی رابنيي؟
 - پورتنۍ گراف، له ميله يې گراف سره خه توپير لري؟
- يو خل بيا د یوه بنوونځي د 500 زده کوونکو ونې (قد) چې اندازه يې په لاندې جدول کې
ورکړ شوي ده، په پام کې ونيسي:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
f _{کثرت}	25	50	200	175	50



• جدول ته په پاملرني سره، د مستطيل قاعده خه شى رابنيي؟

• د مستطيل اوبردوالى خه شى رابنيي؟

• ميله يي گراف له پورتنى گراف سره خه توپير لري؟

د نېټو يا متصلو ډیتاګانو د بنودلو لپاره له مستطيلي گراف خخه گهه اخلو، په دې گراف کې، د مستطيل عرض، د صنفونو له پراخوالى سره برابر دي. په مستطيلي گراف کې مساحتونه، د هر صنف کثرت رابنيي چې په آسانې يوله بل سره د مقاييسې وړ دي.

که د صنف پراخوالى يوله بل سره برابر وي، کولای شود مساحتونو پر خاى راساً کثرت پرتله کړو په دې حالت کې عمودي محور، کثرت رابنيي.

مثال: د یوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوي دي:

د زده کوونکو وزن به کيلوگرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د زده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

دلته ليدل کېږي چې د صنفونو واتېن مساوی نه دي، د مستطيلي گراف له رسمولو خخه مخکې لازمه ده چې د مستطيلونو ارتفاع یوه گهه واتېن ته په پام کې نیولو سره د ټولو صنفونو لپاره پیدا کړو، په دې مثال کې 5Kg گهه يا مشترک دي، نو کولای شو چې ټول پنځه واره واحده، د x په محور په یوه واحد وښيو:

د 40 - 45 صنف لپاره یو واحده.

د 45 - 50 صنف لپاره یو واحده.

د 50 - 60 صنف لپاره دوه واحده.

د 60 - 70 صنف لپاره دوه واحده.

د 70 - 90 صنف لپاره خلور واحده.

د مستطيلونو د عمودي او بدواي د پيدا��ولو پاره، د صنفونو کثرت، د صنفونو په پراخواли و بشو:

$$40 - 45 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

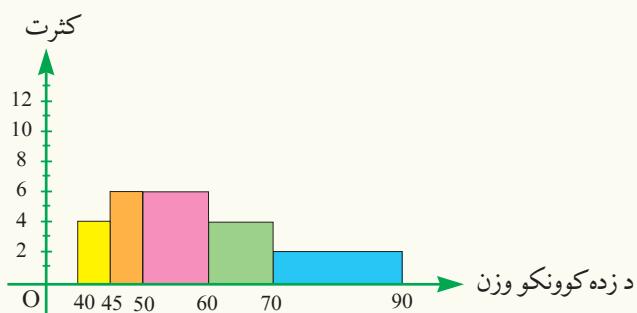
$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 - 70 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{8}{10} = 0.8$$

$$70 - 90 \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \rightarrow \frac{8}{20} = 0.4$$

اوسم په لاس راغلې پايلې په لاندي جدول کې ترتیب او د راکړل شوي مثال مستطيلي ګراف رسموو:

Kg	د زده کوونکو وزن په کثرت نظر واحد فاصلې ته	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
		4	6	6	4	2



1- لاندې جدول د یوه روغتون د هغو تاکلو ورڅو د ناروغانو شمېر رابني چې په روغتون کې بستر
شوي دي:

د ناروغانو شمېر	دورخو شمېر	1 - 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25
12	10	16	18	14	8		

- د پورتني جدول مستطيلي ګراف رسم کړئ؟

2- د یوه ټولګي د 50 زده کوونکو د IQ (دکاوت) په آزمونه کې ګډون کړي دی چې پایلې
یې په لاندې ډول دي:

115	113	109	118	92	130	112	114	117	122
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	110
94	134	98	129	102	103	107	113	117	112

- نومورو دېتا ته د کشت جدول جوړ کړي. د دې جدول لپاره 7 ګروپونه داسې په پام کې
ونيسې چې د صنفونو پراخوالی یې مساوي وي.

- د دې ډېتا مستطيلي ګراف رسم کړئ.

- خه پایلې اخلي؟



مخامنځ شکل، د لرگي يوه کنده ده، هغه
کربنې چې ددي لرگي په مقطع کې وينې،
د خه شي شکل ته ورتنه دي؟

فعالیت

د افغانستان د بنوونې او روزنې وزارت په 1387 کال کې لاندې ارقام د بنوونځيو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپاره کړي دي: د ابتدائي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنيو بنوونځيو د زده کوونکو شمېر 200000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 150000 ده.

- که د هري ډټا نسبې کثرت، په 360° درجو کې ضرب کړو، هره دوره به خو درجې وي؟
- یوه دایره رسم او مرکزی زاوې بې د لاس ته راغلو عددونو په اندازه بېلې کړئ د هري زاوې دنه د اړونده تحصيلي دورې نوم ولیکي.
- یو عنوان، د ګراف لپاره و تاکۍ او د ګراف لاندې بې ولیکي.
- په دایروي گراف کې خه، خه سره پرتله کېږي؟
- د دایري په کوچني کېدو یا لوپیدو سره په دایروي گراف کې خه توپیر راخي؟

له پورتني فعالیت خخه پوه شو او کولای شو دایري په مرسته وښيو. د یو ناخاپې یا اتفاقې متحول د ډټا بنودل، د دایري په مرسته د دایروي گراف په نامه یادېږي، په دایروي گراف کې لوړۍ د هر صنف کثرت د ټولې ډټا په شمېر وېشو او وروسته بې په 360° کې ضربوو چې د صنفونو مرکزی زاوې رابنېي؛ یعنې:

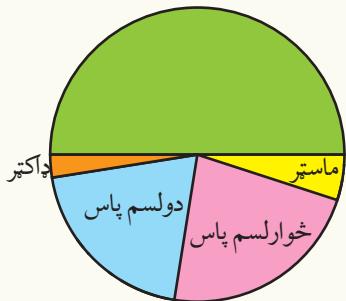
$$\frac{د ډټا کثرت}{د ټولو ډټا شمېر} \times 360^{\circ} = \text{کثرت د درجې له جنسه}$$

مثال: يوه مؤسسه چې د کارکونکو شمېر ۲۰۰ او د تحصیل د درجې له مخې وېشل شوي دي:

د تحصیل درجه	دکتر	ماستره	лиسانس	خوارلسم پاس	دولسم پاس
دکارمندانو شمېر f	5	10	100	45	40

د دې ډېټا دایروي ګراف په لاندې ډول دي.

د تحصیل درجه	کثرت f	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
دکتر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9^\circ$
ماستره	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18^\circ$
ليسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180^\circ$
خوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81^\circ$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72^\circ$



پوښتني

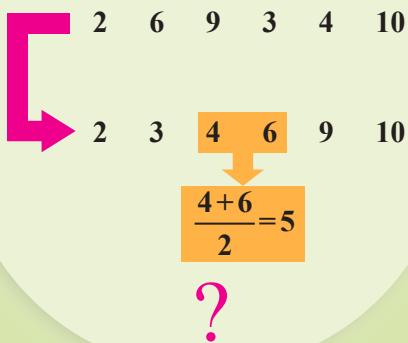
- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د کورنیو د وېش دایروي ګراف د جمعیت له مخې رسم کړئ.

د کورنی نوع	د کورنی شمېر f	منځنی جمعیت سره دېر جمعیت	لېر جمعیت	جمع
	11	23	6	40

- دایروي ګراف د خه ډول متحول لپاره مناسب دي؟

- که د ډېټا کثرت دوہ برابره کړو، آیا مرکزی زاویه یې بدلون مومي؟

میانه (Median)



که له تاسې خخه ویوبنتل شي چې د نومرو اوست مو خو دي؟ له اوست خخه گتې اخلن که له تاسې خخه ویوبنتل شي چې هغه نمرې چې ستاسو په اطلاعاتونه کې ډېرې تکرار شوې دي، خو دي؟ که له تاسې پوبنتنه وشي چې تاسې د بنو زده کونکو په منځ کې ياست، که د کمزورو زده کونکو په منځ کې، تاسې دې پوبنتنې ته خه څواب ورکوي؟

فعالیت

- فکر وکړئ؟ د((میانې)) لغت یعنې خه؟
- که یو شمېر ډېټا ولرو، خرنګه کولای شو، د هغه وسطي مقدار پیدا کړو؟
- که د ډېټا شمېر طاق وي، آيا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دي؟
- که د ډېټا شمېر جفت وي، ايا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دي؟
- آيا کولای شو وسطي مقدار پرته له ترتیب کولو خخه د ډېټا په لاس راورو؟
- که د ډېټا مقدار جفت وي، اټکل کولای شئ چې خه مقدار د وسطي مقدار په عنوان وټاکو؟
- لاندې ډېټا په پام کې ونیسي:

2 3 5 1 4

- وسطي مقدار پې پیدا کړئ.

- د ډېټا شمېر، د وسطي مقدار خخه وروسته د مخکینې ډېټا له شمېر سره خه اړیکه لري؟

- لاندې ډېټا په پام کې ونیسي.

2 3 5 1 4 5

- یو وسطي عدد پیدا کړئ چې د ډېټا شمېر پې وروسته او د مخکنې له هغه عدد د ډېټا له شمېر سره برابر وي.

د ډېټا له ترتیب لو خخه وروسته هغه عدد چې له هغه خخه وروسته د ډېټا شمېر او له هغه خخه مخکنې د ډېټا له شمېر سره برابر وي، میانه بلل کېږي. که چېرې د ډېټا شمېر طاق وي، نو منځنۍ د ډېټا له میانې خخه عبارت ده، خوکه چېرې د ډېټا شمېر جفت وي، نو میانه د دوو منځنۍ ډېټا ګانو له وسط خخه

ubarat de

مثال: د ۵ کورنيو مياشتني عايد، د افغانۍ له مخې په لاندي دول راکړل شوي دي:

10000 7000 4000 6000 3000

ددي data ميانه حساب کړئ.

حل: لوړۍ data مرتب کوو:

3000 4000 6000 7000 10000

ليدل کېږي چې د 6000 عدد د عددونو په وسط(منځ) کې شتون لري، نو 6000 د پورتني

data ميانه دي.

دویم مثال: د لاندي data ميانه وټاکي.

2 6 9 3 4 10

حل: د ميانې د حسابولو لپاره عددونه (data) ترتیب کوو.

2 3 4 6 9 10

ليدل کېږي چې د data په منځ کې داسي عدد نشه چې د ميانې خاصیت صدق کړي، نو که چېږي

تاسې $5 = \frac{4+6}{2}$ په پام کې ونیسی چې د ميانې خانګړیا پکې صدق کوي او دا عدد د پورتني دیتا

ميانيه ده چې له 5 خخه وروسته، د دیتا شمېر له 5 خخه د مخکې د دیتا له شمېر سره برابر دي.

پونسي

1- د دیتا لاندي دوه ګروپونه، په پام کې ونیسی او د هغوي ميانه پیدا کړئ؟
1 , 2 , 3 او 0 , 2 , 100

2- لاندي دیتا راکړل شوي دي، د دغې دیتا ميانه پیدا کړئ.
5 , 15 , 4 , 0 , 12 , 15 , 6 , 5 , 0

3- که له ټولو ډیتا وو سره یو ثابت عدد جمع شي، د ميانې په مقدار کې خه اغېزه منځ ته
راخی؟ په یوه مثال کې یې وښیئ.

4- که دیتا دوه برابره کړو، د ميانې په مقدار خه اغېزه کوي؟ په یوه مثال کې یې وښیاست.



د خپلو هم تولگیوالو قد مو اندازه کړئ.
د تر تولو لور قد او تر تولو تیت قد تر منځ
توبیر حساب کړئ، که چېږي وغواړئ
چې د زده کوونکو د قدونو ترمنځ تر تولو
زیات توبیر پیدا کړئ، آیا لازمه د چې
د نورو زده کوونکو قدونه اندازه کړئ؟

فعالیت

- د اوم ټولګي د 10 زده کوونکو او د لسم ټولګي د 10 زده کوونکو د قدونو لوړوالي چې په اتفاقی ډول پاکل شوي، په لاندې ډول دي:
- 152 , 150 , 149 , 148 , 148 , 149 , 146 , 146 , 148 , 148 : د اوم ټولګي زده کوونکي
- 160 , 160 , 159 , 158 , 158 , 159 , 160 , 160 , 160 : د لسم ټولګي زده کوونکي
- د دواړو ډلو د لوړو او تیتو ډلونو تر منځ توبیر پیدا کړئ؟
- ایا د دواړو ډلو د عددونو تر منځ توبیر یو شان دي؟
- که چېږي ډبتا و نه لرو، آیا د ډبتا د لوړو او ډېړو توپیرونو په لرلو سره ډلو مورکولای شو ډواړه ډلې چې سره پرتله کړو.
- ایا د بدلون یا تحول د ساحې بربروالي په دواړو ډلو کې د ډبتا د یووالي په معنا دي؟
- د نمونې د تعریف په پاملنې سره که دا ډلې، د تولنې په عنوان په پام کې ونیسو په نمونه کې د واتن د اوږدوالي زیاتوالی، په تولنه کې د واتن د اوږدوالي د زیاتوالی پایله راکوي.

له پورتنې فعالیت خخه پوهېړو چې د هغه واتن اوږدوالي چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري، د تحول د ساحې په نامه یادېږي. دا معیار د تر تولو لوړي او تر تولو کوچني ډبتا ترمنځ وسعت را په ګوته کوي. پاملنې باید وشي چې په یوه تولنه کې د تحول د ساحې لوی والي، په هغه تولنه کې د تیت والي یا پراګندګي دېر والي دي. هر خومره چې داتیت والي کم وي، د وګرو پراګندګي کمه ده. د یوی تولنې وګړي، دې خانګړتیا له مخې یو بل ته نزدی دی که د تحول ساحه صفر وي، که د وګرو د خېړنو د خانګړتیاوې سره برابري او یو شان وي په دې حالت کې تولنه یوه متجانسه تولنه بولو.

مثال: د دوو زده کونکو د $\frac{1}{2}$ 4 میاشتنی آزمونې نمرې، په لاندې چول دي:

الف: 39 , 38 , 37 , 36 , 35 , 33 , 32 , 25 , 21 , 20

ب : 39 , 35 , 34 , 34 , 35 , 35 , 34 , 33 , 20

• د دواړو صنفونو د تحول ساحه پیداکړئ.

• آیا د ډېټا تیت والی یا پرآګندګي په لومړي او که په دویم ګروپ کې کمه ده؟

حل: د دواړو ډلو د تحول ساحه یوه برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

د دویمې ډلي د ډېټا تیت والی یا پرآګندګي لړد، خکه په ډېټا کې، د 34 او 35 عددونه زیات تکرار شوي دي، واتېن ېپه کم دي، خو پرآګندګي په لومړي ډله کې ډېړه ده، د تحول ساحه یوازې له لبرو او زیاتو مقدارونو سره کارکوي. د ډېټا په اړه او د هغوي تر منځ هېڅ اطلاعات مورته نه راکوي، نو د تحول د ساحې په لرلو سره نشوکولای، د ډېټا د میانې د پرآګندګي د میزان اړکل وکړو.

پوښتني

1- لاندې ډېټا په پام کې ونسیع.

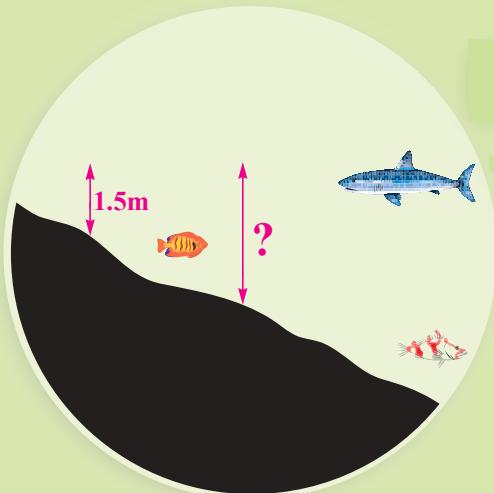
1 , 2 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 15

• د دې ډېټا د تحول ساحه پیداکړئ.

• که د پورتني data، تر ټولو زیات او کم data له منځه یوسو، د تحول ساحه ېپه پیداکړئ.

• دا دواړه د تحول ساحه یوه بل سره پرتله کړئ او ووایاست چې د کوم یوه پرآګندګي زیاته ده؟

دانحراف اوسته (Average deviation)



که د یوه سیند د یوه تکي ژوروالي 1.5
متره وي، فکر وکړئ چې د سیند د ټولو
ټکو ژوروالي یو شان دي؟

فعاليت

- پنځو تنو زده کوونکو په یوه صنفي آزموننه کې لاندې نمرې اخيسشي دي.
- | | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 20 | 18 | 16 | 14 | 12 |
|----|----|----|----|----|
- د دې نمره او سط او یا منځني قيمت پیدا کړي.
 - د ټولو ډپتا وو د او سط توپير پیدا کړي.
 - د هري ډپتا د او سط د توپير د جمع حاصل ولیکي.
 - د هري ډپتا د او سط د توپير د مطلقه قيمتونو د جمع حاصل پیدا کړي.
 - په لاس راغلي قيمتونه سره پرته کړي.
 - تاسې په خپله د 5 ډپتاګانو یو مثال ورکړئ او پورتنې عملې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتنې فعالیت خخه پوهېرو هغه توپير چې د ډپتا او او سط تر منځ دی د منځني يا او سط انحراف په نامه يادېږي.

د data د منځني يا او سط انحراف مجموعه، همېشه صفر ده. په دې دليل د data د خپرني لپاره له انحراف د مطلقه قيمت خخه ګهه اخلو. که د ټولو انحرافونو مطلقه قيمت جمع کړو او د data په شمېري ووېشو، د انحراف او سط ورته ويل کېږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابېږي:

$$\text{دانحراف او سط يا منځي} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

دلته $X_1, X_2 \dots X_n$ عبارت له data او \bar{X} د ډېټا یا اوست او n د ډېټا شمېر دی، ليدل کېږي، چې هر شومره د اوست انحراف لوی وي، نوبه هم هغه اندازه د data د پراکندګي له اوست نه ډېره ده.

مثال: د 40 تنو زده کوونکو نمرې په لاندې جدول کې ورکړل

شوې دی.

نمرې	کثرت
0 – 10	2
10 – 20	7
20 – 30	4
30 – 40	5
40 – 50	10
50 – 60	12

د پورتنيو نمره د انحراف اوست پیدا کړئ؟

حل: لوړۍ د اوست مقدار په لاس راوړو.

f	$f \cdot x$	$x - \bar{x}$	$f(x - \bar{x})$
2	10	$5 - 37.5 = -32.5$	$2 \times (-32.5) = -65$
7	105	$15 - 37.5 = -22.5$	$7 \times (-22.5) = -157.5$
4	100	$25 - 37.5 = -12.5$	$4 \times (-12.5) = -50$
5	175	$35 - 37.5 = -2.5$	$5 \times (-2.5) = -12.5$
10	450	$45 - 37.5 = 7.5$	$10 \times 7.5 = 75$
12	550	$55 - 37.5 = 17.5$	$12 \times 17.5 = 210$
$\frac{1}{n=40}$	$\frac{1500}{1500}$		

$$\bar{x} = \frac{10 + 105 + 100 + 175 + 450 + 550}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

ليدل کېږي چې، د $f(x - \bar{x})$ د جمع حاصل له صفر سره مساوی دی، نوباید مطلقه قيمت یې سره جمع کړو.

$$= \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40} = \text{د انحراف اوست}$$

$$= \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{4} = 14.25 = \text{د انحراف اوست}$$

پوښشی

د A او B دوو جمعیتونو انحرافونه په لاندې ډول راکړل شوي.

د A جمعیت انحرافونه : 4

د B جمعیت انحرافونه : 8

- د جمعیت د انحراف اوست پیدا کړئ.

- د کوم جمعیت پراکندګي زیاته ده؟

د اټم خپرکي لنډيز

- صنف د هغې دېټا مجموعه ده چې ګډې ځانګړتیاوې ولري. د دېټا د صنف بندي لپاره لاندې پړاوونه په پام کې نيسو:
- د تحول ساحه: د دېټا د دېټرو لړو او دېټرو زیاتو مقدارونو تر منځ وسعت.
- د صنف پراخواли: د تحول د ساحې او د صنفونو د شمېر نسبت.
- د صنفونو کثرت: د هغه ډېټاګانو د صنفونو شمېر چې په هر صنف کې شته.
- د صنف مرکز: د هر صنف د اوسته محاسبه.
- که په صنف بندي کې متحولونه نښتې يا متصل وي، دراتلونکي صنف پورتنۍ سرحد د مخکينې صنف د لاندېنۍ سرحد سره برابر دي. په هغه حالت کې چې دېټا د صنف د پورتنۍ سرحد سره برابر وي، هغه دېټا په راتلونکي صنف پوري اړه لري.
- د صنفونو د ډېټاګانو د شمېر مجموعه، د ټولې دېټا له شمېر سره برابر ده.
- فرض کوو، د $X_1, X_2 \dots X_n$ ډېټاګانې په ترتیب سره د $W_1, W_2 \dots W_n$ ضریبونو لرونکي وي، دغه اطلاعات کولای شو په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	...	X_n
د ضریب (وزن)	W_1	W_2	...	W_n

- په دې حالت کې د پورتنۍ دېټا منځنۍ قيمت (اوسته) په لاندې ډول محاسبه کړي:

$$\text{اوسته} = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \dots + W_n X_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n}$$

- هستوګرام يا مستطيلي ګراف، عبارت له هغه ګراف خخه دی چې د کثرت توزيع يې د مستطيلونه په مرسته بنودل کېږي.
- د مستطيل جګوالې، د صنف له کثرت سره برابر دي.
- د هر مستطيل مساحت د صنفونو د پراخوالي او د صنف د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دي.

په مستطيلي ګراف کې مستطيلونه له یو بل سره ترلي او د ترليو (متصلو) متحوليونو خخه د ګراف د بنودلو لپاره ګډه اخلي.

- په يوه اختياري شاع يوه دایره د مرکزي زاوې په مرسته په π برخو وپشو، داسې چې دهري برخې د مرکزي زاوې اندازه، دکثرت له قيمت سره متناسبه وي، په دي حالت کې يې، مرکزي زاوې نظر لوړې صنف ته عبارت ده له:

$$\frac{\text{د ډېټا کثرت}}{\text{د ټولو ډېټا شمېر}} \times 360^\circ = \text{کثرت د درجې له مخې}$$

- د ميانې د پیداکولو لپاره په لوړې پړاوکې ډېټا منظم کوو او وروسته:
 - که د ډېټا شمېر طاق وي، د ډېټا ميانه له منځني ډېټا خخه عبارت ده.
 - که د ډېټا شمېر جفت وي، ميانه د دوو منځنيو دیټاګانو اوسيط دی.
- د تر ټولو کوچنۍ ډېټا او تر ټولو لوېي ډېټا ترمنځ توپير، د تحول له ساحې خخه عبارت ده، يا په بل عبارت، ډېټا په هغه ساحه کې بدلون کوي.
- د هري ډېټا د اوسيط تفاضل ته د منځني د اوسيط انحراف وايې.
 - د انحراف اوسيط د انحرافونو د مطلقه قيمت له اوسيط خخه عبارت ده او فورمول يې د اړوندي ډېټا لپاره په لاندي ډول ليکو:

$$\text{د انحراف اوسيط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

د اتم خپرکي پونستې:

1- لاندي جدول ډک کري.

صنف	f _{کثرت}	د صنف مرکز	جمعی کثرت
7.5-10.5	12		
10.5-13.5	10		
13.5-16.5	15		

- پورتنی جدول د کومې دسته بندی گراف رابنیي. پیوسته يا نښتی يا مجزا؟

2- لاندي جدول د 100 شل کلون خوانانو د ونو اوږدوالي رابنیي.

صنف	f _{کثرت}	د صنف مرکز
149.5-156.5	15	153
156.5-163.5	20	160
163.5-170.5	30	167
170.5-177.5	25	174
177.5-184.5	10	181

- مستطيلي گراف يې رسم کري.

3- د A, B, C, D, E او E د 200 ميليونه افغاني سرمایه په کار اچول شوي ده، داسې

چې:

- د Binar Lپاره 32 ميليونه افغاني
- د Binar Lپاره 24 ميليونه افغاني
- د Binar Lپاره 20 ميليونه افغاني.

ورکړل شوي معلومات په جدول کې پوره او دايروي گراف يې رسم کري.

ښارونه	د سرمایي ويشه ميليون	سرمایه په فيصدی	سرمایه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- یو شمېر کورنۍ د خپلو غړو له شمېر سره په لاندي جدول کې ورکړ شوې دي.

کورنۍ	18	12	15	8
د کورنۍ غړي f	2	4	5	8

- ميانه يا منځنۍ پيداکړئ.
- د تحول ساحه پې محسابه کړئ.
- د کورني مود (Mode) پيداکړئ.
- اوسيط پې پيداکړئ.

5- د یوه ټولګي د زده کوونکو د قدونو اندازه په لاندې جدول کې ورکړل شوې د:

د قد اندازه	1.5-1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2
کثرت f	5	16	9	4	1

- د صنف مود مشخص کړئ.
- اوسيط پې پيداکړئ.

6- یوه بشونکي د یوې صنفي آزمونې د اوسيط محسابه داسې وکړه:

$$\text{اوسيط} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 7 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 11 + 5 \cdot 12 + 1 \cdot 15}{25}$$

- د ټولګي د زده کوونکو شمېر پيداکړئ.

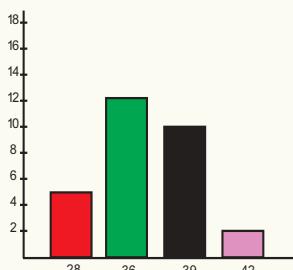
● خونمرې د 8 او 13 تر منځ قرار لري؟ د 8 او 13 په گبون

- عمومي اوسيط پې خودي؟

7- لاندې ميله پې ګراف د هغو کتابونو شمېر رابني چې په یوه
مياشت کې مطالعه شوي دي.

- احصائيوي جدول پې رسم کړئ.

● د مطالعه شوبو کتابونو شمېر په مياشت کې خودي؟



8- که د تحول ساحه له صفر سره برابره وي، له ډېټاګانو خخه خومره پايله اخلي؟

9- که په ډېټاګانو باندې یو ثابت مقدار زيات کړو، د تحول ساحه خرنګه تحول کوي؟

10- د خلورو زده کوونکو د هغو ساعتونو شمېر چې لوړو ته پې ورکړي دي، په لاندې ډول راغلي
دي:

1 5 7 9

- د پورتنيو ډېټاګانو، د انحراف اوسيط حساب کړئ.

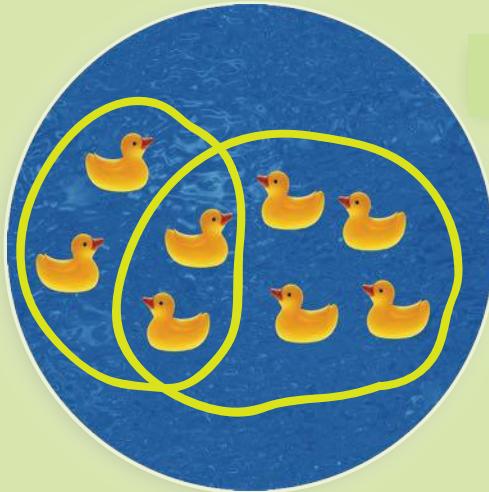


نهم خپرگی

احتمالات







په دواپو شکلونو کې يو خای خو هیلی ويني. هیلی په کومه حلقة پوري اړه لري؟

فعالیت

- د یوی دانې رمل د اچولو په تجربه کې، د $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نمونې فضا او د $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{4, 5, 6\}$ ناخاپي پېښې په پام کې نيسو.
- د A او C ناخاپي پېښې يو له بل سره خه اړیکې لري؟
- که د A یا د B پېښې رامنځ ته شوي وي، آیا ويلاي شئ چې د $A \cup B$ پېښې رامنځ ته شوي ده؟
- د پېښې رامنځ ته شوي او بله کومه اختياري پېښې چې هېڅ پېښې شوي نه ده ناممکنه يا \emptyset پېښې نومول کېږي.
- ويلاي شئ، چې د A او د \emptyset پېښې يو له بل سره خه توپیر لري؟

د پورتنۍ فعالیت پایلې په عمومي ډول د S په نمونه یې فضا کې د A, B او C ناخاپي پېښو لپاره په لاندې ډول په لاس راپرو.

پایله:

- که چيرې د S په يوه نمونه یې فضا کې $A \subseteq B$ يوه ناخاپي پېښه وي، په دې حالت کې:

$$A \cup B = B$$
- که چيرې د S په يوه نمونه یې فضا کې A او B ناخاپي پېښې وي، د $A \cup B$ او $B \cup A$ پېښې يو له بل سره توپیر نه لري؛ یعنې:

$$A \cup B = B \cup A$$
- که چيرې د S په يوه نمونه یې فضا کې د A یا B يوه پېښې رامنځ ته شي، نو د $A \cup B$

پېښه هم رامنځ ته شوې ده او سرېبره په دې

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{او} \quad B \subseteq A \cup B$$

• د A پېښه د S په نمونه يې فضا کې پېښه شوې ده او یوه بله پېښه چې هېڅ نه پېښېږي،
يعني \emptyset ، په دې معنا ده چې یوازې د A پېښه را منځ ته شوې ده.

$$A \cup \emptyset = A$$

• د $A \cup B$ ناخاپي پېښه په دې معنا ده چې لوبتر لړه د A يا B پېښه منځ ته راغلې ده.

مثال: که چېړي د C ناخاپي پېښه د A او B دوي بېلا بېلې ناخاپي پېښې په خپل څان
کې ولري، په دې حالت کې د $A \cup B$ ناخاپي پېښه هم په خپل څان کې لري، په یوه مثال
کې یې روښانه کړئ؟

حل: د $C = \{1, 2, 3, 4\}$ او $B = \{2, 3\}$ ، $A = \{1, 2\}$ پېښې په پام کې نيسو ليدل کېږي
چې $C \subseteq A \cup B$ او $B \subseteq C$ دې، نو:

$$B \cup A = A \cup B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

پېښې

1- د S له یوې نمونه يې فضا خخه، د A, B او C د ناخاپي پېښو لپاره د یوه مثال (بېلګې)
په مرسته یې د لاندې اړیکو سم والی وڅېړي.

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cup A = A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2- که $A \subseteq B$ وي په یوه مثال کې وسیع چې $A \cup B = B$ دې.

3 - که چېړي د A او $A \cup B$ ناخاپي پېښې سره برابري وي، په یوه ګراف کې یې
وښایاست، چې د A ناخاپي پېښه د B ناخاپي پېښه په بر کې لري.



دنور د اصلی رنگونو له تقاطع خخه
کوم نور رنگونه لاسته راخي؟

فعاليت

- د رمل د يوې داني د اچولو نمونه يې فضا $A = \{2, 4, 6\}$ او $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ او د $C = \{1, 3, 5\}$ او $B = \{4, 6\}$ ناخاپي پېښې په پام کې نيسو.
- د $A \cap B$ او $B \cap A$ ناخاپي پېښې، يوه له بلې سره خه اړیکه لري؟
- آياد A او B پېښې د $A \cap B$ ناخاپي پېښې په برکې لرلې شي، که نه؟
- دارا وښي، چې د $C \cap B$ ناخاپي پېښې يوه ناشونې پېښې ده.
- که د B پېښې د A پېښې په خان کې ولري، د $A \cap B$ او A ناخاپي پېښې سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت خخه کولای شو لاندي پايلې په عمومي ډول بيان کړو:

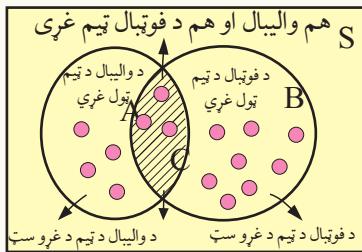
پايله:

- د S په يوه نمونه يې فضا کې د A او B ، A او C ناخاپي (تصادفي) پېښو لپاره لرو:
- د $B \cap A$ او $A \cap B$ ناخاپي، پېښې يوه شان دي.
- د A او B هره ناخاپي پېښې هره يوه يې د $A \cap B$ ناخاپي پېښې په خپل خان کې لري.
- که د A او B د دوه پېښو لپاره $A \cap B = \emptyset$ وي، په دې حالت کې د A او B پېښې يوه له بله بيلې پېښې بلل کېږي.
- د A پېښې لپاره لرو:

$$A \cap S = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

- که چېږې د B پېښې د A پېښې په خپل خان کې ولري، نو $A \cap B = A$ سره ده.

مثال: د یوه بنوونخی د فوتیال له تیم خخه درې تنه د بنوونخی د والیال د تیم غړي هم دي. که چیرې د فوتیال د تیم غړي په A د والیال د تیم غړي په B او د دواړو تیمونو ګله غړي په



C سره وښيو، په دې حالت کې د سیتوونو تر منځ اړیکه
د سټ د تیوری په بهه وليکي:
 $A \cap B = C$

آيا پوهېږي چې د B د سټ په مکمله سټ کې یعنې
 \bar{B} کې د والیال د تیم تول غړي ګاپون لري، که نه؟
نو د \bar{B} په سټ کې ټول هغه زده کوونکي ګاپون لري
چې د فوتیال د تیم غړي نه دي. خرنګه چې 3 تنه زده کوونکي د والیال د تیم غړي چې په
عین حال کې د فوتیال د تیم غړي هم دي، په \bar{B} کې ګاپون نه لري، نو په دې اساس د والیال
تیم د \bar{B} سټ په پام کې نیولو سره نیمگړي دي.

پښتنې

1- د B, A ناخاپي پېښه د دیاګرام په مرسته د A او B د بېلابېلو حالاتو لپاره چې د
پېښه د \bar{A} او \bar{B} پېښې په خپل خان کې لري، وښیع او وضاحت ورکړي.

2- په یوه مثال کې د B, A او C پېښې چې A او B په خپل خان کې لري، وښیع چې:

a) $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

3- لاندې پېښې په بیان سره وليکي:

a) $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B}$

c) $\overline{A \cup B}$



که چیرې، S د افغانستان ولایتونه
د شمال او \bar{B} نور پاتې ولایتونه وي،
نو $S - A$ او $S - \bar{B}$ کوم ولایتونه
رابنې؟

فعاليت

- د رمل يوې داني د اچولو نمونه يې فضا $A = \{1, 3, 5\}$ او د $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ناخاپې پېښه په پام کې ونسی.
- د ناخاپې پېښه مکمله یعنې \bar{A} کومه ناخاپې پېښه کيدلې شي؟
- یوه ناخاپې پېښه پیدا کړئ چې A یې په بر کې ولري او په \bar{A} کې شامله نه وي.
- آيا کولاي شئ د S له نمونه يې فضا خخه یوه پېښه پیدا کړئ چې په یوه وخت کې نه په A کې او نه په \bar{A} کې ګډون ولري؟
- د A او \bar{A} د ناخاپې پېښو اتحاد له حتمي پېښې سره خه اړیکه لري؟
- د A او \bar{A} پېښو تقاطع، د ناشونې پېښې سره خه اړیکه لري؟

له پورتنې فعالیت خخه لاندې پایله په لاس راخي:

پايله: که چیرې S یوه نمونه يې فضا او A یوه ناخاپې پېښه وي:

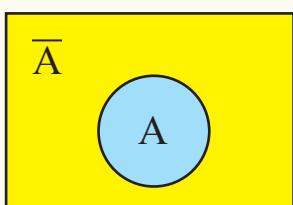
• یوه ناخاپې پېښه د چې په یوه وخت د A سره نه پېښېږي.

• د هرې ناخاپې پېښې لپاره لرو چې:

$$A \cup \bar{A} = S \quad (a)$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1 \quad (b)$$

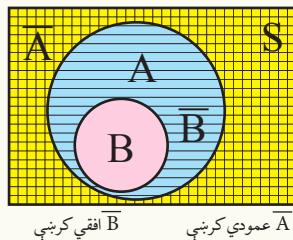
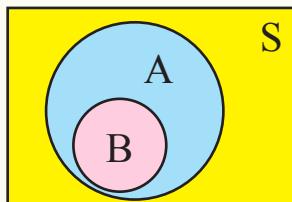
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (c)$$



د S نمونه فضا

مثال: که د S په یوه نمونه يې فضا کې د A ناخاپي پېښه د B ناخاپي پېښه په خپل ځان کې ولري، په ګرافيكۍ ډول وبنایاست، چې د \bar{B} ناخاپي پېښه د \bar{A} ناخاپي پېښه په خپل ځان کې لري؟

حل: خرنګه چې $A \subseteq B$ دی که چيرې مورډ په شکل کې \bar{A} او \bar{B} وبنيو، نوله لاندې رسم شوي شکل خخه په آسانې سره ليدل کېږي چې:



پونسنج

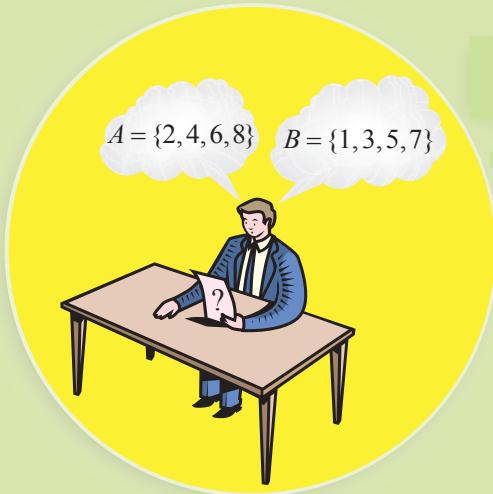
1- د یوه مثال او ګراف په مرسته د S د نمونه يې فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره وبنيئ چې:

- a) $(\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$
- b) $\bar{S} = \emptyset$
- c) $S = \bar{\emptyset}$

2- د S نمونه يې فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره لاندې پېښې په عبارت سره ولیکي.

- a) $\bar{A} \cap \bar{B}$
- b) $(A \cup B)$

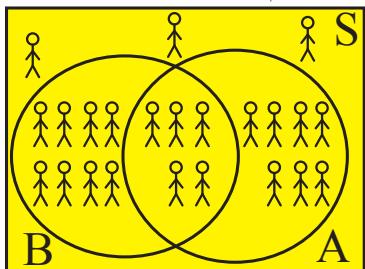
په سټونو مدل جوبول



تر او سه موله الجبری یا هندسي قوانینو
څخه د ژوندانه د مسایلو په حل کې ګهه
اخیستله. آیا فکر موکړی چې د سټونو
څخه هم کولای شو چې د خپلو مسایلو
د حل لپاره ګټه واخلو؟

فعالیت

د یوه ټولگی له 23 زده کوونکو څخه مو د خویندو او ورونيو لرونکو زده کوونکو احصائيه راپوله
کړي ده چې په لاندې دیاګرام کې لیکل شوي د.



په شکل کې ټول هغه زده کوونکي چې خویندي لري
د A په سټ او هغه زده کوونکي چې ورونيه لري د
B په سټ سره بنودل شوي دي.
شکل په پام کې ونیسی، د لاندې فعالیت سوالونو ته
څواب پیدا کړي:

- خو تنه خویندي لري؟
- خو تنه ورونيه لري؟
- خو تنه هم خویندي او هم ورونيه لري؟
- خو تنه، نه خویندي او نه ورونيه لري؟
- خرنګه کولای شو، دا مساله د ریاضي په زبه ولیکو؟
- ټول هغه کسان چې خویندي نه لري، خو تنه دي؟

لیدل کېږي چې پورتنۍ ګراف کولای شي پورتنیو ټولو سوالونو او د هغوي په څېر نورو سوالونو
ته په بنه توګه څواب ورکړي.
نو له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راپرو:

پایله: لیدل کېرىي چې دستې د تیورى په کارولو سره، د ڈپرو هغۇ مسایلە حل چې په ورخنى ژوندكې ورسە مخامخ كېرىو حل پيدا كېو او هغە و ارزۇو.

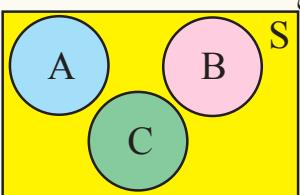
د ستې د تیورى تطبيق په احتمالاتو كې او يا په بل عبارت، د هغۇ ناخاپى پېبنو د پېبنېلە د مسائلو حل او د ستې د تیورى په مرستە د هغې شۇدەن، د ستې د تیورى يوه بلە د اهمىت ور د تطبيق ساحە شەپېل كىدای شى.

مثال: د S د نمونە يې فضا او د A, B, C ناخاپە پېبنې په لاندى دىاگرام كې ورکەل شوې دى، پەپام كې ونيسى، د لاندى پېبنې د پېبنېلە احتمال مطلوب دى:

a. د دې احتمال شتە چې د A يا B ناخاپىي پېبنە رامنځته شى.

b. د دې احتمال شتە چې د A پېبنە رامنځته شى.

c. د دې احتمال شتە چې د C پېبنە رامنځته شى.



حل:

a. د A يا B احتمال په حقیقت كې د $A \cup B$ احتمال دى، خرنگە چې دا پېښې يولە بل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{دى، نو:}$$

b. د دې احتمال چې د A ناخاپىي پېبنە رامنځته شى، پە دې معنا چې د \bar{A} پېبنە نه ده

پېبنە شوې، پە بل عبارت، هغە پېبنە ده چې د C يا B حادثە پېبنە نه شى، نو:

$$P(\bar{A}) = P(C \cup B) \quad \text{خرنگە چې (} P(A) = 1 - P(\bar{A}) \text{ دى، نو)$$

$$P(A) = 1 - (P(C \cup B)) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د دې احتمال شتە چې د C ناخاپىي پېبنە رامنځته نه شى د هغې پېښې د پېبنېلە احتمال

سرە برابر دى چې د A يا B پېښې، پېښې شى او دا د $A \cup B$ د پېبنې د پېبنېلە خخە عبارت .

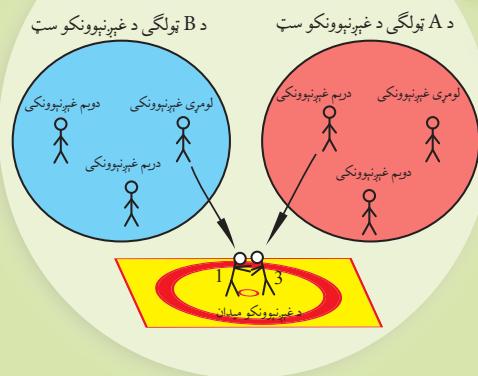
$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

پېښې

1- هغە مثال چې په فعالیت كې مو ترې گەه اخیستې ده پەپام كې ونيسى:

a) د دې احتمال مطلوب دى چې له دې ټولگىي خخە يو زده کوونکى په تصادفي يا ناخاپى ډول وتاکل شي چې خور او ورو ونه لري.

b) د يوه داسې زده کوونکى د پاکلو احتمال شتە چې په ناخاپى ډول تاکل کېرىي، پيدا كې ئ چې لې تر لېرە خور يا ورور ولري.



د A او B دوو ټولګيو خخه درې تنه د غېړې نیلو لپاره تاکل شوي دي، د A او B د ټيمونو غږي، په خو ډوله کولای شي، چې يوله بل سره په غېړه ورشي؟

فعالیت

دوه عدده، تور او سرمه يې رنګه پتلونونه له درې عدهه سپین، آبی او پولادي رنګه کمیسونو سره په پام کې نیسو.

- په خو ډوله کولای شوو هغه واغوندو؟
- د شمېرنې د ترتیب لپاره له ونه يېز ګراف خخه ګټه واخلئ.
- د اغوسټولو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کمیسونو د شمېر تر منع شه ډول اړیکه شته ده؟

له پورتني فعالیت خخه لاندې پایله په لاس راورو.

پایله:

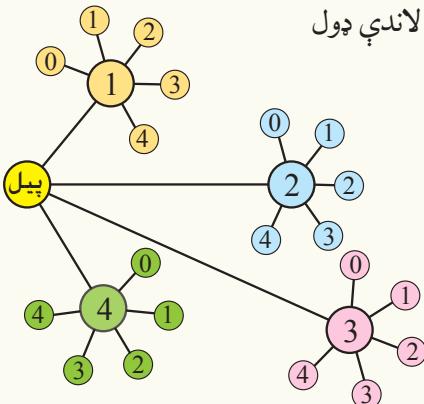
- 1- د دوو ستونو د عناصرو په ترکیب کې د ټولو امکاناتو شمېر د هر سټ د عناصرو د شمېر د ضرب له حاصل سره مساوی دي.
- 2- که چیرې د امکاناتو شمېر او یا د یوه سټ عناصر په m او د یو بل سټ د عناصرو شمېر مساوی په n وي، په دې حالت کې دواړه تاکنې يوله بل سره په $(m \times n)$ ډوله امکان لري.

مثال: د 0، 1، 2، 3 او 4 رقمونو خخه په ګټې اخیستې سره خو دوه رقمي ععددونه جوړولای شو؟ ونه يېز ګراف يې رسم کړئ او هغه احتمال پیدا کړئ چې له دې ععددونو خخه یو عدد په ناخاپې ډول و تاکل شي چې هغه عدد په 2 د بېش وړ وي.

د دې کار لپاره د دکر شوي دوه رقمي عدد د جورولو لپاره دوه تشن خاينونه د هر رقم لپاره په پام کې نيسو.

له کين خوا په تشن خای کې د راکړل شويو پنځو رقمونو خخه 4 امکانه (پرته له صفر) د 3,2,1,0 او 4 عددونو د خای پر خای کولو لپاره شته دي، خود بنی خوا د تشن خای لپاره 3,2,1,0 او 4 هرو پنځو عددونو خخه ګټه اخلو. په دې ترتیب د دې رقم د تاکلو پنځه امکانه شته دي چې په مجموعي ډول د پورتیو عددونو په وسیله د دوه رقمي عدد د جورولو لپاره $20 = 4 \times 5$ امکانه شته دي.

دا مطلب کولای شودونه یېز ګراف په مرسته په لاندې ډول وښيو، لکه:



د دې لپاره چې نوموري، رقم پر 2 د وېش وړوي د بنی خوا په تشن خای کې د 5 برابر او امکاناتو خخه یوازي 3 امکانه د (0 او 4) شته دي. د داسې عددونو د جورولو لپاره چې پر 2 د وېش وړوي، د $2 \times 3 = 12$ برابر حالتونه دي چې په دې حالت کې د هغه رقم د تاکل کيدو احتمال چې پر 2 د وېش وړوي عبارت دي له:

$$P(\text{دهجه عدد} | \text{دو پېش وړوي}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

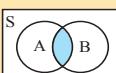
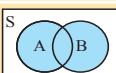
پونټني

1- د (م، ر، ی، م) تورو خخه په ګټې اخیستنې سره خو خلور حرفي معنا لرونکي او معنا نه لرونکي کلمې جورولای شو؟ موضوع دونه یېز ګراف په مرسته تشریح کړئ؟
که چېږي له دې ترکیبی کلمو خخه په ناخاپې ډول یوه کلمه وټاکو د دې احتمال پیدا کړي چې دا کلمه ((مریم)) وي.

2- د 1,0 او 4,7,8,9 عددونو خخه د مبایل تلېفون خو داسې شپر رقمي نمرې جورولای شو چې له کين خوا خخه، په 077 پيل شوي وي؟

د نهم خپرکي لنديز:

د دي لپاره چې وکولای شود ناخاپي پېښو د ترکیب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره د ستونو د تیوري په کارولو سره يو بنه تصور ولرو، هغه مو په لاندي جدول کې راتول کړل.

د پېښي احتمال	د ناخاپي او Venn دیاګرام	د بېښي پېښي	د بېښي پېښي بیان
خرنګه چې $P(S) = 1$ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$		$\bar{A} = S - A$ یا $S = A \cup \bar{A}$	د هفه تولې ناخاپي پېښه چې د A پېښه یه کې ګلګون ونه لري د A پېښي عکس دي
$P(A \cap B)$		$A \cap B$	د ناخاپه پېښه او د ناخاپه پېښه پېښیري.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		$A \cup B$	لړ تسله د A یا د ناخاپي پېښو خخه یوه پېښیري.

د شمېرنې حل: د دوو ستونو د عناصر او په ترکیب کې د ټولو امکاناتو شمېر، د هري ترکيبي مجموعي، د عناصر او د ضرب له حاصل سره مساوي دي.
که د سټ د عنصر ونو امکان په m ډول او د بل سټ د عنصر ونو امکان په n ډول، وي یو له بل سره د دوی د ترکیب د ټولو امکاناتو شمېر، د $m \times n$ سره برابر دي.

د نهم خپرکي پوبنتني

1- که یوه نمونه یي فضا او A د هغې یوه ناخاپه پېښه وي وبنایاست چې:

a) که $A \subseteq \emptyset$ وي وښی چې $P(A) = 0$ دي.

b) که $S \subseteq A$ وي په دي حالت کې $P(A) = 1$ دي.

2- که چېږي د C ناخاپي پېښه، د A او B ناخاپي پېښي په خان کې ولري، وښی چې همدارنګه، د C ناخاپي پېښه د $A \cup B$ په خان کې ولري.

3- که چېږي S د A او B یوه نمونه یي فضا وي، د $A \cup B$ او $B \cup A$ ناخاپي پېښي یو بل په بر کې ولري، وښی چې د $A \cup B$ او $B \cup A$ احتمال یو دبل سره برابر دي.

4- که د S په یوه نمونه یي فضا کې د B ناخاپه پېښه د A پېښه په بر کې ولري، وښی چې د $A \cup B$ ناخاپه پېښي یو بل په خان کې لري. سریره پر دي واضح کړئ چې د دي ناخاپي پېښو احتمال یو له بل سره خه اړیکه لري؟

5- که چېږي S یوه نمونه یي فضا وي او د هغې یوه ناخاپه پېښه وي، وښی چې: $S - B = \bar{B}$.

6- د ګراف په مرسته وښی چې D یوې نمونه یي فضا د A او B دوو ناخاپي پېښو لپاره او $B - A$ او $\bar{A} - \bar{B}$ سره مساوي دي، یعنی: $\bar{A} - \bar{B} = B - A$.

7- وښی چې، د $\bar{A} \cap [(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$ ناخاپي پېښ، احتمال له صفر سره مساوي دي.