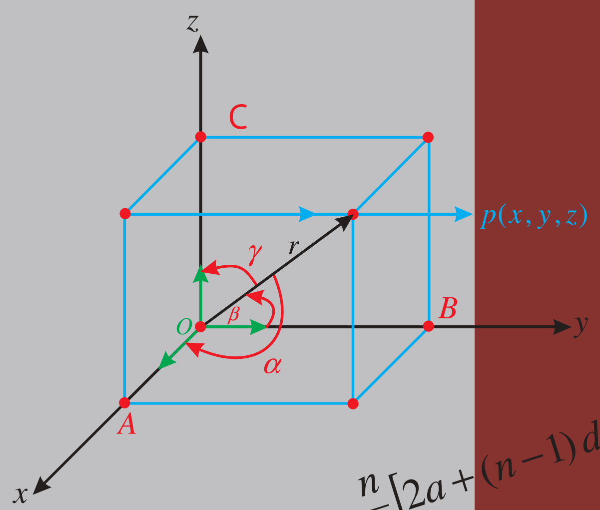
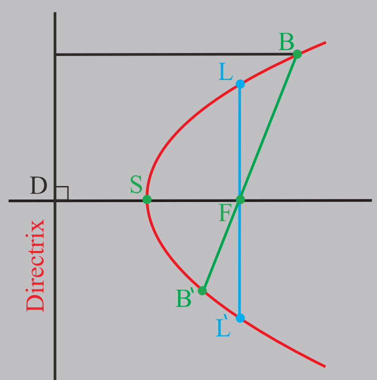
د پوهنې وزارت

رياضي ۱۱

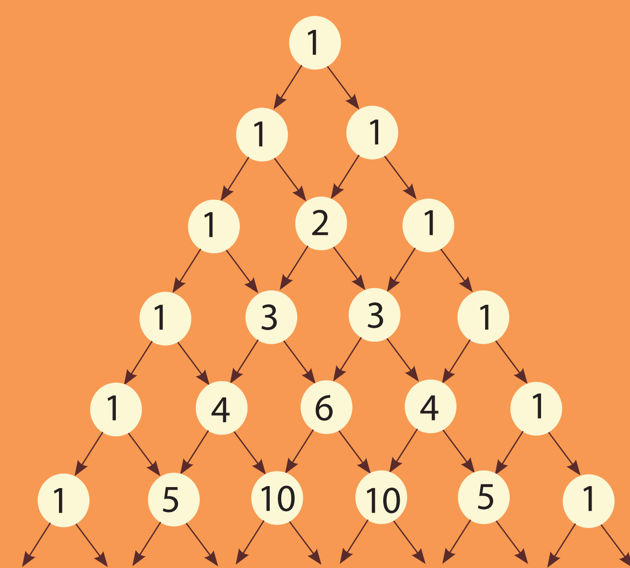
ټولګی



$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$



رياضي ۱۱ ټولګی



د چاپ کال: ۱۳۹۸

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ. ش.

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: یوولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او ليک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پيغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پيغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدينو شوراګانې د هېواد د پوهنيز نظام شپږګوني بنسټيز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختيا او پرمختيا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونيز نظام کې د ودې او پراختيا په لور بنسټيزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونيز نصاب اصلاح او پراختيا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړيتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځيو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونيزو تأسيساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور يو، چې د باکيفيته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونيز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مديرانو څخه په درناوي هيله کوم، چې د هېواد بچيانو ته دې د درسي کتابونو په تدريس، او د محتوا په لېږدولو کې، هيڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د يوه فعال او په ديني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤوليت په درک سره، په دې نيت لوست پيل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د يوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځيرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدريس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونيز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په ليکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بريا غواړم.

د معياري او پرمختللي ښوونيز نظام او د داسې ودان افغانستان په هيله چې وګړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزير

دکتور محمد ميرويس بلخي

لړلیک

سرلیک | **مخونه**

لومړی څپرکی مخروطي مقاطع

دویم څپرکی مثلثات

دریم څپرکی فضايي هندسه

څلورم څپرکی ترادفونه

پنځم څپرکی لوگاریتم

شپږم څپرکی متریکسونه

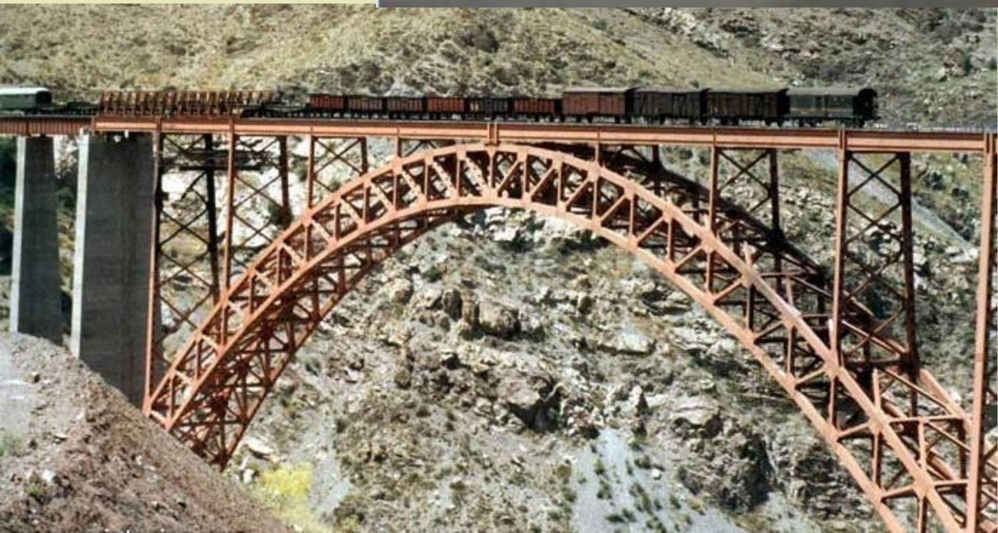
اووم څپرکی وکتورونه

اتم څپرکی احصایه

نهم څپرکی احتمالات

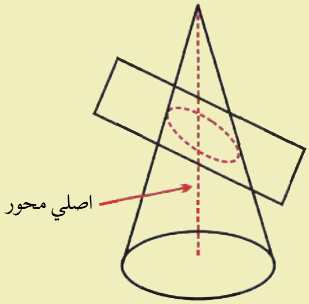
لەوەی خێرکی

مخروطي مقاطع



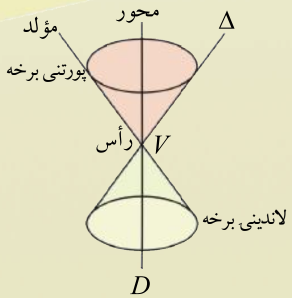
مخروطي مقاطع

sections of Conic



آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحنۍ ګانې لاس ته راځي.

د مخروطي مقاطعو تعریف



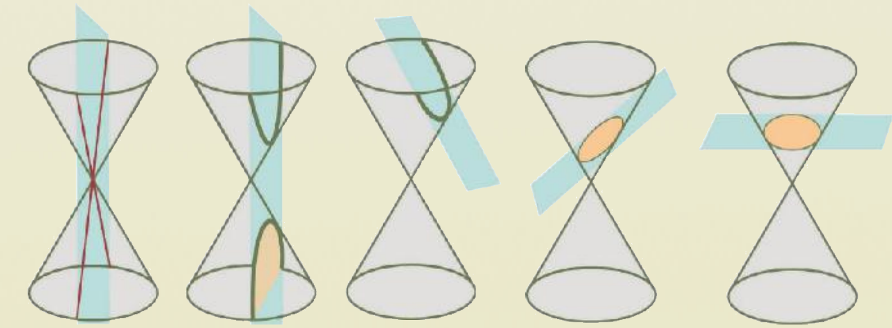
د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د V په ټکي کې قطع کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپیر وڅرخېږي، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلونه چې یو یې د V (ټکی) پورته او بل یې د V د ټکي ښکته خواته جوړېږي. هر یو یې مخروط دی، لکه: مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط اصلي محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی.

د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحنی ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کېږي. په راتلونکې کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلای شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایله وي، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره(Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوی (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړی وي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په بر کې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په ځان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.

پوښتنې

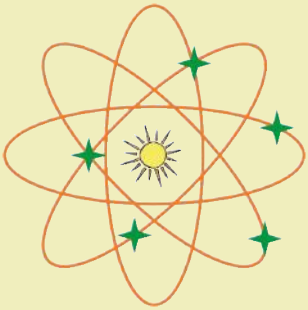
1- پورتني شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او یو مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیې؟

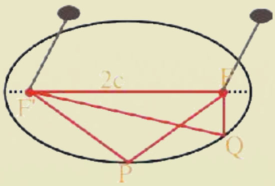
بيضــوي
Ellipse

د سیارو حرکت د لمریز نظام په شاوخوا څه ډول منحني ګاني جوړوي؟



فعالیت

- د میز پر سر د یوې سپینې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د یو تار څوکه چې اوږدوالی یې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زیات یا د $\overline{FF'}=2c$ وي، په دواړو ستنو کې وتړئ، لاندې شکل ته په کتو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.



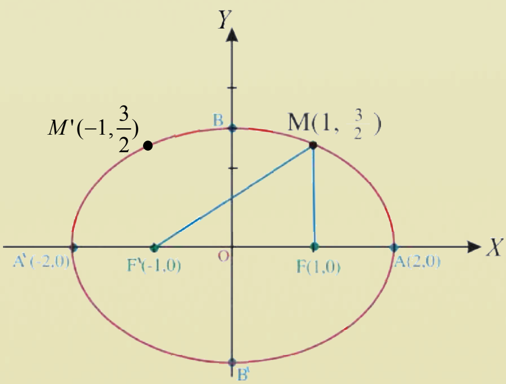
- هغه شکل چې له یوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، بیضوي بلل کیږي، د F او F′ ټکي د بیضوي د محراقونو په نامه یادیږي.

فعالیت

- په مخامخ شکل کې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF'|$, $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ او د $|MF|+|MF'|$ جمع حاصل لاس ته راوړئ او د $|AA'|$ اوږدوالی سره یې پرتله کړئ.



- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنی ذکر شوې مرحلې د M' په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنګه د M ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

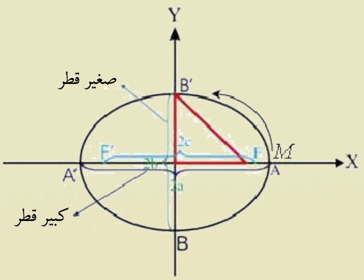
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی $(2a)$ ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په F او F' تورو ښودل شوی، د بیضوي محراقونه او A, A' د بیضوي راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F| + |M' F'| = 2a \quad , \quad |M F| + |M F'| = 2a$$

نو:

$$|M' F| + |M' F'| = |M F| + |M F'| = 2a$$

د بیضوي قطرونه او راسونه



بیضوي بې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو (A او A') کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او ترټولو لنډ قطر یې چې د FF' د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکی د بیضوی راسونه دي، کبیر قطر په $A A'$ چې اوږدوالی یې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په BB' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کېږي.

یاددښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې: $\overline{MF} = \overline{MF'}$ سره کیږي.

د بیضوی له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړيکې د فيثاغورث د قضيې له مخې ليکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

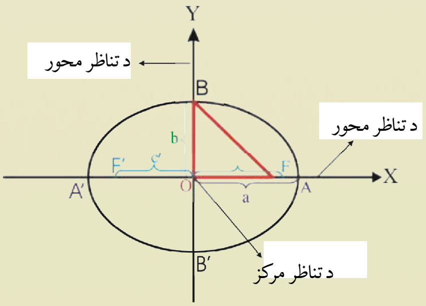
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د بيضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بيضوي دوه تناظري محورونه لري، يو يې اوږد محور چې د AA' پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کېږي او بل يې لنډ محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه يادېږي.

د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بيضوي تناظري مرکز بلل کيږي او په (O) سره ښودل کيږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$

$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزيت (Eccentricity): د محراقونو د اوږدوالي او د کبير قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المرکزيت وايي چې د يوې بيضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کېږي ، د بيضوي عن المرکزيت په e سره ښودل کيږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهېږو چې په هره بيضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کېږي، ولې؟

د بيضوي د عن المرکزيت او قطرونو تر منځ داسې رابطه $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ده، د $e = \frac{c}{a}$ د رابطې په کارولو سره هغه لاس ته راوړئ.

يادونه: که چيرې د e قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدې کېږي او بيضوي تقريباً دايروي شکل غوره کوي. که چېرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کېږي چې يو اوږد شکل غوره کوي، د بيضوي د ډېرو مسايلو په حل کې د عن المرکزيت څخه کار اخيستل کېږي.

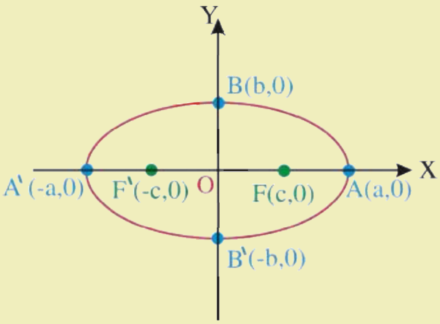
پوښتنې

1 – که چېرې په بيضوي کې د کبير او صغير قطر اوږدوالى يو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحني په لاس راځي؟

2 – که چېرې د بيضوي عن المرکزيت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا کړئ.

د بيضوي معادله

آيا د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، پيدا کولای شئ؟

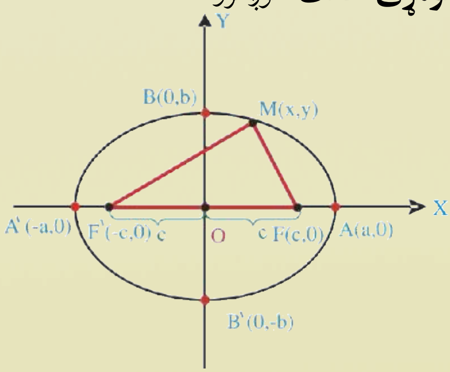


فعاليت

- داسې بيضوي رسم کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي او محراقونه يې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x, y)$ يو اختياري ټکی، د بيضوي پر محيط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بيضوي د تعريف رابطه نظر د M ټکي ته وليکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې د MF او MF' اوږدوالی پيدا کړئ او دهغه په اساس د بيضوي معادله په لاس راوړئ.

د بيضوي د معادلې ثبوت

لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF| + |MF'| = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
$$(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته ليکو چې:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad / \div(-4)$$

يا $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

د پورته رابطې دواړه خواوې بيا مربع کوو او ليکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0/(-1)$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کېږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توگه ليکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

د بيضوي په پورته معادله کې a د کبير قطر نيمايي او b د صغير قطر نيمايي دی چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مرکز کې او محراقي محور يې د x پرمحور دی.

د کبير او صغير قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases}A(a، 0)\\A'(-a, 0)\end{cases} \qquad \begin{cases}B(0،b\ )\\B'(0، -b)\end{cases} \qquad \begin{cases}F(c، 0)\\F'(-c، 0)\end{cases}$$

دويم حالت: که چېرې د بيضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بيضوي معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

د هغه گراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات يې وليکي.

لومړی مثال: که چېرې د بيضوي اوږد قطر د y پر محور باندې او اوږدوالی يې $|AA'|=6$ او د لنډ قطر اوږدوالی يې $|BB'|=4$ واحده وي، د بيضوي معادله پيدا کړئ.

حل:

$$|AA'|=2a=6 \Rightarrow a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \Rightarrow b=2$$

اوس د a او b قيمتونه په عمومي معادله کې ايږدو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

دويم مثال:که چیرې اوږد قطر د x پر محور او اوږدوالی یې $|AA'|=10$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهیږو چې:

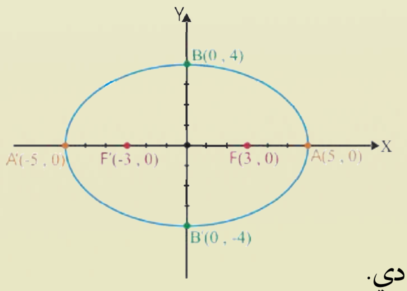
$$|AA'|=2a=10 \quad\Rightarrow\quad a=\pm5$$
$$|BB'|=2b=8 \quad\Rightarrow\quad b=\pm4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیداکوو:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3،0)$ څخه عبارت دي.

عین‌المرکزیت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دی.

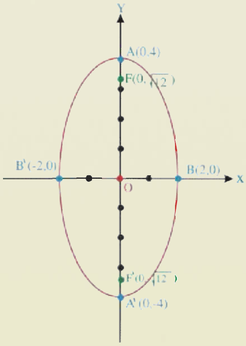
دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیداکړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad\Rightarrow\quad a=\pm4 \quad\Rightarrow\quad A(0،4)\ ،\ A'(0\ ،\ -4)$$
$$b^2=4 \quad\Rightarrow\quad b=\pm2 \quad\Rightarrow\quad B(2،0)\ ،\ B'(-2\ ،\ 0)$$



د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0, \sqrt{12}),\ F'(0, -\sqrt{12})$$

څلورم مثال:د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a \quad \ldots \text{I}$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د I په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2}} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$|AA'| = 2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 6^2 - (3\sqrt{2}\ )^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9\cdot 2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$|BB'| = 2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله یې پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad b)\ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې بیضوي معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

د هغې بیضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

آیا داسې بیضوي معادله پیداکولای شو چې مرکز يې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

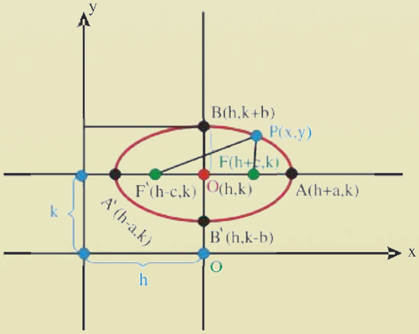
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعالیت

- یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h,k) اوږد قطر يې د x له محور سره موازي وي.
- د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسئ او هغه له F او F' سره ونښلوئ.
- د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B,B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول او د بیضوي د تعریف څخه په کار اخیستنې سره د بیضوي معادله په لاس راوړو:

د PF او PF' قیمتونه د بیضوي د تعریف په رابطه کې ایږدو.



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\;/(\;)2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})\ /\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې په بیضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو لیکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2\ \ /\ \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

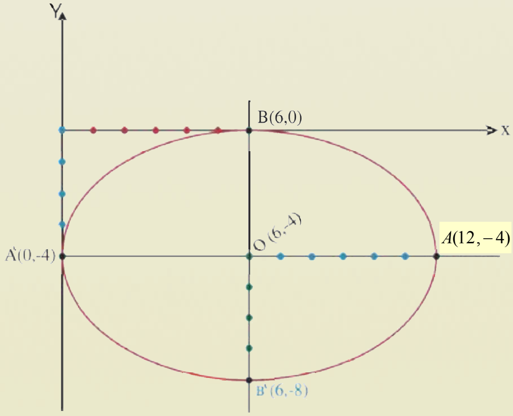
لومړی مثال: د یوې بیضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د راسونو مختصات چې معادله یې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: څرنګه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات یې $(6,-4)$ دي، اوږد محور یې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6,-4)=A(12,-4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6,-4)=A'(0,-4)$$



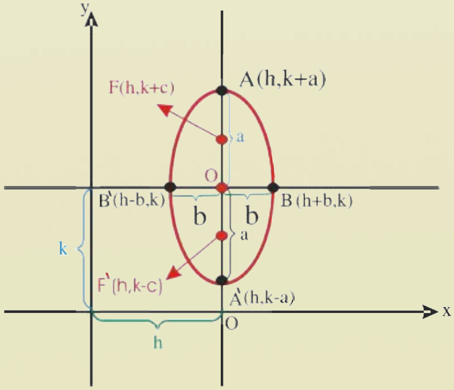
د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$

د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5}\ ,-4)$$

دويم حالت: كه چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت كې معادله لاندې بڼه غوره كوي.



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\ ,\ k+a)\ ,\ \ A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\ ,k)\ ,\ \ B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\ \ ,\ \ F(h\ ,k+c)$$

يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال كې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعنې $A>0\ ,\ C>0$ يا $A<0\ ,\ C<0$

دويم مثال:د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليكئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په كار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنۍ معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(2,-1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخېستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{كامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{كامله مربع}}-9-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د لاندې هر یوه بیضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبیر قطر اوږدوالی پیدا کړئ.

$a)\ \ \dfrac{(x+3)^2}{2}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\ \ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

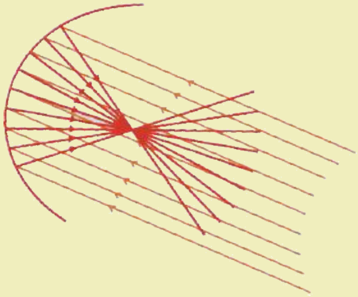
2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(1,2)$ ټکی، محراق یې د $(2,6)$ ټکی وي او د $(4,6)$ له ټکي څخه تېره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه یې رسم کړئ.

$a)\ \ 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\ \ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

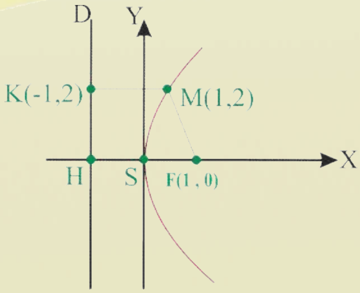
پارابـولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په يوې معقرې عدسيې ولـوېږي، انعکاسـي وړانګې يې له کوم ټکي څخه تېرېـږي؟ دغه ټکـی څه نـومېږي او د عدسې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسـيې اصلـي محور په بر کې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

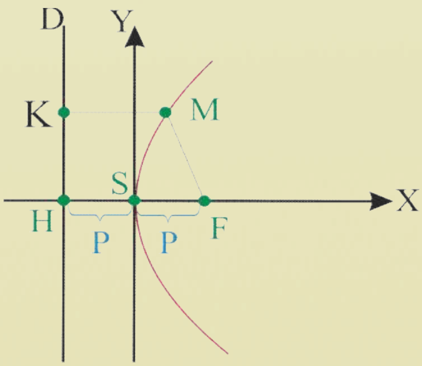


په مخامخ شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شـوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولـو لـه فـارمول څخـه پـه کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالـی پيـدا او يـو لـه بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکـي او يـوه ثابـت مـستقيم خـط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يـا مـستقر ټکـی د پـارابولا محـراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي خط يا موجه خط (Directrix) وايي $\overline{MF} = \overline{MK}$

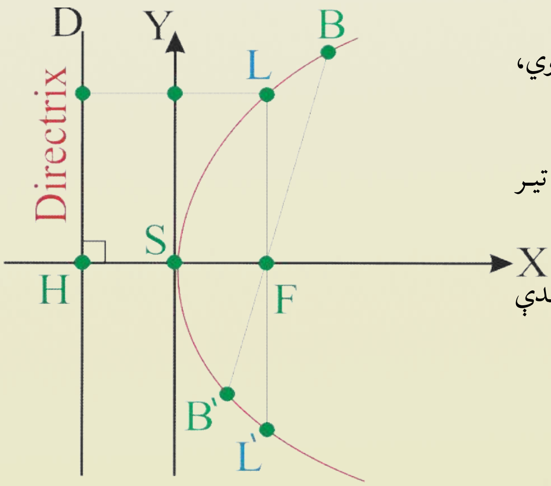
هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مـستقيم خـط عمـود وي، د پـارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه يادېږي.



د تناظري محور او منحني ګـډ ټکـی د پـارابولا راس او پـه S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e=1)$ دی، ولې؟



د پارابولا وترونه

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي.

په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی.

LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کیږي.

پوښتنې

د پورته شکل په مرسته وښیئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ خط د اوږدوالي څو برابره دی.

د پارابولا معادله

څنګه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کړو.

$$y^2 = 4px$$

$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه یو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د M, F او M, K ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او دا قیمتونه د پارابولا د تعریف په رابطه کې کیږدئ. $|MF| = |MK|$

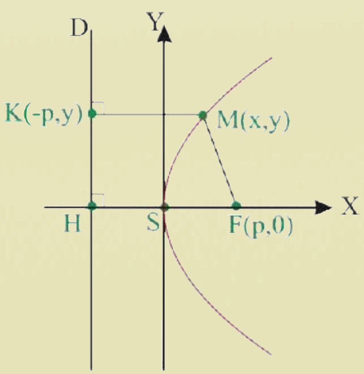
ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$

$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قیمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2}\,)^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$

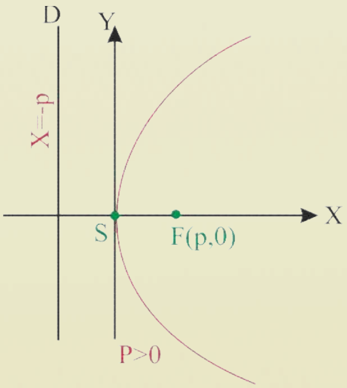
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$

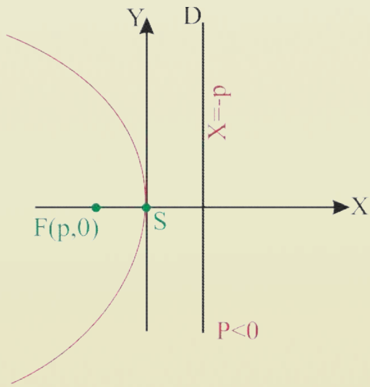
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې، محراق يې په $F(p,0)$ کې، د تناظر محور يې د x پر محور باندې منطبق دی او د موجه خط معادله يې $x=-p$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.



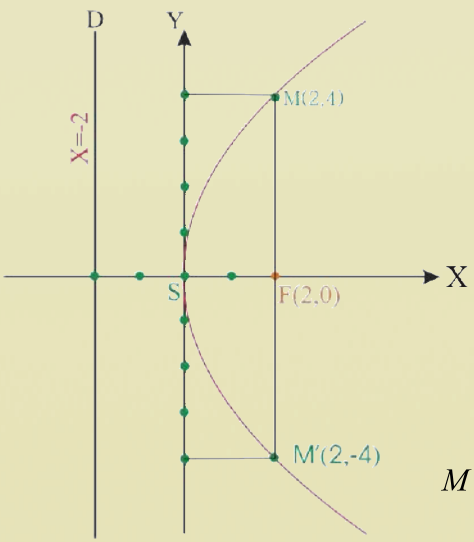


لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ويلای شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:



$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چېرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

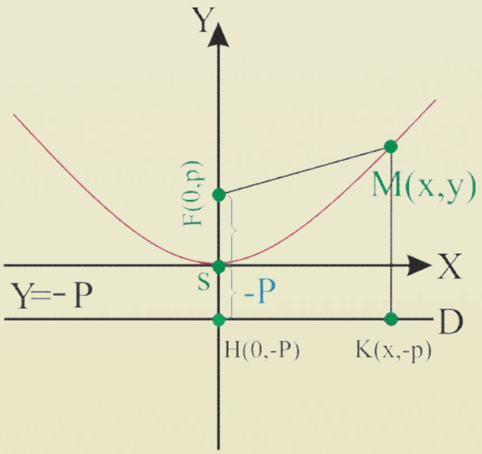
$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

د عمودي وتر د انجامونو مختصات: $M(2,4)$, $M'(2,-4)$

دويم حالت: که چېرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقيم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معياري معادله پيدا کړئ.

ثبوت: د پارابولا منحني پرمخ باندې د $M(x,y)$ ټکي په پام کې نيسو د تعريف له مخې ليکلای شو:



$$|\overline{MF}| = |MK|$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2 + [(y-(-p))]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$(\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2 \, /(\ \ )^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

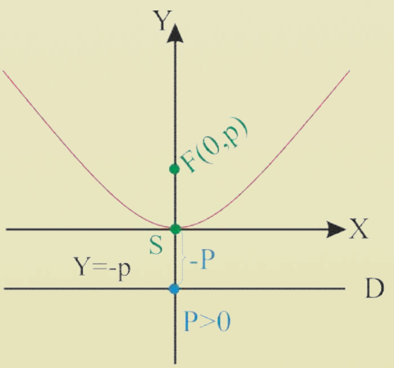
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

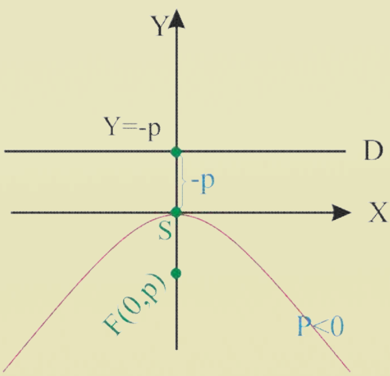
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس يې د وضعيه کمياتو د سيستم په مبدا کې او محراقي محور يې د y محور دی چې د محراق مختصات يې $F(0,p)$ او $y=-p$ يې د هادي مستقيم خط معادله ده.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پيدا کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

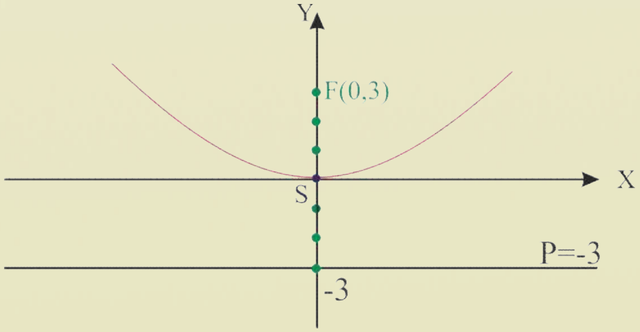
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

ځرنګه چې $P = 3 > 0$ شخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$



پوښتنې

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

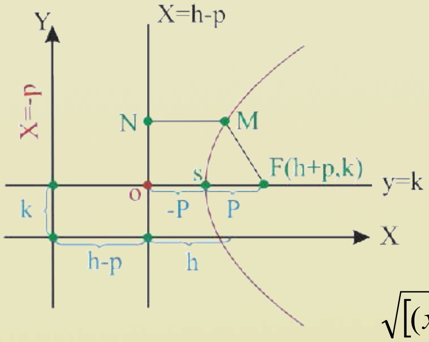
آيا د داسې پارابولا معادله پيداکولای شو چې د راس مختصات يې د وضعيه کمياتو په مبداکې نه وي.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې راس يې (h,k) او تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N ووایاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخيستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پيداکړئ، بيا د هغې پارابولا معادله چې راس يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت:څرنګه چې د F او M ټکو وضعيه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضعيه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF|=|MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

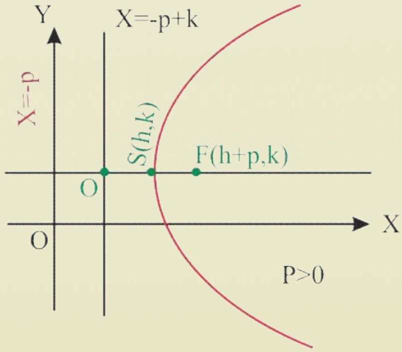
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

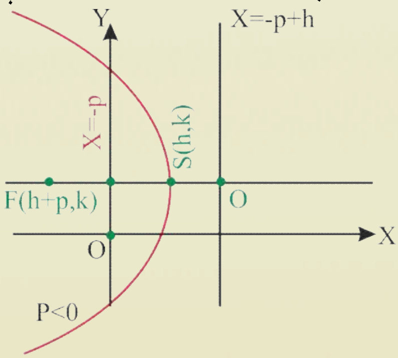
$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

پـورتنی معادلـه د هغـې پـارابولا معادلـه ده، چـې د راس او محـراق وضـعیه کمیـات یـې پـه ترتیـب سـره $S(h,k)$ او $F(h+p,k)$ دي، او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





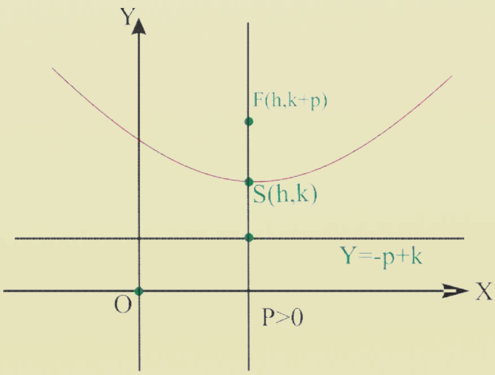
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې راس یې (h,k) او د تناظر محور یـې د y لـه محـور سـره مـوازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

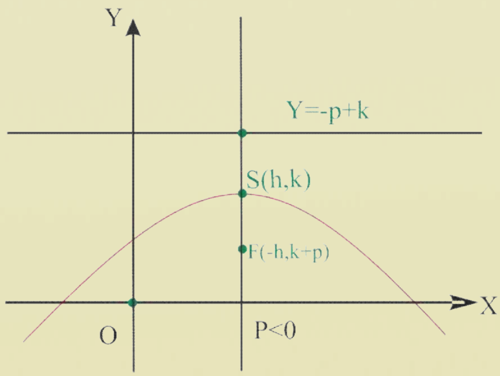
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یـې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

نو $k=2,h=1$ کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعيه کميات عبارت دي له: $S(1,2)$

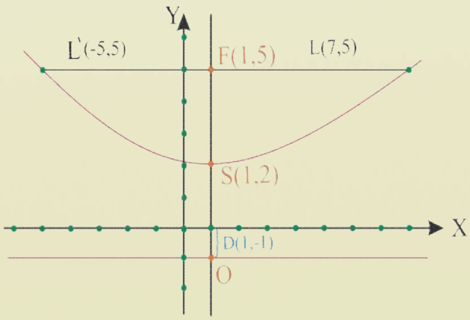
$$4p=12\Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3)\quad\Rightarrow\quad F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P\quad\Rightarrow\quad y=2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h\Rightarrow x=1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پيدا کولو لپاره د y قيمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې ايږدو يعني $y=5$ دی.



$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3\Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ \ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5)\qquad L'(-5,5)$$

دويم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونيسی، د پارابولا د راس او محراق مختصات، د موجه خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پيدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل:دراس مختصات: $k=4,h=-3\quad\Rightarrow\quad S(-3,4)$

$$4P=-6\Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

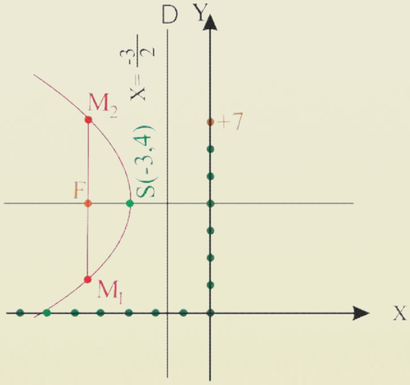
څرنګه چې $0>-\frac{3}{2}$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k\quad\Rightarrow\quad y=4$

د محراق $x=-\frac{9}{2}$ مختصی قيمت په معادله کې ايږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \quad \Rightarrow \quad y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې A یا C صفر وي نه دواړه $(A=0\ ,\ C\neq 0$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي) .

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په توسعوي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس او محراق مختصات، د مؤجه خط او تناظري محور معادلې یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کېږي: $4P=-8 \quad \Rightarrow \quad P=-2$

د راس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \quad \Rightarrow \quad S(-3,1)$

د محراق مختصات: $F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$

د موجه خط معادله $x=h-p \quad \Rightarrow \quad x=-3+2=-1$

د تناظر محور : $y=k \quad \Rightarrow \quad y=1$.

پوښتنې

1. د لاندې پارابولا معادله پیدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$S(1,3), F(-1,3)$

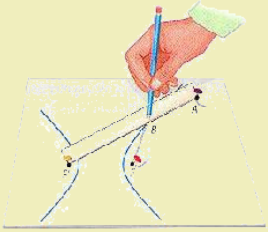
2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ معادلې ګراف د ټولو جزئیاتو سره رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلو په ډول ولیکئ او ګراف یې رسم کړئ.

$a)\ \ y^2-6y+8x+41=0$ $\qquad$ $b)\ \ x^2-2x-6y-53=0$

هـايپـربـولا

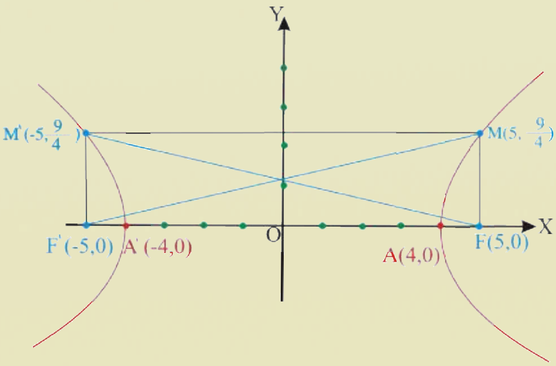
Hyperbola



په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحني کېدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د F, F', M, M', A او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ.
- د $|MF|-|MF'|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.
- پورتنی فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ
- د $|MF|-|MF'|$ او $|M'F|-|M'F'|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کېږي، یعنې: $|MF'|-|MF|=|AA'|=2a$

په شکل کې F او F' د هایپربولا محراقونه، M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي.

د FF' منځنی ټکی د هایپربولا مرکز دی، د مرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله په a او د مرکز او هر یوه محراق ترمنځ فاصله په c سره ښیي. $AA'=2a$ او $FF'=2c$.

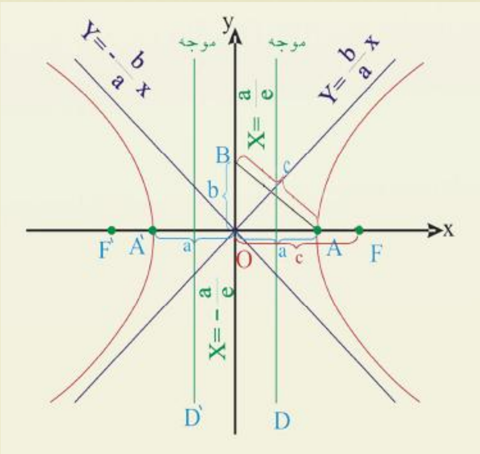
د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په څېر هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یو یې په FF' بانـدې منطبق دی او بـل یـې د FF' عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، د ها یپربولا مرکز بلل کېږي.

هغه تناظري محور چې له FF' څخه تېرېږي، د متقاطع محور (Transverse axis) په نامه یادیږي، څکـه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هایپربولا حقیقي راسونه وایې او اوږدوالی یې له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه تناظري محور چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، د مزدوج محور (conjugate axis) په نوم یـادیږی. د مرکـز دواړو خواوتـه د B او B' دوه ټکـي پـر نومـوړی محـور بانـدې داسې په نظر کې نیسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هـایپربولا غیـرې حقیقـي راسـونه بلـل کیـږي چـې ترمنځ یې فاصله $|BB'| = 2b$ ده.

په یوه هایپربولا کې د b, a او c اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$

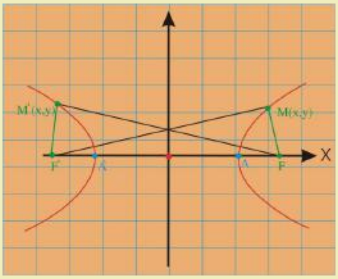


عن المرکزیت: څرنگـه چې پـه هـایپربولا کـې $c > a$ دي، نـو $e > 1$ کیـږي. چې د c, b, a او عـن المرکزیـت ترمنځ د $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. د $e = \frac{c}{a}$ لـه رابطې څخه په کار اخېستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

پوښتنې

د هایپربولا یو شـکل رسـم کـړئ او پـه هغـه کـې د هـایپربولا مرکـز، محراقونـه، حقیقـي او غیـرې حقیقـي راسونه، متقاطع او مزدوج محورنه وښیئ.

د هایپربولا معادله

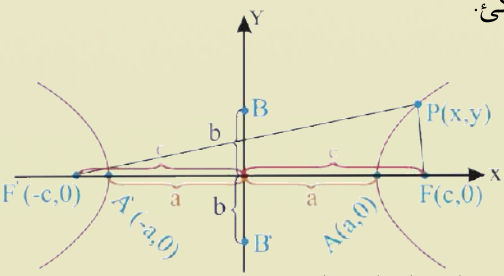


آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې

د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟

فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی د هایپربولا د منحني په یوې څانګې باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F,P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د PF او PF' فاصلې پیدا کړئ او هغه د هایپربولا د تعریف په رابطه کې ولیکئ.



د هایپربولا د معادلې د پیداکولو لپاره د تعریف له مخې لرو: $|PF'|-|PF|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ /\div 4$$

$$\Rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

ځرنګه چې په هایپربولا کې $c^2 = a^2 + b^2$ رابطه شتون لري، نو $c^2 - a^2 = b^2$ کېږي، نو په پورته افاده کې

د $c^2 - a^2$ د قیمت په ایښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \,/ \div a^2b^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

پورتنۍ معادله د داسي هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې د هایپربولا متقاطع محور $\overline{AA'}$ د y پر محور پروت وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

د پورتنۍ رابطې ګراف رسم، فارمول یې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات یې پیدا کړئ.

د هایپربولا موجه خطونه

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز ځخه د $\pm\dfrac{a}{e}$ یا $\pm\dfrac{a^2}{c}$ ځخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د موجه (ها دي) خطونو معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\dfrac{a}{e}$ ځخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\dfrac{a}{e}$ ځخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز ځخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحني سره مماس وي.

د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

کـه چیـرې پـه پـورتنی رابطـه کـې x لایتنـاهي تـه نـژدې شـي د $\frac{a^2}{x^2}$ کـسر د صـفر خواتـه نـژدې کیـږي پـه پایلـه کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړي مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسـونو مختصـات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

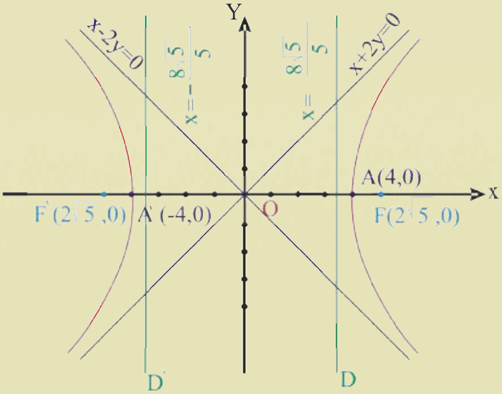
حل: دراُسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

$$b^2=4\quad\Rightarrow\quad b=\pm2\quad\Rightarrow\quad B(0،\ 2)\ ،\ B'(0،\ -2)$$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنگه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي، له دې امله:



$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$

دويم مثال: د $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, معادله د هايپربولا يوه معادله ده، په نوموړي معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هايپربولا معادله ده چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او د y محور يې متقاطع محور دی.

د راسونو مختصات: $a^2=4\Rightarrow a=\pm 2\Rightarrow A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm 3\Rightarrow B(3\ ,0)\ \ ,\ \ B'(-3\ \ ,0)$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

$$F(0,\sqrt{13})\quad ,\quad F'(0,-\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: ځرنگه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې يې عبارت دي له:

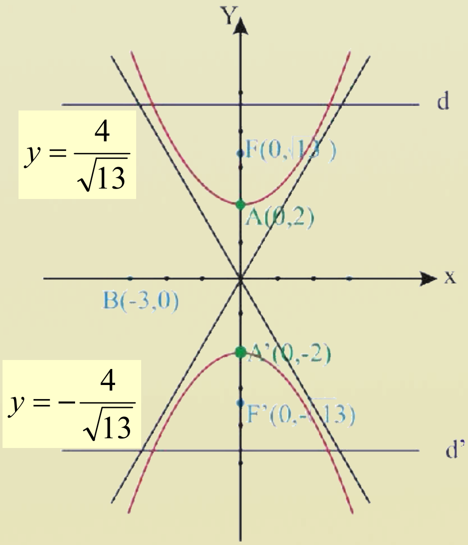
$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \ \Rightarrow\ \ y=\pm\frac{2}{3}x\ \ \Rightarrow\ 3y=\pm 2x$$

$$3y-2x=0\qquad ,\qquad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: ځرنگه چې د هايپربولا متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\ \ ,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هايپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعيه کميات، د راسونو وضعيه کميات، د موجه خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او گراف يې رسم کړئ.

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

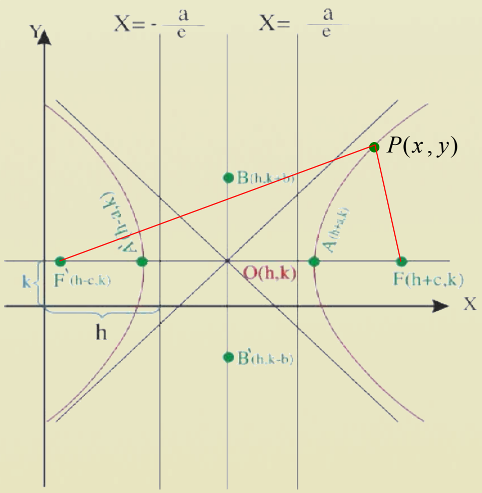
آیا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې (h,k) او متقاطع محور یې د x له محور سره موازي وي.



- د هایپربولا د منحنی پرمخ باندې د $p(x,y)$ یو اختیاري ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د مرکز (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو مختصات یعنې F او F'، د راسونو مختصات یعنې A, A', B او B' په شکل کې وښایاست.

د شکل څخه په کار اخیستنې سره د $|PF'|-|PF|=2a$ رابطه حساب کړئ.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول او د هایپربولا د تعریف له رابطې څخه په کار اخیستنې سره لیکلای شو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ \ )^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریق کوو او پورتنی رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{\cancel{b^2}(x-h)^2}{a^2\cancel{b^2}}-\frac{\cancel{a^2}(y-k)^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

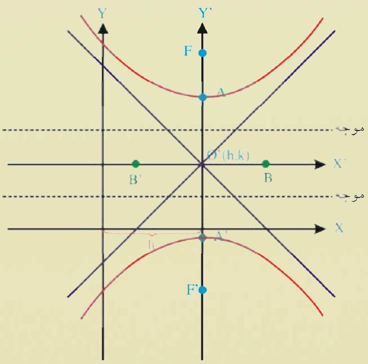
د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

د موجه خطونو معادلې: $x-h\pm\frac{a}{e}$



دویم حالت: که چیرې متقاطع محور د y له محور سره موازي وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو او محراقونو مختصات د مؤجه خطونو او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

یادونه: د هایپربولا پراختیايي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A, B \neq 0$ او $A \neq B$ یا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

لومړی مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونیسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$
$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k=-1, h=3$ یعنې $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$
$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,-1+6) = B(3,5), \\ B'(h,k-b) = B'(3,-1-6) = B'(3,-7) \end{cases}$$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16+36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

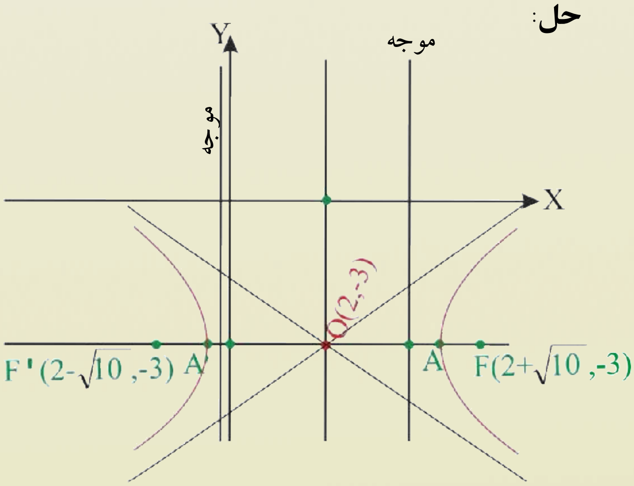
د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1)$ $\quad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

که چیرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{6}{4}(x-3)-1 = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$
$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1 \;\; /\cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3)-2$$
$$2y = 3x-9-2 \;\Rightarrow\; 2y-3x+11=0$$
$$2y = -3x+9-2 \;\Rightarrow\; 2y+3x-7=0$$

دويم مثال: د هایپربولا $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونیسئ. د مرکز، راسونو او د محراقونو مختصات او د موجه خطونو او محانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتنی معادله په معیاري ډول واړول شوه، لیدل کیږي چې $h=2$ او $k=-3$ یعنې د مرکز مختصات یې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm 2 \quad , \quad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: $F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

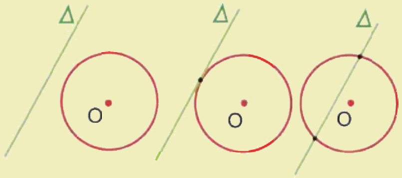
$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3/\cdot\sqrt{6}\Rightarrow \sqrt{6}y=\pm 2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\begin{cases}\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0\\ \sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0\end{cases}$$

پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هایپربولا پر معیاري معادلې باندې واړوئ.

د مستقیم خط موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري مستقیم خط، یوه دایره د امکان په صورت کې په څو ټکو کې قطع کولای شئ؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیم خط په پام کې ونیسئ:

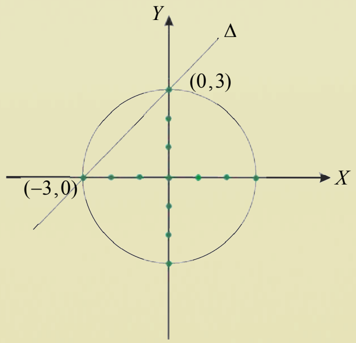
- یوه دایره او مستقیم خط داسې رسم کړئ، چې یوازې یو ګډ ټکی سره ولري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیم خط، یوه دایره له دوو ټکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چیرې د دایرې د مرکز او مستقیم خط تر منځ واټن، د دایرې له شعاع څخه لوی وي. دایره او مستقیم خط څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري مستقیم خط او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هیڅ ګډ ټکی ونلري.

لومړی مثال: په وضعیه کمیاتو کې د $x^2 + y^2 = 9$ دایره او $y = x + 3$ مستقیم خط رسم او موقعیت یې و ټاکئ.

حل: په شکل کې لیدل کېږي، چې دایره او مستقیم خط یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس ته راوړلو لپاره که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$y = x + 3$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + (x+3)^2 = 9$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -3$$

د x قیمتونه د $y = x + 3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1 = 0 + 3 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$y_2 = -3 + 3 \Rightarrow y_2 = 0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ ټکي د دایرې او مستقیم خط د تقاطع ټکی دی.

په عمومي ډول کله چې د مستقیم خط له معادلې څخه د x یا y متحول قیمت د مخروطي مقاطعو په معادله کې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاس ته راځې چې حل یې د Δ په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

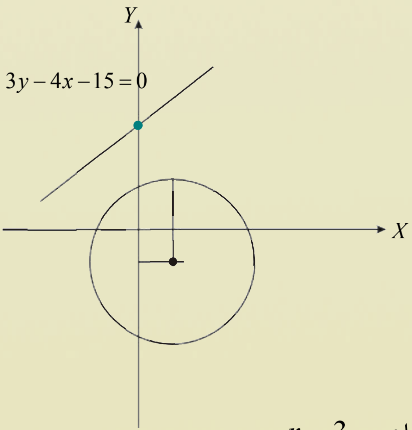
1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقیم خط او منحني یوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي حلونه لري او په دې ډول مستقیم خط د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقیم خط او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ مستقیم خط په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و څېړئ.

حل: لومړی د دایرې معادله په معیاری شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow \ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

د دایرې له معیاري معادلې څخه پوهېږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیم خط معادله معیاري شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لانـدې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2 + (\frac{4}{3}x + 5 + 2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + (\frac{4}{3}x + 7)^2 = 9 \quad \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}x^2 + 14\frac{4}{3}x + 49 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow\ 9 \cdot \frac{25}{9}x^2 - 9 \cdot \frac{50}{3}x + 9 \cdot 41 = 0$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 150x + 369 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 22500 - 36900 = -14400 \quad , \quad \Delta < 0$$

څرنګه چې $\Delta < 0$ ده، نو مستقیم خط او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y = x - 1$ د مستقیم خط موقعیت د $y - x^2 + 1 = 0$ پا رابولا ته وڅیړئ.

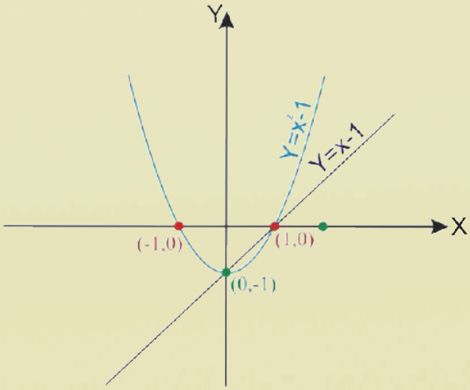
حل: د پورتنی مسئلې د څیړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې و ضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y = x - 1$$

$$y - x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow (x-1) - x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1 - 0 \quad \Rightarrow \Delta = 1$$



څرنګـه چـې $\Delta = 1 > 0$ ده، نـو $y = x - 1$ مـستقیم خط د $y - x^2 + 1 = 0$ پارابول پـه دوو ټکـو کـې قطع کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2 - x = 0$$

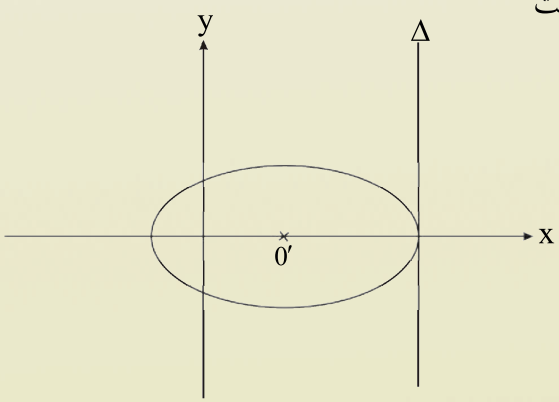
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کېږدو، نو د نوموړي مستقیم خط او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(1,0)$, $(0,-1)$ چې دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

ځلورم مثال: د $x=5$ مستقیم خط او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضوي موقعیتونه وڅېړئ.

حــل: کـه چېـرې د $x=5$ د مـستقیم خـط قیمـت د بیضوي په معادله کې کښېږدو، نو په لاس راځي:



$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

ځرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$

په دې ډول ویلای شو چې مستقیم خط او بیضوي یو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad , Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتنی معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ او یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ او یو شان علامې ولري، یو بیضوی دی.

3- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ یا $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یو پارابولا ده.

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 \text{ او } Ay^2+By+Cx+D=0$$

پوښتنې

1- د لاندې معادلو ډول د هغوی د ګرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

$a)\ y^2-2y+x+3=0$

$b)\ 9x^2+9y^2=27$

$c)\ 25x^2+16y^2=400$

$d)\ x^2-y^2=0$

$e)\ y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ بیضوي او $y=3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

د خپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونو کې مختلف منحني ګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم یادیږي.

بیضوي: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه بلل کیږي او $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی

شمیره	معادلې	د مرکز وضعیه کمیات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ په لوی قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm b)$ په لنډ قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm c,k)$
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ په لوی قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ په لنډ قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm c)$

د بیضوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې A او C دواړه هم علامه وي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هادي(موجه) وایي.

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعیه کمیات	د پارابولا معادلې	شمېره
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا عمومي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي)، په پارابولا کې عن المرکزیت $e=1$ سره دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تـل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کېږي.

د هایپربولا معادلې	د مرکز وضعیه کمیات	د رأسونو وضعیه کمیات	غیر حقیقي رأسونه	محراقونه	د موجه خطونو معادلې	د مجانبونو معادلې
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$x=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{b}{a}x$
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې.	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې.	$y=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h\pm a,k)$	$B(h,k\pm b)$	$F(h\pm c,k)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h,k\pm a)$	$B(h\pm b,k)$	$F(h,k\pm c)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

د هایپربولا عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$، خو مختلف الاشاره وي. په هایپربولا کې عن المرکزیت $e>1$ دی.

د ځېرکي پوښتني

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چېرې يو مستوي يو مخروط په مايل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

$a)$ بيضوي　　$b)$ دايره　　$c)$ هايپربولا　　$d)$ دوه متقاطع خطونه

2- د بيضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بيضوي له مرکز څخه:

$a)$ برابر واټن لري　　$b)$ مختلف واټنونه لري

$c)$ د اوږد قطر نيمايي واټن لري　　$d)$ د لنډ قطر نيمايي ده.

3- که چيرې M د بيضوي يو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

$a)\ |MF|-|MF'|=2a$　　$b)\ |MF|+|MF'|=a$

$c)\ |MF|+|MF'|=2a$　　$d)\ |MF'|+|MF|=0$

4- د بيضوي عن المرکزيت له لاندې کومې يوې رابطې څخه په لاس راځي:

$a):\ e=\dfrac{a}{c}$　　$b):\ e=\dfrac{c}{a}$　　$c):\ e=\dfrac{b}{c}$　　$d):\ e=\dfrac{c}{b}$

5- په بيضوی کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړيکه عبارت ده له:

$a)\ a^2=b^2-e^2$　　$b)\ a^2+b^2=c^2$

$c)\ a^2=b^2+e^2$　　$d)\ a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې که $p>0$ سره وي، نو:

$a)$ د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده.　　$b)$ دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

$c)$ دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده　　$d)$ دپارابولا خوله کيڼي خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ پارابولا معادله په پام کې ونيسئ. د محراق وضعيه کميات يې عبارت دي له:

$a)\ F(-1,-2)$　　$b)\ F(-1,4)$　　$c)\ F(-1,2)$　　$d)\ F(-4,-1)$

8- که چېرې F او F' د هايپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هايپربولا د محيط يو ټکی کيدلای شي؟

$a)\ |PF|+|PF'|=2a$　　$b)\ |PF|-|PF'|=a$

$c)\ |PF|-|PF'|=2a$　　$d)\ |PF|-|PF'|=0$

9- د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته
b) د x محور ته
c) د x او y محوررونو ته
c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e<1$
b) $e=1$
c) $e>1$
d) $e=-1$

11- د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.
b) د x پر محور باندې دی.
c) د x پر محور عمود دی.
d) د y له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره
b) دایره
c) پارابولا
d) بیضوي

13- د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$
b) $(4,2)$
c) $(2,0)$
d) $(-2,0)$

14- د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایري
b) بیضوي
c) پارابولا
d) هایپربولا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$
$b)\ 9x^2+2y^2=15$
$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$
$d)\ x^2+12x-120y+288=0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=4$ ، $e=0,8$ دي او کبیر قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=6$ $e=0,8$ دي او کبیر قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$
b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

4- د پارابولا لاندې معادلې لومړی په معياري شکل وليکئ او بيايې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

5- د هايپربولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

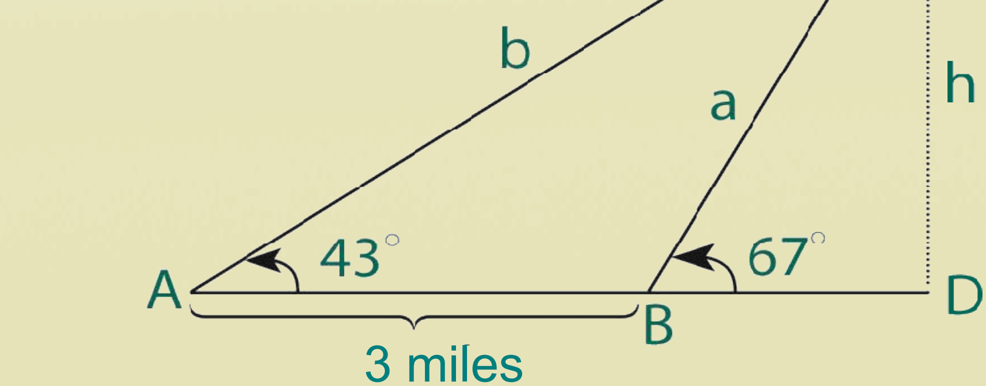
6- د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د حقيقي راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

7- د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د حقيقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ اوږدوالی يې 4 واحده وي.

8- د $y = 2x$ مستقيم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هايپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

دویم څپرکی

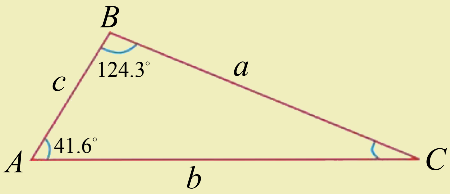
مثلثات


C
b
a
h
43°
67°
A
B
D
3 miles

د ساین قانون

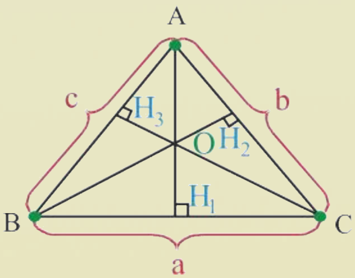
Law of sine

خرنگه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاويې اندازه پيدا کړو؟



فعاليت

- د ABC يو حادة‌الزاويه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی يې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د ($\overline{AH_1}$, $\overline{BH_3}$, $\overline{CH_2}$) ارتفاع گانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او ACH_1 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړئ.
- د ABH_2 او BCH_2 پــه قــايم‌الزاويــه مثلثــونــو کــې د ($\overline{BH_2}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يـو له بله سره يې پرتله کړې.



له پورتني فعاليت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت: د ACH_1 او ACH_1 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

او يا:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \mathrm{I}$$

په همدې ډول د ABH_2 او BCH_2 قایم‌الزاویه مثلثونو په مرسته لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_2}}{c} \Rightarrow \overline{BH_2} = c\sin A \;.........\; (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_2}}{a} \Rightarrow \overline{BH_2} = a\sin C \;.........\; (4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C \,/ \div ac$

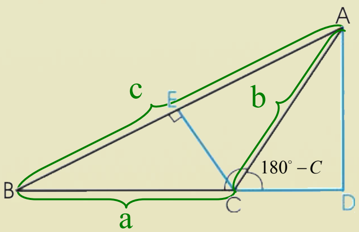
او یا: $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;..........\; \mathrm{II}$$

د I او II د رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې: $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادیږي.

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې چې A, B, C یې زاویې او a, b, c یې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:

د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع‌ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهیږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو : $$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} \;......(1)$$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} \;......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو:

د تناسب د خواصونو له مخې د وسطینو ځایونه بدلوو. $$\frac{\sin C}{\sin b} = \frac{c}{b}$$

نو : $$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \;........\; \mathrm{I}$$

اوس د ACE قایم الزاویه مثلث له مخې لیکلی شو:

$$\sin A=\frac{\overline{CE}}{b}.....(3)$$

د BEC په مثلث کې لیدل کیږي:

$$\sin B=\frac{\overline{CE}}{a}.....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل وېشو:

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$$

که چیرې د وسطینو ځایونه بدل کړو، نو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}......(II)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

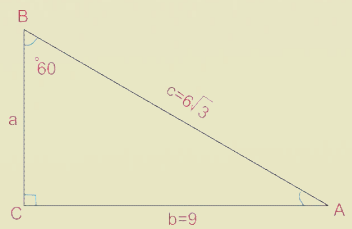
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

فعالیت

- د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅیړئ او ثبوت یې کړئ.

لومړی مثال: په لاندې ABC قایم الزاویه مثلث کې د یوې ضلعې او دوو زاویو قیمت پیدا کړئ داسې چې د یوې زاویې او دوو ضلعو قیمت درکړل شوی دی؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:



$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C=\frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ}{9}=\frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C=\frac{3\cdot 3}{9}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}}=1 \quad \Rightarrow \sin C=1$$

څرنګه چې: $\sin 90^\circ=1$ دی، نو: $\quad C=90^\circ$

همدارنګه پوهېږو چې په یوه مثلث کې:

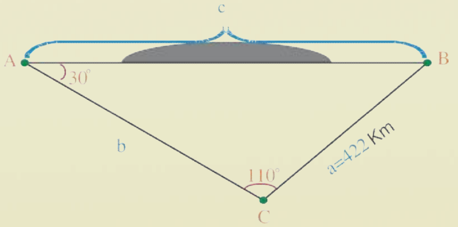
$$A+B+C=180^\circ$$
$$A+60^\circ+90^\circ=180^\circ$$
$$A=180^\circ-150^\circ$$
$$A=30^\circ$$

د a ضلعې قیمت په لاندې ډول پیداکولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B} \Rightarrow a=9\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیداکړي.



حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ ترمنځ رابطه په پام کې نیسو:

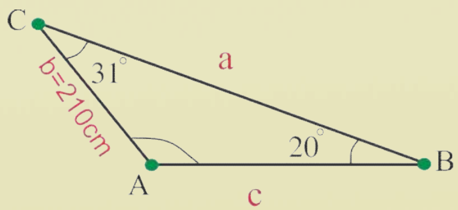
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422km\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

خرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\dfrac{422km\cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c=793.0224km$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یـوې ضلعې اندازه درکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازې پیداکړئ.



حل: پوهېږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومه زاویه یې داسې پیداکولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

د a ضلعې د اوږدوالي د پیداکولو لپاره د ساین قانون په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

خرنګه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

خرنګه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ دی د قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$\Rightarrow c=\frac{210\cdot 0.5150}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.228cm$$

یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

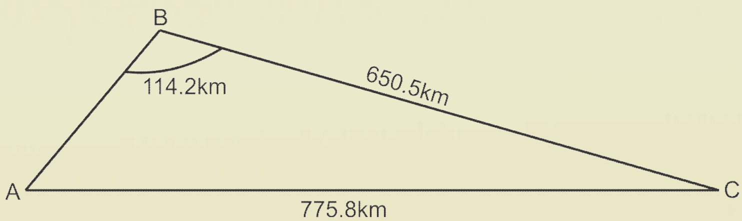
- دوې زاویې او د معلومې زاویې مخامخ ضلع یې معلومه وي، یعنې: ($A\ AS$).
- دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاویه یې معلومه وي، یعنې:(SAS).

باید ووایو چې دلتهA د Angle او s د side مخفف دي.

پوښتنې

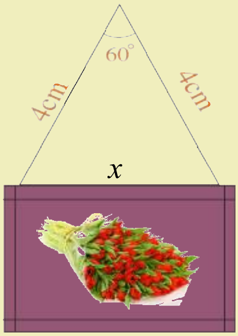
1. که چیرې د یوه قایم الزاویه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8m$, $b = 6m$ او $c = 10m$ وي، د مثلث د زاویو اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine

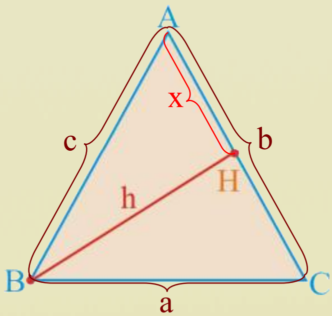


د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پـر مـخ ځـړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یـو $4cm$ وي او د مـنځ زاویـه یـې 60° وي، د تـار د دوو ټکو ترمنځ واټن (x) څرنګه پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د A, B, C راسونو مخامخ ضلعې په ترتیب سره په a, b, c وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع د H په ټکی کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په ABH قایم‌الزاویه مثلث کې د $\overline{AH}$ قیمت د A زاویې د کوساین د له جنسه پیـدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتو:



ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفـاع رسـموو

$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالی پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I په رابطه کې د h^2 قیمت لیکو

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قايم‌الزاويه مثلث کې:

$$\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

په $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ رابطه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قيمت اېږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{يا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پايله: په يو اختياری مثلث کې مو دا رابطه ثبوت کړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت کولای شو.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ldots I \quad \text{يا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \ldots. II \quad \text{يا} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \ldots. III \quad \text{يا} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

په هر مثلث کې د يوې زاويې کوساين (Cos) مساوی دی د زاويې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاويې د مقابلې ضلعې مربع د زاويې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندې.

فعاليت

- د تېرمخ د مثلث د شکل په مرسته د کوساين قانون د II او III رابطې ثبوت کړئ.

يادونه: د کوساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

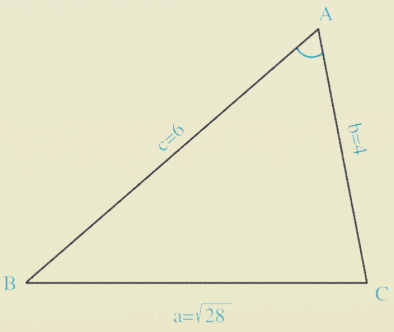
- چې دوې ضلعې او د منځ زاويه يې معلومه وي. (SAS).
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS).

د ساين او کوساين د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پيداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د يوه مثلث د عناصرو پيدا کول	
کله چې د يوه مثلث د دريو ضلعو اوږدوالی معلوم وي، د کوساين له قانون څخه ګټه اخلو.	(SSS) (ضلع، ضلع، ضع)
کله چې د يوه مثلث د دوو زاويو او د يوې معلومې زاويې د مقابلې ضلعې اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه ګټه اخلو.	SAA (زاويه، زاويه، ضلع)
کله چې د يوه مثلث د دوو ضلعو او د يوې معلومې ضلعې د مقابلې زاويې اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه ګټه اخلو.	ASA (زاويه، ضلع، زاويه)
کله چې د يو مثلث د دوو ضلعو او د هغوی ترمنځ د زاويې اندازه معلومه وي، د کوساين له قانون څخه ګټه اخلو.	SAS (ضلع،زاويه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاويه، زاويه، زاويه)

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دريو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاويې اندازه وټاکئ.

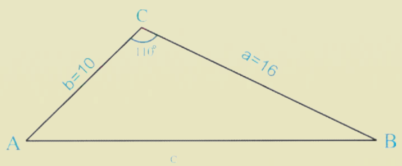
حل:



$$a=\sqrt{28} \quad , \quad b=4 \quad , \quad c=6 \quad , \quad A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot 4\cdot 6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A \quad \Rightarrow \quad 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28 \quad \Rightarrow \quad 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دويم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاويه يې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی يې پيدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)(10)\cos 110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos 110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos 110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos 110^\circ}$$

څرنګه چې: $\cos 110^\circ=-0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(-0.342)} \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{356+109.44}$$
$$\boxed{c=21.57}$$

درېيم مثال: يو پتنګ(کاغذ پران) له $100m$ تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاويه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پيدا کړئ.

حل: د OHL په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos 60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100} \quad \Rightarrow \quad x=100\cdot\cos 60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$

د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 5, c = 8$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلو سره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

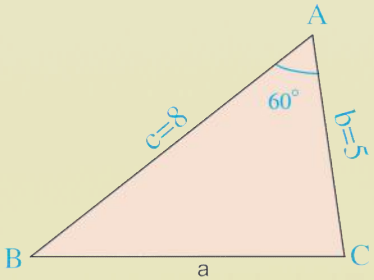
$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $b = 4ft, a = 5ft$ او $A = 45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.
2. که چېرې په یوه مثلث کې $a = 3cm$ او $b = 9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

آیا په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ مخامخ اړیکه شتون لري؟

فعالیت

- د ساین قانون رابطه ولیکئ او هغه له D سره مساوي په پام کې ونیسئ.
- د $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاس ته راغلي اړیکې یو پر بل وویشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

د پورته فعالیت د سرته رسولو وروسته لاندې پایله لاس ته راځي.

پایله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت ده له :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: د ساین قانون دوه نسبتونه له D سره مساوي لیکو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{b}{\sin B}=D \quad\Rightarrow\quad b=D\sin B \qquad , \qquad \frac{a}{\sin A}=D \quad\Rightarrow\quad a=D\sin A$$

پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$

$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنی اړیکې یو پر بل وېشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

 څرنګه چې $\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}=\cot\frac{A-B}{2}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې رابطې ثبوت کړئ.

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

- پورتنۍ رابطې په یوه مثلث کې د ټانجنټ قانون بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ\Rightarrow B+C=90^\circ\quad ...I$$

$$B+C=90^\circ\Rightarrow\frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

څرنګه چې $\tan 45^0=1$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پوهېږو چې $\tan 30=\sqrt{\frac{3}{3}}$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\frac{B-C}{2}=30^\circ \Rightarrow B-C=60^\circ \quad ...II$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

$$B-C=60^\circ \quad .... \text{ I}$$

$$B+C=90^\circ \quad .... \text{ II}$$

$$2B=150^\circ$$

$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په ایښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$

$$75^\circ-C=60^\circ$$

$$-C=60^\circ-75^\circ$$

$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $c=432\ ,\ B=42^\circ\ \ 30'$ او $a=925$ وي، د تانجنټ قانون څخه په ګټې د مثلث نوري نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ \ 30'$$

$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ \ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \quad .... \text{ I}$$

$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2}\Rightarrow\frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ \ 45'$$

$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432}\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$

$$\Rightarrow 1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.571$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363\cdot 2.571 \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2} = 0,933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^0 \Rightarrow \boxed{A-C = 86^\circ \quad ....\ \mathrm{II}}$$

اوس د I او II رابطو په پام کې نیولو سره د A زاویې قیمت پیدا کوو:

$$A+C = 137^\circ\ 30' \quad ...I$$

$$\underline{A-C = 86^\circ \qquad\quad} ...II$$

$$2A = 223^\circ\ 30 \Rightarrow 2A = 222^\circ\ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

اوس غواړو د C زاویې قیمت پیدا کړو:

$$A+C = \ 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساین قانون په مرسته د b ضلعې اوږدوالی پیداکوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432\cdot\frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ 45'}$$

په پورته رابطه کې د زاویو د ساین قیمتونه لیکو:

$$\sin 25^\circ\ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ\ \ 30' = 0.676$$

$$b = 432\cdot\frac{0.676}{0.434} = 672.885$$

پوښتنې

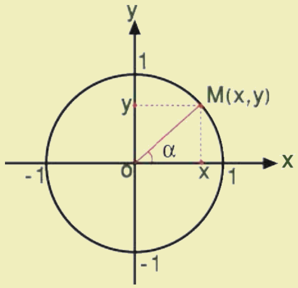
د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پیداکړئ.

a) که چېرې $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$ او $C = 75^\circ$ وي.

b) که چېرې $A = 45^\circ$, $b = 37m$ او $B = 75^\circ$ وي.

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او رابطه يې وليکئ.

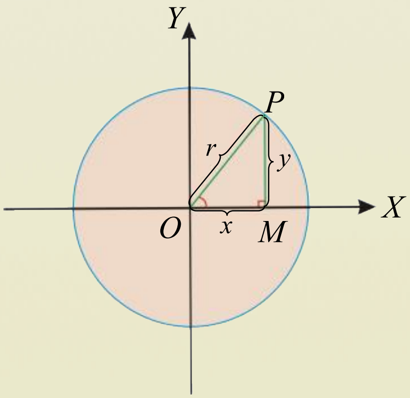
له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاس ته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کېږي.

د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې د OMP قایم‌الزاویه مثلث

د سموو او کولای شو ویې لیکو:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \text{ او } \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

د فیثارغورث د قضیې خخه کولای شو ولیکو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ویشو:

$$(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1 \qquad \text{یا} \qquad \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ لیکو.

نو لیکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ رابطه ثبوت کړو.

ثبوت: د فیثاغورث د قضیې په کارلو سره لیکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ویشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2=(\frac{r}{x})^2$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}=\sec\alpha$ او $\frac{y}{x}=\tan\alpha$ د قیمتونو په ایښودلو سره کولای شو

ولیکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

په عمومي توگه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات د یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افـاده لاس ته راوړو، یعنې د مطابقتونو یوې خواته مختلفې عملیې لکه: مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سـر ته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چېرې د یوې الجبري افادې حـدود د یـوې یـا څـو زاویـو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې سـاده کـولی شو. د موضوع د لا ښه پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$
$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $$(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\frac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\frac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$$

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کیڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot 1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښایاست چې $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندي مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کیڼې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قیمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه ایږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهیږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}=(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2$ دی.

اوس د معادلې ښئ خوا په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$

پوښتني

1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 25\overset{\circ}{0}}{\cos 25\overset{\circ}{0}}$ $\qquad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\qquad c)\ \frac{1}{\cos 8\overset{\circ}{0}}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\qquad b)\ \cot^2\beta$

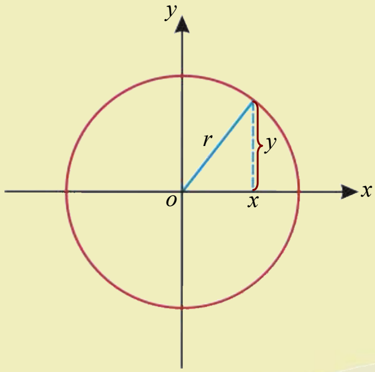
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \frac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\qquad b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $\qquad d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



پوهېږو چې $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ یو مثلثاتي مطابقت دی، آیا $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ یو مطابقت دی که یوه معادله؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د $1 - 2\sin\beta = 0$ او $1 + tag^2\beta = \sec^2\beta$ د β د کومو قیمتونو لپاره صحیح دي.

β	$1 - 2\sin\beta = 0$	$1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قیمتونو لپاره د $1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ او $1 - 2\sin\beta = 0$ ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

  _ آیا $1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

  _ آیا $1 - 2\sin\beta = 0$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت یوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

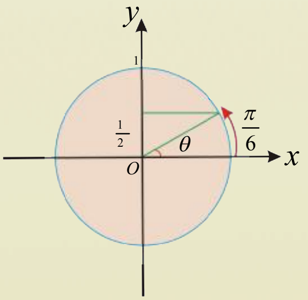
هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په یو حالت باندې حل کولی شو.

لومړی حالت: $a\sin\alpha + b = 0$

د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

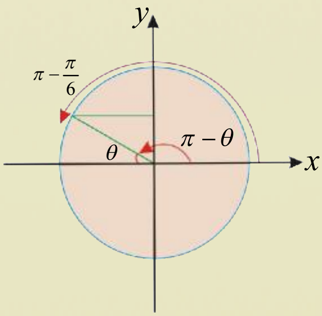
حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $\sin x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $2\sin x = 1$ $\Rightarrow$ $2\sin x - 1 = 0$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو

چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه هغه زاویې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \;\Rightarrow\; 2\sin x=3 \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې د $\sin$ د -1 او $+1$ په منځ ($-1\le \sin x\le 1$) دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

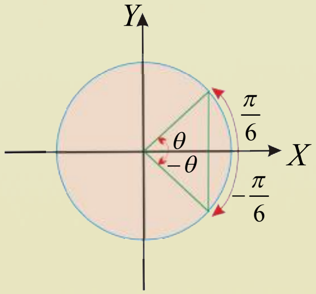
دویم حالت: $a\cos x+b=0$

د پورتنۍ معادلې د حل مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل:له پورتنۍ معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



اوس د $[0\,,\,\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو یا لټوو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې

$$\cos x=\cos\frac{\pi}{6}.$$

اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیداکوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\;,\;2\pi+\frac{\pi}{6}\;,\;4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\;,2\pi-\frac{\pi}{6}\;,\;4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي : $x=2n\pi\pm\theta, n=1,2,3\ldots$

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\;,\;k\in z\right\}$$

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0\,,\,2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\dfrac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ یې مساوي دی له:

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

لیدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$
$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دریم حالت: $a\tan x+b=0$

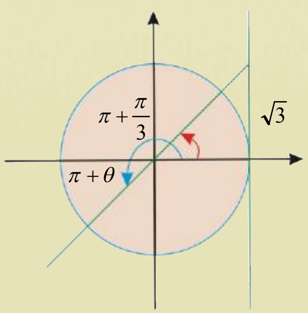
د عمومي حل د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځیر شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاویه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاویه له $\dfrac{\pi}{3}$ یا 60° څخه عبارت ده.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\dfrac{\pi}{3}$ په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دایره کې وینو چې کومې زاویې له $\tan\dfrac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.



$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ .\ .\ .\right\}$$
$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ .\ .\ .\right\}$$

په عمومي ډول پورتني ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}\quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړئ.

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan\ x=\tan\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\ x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x/x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}\quad k\in Z\right\}$

دريم مثال: د $\tan(2x-\dfrac{\pi}{4})=\tan(x+\dfrac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو هغه زاويې چې د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0}\ x_1=\dfrac{7\pi}{12}\\[2mm] \xrightarrow{k=1}\ x_2=\pi+\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{19\pi}{12}\end{cases}$$

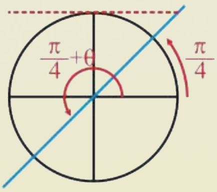
څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنۍ معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x-1=0\quad\Rightarrow\ \cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه ګورو چې $\cot$ يې $(+1)$ وي او هغه زاويه له $\dfrac{\pi}{4}$ يا 45° څخه عبارت ده :

نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$$x = \frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

$$x = \pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

نو د معادلې د حل سټونه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{4},\ \ k\in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره داسې لیکو: $A = \{x / x = k\pi+\theta\ ,\ k\in Z\}$

دریم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$

$b)\quad \tan x = \sqrt{3}$

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c, b, a او d ثابت عددونه دي.

$$a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x=d$$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنی معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده، نو:

$$A = \left\{ \begin{matrix} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{matrix} \qquad k \in Z \right\}$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad , \quad n = 0, 1, 2...$$

په همدې ډول د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A=\left\{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{13\pi}{120} \\ x=(2k+1)\pi-\frac{13\pi}{120} \end{array} \quad k\in Z\right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x+\sin x=0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1-2\sin^2 x+\sin x=0$$

$$2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2-y-1=0 \quad\Rightarrow\quad (2y+1)(y-1)=0$$

$$2y+1=0 \quad\Rightarrow\quad 2y=-1 \quad\Rightarrow\quad y_1=-\frac{1}{2}$$

$$y-1=0 \quad\Rightarrow\quad y_2=1$$

د $\sin x=y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x=y_1=-\frac{1}{2}$$

$$\sin x=y_2=1$$

په دې ډول د $\sin x=-\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\;,\;2\pi+\frac{\pi}{2}\,,\;\;4\pi+\frac{\pi}{2},\;\;...\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\;\;4\pi+\frac{7\pi}{6},\,6\pi+\frac{7\pi}{6},\;\;...\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\;\;,\;\;n=0,1,2,3\;...\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\;,\;\pi\;,2\pi,3\pi\;,4\pi,\;5\pi\;,\;...\}$$

$$A_2=\left\{\frac{\pi}{4},\;\pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},3\pi-\frac{\pi}{4},...\right\}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \;\ldots\; \mathrm{I}\\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \;\mathrm{II}\end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \; I\\ x + y = \alpha \;\ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \; I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\frac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتنې معادلې ښی لوری له $(+1)$ څخه لوی او له (-1) څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس یا زاویې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

$$-1 \leq \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

پورتنی غیرې مساوات د $1 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \leq 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \leq 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \leq 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \leq 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کیڼ لوري شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

ځرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........}\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........}\ II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې ایږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: د دغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

ځرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2}\le a\le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0\le a\le 1$$

د II معادلې کیڼ لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

څرنگه چې $\sin x\sin y=1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دی نو: $\cos(x-y)-\cos\pi=2$

همدارنگه پوهېږو چې $\cos\pi=-1$ دی.

نو: $\cos(x-y)-(-1)=2\Rightarrow\cos(x-y)+1=2$

$$\Rightarrow\cos(x-y)=2-1\Rightarrow\cos(x-y)=1$$
$$\cos(x-y)=\cos 0^\circ$$
$$x-y=0\Rightarrow x=y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x+y=\pi\Rightarrow x+x=\pi\Rightarrow 2x=\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}\quad ,y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=a\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=a\end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: **لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:**

$$\frac{\text{sinx}-\text{siny}}{\text{sinx}+\text{siny}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونـه پـه پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$
$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$
$$y=\frac{\pi}{6}$$

څلورم ګروپ: دغه ګروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\dfrac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې اېږدو:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}=1\quad\Rightarrow\quad 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا: $\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=-3$

نو:

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots. & \text{I} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \ldots\ldots. & \text{II} \end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې اېږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{2}$$

پنځم گروپ: دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \leq \dfrac{1+a}{1-a}\cos\alpha \leq 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\dfrac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

قیمتونه په اړونده اړیکه کې ایږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x + y$ قیمت د سیستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow x - y = \frac{5\pi}{6}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases} -$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

د x قيمت د I په معادله کې اېږدو او د y قيمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم ګروپ: په دغه ګروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له: $-1 \leq \dfrac{a-1}{a+1}\sin\alpha \leq 1$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کېڼي خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د sin او cos له جنسه داسې اېږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنګه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2} \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} .....\mathrm{I} \\ x-y=\frac{\pi}{2} .....\mathrm{II} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$$a) \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$$

د خپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالی یې b,a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځېر سره ولولئ، هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چېرې $A=20^\circ$ ، $b=10$ ، $c=7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی يې عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چېرې $a=8$ ، $b=5$ او $c=10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چېرې $A=48^\circ$ ، $B=22^\circ$ او $a=5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x-\cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

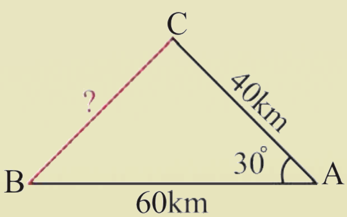
لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چېرې د $A=30^\circ$ ، $c=8$ ، $b=5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.

2. که په يوه مثلث کې $a=8$ ، $b=5$ ، $c=10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.

3. د ABC په مثلث کې که $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ او $A=30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.

4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړی بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ او $\sin\beta$ او $\cos\beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

$b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$

$d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$

$f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$

$b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$

$d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

$b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$

$d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

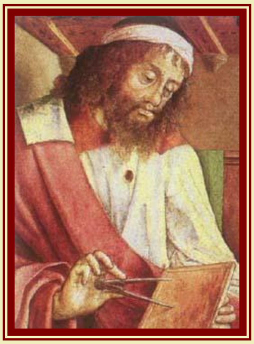
$b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

درېم څپرکی

فضايي هندسه

د اقلیدس تصویر چې نوموړی د دوه بُعدی او دري بُعدی هندسي بنسټ ایښودونکی دی.

اساسي مفاهيم او اکسيومونه



د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي.
هغه هندسي مفاهيم، چې په دريو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.

فعاليت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:

لومړنی اصطلاح گاني Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاحگانو څخه سترگې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستنيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضيهTheorem: هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توگه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، دمېزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيرېدلای شي مستقيم خط د لومړنی اصطلاح (تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزيدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط ځرگندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط لږ ترلږه دوې ځرگندې نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.

دريم اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

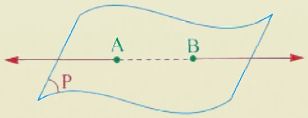
مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولگي تخته د مستوي مفهوم ځرگندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توگه منل کېږي.

لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.

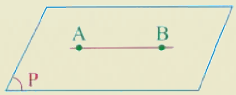
دويم اصل: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

دريم اصل: که چېرې د يوه مستقيم خط دوې نقطې په يوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

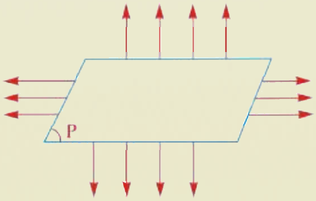
په مسطحه هندسه کې د مستوي رسميدلوته اړتيا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرگي تخته، چې هر يو يې يوه مستوي څرگندوي رسميږي، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتيا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي يوه نه، بلکې ډېرې دي. زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطيل او يا هوارې سطحې په واسطه ښودل کېږي او په يوه کونج کې يې يو توری ليکي.



مستوي نه ده



محدوده مستوي



نا محدوده مستوي

دا مستوي گانې چې په پورته شکلونو کې ليدل کېږي، په همـدې پراخـوالي نـه دي، بلکـې ترلايتنـاهي پـورې امتـداد لري. دا چې مستوي‌گانې په پورته شکلونو کې ليدل کيږي هغه متوازي الاضلاع او مستطيل نه دي، بلکې د مـستوي په يوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او رياضي کې استعماليږي، په فضايي هندسه کې هم استعماليږي.

هغه اکسيومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کـې هـم لـه دې اکـسيومونو څخـه کـار اخيستل کېږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم يو لړ ځانگړي اکسيومونه شته چې په لاندې ډول بيانيږي.

د مستوي لومړنی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نـښلوي پـه دې مـستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هغو دريو نقطو څخه چې پـه يـوه مـستقيم خـط واقع نـه دي، يـوازې او يـوازې يـوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي‌گانو اکسيوم: که چيرې دوې مستوي‌گانې يو ګډ ټکی ولري، متقـاطع دي او پـه همـدې ډول که چيرې يو ګډ مستقيم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوو مستوي‌گانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توگه پېژنو.

لومړی اصل: دلايتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي.

دويم اصل: لږترلږه څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرگنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکي مېز په پرتله ټينگ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاحگانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي‌گانې تېرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لرې؟

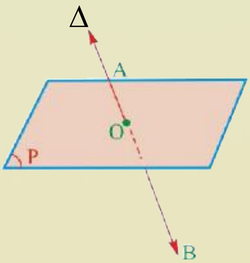
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

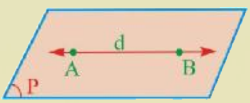
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د ستې یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

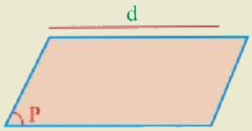
1. که چیرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.



2. که چیرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.



3. که چېرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دی، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.

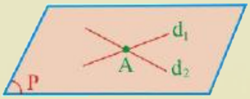


له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

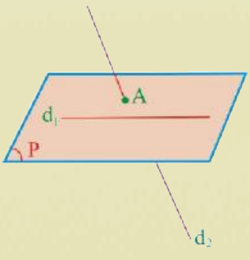
1- که چېرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کېږي، او یو له لاندینیو حالتونو څخه لري.

په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.

2- په یوه مستوي کې دوه خطونه چې یوه ګډه نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.

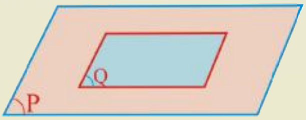


3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کېږي؟

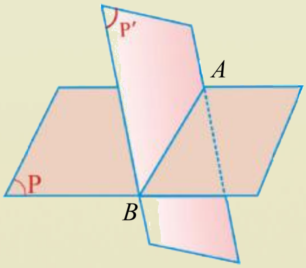


د دوو مستوي‌ګانو نسبي حالت:

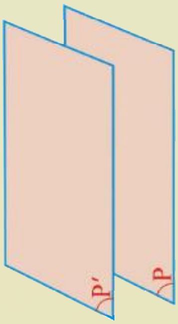
په عمومي ډول دوې مستوي‌ګانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: که چېرې دوې مستوي‌ګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې وي، یو پر بل منطبقې مستوي‌ګانې بلل کېږي، لکه: په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستوي‌ګانې یو پر بل منطبقې دي.



متقاطع: که چېرې دوې مستوي‌ګانې یو ګډ مستقیم خط ولري متقاطع مستوي‌ګانې بلل کېږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وایي. لکه: مخامخ شکل.



موازي: که چېرې دوه مستوي‌ګانې هیڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستوي‌ګانې.

فعالیت

- په فضا کې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له یوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دریو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

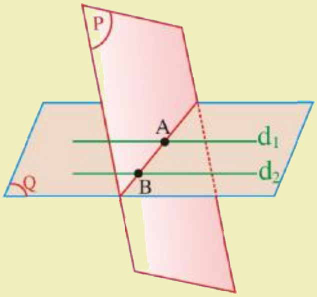
2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چېرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوې کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستويګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

په فضا کې موازي مستقیم خطونه

آیا په فضا کې مستقیم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقیم خطونه چې په یوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسیوم:له یوې خارجي نقطې څخه له یوې مستقیمې کرښې سره یوازې او یوازې یوه موازي مستقیمه کرښه رسمولای شو او بس.

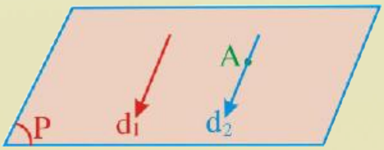
فعالیت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقیم خط چې د A ټکی وربانـدې پـروت نـه وي، پـه پـام کـې ونیسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقیم خط څخه څو مستوي‌ګانې تېریدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعالیت څخه د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: د یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره یوازې یو موازي مسقیم خط رسـمولای شـو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقیمې کرښې څخه یـوازې یوه د P مستوي تېرېږي، ولې؟



اوس د P پـه مـستوي کـې د A لـه نقطې څخـه یـوازې د d_2 مستقیم خط د d_1 له مستقیم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کـې وي، هـم سموالی لري.

فعاليت

دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او يوه د A نقطه د P له مستوي څخه د باندې په پام کې ونيسئ.

- آيا د d_1 او d_2 مستقيم خطونه يوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آيا د P مستوي به د d_2 مستقيم خط هم قطع کړي؟
- آيا دوې مستوي‌گانې يوه بله د يوه مستقيم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

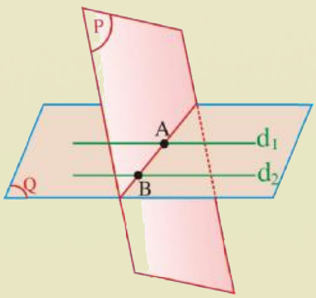
د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: که دوه مستقيم خطونه موازي وي او مستوي يو له هغو څخه قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 يو له بل سره موازي مستقيمونه د Q په مستوي کې پراته دي.

که د P مستوي د d_1 مستقيم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقيم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعريف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه يوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-گانې د A يوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوې مستوي‌گانې يوه له بل په يوه نقطه کې قطع کړي، نو ويلای شو چې هغوی يو بل د يوې مستقيمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌گانې د d_2 مستقيمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي.

ځکه يو مستقيم خط چې په يوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه يو قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.



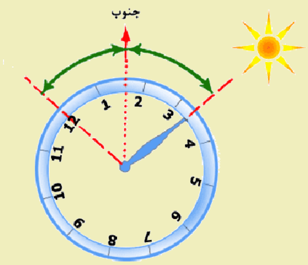
پوښتنې

1- که چېرې دوه مستقيم خطونه له يوه دريم مستقيم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقيم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چېرې د E او F مستوي‌گانې سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دی؟

3- که د E او F مستوي گانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آيا د E او F گډ فصل د E او P له مشترک فصل او د F او P له مشترک فصل سره موازي دی؟

په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه



که چېرې د يوې زاويې دوراني لوری د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاويه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عين لوري) وي زاويه منفي ده.

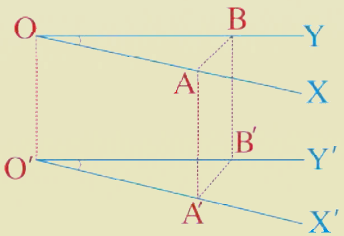
فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاويې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بېل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دليل يې ووياست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولی شو.

قضيه:په فضا کې دوې زاويې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.

ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاويې په پام کې نيسو، داسې چې $\overline{OX}//\overline{O'X'}$ او $\overline{OY}//\overline{O'Y'}$ دي، يو لوری هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.



نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{OA}=\overline{A'O'}$ او $\overline{OB}=\overline{O'B'}$ دي

له دې امله $A\hat{O}B=A'\hat{O'}B'$ دی.

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالی 180° دی. (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضا کې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصلېږي

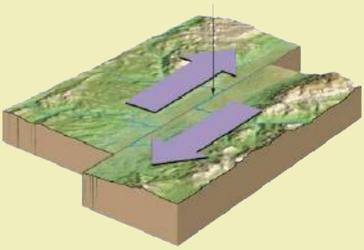
پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت يې کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي ګانې



یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

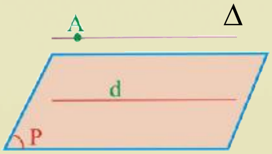
مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

فعالیت

که چېرې د d مستقیم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقیم سره موازي وي، آیا د Δ مستقیم د P له مستوي سره موازي کیدلای شي؟

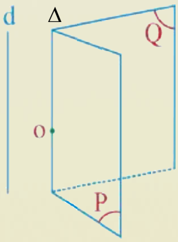
- دوې د P او Q متقاطع مستوي‌ګانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستوي‌ګانو سره موازي په پام کې ونیسئ.
- د d مستقیم(مشترک فصل) د Δ له مستقیم خط سره موازي کیدای شي؟
- له یوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقیمو کرښو سره څو موازي مستوي‌ګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.

قضیه: که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت:د d مسقیم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقیم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقیمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقیمه کرښه قطع کړي، د d مستقیمه کرښه چې د Δ له مستقیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضیې خلاف ده، ځکه د d مستقیمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقیم قطع کولای نشي.

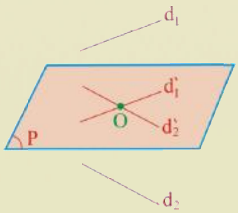
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستوي ګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d د له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.

که د P، Q د مستويګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کیږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.

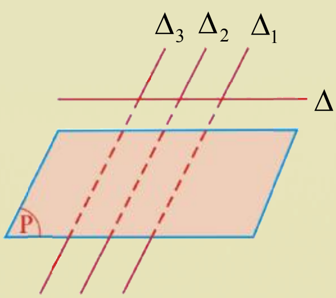


ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیریږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چیرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کیږي.

پوښتنې

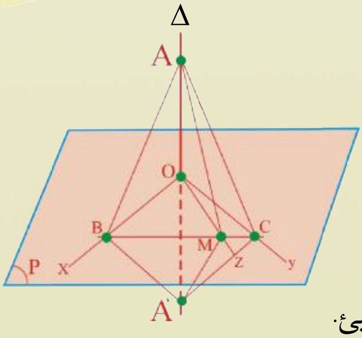
1- که چیرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟



2- که چیرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي ګانې

که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیریږي، د Δ په مستقیمې کرښې باندې عمود دي؟



فعالیت

- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقیمونه د Δ په مستقیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونسیئ.
- د Δ له مستقیمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقیمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقیمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړیکه لري.

- د OZ مستقیمه کرښه د Δ پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

قضیه: که د Δ یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د Δ مستقیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیریږي، عمود ده.

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنې عمودونه دي، نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکې دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C,B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کېږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دی او د $\overline{MO}$ منځنی په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنی عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستويګانې رسمولای شئ؟

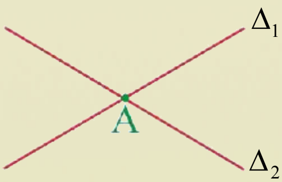
2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستويګانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کیږي.

فعالیت

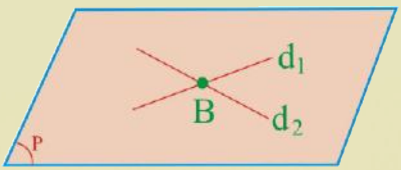
- د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسیئ
- له دې دوو مستقیمو خطونو او د A له نقطې څخه یوه مستوي تېرولی شو.



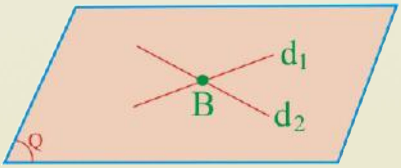
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقیمې کرښې چې په ترتیب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او یو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقیمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړیکه لري؟

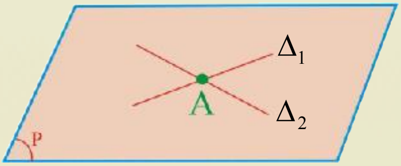
د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانولی شو.

قضیه: که د یوې مستوي دوې متقاطع مستقیمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقیمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي‌ګانې سره موازي دي.



ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او یوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقیم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم یوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.





څرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چېرې د P او Q مستوي ګانې یو بل سره قطع کړي، مشترك فصل يې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقيم خطونه متقاطع دي، په نتيجه کې د P او Q مستوي ګانې يوه بله سره قطع کولای نشي، نو يو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چېرې د E او F مستوي ګانې سره موازي وي او د L_1 مستقيمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقيمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آيا $L_1 // L_2$ دی؟

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضایي هندسې بنسټیز مفاهیم او اکسیومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهیم او مفکورې، چې پرته له کوم تعریف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دلیل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ویل کېږي چې له یو لړ مخکینیو سمو وړاندیزونو او څېړونو څخه و روسته وروستیو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضیه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت یولړ منطقي دلایلو ته اړتیا ولري، قضیه بلل کېږي.

ټکی: موږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعریف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقیم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقیم خط مفهوم او مطلب بیانوي. مستقیم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د یوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هرو دریو نقطو څخه چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسیوم: که چېرې دوه مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې یو مسقیم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم (تعریف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لایتناهي نقطو مجموعه ده.

دویم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له يو بل سره په فضا کې د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستوي ګانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقيمونه:

دوې مستقيمې کرښې چې په يوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقيمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستقيمونو تر منځ زاويه: په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقيمونه او مستوي: يو مستقيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقيمونه او مستوي ګانې:

که د Δ مستقيم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقيمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې: دوې مستوي ګانې، چې هيڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کېږي.

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړی ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a ـ د AB له خط سره موازي دی

b ـ د AB خط يې له منځه تېريږي

c ـ د AB خط عمودي ناصف دی

d ـ د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تېريږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a ـ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b ـ د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c ـ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d ـ د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تېريږي له:

a ـ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دي.

b ـ له دوو متقاطع خطونو څخه

c ـ د يو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه

d ـ څلور متمايزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a ـ که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b ـ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c ـ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d ـ که دوې مختلفې مستويګانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نومړې مستويګانې د ياد شوي ټکي په امتداد کې شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

$a)$ 0 $b)$ 1 $c)$ 2 $d)$ بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمایز وي، نوموړی خط د هغې لـه مـستوي سـره موازي دی.

b _ که یو خط یو له متقاطع مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که یو خط یوه له دوو موازي مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

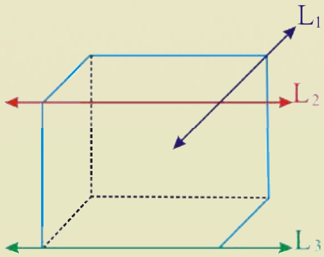
d _ که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستویګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که چېرې د E او F مستوي ګاني یوله بله سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_1 // L_2$ دي؟

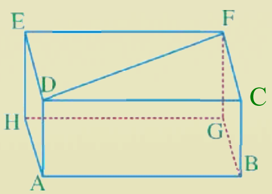
2- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کیدای شي.

3- په لاندې مستطیل کې د L_1, L_2 او L_3 خطونو موقعیت نظر یو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟



4- که د P_1 او P_2 مستویګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستوي ګانې په خپل منځ کې موازي دي؟

5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.



a _ د دوو مستويګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمـود وي او وواېـئ ولې عمود دي؟

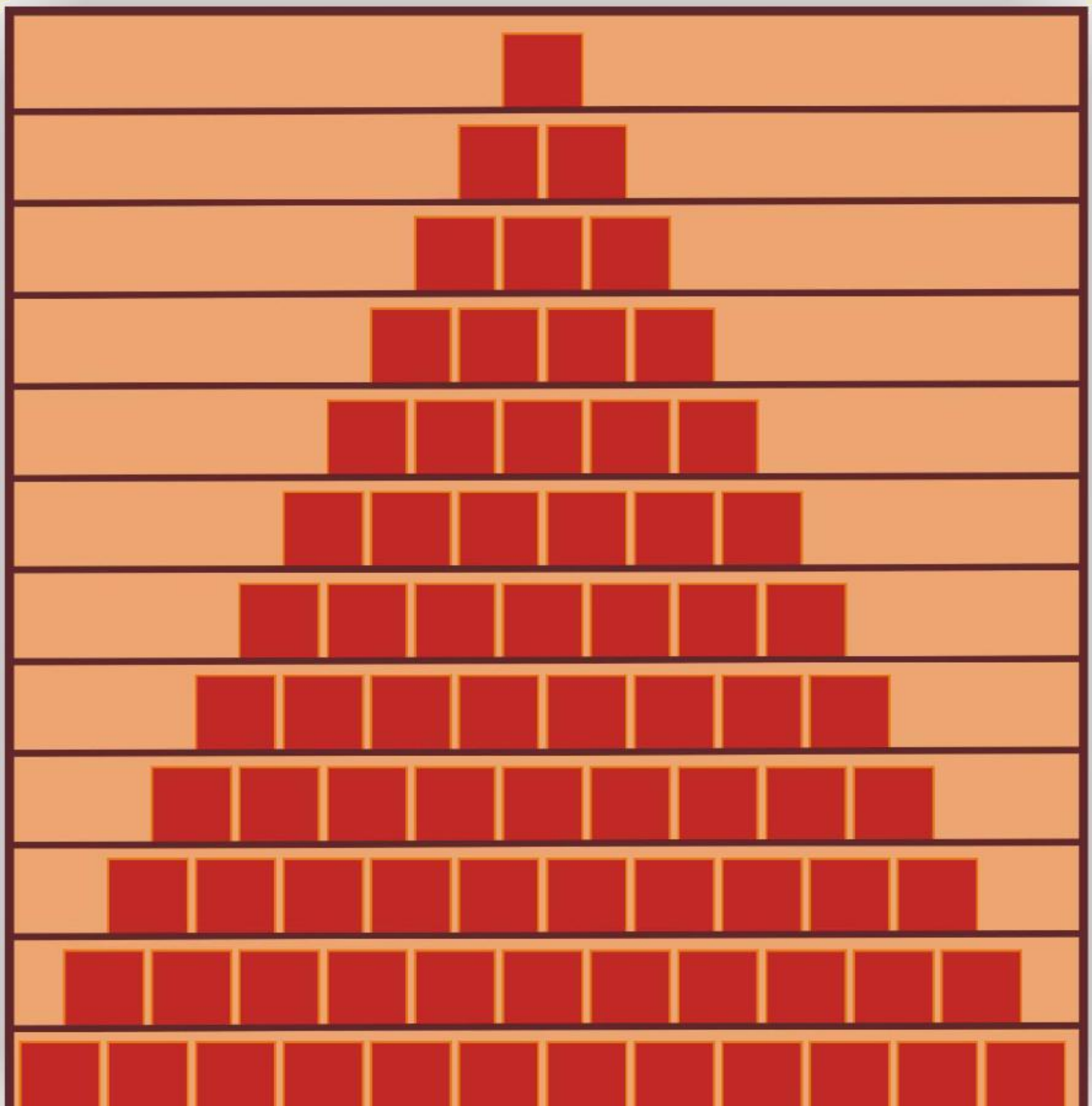
b _ د دریو قطعـه خطونـو، نومونـه واخلـئ چې پـر $ABCD$ مـستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاویه قایمه ده.

d _ د $D\hat{F}C$ زاویه قایمه ده.

ځلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې



تـرادفـونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادیږي،
یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه‌یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه‌یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دي، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف $n-$ ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n-$ ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف $2,4,6,8, \ldots ,2n$

د طاقو عددونو ترادف $1,3,5,7, \ldots ,2n-1$

د 5 د مضربونو ترادف $5,10,15,20, \ldots ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n-$ ام حد په واسطه ټاکل او تعریفیږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$
$$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$
$$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتیږي متزاید ترادف بلل کیږي، لکه:
د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمیږي، متناقص ترادف بلل کیږي، لکه:
د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \dfrac{3}{n}$ ترادفونه متزاید دي، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \qquad , \qquad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ \dots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \qquad , \qquad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ \dots$$

لیدل کېږي چې د a_n ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول زیاتېږي، نو د a_n ترادف متزاید دی، همدارنګه لیدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف یو متناقص ترادف دی.

یاددښت: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر یې معلوم وي معین ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د غیر معینو ترادفونو په نامه یادېږي.

دویم مثال: د $...1,2,4,8$ ترادف په پام کې ونیسئ او $n-$ ام حد یې پیدا کړئ. $a_n = 2^{n-1}$ دی.

حل: $n-$ ام حد یې $an = 2^{n-1}$ دی.

دریم مثال: که د یوه ترادف $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه یې پیدا کړئ.

حل: د 5 لومړنیو حدونو د پیدا کولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قیمتونه ورکوو او په ترادف کې یې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

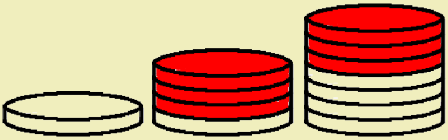
1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \dots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\ ,\ \dots \end{array}\right\}$$

2- که یو ترادف د $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې ولیکئ.

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یې یو ثابت عدد وي، دا ترادف په څه نوم یادېږي.

فعالیت

- د مخامخ عددونو نوترادف په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وروستي حد ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له کیڼې څخه ښي خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف ویلای شو :

تعریف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه: په لاندې مثالونو کې:

$2,5,8,11,14,17,\ \ldots$

$$\left.\begin{aligned} d &= 5-2=3 \\ d &= 8-5=3 \\ d &= 11-8=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ d=3>0$$

څرنګه چې $d>0$ دی نو ترادف متزاید دی.

دویم ترادف په پام کې نیسو:

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ ...$$

$$\left.\begin{aligned} d&=0-4=-4\\ d&=-4-0=-4\\ d&=-8-(-4)=-4\\ d&=-12-(-8)=-4\\ d&=-16-(-12)=-4\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ d=-4<0$$

ځرنګه چې $d<0$ دی نو ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې 2 وي.

حل: ځرنګه چې لومړی حد یې $a_1=\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې $d=2$ دی، نو په عمومي ډول لیکلای شو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ ...$$

$$a_2-a_1=d\quad\Rightarrow\quad a_2=a_1+d$$

$$a_3-a_2=d\quad\Rightarrow\quad a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$

$$a_4-a_3=d\quad\Rightarrow\quad a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ ...\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ ,(a_1+d)\ ,\ \ (a_1+2d)\ \ ,\ \ (a_1+3d),\ ...$$

$$\frac{3}{2}\ ,(\frac{3}{2}+2)\ ,\ \ (\frac{3}{2}+2+2)\ \ ,\ \ (\frac{3}{2}+2+2+2),\ ...$$

$$\frac{3}{2},\ \ \frac{7}{2}\ \ ,\ \ \frac{11}{2}\ \ ,\ \ \frac{15}{2},\ ...$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a)\ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ ...$$

$$b)\ 1,2,4,8,16,\ ...$$

a جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$

$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$

ليدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$$1 \;,\; 2 \;,\; 4 \;,\; 8 \;,\; 16$$

$d = 2 - 1 = 1$

$d = 4 - 2 = 2$

$d = 8 - 4 = 4$

$d = 16 - 8 = 8$

ليدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چېرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ldots, a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ldots$ ترادف په پام کې نیسو.

$5, 7, 9, 11, \ldots$

$d = 7 - 5 = 2$

$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$

$a_1 = 5,\; a_2 = 5 + 2 \cdot 2,\; a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ldots$

په عمومي ډول ليکلای شو چې:

د پورتني مثال په پام کې نيولو سره په عمومي توګه کولای شو وليکو چې:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d\\
&a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d\\
&a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d\\
&\vdots\\
&a_n - a_{n-1} = d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

لومړی حد	دويم حد	دريم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پايله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړيکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه -2 , 5 , 12 , . . . حسابي ترادف 30 - ام حد پيدا کړئ.

حل:

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = -2\\
&d = 5-(-2) = 7\\
&n = 30\\
&a_{30} = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&a_{30} = -2 + (30-1)7\\
&a_{30} = -2 + 29\cdot 7\\
&a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201
\end{aligned}
$$

دويم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ , . . . ,2000$$

$$
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&2000 = 35 + 5n - 5\\
&2000 = 30 + 5n\\
&2000 - 30 = 5n\\
&1970 = 5n \quad \Rightarrow \quad n = 394
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned}
&a = 35\\
&d = 40 - 35 = 5\\
&a_n = 2000
\end{aligned}\right\}
$$

فعالیت

- که چېرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad\Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad\Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad\Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\quad,\quad 2(-12)-4\quad,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1\,,-24-4,-36+3\quad\Rightarrow\ -23,-28,\ -33,-38,-43,\ \ ....$$

یادښت

که د یوه حسابي ترادف $n-$ ام او $m-$ ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\qquad ....\ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\qquad ....\ II$$

نـو د I اړیکـې څخـه II اړیکـه کمـوو، پـه پایلـه کـې کـولای شـو گـډ تـوپیر داسـې پـه لاس راوړو

$d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}$ (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d گډ تـوپیر، a_n د تـرادف

$n-$ام حد ، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

دریم مثال: د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، گډ تـوپیر او لـومړی حـد یـې پیـدا کړئ، په پای کې د ترادف ۹ حدونه ولیکئ.

$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$

حل:

$$
\left.\begin{array}{l}
a_n = 47 \\
n = 9 \\
a_m = 27 \\
m = 5 \\
d = ? \\
a = ?
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m} = \dfrac{47 - 27}{9 - 5} = \dfrac{20}{4} = 5 \\
d = 5 \\
a_n = a_1 + (n-1)d \quad \Rightarrow 47 = a_1 + (9-1)5 = a + 40 \\
\Rightarrow \quad 47 - 40 = a_1 \qquad \Rightarrow a_1 = 7
\end{array}
$$

ترادف یې عبارت دی له: $7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47$

هارمونیکي ترادف:د $\{a_n\}$ یوه ترادف ته هغه وخت هارمونیکي ترادف وایي چې معکوس یې $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ یو حسابي ترادف وي.

لومړی مثـال: د ... $2, 4, 6, 8, 10,$ تـرادف یـو حـسابي تـرادف دی، ځکـه چـې $d = 2$ دی، د دغـه ترادف د حدونو معکوس یعنې ... , $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{10}$ یو هارمونیکي ترادف تشکیلوي.

دویم مثال: د طبیعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی. $n-$ ام حد یې ولیکئ.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ \ldots \ , \frac{1}{n}$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}$$

دريم مثال : که چیرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}\,,\,(\frac{1}{4}-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3-3-3)\,,\,\ldots$$

$$\frac{1}{4}\,,-\frac{11}{4}\,,-\frac{23}{4}\,,-\frac{35}{4}\,,-\frac{47}{4}\,,\ldots$$

فعالیت:

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هارمونیکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2\,,\,3\,,\,4\ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1}\cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنۍ اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2\cdot 8)}{2+8} = \frac{2\cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترك توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

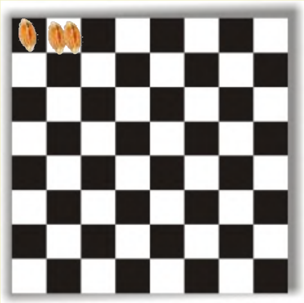
5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)$ $2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2},\ \frac{11}{4},\ ...$

$b)$ $3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 12,\ ...$

هندسي ترادف

Geometric Sequences



که د شطرنج د یوې تختې په لومړۍ خانه کې یوه دانه غنم او په دویمه خانه کې یې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې د مخکنی خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخیره خانه کې(یوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعالیت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونیسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړیکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

پایله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت یې یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، یعني:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت تاکل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت یې معلوم وي.

لومړی مثال: د $\ldots, 6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، ګډه نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي وېشو:

$$96 \qquad 48 \qquad 24 \qquad 12 \qquad 6$$

$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

لیدل کېږی چې $q=\frac{1}{2}$ یو ثابت عدد وی.

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید د ی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $\ldots, 100, 300, 900, 2700$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډه نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

$$\text{لومړی حد}=a=2700$$

$$\text{ګډه نسبت}=q=\frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

په پورتني مثال کې $q=\frac{1}{3}<1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حدد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_n$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

n - ام حد		څلورم حد	درېیم حد	دویم حد	لومړی حد
a_n	$, \ldots ,$	a_3	a_3	a_2	a_1
$\downarrow$	$, \ldots ,$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$a_1 q^{n-1}$	$, \ldots ,$	$a_1 q^3$	$a_1 q^2$	$a_1 q$	a_1

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

حل: $5\ ,\ -10, 20, -40,\ ....$

$$\left.\begin{aligned} &a=5\\ &q=\frac{-10}{5}=-2\\ &n=6\\ &a_6=?\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &a_n=aq^{n-1}\\ &a_6=5(-2)^{6-1}\\ &a_6=5(-2)^5\Rightarrow a_6=5(-32)\\ &a_6=-160\end{aligned}$$

دویم مثال: د $........\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8$ هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} &n=12\\ &a=8\\ &q=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{cases} a_n=aq^{n-1}\\ a_{12}=8(\frac{1}{2})^{12-1}=8(\frac{1}{2})^{11}=8\frac{1}{2^{11}}\\ a_{12}=\frac{8}{2^{11}}=\frac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}\end{cases}$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د a ,M او b, M ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{aligned} &q=\frac{M}{a}\\ &q=\frac{b}{M}\end{aligned}\right\}\ q=q\ \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M}\ \Rightarrow\ M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پورتني فورمول څخه ویلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د M حقیقي مثبت عدد ته د a او b هندسي وسط(Geometric mean) وايي.

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف یې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2, 4, 8, 16, 32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n, n – ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیدا کړئ.

پنځم مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \ , \quad x+3 \quad , \ x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \quad \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \quad \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \ x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \ldots$

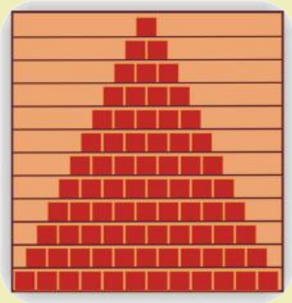
$b)\ -4,-2,0,2,4,\ \ldots$

3- د $\ldots,\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{2},5$ هندسي ترادف دوولسم حد پیدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د $27,\ ?,\ ?,\ ?,\ \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه



a - په لسم کتار کې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟

فعاليت

- د ... ,$2,4,6,8$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعې حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو پرله پسې حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
- د n – ام حد د جمعې حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنگه چې د لومړي د n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړی حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو n – ام حد ليکو.

څرنگه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل يې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د n لومړيو حدونو $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,a_n$ د جمعې حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې $\sum$ له دې سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنۍ او ښکتنۍ نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول طبيعی عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د $i\,,n\,,k\,,j$ حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdot\cdot\cdot + 2n$

لومړی مثال: لاندې مجموعه ($\sum \frac{1}{1^i}$) $\sum_{i=1}^{7}$ په انکشافی شکل ولیکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420}$

دویم مثال: لاندې د جمعې حاصل د ($\sum$) په شکل ولیکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \ldots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \ldots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \ldots\ +n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

دریم مثال: لاندې مجموعه په انکشافي شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2) = ?$$

حل:

$$\begin{aligned}\sum_{i=4}^{n} i(i+2) &= 4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\ldots+n(n+2)\\ &= 4\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+\ldots+n(n+2)\\ &= 24+35+48+63+\ldots+n(n+2)\end{aligned}$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned}\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1} &= \frac{7+1}{7-1} + \frac{8+1}{8-1} + \frac{9+1}{9-1} + \frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8} + \frac{11}{9}\\ &= \frac{4032+3888+3780+3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108}\end{aligned}$$

تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړه، که وغواړو د یوه ترادف د $\{a_n\}_{n\in IN}$ ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شي.

د $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې(Series) په نامه یادېږي.

د $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خوپه ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولوسره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\ldots + a_n + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$ د نومړې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21$$
$$S_8 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c یو ثابت عدد وي لاندې، خاصیتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \dots \ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\qquad b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\qquad c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

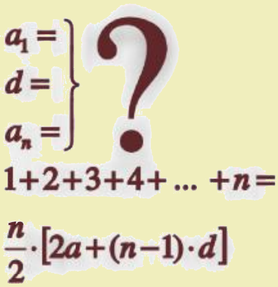
$b)\ 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i-2)$ $\qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه



که $a_1 , a_2 , a_3 ,... ,a_n$ یو حسابي ترادف وي، نو $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ د یوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کېدلای شي؟

که چېرې دیوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ویل کېږي. یا په بل عبارت د یوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وایي.

په یوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد یې a ګډ فرق یې d او اخیري حد یې a_n وي، د حدونو جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_{11}+3d)+...+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \quad ... \text{ I}$$

$$S = a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+...+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \quad ... \text{ II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+...+(a_1+a_n)+a_1+a_n}_{n \text{ ځلې } n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n) \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)...\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښیي چې لومړی حد، اخیري حد اود جملاتو شمېر یې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4+25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right] \Rightarrow S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \text{ .... III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}\left[2 \cdot 7 + (201-1)4\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او n – ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \quad ...$

$$\left.\begin{aligned} a &= 2 \\ d &= 2 \\ n &= n \\ S_n &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n &= \frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n &= \frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow S_n = n(n+1) \end{aligned}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+...)$ د 200 لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{aligned} n &= 200 \\ S_{200} &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} S_n &= n(n+1) \\ S_{200} &= 200(200+1) \quad \Rightarrow S_{200} = 200(201) \\ S_{200} &= 40200 \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $2+4+...+$ جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پیدا کړئ.

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او $n-$ ام حدونه پیدا او همدرانگه د نومړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ \ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

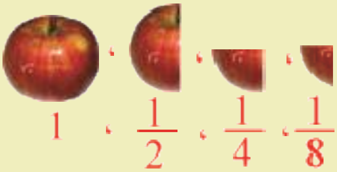
$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

2. که یو ترادف د $\ldots\ \ 2,5,8,11,$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ \ S_8$ $\qquad$ $b)\ \ S_{10}$

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعي حاصل

که چېرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعي حاصل یې مساوي په 2 منو شي.



فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چېرې دو یمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعي حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعي حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n)$ قیمت عبارت دی، له: $q \neq 1$ ، $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنی اړیکې ثبوت کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ ... \ + a_1q^{n-1} \quad .... \quad I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ ... \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad .... \quad II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتني رابطې صورت او مخرج په (1-) کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)}$$

پاسنۍ اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعي حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په يوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 & a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 & a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} & a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1\frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024}\cdot\frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دويم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$2,6,18,\ \dots$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \dfrac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \dfrac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \dfrac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \ \Rightarrow\ 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \ \Rightarrow\ (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

يعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $\dots,\frac{2}{9},\frac{2}{3},2$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $384,\ \dots,\ 3,6,12$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پيدا کړئ.
3. په $\dots,\ 4,12,36$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قيمت پيدا کړئ.

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.

آیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, \; |q|<1$$

که چېرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د متباعدې سلسلې (Divergent series) په نامه يادېږي.

او که چېرې $|q| < 1$ وي، د متقاربې سلسلې (Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعده وي $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایته وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقاربه وي($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که متقارب سلسله ($|q|<1$) او د جملو شمېر يې بې نهایت وي، د نومورې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \frac{a}{1-q}$

لومړی مثال: د $...+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دويم مثال: که په يوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ ...\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دريم مثال: $0.6\overline{23}$ پيريوديک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323...=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ ...\ ]$$

د قوس دننه دهندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حدېې (۱) او د حدونو ترمنځ نسبت يې $\frac{1}{100}$ دی.

په پاسنۍ سلسله کې $a=1$ او $1 > |q| = \left|\frac{1}{100}\right| = \frac{1}{100}$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنۍ سلسله کې $a=0.3$ او $1 > |q| = \left|\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10}$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\ 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادېږي.

پورتني هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه یادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه $a_{n+1} \ , a_n \ , \ a_{n-1}$ په داسې حال کې چې $n = 2, 3, \ 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n = \sum\limits_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهایته سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

او د $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهایت هندسي سلسلې: په یوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، متقاربه سلسله او د n جملو د جمعې حاصل یې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کیږي او قیمت یې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمیر یې هم بې نهایته وي، سلسله متباعد او د n لومړیو جملو مجموعه یې هم بې نهایته ده، یعنې $S_n = \infty$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

1. د $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ \ldots$ ترادف $n-$ ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $\quad c)\ \frac{n}{n-1}$ $\quad d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n=\frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ 6$

3. د $-9,-5,-1,3,\ \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $\quad b)\ 38$ $\quad c)\ -35$ $\quad d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3,\ \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $\quad b)\ 0.1$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6,\ \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5,\frac{5}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{8},\frac{5}{16},\ \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $\quad b)\ \frac{5}{510}$ $\quad c)\ -\frac{5}{512}$ $\quad d)\ \frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n=a\frac{1+q^n}{1-q}$ $\quad b)\ S=a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S=a\frac{1+q^n}{1+q}$ $\quad d)$ هيڅ يو

8. په بې نهايته هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q=0$ $\quad b)\ |q|>1$ $\quad c)\ |q|<1$ $\quad d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېلا بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21,\square,\square,\square,31$

3. که دیوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه$(a_1+a_n=24)$ او د n لومړیو جملو مجموعه یې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$3,5,7,9,11,\ \dots$$

5. که د یوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله یې 192 وي ،ګډ نسبت یې وټاکئ.

6. د یوه هندسي ترادف د 8 لومړیو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړیو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1+0.01+0.001+0.0001+\dots$$

8. د یوه ناپایه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد یې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېلا بېل ډول وليکئ.

$$3,\square,\square,\square,\square,96$$

10. د $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\dots$ هندسي سلسلې د اتو لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

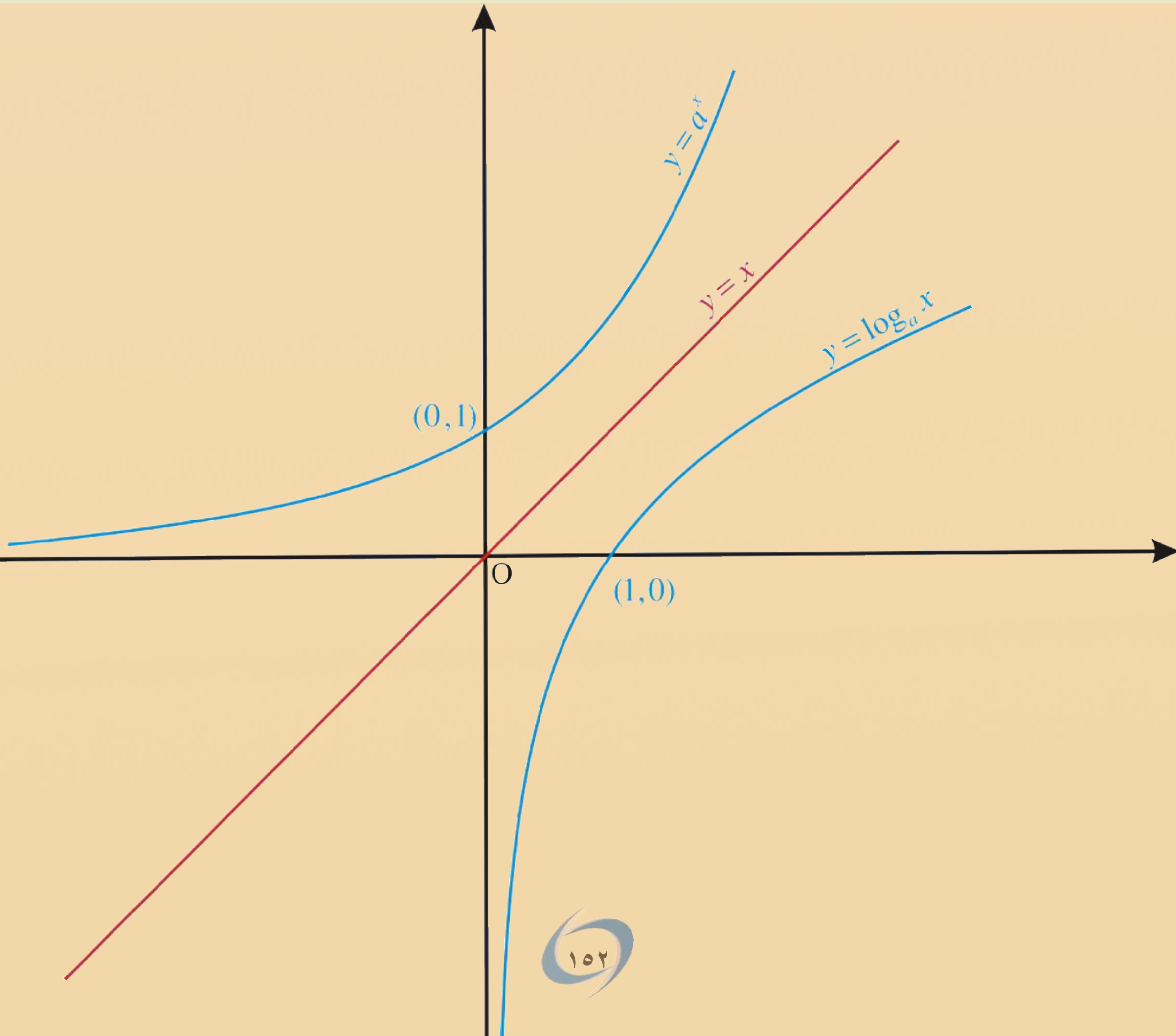
11. که $a=4$ او $d=3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n=12$ لپاره په لاس راوړئ.

12. لاندې متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad$ $b)\ 3.\overline{57}$

پنځم څپرکی

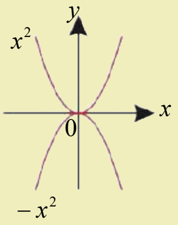
لوګاریتم

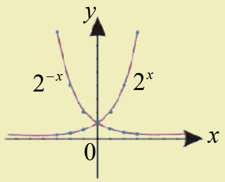

$y=a^x$
$y=x$
$y=\log_a x$
$(0,1)$
O
$(1,0)$

اکسپوننشیل تابع ګاني

Exponential function

پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تـابع ګـانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟





تعریف

که چېرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\quad,\quad x\in IR\quad,\quad f:\ IR\to IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګاني د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

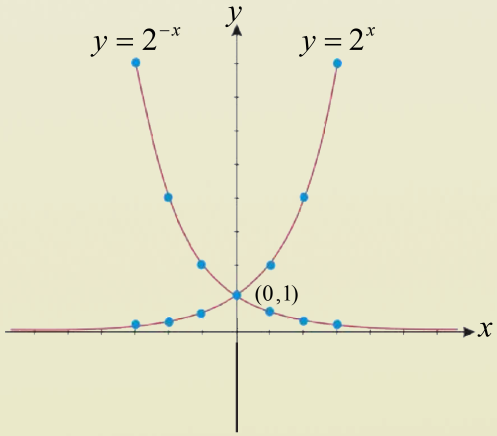
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تـابع ګـراف هـر ټکـی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره یویه یو متناظر دی.

یادښت: که چېرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع گانو گرافونه رسموو.



د $y=2^x$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

د $y=2^{-x}$ تابع گراف

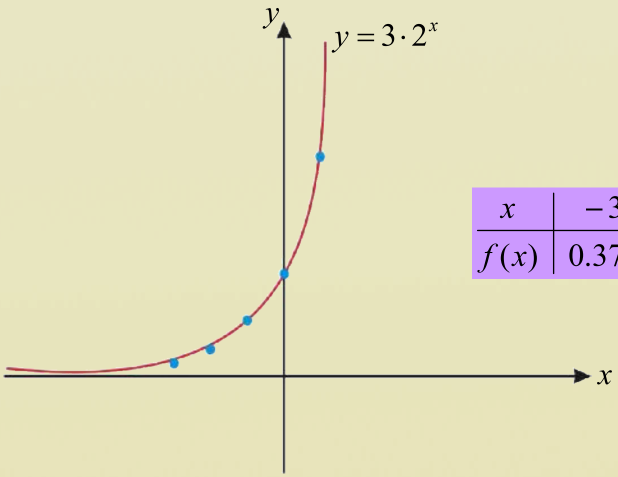
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^x$ اکسپوننشیل تابع گراف رسم کړئ

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهېږو چې د $f(x)=3\cdot 2^x$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتني اکسپوننشیل تابع گراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې گراف رسم کېږي.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24



فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

3. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
4. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
5. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
6. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی.

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)$ $f(x) = 2\cdot 3^{x}$

$b)$ $f(x) = 2\cdot 3^{-x}$

$c)$ $f(x) = (\frac{1}{2})^{x}$

$d)$ $f(x) = (4)^{-x}$

لـوګاريـتم

Logarithm

آيـا کـولای شـئ چـې اکسپونـنـشيل تـابع پـه بـل ډول هـم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعاليت

لاندې جدول بشپړ کړئ

$y=$ درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
$a^x=$ طاقت لرونکي عددونه		10^{-3}				10^4
$x=$ توان	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آيا ديوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کيدلای شي؟
- آيا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښاياست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعريف کولای شو، بيان کړو.

تعريف: د طاقت لرونکي عدد يوې بېلې ښوونې تـه لوګـاريتم وايـي، يـا پـه بـل عبـارت د مجهـول تـوان محاسـبه د لوګاريتم په نامه يادېږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړيکه کې a ته د لوګاريتم قاعده (Base) او y ته لوګاريتمي عدد وايي، د يوه طاقت لرونکي عدد توان له لوګاريتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تېر جدول کې د 10د قاعدې توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاريتم څخه عبارت دی.

د مثال په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال:د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکی عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکی

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

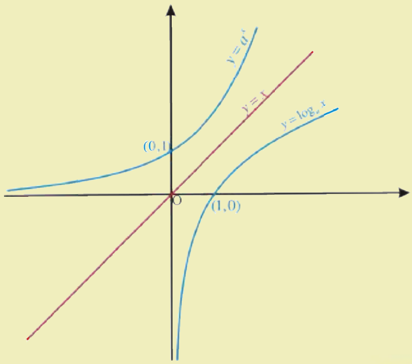
$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شی هغه تابع ګانې چې معکوسه لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

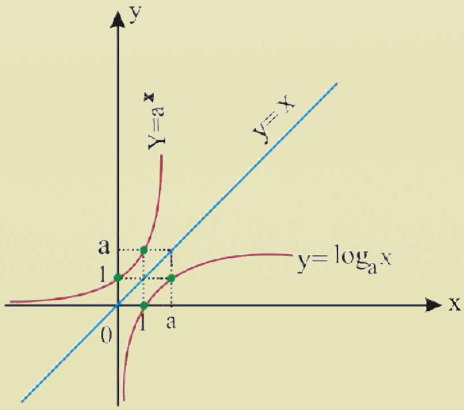
د یوې $(a \in IR^+$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریتمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښودل کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري، د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې او ګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1} : IR^+ \to IR \,,\, f^{-1}(x) = \log_a x,\ a \in IR^+ \,,\ a \neq 1$$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

له پورتني جدول څخه ليدل کېږي:

که چېرې $a > 1$ وي، نود $\forall x_1 , x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x) = a^x$ تابع گراف د $x = 0$ لپاره $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

لومړی مثال: د $y = 3^x$ او $y = \log_3 x$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل: د $y = 3^x$ تابع په پام کې نيسو:

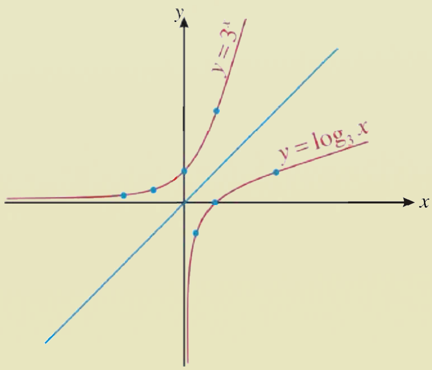
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y = \log_3 x$ تابع په پام کې نيسو:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3}, -1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعاليت

د $y=2^x$ او $y = (\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشيل تابعگانود گراف په پام کې نېولو سره او د اکسپوننشيل تابعگانو د تعريف له مخې ددوی داړوندو معکوسو لوگاريتمي تابعگانو قيمتونه د $x = 1, 2$ لپاره پيدا کړئ او نتيجه يې په عمومي ډول وليکئ.

پايله: د هرې لوگاريتمي تابع لکه: $y = \log_a x$ د يوې اختياري قاعدې لپاره لرو.

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a \in IR$, $a > 0$, $a \neq 1$

دویم مثال: که چېرې $f(x) = \log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ په لاس راوړې.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$$

دریم مثال: که $\log_3 x = 4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرومعلوماتو څخه په ګټې اخیستې سره د لوګاریتمي تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیږي.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

څلورم مثال:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 16, \frac{1}{8}$ لپاره پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \log_2(\frac{1}{8}) = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

فعالیت

- د x $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28, \sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د x $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(2)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{32})$, $f(32)$ کې پیدا کړئ.

2. د x $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

او طبيعي لوګاريتم *Natural logarithm*

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدي دي، او که نور عددونه هم د لوګاريتم قاعده کېدلی شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعريف

خرنګه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کېدای شي د لوګاريتم قاعده شي، خو په عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 – معمولي لوګاريتم: هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يا (Briggs سيستم) په نامه يادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چې دغه سيستم منځ ته راوړی دی معمولي لوګاريتم د log په سمبول يې ښيي او په لاندی ډول ښودل کېږي.

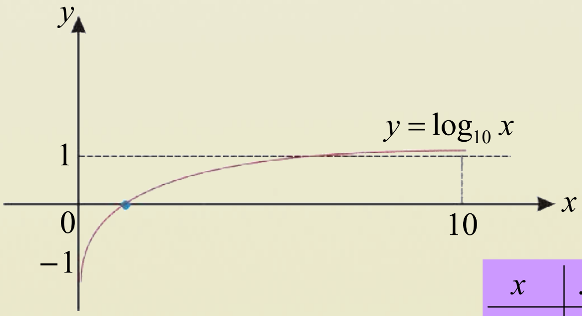
$$f : IR^+ \longrightarrow IR \ , \ \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$
$$\log_{10} 10 = \log 10 \ = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$
$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$
$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\vdots$$
$$n \in z \ \ , \ \ \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2− طبیعي لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادیږي او په ln سره ښوول کیږي، او داسې لیکو: $f: IR^+ \to IR, F(x)=\log_e x=\ln x$:

e یو غیر ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e=2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^x$ لیمت څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادیږي او $f(x)=e^x$ تابع د اکسپوننشیل تابع په نوم یادیږي او داسې هم لیکي: $Exp(x)=e^x$

د $y=e^x$ تابع ګراف لکه: $y=a^x$ تابع ګراف په څېر ده.

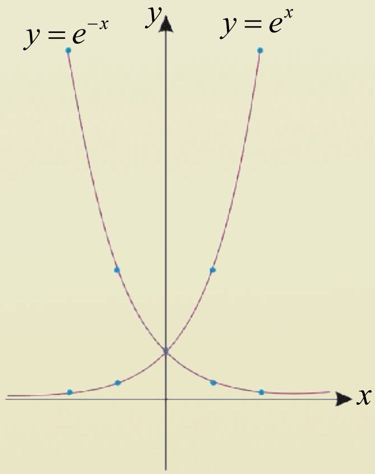
د $y=e^x$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y=e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنیو تقریبي قیمتونو په پام کې نیولو سره د $y=e^{x}$ او $y=e^{-x}$ تابع‌گانو گرافونه رسموو:



د طبیعي لوګاریتم مطالعه په لوړو ریاضیاتوکې لکه: ساینس، انجنیري، تجارت او تخنیك کې زیات استعمال لري.

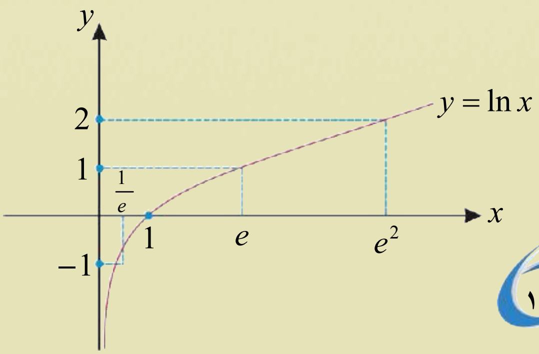
د طبیعي لوګاریتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}$ $\ln e^{0}, \ln e^{3}, \ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پیدا کړئ.

حل: د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



فعالیت

- د $y = \ln\frac{1}{e^7}$ قیمت پیدا کړی.
- د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$ $\qquad$ $b)\ln\frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $\qquad$ $d)\log\frac{1}{10^{-2}}$

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قانون ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځیني قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR^+ \, , \, a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}, \, a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\} \, , a^0 = 1$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چېرې ولرون.

$$x = a^p \quad \ldots \; \mathrm{I}$$

$$y = a^q \quad \ldots \; \mathrm{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوو لوګاریتم نیسو: $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړی مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

څلورم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوی دی، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرونو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \ldots\ldots\ldots\ I \\ y = a^q \ldots\ldots\ldots\ II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q د قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دويم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبيقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log\ (5y)$$
$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$
$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د يوه توان لرونکي عدد لوګاريتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاريتم له حاصل ضرب سره يعنې که چېرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \dots\ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{n \text{ خلي } lag_a x}$$

په پايله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخيستنې سره کولای شو وليکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دويم مثال: دغه لوګاريتم $\log_3\sqrt[3]{9}$ پيدا کړئ؟

حل: $\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعاليت

- لاندې لوګاريتمونه پيداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad$ $\log_5\sqrt{8} = ?$

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

$d)\ \log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستي ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7 \dfrac{63}{49} = ?$

$b)\ \log \dfrac{125}{80} = ?$

$c)\ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad$ $b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، څرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: د دوو عددونو د لوګاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت:د ثبوت لپاره $\log_b m = y$ او معادل شکل یې یعنې $m = b^y$ لیکو اوس له اطرافو څخه د a په قاعده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتنې اړیکه کې اېږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنۍ اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ وېشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

يادونه: د يوه عدد معكوس لوګاريتم مساوي دى، د هغه عدد له منفي لوګاريتم څخه چې هغه د كو لوګاريتم (co-logarithem) په نامه ياد يږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

اووم قانون: د يوه عدد معكوس لوګاريتم مساوي دى په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نيسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 ... I$

د I په رابطه کې د1 عدد په ځاي ليكلى شو چې $1 = \log_M M$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاريتم نيسو يعني $\log_a M = x$

په پورتنى اړيكه کې د x په ځاى قيمت اېږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125} \sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125} \sqrt{5} = \log_{125} (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعاليت

لاندې لوګاريتمونه حساب كړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: ديوه عدد لوګاريتم په توان لرونكي قاعده مساوي دى په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نيسو او هغه داړوند طاقت په شكل ليكو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنى رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاريتم نيسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a m$

اوس د m په ځای قیمت ایږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتني قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

$\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$ (b

د معمولي او طبیعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې b, a او x مثبت عددونه a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چېرې $b=e$ او $a=10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x=\frac{\log_{10}x}{\log_{10}e}$$

$$\log_{10}x=\log x=\log_e x\cdot\log_{10}e$$

$$\log x=\log_{10}e\cdot\ln x$$

څرنگه چې $\log_{10}e=0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x=0.4343\cdot\ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x=2.3026\cdot\log x$$

$$\ln 4.69=2.3026\cdot\log 4.69$$

$$\ln 4.69=2.3026\cdot 0.6712=1.5455$$

دویم مثال:د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73=1.9066$ وي.

حل: د تېرې اړیکې په گټې اخیستې سره لروچې:

$$\log x=0.4343\cdot\ln x$$

$$\log 6.73=0.4343\cdot\ln 6.73$$

$$=0.4343\cdot 1.9066=0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}}3^{-4}=?$

$b)\ \log_9 27=?$

$c)\ \log_8 4=?$

$d)\ \log_{121}14641=?$

$e)\ \ln 672000$

$f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 0.235$

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

پوهېږو چې:

$\log_{10}1000=3\ ,\ \log_{10}100=2\ ,\ \log_{10}1=0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمېر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x=S\cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1\leq S<10$ او n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوګاریتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x=\log(S\cdot 10^n)=\log S+\log 10^n=\log S+n\log 10=\log S+n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1\leq S<10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یـو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1\leq S<10$ دي نو.

$$\log 1\leq\log S<\log 10$$
$$0\leq\log S<1$$

له پورتنۍ اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له ۱۰ کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوګـاریتمې یې د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001=10^{-3}$	$0.01=10^{-2}$	$1=10^{0}$	$1000=10^{3}$	$4=10^{0.602}$	$7=10^{0.845}$	$10=10^{1}$	$20=10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10}0.001$		$\log_{10}1$			$\log_{10}7$		$\log_{10}20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عـددونو تـرمنځ واقع دي، مـساوي لـه څوسره دي؟

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چېرې $1 \leq x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چېرې $10 \leq x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې $100 \leq x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څېر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \leq a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل :

$a)$ $2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)$ $573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)$ $0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چېرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمېر، منفي یو.

دويم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرسټيک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحيح ارقامو شمېرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرسټيک يې $3-1=2$ دی.

او له يوه څخه د کوچنيو عددونو کرکټرسټيک منفي علامه لري او قيمت يې د اعشاري د علامې ښي خوا د صفرونو له شمېر څخه، د يوه په اندازه زيات دی.

دريم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرسټيک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرسټيک يې -3 دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخيستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرسټيک په لاس راوړو.

لوګاريتمونه		کرکټرسټيک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

پوښتنې

دلاندې لوګاريتمونو کرکټرستيک په شفاهي ډول ووايast؟

$a)\ \log 0.9560$　　$b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$　　$e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$　　$f)\ \log 0.0009560$

د لوګاريتم جدول

څرنګه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د يوه عدد لوګاريتم لـه دوو برخو (کرکټرسټيک او مـانتيس) څخه تشکيل شوی دی. د مانتيس د پيدا کولو لپاره پـه څـه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{matrix} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{matrix}\right\} = ?$$

د مانتيس د پيدا کولو طريقه:

پوهېږو چې هر لوګاريتمي عدد له دوو يعنې صحيح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحيح برخه يا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتيس يې د لوګاريتمي جدول له مخې چې مخکې ترتيب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول يې تر ځينې 7 ، تر 5 او ځينې يې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتيب شوی چې د مانتيس د پيدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نيولو سره جدولونه نومول شوي دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د يوه عدد د مانتيس د پيدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نيول کېږي په دې ډول چې ښي لوری ديوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښی خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتيس څخه عبارت دی.

لومړی مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\begin{aligned} \log 765 &= \log(7.65 \cdot 10^2) \\ &= \log 7.65 + \log 10^2 \\ &= \underbrace{\log 7.65}_{\text{مانتيس}} + \underbrace{2}_{\text{کرکټرسټيک}} \end{aligned}$$

د 2 عدد د کرکټرسټيک څخه عبارت دی او دمـانتيس د پيـدا کولـو لپـاره يعنې $\log 7.65$ پـه 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي يعنې د نوموړي عدد مانتيس 0.8837 دی چې په حقيقت کې د 765 عدد مانتيس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړئ؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوګاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دریم مثال: د 0.0247 لوګاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عـدد پـه 24 – ام سـطر او 7 – ام سـتون لانـدې لټـوو چـې لـه 3927 عـدد سـره مطابقـت کـوي يعنـې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \overline{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، کـه کرکټرسـتيک منفـي وي او وغـواړو دواړه د يـوه مثبـت عـدد پـه شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو، مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \overline{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د 15 , 105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 عـددونو لوګاريتمونـه پيـدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)$ $\log 222$ $\quad$ $b)$ $\log 0.921$

$c)$ $\log 928$ $\quad$ $d)$ $\log 527$

$e)$ $\log 0.024$ $\quad$ $f)$ $\log 2400$

$h)$ $\log 0.00024$ $\quad$ $j)$ $\log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)$ $\log(2.73)^3$ $\quad$ $b)$ $\log \sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوی وي څرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعریف: که چېرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti \log x$

مثلاً که چېرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چېرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نومورې عدد کرکټرستیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرستیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ دی د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نومورې لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړوند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتنې پوښتنه کې 2 د کرکټرستیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمېر یې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti \log 2.9939 = 986$

9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

دویم مثال: که چېرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تېر په څېر لیکو، څرنگه چې 953 مانتیس ښيي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنگه چې کرکټرستیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$
$$\log 9.53 = 0.9791$$
$$anti\log 0.9791 = 9.53$$

دریم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کی لیدل کېږی چې کرکټرستیک او مانتیس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لری، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرستیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886.
کرکټرستیک ښيي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوگاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2 \qquad b)\ 0.2 \qquad c)\ 0.02 \qquad d)\ 0.0002$

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \overline{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \overline{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \overline{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوگاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغېزه نه لري.

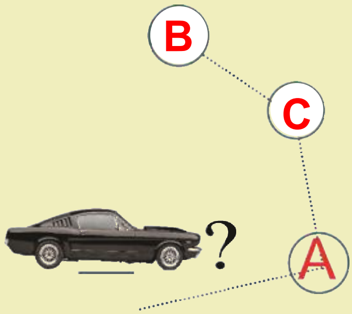
پوښتنې

دلاندې هر یوه انتي لوگاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479 \qquad b)\ anti\log -5.0521$

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



يوګرځندي موټر په متوسط سرعت په 30 دقيقوکي د A ښارته او يونيم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسېږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسېږي.

فعاليت

- که چېرې $\log A = a$، $\log B = b$ راکړل شوي وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول وواياست چې که (a, b) يوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاريتم چېرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قيمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پايله: که چېرې ديوه نامعلوم قيمت د پيدا کولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، په دې صورت کې نوموړې طريقه د خطي انټرپولېشن په نامه يادېږي.

که يو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاريتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاريتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پيدا کولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قيمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاريتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونوپه منځ کې پراته دي چې لوګاريتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول يې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چېرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونيسو ، نو په دې صورت کې ليکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

$$\begin{array}{ccc} & \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} & \\ \text{د عددونو توپیر } 0.010 & \left[\begin{array}{ccc} & 5.240 & 0.7193 \\ 0.005 & \left[\begin{array}{cc} 5.235 & x \\ 5.230 & 0.7185 \end{array}\right] d & \end{array}\right] & 0.0008 \text{ د لوګاریتمونو توپیر} \end{array}$$

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$

$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957&=\log(7.957\cdot 10^{-4})\\&=\log 7.957+\log 10^{-4}\\&=\log 7.957-4\log 10\\&=\log 7.957-4\end{aligned}$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې -4 دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$

$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cc} \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} \end{array} & \\ \text{د عددونو توپیر } 0.01 & \left[\begin{array}{ccc} & 7.96 & 0.9009 \\ 0.007 & \left[\begin{array}{c} 7.957 \\ 7.950 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} x \\ 0.9004 \end{array}\right] d \end{array}\right] & 0.0005 \text{ د لوګاریتمونو توپیر} \end{array}$$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005 \frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو: $0.9004 + 0.0004 = 0.9008$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چېرې $anti \log 4.5544 = x$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتنۍ اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه: په تېرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تېرپه شان تشکیلوو.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cc} \text{عددونه} & \text{مانتیسونه} \end{array} & \\ \text{د عددونو توپیر } 0.01 & \left[\begin{array}{ccc} & 3.59 & 0.5551 \\ d & \left[\begin{array}{c} t \\ 3.58 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0.5544 \\ 0.5539 \end{array}\right] 0.0005 \end{array}\right] & 0.0012 \text{ د مانتیسونو توپیر} \end{array}$$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیداکولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیداکړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582$ $\qquad$ $b)\quad x = \log 6.289$

لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلې

Exponential and logarithmic equations

آیا تر اوسه مود $5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$$

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، داکسپوننشیل معادلو په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چېرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32 \Rightarrow 2^{x-1}=2^5 \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازمویئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$
$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$
$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$
$$9x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}}=2^4 \quad \Rightarrow \; 8^{\frac{4}{3}}=2^4 \quad \Rightarrow \; (2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4 \quad \Rightarrow \; 2^4=2^4$$

فعالیت

- په $16^{x+1}=64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیدا کولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په ګټې اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1)=3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2-1=2^3$$

$$x^2=1+8=9$$

$$x^2=9 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\pm\sqrt{9} \quad , \qquad x=\pm 3$$

دویم مثال:په $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2=9^2 \Rightarrow x+2=81 \Rightarrow x=81-2$$
$$x=79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\sqrt{5}} 3+\log_{\sqrt{5}} 5-\log_{\sqrt{5}} 4=\log_{\sqrt{5}}\frac{3\cdot 5}{4}=\log_{\sqrt{5}}\frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2)=x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2)=x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2=3^{x+1}$$
$$3^{2x}-3^{x+1}+2=0 \Rightarrow 3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0$$
$$(3^x)^2-3\cdot 3^x+2=0$$

که $3^x=t$ وضع کړو،نو:

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$
$$t_1=1 \quad , \quad t_2=2$$

$$3^x=t_1=1 \Rightarrow 3^x=3^0 \Rightarrow x_1=0$$
$$3^x=t_2=2 \Rightarrow \log_3 2=x \Rightarrow x_2=\log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتنې

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\dfrac{x-1}{x-2}=2$

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آيا کولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{c}\frac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\}=?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو ددوو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

ليدل کېږي چې د 0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او 0.4472 مانتيسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه ليدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

$$\begin{array}{cccc} & \text{عددونه} & \text{مانتيسونه} & \\ \text{د عددونو توپير } 0.01 & \left[\begin{array}{l} 2.79 \\ d\left[\begin{array}{l} t \\ 2.80 \end{array}\right. \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 0.4456 \\ \left.\begin{array}{r} 0.4466 \\ 0.4472 \end{array}\right] 0.0006 \end{array}\right] & 0.0016 \text{ د مانتيسونو توپير} \end{array}$$

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهېږی ؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې : $\log\frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log\frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم له لوګاریتم څخه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوګاریتم په لاس راوړو چی داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اویاکسرونه وي، د لوګاریتم له پنځم قانون څخه کار اخلو یعنې $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\begin{aligned}\log(1.05)^6 &= 6\log 1.05 = 6(0.0212)\\ &= 0.1272\end{aligned}$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوګاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حاصل ضرب د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\quad \dfrac{8}{737} = ?\qquad\qquad b)\quad \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومېږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع گراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشیل تابع گراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادېږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع گراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادېږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کېږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوګاریتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې $y = anti\log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادېږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمي معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادېږي.

د څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړی تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4 \qquad b)\ -4 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړيکه کې د b قيمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4} \qquad b)\ 81 \qquad c)\ \sqrt{81} \qquad d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ 8 \qquad d)\ 9$

4. د x قيمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 5 \qquad d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3 \qquad b)\ -3 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قيمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2} \qquad b)\ -\frac{1}{2} \qquad c)\ 1 \qquad d)\ -1$

8. د x قيمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3 \qquad b)\ x=9 \qquad c)\ x=-9 \qquad d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه ياکرکترستيک عبارت دی له:

$a)\ 0 \qquad b)\ 1 \qquad c)\ 2 \qquad d)\ 3$

10. د يوه عدد دلوګاريتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m} \qquad b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m} \qquad c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a} \qquad d)$ هيڅ يو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $\quad b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $\quad d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $\quad f)\ \log\sqrt{x+1} = 1-\frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2-\log 20$ $\quad h)\ \log_5(x-1)-\log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $\quad b)\log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $\quad e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $\quad b)\quad \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $\quad e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $\quad b)0.8954$ $\quad c)4.5682$ $\quad d)\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)89500$ $\quad b)\ 91$ $\quad c)3065.3$ $\quad d)\log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $\quad b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888\div 256$ $\quad b)\ 17.3\div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $\quad b)(-84.7)^2$ $\quad c)\sqrt{418}$ $\quad d)\sqrt{0.21}$

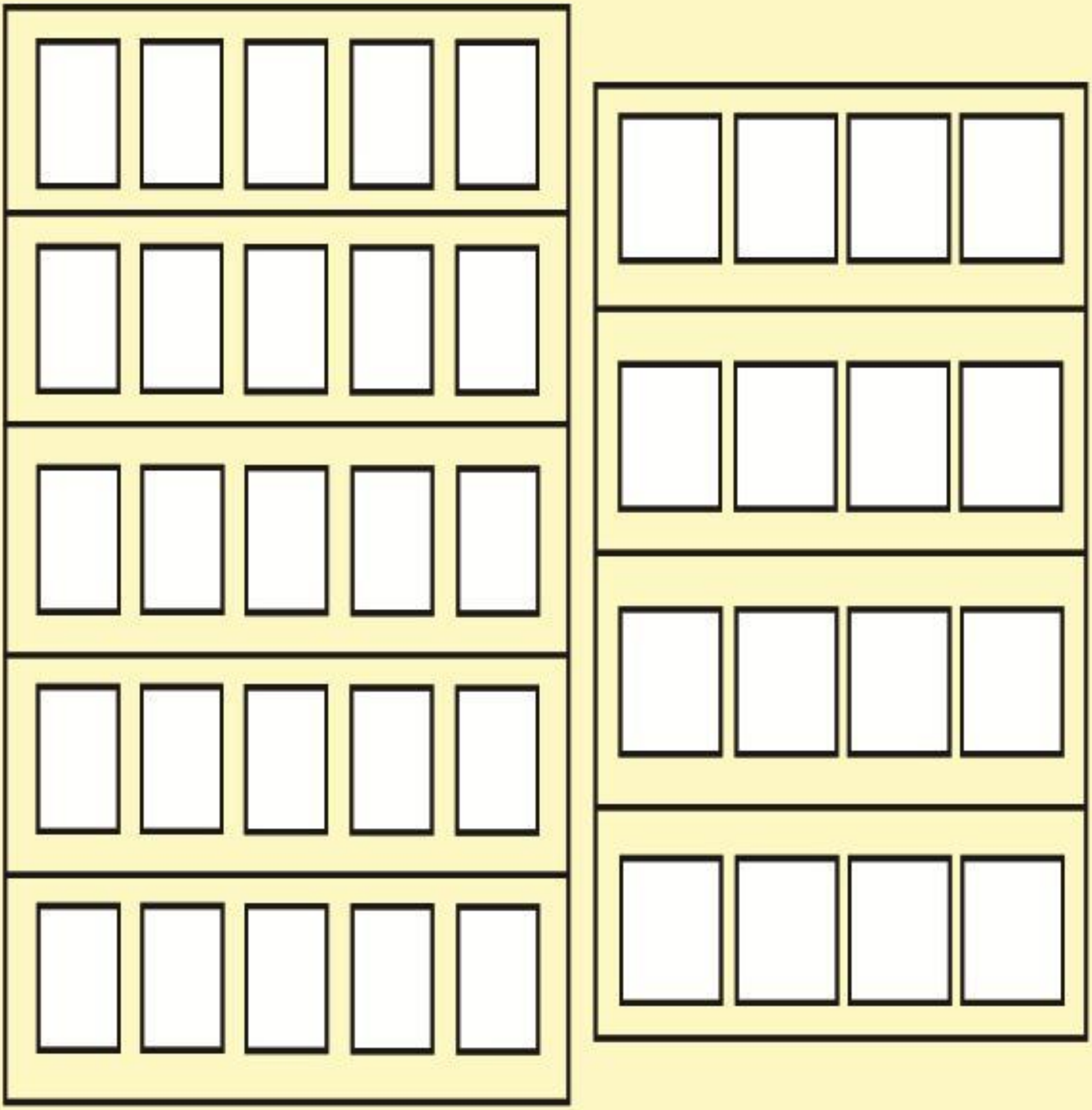
د لوگاريتم جدول چې مانتيس يې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

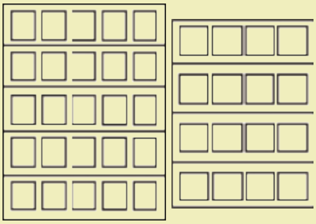
شپرزم خپرکی

مەریکسونە



متریکسونه

Matrixes



د څو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لویې ودانۍ د کړکیو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبونو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p' ، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\,x + 0\,y = x' \\ 0\,x - 1\,y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنا چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدي ډول: $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ هر يو د p', p او s', s دټکوبـدل شـوي وسـيله ده.

لاندې هرې يوې وسيلې ته (چې دټکود بدلولو د بدليدو دنده په غاړه لري) مټريکس وايي.

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

تعريف:د شيانو، عددونو يا تورو ګېډۍ چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د مټريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د مټريکس د عنصر پـه نامـه يـادېږي. لـوی حروفونـه د $A, B, C...$ مټـريکس ښيي او واړه حروفونه $a, b, c...$ د مټريکس عناصر دي.

د عددونو هر يولاندی جدول يو مټريکس په ګوته کوي.

$$\begin{array}{cl} A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\-3&7&5\\-4&2&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{لومړی سطر}\\ \text{دويم سطر}\\ \text{دريم سطر}\end{array} \\ \begin{array}{ccc}\text{لومړی ستون}&\text{دويم ستون}&\text{دريم ستون}\end{array} & \end{array}$$

$$B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{array}{l}\text{لومړی سطر}\\ \text{دويم سطر}\\ \text{دريم سطر}\end{array}$$

$$C=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{3}&7&-2\end{pmatrix} \text{ کربنه}$$

که چېرې a د يوه مټريکس په $i-$ام کربنه او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} پـه شـکل ښـودل کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سـره د سـطر او سـتون لـه شـمېر څخه ښـکارندويي کـوي.

$$i=1,2,3... \quad , \quad j=1,2,3...$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}...a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}...a_{2n}\\a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

د مېټريکس مرتبه: که د A د مېټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مېټريکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي m په n کې مېټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مېټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مېټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مېټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مېټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A=(X)_{1\times 1}$ ، نو د A مېټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times 1}=7$

مثال: لاندې مېټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$a)\quad (a_{ij})_{2\times 2}=(i+j)_{2\times 2} \qquad\qquad b)\quad (a_{ij})_{3\times 2}=(i\cdot j)_{3\times 2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مېټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مېټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مېټريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$

په پايله کې غوښتل شوی مېټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د مېټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مېټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot 1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot 1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot 1=3$

$a_{12}=1\cdot 2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot 2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot 2=6$

په پایله کې غوښتل شوی مټریکس عبارت دی له:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

دوهمه مرتبه مټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً:
$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې مټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad$ $b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکسونومخامخ شکلونه څو سطرونه اوڅوستونونه لري؟

آیاصفرونه دمېټريکس عناصر کيدای شي؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **سطري مېټريکس**(Row Matrix)**:** هغه مېټريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري مېټريکس يې بولي، مثلاً:
$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

2. **ستوني مېټريکس** (Column Matrix)**:** هغه مېټريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:
$$A=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

3. **صفري مېټريکس**(Null matrix): هغه مېټريکس چې ټول عناصريې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي مېټريکس**(Square Matrix)**:** که چېرې په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad m=n \Rightarrow 3=3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر (Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \dots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

اصلي قطر   فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر   اصلي قطر

فعاليت

- داسې مېټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 او 4×1 وي، دا څه ډول مېټريکسونه دي؟

5. **قطري مېټريکس** (Diagonal Matrix): هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مېټريکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad ، \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6. **سکالر مېټريکس** (Scalar Matrix): هغه قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مېټريکس په نامه يې يادېږي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مېټريکس** (Unite Matrix): که چېرې په يو سکالر يا قطري مېټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مېټريکس ته واحد مېټريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots 0 \\ 0 & 1 & 0\dots 0 \\ 0 & 0 & 1\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\dots 1 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر يې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي مټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې مټریکس د مثلثي مټریکس (Triangular matrix) په نامه يادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي مټریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي مټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي مټریکس او B ښکتنی مثلثي مټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مټریکس:

که چېرې د A متقابل مټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مټریکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مټریکس وي، نومتقابل مټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Longrightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad c)\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$d)\ D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad e)\ E=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7 & 8\end{pmatrix}\qquad f)\ F=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

$$g)\ G=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\qquad h)\ H=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

د مېټریکسونو جمع او تفریق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مېټریکسونو کې د هغوی د جمعې او تفریق په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1) د مېټریکسونو جمع:

که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مېټریکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مېټریکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر یې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، یعنې د دوو مېټریکسونو جمع کول یوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مېټریکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقیقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}_{3\times 2}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 2+2\\ -2+1 & 0+2\\ 1+0 & 7+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. د مېټریکسونو تفریق:

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو مېټریکسونو تفاضل یا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفریق حاصل یې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د مېټريکسونو د جمعې او تفريق خاصيتونه:

1. د مېټريکسونو جمع کول دبدلون خاصيت لرى، خو د مېټريکسونو تفريق د بدلون خاصيت نه لري، يعنې:

$$A+B=B+A$$

$$A-B\neq B-A$$

2. د مېټريکسونو جمع او تفريق اتحادي خاصيت لري. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عينيت عنصر (Identity Element) د مېټريکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مېټريکسونو په تفريق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنگه چې د دواړو مېټريکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفريق حاصل يې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعاليت

- د يوه مثال په واسطه وښاياست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دويم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: ليدل کېږي چې د A او B مېټريکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله يې جمع او تفريق امکان نه لري، ځکه د A د مېټريکس مرتبه 3×2 او د B مېټريکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مېټريکسونه د امکان تر بريده جمع او تفريق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په متریکس کې د سکالر ضرب

مورږ د متریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله که $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو **متریکس** او K یو سکالر وي،

د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **متریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **متریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد متریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجرا کولو وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **متریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وي، نو د KA د C له **متریکس** څخه عبارت دی، په داسې حال کې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:
$$K\,A=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

په میټریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چېرې A او B دواړه د یو شان مرتبې میټریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښایاست چې

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چېرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په میټریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیداکړئ.

د دوو مټریکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

ایاد دوو مټریکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=?$$

تاسو د دوو مټریکسونو د جمعې لپاره پیداکړل چې $A+B=B+A$ دی، د مټریکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

تعریف

دوه مټریکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونیسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مټریکسونه یو په بل کې ضرب شي، نو باید د لومړی مټریکس د ستونونو شمېر د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مټریکسونو د ضرب حاصل بیا هم یو مټریکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر یې د لومړي مټریکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر یې د دویم مټریکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مټریکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مټریکس لومړی سطر د دویم مټریکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې یې لیکو، په دویمه مرحله کې بیا هم د لومړي مټریکس دویم سطر د دویم مټریکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دویمه سطر کې یې لیکو، دغې عملیې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مټریکس په دویم مټریکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مټریکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښیو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پراو

لومړی پراو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot(-1) \\ -1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخېستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 2+(-1)(-1) & 2\cdot 3+3\cdot 0+(-1)\cdot 2 \\ (-2)(1)+1\cdot 2+2(-1) & -2(3)+1\cdot 0+2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2+6+1 & 6+0-2 \\ -2+2-2 & -6+0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+3\cdot 6 & 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 0+3\cdot 7 \\ 5\cdot 3+2\cdot 6 & 5\cdot 2+2\cdot 1 & 5\cdot 0+2\cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3+18 & 2+3 & 0+21 \\ 15+12 & 10+2 & 0+14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 5 & 21 \\ 27 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون پـه صـورت کـې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

خلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot 4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot 4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 2+4\cdot 1 & (-3)(-1)+4\cdot 2\\ -4\cdot 2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مېټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مېټریکسونویه ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مېټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

دویم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې B,A او C د $m\times n$ مرتبې مېټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې متریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$$

د یوه مېټريکس ترانسپوز

Transpose of Matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

که په يو مېټريکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی مېټريکس چې په لاس راځي په څه نوم يادېږي؟

فعاليت

• د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولېږدوی، هغه نوی مېټريکس چې په لاس راځي ويې ليکئ.

• که چېرې د يوه مېټريکس د سطرونو او ستونونو ځايونه يوله بل سره بدل کړو افقي ليکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی مېټريکس چې لاس ته راځي، آيا له لومړي مېټريکس سره مساوي دی، نوی مېټريکس په څه نوم يادېږي؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: که چېرې د يوه مېټريکس چې مرتبه يې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مېټريکس چې په لاس راځي، له ټرانسپوز(Transpose) مېټريکس څخه عبارت دی، د A ټرانسپوز مېټريکس په A^T ښودل کېږي. د ټرانسپوز مېټريکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times3}$ وي، نو ترانسپوز مېټريکس يې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times2}$، که يو ټرانسپوز مېټريکس يعنې A^T له خپل ځان يعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مېټريکس ته متناظر مېټريکس (Symmetric Matrix) وايي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ يو متناظر مېټريکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A$

د متناظر مېټريکس پېژندل: په متناظرو مېټريکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & e & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

د ټرانسپوز مټریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز مټریکس ټرانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز مټریکسونو د جمعي او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعي او تفریق له ټرانسپوز مټریکسونو سره مساوي دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت:
$(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$
$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

• که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A - B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې مټریکسونو ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

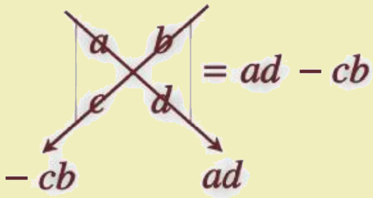
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیټرمینانت

Determinant

په یوه عددي مثال کې یو مربعي مټریکس داسې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چېرې د A مټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټریکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د مټریکس دیټرمینانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کېږي.

په همدې ډول که چېرې د $n\times n$ مرتبې یو مټریکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړوند دیټرمینانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي مټریکس په پام کې نیسو او د تعریف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

د 2×2 مرتبې مټریکسونو د دیټرمینانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\,d-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمینانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمینانت محاسبه کړئ.

د 3×3 متریکسونو د دیټرمینانت محاسبه:د $A_{3\times3}$ متریکس، دیټرمینانت په پام کې نیسو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ دیټرمینانت د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دریم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې دیټرمینانت محاسبه او د لومړي ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22})a_{31}$$

دویم پړاو: دویم ستون او دریم سطر حذفوو، د 2×2 مرتبې دیټرمینانت محاسبه او د دویم ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د دیټرمینانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\, a_{23} - a_{21}\, a_{13})a_{32}$$

دریم پړاو: دریم ستون او دریم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې دیټرمینانت محاسبه، د دریم سطر او دریم ستون د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A دیټرمینانت مقدار په لاس راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22})\, a_{31} - (a_{11}\, a_{23} - a_{21}\, a_{13})\, a_{32} + (a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})\, a_{33}$$

$$= a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{21}\, a_{13}\, a_{32} + a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

مثال: د لاندې ديټرمينانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=(6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعاليت

- د $A=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له ديټرمينانت څخه د a قيمت په لاس راوړئ.

دويمه طريقه: **د ساروس په طريقه د ديټرمينانت محاسبه:** په دغه طريقه کې د ديټرمينانت دوه لومړي ستونونه ښي لوري ته په لاندې ډول تکرار ليکو:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\quad \begin{matrix} \text{فرعي قطرونه} \\ \\ \text{اصلي قطرونه} \end{matrix}$$

د اصلي قطر عناصر يوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر يوله بل سره ضربوو او وروسته يې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مټريکس ديټرمينانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دویم ستون د لیږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیټرمېنانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تیر په ډول کړنه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\text{اصلي قطر} \\
\text{اصلي قطر} \\
\text{اصلي قطر}
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{33} & a_{32} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\text{فرعي قطر} \\
\text{فرعي قطر} \\
\text{فرعي قطر} \\
\\
\\
\end{array}
$$

دویم مثال: د لاندې دیټرمېنانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$
|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}
$$

حل:

$$
|M| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}\right.
$$

$$
= \big(3\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 0\cdot 5 + (-1)(-4)(-2)\big) - \big((-1)\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 0(-2) + 2(-4)\cdot 6\big)
$$

$$
= (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109
$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیټرمېنانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیټرمېنانت لاندې برخې ته ولیږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$
|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}
$$

پوښتنې

1. د لاندې دیټرمېنانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$
a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad , \quad d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}
$$

2. د لاندې دیټرمېنانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$
a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}
$$

د ديټرمينانت خاصيتونه

که چيرې په يوه ديټرمينانت کې د سطر ځاى له ستون سره بدل شي، د ديټرمينانت په قيمت کې تغير راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ \boxed{2 \quad 4 \quad 1}\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}\boxed{2 \quad 4 \quad 1}\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعاليت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ديټرمينانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ديټرمينانت په پام کې ونيسئ، ترانسپوز يې په لاس راوړئ ، وروسته يې $|A^T|$ ديټرمينانت محاسبه کړئ او وښاياست چې $|A^T|=|A|$.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

که چيرې $A_{n\times n}$ يو ميټريکس وي، د $|A|$ ديټرمينانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ ميټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ديټرمينانت مساوي له صفر سره دى.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چيرې د $A_{n\times n}$ ميټريکس دوه سطرونه يا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ديټرمينانت يې مساوي له صفر سره دى.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ ميټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون عناصر د بل سطر او يا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دى.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A ميټريکس ديټرمينانت او A^T ميټريکس ديټرمينانت يو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ديټرمينانت ځينې نور خاصيتونه يا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چېرې په یوه دیټرمینانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیټرمینانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ دیټرمینانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیټرمینانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیټرمینانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیټرمینانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیټرمینانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیټرمینانت ګډ فکټور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیټرمینانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیټرمینانت په لومړي ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیټرمینانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دیټرمینانت دخواصو په مرسته د لاندې دیټرمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

د 2×2 مرتبه یې متریکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آیا د حقیقي عددونودضرب قاعده مو په یاد ده؟

د a حقیقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځینو مربعي متریکسونو لپاره هم دا خاصیت، د متریکسونو د خاصیتونو په پام کې نیولو سره شتون لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس په پام کې ونیسئ او دیترمینانت یې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس د A له متریکس سره ضرب او پایله یې ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

تعریف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غیر صفري مربعي متریکس په پام کې نیسو، که چېرې د B مربعي متریکس داسې موجود وي چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B متریکس د A د متریکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښیي. له دې امله لیکلی شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په یاد ولرئ: د A مربعي متریکس ته منفرد متریکس(Singular Matrix) ویل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنگه د A مربعي متریکس ته غیر منفرد متریکس(non singular matrix) ویل کېږي، که چېرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت یو متریکس د معکوس متریکس لرونکی دی چې:

1. متریکس مربعي وي.
2. دیترمینانت یې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښایاست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ یو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لیدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي مټریکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مټریکس د پیداکولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مټریکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو مټریکس معکوس مټریکس لري چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مټریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مټریکس یې پیداکړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=-8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A مټریکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس مټریکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټریکس چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو څخه کوم یو مټریکس معکوس لري.

$a)\ \ A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\ \ B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مټریکسونو معکوس مټریکس په لاس راوړئ او وازموئ.

$1)\ \ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2)\ \ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 3)\ \ C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

له معکوس مټریکس څخه په کاراخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخیستنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو مټریکس، د مجهولینو مټریکس، د ضریبونو او مجهولینو مټریکس ولیکئ.
- هر مټریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلې معادلې اطراف د ضریبونو د مټریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتنې فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لورې د ضریبونو مټریکس، B د ښې لورې د ثابتو عددونو ستوني مټریکس او X د مجهولو عددونو ستوني مټریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلیږي:

$$A\,X = B$$
$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$
$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړدی چې په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\quad ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ |A|\neq 0$$

لیدل کیږي چې $|A|\neq 0$ دی، نو A معکوس متریکس لري.

$$AdjA=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}AdjA=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B \quad =\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 2+2\cdot 3\\ -3\cdot 2+5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+6\\ -6+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; x=4 \quad , \quad y=9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases}2x-3y=4\\ 4x-6y=1\end{cases}$$

حل:

د یاد شوي سیستم حل د سیستم د ضریبونو د متریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix},\; B=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix} \;,\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=-12+12=0$$

څرنګه چې د A متریکس دیترمینانت صفر دی، نو د A متریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټې اخېستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د ډیټرمینانت او له مجهولینو یعنې د z, y, x سره د متناظرو مټریکسونو د ډیټرمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو مټریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A|\neq 0$ وي.

$$X=\frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د y, x او z اړوند متناظرو مټریکسونو ډیټرمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړی ستون د x ضریبونو په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمېنانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون د y ضریبونه په ځای د ځلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مټریکس دیټرمېنانت محاسبه کوو.او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون د z ضریبونو په ځای ځلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمېنانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخېستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

دویم مثال: لاندې درې مجهوله سیستم د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-9-4+4-12-6-2 \\ =-21-8=-29\neq 0 \end{array}$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سیستم حل لري.

$$|A_x|=\left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 11 & 2 & -1 & 11 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =12-22+20-(66-8+10) \\ =10-68=-58 \end{array}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-15-8+22-(20+33+4) \\ =-23+22-57=-58 \end{array}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 11 & 2 & 2 \end{array}\right| =99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

میزان:

د y,x او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \Rightarrow -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \Rightarrow 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \Rightarrow 11=11$$

فعالیت

دگرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل دګوس ($Gouse$) په طریقه

آیا کولای شو له مټریکس څخه په کار اخېستنې سره

د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو مټریکس او ثابت قېمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنۍ عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د مټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطردتفریق حاصل په دویم سطر کې لیکو.}]{R_1-R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(-1) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې لیکو.}]{R_2\cdot(-1)\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1-R_2\to R_2$ په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړي سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1)\to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم د ګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم د ګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینو ضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړي پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم ګام کې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \;\Rightarrow\; z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \;\Rightarrow\; -7y+21=7 \;\Rightarrow\; -7y=-14 \;,\; y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ایږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \;\Rightarrow\; 2x+3=5$$
$$2x=5-3=2 \quad,\quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

امتحان: لاسه ته داغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad,\quad 5=5$$
$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \;,\; 11=11$$
$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad,\quad 3=3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$
$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دویم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دریم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

لیدل کیږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو مټریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه دګوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ \quad -3y = -6 \end{cases}$$

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه ګېډۍ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- **سطري مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري مټریکس**: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي مټریکس**: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي مټریکسونه**: دوه مټریکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مټریکس بلل کېږي.
- **سکالر مټریکس**: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- **واحد مټریکس**: په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.

په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د مټریکسونو جمع او تفریق**: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$

2) $A-B\neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$

4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha\ A+\alpha\ B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha\ A+\beta\ A$

c) $\alpha(\beta\ A)=(\alpha\ \beta)A=\beta(\alpha\ A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B = (a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p} = (C_{ij})_{m\times p} = C_{m\times p}$$

يعنې د دوو مټريکسونو د ضرب حاصل هغه دريم مټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مټريکس سره برابر وي.

د مټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مټريکس ترانسپوز مټريکس: که د يوه $A_{m\times n}$ مټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مټريکس چې لاسته راځي ،د ټرانسپوز مټريکس په نامه يادېږي. د A ترانسپوز مټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مټريکس: که په يوه مټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مټريکس د مثلثي مټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مټريکس: که د A يو مټريکس له خپل ترانسپوز A^T مټريکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مټريکس ته متناظر مټريکس وايي.

ديټرمېنانت: که د A مټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټريکس له ديټرمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديټرمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديټرمېنانت يې صفر دی، يعنې:
$$\det A = |A| = 0$$
2. که د ديټرمېنانت دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر وي، نو ديټرمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديټرمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مټريکس او د A ترانسپوز مټريکس ديټرمېنانتونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مټريکس په پام کې نيسو ،که چېرې د B مربعي مټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مټريکس د A د مټريکس معکوس دی او د A د مټريکس معکوس مټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مټريکس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- د ګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

د ځېرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړی تاو کړئ.

1. که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\qquad b)\ 9$ $\qquad c)\ \frac{1}{9}$ $\qquad d)\ 3$

2. که $A=\begin{pmatrix}2m-3 & -1\\ 1 & m\end{pmatrix}$ معکوس منونکی متریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m=1,\frac{1}{2}$ $\qquad b)\ m\neq 1$ $\qquad c)\ m=0$ $\qquad d)\ m\neq 1,\frac{1}{2}$

3. که $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ وي، د x هغه متریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax=A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix}9 & 5\\ 25 & 14\end{pmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{pmatrix}9 & -5\\ -25 & 14\end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix}9 & 5\\ -25 & -16\end{pmatrix}$ $\qquad d)\ \begin{pmatrix}-9 & 5\\ -25 & -12\end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ متریکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور $\qquad$ b) د x محور $\qquad$ c) $y+2x=0$ $\qquad$ d) $y=0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix}$ صفر دی؟

$a)\ x=1,2$ $\qquad b)\ x=3,1$ $\qquad c)\ x=\frac{1}{2},3$ $\qquad d)\ x=3,2$

6. د $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\qquad b)\ 39$ $\qquad c)\ 19$ $\qquad d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B$ $\qquad\qquad$ $b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او وواياست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې متریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د متریکسونو ضرب د درو متریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیترمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې متریکس معکوس متریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

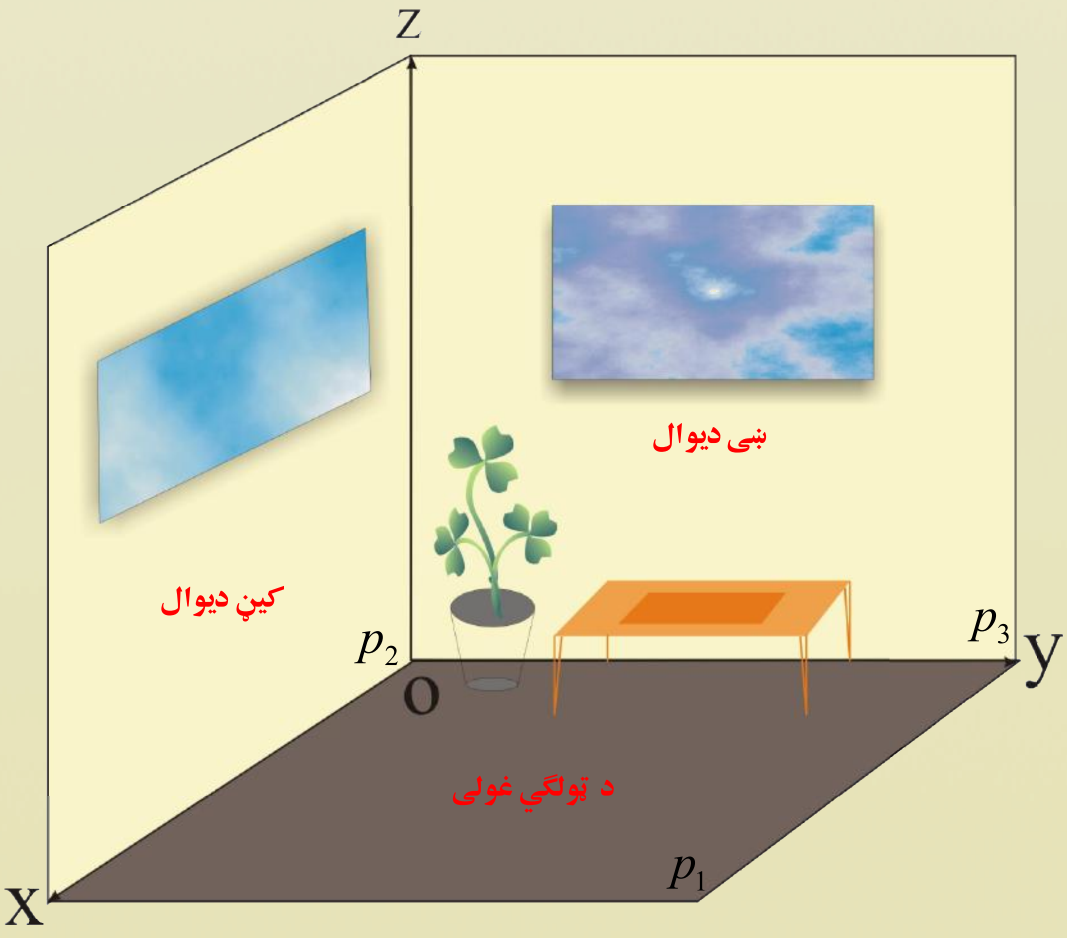
$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس متریکس په طریقه حل کړئ.

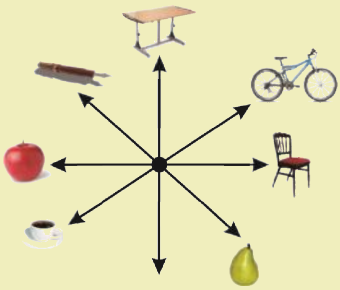
$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

اووم څپرکی

وکتورونه


z
ښي دیوال
کیڼ دیوال
p_2
p_3
y
o
د ټولګي غولی
p_1
x

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه



له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لندې لاره په نښه کړئ.

تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وایي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادېږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د $B\ (5,5)$ مختصات ولري.
- د پورتني راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې سره توپیر ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

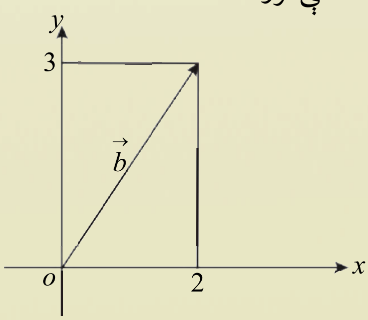
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

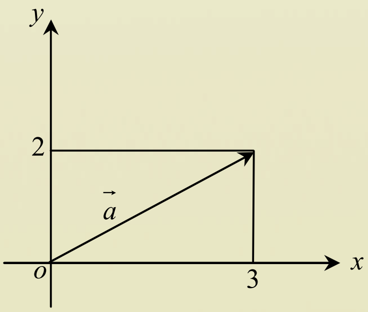
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې: $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

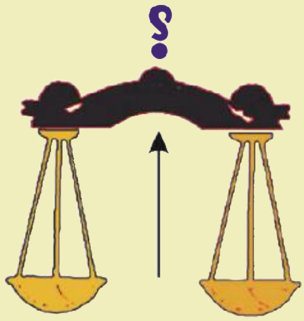
1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.

b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

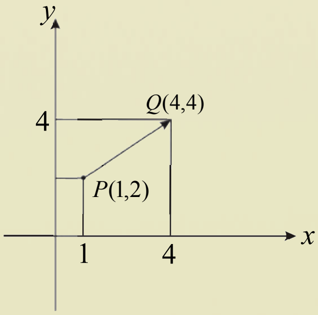


د تلې دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

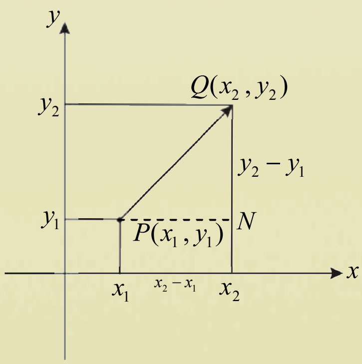
- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



- د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟

د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

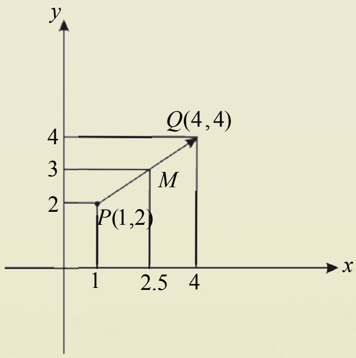
پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y^2}$



- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\[2mm]\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{2+4}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{6}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{a_x{}^2+a_x{}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2+5}{2} \\ \frac{5+4}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

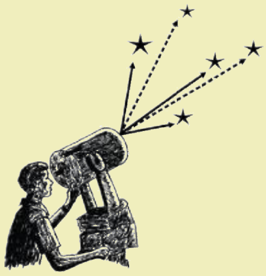
د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکي پیدا کړئ.

$i)\quad B(2,7)\quad , \quad A(3,4)$

$ii)\quad N(5,1)\quad , \quad M(1,5)$

$iii)\quad Q(8,8)\quad , \quad P(1,8)$

وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري لیدل په فضا کې ځانګړې وکتورونه ښيي.

د يوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره يوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2 = \{(x, y) \ / \ x, y \in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه يې (x, y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه يې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه يې (x, y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ يو وکتور سره څه توپير لري چې وضعیه کمیتونه يې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a \in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

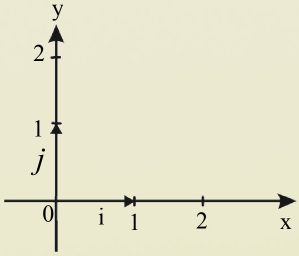
i) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

ii) $a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

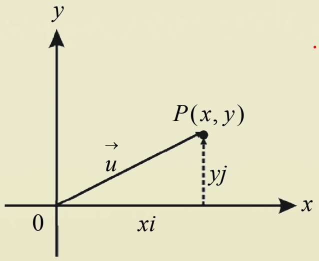
له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دی چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحـد وکتـور(unit victor): هغه وکتـور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزایـد لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$ ، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې یو ټکی وټاکئ آیا داسې یـوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غـولي او مجاور دیوال ته وټاکو؟

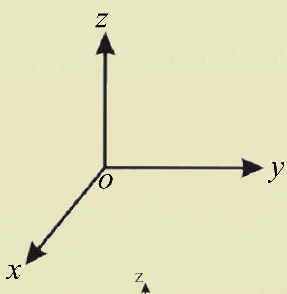
تعریف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعریفیږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستویګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه یو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستویګانې بلل کیږي.

د دغو مستویګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قـایمې زاویـې جـوړوي چې هغه د درې بُعـدي فـضا قـایم مختـصات بولي. د درې بعدي فضا قایم مختصات داسې نوموي چې که یو تن ودریږي، هغه محور چې د لیـدونکي د تنـې پـه لور دی، د z محور او هغه محور چې د لیدونکی د لید په لور دی د y محور او هغه محور چې د لیدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبـارت دی . چې د قایمو مختصاتو مبداء ښیي.

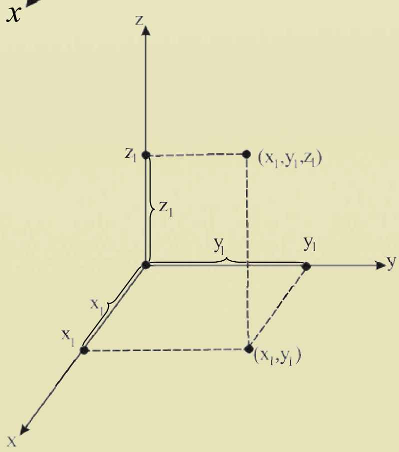


په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبـارت دي چې لـه درې واړو مستویګانو څخه یې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي ګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښیي.

په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قایمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکـي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور بانـدې د مختـصې د علامې په پام کې نیولـو سره فاصلې جـلا کـوو، لـومړی د x لـه محور څخه مـوازي خط د y لـه محور سره رسـموو، د تقـاطع ټکی یې چې (x, y) دی، پیدا او وروسته له یاد شوي ټکي څخه یو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتیب د ټکي ټاکل پـه درې بعـدي فضا کې بشپړیږي.



يادونه: په درې بعدي فضاکې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دی.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3\ ,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضاکې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\overrightarrow{OP}$ وکتور له $\overrightarrow{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\overrightarrow{u}$ او $\overrightarrow{\mathrm{v}}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\overrightarrow{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ ، $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$ ، $2\overrightarrow{w}$ او $\left|v-2\overrightarrow{w}\right|$ پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\overrightarrow{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\overrightarrow{v}-2\overrightarrow{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

يادونه:

A- کېدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

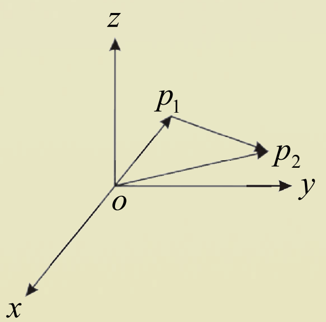
$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوي، د z, y, x محورونو په امتداد د واحد

وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد

وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن**: که چېرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\vec{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښيي.

C- که په درې بُعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1, y_1, z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2, y_2, z_2)=(x, y, z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیدا کولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

دويم مثال: که $\vec{a} = (-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیتونو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + +y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{25+16+25} = \sqrt{66}$$

دريم مثال: که $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $ii)\ |\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = ?$ $\quad i)\ \vec{u} + 2\vec{v} = ?$

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 2(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k} = 10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$ii)\quad \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} - 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k} = -8\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = |-8i - 12j + 2k| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{64+144+4} = \sqrt{212}$$

پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیداکړئ.

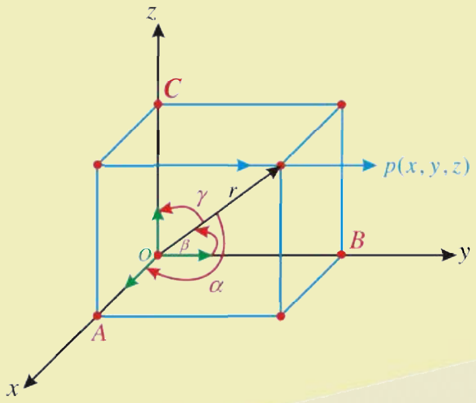
2. په دريم مثال کې چې $\vec{u}, \vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ?$ $\qquad b)\ |\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}| = ?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v}, \vec{v}$ او $\vec{w}, \vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیداکړئ.

4. د هغه وکتور واحدونه پیداکړئ چې د $\vec{u}, \vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان β, α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ د وکتور زاویې او $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آیا ویلای شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چېرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور د جهت زاویو د کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

پایله: که په فضا کې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$، راکړل شوی وي، نو د جهت د

زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

د پورتنی پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې: $\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له: $\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=\begin{pmatrix}\frac{\vec{v}_x}{\left|\vec{v}\right|}\\ \frac{\vec{v}_y}{\left|\vec{v}\right|}\\ \frac{\vec{v}_z}{\left|\vec{v}\right|}\end{pmatrix}$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\qquad b)\ v-3\vec{w}=?$ $\qquad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینری او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\le\theta\le\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

$(i \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \;\Rightarrow\; \vec{u}\perp\vec{v}$

$(ii \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصيت يا ځانګړتيا).

$(iii \quad \vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (په جمع د ضرب توزيعي خاصيت).

$(iv \quad (c\cdot\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ د ضرب توزيعي خاصيت.

لومړی مثال: کـه $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونـه د صـفر خـلاف وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

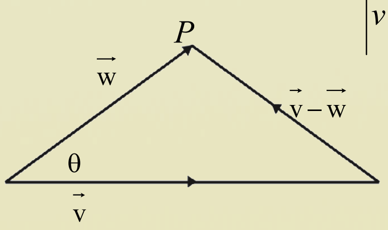
حل: د تعريف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$
$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دويـــم مثـــال: کـه $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د يـو ې مـستوي دوه وکتورونـه وي، وښاياسـت چــې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعريف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\,\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



ځرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پايله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنی اړيکی څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2||x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta\,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

دریم مثال: که چېرې د $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نيولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښاياست چې د $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ او $\vec{u}=2i-4\vec{j}+5k$ وکتورونه يو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2i-4\vec{j}+5k)(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$
$$=8+12-20=0 \quad \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنګه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قيمت داسې پيدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

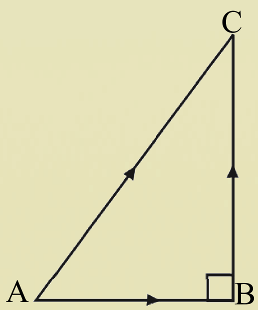
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\,(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad \Rightarrow \quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښاياست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د يو قايم الزاويه مثلث ضلعې دی.

حل: که $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{2i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\overrightarrow{3j}-\overrightarrow{5k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع ټاکې عبارت دی له:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دريمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښيو چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\,(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$
$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$

پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له b,a او c سره مساوي دي.

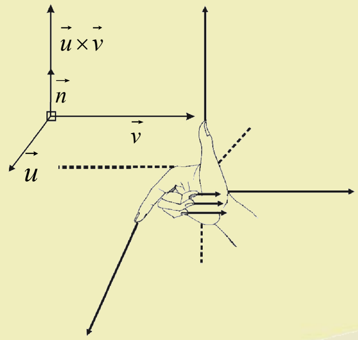
2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې دکوم لاس (ښې یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ځنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوي مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښې لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلالیت) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوی وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: کـه $\vec{a_1} = (2,3)$ او $\vec{a_2} = (5,1)$ وکتورونـه راکـړل شـوي وي، وښایاسـت چې د $\vec{a} = (6\ ,-5\ )$ وکتور د $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: خرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \quad = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \end{array}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$

$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$

$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$

$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$

$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78-140}{13}$$

$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورنو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور پـه لاس راځـي، نو وموليدل چې $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحدو وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

نو: $= x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$

که $e_1 = (1, 0)$ او $e_2 = (0, 1)$ وي.

نو: $(x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$
$$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

څرنگه چې $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x, y, z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n)$$
$$= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \ldots, e_n$ طبیعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنگه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعالیت

که $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ وي وښایاست چې S خطي خپلواکي لري.

غیرې خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط خطي غیر خپلواک یا خطي انحصار لري، که چېرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نومورې وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چېرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په لاندې ډول راکړل شوي دي $\vec{a}_3=(2,3,1),\ \vec{a}_2=(0,3,1),\ \vec{a}_1=(1,2,0)$ وښایاست چې $\vec{a}_1$، $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=\alpha_1(1,2,0)+\alpha_2(0,3,1)+\alpha_3(2,3,1)=0$

دویم پړاو:

$$=(\alpha_1, 2\alpha_1, 0)+(0, 3\alpha_2, \alpha_2)+(2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3)=(0,0,0)$$
$$=(\alpha_1+0+2\alpha_3, 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3, 0+\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)$$

دریم پړاو:

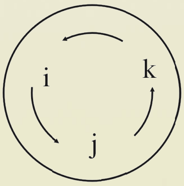
$$\begin{cases}\alpha_1 \ +0 \ +2\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0\\ 0 \ +\alpha_2 \ +\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2=-\alpha_3$$
$$2\alpha_1+3(-\alpha_3)+3\alpha_3=2\alpha_1-3\alpha_3+3\alpha_3=0 \Rightarrow 2\alpha_1=0,\ \alpha_1=0$$
$$\alpha_1+2\alpha_3=0$$
$$0+2\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_3=0$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0$$
$$0+3\alpha_2+0=0 \Rightarrow 3\alpha_2=0 \quad , \quad \alpha_2=0$$

ځرنګه چې $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعاليت



د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u} \times \vec{v}$ او $\vec{v} \times \vec{u}$ مسير او یا جهت په مخامخ شکل کې وښيي.

- وښاياست چې $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ او $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j} \times \vec{j}$ ، $\vec{k} \times \vec{k}$ ، $\vec{j} \times \vec{k}$ او $\vec{k} \times \vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښاياست چې: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ او $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{j}, \vec{i}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوې دایرې په ښي لاس ته راځي.**

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاس ته راځي:

پايله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي. د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

$$\text{i)} \quad \vec{u} \times \vec{u} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\text{iii)} \quad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\text{iv)} \quad \vec{u} \times (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k\ (\vec{u} \times \vec{v}) \ , \quad k \in IR$$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پايلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$ او $\vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښاياست چې:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2)\,\vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2)\,\vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\,\vec{k}$$

حل: د تعریف نه په ګټې اخیستنې سره لیکو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{matrix}\right\} \quad , \quad \left.\begin{matrix}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{matrix}\right\} \quad , \quad \left.\begin{matrix}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{matrix}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال نه په ګټې اخیستنې سره پوهیږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(دري ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنيو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، يو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پايلې يې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ وکتور سره هم جهت دی.

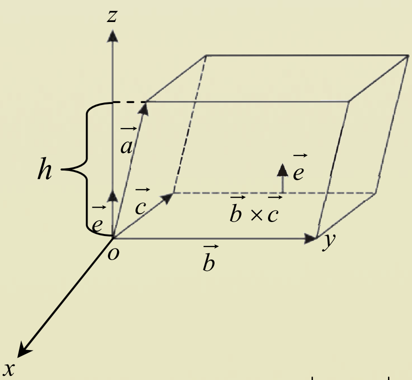
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

ii) $$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

iii) $$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$$

iiv) $$\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$



د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړيکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دی، څرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي-السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم} = v = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| h$$

تطبيقاتي مسئلې:

1- که چيرې $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ او $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب غوښتل کيږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آيا دغه وکتور يوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دليل مو څه دی؟

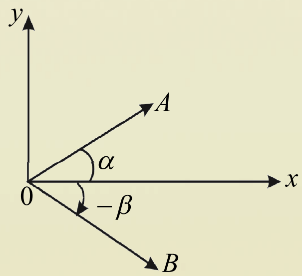
حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهيږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونـه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتـور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبـــوت کـــړئ چـــې د α او β د هــــرې اختیـــاري زاویـــې لپـــاره $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: کـه $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونـه د x,y پـه مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x لـه محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهېږو: $\hat{AOB}=\alpha+\beta$

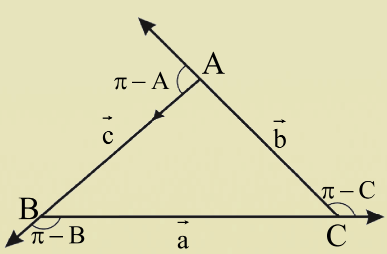
له بلې خوا پوهېږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\quad \left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right|=\left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

$$\Rightarrow\quad \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad \text{..........}\ (i)$$

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c} = -\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c}) = -\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}|\;|\vec{c}|\sin(\pi-A) = |\vec{c}|\;|\vec{a}|\;\sin(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\;\sin A = |\vec{c}|\;|\vec{a}|\;\sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A = a\sin B\;\;/\div ab$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \qquad ....\;(ii)$$ یا $$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \qquad ....\;(ii)$$

د پورته په څېر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

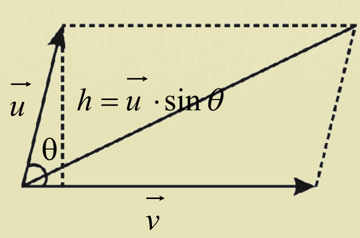
$$|\vec{c}|\,|\vec{b}|\sin A = |\vec{b}|\,|\vec{a}|\sin C$$

$$c\sin A = a\sin C\;\;/\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}\quad .....\;iii$$ یا $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساین قضیه لاسته راځي: $$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

4- **د یوې متوازي الاضلاع مساحت**: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه د θ د لاندې شکل په څېر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازاي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیداکولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

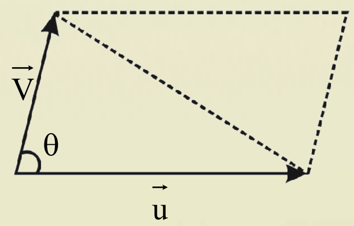
خرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h=|\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

$|\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

يعنې د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پایله:څرنګه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\,(\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$ ، $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښاياست چې نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

2. وښاياست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟

3. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1)$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دی.

4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$، $Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.

5. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څېر ښودل کېږي. چې a_x او a_y د x او y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښيو او د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$ د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکې کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

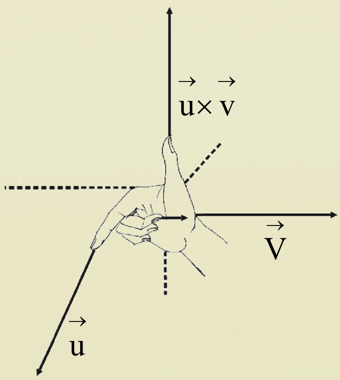
مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري او وکتوری ضرب حاصل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې د حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښي لاس قاعدې په واسطه ټاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت ګوته په قایم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت ګوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د ځنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه ګوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښيي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

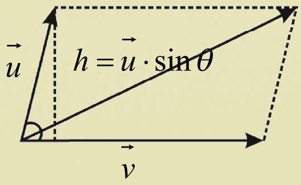
کـه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصـل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونـه، چـې صـفر نـه وي، د وکتوري ضـرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شـکل کـې تشکیلیږي.

د متوازي الاضلاع مساحت $=|\vec{u}\times\vec{v}|$



د خپرکي پوښتني

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$iv)$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}\qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}\qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يي د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$i):\quad P(0,0,0),\quad Q(2,3,2),\quad R(-1,1,4)$

$ii):\quad P(1,-1,-1),\quad Q(2,0,-1),\quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوی وي.

$i):\quad A(0,0,0),\quad B(1,2,3),\quad C(2,-1,1),\quad D(3,1,4)$

$ii):\quad A(1,2,-1),\quad B(4,2,-3),\quad C(6,-5,2),\quad D(-3.5,-4)$

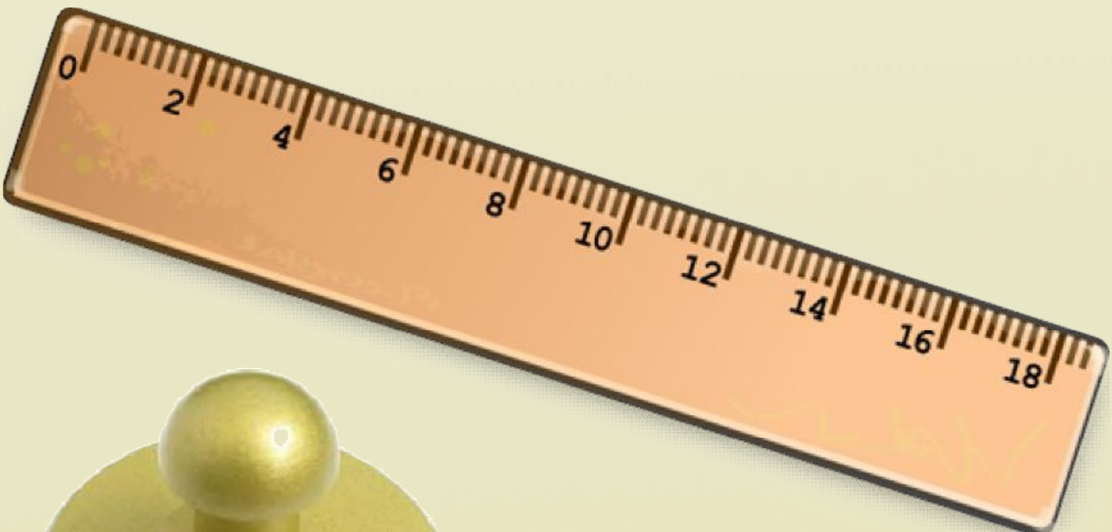
$iii):\quad A(1,-1,1),\quad B(-1,2,2),\quad C(-3,4,-5),\quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي ؟

$i):\quad \vec{u}=5i-j+k,\quad \vec{v}=j-5k,\quad \vec{w}=-15i+3j-3k$

$ii):\quad \vec{u}=i+2j-k\ ,\quad \vec{v}=i+j+k,\quad \vec{w}=-\frac{\pi}{2}\vec{i}+\frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم ځپرکی احصائیه



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چېرې د یوې ټولنې تیتوالی په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه تیتوالی په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د تیتوالی د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معیاري انحراف په اوسط وویشل شي، نو په لاس راغلی مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي تیتوالی داسې کارول کېږي، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځې اویو مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$\text{دبدلونونو یا تغییراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \qquad \text{یا} \qquad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوې وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري ټلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

دکوم یوه لامپ تصویر له پاسنیو ډولونو څخه د نسبي تیتوالي یا دبدلون ضریب قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنگه چې $C\cdot V_A > C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېر تیتوالی لري، ولې ټېنگښت یې کم دی.

پوښتنې

1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

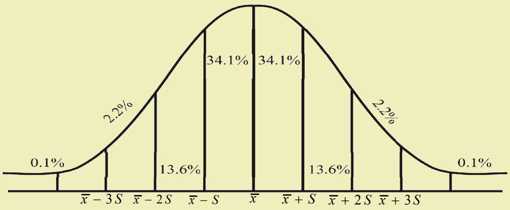
1 3 4 5 6

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغییراتو ضریب څو دي؟
3. ستاسو د ټولگي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

په نورمال منحني کې تیتوالی

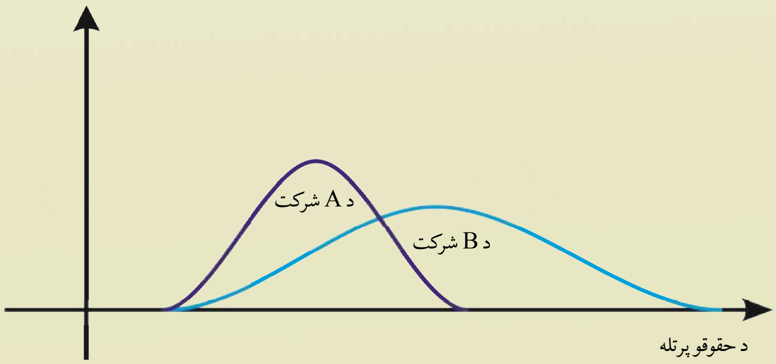
اوریدلي به مو وي چې وایي: یو ښه تصویر د زر کلمیو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.



فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأدیه ښیي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تادیه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأدیې په میزان کې خپلو کارمندانو ته لړه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأدیات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معیاري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چېرې $\bar{x}$ اوسط او S معیاري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد په $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ فاصله کې یعنې د اوسط په شا او خوا د معیاري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ فاصله کې یعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معیاري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-3S\ ,\ \bar{x}+3S)$ فاصله کې یعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معیاري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري، د تیتوالي یا تیتې ډېټا په نامه یادېږي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخیستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: آیا ویلای شئ چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm\ 3S$ قیمتونه په لاس راوړو.

فیصدي	فاصله د افغانیو له مخې	فاصله د S له مخې
68%	11800 – 13200	$\bar{x}\pm S$
96%	11100 – 13900	$\bar{x}\pm 2S$
99.6 %	10400 – 14600	$\bar{x}\pm\ 3S$

د ب حل: لومړی $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S وویشو په لاس را ځي:

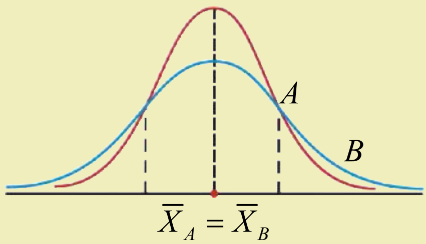
$$\frac{1500}{700}=2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زیات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه

که چېرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\ \bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالي منحني سره وښایاست؟

دنورمالي توزيع دډول معيارونه



د مرکزي تيتوالي دوه معيارونه يو زيات شمېر د يـوې احـصايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپـاره چـې د يـوې احـصايوي مجمـوعې اطلاعـات، تناظر او د مثبت او منفـي اشـارو لرونکـي وي؛ نـو لـه کـوم ډول منحني څخه بايد ګټه واخلو.

فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د موډ معيارونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کميتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چېرې يوه توزيع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسـط تفاضل څو ده؟
- که چېرې دواړه توزيع ګانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټيټوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول معيارونه په دوو لاندې حالتونو کې څېړل کېږي:

1- **د خمېدلو skewness معيار**: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه معيار دی چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ د نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، يعنې ښي لوري ته خمېدګي لري.

اوکه $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري يعنې کيڼ لورې ته خمېدګي لري.

که چېرې د کثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \dfrac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^3}{S^3}$ فورمـول پـه واسـطه پيدا کېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$S\,k_{(p)} = \frac{3(\overline{x}-med)}{S}$$

په متناظره توزيع کې د پيرسون د خميدلو ضريب مساوي په صفر دی. د پيرسـون د خمېـدلو د لـو ضـريب مثبـت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

2- **د پړسوب kurtosis معیار**: د پړسوب معیار ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

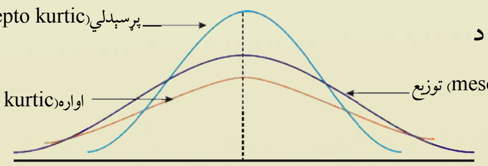
د پړسوب شاخص هغه معمولي معیار دی چې د یوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب معیار فورمول $\alpha_4 = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډېټا او $\overline{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب معیار د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه معیار د پرتله کیدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوي توزیع ښودل شوي ده ښيي.



حل: د نورمالي توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه: یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالي توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زیاتـه وي نظر نورمال منحني ته د منحني پړسوب زیات دی.

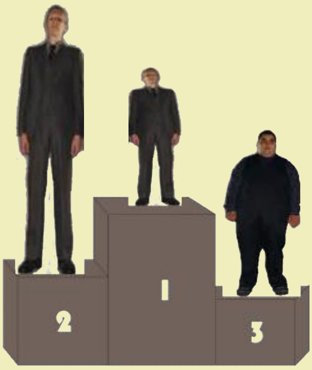
یا په بل عبارت یوه پړسیدلی توزیع چې څوکـه لـري او کـه چیـرې α_4 لـه 3 لـږ وي، نظر نورمـالي منحنـي تـه یـې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.

پوښتنې

د یوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسـوب ضـریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

څو متحوله ټولنې



که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې یې کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضيکي اړيکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سېستم کې جوړیږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښیي.

مثال: یو متخصص د غذايي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلي دي: $(2,4)$, $(3,5)$, $(1,7)$, $(2,3)$, $(1,8)$

په دې ډول لومړی مختصه د موږک لومړنی او دویمه مختصه د موږک وزن دغذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته ښیي.

- معلومات په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چېرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د موږکانو شمیر	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د موږکانو شمېر	د موږکانو لومړنی وزن	د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

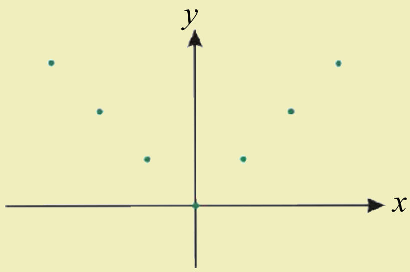
پورتني ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آیا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لرئ؟

د تیتوالي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله يي ولیکئ:

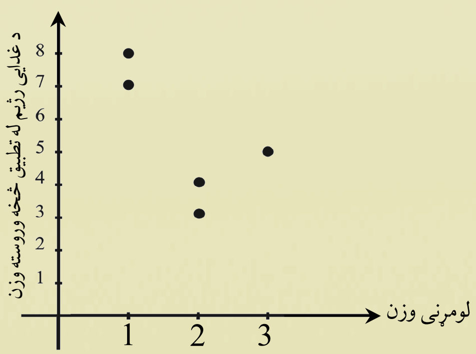
فعالیت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغله له y څخه یو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلي قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

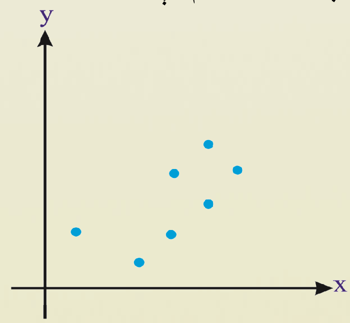
مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موړکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړې دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)



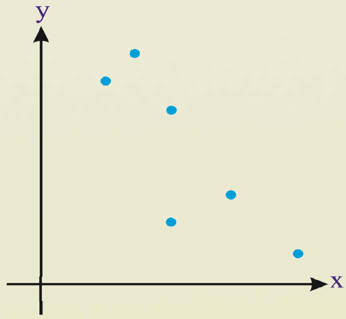
دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

پورتنی ګراف چې د موړکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

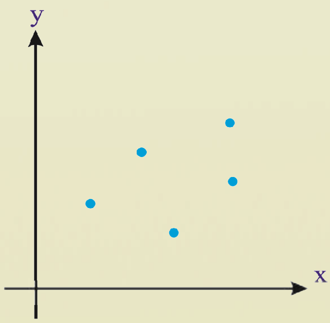
مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



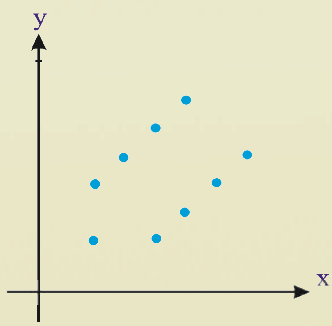
(الف)



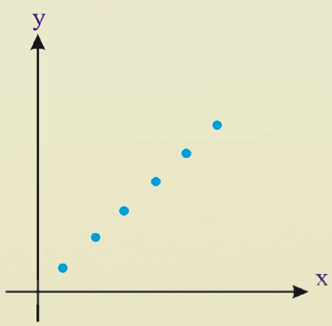
(ب)



(ج)



(د)



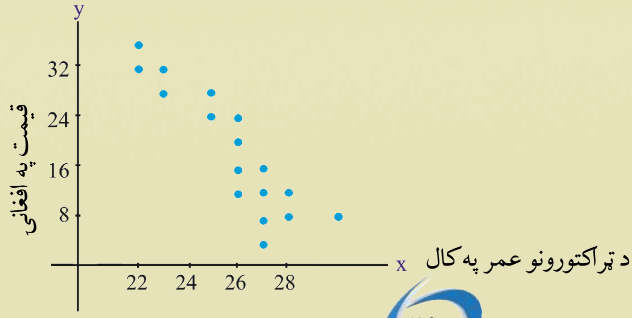
(هـ)

د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونو په اړوند نه ورکوي څکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو په پرتله زیاته ده، د (هـ)په ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

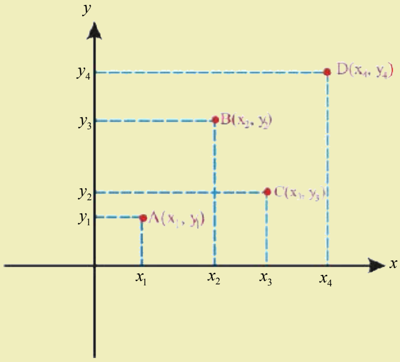
پوښتنې

لاندې ګراف دیو شمېر ټراکتورونو عمر راښيي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط وینې؟ توضیح یې کړئ.



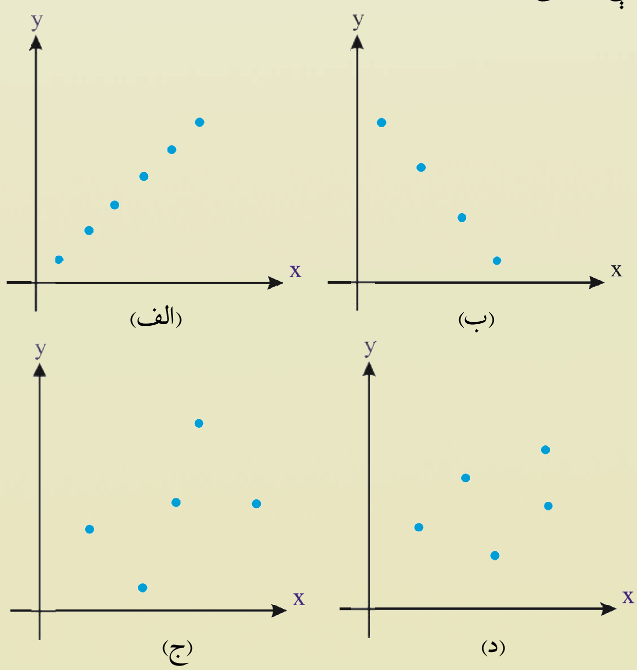
پیوستون او دپیوستون ضریب

د A,B ,C او D ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آيا شوني ده چې ټکي په يوه مستقيمه کرښه سره وصل شي، ولې؟



فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پورتني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در ویېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کیږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n} - (\text{د } x \text{ ونو اوسط})(\text{د } y \text{ ګانو اوسط})}{(\text{د } x \text{ ونو معیاري انحراف})(\text{د } y \text{ ګانو معیاري انحراف})} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذایي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د موږکانو شمېره	لومړني وزن X	له عملیې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروستني غذایي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چیرې x لومړني وزنونه او y د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n = 5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دی له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \qquad , \qquad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}} = \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{(1\cdot 8) + (2\cdot 3) + (1\cdot 7) + (3\cdot 5) + (2\cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

په دې ډول په پايله کې د پيوستون ضريب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پيوستون ضريب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\;\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

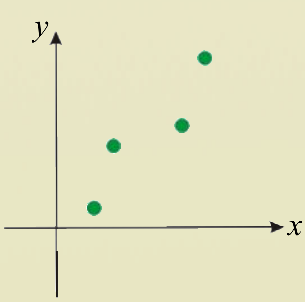
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پيوستون د -0.67 ضريب د x او y ترمنځ د ډېر پيوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پيدا کېدو لپاره د پيوستون ضريب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نيسئ:

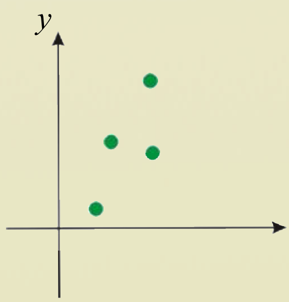
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

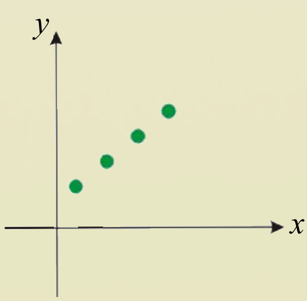
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په يوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پيوستون ضريب ډېر لوړ قيمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د يوې مستقيمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پيوستون ضريب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقيمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو بايد ضريب يې په دې حالت کې د(ب) له حالته زيات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پيوستون ضريب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{ونو واريانس } x \text{ د} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{ګانو واريانس } y \text{ د} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{ګانو دضرب حاصل } y \text{ او } x \text{ د} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y گانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= 4.6875$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نـژدې پراتـه دي) کـه چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یـوه مـستقیمه کربـښه پراتـه دي. غیـر لـه هغـه څخـه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

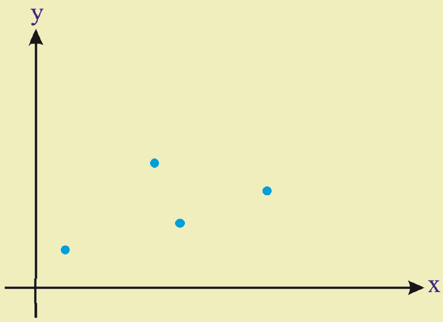
د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولگیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

د خطي میلان معادله

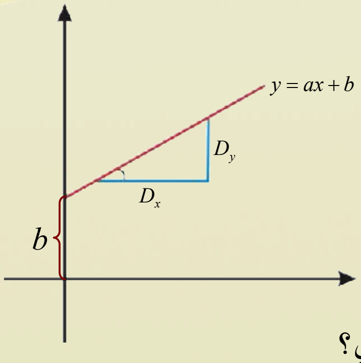
The linear regression equation

فرض کړئ چې یو پاشلی ګراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. یوه مستقیمه کرښه چې معادله یې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوي وي، پیدا کړئ چې ګراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.



فعالیت

په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.

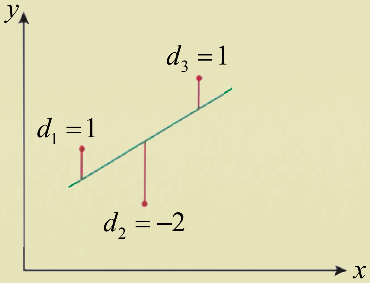


- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولین په کوم نوم یادیږي؟
- د $y = ax + b$ مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د یو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چېرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزاید او که متناقص دی؟

همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چېرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



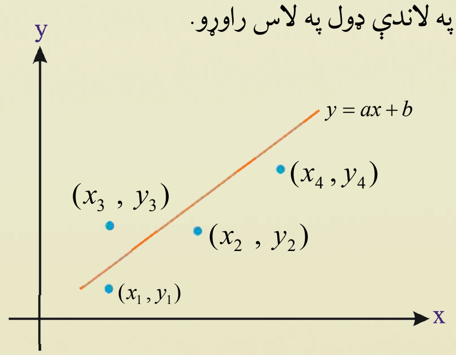
د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله یوه خطي تابع ده چې د a ضریب ددې معادلې میل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقیمه کرښه متزاید او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړي ټکي د مستقیمې کرښې په ګراف پراته دي.

هر څومره چې د پاشلي ټکی مستقیمې کرښې ته نژدې وي، نو د پیوستون ضریب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د یوې مستقیمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پیوستون ضریب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چیرې مستقیمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې یوه تګلاره چې د لږکیو یعنې اصغري مېتود جوړونې[1] مربعو په نامه یادیږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دیاګرام یا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

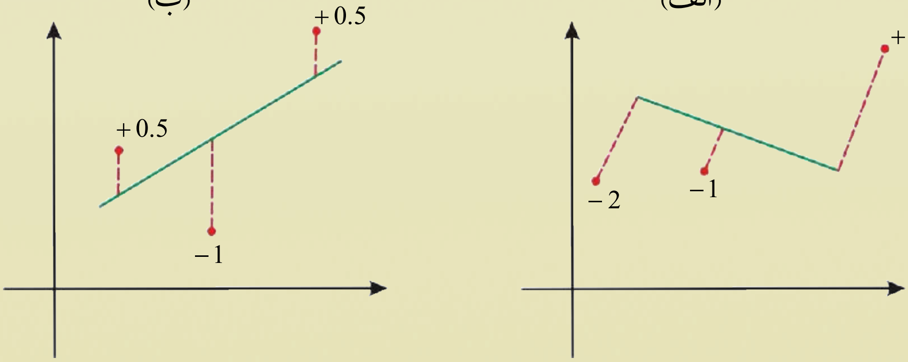


او غواړو داسې یوه کرښه چې معادله یې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تیره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې باید په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دویم توان مجموع له مستقیمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نیسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخیصوو.

(الف) (ب)



[1] the method of least square -

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د(الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ویلای چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې یو له بله د منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر لـه(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعاتو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چېرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچنې والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$
$$= \sum (y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$a = r\frac{sy}{sx}b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad , \qquad b = \frac{\sum x\,y - n\,\bar{x}\,y}{\sum x^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x\,y}{\sum x^2}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعاتو تګلارې په نامه یادیږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریګریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \qquad \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3$$

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = -1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2-(-1)(3) = 2+3 = 5$$

په دې ډول د ریګریشن معادله عبارت ده له: $y = ax + b = -x + 5$

پوښتنه

که چېرې $y = 2x+3$ د y د ریګریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط به څومره وي؟

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C\cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C\cdot V = 100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چېرې ډېټا سره مساوي وي، نو د ټیټوالي ټول معیارونه مساوي له صفر سره دي.

په نورماله منحني کې ټیټوالی: نورماله منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورماله منحني کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کېدل او معیاري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

د نورمالي توزیع د شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید څرنګوالی د کږېدوا او پړسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو معیار د کږېدو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

د پړسېدو(جګېدلو) معیار د پړسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکه: د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې دغه راز ټولې اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د تیتوالي ګراف: د تیتوالي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په یوه مستوي کې د قایمو مختصاتو په سېستم کې ښودل کېږي. کیدای شي د ټکو او تیتوالي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختیار کې راکړي.

الف: آیا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړیکه ښیي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکې د شتون په صورت کې دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

پیوستون او د پیوستون ضریب: پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحولین په یوه لورې بدلون کوي یعنې x او y دواړه په یوه کرښه لوی او یاهم کوچنی شي، چې پیوستون یې مستقیمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چېرې x لوی شي y کوچنی کېږي. او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پېژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوستون ډول، جهت او میزان د پیوستون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\overline{x}\,\overline{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کې $\sum xy$ د xونو او yګانو د ضرب د حاصل مجموع، $\overline{x}$ د xونو اوسط او $\overline{y}$ د yګانو اوسط دی، همداراز S_x د xونو معیاري انحراف او S_y د yګانو معیاري انحراف دی.

د ریګریشن کرښه: ریګریشن(تخمیني) د تابع د یوه متحول له قیمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکې افاده کوي، د ریګرېشن معادلې په نامه یادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طریقه حساب او همدارنګه د a او b ضریبونه د دغې طریقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \quad , \quad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

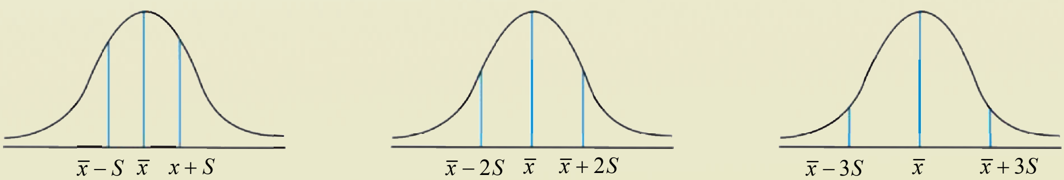
چې S_y د y معیاري انحراف او S_x د x معیاري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پیوستون ضریب، $\overline{x}$ د xونو اوسط او $\overline{y}$ د yګانو اوسط دی.

د خپرکي پوښتني

1- که چېرې په يوه ټولنه کې چې اوسط يې $\bar{x}=50$ او واريانس يې $S^2=64$ وي، د بدلون ضريب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2- که چېرې د هر زده کوونکی په نمرو کې 20% نمبرې ورزياتې شي، نو د نمرو د بدلون په ضريب څه اغيزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فيصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، وليکئ؟



4- لاندې اړيکو ته په پاملرنې سره ووایاست چې کومه يوه له دغو اړيکو څخه يو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړيکې دي.

الف: ستاسو د ټولګيوالو د ونو اندازه؟

ب: د يو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړيکه؟

ج: د يوې استوانې د حجم، جګوالی او د قاعدې د مساحت تر منځ اړيکې؟

5- د يو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زده کوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخېستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړيکو له مخې ګراف رسم او خپلې پايلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونيسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پيوستون ضريب حساب کړئ؟

که چېرې د پيوستون ضريب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

که چېرې د پيوستون ضريب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وايئ؟

د سروې له مخې چې د يوه ښوونځي په دوو A او B ټولګيو کې شوې ده، لاندې عددونه د کيلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پورتنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د معلوماتو د تیتوالي ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندي مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چېرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ریګرېشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون 20% د آزمونې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د ریاضي نمبرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزیک نمبرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د ریاضي نمبرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزیک نمبرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ریګریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتې کېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د یون پلازما میزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پورتنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

ـ په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

ـ یو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښیي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

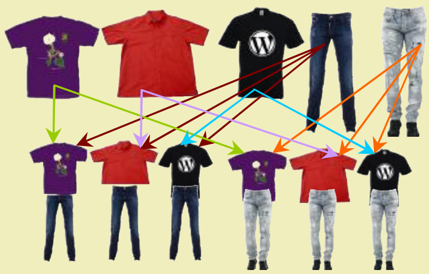
نهم څپرکی

احتمالات

پرموټېشن یا ترتیب

Permutation

که چېرې درې بېلابېل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، پـه څـو ډولـه کـولای شـو هغـه سـره جـوړه جـوړه واغوندو؟



فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمويئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څـو درې رقمـي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
- د پورتنی فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایي چې څه اړیکې سره لري؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ ...\ \ 2\cdot1$ سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ ...\ \cdot n}_{n \text{ ځلې}}=n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عـدد لپاره د $(1\cdot2\cdot3\cdot\ ...\ \cdot n)$ حاصـل ضـرب پـه لنـډ ډول پـه $n!$ (n – فکتوریـل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامـه هـم یـادېږي په P_n سره ښودل کېږي.که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نېولو سره $P_n=n!$ سره کېږي.

که چېرې په ترتیب کې تکرار شونی او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له. $P_n^{(k)}=\dfrac{n!}{k!}\quad,\quad(k\le n)$ او دارنګه معنا ورکوي چې یو عنصر په n ترتیب کې k ځلی تکرار شوي دي.

لومړی مثال: (1) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!,8!,5!$$

(2) د هر یوه طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n!=n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعریف له مخې لرو چې:

$$3!=1\cdot2\cdot3=6$$
$$5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$$
$$8!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\ \cdot n=(1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\ \cdot n-1)(n)=n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سوېې آزموینې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېنې چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب !16 دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربږي، نو په دې صورت کې لرو چې:

$$P_n^k=\frac{n!}{k!}\quad,\quad(k\le n)$$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)}=\frac{16!}{(16-4)!}=\frac{16!}{12!}=13\cdot14\cdot15\cdot16=43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1,k_2,\ \ldots\ ,k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!,k_2!\cdot\ \ldots\ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1,k_2,\ \ldots\ ,k_n)}=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot\ \ldots\ \cdot k_n!}$$

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهیږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دی له: $P_3^{(2,3)} = \dfrac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 میني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او میني بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهیږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د میني بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساوي دي په: $5\times 3 = 15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

دامکاناتو ډولونه	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$
	د لومړي رقم ځای	د دویم رقم ځای	د دریم رقم ځای

پوهیږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کیږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot 3\cdot 2 = 24$ او د فورمول له مخې لرو چې:

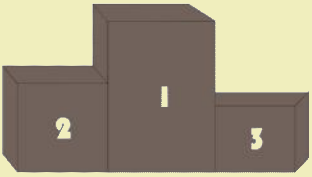
$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1!}{1!} = 24$$

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هيڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه ګردي ميز په شاوخوا کې کښيني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کېني.
3. په څو ډول کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زيړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. د هم رنګه تو پونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځاي بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه توپیر سره لري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n \quad , \quad k,n \in IN$$

فعالیت

- د پورتني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$، $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\boxed{}a^2+\boxed{}ab+\boxed{}b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ له $k=0,1,2$ قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنگه چې $1=\binom{2}{0}=\binom{2}{2}$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n \in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$، $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0 \le k \le n$ سره دی لرو:

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \qquad \text{(i)}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \qquad \text{(ii)}$$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو، نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!}=\dfrac{7!}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

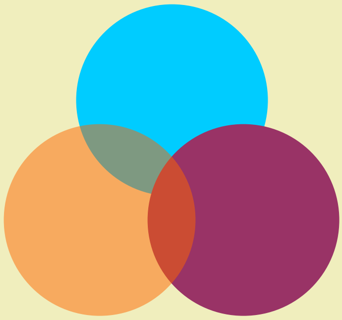
پوښتنې

1- له اوو حرفونو څخه لکه: F, E, D, C, B, A او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه‌وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

ترکیب
Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26!}{26!\cdot 4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^{5}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=10$$

پوښتنې

1- که چېرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چېرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

تبـدیـل

Variation

په یوه المپیاکې له 10 ورزشـي ټیمونـو څخه پـه څـو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شـتون لري؟

فعالیت

- د n بېلابېلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمېر شیان ټاکو،د هغوی مجموعې شمېر څو دی؟
- که چېرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شـتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دوارو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

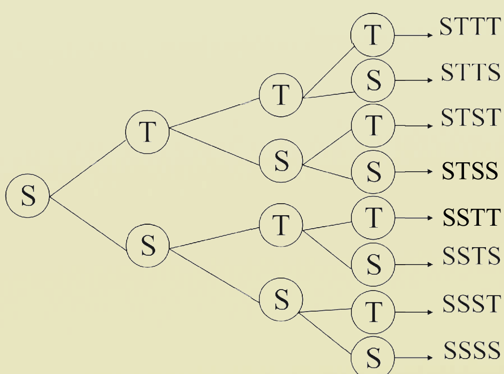
حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریـف لـه مخې لـه لانـدې فورمول څخه په لاس راځي:

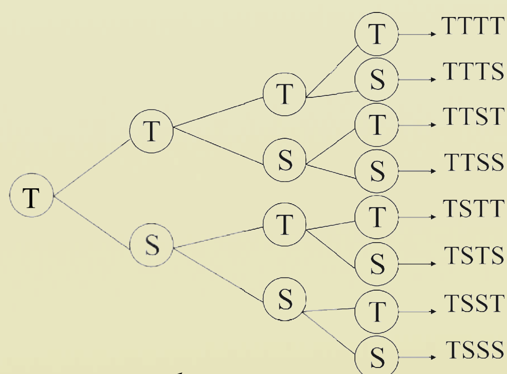
$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جـدول کې را ټول شوي دي.

د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمېر	
	له تکرار سره $k \le n$	پرته له تکرار $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k)=\dfrac{n!}{k!}$	$P(n,k)=n! \quad , \quad n=k$
ترکیب یا کمبینیشن	$C_k^n=\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$	$C_k^n=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n=n^k$	$V_k^n=k!\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\dfrac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغور ځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $=S$ او خط $=T$) دی.



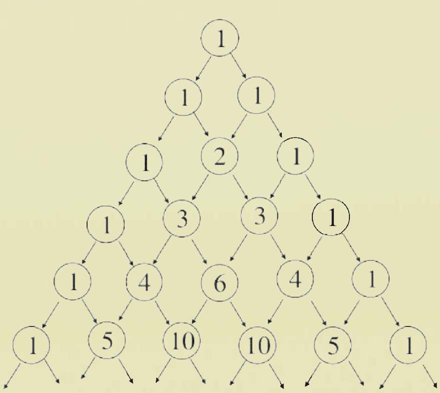


د پاسني مثال د شېر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سکې غورځول	هیڅ ځل		یوځل		دوه ځله		درې ځله		څلورځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط د راتګ شمېر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
					2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
							3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$
									4	$\frac{1}{16}$

که چېرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بېنهایت پورې دوام ورکړو، چې که چېرې هغوی د یو دوه جمله‌یي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جمله‌یې په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده یو شان ده:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3$$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

چې دغه ضریبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په $k-$ امه مرتبه کې عبارت دي له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په یوه سیالۍ کې 12 ټیمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.
2. د یووالسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستیال په توګه وټاکو.

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2 b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3 b + \bigcirc a^2 b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

فعالیت

- په یوه ناخاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناخاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، یعنې د $\{A,\overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A)=P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی
  $P(\overline{A})=?$
- د پورتنۍ تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n=2$ لپاره بشپړ کړئ.

k	ممکنې پایلې	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$
		$(p+(1-p))^2$	$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=?$

د $B(n,p,k)$ لیکنه د برنولي د مسالې د احتمال په نامه یادېږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړې یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بینوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌یي فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زوکړې ورځ د سوال وړ ده نه د زرکړې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌یي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

د A حارثه $\qquad |\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چېرې د A ناڅاپي پېښه چې لږ ترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=\binom{365}{k}=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-\binom{365}{k}=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$

پوښتني

وښیئ چې:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (II)$$

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناڅاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو. موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا Ω کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړي.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناڅاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څنګه کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډېر غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چېرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چېرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمېر له n ځلې $(0 \le k \le n)$ وړل او نور يې بايلل دي و، د k ځلې برياليتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

– که چېرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.

– که چېرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$ = k، – ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چېرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$ ، د بایللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناڅاپي پېښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابیږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې لـه هغې جملې څخه k ځلې یـې وړل وي، یـوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیږئ؟

دویم مثال: په یوه کورنۍ کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې لـه اولادونـو څخه 2 تنـه هلکـان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چېرې د اولادونو د هلك او نجلۍ زوکړې چانس برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

ځرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$0.3125=31.25\% = \frac{5}{16} = \frac{10}{2^5} = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} =$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځیدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لوړ وي؟

حل: که چېرې له 3 څخه لوړ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لوړ وي) $=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلـو احتمـال یـې مـساوي پـه $\frac{1}{3}$ وي، کـه چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چېرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمـال یـې p پـه پـام کې ونیـسو، نـو د خـط د نـه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې ځخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې} \\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شېږ راشي.}\end{array} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}_{\text{3ځلې شېږ}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{1 ځل خط}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{4}}_{\text{4 ځلې شېږ}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 ځخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

د هر n ځلې شیر راتګ احتمال $-1=$ دی لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^{n}}=1-\frac{1}{2^{n}}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^{n}}>0.99$ یا $\frac{1}{2^{n}}<0.01$ سره دی چې $2^{n}>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 ځخه لوی وي.

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړې چې:

(i: په 4 ځله غورځیدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii: په 6 ځله غورځیدو کې، 3 ځلې خط راشي

(iii: په 8 ځله غور ځیدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv: فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

د څپرکي مهم ټکي

فکتوریل: د هر n طبیعي عدد لپاره د $n \cdot \ ...\ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ د ضرب حاصل په لنډ ډول په $n!$ (n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0! = 1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دی په:

$$P_k^n = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

$\binom{n}{k}$,n د k **له پاسه**: د $\binom{n}{k}$,n د k له پاسه، د بېنوم هغه ضریبونه دي چې k د بېنوم د توان په ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ ، \ n,k \in IN \ ، \ 0 \le k \le n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad ، \quad r \le n$$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غړو څخه مطلوب وي، په نامه دې، n په k تبدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبېنوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملهیي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q = 1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې ورلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل ګڼل کېږي؛یعنې p $q = 1-p$ سره دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{د k ځلې ورلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې} \end{array} \right\rangle = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ ، \ 0 \le k \le n$$

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ درېدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او حبیب کولای شي، په یو کتار کي خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخېستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟