



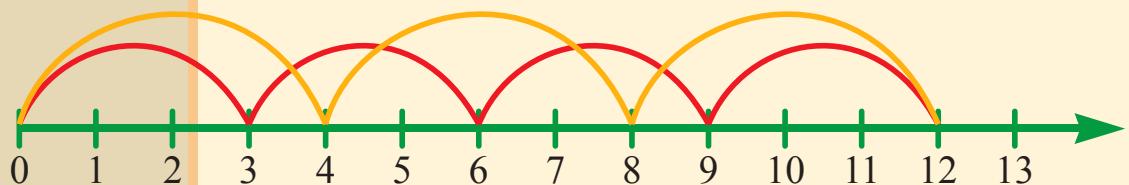
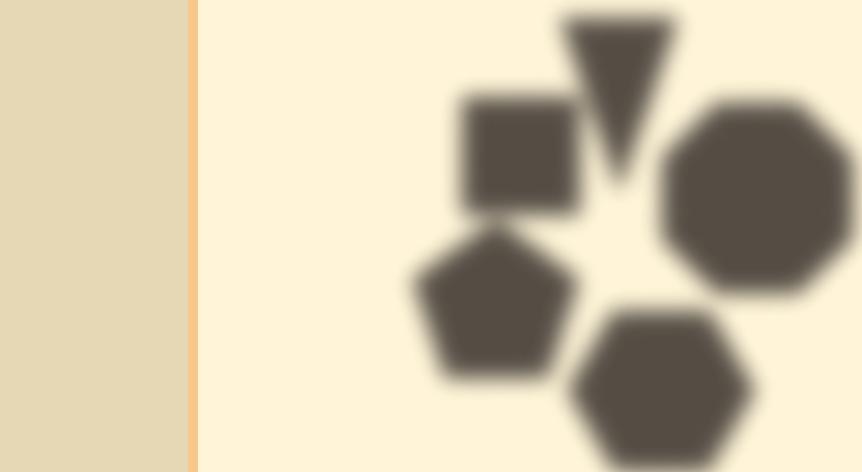
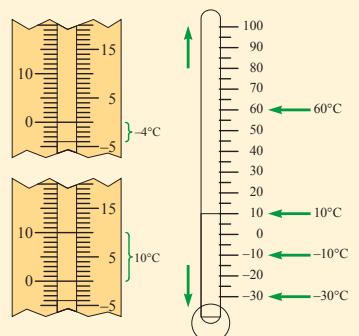
وزارت معارف

معنیت نصاب تعلیمی و تربیه معلم
ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی
و تالیف کتب درسی

ریاضی

صف ۷

[برای مدارس دینی]



۱۳۹۸ ه.ش

کتب درسی مربوط وزارت معارف بوده، خرید و فروش آن
ممکن است.

curriculum@moe.gov.af

ریاضی

صف ۷

(برای مدارس دینی)

۱۳۹۸
ه. ش.

مؤلفان

- پوهنیار عبیدالله صافی متخصص ریاضیات ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی

ایدیتوران علمی

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی
- سرمهلک عبدالکریم عضو علمی دیپارتمان ریاضیات

ایدیتور زبان

- سید محمود خلیق

کمیتهٔ دینی، سیاسی و فرهنگی

- حبیب الله راحل مشاور وزیر در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تأليف کتب درسی
- محمد آصف کوچی آمر دیپارتمان تعلیمات اسلامی

إشراف

- دکتور شیر علی طریفی رئیس پروژه انکشاف نصاب تعلیمی



سروود ملي



دا عزت د هر افغان دی	دا وطن افغانستان دی
هر بچي يې قهرمان دی	کور د سولې کور د توري
د بلوڅو د ازبکو	دا وطن د ټولو کور دی
د ترکمنو د تاجکو	د پښتون او هزاره وو
پامیریان، نورستانیان	ورسره عرب، گوجر دی
هم ايماق، هم پشه ٻان	براهوي دی، قزلباش دی
لکه لمړ پر شنه اسمان	دا هیواد به ټل څلپري
لکه زړه وي جاویدان	په سينه کې د اسيابه
وايو الله اکبر وايو الله اکبر	نوم د حق مو دي رهبر

پیام وزیر معارف

الحمد لله رب العالمين والصلوة والسلام على رسوله محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين،
أما بعد:

نصاب تعليمی معارف اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعه علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد.

نصاب تعليمی با گذشت زمان و تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زندگی، مطابق بانیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضه معلومات، تطور و انکشاف نماید.

یکی از عرصه های نصاب تعليمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعليمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین میان اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زندگی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.

علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنامندی سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصاً انکشاف تدریجی نصاب تعليمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفاء کرده اند.

مطالعه دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان می دهد که نصاب تعليمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پا بر جای دین اسلام، که برای همه انسانها در همه زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است.

کشور عزیز ما افغانستان با سابقه درخشنان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی مانند عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه وغیره، گواه

واضح آنچه گفته شد می باشد.

همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند.

وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت ورسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعه کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.

درین راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصین با تجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی، را با شرح و توضیح مton، جا بجا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت.

امیدوارم این تلاش‌های قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده و سبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفيق

**دکتور محمد میرویس بلخی
وزیر معارف**

استادان عالیقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است که قوانین طبیعت را فورمول بندی می کند و مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارائه می نماید.

انسان ها در زنده گی روز مرہ به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکاء و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.

برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری داشته باشند، مسائل روزمره زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل مانند میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی اکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.

به گونه که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسائل ضروری این علم را با درنظرداشت به فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تالیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند بروند و رول مؤثر و مثمر را در جامعه ایفا نمایند.

والله ولی التوفيق

● فصل اول(ست)

۳	مفهوم ست.....
۷	طرق نوشتن یک ست.....
۹	ست های مساوی، ست های معادل و ست فرعی.....
۱۱	تقاطع و اتحاد ست.....
۱۳	تفاضل دو ست و مکلمه یک ست.....
۱۵	خلاص و تمرین فصل اول.....

● فصل دوم(اعداد طبیعی)

۱۹	خاصیت های عملیه های اعدادی طبیعی.....
۲۱	تجزیه اعداد طبیعی.....
۲۵	طاقت.....
۲۷	خاصیت عملیه های طاقت.....
۲۹	بزرگترین قاسم مشترک و دریافت آن توسط تجزیه.....
۳۱	کوچکترین مضرب مشترک
۳۳	دریافت کوچکترین مضرب مشترک توسط تجزیه و موارد استعمال آن در حل مسائل روزمره زنده گی
۳۵	رابطه بین، کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک دو عدد.....
۳۷	مربع و جذر مربع تام اعداد طبیعی، دریافت جذر مربع توسط تجزیه و طریق عمومی
۳۹	جذر مکعب تام اعداد طبیعی.....
۴۱	خلاصه و تمرین فصل دوم.....

● فصل سوم(اعداد تام)

۴۷	اعداد تام و نمایش اعداد تام روی محور اعداد.....
۴۹	قیمت مطلقه یک عدد تام و عملیه های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد تام
۶۳	دریافت قیمت افاده های حسابی.....
۶۵	خلاصه و تمرین فصل سوم.....

● فصل چهارم: اعداد نسبتی

۶۹	نمایش اعداد نسبتی روی محور اعداد.....
۷۱	مقایسه اعداد نسبتی.....
۷۳	عملیه های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد نسبتی.....

فهرست

صفحه

77.....	تبديل اعداد نسبتی به اعداد اعشاری
79.....	خلاصه و تمرین فصل چهارم
● فصل پنجم (مثلث ها از حیث اضلاع و زوايا)	
83.....	میانه، ارتفاع و ناصف الزوایه مثلث
87.....	زاویه خارجی یک مثلث و مجموع زوایایی داخلی مثلث
89.....	چند ضلعی ها (محلع ها)
91.....	مجموع زوایه های داخلی یک محلع
93.....	مجموع زوایه های خارجی یک محلع
95.....	اشکال انطباق پذیر
97.....	حالات انطباق پذیری مثلث ها
101.....	خلاصه و تمرین فصل پنجم
● فصل ششم (خطوط موازی و عمود)	
109.....	زوایایی متبادله داخلی و خارجی
111.....	بررسی موازات دو خط در صورتی که زوایای متبادله با هم مساوی باشند
113.....	زوایایی متوافقه
115.....	زوایایی متممه داخلی یک طرف خط قاطع
117.....	چهار ضلعی ها (متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع، معین و ذوزنقه)
119.....	زوایایی مقابل متوازی الاضلاع
121.....	زوایایی خارجی یک چهار ضلعی
123.....	خاصیت های قطر های چهار ضلعی
125.....	خاصیت های قطر های مستطیل
127.....	خاصیت های قطر های معین (لوزی)
129.....	خلاصه و تمرین فصل ششم

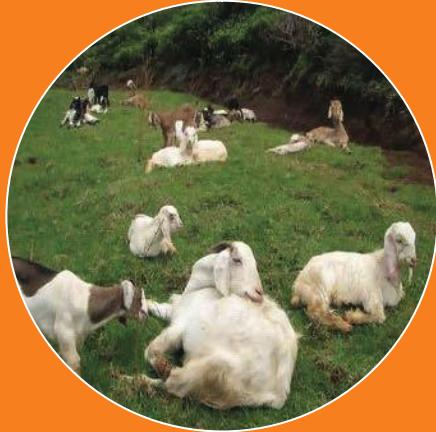
فصل اول

ست





مفهوم ست (Concept of a Set)



می توانید بگویید که بز در سet عناصر یک ست را بین علامه { } می نویسند.

عنصر ست توسط علامه (،) از یک دیگر جدا می شوند ست ها توسط حروف کلان و عنصر آن توسط حروف کوچک نشان داده می شوند. به طور مثال $A = \{e, f, g\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ وغیره. طوری که حرف e در سet A شامل می باشد، این طور نوشته

می شود. اما حرف h در سet A شامل نمی باشد؛ پس می نویسیم که: $h \notin A$ ستی که عناصر آن قابل شمارش باشد به نام ست متناهی و ست که عناصر آن قابل شمارش نباشد به نام ست غیر متناهی یاد می شود طور مثال:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ یک ست متناهی اما ست $IN = \{1, 2, 3, \dots\}$ یک ست غیر متناهی می باشد.

مثال اول: در ست های داده شده یی زیر کدام ست متناهی و کدام یک آن ست غیر متناهی می باشد؟

$$A = \{\text{مضرب های عدد 6}\} , \quad B = \{\text{حروف زبان انگلیسی}\}$$

حل: سet A یک ست متناهی می باشد؛ زیرا 26 عنصر دارد؛ اما سet B یک ست نامتناهی می باشد؛ زیرا مضرب های عدد 6 را شمرده نمی توانیم.

ست که هیچ عنصر نداشته باشد بنام ست خالی یاد می شود و توسط علامتی \emptyset و یا $\{\}$ نشان داده می شود.

ست ها را می توانیم توسط اشکال مختلف نشان دهیم که بنام **دیاگرام وین** یاد می شوند.
طور مثال اگر A ست شاگردان صنف هفتم و B ست شاگردان صنف هفتم که در تیم والیبال
و C شاگردان صنف هفتم که در تیم فوتبال شامل باشند، می توانیم ست های A, B, C را در اشکال زیر نشان دهیم.



فعالیت

- ستی را بنویسید که عناصر آن لوازم و سامان یک بکس هندسی باشند.
- یک ست 5 عنصری را بنویسید که عناصر آن نام حیوانات اهلی باشند.
- ست 6 عنصری را بنویسید که عناصر آن نام میوه های تازه باشند.

مثال دوم: اگر ست اعداد طاقتی را که از 10 کوچکتر باشد O و ست اعداد جفتی را که از 10 کوچکتر باشد E بنامیم، در این صورت داریم که:
 $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $E = \{2, 4, 6, 8\}$

هر دسته مشخص شده از اشیا را یک ست و اشیای آن را به نام عناصر ست یاد می کنند.

فعالیت

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

ست های زیر را در نظر بگیرید:

- آیا B عنصر است B می باشد؟ در مورد عضویت d در ست B چه می گوید؟
 - آیا 5 عنصر است A است؟ آیا 5 عنصر است B است؟
 - ست A چند عنصر دارد؟ وست B چند عنصر دارد؟

سوم: ستهای A و B را در نظر می‌گیریم طوری که:

$$A = \{ \text{اعداد حفت بک رقیب} \}$$

{اعداد یک رقمی که بر ۳ قابلیت تقسیم دارند} = B

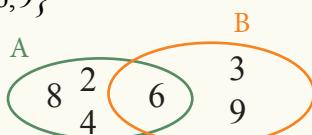
- عناصر ست های A و B را بنویسید.

- ستهای A و B را با دیاگرام وین نشان دهید.

حل: مشاهده می شود که:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$



$2 \in A$	$3 \in B$
$4 \in A$	$9 \in B$
$8 \in A$	$6 \in B$
$6 \in A$	$4 \notin B$

مثال چهارم: درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را تعیین کنید.

$$f \in \{a, b, c, d, e\} \quad (b)$$



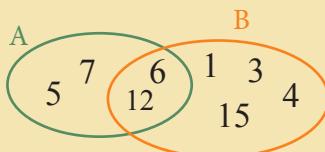
حل: a درست است؛ اما b درست نیست.

(شامل بودن یک عنصر در یک سمت با علامت (\in) و عنصر نبودن در یک سمت با علامتی می‌شود.)

تمرین

1- ستی را بنویسید که عناصر آن نام های ولایات افغانستان باشد.

2- اگر ست A و B قرار زیر داده شده باشند.
خانه خالی های زیر را پر کنید.



$$5 \in \boxed{}$$

$$6 \boxed{} B$$

$$12 \boxed{} A$$

$$7 \notin \boxed{}$$

$$3 \notin \boxed{}$$

$$4 \boxed{} A$$

3- اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ باشند کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$5 \in A \quad , \quad 4 \in A \quad , \quad 7 \notin A \quad , \quad 9 \in B \quad , \quad 8 \notin B$$

$$10 \in A \quad , \quad 11 \in B \quad , \quad 1 \notin A \quad , \quad 2 \in A \quad , \quad 3 \notin B$$

4- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$ باشند، کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$4 \in A \quad 5 \in B \quad 5 \in A \quad 6 \notin A$$

$$3 \in A \quad 2 \in B \quad 2 \notin A \quad 6 \in A$$

5- درستی و نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید:

$$8 \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 13\} \quad , \quad 5 \notin \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$10 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad , \quad g \notin \{a, b, c, d, e\}$$

طرق نوشتن یک ست

$$A = \{ \text{}, \text{}, \text{} \}$$

آیا می توانید بگویید که یک ست را به چند طریقه نشان داده می توانیم؟

$$B = \{ \text{کلمه}, \text{نماز}, \text{روزه}, \text{زکات}, \text{حج} \}$$

$$C = \{ \text{پنج بنای اسلام} \}$$

به طور عموم ست را به دو طریقه می نویسند:

1- طریقه‌یی است که تمام عناصر یک ست و یا تصاویر عناصر در بین علامت ست {} میباشد طوری که در بین عناصر علامت (,) نوشته می شود. این طریقه را بنام روش تفصیلی یا طریقہ لست کردن عناصر (Tabulation Method) می نامند.

مثال اول: $B = \{ \text{}, \text{}, \text{}, \text{}, \text{}, \text{}, \text{} \}$ ، $A = \{ \text{}, \text{}, \text{} \}$ احمد، حسن، قاسم، زلیمی، محمود

$E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 500\}$ و $D = \{a, b, c, d, e\}$ ، $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چون عناصر ست E زیاد می باشد، بدین سبب سه نقطه (...) این مفهوم را دارد که اعداد الی 500 دوام دارند.

2- ست را به اساس خاصیت‌های مشترک عناصر در یک جمله مشخص می کنند. در این طریقه، نوشتن علامت {} ضروری نیست. این طریقه را به نام روش اجمالی یا طریقہ توصیفی (Description Method) یاد می کنند.

مثال دوم: ست B و ست E مثال اول را توسط طریقہ اجمالی طور زیر می نویسیم:
ست نام شاگردان تیم والیبال صنف 7

ست 500 اعداد طبیعی پی هم که با 1 شروع می شوند = E

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$
 را به شکل زیر نشان می دهیم

ست اعداد اولیه = P

مثال سوم: اگر {کلمه طیبه، نماز، روزه، زکات، حج} = K باشد، ست K را توسط طریقہ اجمالی به شکل زیر نشان می دهیم.

ست پنج بنای اسلام = K

فعالیت

$A =$ ست 8 حرف اول زبان انگلیسی

$B =$ ست اعداد طبیعی کوچکتر از 10 و بزرگتر از 2

$C =$ ست مضرب های عدد 3 کمتر از 20

ست های A، B و C را توسط طریقه لست کردن عناصر بنویسید.

مثال چهارم: اگر $B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A = \{a, e, i, o, u\}$ باشد. این ست ها را به

طریقه روش اجمالی یا توصیفی بنویسید.

حل: ست حروف صدا دار زبان انگلیسی = A، ست پنج حرف اول زبان انگلیسی = B

تمرین

1- ست های زیر را به طریق لست کردن عناصر بنویسید.

$B =$ ست نام روزهای یک هفته

$A =$ ست نام ماههای یک سال

ست رنگ های بیرق افغانستان = E

2- ست های زیر را به طریقه توصیفی (تشریحی) بنویسید.

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{\text{سیاه، سرخ، سبز}\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$D = \{2, 4, 6, 8\}$

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3- ست های زیر را به طریقه لست کردن بنویسید.

$K =$ ست اعداد طبیعی جفت یک رقمی

$L =$ ست اعداد طبیعی طاق یک رقمی

$T = 7$ ست مضرب های عدد 7

$C = 7$ ست شاگردان تیم فتبال صنف 7

$B = 7$ ست شاگردان تیم والیبال صنف 7

$A =$ ست شاگردان صنف هفتم

ست های مساوی، ست های معادل و ست فرعی

$$A = \{\star, \text{rose}, \text{grapes}\}$$

$$B = \{\text{spider}, \text{ladybug}, \text{beetle}\}$$

$$C = \{\text{grapes}, \star, \text{rose}\}$$

آیا می توان گفت که ست های A و C در بین خود چه رابطه یی دارند و نیز در بین ست های A و B چه رابطه یی موجود است؟

تعریف: ست های A و B را، ست های مساوی می نامند هر گاه تعداد عناصر هر دو ست با هم مساوی و یکسان باشند، به عبارت دیگر تمام عناصر ست A در ست B و تمام عناصر ست B در ست A شامل باشند، در این صورت می نویسیم که $A = B$ و یا $B = A$ می باشد.

مثال اول: اگر $A = \{1, 2, 6\}$ و $B = \{1, 1, 2, 2, 6\}$ باشند متوجه باشید که: $A = B$ می باشد.

و نیز متوجه باید بود که $\{2, 3, 5, 7\} = \{5, 3, 2, 7\}$ می باشد. ست های $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ را در نظر بگیرید. این دو ست باهم مساوی نیستند؛ زیرا که $1 \in A$ ولی $1 \notin B$

فعالیت

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{5, 4, 7, 8\}$$

دو ست A و B را در نظر بگیرید:

• تعداد عناصر ست A و B چند است؟

• آیا a عنصر ست B است؟

• آیا ست A با ست B مساوی است؟ چرا؟

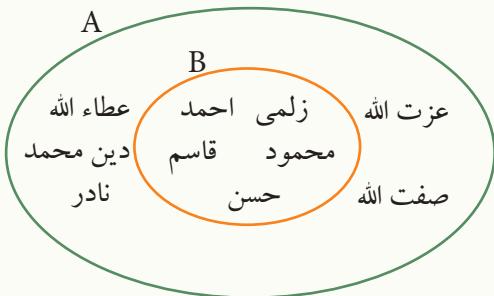
مثال دوم: اگر $\{\bullet, \blacktriangle, \blacksquare\} = B = \{8, 10, 12\}$ و $A = \{8, 10, 12\}$ باشند آیا دو ست A و B با هم معادل اند؟

حل: چون تعداد عناصر ست A سه و تعداد عناصر ست B نیز سه می باشند پس ست های A و B باهم معادل اند.

ست های A و B که تعداد عناصر شان مساوی و عناصر شان یکسان باشند؛ به نام ست های مساوی و اگر صرف تعداد عناصر شان با هم مساوی باشند به نام ست های معادل یا (Equivalent Sets) یاد می شوند.

ست فرعی: اگر تمام عناصر ست B در ست A شامل باشند ست B یک ست فرعی است
می باشد که این طور نشان داده می شود: $B \subset A$

فعالیت



ست شاگردان صنف 7 و B ست شاگردان تیم
والیال صنف 7 می باشد.

- با توجه به شکل عناصر ست های A و B را بنویسید.

- بین عناصر ست A و B چه قسم رابطه بی وجود دارد؟ توضیح دهید.

دیده می شود که هر عنصر ست B عنصر ست A نیز می باشد، در این صورت می گوییم که

ست B یک ست فرعی ست A بوده که این طور نشان داده می شود: $B \subset A$
این \subseteq علامت ست فرعی می باشد. از طرف دیگر چون هر عنصر ست A در ست B موجود

نیست؛ پس ست A ، ست فرعی B نمی باشد و این طور نشان داده می شود: $A \not\subset B$

مثال سوم: ست های زیر را در نظر می گیریم:

$$A = \{\text{احمد}, \text{ محمود}, \text{ زهرا}, \text{ مریم}\}$$

$$B = \{\text{داود}, \text{ قاسم}, \text{ احمد}, \text{ مریم}\}$$

$$C = \{\text{مریم}, \text{ احمد}\}$$

پس می توان گفت که: $C \subset A$ ، $C \subset B$ ، $B \not\subset A$ ، $A \not\subset B$
و نیز می توان گفت که $A \subseteq B$ می باشد. یعنی هر ست، ست فرعی خودش می باشد. ست
خالی، ست فرعی هرست می باشد.

تمرین

1- ست های $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{9, 8, 1, 7, 9\}$ را در نظر بگیرید:

- آیا ست A با ست B مساوی است؟

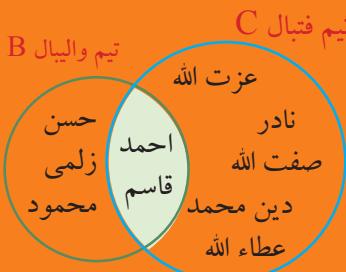
2- کدام یک از ست های زیر ست فرعی ست $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ می باشد؟

$$A = \{3, 5, 7\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

3- کدام یک از ست های زیر باست $C = \{1, 2, 3, 4\}$ مساوی می باشد؟

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{4, 3, 2, 1\}$$

تقاطع و اتحاد ست ها



اگر $\{3,4,5\}$ و $A = \{1,2,3\}$ باشد
آیا $B = \{1,2,3\}$ و $A \cup B$ را دریافت کرده
می توانید؟

طوری که در شکل فوق دیده می شود احمد و قاسم در هر دو تیم والیبال و فتبال اشتراک دارند. تقاطع دو ست B و C عبارت از ستی است که عناصر آن احمد و قاسم بوده طور زیر نشان داده می شود.

$$B \cap C = \{\text{احمد، قاسم}\}$$

که \cap علامت تقاطع می باشد.

$$B \cap C = \{\text{احمد، قاسم، عزت الله، نادر، صفت الله، دین محمد، عطاء الله}\} \cap \{\text{حسن، زلمنی، محمود، احمد، قاسم}\} = \{\text{احمد، قاسم}\}$$

تقاطع دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن هم در A و هم در B شامل باشند.
تقاطع هر ست A با خودش مساوی به خود A است.

مثال اول: هر گاه سنت های $\{3, 5, 8, 10\}$ و $A = \{4, 5, 6, 8, 10\}$ داده شده باشند، $B = \{3, 5, 8, 10\}$ و $A \cap B$ را دریابید.

$$\text{حل: } A \cap B = \{4, 5, 6, 8, 10\} \cap \{3, 5, 8, 10\} = \{5, 8\}$$

$$B \cap A = \{3, 5, 8, 10\} \cap \{4, 5, 6, 8, 10\} = \{5, 8\}$$

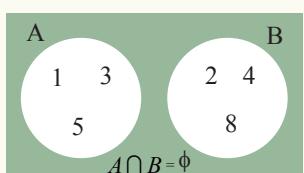
در نتیجه می توان گفت که:
طوری که در شکل نیز مشاهده می شود.

مثال دوم: دو ست A و B را قرار زیر درنظر بگیرید.

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{2, 4, 8\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 8\} = \emptyset$$

دیده می شود که:



این قسم سنت هایی را که هیچ عنصر مشترک ندارند به نام سنت های غیرمشترک (Disjoint Sets) می نامند.

تقاطع دو ست A و B در صورتی که تمام عناصر A در B

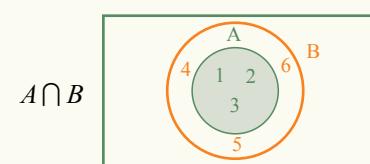
شامل باشند، با ست A برابر است.

مثال سوم: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ باشد $A \cap B$ را دریابید.

حل: همان‌طور که در دیاگرام مقابل نیز نشان داده شده است.

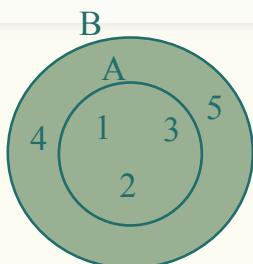
$$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3\} = A$$



اتحاد ست‌ها: اتحاد دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن یا در A و یا در B شامل باشند. و این \cup علامه اتحاد می‌باشد.

فعالیت

هرگاه ست‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$ داده شده باشند، $A \cup B$ و $B \cup A$ را به دست آورده و در دیاگرام وین نشان دهید.



مثال چهارم: اگر ست‌های $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ داده شده باشند، $A \cup B$ و $B \cup A$ را دریافت نموده و در شکل نشان دهید.

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

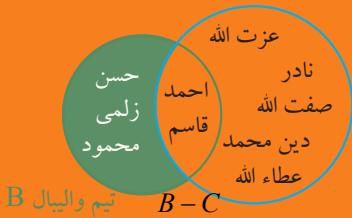
$$B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

تمرین

-1 اگر $A = \{1, 3, 5, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ باشد $A \cup B$ و $A \cap B$ را پیدا کنید.

-2 اگر $C = \{5, 7, 8, 9\}$ و $D = \{4, 5, 8, 10\}$ باشد $C \cup D$ و $C \cap D$ را پیدا کنید.

تفاضل دو ست و مکمله یک ست



اگر $B = \{5,8,9\}$ و $A = \{5,6,7,8,9\}$ باشد آیا $A - B$ او $B - A$ را دریافت کرده می توانید؟

در شکل فوق دیده می شود که $\{\text{محمود}, \text{زلمی}, \text{حسن}\}$ عبارت از ستی است که عناصر آن در A شامل؛ اما در B شامل نباشند. و $B - A$ عبارت از ستی است که عناصر آن در B شامل اما در A شامل نباشند.

مثال اول: اگر $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $B = \{2,3,4,8\}$ باشد $A - B$ و $B - A$ را دریابید.

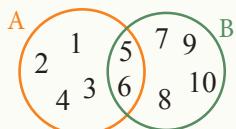
حل:

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{2,3,4,8\} = \{1,5,6\}$$

$$B - A = \{2,3,4,8\} - \{1,2,3,4,5,6\} = \{8\}$$

$A - B \neq B - A$ دیده می شود که

فعالیت



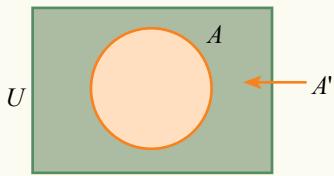
با در نظر داشت شکل:
• عناصر ست A و B را بنویسید.
• $B - A$ و $A - B$ را به دست آورده و در شکل نشان دهید.

$$\{a, b\} - \{b\} = \{a\}$$

$$\{x, y, z\} - \{a, b\} = \{x, y, z\}$$

$$\{a, b\} - \{a, b\} = \emptyset$$

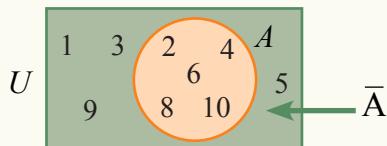
مثال دوم:



ست کلی و مکمله یک ست: مکمله ست A را به A' یا \bar{A} نشان داده و دارای عناصری می‌باشد که در ست عمومی U شامل بوده؛ اما در ست A شامل نمی‌باشند. قسمتی که سیز رنگ است عبارت از ست \bar{A} می‌باشد.

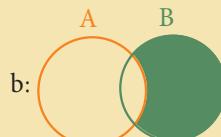
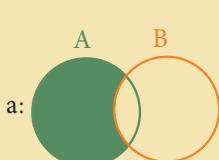
مثال سوم: اگر $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ باشد $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ و $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ مکمله A را نظر به U دریافت نموده و در شکل نشان دهید.
حل: برای به دست آوردن \bar{A} عناصر ست A را از ست U حذف می‌کنیم؛ عناصری که در ست U باقی می‌مانند \bar{A} یا مکمله A نظر به U می‌باشند.

$$\bar{A} = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$



تمرین

- ۱- اگر ست‌های $C = \{4, 6, 8\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ، $A = \{2, 4, 6, 8\}$ داده شده باشند.
 ۲- $C - A$ ، $A - C$ ، $B - B$ ، $B - A$ ، $A - B$ ، $A - A$ را دریابید.
 ۳- در کدام شکل قسمت رنگ شده ست $A - B$ را نشان می‌دهد؟



- ۴- اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ باشد B' را دریابید.

خلاصه فصل اول

- هر دسته مشخص شده از اشیای مختلف را یک ست نامیده و اشیاء آن عبارت از عناصر ست می باشند. عناصر ست را در بین علامت ست $\{ \}$ نوشتene و توسط علامت (\cdot) از یکدیگر جدا می سازند.
- ستی که عناصر آن قابل شمارش باشد ست متناهی و اگر عناصر یک ست قابل شمارش نباشد؛ ست نامتناهی نامیده می شود.
- ستی که هیچ عنصر ندارد به نام ست خالی یاد گردیده که توسط علامت \emptyset و یا $\{ \}$ نشان داده می شود.
- عنصر بودن در یک ست با علامت \in و عنصر نبودن در یک ست با علامت \notin نشان داده می شود.
- ست ها عموماً به دو طریق ارائه می شوند. طریق لست کردن(روش تفصیلی) که تمام عناصر و یا تصاویر آنها در بین علامت $\{ \}$ نوشتene می شوند و طریق توصیفی(روش اجمالی) که بر اساس خاصیت های مشترک عناصر، در یک جمله نگاشته می شوند.
- دو ست که عناصر آنها یکسان باشند ست های مساوی و اگر تنها تعداد عناصر آنها با هم مساوی باشند؛ آنها را به نام ست های معادل یاد می کنند.
- اگر تمام عناصر ست B در ست A شامل باشند، ست B ست فرعی ست A بوده و این طور نشان داده می شود: $B \subset A$
- تقاطع دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن هم در A و هم در B شامل باشند و این طور نشان داده می شود: $A \cap B$
- اتحاد دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن یا در A ، یا در B و یا در هر دوی آنها شامل باشند و این طور نشان داده می شوند: $A \cup B$
- تفاضل دو ست $B - A$ عبارت از ستی است که عناصر آن در ست A شامل بوده؛ ولی در ست B شامل نباشند.
- مکمله یک ست A نظر به یک ست U عبارت از ستی است که عناصر آن در U شامل بوده؛ ولی در A شامل نباشد و به \bar{A} نشان داده می شود.

تمرین فصل اول

1- ست اعداد طاق را که بر 2 پوره قابل تقسیم باشند بنویسید.

2- اگر A ست نام ماه های سال باشد، آن را به طریق لست کردن عناصر ارائه کنید.

3- اگر $C = \{a, e, i, o, u\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشند،

خانه های خالی را به علامت \in و \notin پر کنید.

$3 \square A$ ، $u \square B$ ، $10 \square C$ ، $i \square A$ ، $8 \square B$ ، $e \square C$

$8 \square A$ ، $3 \square B$ ، $f \square C$ ، $2 \square A$ ، $e \square B$ ، $8 \square C$

4- اگر ست های $C = \{b, a, c\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ ، $A = \{a, b, c\}$ داده شده باشند، کدام جفت از ست ها، مساوی و کدام آنها معادل اند؟

5- اگر ست شاگردان مکتب شما A و ست شاگردان صنف شما B باشد آیا ست

می تواند ست فرعی A باشد؟

6- اگر ست های $C = \{3, 4\}$ و $B = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ، $A = \{0, 1, 2\}$ داده شده باشند،

$B \cap C$ و $A \cup B$ ، $C \cup A$ ، $B \cup C$ ، $A \cap C$ ، $A \cap B$ ، $A \cap A$ را دریابید.

7- هرگاه $B - A = A - B$ باشد $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را دریابید.

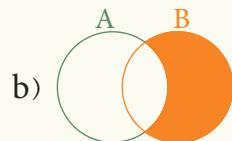
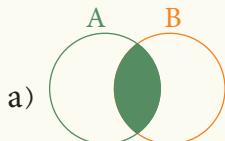
8- اگر $A = \{30, 50, 60\}$ ، $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$

و $\{10, 20, 40, 90\} = B'$ باشد. $A' = \{10, 20, 40, 90\}$ را دریابید.

9- کدام یک از این ست ها متناهی و کدام یک نامتناهی می باشد؟

$A = \{x, y, m\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $C = \{1, 2, \dots, 100\}$

10- در کدام شکل قسمت رنگ شده تقاطع دو ست A و B را نشان می دهد؟



11- اگر ست های $A = \{7, 9, 11, 13\}$ و $B = \{6, 8, 10, 12\}$ داده شده باشند،

و $B - A$ را دریابید و در دیاگرام وین نشان دهید.



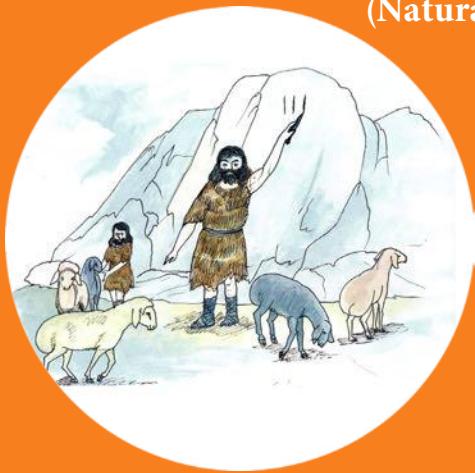
فصل دوم

اعداد طبیعی



بشر با شمارش اشیا در طبیعت اطراف خود از
ابتداً تاریخ آشنا بود.

اعداد طبیعی (Natural numbers)



چه فکر می کنید اولین اعدادی که
بشر به آنها سر و کار داشت کدام
اعداد بودند؟

انسان‌ها از زمان قدیم به شمارش اشیایی که در طبیعت مشاهده می کردند، ضرورت داشتند. از همین شمار کردن اشیا مفهوم اعداد طبیعی به وجود آمده است. اعداد طبیعی را اعداد شمارش (Count numbers) نیز می گویند. این اعداد از یک شروع و با علاوه نمودن یک به عدد قبلی عدد بعدی حاصل می گردد. اعداد ... 1, 2, 3, 4 ... را اعداد طبیعی می گویند. و سرت آن به طور زیر نشان داده می شود:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

اعداد طبیعی را می توان روی خط اعداد (line numbers) طور زیر نشان داد:



هر عدد که به طرف راست عدد دیگری واقع باشد بزرگتر و اگر به طرف چپ عدد واقع باشد کوچکتر از آن عدد می باشد. طور مثال: $8 > 5$ است.

خاصیت عملیه های جمع و ضرب اعداد طبیعی:

1- می دانیم که حاصل جمع دو عدد طبیعی نیز یک عدد طبیعی است؛ طور مثال: $3 + 5 = 8$ عدد طبیعی بوده و $8 = 3 + 5$ ، که 8 نیز یک عدد طبیعی است؛ پس سرت اعداد طبیعی در عملیه جمع دارای خاصیت بستگی می باشد.

2- خاصیت تبدیلی عملیه جمع:

مثال اول: میدانیم که $13 = 7 + 6$ و نیز $13 = 6 + 7$ بوده پس $7 + 6 = 6 + 7$ در عملیه جمع اعداد طبیعی خاصیت تبدیلی صدق می کند.

3- خاصیت اتحادی عملیه جمع:

مثال دوم:

$$8 + (3 + 2) = (8 + 3) + 2$$

$$8 + 5 = 11 + 2$$

$$13 = 13$$

این خاصیت را خاصیت اتحادی اعداد طبیعی در عملیه جمع می‌گویند.

۴- عنصر عینیت عملیه جمع:

صفر با هر عدد طبیعی که جمع شود، حاصل جمع مساوی به خود عدد می‌گردد. مثلاً:

$$3+0=0+3=3$$
 صفر را به نام عنصر عینیت عملیه جمع یاد می‌کنند.

فعالیت

- آیا خاصیت‌های فوق در عملیه ضرب اعداد طبیعی نیز صدق می‌کنند؟

۵- خاصیت تبدیلی در عملیه ضرب: $5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$

۶- خاصیت اتحادی در عملیه ضرب: $3 \times (8 \times 7) = (3 \times 8) \times 7 = 168$

۷- عنصر عینیت عملیه ضرب: حاصل ضرب هر عدد طبیعی با صفر مساوی به صفر و حاصل

ضرب هر عدد طبیعی با یک مساوی به خود عدد می‌باشد. مثلاً $3 \times 1 = 3$ ، $3 \times 0 = 0$.

عدد یک به نام عنصر عینیت عملیه ضرب یاد می‌شود.

۸- خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع:

مثال سوم: $27 = (3 \times 4) + (3 \times 5) = 3 \times (4 + 5)$

این خاصیت به نام خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع یاد می‌گردد.

صفر عنصر عینیت در عملیه جمع و یک عنصر عینیت در عملیه ضرب می‌باشدو خاصیت

های بستگی، تبدیلی و اتحادی در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد طبیعی و خاصیت توزیعی

ضرب بالای جمع صدق می‌کنند.

تمرین

خالیگاه‌های زیر را پر کنید.

$$211 + 327 = 327 + \square$$

$$325 \times 88 + 325 \times 73 = 325 \times (\square + \square)$$

$$3935 \times \square = 0$$

$$803 \times 593 = 593 \times \square$$

$$79 \times (35 \times 89) = (\square \times 35) \times 89$$

تجزیه(Factoring)



هرگاه در تقسیم دو عدد بر هم، باقی مانده صفر شود، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه قابلیت تقسیم دارد.
عدد 20 را به شکل حاصل ضرب دو عدد طبیعی بنویسید.

زیر اعدادی که تنها به عدد یک و خودشان قابل تقسیم‌اند خط بکشید:
21, 17, 15, 23, 32

می‌دانیم که $6 \times 4 = 24$ بوده و اعداد 4 و 6 را به نام اجزای ضربی (عوامل ضربی) 24 یاد می‌کنند.

سؤال: آیا تنها 6 و 4 اجزای ضربی 24 می‌باشند؟

فعالیت

- اعداد 18 و 31 را به اجزای ضربی تجزیه نموده بگویید که تعداد اجزای ضربی 18 زیادتر است یا از 31؟
- اجزای ضربی اعداد 5, 11 و 19 را بنویسید.

در فعالیت فوق دیدیم که برخی از اعداد مانند 18 بیشتر از دو جز ضربی دارند و برخی از اعداد مانند 11 و 31 تنها دو جز ضربی دارند.

اعداد اولیه (Prime Numbers): اعدادی‌اند که به جز از یک و خودشان بر عدد دیگری پوره قابل تقسیم نمی‌باشند. به عباره دیگر اعدادی که تنها دو قاسم داشته باشند، به نام اعداد اولیه یاد می‌شوند. ست اعداد اولیه به P نشان داده می‌شود و عبارت اند از: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$

اعداد مرکب (Composite Numbers): اعدادی که علاوه بر یک و خودشان بر اعداد دیگری نیز قابل تقسیم باشند به نام اعداد مرکب یاد می‌گردند. مانند:

$$C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots\}$$

یاد داشت: عدد یک، نه اولیه و نه مرکب است.

مثال اول: کدام یک از اعدادهای 27, 36 و 19 اولیه و کدام یک آن‌ها مرکب‌اند؟

حل: ابتدا قاسم‌های هر یک از اعداد را می‌نویسیم:

اعداد ۱, ۳, ۹, ۲۷، قاسم‌های ۲۷ می‌باشند. بنابراین ۲۷ عدد مرکب است.

اعداد ۱, ۱۷، قاسم‌های ۱۷ می‌باشند. بنابراین عدد ۱۷ عدد اولیه است.

اعداد ۳۶, ۱۸, ۱۲, ۹, ۶, ۴, ۳, ۲ و ۱ قاسم‌های عدد ۳۶ می‌باشند. بنابراین ۳۶ عدد مرکب است.

اعداد ۱, ۳, ۹، قاسم‌های ۹ می‌باشند. بنابراین ۹ عدد مرکب است.

اعداد ۱, ۱۹، قاسم‌های ۱۹ می‌باشند. بنابراین ۱۹ عدد اولیه است زیرا که تنها دو قاسم دارند.

تجزیه به اعداد اولیه: نوشتن یک عدد به صورت حاصل ضرب اجزای ضربی را تجزیه (Factoring) می‌گویند.

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \quad \text{و} \quad 12 = 3 \times 4$$

چه تفاوتی بین اجزای ضربی ۱۲ در ارائه‌های فوق وجود دارد؟

نوشتن اجزای ضربی اولیه یک عدد به شکل ضرب به نام تجزیه به اعداد اولیه یاد می‌شود.

مثال دوم: عدد ۷۲ را به اشکال مختلف اجزای ضربی آن تجزیه نمایید:

$$1) \quad 72 = 2 \times 36 = 2 \times 4 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$2) \quad 72 = 6 \times 12 = 2 \times 3 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$$

فعالیت



عدد ۷۲ را علاوه از دو شکل فوق به چند شکل دیگر تجزیه نموده میتوانید، طرز ارائه آن را نیز نشان دهید.

می‌توان عملیه تجزیه را در یک جدول به شکل زیر خلاصه کرد:

2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

از هر روشی که برای تجزیه یک عدد به اجزای اولیه ضربی اش استفاده کنیم در پایان همواره به یک نتیجه می‌رسیم.

مثال سوم: اعداد 208,416 و 2574 را به اجزای ضربی اولیه آنها تجزیه کنید.
حل:

2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

2	416
2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

2	2574
3	1287
3	429
11	143
13	13
	1

$$208 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13 \quad 416 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13 \quad 2574 = 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 13$$

میدانیم: در تجزیه یک عدد تجزیه پذیر (عدد مرکب) به اجزای ضربی اولیه، عدد را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک می‌توانیم بنویسیم. اگر یکی از اجزای ضربی یا هر دوی آنها تجزیه پذیر باشد، آنها را هم به صورت حاصل ضرب اعداد طبیعی بزرگتر از یک می‌نویسیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا اینکه همه اجزای ضربی اعداد اولیه باشند، اگر همه اجزای ضربی یک عدد مرکب، اعداد اولیه باشند، اینگونه تجزیه را تجزیه به اعداد اولیه می‌نامند.

تمرین

1- در مقابل اعدادی که اولیه‌اند، اولیه و در مقابل اعدادی که مرکب‌اند، مرکب بنویسید.

59	90	67
73	847	1111

2- در اعداد زیر کدام یک آنها، عدد مرکب نیست؟

- a) 90 b) 67 c) 39 d) 64

3- اعداد 36، 48 و 70 را به اجزای ضربی اولیه آن تجزیه کنید.

4- اعداد 12، 20، 45، 64 و 80 را به اجزای ضربی اولیه آن تجزیه کنید.

۵- اعداد ۷۰ و ۸۰ را اولاً به اجزای ضربی مرکب و بعد به اجزای ضربی اولیه آن تجزیه کنید.

۶- کدام یک از تجزیه اعداد زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$28 = 2^2 \times 9$$

$$16 = 2^4$$

$$15 = 5^3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

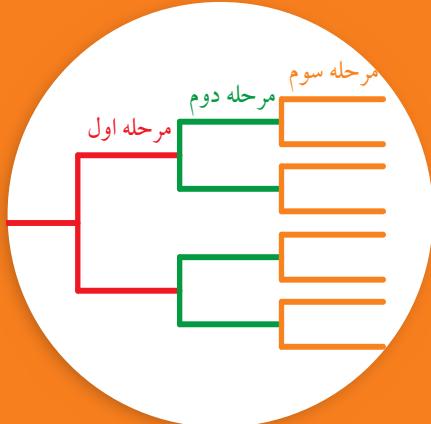
$$27 = 3 \times 9$$

$$16 = 2 \times 13$$

۷- تمام اجزای ضربی اولیه اعداد ۲۴, ۹, ۱۵ و ۲۹ را بنویسید.

۸- اعداد ۱۴۴ و ۱۲۱ را به اجزای ضربی اولیه آن تجزیه کنید.

طاقت (Power)



می‌دانیم که هر حجره چگونه به دو حجره تقسیم می‌شود. در شکل مقابل مراحل انقسام یک حجره مشاهده می‌شود.

فعالیت

مرحله	صفر	اول	دوم	سوم	چهارم
تعداد حجره‌ها	1	2	2×2	$2 \times 2 \times 2$	

- مرحله چهارم را بکشید و جدول را کامل کنید.
- بین تعداد حجرات و مراحل تقسیم آن‌ها چه رابطه وجود دارد؟
- در مرحله دهم چند عدد حجره خواهیم داشت؟
- آیا می‌توانیم تعداد حجرات را در مرحله دهم به شکل خلاصه بنویسیم؟

حاصل جمع مقابله کنم که عملیه ضرب خلاصه کنید:
 $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$
 $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$

آیا حاصل ضرب $2 \times 2 \times 2$ را نیز میتوان خلاصه کرد؟
 برای آسانی کار می‌توان $2 \times 2 \times 2$ را به شکل 2^3 نوشت و آنرا این طور می‌خوانیم، 2 به توان 3، در عدد 2^3 ، 2 را قاعده (Base)، 3 را توان نما (Exponent) و 2^3 را به نام طاقت سوم 2 یاد می‌کنند. توان نما نشان می‌دهد که قاعده چند دفعه در خودش ضرب شده است.
 $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ نشان می‌دهد که 4 سه دفعه در خودش ضرب گردیده است. یعنی:

مثال اول: قیمت هر یک از طاقت‌های زیر را دریابید:
 حل:

$$4^2 = 4 \times 4 = 16 \quad , \quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad , \quad 10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \quad , \quad 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625 \quad , \quad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

به همین ترتیب $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ به معنای $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ است که 4 قاعده و 4 توان نما می‌باشد.

فعالیت

- قیمت هر یک از طاقت های زیر را دریافت کنید:

$$3^2 = \square, 4^3 = \square, 10^3 = \square, 1^2 = \square, 2^5 = \square, 10^5 = \square$$

- حاصل ضرب های زیر را به شکل طاقت بنویسید:

$$4 \times 4 \times 4 = \qquad 9 \times 9 \times 9 \times 9 = \qquad 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 =$$

- آیا اعداد 2^7 و 7^2 باهم مساوی اند؟ چرا؟

مثال دوم: آیا اعداد $\frac{2^3}{3}$ و $(\frac{2}{3})^3$ برابرند؟
حل:

$$\frac{2^3}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

پس $\frac{2^3}{3}$ و $(\frac{2}{3})^3$ برابر نیستند. در نتیجه $\frac{8}{3} < \frac{8}{27}$ می باشد.

هرگاه یک عدد چندین مرتبه در خودش ضرب شده باشد در این صورت حاصل ضرب به طور ساده به شکل طاقت ارائه گردیده و یا کوتاه ترین طریقه نشان دادن حاصل ضرب تکرار یک عدد را طاقت (Power) می نامند.

تمرین

1- حاصل ضرب $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ مساوی است به:

- a) 2^5 b) 5^2 c) 25 d) 36

2- حاصل ضرب $10 \times 10 \times 10 \times 10$ مساوی است به:

- a) 10^3 b) 3^{10} c) 100 d) 10^{10}

3- عدد 3^3 مساوی است به:

- a) 9 b) 27 c) 54 d) 12

4- یک شاگرد عددی را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده که جواب آن $2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$ می باشد. این جواب را به شکل طاقت چه گونه میتوانیم بنویسیم؟

- a) $2^2 \times 5^3$ b) $2^3 \times 5^2$ c) $2^2 \times 5^2$ d) $2^3 \times 5^3$

5- اعداد 36 و 24 را به اجزای ضربی اولیه آن تجزیه نموده به شکل طاقت بنویسید.

6- اجزای ضربی اولیه عدد 208 به شکل طاقت مساوی است به:

- a) $2^4 \times 13$ b) $2^5 \times 13$

خاصیت های عملیه های طاقت

آیا حاصل ضرب $5^3 \times 5^2 = 5^5$ را به دست آورده می توانید؟

$$2^3 \times 2^4 = ?$$

$$3^2 \times 4^2 = ?$$

خاصیت اول: در ضرب طاقت هایی که دارای قاعده های مساوی و توان های مختلف باشند حاصل ضرب آنها مساوی به قاعده مشترک به توان مجموع توان های داده شده می باشد.

مثال اول: حاصل ضرب $2^5 \times 2^3$ و $3^4 \times 3^3 \times 3^2$ را به دست آورید.

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$$

خاصیت دوم: در ضرب طاقت هایی که توان های مساوی و قاعده های مختلف داشته باشند، قاعده ها را در هم ضرب نموده و به یکی از توان های مساوی می نویسیم:

$$\text{مثال دوم: } 2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5 \quad , \quad 3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5 = 12^5$$

خاصیت سوم: در صورتی که یک عدد توان دار به توان برسد با استفاده از قانون ضرب طاقت ها قاعده را به توان حاصل ضرب هر دو توان می نویسیم.

مثال سوم: $(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = 3^8$ یا $(3^4)^2 = (3)^{4 \times 2} = 3^8$

خاصیت چهارم: حاصل تقسیم طاقت هایی که دارای عین قاعده باشند، مساوی است به یکی از قاعده ها به توان عددی که از تفیریق توان های صورت و مخرج به دست می آید، به شرطی آن که قاعده صفر نباشد.

مثال چهارم: حاصل تقسیم $\frac{8^7}{8^5} = 8^{7-5} = 8^2 = 64$ را به دست آورید.

$$\frac{8^7}{8^5} = 8^{7-5} = 8^2 = 64 \quad \text{یا} \quad \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = 8 \cdot 8 = 8^2 = 64$$

حل:

خاصیت پنجم: در تقسیم طاقت هایی که توان های مساوی و قاعده های مختلف داشته باشند، قاعده صورت را بالای قاعده مخرج تقسیم نموده، نتیجه آن را به توان یکی از توان های مساوی می نویسیم.

مثال پنجم: حاصل تقسیم $\frac{6^5}{3^5}$ را به دست آورید.

$$\text{حل: } \frac{6^5}{3^5} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 = 32$$

فعالیت

خانه های خالی زیر را پر کنید:

$$\frac{8^4}{2^4} = \frac{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)^{\boxed{}} = (\boxed{})^{\boxed{}}$$

تمرین

1- حاصل ضربهای زیر را به شکل عدد توان دار بنویسید:

$$7^2 \times 7^3 \times 7^5, \quad 2^5 \times 3^5, \quad 3^4 \times 3^2$$

مساوی است به: $(4^2)^3$ -2

a) 4^6

b) 48

c) 24

d) 4^5

3- حاصل تقسیم زیر را به شکل عدد توان دار بنویسید.

$$\frac{8^6}{4^6}, \quad ,$$

$$\frac{7^4}{7^2}, \quad ,$$

$$\frac{9^6}{9^4}$$

مساوی است به: $\frac{2^4 \times 3^2}{4^2 \times 9}$ -4

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

بزرگترین قاسم مشترک یا بزرگترین فکتور مشترک Greatest common divisor(G.C.D) or Highest common factor (H.C.F)



طول، عرض و ارتفاع یک اتاق به ترتیب 910 سانتی متر، 780 سانتی متر و 390 سانتی متر می باشد. طویل ترین طول فیتۀ متري را دریابید تا ابعاد این اتاق توسط آن پوره اندازه شود.

قاسم (Divisor): اگر یک عدد طبیعی بالای عدد دیگری پوره تقسیم شود، عدد دوم را قاسم عدد اولی می گویند، طور مثال: 24 بر 8 پوره تقسیم می شود، یعنی $3 = 24 \div 8$ بوده، پس عدد 8 یک قاسم 24 می باشد.

به همین ترتیب عدد 5 یک قاسم 30 و عدد 3 یک قاسم عدد 102 می باشد.
مثال اول: ست قاسم های عدد 12 عبارت است از: $\{1,2,3,4,6,12\}$ = ست قاسم های 12
مثال دوم: ست قاسم های 16 و 40 را دریابید.

حل: ست قاسم های 16 عبارت است از:
 $\{1,2,4,8,16\}$
 و ست قاسم های 40 عبارت است از:
 $\{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

قاسم مشترک (Common divisor): اگر دو یا چندین عدد، بالای یک عدد، پوره قابل تقسیم باشند این عدد را قاسم مشترک اعداد متذکره می گویند.
مثال سوم: ست قاسم های مشترک اعداد 16، 24 و 40 را دریابید.

حل: $A = \{1,2,4,8,16\}$
 $B = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$
 $C = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$
 $40 = \{1,2,4,8,16\} \cap \{1,2,3,4,6,8,12,24\} \cap \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

دیده می شود که از جمله قاسم های مشترک، عدد 8 از همه قاسم های مشترک بزرگتر بوده بنابراین عدد 8 بزرگترین قاسم مشترک 16، 24 و 40 می باشد.

دریافت بزرگترین قاسم مشترک توسط تجزیه:
برای پیدا کردن بزرگترین قاسم مشترک توسط تجزیه مرحل زیر را انجام دهید:
1- اعداد داده شده را به اجزائی ضربی اولیه تجزیه نموده و آنها را به شکل طاقت

بنویسید.

۲- اجزای ضربی مشترک که کوچکترین توان را داشته باشند باهم ضرب می‌کنیم. حاصل ضرب اجزای انتخاب شده عبارت از بزرگترین قاسم مشترک اعداد داده شده می‌باشد.

مثال چهارم: بزرگترین قاسم مشترک اعداد ۲۰۸ و ۳۹۰ را دریابید.

حل:

2	390
3	195
5	65
13	13
	1

2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

$$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13$$

$$208 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13 = 2^4 \times 13$$

بنابراین بزرگترین قاسم مشترک ۳۹۰ و ۲۰۸ عبارت از $26 = 2 \times 13$ می‌باشد.

و یا در جدول زیر بزرگترین قاسم مشترک اعداد فوق را می‌توانیم چنین دریافت کنیم:

2	208	390
13	104	195
	8	15

فعالیت

بزرگترین عددی را دریابید که اعداد ۳۶، ۱۴۴ و ۲۵۲ بالای آن پوره تقسیم گردد.

تمرین

۱- قاسم‌های مشترک و بزرگترین قاسم مشترک این اعداد را دریابید.

a) ۲۴, ۳۲

b) ۲۵, ۴۰

c) ۵۰, ۵۲

d) ۷, ۱۶

۲- بزرگترین قاسم مشترک $7 \times 3 \times 7$ و $2^5 \times 3^2$ عبارت است از:

a) $2^5 \times 3^2 \times 7$

b) $2^3 \times 3$

c) $2^5 \times 3^2$

d) 2×3

۳- بزرگترین قاسم مشترک ۴۵ و ۵۶ مساوی است به:

a) ۴

b) ۶

c) هیچکدام

d) هیچکدام

۴- بزرگترین قاسم مشترک اعداد زیر را دریابید.

a) ۴۸, ۷۸

b) ۱۳, ۱۵

c) ۱۶, ۱۷, ۴۸

d) ۱۸, ۲۵, ۳۵

۵- توسط عمل تجزیه، اول اجزای ضربی اولیه و بعد از آن، بزرگترین قاسم مشترک اعداد داده شده زیر را دریابید.

a) ۴۰, ۱۶

b) ۱۸, ۴۲

c) ۲۷, ۸۴

d) ۳۶, ۶۰

کوچکترین مضرب مشترک (L.C.M)



محیط حلقهٔ تایر کوچک تراکتور 360 سانتی متر و محیط حلقهٔ تایر بزرگ آن 600 سانتی متر است. تراکتور حداقل چقدر فاصله را باید طی کند تا نقاط مشخص شده همزمان روی تایرها مجدداً باهم به زمین برسند؟

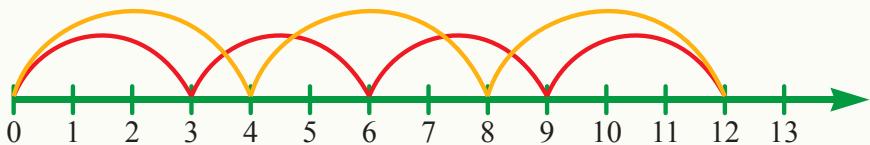
فعالیت

عدد 4 را در نظر بگیرید. این عدد را به ترتیب در 1, 2, 3, 4, 5, 6 ضرب کنید.
خصوصیت مشترک تمام این اعداد چیست؟
آیا اعداد دیگری را می‌توانید پیدا کنید که این خصوصیت را داشته باشند؟

در فعالیت فوق دیدیم که اعداد به دست آمده بر عدد 4 پوره تقسیم می‌شوند. این اعداد را به نام مضرب‌های عدد 4 می‌نامند. {4, 8, 12, 16, 20, ...} = ست مضرب‌های عدد 4

فعالیت

- در جدول زیر مضرب‌های اعداد 3 و 4 را دریابید. خانه‌های جدول را پر کنید.



\times	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
3	3	6	9										...
4	4	8											...

- در مضرب‌های 3 و 4 کدام اعداد مشترک‌اند؟
- در مضرب‌های مشترک کوچکترین مضرب مشترک 3 و 4 کدام عدد است؟

آیا تعداد مضرب‌های یک عدد طبیعی پایان دارند؟

مثال: کوچکترین مضرب مشترک اعداد 6، 8 و 12 را دریابید.

حل: $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\}$ = ست مضرب‌های عدد 6

$B = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\}$ = ست مضرب‌های عدد 8

$C = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$ = ست مضرب‌های عدد 12

$$(A \cap B) \cap C = \{24, 48, \dots\}$$

ست مضرب‌های مشترک 6، 8 و 12 عبارت از $\{24, 48, \dots\}$ می‌باشد. کوچکترین عنصر این

ست 24 است. بنابراین کوچکترین مضرب مشترک 6، 8 و 12 عبارت از 24 می‌باشد.

می‌توانیم کوچکترین مضرب مشترک اعداد 6، 8 و 12 را در یک جدول به طور خلاصه به شکل

زیر دریابیم:

2	6	8	12
2	3	4	6
3	3	2	3
	1	2	1

کوچکترین مضرب مشترک این اعداد عبارت از $24 = 2 \times 3 \times 2$ می‌باشد.

آموختیم که: در مضرب‌های مشترک دو یا چند عدد، کوچکترین عدد، کوچکترین مضرب مشترک اعداد داده شده می‌باشد.

تمرین

- 1- کوچکترین مضرب مشترک اعداد 18، 20 و 36 را دریابید.
- 2- کوچکترین عدد چهار رقمی را دریافت نماید که بالای 10، 17 و 85 پوره تقسیم گردد.
- 3- کوچکترین مضرب مشترک 6 و 9 مساوی است به:
a) 18 b) 54
- 4- کدام عدد مضرب 9 است?
a) 3 b) 27
- 5- اگر $11 \times 17 = 187$ باشد، کدام یک از بیانات زیر درست است?
(a) 187 مضرب 17 است. (b) 187 قاسم 17 است.
- 6- کدام یک از این اعداد مضرب مشترک 6 و 9 است?
a) 69 b) 72
- 7- کوچکترین مضرب مشترک اعداد 15، 9 و 4 را دریابید.

یافتن کوچکترین مضرب مشترک توسط تجزیه به اعداد اولیه و موارد استعمال آن



صفت الله بعد از هر 4 روز و عزت الله
بعد از هر 6 روز غرض خریداری اجناس
مورود ضرورت به مغازه شهر می‌روند.
اگر آنها به تاریخ 31 ماه سلطان در
غازه شهر با هم بیینند به کدام تاریخ ماه
اسد آنها بار دوم در مغازه شهر یکدیگر
را خواهند دید؟

برای پیدا کردن کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چند عدد از طریق تجزیه اجزای ضربی
اولیه مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- اعداد داده شده را به اجزای اولیه تجزیه نموده و به شکل طاقت
می‌نویسیم.

۲- آن عده اجزای اولیه ضربی مشترک که بلندترین توان را دارا باشند با اجزای غیر مشترک باهم
ضرب می‌نماییم. این حاصل ضرب عبارت از کوچکترین مضرب مشترک اعداد داده شده
می‌باشد.

مثال اول: کوچکترین مضرب مشترک 12 و 15 را توسط تجزیه به اعداد اولیه دریابید.
حل:

2	12
2	6
3	3
	1

3	15
5	5
	1

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$15 = 3 \times 5$$

کوچکترین مضرب مشترک 12 و 15 عبارت است از: $(2^2 \times 3 \times 5 = 60)$ می‌باشد.
می‌توانیم کوچکترین مضرب مشترک اعداد 12 و 15 را در یک جدول نیز دریابیم.

3	12	15
	4	5

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$

فعالیت

کوچکترین مضرب مشترک اعداد 108، 135 و 162 را توسط جدول دریابید.

موارد استعمال کوچکترین مضرب مشترک در حل مسائل روزمره زندگی:

مثال دوم: اگر زنگ اول هر 10 دقیقه بعد، زنگ دوم هر 15 دقیقه بعد، زنگ سوم هر 25 دقیقه بعد و زنگ چهارم هر 30 دقیقه بعد، به صدا درآید در صورتی که هر چهار زنگ در هر ده بجه روز هم زمان شروع به زنگ زدن نمایند معلوم نماید که بعد از چه مدتی آن ها دوباره هم زمان به زنگ زدن شروع می نمایند؟

حل:

$$10 = 5 \times 2$$

$$15 = 5 \times 3$$

$$25 = 5 \times 5$$

$$30 = 5 \times 3 \times 2$$

پس: کوچکترین مضرب مشترک اعداد 10, 15, 25 و 30 عبارت است از: $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$

و یا

$$2 \times 3 \times 5 \times 5 = 150$$

2	10	15	25	30
3	5	15	25	15
5	5	5	25	5
	1	1	5	1

در نتیجه 150 دقیقه (2 ساعت و 30 دقیقه) بعد هر چهار زنگ بار دوم همزمان به صدا در می آیند.

تمرین

- 1- کوچکترین عددی را دریابید که بر 64، 72، 96 و 192 قابل تقسیم باشند.
- 2- شاروالی در کنار سرک در هر 4 متر یک درخت را غرس نموده و در حالی که اداره برق در هر 22 متر پایه برق را نصب کرده است. اگر در شروع سرک پایه برق در کنار درخت قرار گرفته باشد، بعد از چند متر دوباره یک درخت در کنار پایه برق قرار می گیرد؟
- 3- نوریه هر سه روز بعد و ملالی هر پنج روز بعد به کتابخانه می رود. اگر هر دوی آنها به تاریخ 10 ثور به کتابخانه رفته باشند به کدام تاریخ ماه ثور آنها بار دوم در کتابخانه یکجا خواهند شد؟
- 4- کوچکترین مضرب مشترک اعداد 19، 20، 95 و 190 را دریابید.

رابطه بین کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک دو عدد

$b =$ بزرگترین قاسم مشترک اعداد a و G
 $b =$ بزرگترین قاسم مشترک اعداد a و L

$$L = \frac{a \times b}{G}$$

اگر بزرگترین قاسم مشترک دو عدد را داشته باشیم، می‌توانیم کوچکترین مضرب مشترک آنها را بدون تجزیه یا توسط سنت مضرب‌هایشان به دست آوریم.

فعالیت

- بزرگترین قاسم مشترک 25 و 15 را دریابید و آنرا G بنامید.
- کوچکترین مضرب مشترک این دو عدد را دریابید و آنرا L بنامید.
- حاصل ضرب دو عدد 25 و 15 را به دست آورده و آنرا با $L \times G$ مقایسه کنید آیا در بین این دو حاصل ضرب رابطه‌یی وجود دارد؟

اگر کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b را به L و بزرگترین قاسم مشترک این دو عدد را به G نشان دهیم، در این صورت: رابطه بین بزرگترین قاسم مشترک و کوچکترین

مضرب مشترک عبارت است از $L \times G = a \times b$

$$L = \frac{a \times b}{G} \quad G = \frac{a \times b}{L} \quad a = \frac{L \times G}{b} \quad b = \frac{L \times G}{a}$$

مثال اول: بزرگترین قاسم مشترک اعداد 225 و 300 عبارت از 75 می‌باشد، کوچکترین مضرب مشترک 225 و 300 را دریابید.

حل:

$$a = 225$$

$$b = 300$$

$$G = 75$$

$$L = ?$$

$$L = \frac{a \times b}{G} = \frac{225 \times 300}{75} = \frac{67500}{75} = 900$$

مثال دوم: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 900 و بزرگترین قاسم مشترک آنها 75 است، اگر یک عدد 300 باشد عدد دیگری را دریابید.

حل:

$$b = 300$$

$$L = 900$$

$$G = 75$$

$$a = \frac{L \times G}{b} = \frac{900 \times 75}{300} = 225$$

$$a = ?$$

دریافت همزمان کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک دو عدد:

مثال سوم: کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک اعداد 225 و 100 را دریابید.

حل:

5	225	100
5	45	20
x	9	4

در نتیجه بزرگترین قاسم مشترک این دو عدد مساوی به $5 \times 5 = 25$ و کوچکترین مضرب مشترک آنها مساوی است به: $5 \times 5 \times 9 \times 4 = 900$.

فعالیت

کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک اعداد 27 و 9 را دریابید.

آموختیم که: غرض دریافت همزمان بزرگترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک اعداد داده شده را بر اعداد اولیه تقسیم می نماییم، حاصل ضرب اعداد اولیه ستون طرف چپ عبارت از بزرگترین قاسم مشترک اعداد داده شده می باشد و اگر این حاصل ضرب را با اعداد سطر آخری ضرب نماییم حاصل ضرب عبارت از کوچکترین مضرب مشترک اعداد داده شده می باشد.

تمرین

- 1- بزرگترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک اعداد 20، 12 و 36 را دریابید.
- 2- اگر کوچکترین مضرب مشترک 45 و 35 عبارت از 315 باشد، بزرگترین قاسم مشترک اعداد 45 و 35 را دریابید.
- 3- کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک اعداد 20، 16 و 44 را دریابید.
- 4- کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 900 و بزرگترین قاسم مشترک آنها 75 است، اگر یک عدد 225 باشد عدد دیگری را دریابید.

مربع و جذر مربع تام یک عدد طبیعی



اگر مساحت یک زمین مربعی ۱۴۴ متر مربع باشد یک ضلع این زمین را دریابید.

می‌دانیم که اگر یک عدد در خودش ضرب شود حاصل ضرب عبارت از مربع این عدد است.

فعالیت

عدد	2	6	11	15	20
مربع عدد	4				

جدول مقابل را تکمیل کنید.

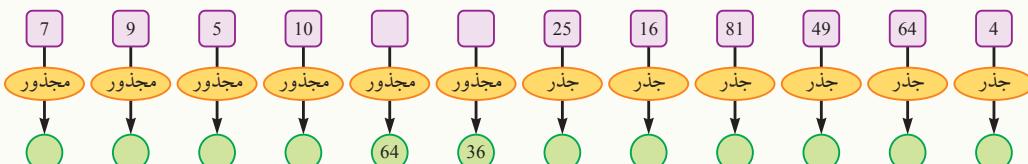
در نتیجه اگر هر یک از اعداد ۲، ۱۱، ۶، ۱۵ و ۲۰ دو مرتبه در خود شان ضرب شوند به ترتیب اعداد ۴، ۳۶، ۱۲۱، ۲۲۵ و ۴۰۰ حاصل می‌شود. مشاهده می‌شود که هر عدد دارای دو جزء ضربی بوده که باهم مساوی می‌باشند.

$6 \times 6 = 36$ چون ۳۶ توان دوم ۶ است می‌گوییم که ۶ جذر دوم ۳۶ است، و به این شکل نشان می‌دهیم $\sqrt{36} = 6$ که عدد ۳۶ مجدور ۶ می‌باشد.

به یاد داشته باشید که: به عوض $\sqrt{36^2}$ میتوان $\sqrt{36}$ را نوشت.
یکی از دو جزء ضربی مساوی یک عدد عبارت از جذر دوم و یا جذر مربع عدد می‌باشد.

فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:



یادداشت: جذر دوم عدد یک خود یک است.

آموختیم که: یکی از دو جزء ضربی مساوی یک عدد، جذر دوم عدد است، فکر کنید که مجذور هر عدد توان دوم آن عدد است.

دربیافت جذر مربع قائم یک عدد طبیعی

1- به طریق تجزیه:

مثال: جذر مربع اعداد 400 و 3969 را توسط تجزیه دریابید.

حل:

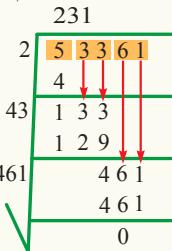
3	3969	2	400
3	1323	2	200
3	441	2	100
3	147	2	50
7	49	5	25
7	7	5	5
	1		1

$$\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \times 5^2} = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$$

$$\sqrt{3969} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7} = \sqrt{3^4 \times 7^2} = 3^2 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 = 63$$

2- **یافتن جذر مربع یک عدد توسط طریقه عمومی**

مثال دوم: جذر مربع عدد 53361 را به طریق عمومی به صورت زیر دریافت می نماییم.



$$\sqrt{53361} = 231$$

تمرین

1- جذر مربع اعداد زیر را دریابید:

$$\sqrt{64} = ? , \quad \sqrt{256} = ? , \quad \sqrt{144} = ? , \quad \sqrt{121} = ?$$

2- جذر مربع اعداد زیر را به طریقه تجزیه پیدا کنید.

3136 ، 2025 ، 1024

3- جذراهای دوم اعداد زیر را اول به طریقه تجزیه و بعد به طریقه عمومی دریابید، و بگویید که کدام طریق را ترجیح می دهید؟

2025

3136 ،

225

جذر سوم(مکعب) یک عدد طبیعی

حجم یک مکعب 125cm^3 است. ابعاد آن چند است؟



چنانچه جذر مربع یک عدد طبیعی یکی از دو جزء ضربی مساوی عدد بوده بدین اساس جذر مکعب یا جذر سوم یک عدد طبیعی را این طور تعریف می کنیم:

تعریف: یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد را، جذر سوم عدد می گویند.
علامه $\sqrt[3]{\quad}$ جذر سوم یک عدد را نشان می دهد.

مثال اول: جذر های سوم این اعداد را دریابید:
حل:

$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

$$64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 \Rightarrow \sqrt[3]{64} = 4$$

دریافت جذر سوم قام اعداد طبیعی توسط تجزیه:

عدد را به اجزای مساوی اولیه ضربی تجزیه نموده از هر سه جزء مساوی یک جزء را انتخاب و باهم ضرب می کنیم در نتیجه حاصل ضرب عبارت از جذر سوم عدد می باشد.

مثال دوم: جذر های سوم اعداد طبیعی 125، 8 و 27000 را توسط تجزیه دریابید.
حل:

2	8
2	4
2	2
1	

5	125
5	25
5	5
1	

2	27000
2	13500
2	6750
3	3375
3	1125
3	375
5	125
5	25
5	5
1	

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[3]{27000} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

فعالیت

جذر سوم اعداد 1331 و 8000 را توسط تجزیه دریابید.

یکی از سه جزء ضریب مساوی یک عدد را جذر سوم عدد می‌گویند.

تمرین

1- جذراهای مکعب تام اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه دریابید:

$$\sqrt[3]{729}, \sqrt[3]{216}, \sqrt[3]{125000}$$

$$\sqrt[3]{5832}, \sqrt[3]{1331}, \sqrt[3]{2744}$$

2- جذر سوم(جذر مکعب) عدد 729000 مساوی است به:

- a) 100 b) 150 c) 90

3- جذر سوم عدد $2^6 \times 3^3 \times 4^3$ مساوی است به:

- a) 48 b) 24 c) 12

4- جذر سوم عدد $10^2 \times 10^2$ مساوی است به:

- a) 10 b) 100 c) 1000 d) 10^3

5- جذر سوم عدد 343 مساوی است به:

- a) 8 b) 7

6- جذر سوم عدد 1728 مساوی است به:

- a) 12 b) 11

7- جذر سوم عدد 512 مساوی است به:

- a) 7 b) 8

خلاصه فصل دوم

- خاصیت، اتحادی و تبدیلی در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد طبیعی صدق می‌کنند، صفر در عملیه جمع اعداد طبیعی و یک در عملیه ضرب اعداد طبیعی عنصر عینیت می‌باشد.
- اعدادی که تنها بربیک و خود شان قابل تقسیم باشند اعداد اولیه‌اند.
- عددی که علاوه از خود و یک بر اعداد دیگری نیز پوره قابل تقسیم باشد عدد مرکب(تجزیه پذیر) است.
- ۲ تنها عدد جفت اولیه می‌باشد.
- هر عدد اولیه تنها دو قاسم دارد که عبارت از عدد یک و خودش می‌باشد.
- یک عدد مرکب کم از کم ۳ جزء ضربی دارد.
- یافتن اجزای ضربی اولیه یک عدد مرکب به نام تجزیه به اعداد اولیه یاد می‌شود و این تجزیه یگانه است.
- تجزیه به اجزای ضربی اولیه موارد استعمال زیادی دارد که بیش از همه در دریافت کوچکترین مضرب مشترک، بزرگترین قاسم مشترک و جذر های دوم و سوم اعداد از آن کار گرفته می‌شود.
- کوتاه ترین طریقه نشان دادن حاصل ضرب تکرار یک عدد را طاقت یا عدد توان دار می‌نامند.
- در 5^3 عدد ۵ قاعده ۳ توان نما و 5^3 عبارت از طاقت می‌باشد.
- در ضرب طاقت‌هایی که دارای قاعده‌های مساوی و توان‌های مختلف باشند حاصل ضرب آنها مساوی به قاعده مشترک به توان حاصل جمع توان‌های داده شده می‌باشد.
- در ضرب طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف داشته باشند، قاعده‌ها باهم ضرب گردیده و به یکی از توان‌های مساوی نوشته می‌شود.
- اگر یک عدد توان دار به توان پرسد قاعده را به توان حاصل ضربها دو توان می‌نویسیم.
- حاصل تقسیم طاقت‌ها که دارای عین قاعده و توان‌های مختلف باشند مساوی می‌باشد به یکی از قاعده‌ها به توان عددی که از تفرقی توان‌های صورت و مخرج به دست می‌آید به شرط آن که قاعده صفر نباشد.
- در تقسیم طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف دارند، قاعده صورت را بالای قاعده مخرج تقسیم و نتیجه آن را به توان یکی از توان‌های مساوی می‌نویسیم.
- بزرگترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد طبیعی عبارت از بزرگترین اجزای ضربی مشترک آنها می‌باشد.
- بزرگترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد طبیعی را توسط ست قاسم‌ها و تجزیه می‌توان دریافت کرد.
- بزرگترین قاسم مشترک دو عدد طبیعی کوچکتر و یا مساوی به یکی از این دو عدد می‌باشد.

- کوچکترین مضرب مشترک دو یا چند عدد طبیعی، عبارت از کوچکترین عددی است که در عین وقت بالای دو یا چندین عدد طبیعی قابل تقسیم بوده و یگانه است.
- کوچکترین مضرب مشترک اعداد طبیعی را توسط ست مضرب‌ها و تجزیه دریافت کرده می‌توانیم.
- بین دو عدد طبیعی a و b و کوچکترین مضرب مشترک (L.C.M) و بزرگترین قاسم مشترک (G.C.D) رابطه زیر موجود است:

$$G \times L = a \times b \quad G.C.D = \frac{a \times b}{L.C.M} \quad L.C.M = \frac{a \times b}{G.C.D}$$

- کوچکترین مضرب مشترک دو یا چندین عدد اولیه و یا دو عددی که قاسم مشترک آن‌ها فقط یک است، عبارت از حاصل ضرب اعداد می‌باشد.
- کوچکترین مضرب یک عدد طبیعی همیشه بزرگتر و یا مساوی به عدد می‌باشد.
- مضرب یک عدد طبیعی بالای خود عدد پوره تقسیم می‌شود.
- مضرب‌های یک عدد طبیعی قابل شمارش نمی‌باشند.
- یکی از دو جزء مساوی یک عدد طبیعی عبارت از جذر دوم (جذر مرربع) عدد می‌باشد.
- جذر مرربع اعداد طبیعی را توسط تجزیه و طریق عمومی جذرمرربع به دست آورده می‌توانیم.
- یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد طبیعی، عبارت از جذر سوم یا جذر مکعب عدد می‌باشد.

تمرین فصل دوم

۱- اعداد زیر را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نمایید:

$$168, 858, 1122, 1024, 1656, 8000, 3206 \\ 30030, 38, 54, 116, 66$$

۲- حاصل ضرب های زیر را به شکل یک طاقت (عدد توان دار) بنویسید:

$$4^2 \times 4^3 \times 4^4, 5 \times 5^2 \times 5^3 \times 5^4, 2^4 \times 3^4 \times 4^4$$

۳- حاصل تقسیم های زیر را به شکل یک طاقت (عدد توان دار) بنویسید:

$$\frac{8^{11}}{2^{11}}, \frac{(36)^8}{9^8}, \frac{(121)^9}{(11)^9}, \frac{9^{11}}{9^3}$$

۴- بزرگترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک اعداد زیر را توسط تجزیه به اجزای ضربی اولیه در یک جدول دریابید:

$$36, 162, 580, 1160, 405, 495$$

۵- بزرگترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه در یک جدول دریابید:

$$24,96,48 \quad 175,315 \quad 324,225$$

۶- توسط تجزیه به اجزای ضربی اولیه کوچکترین مضرب مشترک اعداد طبیعی زیر را دریابید:

$$12,32,40,45,72,75, 132,165,198,220$$

۷- کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 2920 و بزرگترین قاسم مشترک آنها 4 است. اگر یک عدد 40 باشد عدد دیگری را دریابید.

۸- کوچکترین عدد طبیعی را دریابید که اگر بالای 12، 16 و 18 تقسیم شود در هر صورت 8 باقی بماند.

۹- کوچکترین عدد طبیعی را دریابید که اگر بالای 15، 21، 28 و 49 تقسیم شود در هر صورت 4 باقی بماند.

۱۰- جذر مربع اعداد $\sqrt{2809}$ و $\sqrt{5329}$ را دریابید.

۱۱- در یک باغ در هر قطار به تعداد قطارها درخت غرس شده است. اگر تعداد درخت ها در باغ 1369 باشد، تعداد درخت ها را در هر قطار و نیز تعداد قطارها را معلوم کنید.

۱۲- مساحت یک زمین مربعی شکل 9216 متر مربع باشد طول هر ضلع زمین را دریابید.

۱۳- اگر مساحت زمین مربعی 1444 متر مربع بوده باشد ، طول هر ضلع زمین را دریابید.

۱۴- جذر مربع اعداد $\sqrt{42025}$ ، $\sqrt{10201}$ ، $\sqrt{1002001}$ را توسط طریقه عمومی دریابید.

15- اگر 6561 موتور طوری در قطار های مستقیم قرار داشته باشند که تعداد موتورهای هر قطار مساوی به تعداد قطارها باشند تعداد موتورها در هر قطار و نیز تعداد قطارها را معلوم کنید.

16- در یک باغ اگر در هر قطار مستقیم تعداد درخت ها مساوی، به تعداد قطارها باشند، اگر در باغ مجموعاً 1936 درخت باشند، تعداد درخت ها را در هر قطار و نیز تعداد قطارها را معلوم کنید.

17- جذر مربع اعداد طبیعی زیر را دریابید.

$$\sqrt{324}, \quad \sqrt{1296}, \quad \sqrt{3364}, \quad \sqrt{1024}$$

$$\sqrt{14161}, \quad \sqrt{9025}, \quad \sqrt{4761}, \quad \sqrt{996004}$$

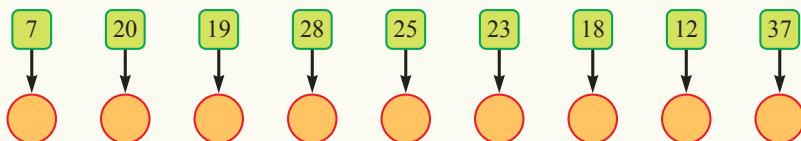
18- جذر مکعب تام اعداد طبیعی زیر را دریابید.

$$\sqrt[3]{64000000}$$

$$\sqrt[3]{8000}, \quad \sqrt[3]{2197}$$

$$\sqrt[3]{1000}, \quad \sqrt[3]{1000000}$$

19- دور اعداد اولیه یک دایره بکشید. در دایره زیر هر عدد برای آن یک جزء ضربی اولیه را بنویسید.



20- جذر مربع $3^2 \times 2^6$ مساوی است به:

- a) 24 b) 64 c) 9 d) 20

21- بزرگترین قاسم مشترک اعداد 140 و 112 مساوی است به:

- a) 28 b) 14 c) 54 d) 7

22- کوچکترین مضرب مشترک اعداد 15, 9, 5 و 20 مساوی است به:

- a) 90 b) 180 c) 360 d) 720

23- مجذور عدد $3^3 \times 2^3$ مساوی است به:

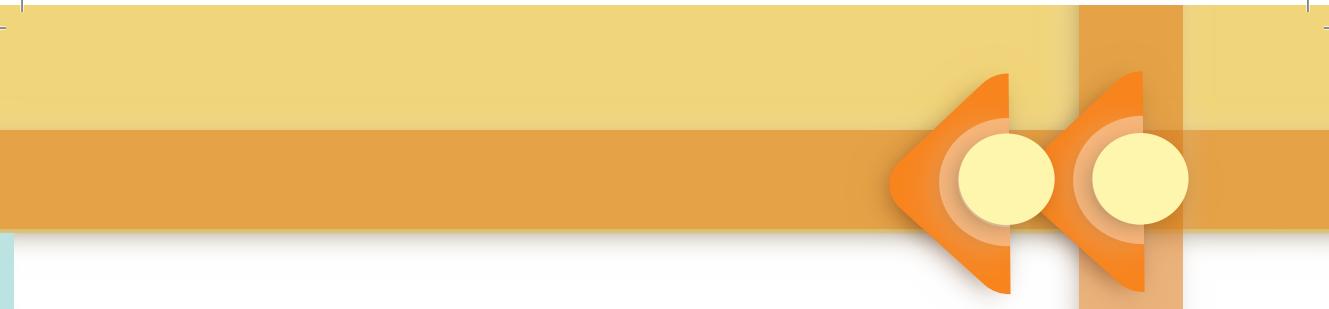
- a) $2^4 \times 3^2$ b) $2^6 \times 3$ c) $2^6 \times 3^2$ d) $2^6 \times 3^3$

24- کوچکترین مضرب مشترک اعداد $2^3 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 5$, $2 \times 5^2 \times 7$ و $2^3 \times 7^3$ مساوی است به:

- a) 12600 b) $2^3 \times 5^2 \times 3^2 \times 7$ c) $2^5 \times 3^2 \times 7^3$ d) $2^4 \times 3$
- هر دو درست اند

25- کوچکترین مضرب مشترک $2^5 \times 3$, $2^4 \times 3^2 \times 7^3$ و $2^5 \times 3^2 \times 7^3$ مساوی است به:

- a) $2^5 \times 3^2 \times 7^3$ b) $2^4 \times 3$



فصل سوم

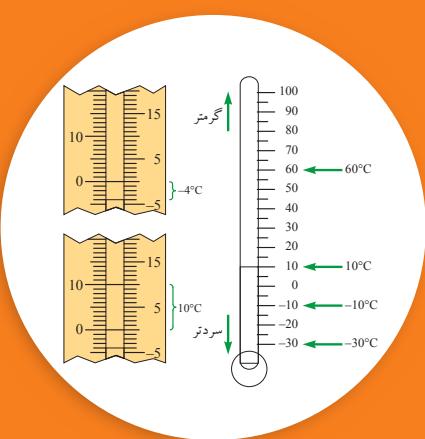
اعداد تام

طول ریشه برخی درختان حتی به
اندازه طول خود درخت است.



اعداد تام اعداد مثبت و منفی

$$5 - 7 = ?$$



در بحث‌های قبلی با اعداد طبیعی که برای شمارش اشیا و همچنان اعداد مکمل که متشکل از اعداد طبیعی و صفر است، آشنایی حاصل نموده اید.

سؤال فوق نشان می‌دهد که در عمل، اعداد طبیعی و مکمل برای حل مسائل کافی نیست و بشر در طول تاریخ به این نوع مشکلات مواجه گردیده‌اند؛ بنابر همین نیازمندی‌ها اعداد تام به میان آمد. شما این اعداد را روی ترمومتر در شکل می‌بینید. و طوری که می‌دانید: ترمومتر وسیله‌یی است که برای اندازه‌گیری درجه حرارت به کار می‌رود.

در ترمومتر اعداد بالاتر از صفر، اعداد مثبت (بزرگتر از صفر) و اعداد پایین‌تر از صفر، اعداد منفی (کوچکتر از صفر) و عدد صفر قرار دارند.

اعداد بزرگتر از صفر را با علامت مثبت (+) و اعداد کوچکتر از صفر را با علامت منفی (-) نشان می‌دهند. عددی که علامت ندارد، مثبت است. آیا گاهی فکر کرده‌اید که عددهای مثبت و عددهای منفی به روی ترمومتر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

اعداد تام و نمایش آنها روی محور اعداد:

$$\dots, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{} 0 +1, +2, +3, +4, \dots$$

طوری که دیده می‌شود اعداد فوق از طرف چپ به راست یک، یک واحد زیاد و از راست به چپ یک، یک واحد کم می‌گردد.

آیا خانه‌های خالی فوق را که زیر علامت سوالیه قرار دارند، می‌توانید به عدد مناسب پر کنید؟

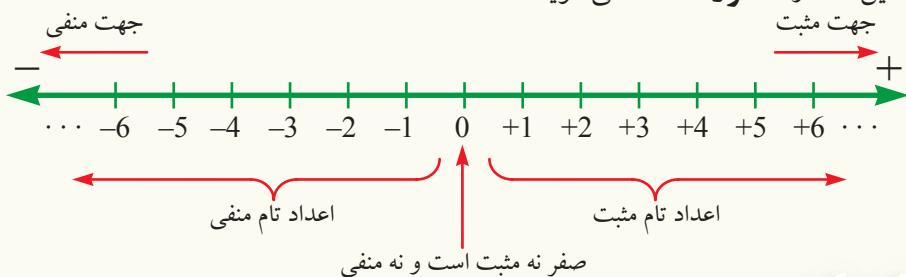
اعداد تام : (Integers numbers)

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots$$

اعداد بالا را به نام اعداد تام یاد می‌نمایند. ست یا مجموعه اعداد تام را قرار زیر نشان می‌دهند.

$$I = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots\}$$

نمایش اعداد تام روی محور اعداد: برای آسانی کار، سرت اعداد تام را بالای یک محور نشان میدهند، ابتدا یک خط را رسم نموده سپس یک نقطه کیفی را بالای خط به حیث مبدأ در نظر گرفته، با عدد صفر (0) نشانی می کنیم. اکنون امتداد دو (جهت) خط متذکره را در اختیار داریم، یعنی: از مبداء به جهت راست و از مبداء به جهت چپ. اعدادی که به طرف راست مبدأ (صفر) روی خط قرار دارند با علامه (+) و اعدادی که به طرف چپ مبدأ روی خط قرار دارند با علامه (-) مشخص می کنیم. بنابر این طرف راست این خط (طرف راست مبدأ)، اعداد مثبت و طرف چپ این خط (طرف چپ مبدأ)، اعداد منفی را نشان میدهیم. مبدأ این خط صفر بوده نه مثبت و نه منفی است. این خط را **محور اعداد** می گویند.



فعالیت

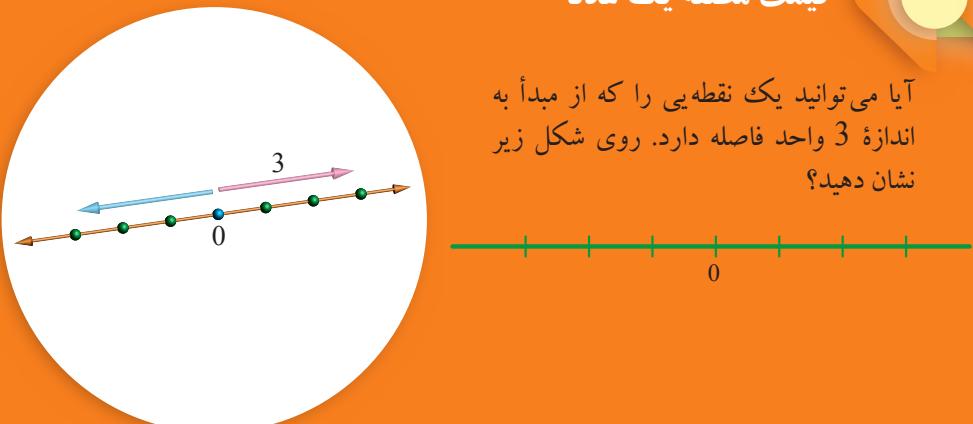
محور اعداد را به صورت عمومی رسم کنید، نقطه‌ای روی آن را مبداء فرض نموده، جهت بالا را با علامه (+) و جهت پایین را با علامه (-) مشخص نمایید و اعداد تام را از -6 تا $+6$ روی آن نشان دهید.

تمرین

- 1- یک خط عمومی رسم نموده، مانند ترمامتر آن را طوری درجه بندی کنید که در آن اعداد مثبت، صفر و اعداد منفی وجود داشته باشند.
- 2- یک محور را رسم نموده و اعداد تام را از -5 تا $+5$ روی آن نشان دهید.
- 3- اعداد تام $+3, +5, +8, -3, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$ را روی محور اعداد نشان دهید.

قیمت مطلقه یک عدد

آیا می‌توانید یک نقطه‌یی را که از مبدأ به اندازه ۳ واحد فاصله دارد. روی شکل زیر نشان دهید؟



سؤال: فکر می‌کنید اگر هوای بامیان ۵- درجه سانتی گرید و هوای سالنگ شمالي ۸ درجه سانتی گرید باشد، کدام یک بیشتر سرد است؟ اگر هوای کابل ۸+ درجه سانتی گرید و هوای قندھار ۱۶+ درجه سانتی گرید باشد، کدام شهر بیشتر گرم است؟

در دو عدد تام بالای محور اعداد، همان عدد بزرگتر است که به طرف راست قرار داشته باشد؛

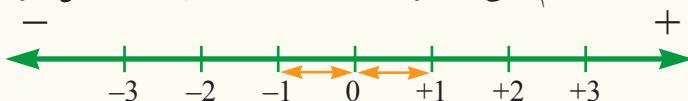
طور مثال: عدد ۳ طرف راست عدد ۲ قرار دارد، بنابرآن عدد ۳ بزرگتر از عدد ۲ است یا به عبارت دیگر عدد ۲ کوچکتر از عدد ۳ است و این طور می‌نویسیم:

$$2 < 3 \quad \text{یا} \quad 3 > 2$$

به همین ترتیب (-۱) به طرف راست (-۳) قرار دارد، بنابرآن عدد -۱ بزرگتر از عدد -۳ بوده و یا به عبارت دیگر عدد -۳ کوچکتر از عدد -۱ است و این طور می‌نویسیم:

$$-3 < -1 \quad \text{یا} \quad -1 > -3$$

اعداد تام مثبت، اعداد تام منفی و صفر را قبلًا روی یک محور مانند شکل زیر نشان داده ایم:



اگر به محور بالا نظر اندازیم دیده می‌شود که عدد +۱ و عدد -۱ از مبدأ (صفر) به فاصله‌های مساوی قرار دارند، یعنی هر دو عدد از مبدأ (صفر) به اندازه یک واحد دورتر واقع گردیده‌اند، این دو عدد را **متضاد (معکوس جمعی)** یکدیگر می‌نامند. به همین ترتیب +۲ و -۲ یا +۳ و -۳ وغیره با یکدیگر متضاداند.

پس هر عدد تام و متضاد آن به روی محور اعداد به فاصله‌های مساوی از صفر قرار داشته و دارای علامت‌های مختلف می‌باشند. این فاصله از مبدأ را **قیمت مطلقه** نامیده‌اند.

مثالاً: $+3$ و -3 از صفر به اندازه 3 واحد دورتر واقع‌اند، پس 3 قیمت مطلقة $+3$ و -3 است.
قیمت مطلقة یک عدد با قرار دادن عدد در بین دو خط عمودی ($| |$) نمایش داده می‌شود،
یعنی:

$$|0|=0 \quad , \quad |+3|=3 \quad , \quad |-3|=3$$

فعالیت

- متضاد اعداد مقابل را بنویسید.
- قیمت مطلقة اعداد مقابل چند است؟

آموختیم که:

- هر عدد که صفر نباشد (مثبت یا منفی) قیمت مطلقة آن یک عدد مثبت است، قیمت مطلقة صفر مساوی به صفر است، یعنی: $|0|=0$ می‌باشد.
- قیمت مطلقة یک عدد و قیمت مطلقة متضاد آن باهم مساوی اند؛ یعنی:
 $|-7|=|+7|=7$

تمرین

1- اعداد تام زیر را از چپ به راست ترتیب نموده طوری که کوچکترین عدد به طرف چپ باشد.

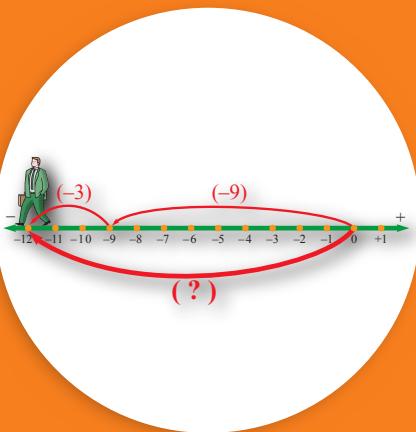
$$-5 \quad , \quad +6 \quad , \quad -8 \quad , \quad -3 \quad , \quad +12$$

2- از دو عدد -6 و -9 کدام یک بزرگتر است؟ و از دو عدد -7 و صفر کدام یک کوچکتر است؟
3- قیمت مطلقة اعداد زیر را دریابید.

$$\begin{array}{llllll} +5 & , & -5 & , & -3 & , & 3 \\ +16 & , & -10 & , & 10 & , & +12 \\ +132 & , & -132 & , & +200 & , & a \end{array}, \quad \begin{array}{llll} -7 \\ -12 \\ -200 \end{array}$$

4- یک محور را رسم نموده، عدهای -5 ، -2 و -3 را روی آن مشخص نموده و متضاد هر یک از آن‌ها را نیز روی این محور نشان دهید.

جمع اعداد تام هم علامه



یک نفر به روی محور اعداد به اندازه 9 واحد به طرف چپ و بعد از آن به اندازه 3 واحد دیگر به طرف چپ رفته است، نفر مذکور چند واحد را طی کرده است؟

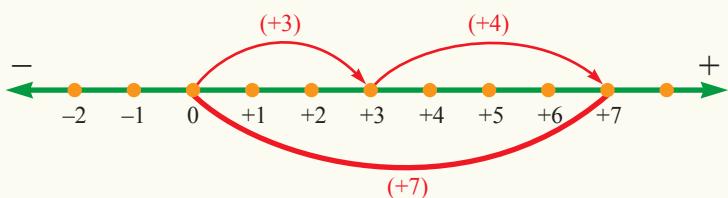
عملیه جمع را در اعداد طبیعی مورد مطالعه قرار داده اید؛ به طور مثال: $3 + 4 = 7$ در حقیقت هر عدد طبیعی، یک عدد تام مثبت است؛ بنابر این عملیه جمع بالا را می توانیم قرار زیر بنویسیم:

$$(+3) + (+4) = (+7)$$

یکی از روش های جمع کردن اعداد تام، استفاده از **محور اعداد** است.

جمع اعداد مثبت

برای نمایش $(+3) + (+4)$ به روی محور زیر دقت نمایید.



$$(+3) + (+4) = (+7)$$

$$3 + 4 = 7$$

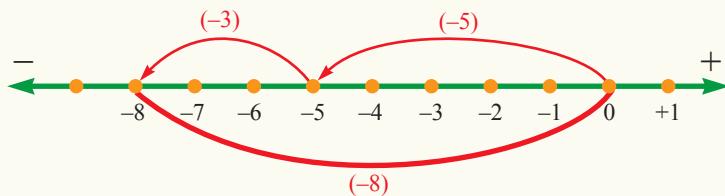
از روی شکل دیده می شود که:
یا

فعالیت

عدد 5 را با عدد 2 + جمع نموده و به روی محور اعداد نشان دهید.

جمع اعداد منفی

هر گاه به روی محور اعداد از مبدأ به اندازه ۵ واحد به طرف چپ حرکت نماییم (۵-) و سپس به اندازه ۳ واحد دیگر به طرف چپ حرکت کنیم (۳-)، در حقیقت به طرف چپ، به نقطه (۸-) میرسیم، شکل زیر را مشاهده کنید.

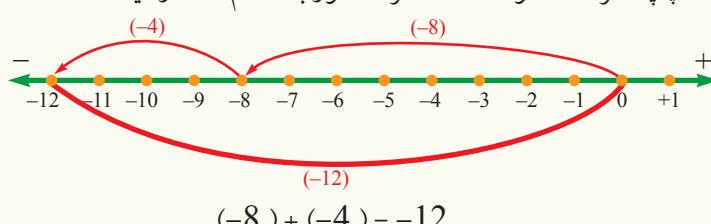


بنابراین:

مثال

یک نفر به اندازه ۸ واحد به طرف چپ حرکت نموده و سپس به اندازه ۴ واحد دیگر باز هم به طرف چپ حرکت نموده است، نفر مذکور به کدام نقطه رسیده است؟

حل:



آموختیم که:

حاصل جمع دو عدد هم علامت، برابر با مجموع قیمت مطلق آن دو عدد و علامت مشترک علامت حاصل جمع می باشد.

تمرین

۱- اعداد زیر را جمع کنید:

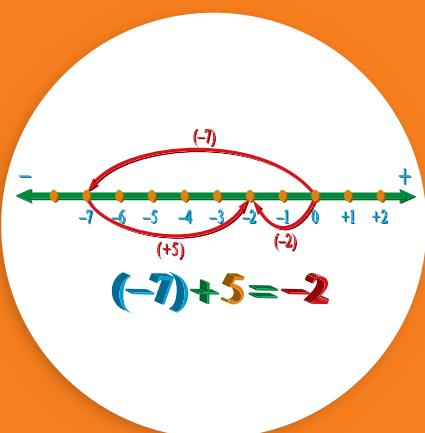
$$(-12) + (-3) = \quad (-7) + (-6) = \quad 37 + 47 =$$

۲- زینب انگشت خود را به روی یک محور اعداد به اندازه ۳ واحد از مبدأ محور(صفرا) به طرف راست حرکت می دهد و سپس به اندازه ۴ واحد دیگر به طرف راست بالای یک نقطه انگشت می گذارد. انگشت زینب بالای کدام عدد تام قرار دارد؟

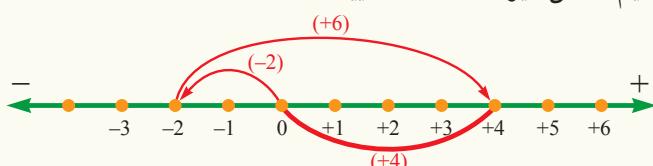
۳- یک محور به صورت عمودی رسم نموده و یک مبدأ به روی آن تعیین نمایید. بعد حرکت یک مورچه را به اندازه ۴ واحد از مبدأ به طرف پایین و سپس به اندازه ۶ واحد دیگر به طرف پایین محور در نظر گرفته و محل نهایی مورچه را روی محور نشان دهید.

جمع اعداد تام مختلف العلامت

احمد 7 افغانی از دکاندار قرض گرفته است ، (قرض را به علامت منفی نشان می دهیم). بعد از چند روز احمد 5 افغانی به دکاندار داد. اکنون احمد چند افغانی قرضدار است ؟

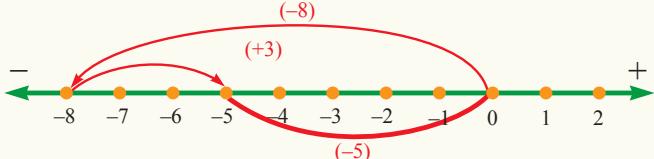


هر گاه به روی محور اعداد تام از مبدأ، شروع به حرکت نموده و به اندازه 2 واحد به طرف چپ و سپس از همان نقطه به اندازه 6 واحد به طرف راست حرکت نماییم، در حقیقت به نقطه $+4$ رسیده ایم. شکل زیر را مشاهده نمایید.



از روی شکل بالا دیده می شود که: $-2 + 6 = 4$ $-2 + (+6) = (+4)$ یا
مثال اول: عدد (-8) و عدد $(+3)$ را باهم جمع می نماییم.

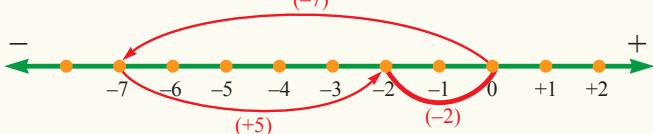
حل:



$$(-8) + (+3) = -8 + 3 = -5$$

مثال دوم: سؤالی که در شروع درس داده شده است، با استفاده از محور اعداد حل می نماییم.

حل:

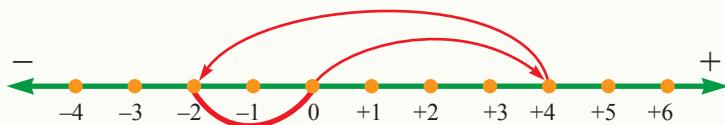


$$(-7) + (+5) = -2$$

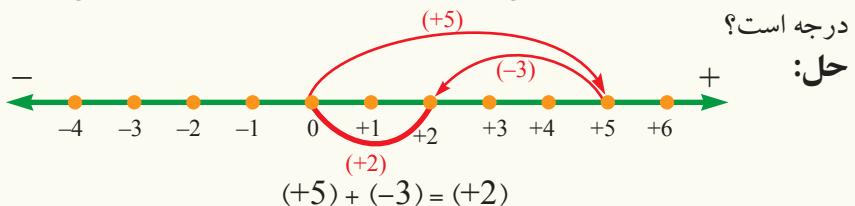
سؤال: علامت $(-)$ در عدد -2 چه چیز را نشان می دهد؟

فعالیت

با استفاده از شکل زیر، یک سؤال بسازید و آن را حل نمایید:



مثال سوم: در یک روز زمستانی، درجه حرارت کابل تا ۵ درجه سانتی گرید بالای صفر می‌رسد. اگر در شب هوای کابل به اندازه ۳ درجه تغییر نماید، هوای کابل در شب چند درجه است؟



پس هوای کابل در شب برابر به ۲ درجه بالای صفر یعنی ۲ درجه است.
توجه: هوای کابل در روز ۵+ درجه بالای صفر و در هنگام شب که هوای سردتر می‌گردد، به اندازه ۳- درجه تغییر نموده و به اندازه ۳ درجه نظر به روز سردتر گردیده است.

آموختیم که: برای جمع کردن دو عدد تام با علامت‌های مختلف:

- از عددی که قیمت مطلقة بزرگ دارد، عددی را که دارای قیمت مطلقة کوچک است تفریق می‌کنیم و برای حاصل تفریق، علامت همان عددی را می‌گذاریم که قیمت مطلقة آن بزرگ باشد.

تمرین

۱- اعداد تام داده شده را با هم جمع کنید.

$$(-6) + (+5) = \quad , \quad (+3) + (-5) = \quad , \quad (-3) + (+7) + (-4) + (-9) = \quad$$

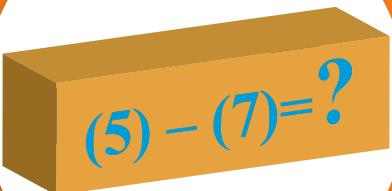
۲- عدد تام (-4) را با عدد تام (-3) جمع نموده و به روی محور نشان دهید.

۳- اگر درجه حرارت هرات 8 درجه سانتی گرید زیر صفر و بامیان از هرات 3 درجه سردتر باشد، درجه حرارت بامیان چند است؟ روی محور نشان دهید.

۴- سه عدد تام (-6)، (+8) و (10-) را با هم جمع کنید.

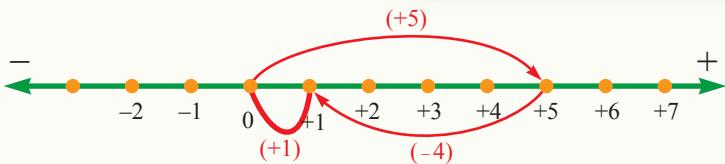
تفریق عددهای تام

چگونه می‌توانیم عدد 7 را از عدد 5 تفریق نماییم؟


$$(5) - (7) = ?$$

در درس‌های قبلی دیدیم که محور اعداد برای ما کمک کرد تا بتوانیم جمع اعداد تام را بهتر درک نماییم.
در اینجا با استفاده از محور می‌توانیم تفریق دو عدد تام را بررسی کنیم.

فعالیت



- با توجه به شکل توضیح دهید که $5 - 4$ را پیدا می‌کنیم؟
- با همین روش $5 - 4$ را روی محور نشان دهید و حاصل آن را پیدا کنید.
- روی یک محور $(-5) + 4$ را نمایش دهید و حاصل آن را پیدا کنید.
- سر انجام $5 - 4$ و $(-5) + 4$ را با هم مقایسه کنید، و از آن چه نتیجه به دست می‌آید؟

نتیجه فعالیت بالا نشان میدهد که اگر عدد 5 را از عدد 4 تفریق نماییم، در حقیقت عدد 5 را با عدد 4 جمع می‌کنیم یا به عبارت دیگر، می‌توانیم عمل تفریق را به عمل جمع تبدیل نماییم، یعنی:

$$4 - 5 = (+4) + (-5) = -1$$

دیده می‌شود که در عملیه تفریق علامت مفروق تغییر می‌کند، یعنی در حقیقت در عملیه تفریق، متضاد (معکوس جمعی) (Additive inverse) مفروق را با مفروق منه جمع می‌کنیم.

مثال اول: عدد -5 را از عدد 7 تفریق نمایید.

حل: متضاد مفروق یعنی متضاد عدد -5 را که عدد $+5$ است با مفروق منه $(+7)$ جمع می‌کنیم.

$$7 - (-5) = 7 + (+5) = 7 + 5 = 12$$

مثال دوم: عدد 9 را از عدد -3 تفریق نمایید.

در اینجا عدد 9 مفروق است، بنابر آن متضاد آن را که عبارت از عدد -9 است با عدد مفروق منه یعنی -3 جمع می‌نماییم:

$$(-3) - (+9) = (-3) + (-9) = -12$$

مثال سوم: عدد -4 و عدد -2 را باهم جمع نموده و عدد -9 را از حاصل جمع آنها تفریق نمایید.

حل: اولاً اعداد -4 و -2 را باهم جمع نموده و سپس علامت مفروق یعنی -9 را به $+9$ تغییر می‌دهیم و در اخیر، مفروق منه و مفروق را باهم جمع می‌کنیم، یعنی:

$$(-4) + (-2) = -6 , \quad (-6) - (-9) = -6 + 9 = +3 = 3$$

آموختیم که:

برای تفریق نمودن دو عدد تام، علامه مفروق را تغییر داده و بعد عملیه جمع را انجام می‌دهیم.
یا به عبارت دیگر: متضاد مفروق را با مفروق منه جمع می‌کنیم.

تمرین

1- عملیه های زیر را انجام دهید.

$$(-12) - (-20) , \quad (-3) - (9) , \quad (-3) - (-9) , \quad (-8) - (-4) , \quad 0 - 5$$

$$(-25) - (-12) , \quad -13 - (-3) , \quad 8 - 12 , \quad -20 - 12 , \quad 5 - 0$$

2- اگر بخواهیم از عدد تام 6 که مفروق منه است، عدد تام 4 را تفریق نماییم، چطور می‌توانیم این عملیه را به روی محور اعداد نشان دهیم؟

3- حاصل جمع اعداد تام -6 و $+8$ را به دست آورده و عدد -14 را از آن تفریق نمایید.

ضرب اعداد تام مختلف العلامت

$$3 \times (-4) = -12$$

$$(-3) \times 4 = -12$$

اگر دو عدد تام مختلف العلامت در هم ضرب گردند، علامه حاصل ضرب چیست؟

فعالیت

اگر در حاصل ضرب از یک عامل ضربی آن یک، یک واحد کم گردد، در حاصل ضرب چه تغییر به وجود خواهد آمد؟

$$4 \times 4 = 16$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$1 \times 4 = 4$$

$$0 \times 2 = 0$$

$$0 \times 4 = 0$$

$$-1 \times 2 = -2$$

$$-1 \times 4 = -4$$

$$-2 \times 2 = -4$$

$$-2 \times 4 = -8$$

$$-3 \times 2 = -6$$

$$-3 \times 4 = -12$$

$$-4 \times 2 = -8$$

⋮

⋮

به ضرب های مقابل توجه کنید:

از جواب های بالا، تغییر به وجود آمده را پیدا کنید.

- علامت حاصل ضرب دو عدد مثبت چیست؟

- علامت حاصل ضرب عدد منفی در عدد مثبت چیست؟

به طریق زیر نیز می توانیم عین نتیجه را به دست آوریم:
هر گاه یک عدد تام مثبت، به طور مثال $+2$ را سه دفعه باهم جمع نماییم، در این صورت دیده می شود که:

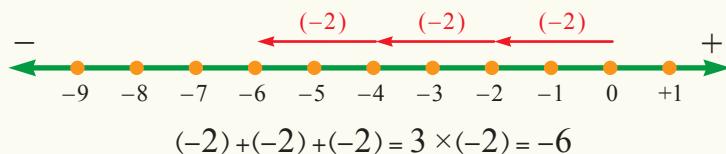
در اینجا در حقیقت عدد $+2$ سه چند شده است، و در اعداد طبیعی داشتیم که:

$$3 \times 2 = 6$$

عملیه بالا را روی محور اعداد چنین نشان می دهیم:



به همین ترتیب در شکل زیر دیده می شود که عدد 2- سه دفعه وجود دارد:



$$(-2) + (-2) + (-2) = 3 \times (-2) = -6$$

مثال: عدد 4- را در 3 ضرب نمایید.

$$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

حل: خانه های خالی زیر را پر کنید:

$$(-6) \times 2 = () , \quad () \times 5 = -25 , \quad (-3) \times () = -3$$

فعالیت

حاصل ضرب اعداد از 7 تا به 7- را با عدد 2 مانند فعالیت اول این درس بنویسید.

آموختنیم که:

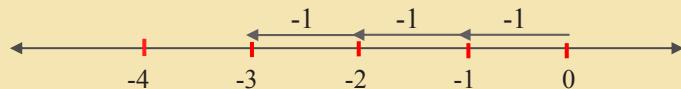
- هرگاه دو عدد مثبت درهم ضرب گردد، حاصل ضرب آنها دارای علامت مثبت است.

- هرگاه یک عدد منفی در یک عدد مثبت یا عدد مثبت در یک عدد منفی ضرب گردد،

حاصل ضرب آنها دارای علامت منفی است.

تمرین

1- به روی محور زیر چه می بینید؟ به صورت ضرب بنویسید.



2- اعداد تام +5 تا 5- را به ترتیب در 2 ضرب نموده و حاصل ضرب ها را دو مقایسه کنید.

3- اگر حاصل ضرب دو عدد تام برابر به 8+ باشد، در صورتی که یکی از اعداد مساوی به +4 باشد، دیگر آن چند است؟

4- اگر حاصل ضرب دو عدد تام برابر به 8- باشد، در صورتی که یکی از اعداد مساوی به 4- باشد، دیگر چند است؟

5- ضرب های زیر را انجام دهید:

$$4 \times 7 = , \quad (-4) \times 5 = , \quad (-5) \times 3 =$$

$$(-2) \times (+3) = , \quad (-3) \times (+1) = , \quad (-1) \times (+1) =$$

$$(-1) \times 0 = , \quad (-7) \times (+10) = , \quad (-9) \times (100) =$$

6- کدام عدد با (7+) ضرب گردد تا حاصل ضرب آنها (56-) گردد؟

ضرب عدد منفی در عدد منفی

$3 \times (-2) = -6$	$3 \times (-5) = -15$
$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-5) = -10$
$1 \times (-2) = -2$	$1 \times (-5) = -5$
$0 \times (-2) = 0$	$0 \times (-5) = 0$
$-1 \times (-2) = 2$	$-1 \times (-5) = 5$
$-2 \times (-2) = 4$	$-2 \times (-5) = 10$
$-3 \times (-2) = 6$	$-3 \times (-5) = 15$



هرگاه یک عدد تام منفی کیفی طور مثال (عدد تام -2 یا عدد تام -5) را به دیگر اعداد تام (مثبت، صفر و منفی) به ترتیب متواالی ضرب نماییم، از مقایسه حاصل ضرب -2 و -5 چه نتیجه به دست خواهیم آورد؟

فعالیت

با کم شدن اولین عامل ضربی، چه تغییری در حاصل ضرب مشاهده می کنید؟ با توجه به این تغییر حاصل ضرب های زیر را تکمیل کنید:

$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ 5 \times (-2) = -10 & 5 \times (-5) = -25 \\ 4 \times (-2) = -8 & 4 \times (-5) = -20 \\ 3 \times (-2) = -6 & 3 \times (-5) = -15 \\ 2 \times (-2) = -4 & 2 \times (-5) = -10 \\ 1 \times (-2) = -2 & 1 \times (-5) = -5 \\ 0 \times (-2) = 0 & 0 \times (-5) = 0 \\ -1 \times (-2) = +2 & -1 \times (-5) = +5 \\ -2 \times (-2) = +4 & -2 \times (-5) = +10 \\ -3 \times (-2) = +6 & -3 \times (-5) = +15 \\ -4 \times (-2) = & -4 \times (-5) = \\ -5 \times (-2) = & -5 \times (-5) = \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

در ضرب نمودن یک عدد تام منفی به یک عدد تام منفی دیگر در فعالیت شروع درس دیدیم که:

هرگاه یک عدد منفی به یک عدد منفی دیگر ضرب گردد؛ مانند: $(-5) \times (-4) = 20$ نتیجه آن یک عدد مثبت است.

مثال اول: عدد 6 را به عدد 2 ضرب نمایید.

حل: طوری که در فعالیت شروع درس مشاهده کردیم، اگر آن را ادامه دهیم، نتیجه زیر به دست می آید.

$$(-6) \times (-2) = +12$$

مثال دوم: حاصل ضرب $(-10) \times (+3) \times (-2)$ را به دست آورید.

حل: اول دو عدد را از طرف چپ باهم ضرب نموده و حاصل آن را با عدد سومی ضرب می نماییم، یعنی:

$$(-2) \times (+3) = -6$$

اکنون حاصل به دست آمده را در عدد بعدی (-10) ضرب می کنیم؛ بنابراین داریم:

$$(-6) \times (-10) = +60$$

آموختیم که:

1- حاصل ضرب یک عدد مثبت در یک عدد منفی، یک عدد منفی است.

2- حاصل ضرب دو عدد منفی، یک عدد مثبت است.

3- به صورت عموم حاصل ضرب دو عدد هم علامت، یک عدد مثبت و حاصل ضرب دو عدد مختلف العلامت یک عدد منفی است.

تمرین

1- عملیه های ضرب را انجام دهید.

$$(-6) \times (-1) = , \quad (+3) \times (-3) = , \quad (-1) \times (-1) =$$

$$(-12) \times (-3) = , \quad (-2) \times (+5) = , \quad (-4) \times (-8) =$$

2- از عدد 2+ تا به عدد 6- را به ترتیب در عدد 3- ضرب نموده و حاصل ضرب را دو به دو باهم مقایسه نمایید.

3- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$(-4) \times () = +8 , \quad (-2) \times (-5) = () , \quad (-3) \times () = +21$$

$$() \times (-9) = +27 , \quad (-3) \times () = -6 , \quad (-1) \times (-11) = ()$$

4- حاصل ضرب های زیر را به دست آورید.

$$(-2) \times (+3) \times (-4) = , \quad (-3) \times (+2) \times (-5) =$$

$$(+7) \times (-4) \times (-2) = , \quad (-6) \times (-4) \times (-2) =$$

$$(-1) \times (-1) \times (-1) = , \quad (-10) \times (-2) \times (+1) =$$

تقسیم عدد های تام

$$(+18) \div (-6) = -3$$

$$(-18) \div (-6) = +3$$

$$(+18) \div (-6) = ?$$

$$(-18) \div (-6) = ?$$

$$? \times (+6) = -18$$

طوری که از مبحث اعداد طبیعی میدانیم، عملیه تقسیم با عملیه ضرب رابطه معکوس دارد، یعنی: هرگاه یک حاصل ضرب بر جزء اول ضربی تقسیم گردد، جزء دوم ضربی به دست می آید. به همین ترتیب اگر حاصل ضرب بر جزء دوم ضربی تقسیم گردد، جزء اول ضربی به دست می آید، جدول زیر را مشاهده کنید.

عملیه ضرب	عملیه تقسیم
$(+6) \times (+3) = +18$	$(+18) \div (+6) = +3$
$(-6) \times (-3) = +18$	$(+18) \div (-6) = -3$
$(+6) \times (-3) = -18$	$(-18) \div (+6) = -3$
$(-6) \times (+3) = -18$	$(-18) \div (-6) = +3$

فعالیت

از عملیه ضرب زیر یک جدول مانند جدول بالا طوری ترتیب دهید که رابطه بین ضرب و تقسیم اعداد تام را نشان دهد:

- 1) $6 \times 2 = 12$
- 2) $(-6) \times 2 = -12$
- 3) $6 \times (-2) = -12$
- 4) $(-6) \times (-2) = 12$

• توضیح دهید چگونه دو عدد تام را برابر هم تقسیم می کنیم؟

نتیجه: با توجه به ضرب و تقسیم های انجام شده دیدیم که:

علامت خارج قسمت یک عدد منفی بر یک عدد مثبت ، منفی است.

علامت خارج قسمت یک عدد منفی بر یک عدد منفی ، مثبت است.

علامت خارج قسمت یک عدد مثبت بر یک عدد منفی ، منفی است.

مثال: اول علامت های صورت و مخرج را تعیین کنید، بعد از آن خارج قسمت ها را به دست آرید:

حل:

$$\frac{(-4) \times (-3)}{(-2) \times (-1)} = , \quad \frac{(+)6 \times (-5)}{(+2) \times (-15)} = , \quad \frac{(+)5 \times (-8)}{(-10) \times (+1)} =$$

در عملیه تقسیم نیز مانند عملیه ضرب عدد های تام، ابتدا علامه حاصل تقسیم را تعیین نموده سپس عمل تقسیم را انجام می دهیم.

$$\frac{(-4) \times (-3)}{(-2) \times (-1)} = \frac{(+)12}{(+2)} = +6 , \quad \frac{(+)6 \times (-5)}{(+2) \times (-15)} = \frac{(-30)}{(-30)} = +1 , \quad \frac{(+)5 \times (-8)}{(-10) \times (+1)} = \frac{(-40)}{(-10)} = +4$$

به یاد داشته باشید که:

در عملیه تقسیم ابتداء علامت حاصل تقسیم را تعیین نموده و سپس قیمت مطلق مقسوم را برابر قیمت مطلق مقسوم علیه تقسیم می نماییم.

تمرین

1- ابتدا تساوی سمت چپ را تکمیل کنید و سپس حاصل تقسیم سمت راست را بنویسید:

$$(-5) \times () = +20 , \quad (20) \div (-5) = , \quad (-138) \div (3) =$$

$$(+)7 \times () = -56 , \quad (-56) \div (+7) = , \quad (-74) \div (-37) =$$

$$() \times (+8) = -40 , \quad (-40) \div (+8) = , \quad (-70) \div (-14) =$$

$$() \times (-5) = -35 , \quad (-35) \div (-5) =$$

2- برای تقسیم کردن حاصل افاده $(-18) - (-6) + (-8)$ بر حاصل افاده (-4) چگونه باید عمل کرد؟

3- عملیه های زیر را تکمیل و جدول مربوطه عملیه ضرب و تقسیم را تشکیل دهید.

$$(-8) \times (+4) = () , \quad (-42) \div (+6) = ()$$

$$(+50) \times () = -200 , \quad () \times (-2) = -72$$

$$() \div (-4) = +20 , \quad (-100) \div () = +100$$

$$(-12) \times (+3) = () , \quad (+60) \div () = (-20)$$

درباره قیمت های افادة های حسابی

$$\begin{aligned} & -3[2-(4-3)-\{1+1-(-1-1)\}] \\ & -3[2-4+3-\{1+1+1+1\}] \\ & -3[2-4+3+1-1-1-1] \\ & -3[-1]=3 \end{aligned}$$

اگر عملیه های چهار گانه (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) در یک سؤال با هم آورده شوند، چه باید کرد؟ آیا سؤال زیر را با استفاده از عملیه های اساسی چهار گانه که تابه حال آموخته اید، حل کرده می توانید؟

$$(5)-\{(-4) \times (-7)\}-\{(-6) \div (+2)\}=?$$

به یاد داشته باشید که:

علامت () را به نام **قوس کوچک**، علامت { } را به نام **قوس متوسط** و علامت [] را به نام **قوس کلان** یاد می نمایند.
برای رفع قوس ها، اولاً قوس کوچک، بعد قوس متوسط و سپس قوس کلان رفع می گردد.
برای محاسبه یا ساده ساختن افادة حسابی مراحل زیر را به کار می بریم:

- اول - اگر در افادة های حسابی طاقت و جذر وجود داشته باشد، اولاً آن را ساده می سازیم.
- دوم - در صورتی که در افادة های حسابی، قوس ها وجود داشته باشد، اول قوس را رفع می نماییم.
- سوم - عملیه های ضرب و تقسیم را از طرف چپ به راست انجام می دهیم.
- چهارم - عملیه های جمع و تفریق را از چپ به راست انجام میدهیم.

مثال: اول

افادة زیر را که یک افادة حسابی است، محاسبه نمایید:

$$(-6 \times 4) \times 2^3 - 5 + \sqrt{49} \div 7 - 10$$

حل:

$$\begin{aligned} & (-6 \times 4) \times 8 - 5 + 7 \div 7 - 10 \\ & -24 \times 8 - 5 + 7 \div 7 - 10 \\ & -192 - 5 + 7 \div 7 - 10 \\ & -192 - 5 + 1 - 10 \\ & -197 + 1 - 10 \\ & -196 - 10 \\ & -206 \end{aligned}$$

مثال دوم: افاده های ساده کنید:

$$\begin{aligned}
 & 23 - [-23 - \{-23 - (-23 - 23 + 23) - 23\} - 23] \\
 &= 23 - [-23 - \{-23 - (-23 + 0) - 23\} - 23] \\
 &= 23 - [-23 - \{-23 + 23 - 23\} - 23] \\
 &= 23 - [-\{-23\} - 23] = 23 - [-23 + 23 - 23] = 23 - [-23 + 0] \\
 &= 23 + 23 = 46
 \end{aligned}$$

مثال سوم: ساده کنید:

$$25 - 42 \div 7 \times 2 + 45 \div 3 \times 5 - 5 \times 9 \div 3 \times 2$$

حل:

$$25 - 6 \times 2 + 15 \times 5 - 5 \times 3 \times 2$$

$$\begin{aligned}
 & 25 - 12 + 75 - 30 = (25 + 75) - (12 + 30) \\
 &= 100 - 42 = 58
 \end{aligned}$$

آموختیم که:

اول - اگر در افاده های حسابی طاقت و جذر وجود داشته باشد، اولاً آن را ساده می سازیم.
 دوم - در صورتی که در افاده های حسابی، قوس ها وجود داشته باشد، اول قوس را رفع می نماییم.

سوم - عملیه های ضرب و تقسیم را از طرف چپ به راست انجام می دهیم.
 چهارم - عملیه های جمع و تفریق را از چپ به راست انجام میدهیم.

تمرین

- | | | |
|----|---|-------------------------------|
| 1) | $\{(-6 \times 4) \times 2\} - \{5 \times (-5 + 3)\} + 20$ | افاده های زیر را ساده بسازید. |
| 2) | $[9 \div \{-(-3) \times (5 - 8)\}] + 10$ | |
| 3) | $10 \times 24 \div \{-(-4) \times (5 - 7)\} - 6$ | 6) $319 + 40 \div 8$ |
| 4) | $[\{5 \times (-4)\} - \{(-5) \times (-1)\}] - 10$ | 7) $220 - 64 \div 2$ |
| 5) | $2 \times \{(-3) + (-2)\} + 8 - 2$ | |

- افاده حسابی $[12 \div 3[-4 + 8\{-3 + 2(-7 + 10) + 3 \times (8 - 2)\} - 1]$ مساوی است به:

- a) 652 b) 256 c) 265

خلاصه فصل سوم

- اعداد $\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots$ را به نام اعداد تام یاد می نمایند.
- ست یا مجموعه اعداد تام را قرار زیر نشان میدهند.
 $I = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots \}$
- محور اعداد عبارت از خط جهت داری است که به روی آن می توانیم اعداد مثبت، اعداد منفی و صفر را نشان دهیم.
- هر عدد تام و متضاد آن به روی محور اعداد به فاصله های مساوی از صفر قرار داشته و دارای علامت های مختلف می باشند و این فاصله را از مبدأ **قیمت مطلقه** می نامند.
- طبق معمول در اعداد مثبت به نوشتن علامت ضرورت نیست.
- برای تفريح نمودن دو عدد تام، اولاً علامه مفروق را تغییر داده و سپس عملیه جمع را انجام می دهیم. یا به عبارت دیگر: متضاد مفروق را با مفروق منه جمع می کنیم.
- حاصل ضرب دو عدد هم علامت مثبت می باشد.
- حاصل ضرب دو عدد مختلف العلامت منفی می باشد.
- در عملیه تقسیم ابتداء علامت حاصل تقسیم را تعیین نموده؛ سپس قیمت مطلقه مقسوم را به قیمت مطلقه مقسوم علیه تقسیم می نماییم.
- علامه () را به نام **قوس کوچک**، علامت { } را به نام **قوس متوسط** و علامه [] را به نام **قوس بزرگ** یاد می نمایند.
برای رفع قوس ها ، اولاً قوس کوچک، بعد قوس متوسط و سپس قوس کلان رفع می گردد. هرگاه علامت منفی خارج قوس قرار داشته باشد. علامت های داخل قوس تغییر می یابد و اگر علامه خارج قوس، مثبت باشد، علامت های داخل قوس تغییر نمی نمایند.

تمرین فصل سوم

- ۱- اعداد تام $-3, -4, -7, 6, 10$ و متضاد آنها را روی محور اعداد نشان دهید.
 ۲- قیمت های مطلقة اعداد $-8, +8, -10, 0, 12$ را بنویسید.
 ۳- تساوی های زیر را تکمیل نمایید:

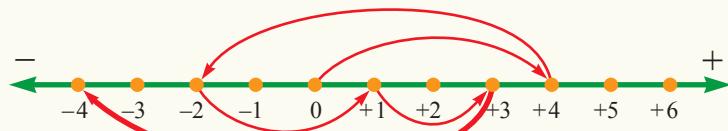
a) $(-6) + 4 =$

b) $5 - (-3) =$

c) $8 + 0 =$

d) $(-8) + 0 =$

- ۴- حاصل جمع سه عدد تام $(-4), (+2)$ و (-1) را روی یک محور نشان دهید.
 ۵- حرکت روی محور اعداد توسط تیر قرار شکل زیر نشان داده شده است. این اعداد را جمع نموده و نتیجه را حاصل نمایید.



۶- از افاده $+10 - (-7) - (-4) - (-6)$ را تغفیر کنید.

۷- حاصل ضرب های زیر را به دست آورید:

a) $(-8 + 2 - 4) \times (-5 + 2 - 1) =$

b) $-(-4 + 6 - 3) \times (-5 + 0) =$

c) $(6 - 10) \times (-7 + 3 \times 2) =$

۸- حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید:

b) $(-16 + 4) \div (-2) \times (3) =$

c) $-(+10 + 8) \div (-6 \div 2) =$

۹- افاده زیر را ساده سازید:

$$(-6) \div (-2) - [(10) \div \{(-2) + (+2^2 \times 3)\}] - 2 =$$

۱۰- افاده زیر را ساده سازید

$$4 - [-5 + \{-4 + (-5 + 4) - 5\} + 4] - 5$$

فصل چهارم

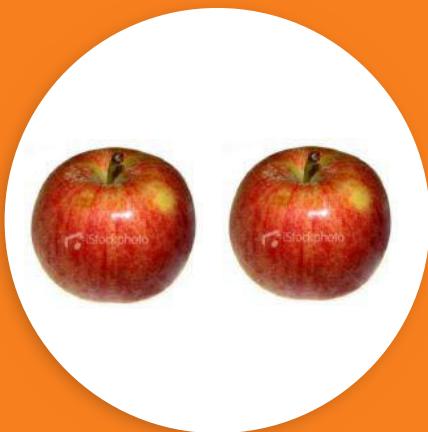
اعداد نسبتی



این پرنده $\frac{53}{500} \text{ kg}$ وزن دارد.
وزن این پرنده با یک عدد نسبتی نشان داده شده است.

اعداد نسبتی

آیا فکر کرده اید، چگونه می توان دو سیب را به صورت مساوی بین سه نفر تقسیم نمود؟



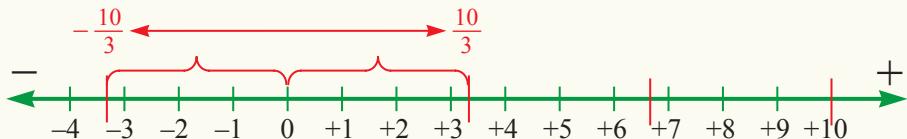
فعالیت

- ۱- یک تار را به طول 10cm در نظر بگیرید.
- ۲- تار را به سه قسمت مساوی تقسیم نمایید.
- ۳- به کمک خط کش درجه دار هرسه قسمت را اندازه کنید.

از فعالیت بالا معلوم می شود که طول به دست آمده از 3 سانتی متر بزرگتر و از 4 سانتی متر کوچکتر است.

بنابر این نمی توان آن را به صورت یک عدد تام نشان داد لذا به ست اعداد دیگری نیاز است که به کمک آن بتوان عدد بالا را نشان داد. در این فعالیت، چون 10 بر 3 حصة مساوی تقسیم شده است، بنابر این می توانیم به شکل $\frac{10}{3}$ نشان دهیم و این نوع اعداد جدید را به نام اعداد نسبتی یاد می کنند.

حالا می خواهیم به کمک محور اعداد، عدد نسبتی $\frac{10}{3}$ را نشان دهیم.

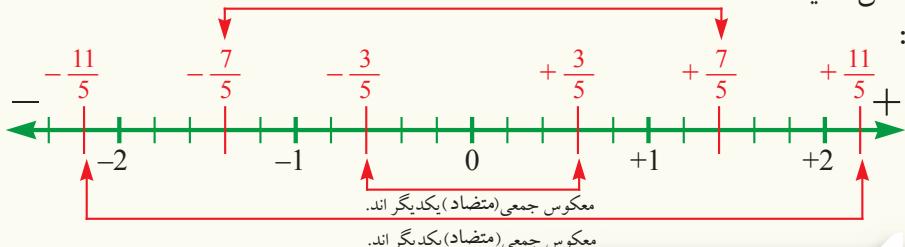


همان طوری که هر عدد تام، دارای عدد متضاد (معکوس جمعی) است، عدد نسبتی نیز دارای عدد متضاد می باشد.

طور مثال متضاد $\frac{10}{3}$ عدد $\frac{10}{3}$ است که در شکل بالا نشان داده شده است.

مثال: اعداد نسبتی $\frac{11}{5}$ ، $\frac{7}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ و $\frac{3}{5}$ را روی محور اعداد مشخص نموده و متضاد آنها را نیز نشان دهید.

حل:



فعالیت

- 1- ابتدا سه واحد را روی محور اعداد جدا کنید.
- 2- این سه واحد را به چهار قسمت مساوی تقسیم نمایید.
- 3- هر قسمت نشان دهنده کدام عدد نسبتی است؟
- 4- یک واحد را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید و $\frac{3}{4}$ را روی آن نشان دهید.
- 5- متضاد این اعداد کدام است؟ روی محور نشان دهید.

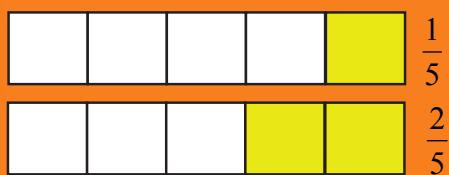
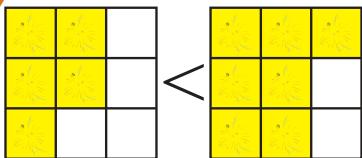
اگر کسر $\frac{3}{4}$ را روی محور نشان دهیم و نتیجه فعالیت بالا را با آن مقایسه نماییم، دیده می شود که عدد نسبتی $\frac{3}{4}$ با کسر عام $\frac{3}{4}$ یکی می باشد، بنابرآن: یک عدد نسبتی عبارت از عددی است که به شکل $\frac{n}{d}$ نشان داده می شود، عددهای n و d اعداد تام بوده و $d \neq 0$ می باشد. کسور اعشاری ختم شدنی و متوالی نیز اعداد نسبتی اند.

تمرین

- 1- در یک محور اعداد هر واحد را به 3 حصة مساوی تقسیم نموده و اعداد نسبتی $\frac{5}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ و $\frac{7}{3}$ را روی محور اعداد نشان دهید.
- 2- هر واحد را روی محور به 4 حصة مساوی تقسیم کنید و هر حصه را a بنامید؛ سپس عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ و متضاد آن را روی محور نشان داده و در ضمن نوشته کنید که عدد $\frac{5}{4}$ چند a از عدد $\frac{5}{4}$ دور است؟
- 3- یک محور را طوری تقسیم بندی کنید که اعداد نسبتی $\frac{3}{5}$ ، $-\frac{4}{5}$ ، $\frac{7}{5}$ و $-\frac{6}{5}$ به شکل واضح روی محور نشان داده شده باشد.

مقایسه اعداد نسبتی

در کدام تصویر، ساحة بیشتری با گل پوشیده شده است؟



آیا می توانید بگویید که در اعداد نسبتی فوق کدام عدد بزرگتر می باشد؟

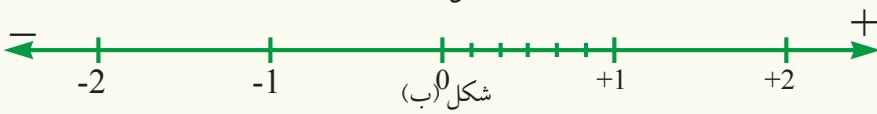
فعالیت

1- عدد نسبتی $\frac{1}{3}$ را روی محور شکل (الف) نشان دهید.

2- عدد $\frac{2}{6}$ را روی محور شکل (ب) نشان دهید.

3- عدد $\frac{3}{9}$ را روی محور شکل (پ) نشان دهید.

4- از مقایسه 3 عدد فوق روی محورهای زیر چه نتیجه یی به دست می آید؟



طوری که ملاحظه می شود در فعالیت فوق، اعداد نسبتی $\frac{3}{9}$ ، $\frac{2}{6}$ و $\frac{1}{3}$ دارای عین قیمت می باشند و یا هر سه کسر عام با هم معادل اند.

فعالیت

1- روی محور اعداد، عدد نسبتی $\frac{3}{4}$ را نشان دهید.

۲- عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ را نیز روی همین محور نشان دهید.

۳- عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ بزرگتر است یا $\frac{3}{4}$ ؟

۴- در مقایسه اعداد فوق، بگویید کدام عدد روی محور در سمت راست عدد دیگر واقع است؟

از فعالیت فوق نتیجه به دست می آید که بالای محور اعداد، عدد نسبتی که به طرف راست عدد واقع باشد از عددی که به طرف چپ واقع است بزرگتر می باشد؛ چنانچه در اعداد تام نیز مشاهده کردہ اید.

مثال اول: اعداد نسبتی $\frac{3}{4}$ و $\frac{3}{5}$ را باهم مقایسه کنید و بگویید که کدام عدد بزرگتر است؟

حل: چون صورت ها با هم مساوی اند ($3=3$) کسری که مخرج آن بزرگتر است کوچکتر

می باشد در نتیجه $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$ می باشد.

حالا دو عدد نسبتی که مخرج ها و صورت هایشان با هم مساوی نیستند مانند $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ را درنظر می گیریم.

برای مقایسه این چنین اعداد، ابتدا آنها را هم مخرج می کنیم، یعنی:

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{35} \quad , \quad \frac{4}{7} \times \frac{5}{5} = \frac{20}{35}$$

دیده می شود که: $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$ است، بنابرآن: $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$ می باشد.

مثال دوم: در دو عدد نسبتی $\frac{4}{9}$ و $\frac{7}{12}$ ، کدام عدد نسبتی بزرگتر است؟

حل: $\frac{4}{9} \times \left(\frac{12}{12}\right) = \frac{48}{108} \quad , \quad \frac{7}{12} \times \left(\frac{9}{9}\right) = \frac{63}{108}$

لذا نوشته می توانیم که: $\frac{63}{108} > \frac{48}{108}$ و از اینجا نتیجه می شود که: $\frac{7}{12} > \frac{4}{9}$

در مقایسه اعداد نسبتی که مخرج هایشان با هم مساوی باشند عددی که صورت آن بزرگ است بزرگتر می باشد و اگر صورت های شان با هم مساوی باشند عددی که مخرج آن بزرگ است کوچکتر می باشد و برای دو یا چندین اعداد که اگر، نه صورت ها و نه مخرج های شان با هم مساوی باشند در این صورت اعداد نسبتی را هم مخرج می نماییم یا به عباره دیگر کوچکترین مضرب مشترک را در می یابیم و بعد با هم مقایسه می کنیم.

تمرین

اعداد نسبتی زیر را باهم مقایسه کنید.

- a) $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ b) $\frac{5}{7}, \frac{-6}{11}$ c) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$ d) $\frac{-8}{5}, \frac{-11}{7}$ e) $\frac{5}{9}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}$

عملیه های جمع و تفریق اعداد

نسبتی



برای ساختن یک چادر، $\frac{1}{3}$ متر تکه لازم است، و برای ساختن یک دستمال گردن به $\frac{2}{5}$ متر دیگر از همان تکه ضرورت داریم. اگر تمام تکه مورد ضرورت از تکه بی که طول آن $\frac{1}{2}$ متر باشد، قطع گردد، چقدر تکه دیگر باقی می ماند؟

فعالیت

- 1- ابتدا $\frac{1}{2}$ - را روی محور اعداد نشان دهید و آنرا نقطه A بنامید.
- 2- از نقطه A به اندازه $\frac{13}{10}$ به سمت راست حرکت کنید و آنرا B بنامید.
- 3- نقطه B معادل کدام عدد نسبتی است؟
- 4- با استفاده از مخرج مشترک، حاصل جمع $\frac{1}{2} + \frac{13}{10}$ - را پیدا کنید.
- 5- حاصل جمع $\frac{2}{6} + \frac{3}{6}$ و حاصل تفریق $\frac{5}{6} - \frac{4}{6}$ را دریابید.

مثال اول: اعداد نسبتی زیر را از طریق یافتن مخرج مشترک و یا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها، جمع کنید:

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{12} = \frac{60+126}{216} = \frac{186}{216} = \frac{93}{108} = \frac{31}{36}$$

حالا اگر در این مثال کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را پیدا کنیم، می توانیم عملیه جمع را قرار زیر انجام دهیم:

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

$$12 = 3 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^2$$

دیده می شود که کوچکترین مضرب مشترک 18 و 12 عبارت از $3^2 \times 2^2 = 36$ است، بنابرآن داریم که:

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{12} = \frac{10+21}{36} = \frac{31}{36}$$

فعالیت

- 1- ابتدا عدد نسبتی $\frac{5}{6}$ را روی محور نشان دهید و آنرا A بنامید.
- 2- از نقطه A به اندازه $\frac{1}{4}$ به طرف چپ محور بروید، به کدام نقطه می رسید؟
- 3- حاصل تفریق $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$ را با استفاده از دریافت کوچکترین مضرب مشترک به دست آورید.

مثال دوم: از عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ عدد نسبتی $\frac{2}{3}$ را تفریق کنید.
حل:

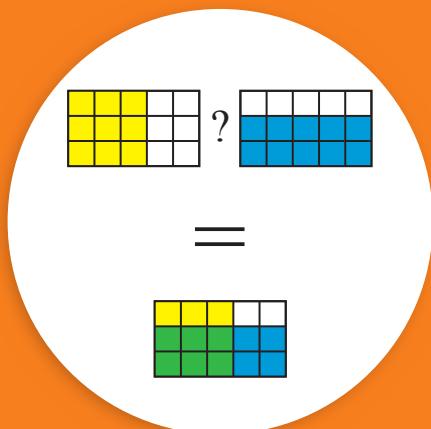
$$\frac{5}{4} - \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{15-8}{12} = \frac{7}{12}$$

چه در جمع و چه در تفریق اعداد نسبتی، کافی است ابتدا مخرج مشترک را دریابیم و سپس صورت ها را جمع یا تفریق نماییم.

تمرین

- 1- حاصل جمع اعداد نسبتی زیر را به دست آورید.
a) $\frac{4}{5} + \frac{-6}{5} =$, b) $\frac{7}{3} + \frac{3}{4} =$, c) $\frac{-5}{8} + \frac{-7}{12} =$, d) $\frac{-9}{16} + \frac{3}{8} =$
- 2- عدد نسبتی $\frac{5}{2}$ را روی محور اعداد نشان داده و از آن، عدد نسبتی $\frac{3}{2}$ را تفریق نمایید.
- 3- یک شاگرد در روز اول، $\frac{1}{5}$ حصه یک کتاب را و در روز دوم $\frac{2}{5}$ حصه همان کتاب را مطالعه کرد. چند حصه کتاب مذکور باقی مانده است؟

ضرب و تقسیم اعداد نسبتی



شکل مقابل نشان دهنده چه رابطه‌یی بین مستطیل‌ها است؟

فعالیت

- 1- یک نخ را به طول یک واحد در نظر گرفته آنرا نصف کنید.
- 2- این نصف‌ها را به سه حصه مساوی تقسیم نمایید.
- 3- طول هر حصة به دست آمده، کدام قسمت واحد است؟
- 4- چه رابطه‌یی را بین $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ می‌توانید مشاهده کنید؟

برای ضرب دو عدد نسبتی، صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می‌کیم.

مثال اول: $\frac{2}{7}$ را در $(-\frac{3}{4})$ ضرب کنید.

$$(\frac{2}{7}) \times (-\frac{3}{4}) = \frac{2}{7} \times \frac{(-3)}{4} = \frac{(-6)}{28} = \frac{-3}{14} = -\frac{3}{14} = \frac{3}{-14}$$

حل:

مثال دوم: عدد نسبتی $(-\frac{8}{15})$ را در عدد نسبتی $(-\frac{3}{4})$ ضرب نمایید:

$$(-\frac{8}{15}) \times (-\frac{3}{4}) = (\frac{-8}{15} \times \frac{-3}{4}) = \frac{(-8) \times (-3)}{15 \times 4} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

حل:

مثال سوم: $\frac{2}{9}$ حصه عدد 702 چند می‌شود؟

$$702 \times \frac{2}{9} = \frac{1404}{9} = 156$$

حالا تقسیم دو عدد نسبتی را در مثال های زیر بررسی می کنیم.

مثال چهارم: $\frac{7}{10}$ را بر $\frac{3}{5}$ تقسیم کنید.

$$\text{حل: } \frac{7}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$$

مثال پنجم: عدد نسبتی $(-3\frac{1}{2})$ را بر عدد نسبتی $(-\frac{2}{3})$ تقسیم نمایید.

$$\text{حل: } (-3\frac{1}{2}) \div (-\frac{2}{3}) = (-\frac{7}{2}) \div (-\frac{2}{3}) = (-\frac{7}{2}) \times (-\frac{3}{2}) = \frac{21}{4}$$

در عملیه ضرب اعداد نسبتی صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم و در عملیه تقسیم عدد دوم نسبتی (مقسوم علیه) معکوس می شود و بعد از آن مانند عملیه ضرب عمل می شود.

تمرین

1- اعداد زیر را در هم ضرب نموده جواب آنها را به ساده ترین شکل بنویسید.

a) $\frac{41}{5} \times \frac{13}{2}$, b) $(\frac{-12}{3} \times \frac{-5}{6})$, c) $\frac{15}{16} \times (\frac{-12}{5})$

d) $(\frac{7}{-11}) \times (\frac{-13}{9})$, e) $(-\frac{16}{15}) \times \frac{3}{4}$, f) $(-\frac{8}{3}) \times \frac{4}{5} \times (-\frac{3}{4})$

2- حصة عدد 111 چند می شود؟ $\frac{2}{3}$

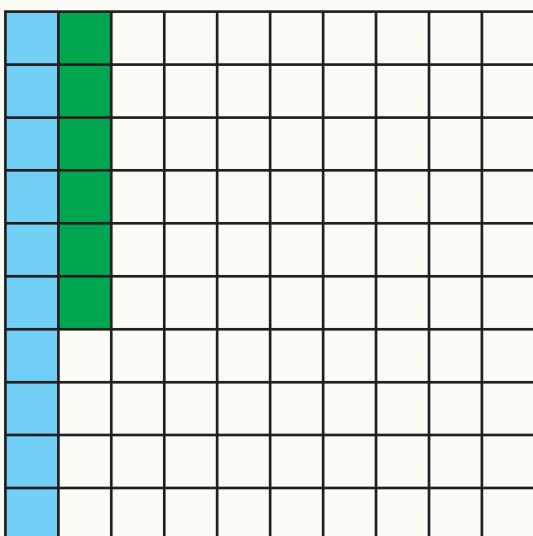
3- حصة کدام عدد 48 می شود؟ $\frac{3}{5}$

تبدیل عدد نسبتی به عدد اعشاری



احمد و برادرش قرار است که کاری را در
چهار روز انجام دهند. در انتهای روز اول
احمد از برادرش پرسید تا حالا چند فیصد
کار را انجام داده‌ایم؟

فعالیت



- چند خانهٔ مربع در شکل مقابل رنگ است؟
 - چه کسری از مربع ها، رنگ آبی دارند؟ این مقدار را با عدد اعشاری نشان دهید.
 - چه کسری از مربع ها، رنگ سبز دارند؟ این مقدار را با یک عدد اعشاری نشان دهید.
 - چه کسری از مربع ها رنگ شده‌اند؟ این مقدار را با یک عدد اعشاری نشان دهید.

$$\begin{aligned}
 & \text{مثال اول: عدد نسبتی } \frac{257363}{100} \text{ را به صورت عدد اعشاری نمایش دهید.} \\
 & \text{حل:} \\
 & \frac{257363}{100} = 2573 \frac{63}{100} = 2573 + \frac{63}{100} \\
 & = 2573 + \frac{60}{100} + \frac{3}{100} \\
 & = 2573 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} = 2573.63
 \end{aligned}$$

در این حالت 2573 را جزء صحیح عدد و 0.63 را جزء اعشاری عدد مذکور می‌نامند.

فعالیت

اعداد 2.3125 و 0.412 را به صورت اعداد نسبتی بنویسید.

$$2.3125 = 2 + \frac{(\quad)}{10} + \frac{(\quad)}{100} + \frac{(\quad)}{1000} + \frac{(\quad)}{10000} = \frac{(\quad)}{10000}$$

$$0.412 = 0 + \frac{(\quad)}{10} + \frac{(\quad)}{100} + \frac{(\quad)}{1000} = \frac{(\quad)}{1000}$$

مثال دوم: عدد 2,32 را به صورت عدد نسبتی بنویسید.

$$2.32 = 2 + 0.3 + 0.02 = \frac{200}{100} + \frac{30}{100} + \frac{2}{100} = \frac{232}{100}$$

حل:

می‌توانیم اعداد نسبتی را به شکل اعداد اعشاری و اعداد اعشاری را به شکل اعداد نسبتی تبدیل نماییم.

تمرین

۱- اعداد اعشاری 0.212 ، 0.420 و 5.215 را به شکل اعداد نسبتی نشان دهید.

۲- اعداد نسبتی $\frac{2410}{10000}$ ، $\frac{235}{100}$ و $\frac{4250}{1000}$ را به شکل اعداد اعشاری بنویسید.

۳- اعداد اعشاری 0.5 ، 1.5 و 1.25 را روی محور اعداد نشان دهید.

۴- در جدول زیر، جزء صحیح و جزء اعشاری هر عدد را در محل‌های مشخص شده وارد کنید.

عدد اعشاری	جزء صحیح	جزء اعشاری
12.1		
13.25		
1.7394		
0.16		

خلاصه فصل چهارم

- یک عدد نسبتی عبارت از عددی است که معمولاً به شکل $\frac{n}{d}$ نشان داده می‌شود، در صورتیکه n و d اعداد تام بوده و $d \neq 0$ می‌باشد.

اعداد نسبتی به نام اعداد گویا، اعداد ناطق Rational Numbers یاد می‌شوند.

- همانطوری که هر عدد تام بدون صفر دارای عدد متضاد است، هر عدد نسبتی نیز دارای عدد متضاد می‌باشد.

- ساده ساختن اعداد نسبتی مانند ساده ساختن کسرعام بوده و در صورتی که صورت و مخرج به یک عدد قابل تقسیم باشند، آن را تقسیم می‌کنیم تا به اعدادی بررسیم که دیگر قابل تقسیم نباشند.

- در دو عدد نسبتی همان عدد بزرگتر است که در روی محور اعداد نظر به عدد دیگری، طرف راست قرار دارد؛ چنانچه در مورد اعداد تام نیز مشاهده کرده اید.

- در مقایسه دو عدد نسبتی که صورت‌ها و مخرج‌های شان با هم مساوی نباشند، در اول باید این دو عدد را هم مخرج نموده و سپس با هم مقایسه کنیم.

- جمع دو عدد نسبتی مانند جمع اعداد کسرعام است، طوریکه اول کوچکترین مخرج مشترک را پیدا نموده و سپس صورت‌ها را مانند اعداد تام باهم جمع می‌کنیم.

- عملیه تفریق در اعداد نسبتی مانند عملیه جمع است، با این تفاوت که در عملیه تفریق فقط علامت مفروق تغییر می‌کند و سپس عملیه جمع بالای آن تطبیق می‌گردد.

- در جمع و تفریق اعداد نسبتی می‌توانیم از محور اعداد نیز استفاده نماییم؛ چنانچه در مورد اعداد تام نیز از آن استفاده کردیم.

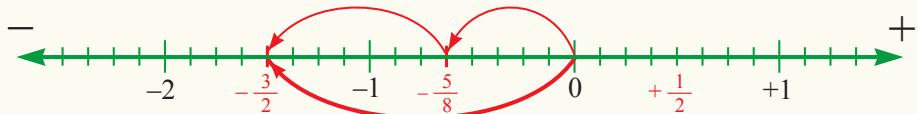
- در عملیه ضرب اعداد نسبتی، صورت‌ها در هم‌دیگر و مخرج‌ها در هم‌دیگر ضرب می‌شوند؛ اما در عملیه تقسیم، اول مقسوم علیه معکوس می‌گردد و سپس عملیه ضرب را انجام می‌دهیم.

تمرین فصل چهارم

۱- اعداد نسبتی زیر را روی محور اعداد نشان دهید:

a) $-\frac{4}{3}$, b) $-\frac{7}{3}$, c) $-\frac{1}{3}$, d) $\frac{2}{3}$, e) $\frac{7}{3}$

۲- در محور اعداد زیر، اعداد نسبتی را که باهم جمع شده است توسط اعداد بنویسید.



۳- از عدد نسبتی $\frac{5}{2}$ عدد نسبتی $\frac{1}{2}$ را تفریق نمایید و به روی محور اعداد نشان دهید.

۴- عملیه های زیر را انجام دهید:

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{7}, \quad \frac{-6}{5} + \frac{4}{3}$$

۵- عدد نسبتی $\frac{-6}{5}$ را به عدد اعشاری تبدیل نموده و به روی محور اعداد نشان دهید و همچنین متضاد آن را به شکل اعشاری نوشته کنید.

۶- اعداد اعشاری زیر را به شکل اعداد نسبتی بنویسید.

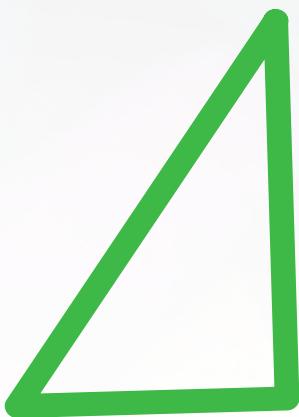
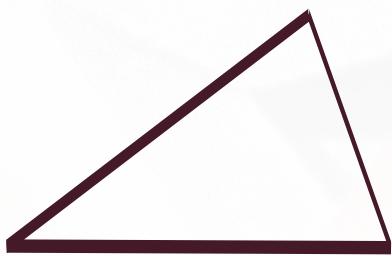
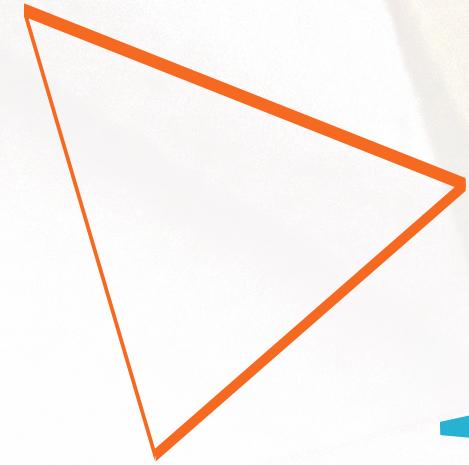
$$0.340, \quad 2.342, \quad 5.2345, \quad 1.23412$$

۷- دو عدد اعشاری ۳.۲۳۴ و ۴.۵۴۳ را به اعداد نسبتی نشان دهید.

۸- اعداد اعشاری ۱.۲۵ و ۲.۵ را به اعداد نسبتی نشان داده و هم متضاد آنها را به شکل اعداد نسبتی به روی محور اعداد نشان دهید.

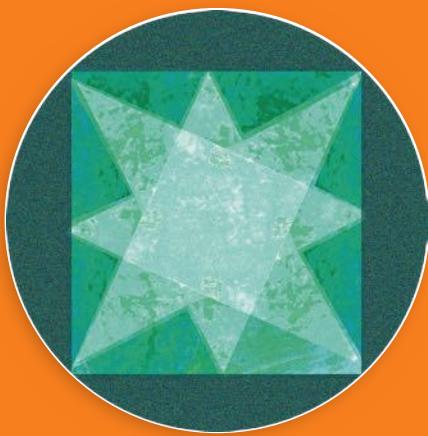
فصل پنجم

مثلث ها و چند ضلعی ها



مثلث‌ها در اطراف ما هستند!

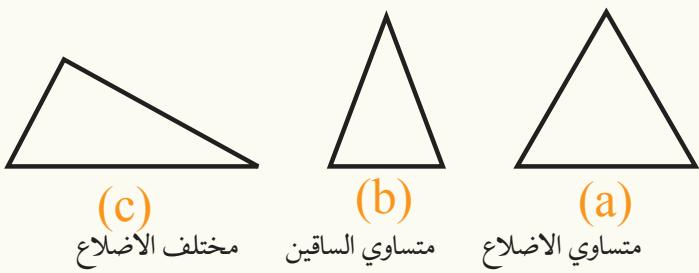
اقسام مثلث از حیث اضلاع



در شکل مقابل کدام اشکال هندسی را مشاهده می کنید؟

مثلث‌ها را می‌توانیم از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم‌بندی کنیم:

- مثلثی که سه ضلع آن با هم مساوی باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویه آن نیز با هم برابراند.
- مثلثی که دو ضلع آن با هم مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین نامیده می‌شود، هر یک از ضلع‌های متساوی در مثلث متساوی‌الساقین را ساق مثلث و ضلع سوم را قاعده مثلث می‌نامند. و در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه کنار ساق‌ها با هم مساوی‌اند.
- مثلثی که طول هیچ جوره از اضلاع آن با هم مساوی نیستند، مثلث مختلف‌الاضلاع نامیده می‌شود.



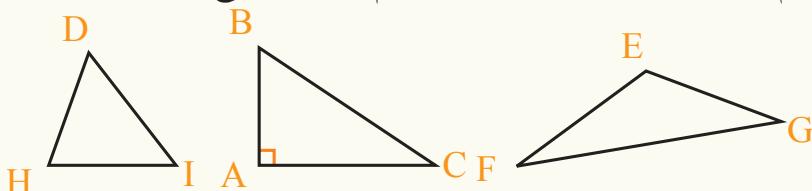
اقسام مثلث نظر به زاویه‌ها:

مثلث‌ها را از حیث زاویه نیز به سه دسته تقسیم کرده‌اند:

- مثلثی که در آن یک زاویه قایمه وجود دارد، مثلث قایم‌زواویه نامیده می‌شود.
- مثلثی که در آن یک زاویه بزرگتر از 90° وجود دارد، مثلث منفرجه‌زاویه نامیده می‌شود.

- مثلثی را که در آن تمام زاویه‌های آن کوچکتر از 90° است، مثلث حاده الزاویه می‌نامند.

مثال: کدام یک از مثلث‌های زیر حاده الزاویه، قایم الزاویه و منفرج الزاویه است؟



حل: ابتدا زاویه‌های مثلث‌ها را اندازه می‌گیریم:

- مثلث BAC که یک زاویه آن (90°) می‌باشد، مثلث قایم الزاویه است.

- مثلث EGF که یک زاویه آن بزرگ‌تر از 90° است، مثلث منفرج الزاویه می‌باشد.

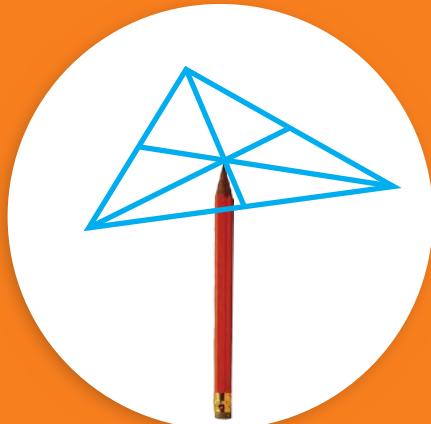
- مثلث DHI که تمام زاویه‌های آن کوچکتر از 90° است، مثلث حاده الزاویه می‌باشد.

در تقسیم مثلث از حیث زاویه‌ها، زاویه قایمه را معیار قرار می‌دهند.

تمرین

- 1- یک مثلث متساوی الاضلاع را رسم کنید که هر ضلع آن 4cm باشد.
- 2- در یک مثلث که طول اضلاع آن 5cm، 4cm و 8cm باشد این مثلث به کدام نام یاد می‌شود؟
- 3- مثلثی را رسم نمایید که یک ضلع آن 3cm بوده و دو زاویه مجاور آن هریک 60° باشد، نوعیت این مثلث را معرفی نمایید.
- 4- مثلثی که دو ضلع آن با هم مساوی و زاویه بین آنها 90° باشد چه نوع مثلثی بوده، از حیث اضلاع و زوایا، کدام نوع مثلث می‌باشد؟
- 5- مثلثی رسم کنید که یک زاویه آن 120° بوده و یک ضلع مجاور این زاویه 4cm باشد، چند تا از این مثلث رسم کرده می‌توانید؟
- 6- یک مثلث منفرج الزاویه رسم کنید که زاویه منفرجه آن 100° بوده و طول دو ضلع مجاور این زاویه 4cm و 6cm باشند.

میانه، ارتفاع و ناصف الزاویه مثلث

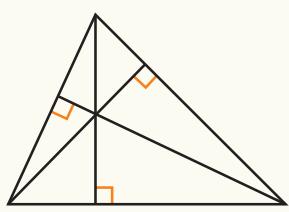


تا به حال سعی کرده اید، یک پنسل را عمود بگذارید و یک شی مثلثی شکل را روی آن قرار دهید؟

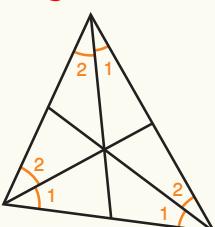
فعالیت

- یک مثلث کیفی $\triangle ABC$ رسم کنید.
- سه ارتفاع این مثلث را ترسیم کنید.
- آیا نقطه یی را پیدا کرده می توانید که هر سه ارتفاع مثلث در آن نقطه همدیگر را قطع کرده باشند؟
- سه میانه این مثلث را رسم نموده، آیا هر سه میانه در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند؟
- سه ناصف الزاویه این مثلث را رسم کنید. آیا سه ناصف الزاویه هم، یکدیگر را در یک نقطه قطع می نمایند؟

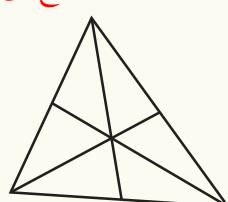
فعالیت بالا نشان می دهد که در یک مثلث، سه ارتفاع، سه میانه و سه ناصف الزاویه یکدیگر را در یک نقطه قطع می نمایند.



ارتفاع



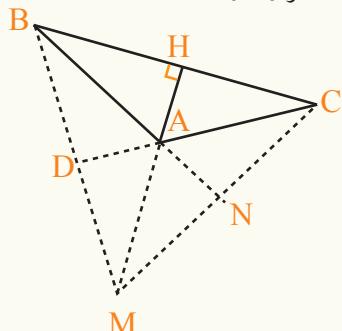
ناصف الزاویه



میانه

مثال اول: یک مثلث منفرج الزاویه $\triangle ABC$ را رسم کنید. نقطه بی را پیدا کنید که در آن سه ارتفاع هم‌دیگر را قطع می‌نمایند.

حل: در یک مثلث منفرج الزاویه، چون بعضی ارتفاع‌ها در خارج مثلث واقع‌اند، بنابرآن نقطه تقاطع آن‌ها نیز خارج مثلث قرار دارد.



میانه: قطعه خطی است که نقطه تنصیف ضلع مثلث را با راس مقابل وصل می‌نماید.

ارتفاع: قطعه خطی است که از راس مثلث به ضلع مقابل عمود باشد.

ناصف الزاویه: قطعه خطی است که زاویه مثلث را تنصیف می‌سازد.

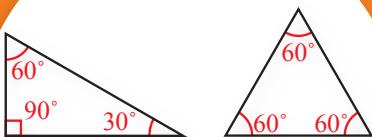
میانه‌ها، ارتفاع‌ها و ناصف الزاویه‌های یک مثلث در یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند.

تمرین

- 1- یک مثلث قایم الزاویه رسم کنید و نقطه تقاطع میانه‌ها را در آن نشان دهید.
- 2- ارتفاع‌های مثلثی را رسم کنید که اضلاع آن 3cm ، 5cm و 6cm باشد.
- 3- یک مثلث متساوی الساقین که طول هر ساق آن 4cm و قاعده آن 6cm است، رسم کنید، نقطه تقاطع ناصف الزوایای آن را پیدا کنید.
- 4- یک مثلث متساوی الاضلاع ترسیم نموده میانه‌ها، ارتفاع‌ها و ناصف الزاویه‌های آن را نشان دهید. چه نتیجه‌یی در آن مشاهده می‌کنید؟

زاویه خارجی یک مثلث و مجموع زاویه های داخلی مثلث

آیا مجموع زاویه های داخلی تمام مثلث ها
باهم مساوی اند؟



$$60^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ$$

?

مجموع زاویه های داخلی در تمام مثلث ها 180° بوده و به نوعیت مثلث ارتباط ندارد.

مثال اول: در مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$, اندازه یکی از زاویه های متساوی آن برابر به 70° است، اندازه زاویه سومی دیگر مثلث را پیدا کنید.

حل: چون مثلث، متساوی الساقین است؛ بنا بر این دو زاویه مجاور دو ساق با هم برابرند.

$$\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$$

پس:

چون مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است، بنابر آن می توان نوشت که:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ , \quad 70^\circ + 70^\circ + \hat{A} = 180^\circ , \quad 140^\circ + \hat{A} = 180^\circ$$

از اینجا معلوم می شود که $\hat{A} = 40^\circ$ است.

فعالیت

یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید که هر ضلع قایم آن 5cm باشد، دو زاویه دیگر این مثلث چند درجه است؟ اول بدون اندازه گیری پیدا کنید و بعد توسط اندازه گیری دریابید.

زاویه خارجی یک مثلث:

در هر مثلث زاویه‌یی که از امتداد یکی از اضلاع با ضلع دیگر مثلث تشکیل می‌شود زاویه خارجی نام دارد. اندازه هر زاویه خارجی در یک مثلث متساوی به مجموعه دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است.

مثال دوم: در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین می خواهیم اندازه زاویه خارجی را

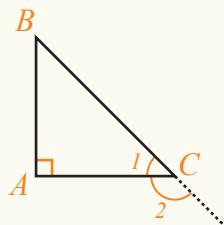
که از امتداد وتر آن به دست می‌آید، اندازه بگیریم. آیا در این وضعیت فرق می‌کند که وتر را به کدام جهت امتداد دهیم؟

حل: چون مثلث قائم الزاویه است؛ پس یک زاویه 90° دارد. چون متساوی الساقین است، پس هر یک از زاویه‌های حاده آن 45° است.

$$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\hat{C}_2 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

چون دو زاویه حاده با هم متساوی اند، لذا:



زاویه‌های خارجی آن‌ها نیز با هم متساوی اند و فرقی نمی‌کند که زاویه خارجی به کدام طرف وتر قرار داشته باشد.

مثال سوم: در مثلث ABC ، $\hat{A} = 50^\circ$ و $\hat{B} = 70^\circ$ است.

$$\text{زاویه خارجی } C \text{ چند درجه است؟}$$

$$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B} = 50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$$

مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° می‌باشد و به نوعیت مثلث ارتباط ندارد.

زاویه خارجی یک مثلث متساوی به مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور این مثلث می‌باشد.

تمرین

۱- اگر در یک مثلث متساوی الساقین، زاویه بین دو ساق برابر به 50° باشد، هر یک از زاویه‌های دیگر آن چند درجه است؟

۲- در یک مثلث متساوی الاضلاع، هر زاویه آن چند درجه است؟

۳- اندازه زاویه‌های خارجی در مثلث متساوی الاضلاع چه رابطه‌یی با هم دارند؟

۴- یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید که اضلاع آن 3cm ، 4cm و 5cm باشد؛ سپس مجموع زاویه‌های خارجی آن را پیدا نمایید.

۵- آیا می‌توانید با چند مثال نشان دهید که مجموع زاویه‌های خارجی مثلث‌ها دارای مقدار ثابت است؟

۶- مجموع زاویه‌های خارجی در یک مثلث، چند برابر مجموع زاویه‌های داخلی آن می‌باشد؟

چند ضلعی ها (مضلع ها)



در تصویر مقابل کدام چند ضلعی ها را مشاهده می کنید؟

فعالیت

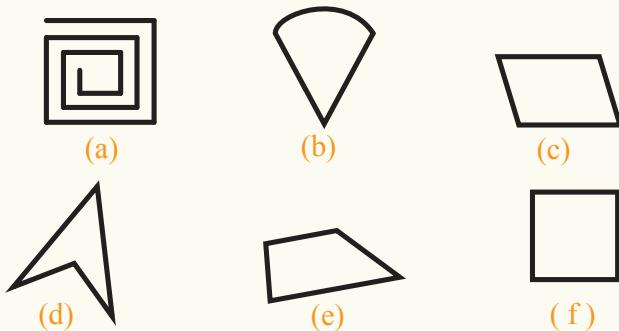


- به جدول زیر نگاه کنید. شکل های ستون ها را با هم مقایسه کنید.

چند ضلعی نیست	چند ضلعی است	چند ضلعی منظم

- شکل های ستون اول و دوم را از چپ به راست با هم مقایسه کنید.
- در چه صورت یک شکل را چند ضلعی می نامیم و در چه صورتی یک شکل، چند ضلعی نیست؟
- زاویه های یک چند ضلعی منظم را اندازه بگیرید و بگویید که با هم چه رابطه بی دارند؟ آیا این خصوصیات در تمام چند ضلعی ها وجود دارند؟

از فعالیت فوق دیده می شود که یک چند ضلعی عبارت از خط منكسر بسته بی است که فقط یک ناحیه بسته را در بر داشته باشند.
اگر اندازه زاویه ها و اضلاع یک چند ضلعی با هم مساوی باشند، چند ضلعی منظم نامیده می شود و چند ضلعی بی که اضلاع و زوایای آن مساوی نباشند، به نام چند ضلعی غیر منظم یاد می گردد.
مثال: کدام یک از شکل های زیر یک چند ضلعی است؟



حل:

شکل (a) یک شکل بسته نیست؛ پس یک چند ضلعی نیست.

شکل (b) خط منكسر بسته نیست؛ پس یک چند ضلعی نیست.

شکل (c) خط منكسر بسته است؛ پس یک چند ضلعی است.

شکل (d) خط منكسر بسته است؛ پس یک چند ضلعی می باشد.

شکل (e) خط منكسر بسته است؛ پس چند ضلعی است.

شکل (f) خط منكسر بسته است و در بین تمام اشکال فوق یگانه شکلی است که اضلاع آن باهم مساوی است، بنابر آن یک چند ضلعی منظم است و سایر چند ضلعی های فوق به نام چند ضلعی غیر منظم نامیده می شوند که از تقاطع چند خط تشکیل می شود.

چند ضلعی ها، ناحیه های بسته یی هستند، طوری که از تقاطع چند قطع خط تشکیل می شود و هیچ دو خط آن به امتداد یک خط مستقیم نباشدو هر رأس مضلع فقط و فقط نقطه تقاطع دو قطعه خط باشد.

تمرین

1- از تمام اشکالی که تا به حال می شناسید، چند ضلعی ها را نام ببرید.
2- در چند ضلعی هایی که تا حال می شناسید کدام هایشان چند ضلعی های منظم را تشکیل میدهند؟.

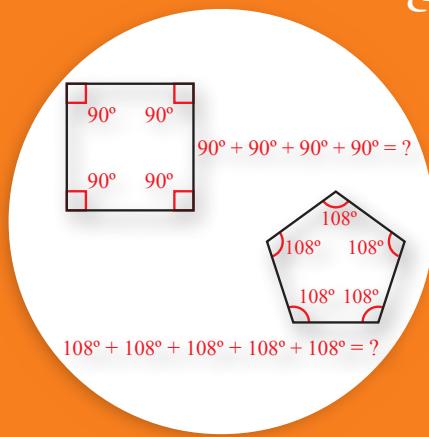
3- آیا مستطیل، ذوزنقه و معین چند ضلعی های منظم هستند؟ چرا؟

4- آیا یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین یک چند ضلعی منظم است؟ چرا؟

5- آیا یک مثلث متساوی الاضلاع، یک چند ضلعی منظم است؟ چرا؟

6- اگر سه شکل یعنی: مستطیل، یک دایره و یک مربع را در نظر بگیریم، کدام یک آنها، چند ضلعی نیست و کدام یک چند ضلعی منظم و کدام یک چند ضلعی غیر منظم است؟

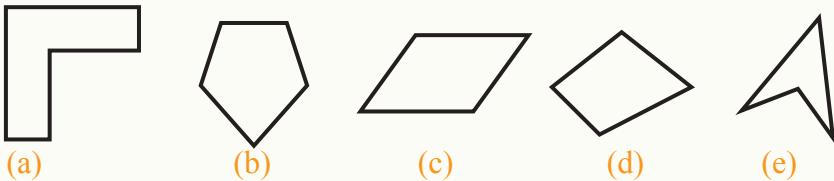
مجموع زاویه‌های داخلی یک مضلع



در هر یک از مضلعهای مقابله مجموع زوایای داخلی آن چند درجه است؟

فعالیت

- در اشکال زیر هر ضلع را امتداد دهید.



- شکل‌های (e) و (a) چه فرقی با شکل‌های (b)، (d) و (c) دارند؟

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم که در بعضی از چندضلعی‌ها، امتداد برخی اضلاع آن‌ها از داخل چندضلعی عبور نموده که آنها را چندضلعی مقعر می‌گویند و چندضلعی بی که امتداد اضلاع آن از بین چندضلعی عبور نکند، آن را چندضلعی محدب می‌نامند. ناگفته نماند که در چندضلعی‌ها هرگاه نام مقعر یا محدب ذکر نگردد، منظور آن چندضلعی محدب است.

فعالیت

- چهارضلعی ABCD را در نظر بگیرید.
- زاویه‌های داخلی این چهارضلعی را با نقاله اندازه گرفته با هم جمع کنید.
- یک قطر چهارضلعی را رسم کنید. این قطر، چهارضلعی را به چند مثلث تقسیم می‌کند؟
- مجموع زاویه‌های داخلی را بدون استفاده از نقاله پیدا کنید.
- اگر عرض آن قطر، یک قطر دیگری از این چهارضلعی را رسم می‌کردید آیا نتیجه متفاوت می‌بود؟

- یک پنج ضلعی رسم کنید. دو قطر کیفی این پنج ضلعی را از یک رأس رسم کنید، مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی را پیدا کنید.

تعداد اضلاع	مجموع زوایای داخلی
3	$1 \times 180^\circ$
4	$2 \times 180^\circ$
5	$3 \times 180^\circ$
6	$4 \times 180^\circ$
.	.
.	.
.	.

- یک شش ضلعی رسم کنید. فکر کنید که چند قطر باید رسم شود تا مجموع زاویه‌های داخلی شش ضلعی را پیدا کنیم.
- جدول مقابل را در کتابچه‌های خود نوشته و پُر کنید. در هر ردیف چه عددی در 180° ضرب می‌شود، این عدد چه رابطه‌یی با تعداد اضلاع چند ضلعی دارد؟
- آیا حدس زده می‌توانید که مجموع زوایای داخلی هشت ضلعی چند درجه است؟
- مجموع زوایای داخلی n ضلعی چقدر است؟

از فعالیت فوق معلوم گردید که $S = (n-2) \times 180^\circ$ می‌باشد در اینجا S مجموع زوایای داخلی و n تعداد اضلاع چند ضلعی را نشان می‌دهد.

مثال: مجموع زاویه‌های داخلی یک 10 ضلعی چند درجه است؟ نیز معلوم کنید که چند برابر یک زاویه قایمه می‌شود؟

حل: $S = (n-2) \times 180^\circ = (10-2) \times 180^\circ = 8 \times 180^\circ = 1440^\circ$

که 16 چند یک زاویه قایمه می‌باشد.

مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی مربوط به تعداد اضلاع آن است.

تمرین

1- در اشکال زیر، چند ضلعی محدب و چند ضلعی مقعر را نشان دهید.

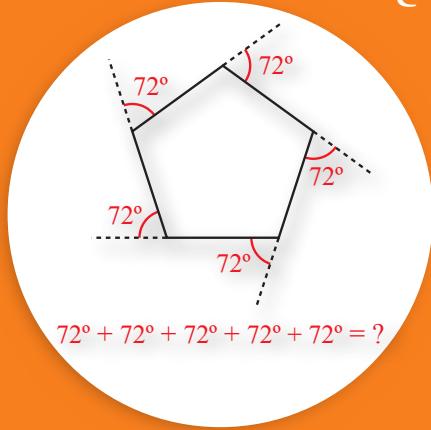


2- مجموع زوایای داخلی یک 12 ضلعی را دریابید.

3- مجموع زوایای داخلی یک 8 ضلعی چند برابر یک زاویه قایمه می‌شود؟

4- مجموع زوایای داخلی یک مثلث، یک مربع، یک مستطیل و یک 20 ضلعی را از روی فورمول فوق دریابید.

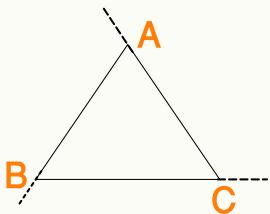
مجموع زاویه‌های خارجی یک مضلع



آیا می‌توانید بگویید که مجموع زوایای خارجی یک چند ضلعی چند درجه است؟

$$72^\circ + 72^\circ + 72^\circ + 72^\circ + 72^\circ = ?$$

فعالیت

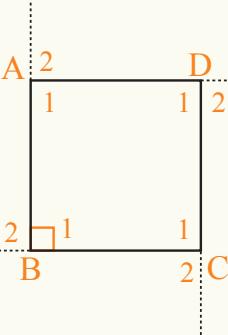


- یک مثلث $\triangle ABC$ را در نظر بگیرید.
- ضلع \overline{AB} را از A به B امتداد دهید.
- ضلع \overline{BC} را از B به C امتداد دهید.
- ضلع \overline{AC} را از A به C امتداد دهید.
- سه زاویه خارجی این مثلث را مشخص و نامگذاری کنید.
- جدول زیر را در کتابچه‌های خود نوشته و پر کنید.

چند ضلعی‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های خارجی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی
سه ضلعی $\times 180^\circ = ?$ + = ?
چهار ضلعی $\times 180^\circ = ?$ + = ?
پنج ضلعی $\times 180^\circ = ?$ + = ?
شش ضلعی $\times 180^\circ = ?$ + = ?
...

- یک چهار ضلعی را رسم نموده و زاویه‌های خارجی آن را نشان دهید.
- یک پنج ضلعی را رسم نموده و زاویه‌های خارجی آن را نشان دهید.

فعالیت فوق نشان می‌دهد که: مجموع زاویه‌های خارجی در یک چند ضلعی 360° بوده و به تعداد اضلاع ارتباط ندارد.



مثال اول: مجموع زوایای خارجی یک مربع را نخست از روی رسم پیدا نموده و سپس آن را از روی فورمول دریافت کرده با هم مقایسه کنید.

حل: طوری که می دانیم مجموع زوایا به یک طرف خط مستقیم 180° است، پس:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

پس مجموعه زوایای خارجی مربع مساوی است به: $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

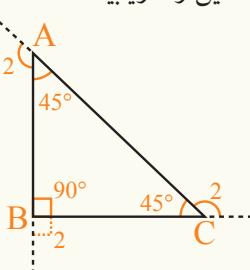
مثال دوم: مجموع زوایه های خارجی یک مثلث قایم الزاویه متساوی الساقین را دریابید.

حل: یک مثلث قایم الزاویه متساوی الساقین ABC را رسم نموده اضلاع آن را امتداد داده تا زوایه های خارجی آن تشکیل گردد، دیده می شود که:

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$



بنابرآن مجموع زوایه های خارجی مثلث برابر است به:

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 135^\circ + 90^\circ + 135^\circ = 360^\circ$$

مجموع زوایه های خارجی هر چند ضلعی 360° بوده و به تعداد اضلاع آن ارتباط ندارد.

تمرین

1- مجموع زوایه های خارجی یک مثلث متساوی الاضلاع را دریابید.

2- اگر در یک مثلث متساوی الساقین، زوایه بین دو ساق آن 80° باشد، مجموع زوایه های خارجی آن را پیدا کنید.

3- مجموع زوایه های خارجی یک 10 ضلعی منظم را پیدا کنید.

4- هر یک از زوایه های خارجی یک مستطیل چند درجه است؟ مجموع آنها را به دست آورید.

اشکال انطباق پذیر



طوری که می‌دانید اکثر قفل‌ها دارای دو یا سه کلید است. چرا؟ این کلیدها با هم دیگر چه رابطه دارند که قفل را باز می‌کنند، آیا در جواب‌های زیر، جواب صحیح وجود دارد؟

(الف) این کلیدها دارای عین رنگ‌اند.

(ب) دارای عین درازی‌اند.

(پ) دارای عین دندانه‌ها‌اند.

(ت) دارای عین ضخامت‌اند.

(ج) ب، پ و ت درست‌اند.

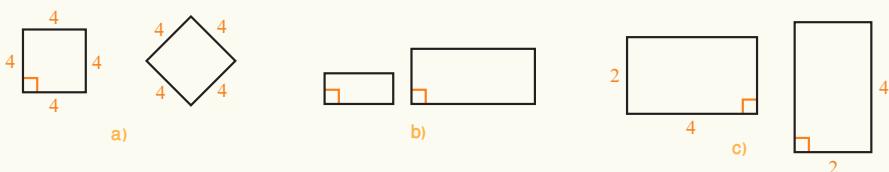
فعالیت

- یک مربع روی کاغذ رسم نموده که هر ضلع آن 4cm باشد. نام آن را (الف) بگذارید.
- یک مربع دیگری روی کاغذ رسم نموده که هر ضلع آن 6cm باشد. نام آن را (ب) بگذارید.
- یک مربع سومی روی کاغذ رسم نموده که هر ضلع آن 4cm باشد. نام آن را (پ) بگذارید.
- این مربع‌ها را قیچی نموده و دو به دو بالای هم دیگر گذاشته باهم مقایسه کنید.

برای نمایش انطباق پذیری دو شکل از علامت (\cong) استفاده می‌شود.

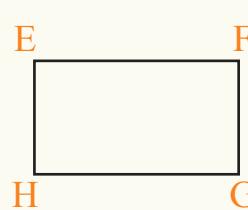
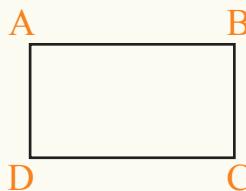
مثال اول: در اشکال زیر اشکالی را که با هم انطباق پذیر اند، مشخص کنید. (اعداد مربوطه، اندازه طول را به سانتی متر نشان می‌دهد).

حل: جوره‌های اشکال (a) و (c) با هم انطباق پذیرند؛ اما اشکال (b) با هم انطباق پذیر نیستند.



مثال دوم: یک مستطیل کیفی رسم نموده؛ سپس بگویید چگونه می‌توان یک مستطیل دیگری را که با مستطیل اولی انطباق پذیر باشد رسم کرد، این عمل را چگونه انجام می‌دهید؟

حل: به دو طریق این عمل را انجام می‌دهیم.



1- مستطیل کیفی ABCD را به رنگ روش رسم نموده، بعد یک ورق کاغذ شفاف را بالای شکل اولی قرار می‌دهیم. از روی آن، شکل مستطیل را رسم می‌کنیم. حالا این دو شکل باهم انطباق پذیر اند.

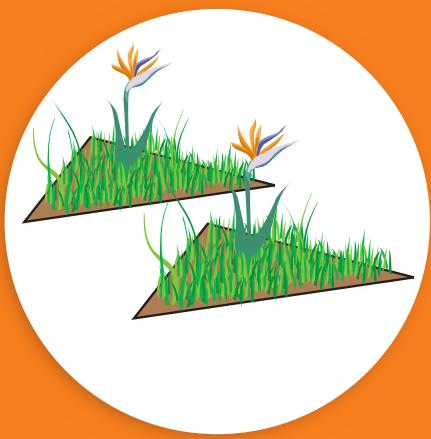
2- چون میدانیم که زاویه‌های مستطیل هر کدام 90° است، بنابر این یک زاویه قایمۀ E رسم نموده و به اندازه دو ضلع مجاور مستطیل اولی به طور مثال: از اضلاع \overline{AB} و \overline{AD} عمود‌های جدید جدا نموده و اضلاع \overline{EF} و \overline{EH} را به دست می‌آوریم. بعدها از نقاط F و H توسط پرکار به اندازه اضلاع اولی \overline{BC} و \overline{DC} اضلاع \overline{FG} و \overline{HG} را رسم می‌کنیم. اکنون مستطیل دومی EFGH با مستطیل ABCD انطباق پذیر است.

دو شکلی که کاملاً بر هم منطبق می‌شوند، یعنی یکدیگر را می‌پوشانند، اشکال انطباق پذیر نامیده می‌شوند.

تمرین

- 1- دو مربع که با هم انطباق پذیر باشند رسم کنید.
- 2- دو لوزی داده شده است، چطور بدانیم که هر دو انطباق پذیراند؟
- 3- دو مثلث انطباق پذیر را رسم کنید.
- 4- یک دایره به شعاع 4cm رسم نموده؛ سپس یک دایره دیگری ترسیم کنید که انطباق پذیر با دایره اولی باشد.

حالات انطباق پذیری مثلث ها

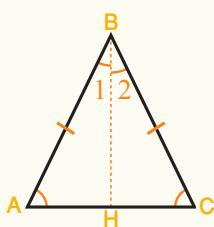


برای آن که بینیم آیا دو باعچه در شکل انطباق پذیر هستند یا خیر، آیا می توانیم یکی از آن شکل ها را بلند کنیم روی دیگر قرار دهیم؟

۱- اگر دو ضلع و زاویه بین آن ها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین آن ها از مثلث دیگر مساوی باشند این دو مثلث باهم انطباق پذیر اند.

مثال:

در شکل زیر $\triangle ABC$ و $\triangle BHC$ ناصف الزاویه است، ثابت کنید که دو مثلث



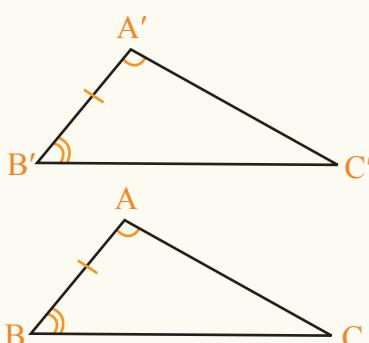
حل: در مثلث های $\triangle ABH$ و $\triangle BCH$ زیرا زاویه $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و $\hat{A} = \hat{C}$ از اینجا معلوم می شود که در دو مثلث $\triangle ABH$ و $\triangle BCH$ که دو ضلع و زاویه بین آنها باهم مساوی

است باهم انطباق پذیر می باشند.

اضلاع $BA = BC$ که در مثال داده شده است و

$BH = BH$ (ضلع مشترک)

اثابت کنید که دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ مساوی باشند.



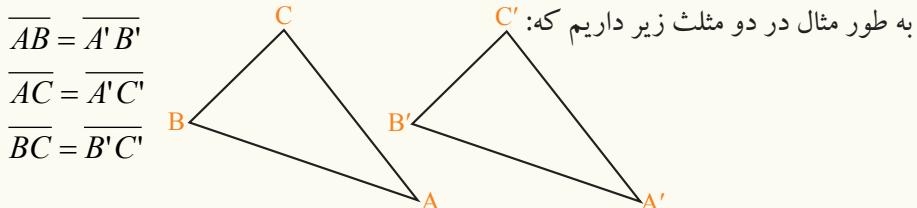
۲- انطباق پذیری دو مثلث از حیث دو زاویه و ضلع بین شان: اگر دو زاویه و ضلع بین آن ها در مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن ها در مثلث دیگر مساوی باشند دو مثلث انطباق پذیر اند؛ چنانچه در

شکل مقابل، داریم که:

$$AB = A'B' , \hat{A} = \hat{A}' , \hat{B} = \hat{B}'$$

بنابرآن دو مثلث ABC و $A'B'C'$ انتطاق پذیر اند.

3- انتطاق پذیری دو مثلث از نگاه سه ضلع مساوی: هر گاه سه ضلع از مثلث با سه ضلع مثلث دیگر برابر باشند، این دو مثلث با هم انتطاق پذیراند.

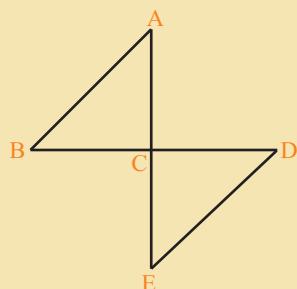


چون سه ضلع این دو مثلث با هم مساوی هستند، لذا این دو مثلث با هم انتطاق پذیراند، یعنی:
 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

اگر در دو مثلث، دو زاویه و ضلع بین آنها با هم مساوی باشند، این دو مثلث با هم انتطاق پذیر اند.

اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگری مساوی باشند این دو مثلث با هم انتطاق پذیر اند.

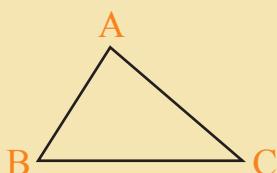
تمرین



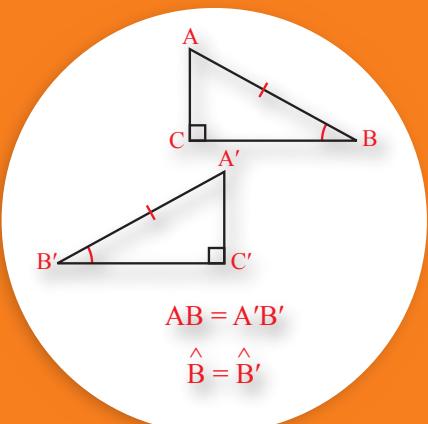
1- در شکل مقابل $\overline{AE} = \overline{BD}$ است و هم دیگر را در نقطه تنصیف (C) قطع می کنند و نیز دو خط \overline{BD} و \overline{AE} بروز خواهند. ثابت کنید که $\triangle ABC \cong \triangle CDE$.

2- دو مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه کدام شرط دیگر را داشته باشند تا با هم انتطاق پذیر باشند؟

3- یک مثلث ABC قرار شکل زیر داده شده است، یک مثلث دیگر که با مثلث داده شده انتطاق پذیر باشد رسم کنید.



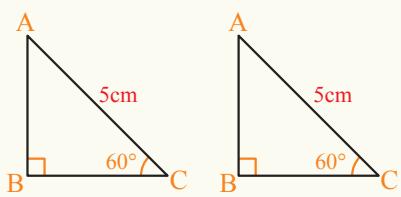
حالات انطباق پذیری دو مثلث قائم الزاویه



علاوه بر سه حالت که در مورد انطباق پذیری دو مثلث مطالعه نمودیم، آیا در مورد مثلث قائم الزاویه کدام حالت دیگری وجود دارد؟

اول: هر گاه وتر و یک زاویه حاده یک مثلث قائم الزاویه، با وتر و یک زاویه حاده مثلث قائم الزاویه دیگر برابر باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیراند.

مثال اول: دو مثلث قائم الزاویه که وتر آنها 5cm و یک زاویه حاده آنها 60° باشد رسم کنید.



آیا این دو مثلث انطباق پذیراند؟

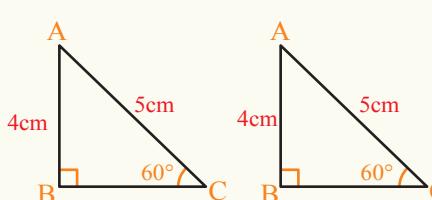
حل: اول زاویه 60° را رسم می کنیم، بعد یک ضلع آن را به اندازه 5cm جدا نموده از انجام این ضلع یک عمود بالای ضلع دیگر رسم می کنیم. به همین ترتیب مثلث دوم را رسم می نماییم.

چون وتر و یک زاویه حاده این دو مثلث قائم الزاویه باهم مساوی اند، لذا: این دو مثلث با هم انطباق پذیر می باشند.

دیده می شود که برای انطباق پذیری مثلث های قائم الزاویه، مساوی بودن یک زاویه حاده و وتر کفایت می کند.

دوم: اگر وتر و یک ضلع مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگری مساوی باشند، مثلث ها با هم انطباق پذیراند.

مثال دوم: دو مثلث قائم الزاویه که وتر هر یک آنها 5cm و یک ضلع قائم آنها 4cm باشد. چگونه رسم می کنید؟ آیا این دو مثلث باهم انطباق پذیر هستند؟



حل: اول ضلع قائم معلوم را رسم نموده؛ سپس در یک انجام آن زاویه قایمه و از انجام دیگر آن ضلع قائم معلوم یک دایره بی که شعاع آن به

اندازه وتر باشد، رسم می نماییم. در هر قسمتی که دایره ضلع دیگر قایم را قطع نماید. نقطه تقاطع را به انجام ضلع قایم معلوم وصل می نماییم.

به همین ترتیب یک مثلث قایم الزاویه دیگری رسم نموده، در این دو مثلث قایم الزاویه وتر و یک ضلع قایم آن ها با هم مساوی بوده، لذا: این دو مثلث قایم الزاویه باهم انطباق پذیراند.

مثال سوم: در شکل زیر قطر مستطیل را رسم نموده ثابت کنید که دو مثلث ABD و CBD انطباق پذیراند؟

حل: قرار شکل زیر مستطیل داریم که: $AB = DC$ و $BD = BD$ می باشد.

لذا در دو مثلث قایم الزاویه ABD و DBC وتر و یک ضلع قایم با هم مساوی اند؛

همچنین می توان انطباق پذیری دو مثلث را به حالت دو ضلع و زاویه بین آنها بررسی کرد: (دو ضلع و زاویه بین آنها مساوی اند) لذا: $\triangle ABD \cong \triangle DBC$

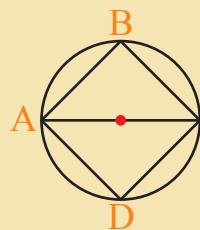
از اینجا نتیجه گرفته می شود که: در مثلث های قایم الزاویه علاوه از سه حالت انطباق پذیری داریم که:

1- اگر وتر و یک زاویه حاده یک مثلث قایم الزاویه با وتر و یک زاویه حاده مثلث قایم الزاویه دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیراند.

2- اگر وتر و یک ضلع قایم یک مثلث قایم الزاویه با وتر و یک ضلع قایم مثلث قایم الزاویه دیگری مساوی باشند، این دو مثلث انطباق پذیراند.

تمرین

1- دو مثلث قایم الزاویه که وتر آنها 6cm و یک زاویه حاده آنها برابر به 60° باشد، درنظر بگیرید. چگونه می توانید ثابت نمایید که این دو مثلث با هم انطباق پذیراند؟



2- در شکل مقابل AC قطر دایره است، اگر در دو مثلث قایم الزاویه ABC و ADC ، ضلع $BC = CD$ باشد، آیا این دو مثلث با هم انطباق پذیراند. چرا؟

خلاصه فصل پنجم

- مثلث ها از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم شده اند:
 - مثلث متساوی اضلاع ، مثلث متساوی الساقین و مثلث مختلف اضلاع
 - مثلث ها از حیث زاویه نیز به سه دسته تقسیم کردند:
 - مثلث حاده الزاویه، مثلث قایم الزاویه و مثلث منفرج الزاویه
 - در هر مثلث، ارتفاع ها، میانه ها و ناصف الزاویه ها به ترتیب هم دیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
 - در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی آن 180° است.
 - زاویه خارجی یک مثلث متساوی به مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور این مثلث می باشد.
 - در مثلث متساوی الساقین مقابل ساق های متساوی، زاویه های متساوی قرار دارند.
 - یک چند ضلعی (مضلع) عبارت از خط منكسر بسته بی است که فقط یک ناحیه بسته را تشکیل می دهد، که هیچ دو قطعه خط آن به امتداد یک خط مستقیم قرار نداشته باشند و هر رأس مضلع فقط نقطه تقاطع دو قطعه خط باشد.
 - در بعضی از چند ضلعی ها امتداد یک یا برخی اضلاع آنها از داخل چند ضلعی عبور نموده که آنها را چند ضلعی مقعر می نامند و چند ضلعی بی که امتداد اضلاع آن از داخل چند ضلعی عبور نمی کنند، آن را چند ضلعی محدب می گویند.
 - مجموع زاویه های داخلی یک n ضلعی برابر است به: $(n-2) \times 180^\circ$
 - مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی برابر به 360° بوده و به تعداد اضلاع آنها ارتباط ندارد.
 - دو شکلی که کاملاً با هم منطبق شوند، یعنی یکدیگر را پوشانند، اشکال انطباق پذیر نامیده می شوند.
 - اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلث دیگر باهم متساوی باشند، آن دو مثلث انطباق پذیراند.
 - اگر دو زاویه و یک ضلع بین این دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه مثلث دیگر متساوی باشند، این دو مثلث باهم انطباق پذیراند.
 - اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر دو به دو متساوی باشند آن دو مثلث باهم متساوی (انطباق پذیر) اند.
 - در دو مثلث قایم الزاویه، اگر وتر و یک ضلع قایم یک مثلث، با وتر و یک ضلع مثلث قایم الزاویه دیگر متساوی باشند یا وتر و یک زاویه حاده آنها دو به دو با هم متساوی باشند، آن دو مثلث انطباق پذیراند.

تمرینات فصل پنجم

1- در مقابل هر سؤال چهار جواب داده شده اند جواب صحیح را حلقه نمایید.

• مجموع زوایای داخلی یک ۹ ضلعی مساوی است به:

(a) 360° (b) 1260°

(c) 180° (d) هیچکدام

• مجموع زوایای داخلی یک مضلع 1980° می باشد مضلع مذکور دارای چند ضلع است؟

(a) 18 (b) 13

(c) 11 (d) 17

• اگر سه قطعه خط در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند مجموع زوایایی که به دور نقطه تقاطع تشکیل می شود چند درجه است؟

(a) 260° (b) 180°

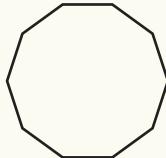
(c) 360° (d) هیچکدام.

• اگر اندازه یک زاویه داخلی یک مضلع منظم 144° باشد تعداد اضلاع آن مساوی است به:

(a) 8 (b) 9

(c) 10 (d) 12

• شکل زیر که همه اضلاع و زوایای آن با هم مساوی بوده به کدام نام یاد می شود؟



(a) مضلع منظم محدب 10 ضلعی است. (b) مضلع منظم مقعر 10 ضلعی است.

• اگر در یک مثلث دو ضلع آن با هم مساوی باشند؛ پس مثلث مذکور:

(a) متساوی الساقین است.

(b) متساوی الاضلاع است.

(c) مختلف الاضلاع است.

(d) مختلف الزاویه است.

• اگر در یک مثلث دو زاویه آن با هم مساوی باشند، پس:

(a) مثلث مختلف الاضلاع است.

- (b) مثلث متساوی الساقین است.
- (c) مثلث متساوی الاضلاع است.
- (d) هیچکدام

- اگر در یک مثلث قائم الزاویه اندازه یکی از زوایای حاده آن 60° باشد و سعت زاویه حاده دیگر آن مساوی است به:

29°(d) 40°(c) 50°(b) 30°(a)

- زاویه خارجی یک مثلث با مجموع زوایای غیر مجاور داخلی آن چه رابطه دارد؟
- (a) بزرگتر است (b) مساوی است (c) کوچکتر است (d) هیچکدام

2- در مقابل جمله صحیح (ص) و در مقابل جمله غلط (غ) بگذارید.

- (ب) بزرگترین زاویه خارجی که از امتداد یک ضلع یک چندضلعی منظم ساخته میشود 120° است.
- (م) مثلث می تواند یک مضلع مقرر باشد.
- (ا) اندازه یک زاویه خارجی یک سه ضلعی هیچگاه کمتر از یک زاویه داخلی آن نمی باشد.

- (د) دو ضلع غیر مجاور یک مضلع در یکی از رأس های مضلع مذکور با هم متقطع اند.
- (ی) یک مضلع را وقتی متساوی الزوایا گویند که تمام اضلاع آن با هم مساوی باشند.
- (م) مجموع زوایای خارجی یک مضلع منظم عبارت از: $180^\circ(n-2)$ است.
- (ا) اگر تعداد اضلاع یک مضلع ترازید نماید، مجموع زوایای خارجی آن ترازید می نماید.
- (م) مثلث حادالزاویه، مثلثی است که صرف دو زاویه آن حاده باشد.
- (د) دو مثلث وقتی انطباق پذیراند که طول یک ضلع و اندازه دو زاویه مجاور آن ها یک به یک مساوی باشند.
- (ا) اگر دو ضلع یک مثلث با هم مساوی باشند، زوایای مقابل این دو ضلع نیز با هم مساوی اند.

- (ا) اندازه هر یک از زوایای مثلث متساوی الاضلاع 61° است.
- (ا) اندازه زاویه خارجی یک مثلث مساوی به مجموع زوایای غیر مجاور داخلی آن می باشد.
- (م) مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث سه قایمه است.

3- جا های خالی را با کلمات مناسب پر نمایید.

- اگر اندازه یک زاویه خارجی یک مضلع منظم دو چند اندازه زاویه داخلی همجاور آن باشد مضلع مذکور نامیده می شود.
- با ترازید اضلاع یک مضلع منظم، مجموع زوایای داخلی مضلع و مجموع

زوایای خارجی آن نمی‌کند.

- از یک رأس هشت ضلعی قطر رسم شده می‌تواند.

• اگر اندازه یک زاویه خارجی یک مضلع منظم 120 درجه باشد مضلع مذکور دارای ضلع میباشد.

• اگر مجموع اندازه زوایای داخلی یک مضلع مساوی به مجموع اندازه زوایای خارجی همان مضلع باشد، مضلع مذکور دارای ضلع است.

- یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع به نام منظم یاد می‌شود.

• مستقیمی که دو رأس غیر مجاور یک مضلع را با هم وصل کند، نامیده می‌شود.

- مثلثی که هر سه ضلع آن مساوی باشند مثلث نامیده می‌شود.

• خطی که از رأس مثلث به ضلع مقابل آن عمود باشد به نام یاد می‌شود.

• اگر اندازه زاویه رأس متساوی الساقین 50° باشد اندازه هر یک از دو زاویه دیگر آن است.

4- سوالهای زیر را حل نمایید:

• مجموع یکی از زوایای داخلی و زاویه خارجی مجاور آن در یک مضلع چند درجه است؟

• در مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ ، $AB = AC$ است. اگر \hat{B} و

\hat{C} توسط OB و OC تقسیف گردد ثابت کنید که:

$$OC = OB \quad (a)$$

(b) OA ناصف الزاویه \hat{A} است.

• ثابت نمایید که اندازه هر یک از زوایای حاده یک مثلث متساوی الساقین قایم الزاویه 45° است.

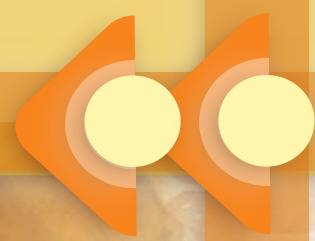
• در دو مثلث قایم الزاویه، 5 حالت را نام بگیرید که در آن دو مثلث باهم انبساط پذیر باشند.

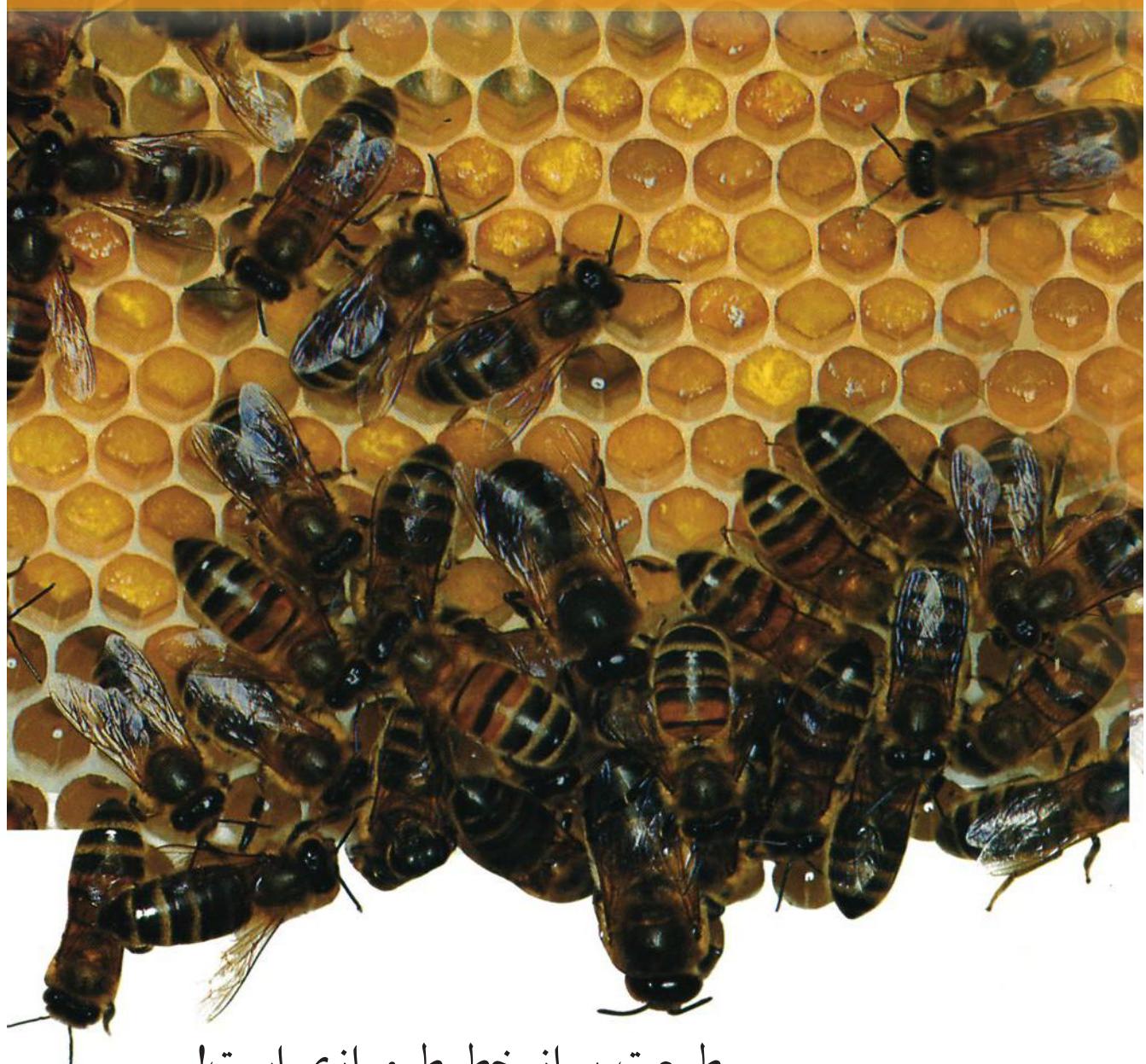
• قطر یک معین، معین را به دو مثلث تقسیم می‌کند، با چند حالت ثابت کرده می‌توانید که این دو مثلث باهم انبساط پذیر اند؟



فصل ششم

خطوط موازي و عمود



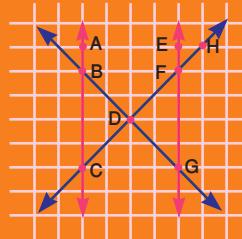


طبیعت پر از خطوط موازی است!

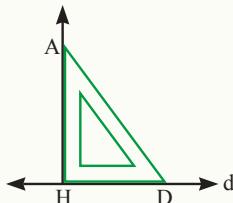
خطوط موازی و عمود (Parallel and Perpendicular Lines)



در شکل چند خط مشاهده می‌شود. راجع به وضعیت خطوط چه گفته می‌توانید؟



فعالیت



ابتدا خط مستقیم d را رسم نموده گوینیا را روی خط d طوری که در شکل نشان داده شده است می‌گذاریم. رأس گوینیا را A می‌نامیم، خطوط \overline{AH} و \overline{AD} را رسم می‌کیم.

- بالای خط مستقیم d از نقطه A سه خط مستقیم \overline{AB} ، \overline{AE} و \overline{AC} را که یکی عمود و دو خط دیگر مایل باشند، رسم کنید.
- توسط خط کش اندازه کنید که طول کدام خط از همه خطوط کوچکتر است.

خط \overline{AH} با خط d زاویه 90° می‌سازد. قطعه خط \overline{AH} عمود بر خط مستقیم d بوده که این طور نشان داده می‌شود:

فعالیت

- خط کش را روی کاغذ بگذارید. از هر دو کنار خط کش دو خط رسم کنید و این خطوط را d_1 و d_2 بنامید.

- بالای خط d_1 سه نقطه d_1 ، B ، A و C را انتخاب و به کمک گوینیا از نقطه A و نقطه B بر خط d_2 عمود رسم کنید و نظر به شکل عمود ها را \overline{AD} ، \overline{BE} و \overline{CF} بنامید.
- طول قطعه خط های مستقیم \overline{AD} ، \overline{BE} ، و \overline{CF} را اندازه کنید. در مورد طول آنها چه گفته می‌توانید؟

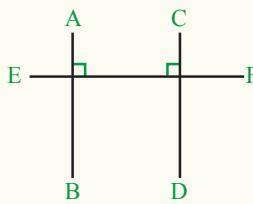
دو خط d_1 و d_2 را که فاصله بین شان مساوی است، خطوط موازی می نامند و این طور نشان داده می شود: $d_1 \parallel d_2$.

دو خط مستقیم \overline{AC} و \overline{DG} که فاصله بین آنها مساوی نیست طوریکه در شکل نیز مشاهده می شود موازی نیستند؛ زیرا که امتداد یافته آنها یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند و این طور نمایش داده می شود.

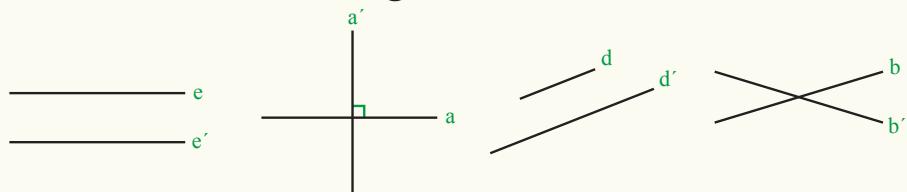
$\overline{AC} \nparallel \overline{DG}$

می توان به کمک گونیا یا خط کش نشان داد که فاصله بین این دو قطعه خط مستقیم در نقاط مختلف مساوی نیست.

اگر دو قطعه خط \overline{AB} و \overline{CD} را بالای \overline{EF} عمود رسم کنیم ($CD \perp EF$ و $AB \perp EF$) خطوط AB و DC موازی می باشند؛ زیرا اگر موازی نباشند همدیگر را قطع نموده که از یک نقطه تقاطع دو عمود بر خط EF رسم شده است و این امکان ندارد.

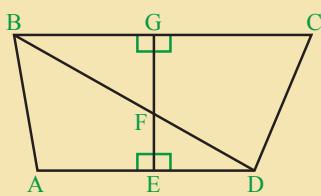


مثال: در خطوط زیر خطوط موازی، عمود و متقارع را مشخص کنید:



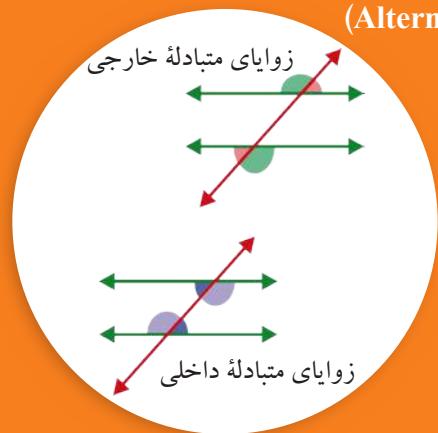
حل: $e \parallel e'$ ، $a' \perp a$ ، $d \parallel d'$ و b با هم متقارع اند.
دو خط مستقیم را وقتی موازی می گوییم که خود خطوط و یا امتداد شان نقطه مشترک نداشته باشند. فاصله بین این دو خط در تمام نقاط مساوی می باشد. دو خط وقتی با هم عمود داند که زاویه بین آنها یک زاویه قایمه (90°) باشد.

تمرین



- در شکل کدام خطوط موازی اند؟
- کدام قطعه خطها بر هم عمود اند؟
- کدام قطعه خط های مستقیم متقارع اند؟
- کدام زاویه ها قایمه اند؟
- آیا همه خطوط متقارع با هم عمود می باشند؟

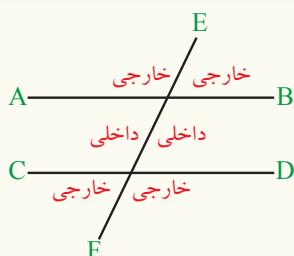
زوایای متبادلۀ داخلی و خارجی (Alternate interior and exterior angles)



شکل مقابل را مشاهده و در مورد زوایای تشکیل شده آن اظهار نظر نمایید.

فعالیت

- دو خط موازی d_1 و d_2 و دو خط غیرموازی d_3 و d_4 را رسم کنید.
- دو خط قاطع را که یکی از آن خطوط d_1 و d_2 و دیگر آن خطوط d_3 و d_4 را قطع کند رسم کنید.
- زاویایی را که قاطع با خطوط موازی می سازند و زوایایی را که قاطع با خطوط غیرموازی می سازند توسط نقاله اندازه نمایید چه نتیجه‌یی به دست می آید؟

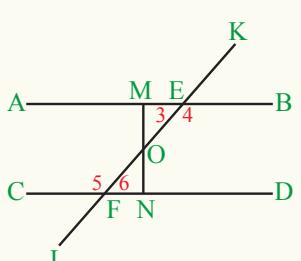


دو قطعه خط \overline{AB} و \overline{CD} با هم موازی‌اند و توسط \overline{EF} قطع شده‌اند.

طوری که در شکل مشاهده می شود ناحیه بین دو خط را ناحیه داخلی و ناحیه خارج دو طرف دو خط را ناحیه خارجی می گویند.

است و خط $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ این دو خط را قطع نموده است.

برای نشان دادن این که $\angle LK = \angle 3 = \angle 6$ است، نقطه O را روی خط LK انتخاب نموده از نقطه O خط عمود بر \overline{AB} و \overline{CD} رسم می کنیم، دو مثلث $\triangle OME$ و $\triangle OFN$ تشکیل می شود.



چون $\hat{M}OE = \hat{F}ON$ متقابل به رأس و

است؛ پس زاویه‌های سومی این

مثلث‌ها نیز با هم مساوی می‌باشند. در نتیجه $\hat{3} = \hat{6}$ می‌شود. که زوایای $\hat{3}$ و $\hat{6}$ را به نام زوایای متبادلۀ داخلی یاد می‌کنند. به همین ترتیب $\hat{4} = \hat{5}$ است که $\hat{4}$ نیز زوایای متبادلۀ داخلی می‌باشد.

همچنین در شکل زوایای $\hat{1}, \hat{2}, \hat{7}, \hat{8}$ زوایای متبادلۀ خارجی می‌باشند، پس به کمک زوایای متبادلۀ داخلی داریم: $\hat{1} = \hat{7}$, $\hat{8} = \hat{2}$

مثال : در شکل مقابل دو زاویه 60° و 120° داده شده اند، زوایای $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{8}$ چند درجه می‌باشند؟

حل:

$\hat{6} = \hat{6}$ متبادلۀ داخلی ، $\hat{1} = 120^\circ$
 $\hat{5} = \hat{5}$ متقابل به رأس ، $\hat{8} = \hat{6} = 60^\circ$
 $\hat{2} = \hat{8}$ متبادلۀ خارجی
در نتیجه $\hat{3} = 120^\circ$ است ، از مقایسه مساوات فوق $\hat{2} = 60^\circ$ است.

اگر دو خط موازی AB و CD توسط خط قاطع EF قطع شود دو جوره زوایای متبادلۀ داخلی و دو جوره زوایای متبادلۀ خارجی را می‌سازند که:

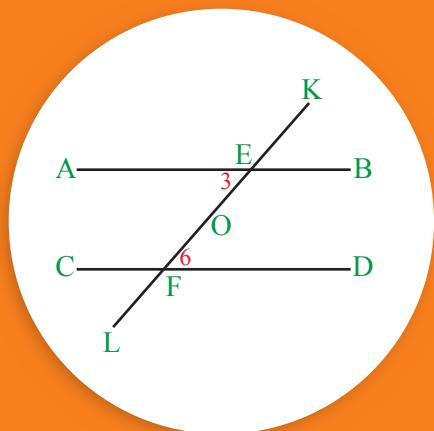
متبادلۀ داخلی: $\hat{3} = \hat{5}$ و $\hat{4} = \hat{6}$
متبادلۀ خارجی: $\hat{1} = \hat{7}$ و $\hat{2} = \hat{8}$

تمرین

- اگر $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ باشد در شکل زوایای $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}$ چند درجه می‌باشند؟

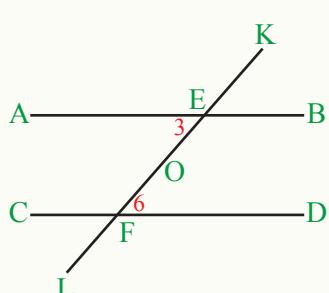
- در شکل اگر $120^\circ = \hat{7}$ باشد، مقدار زوایای $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{8}$ را دریابید.

موازی بودن دو خط در صورتی که زوایای متبادله با هم مساوی باشند



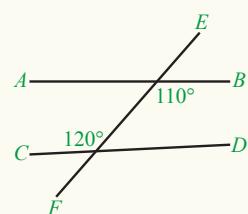
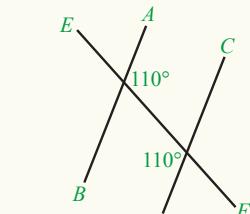
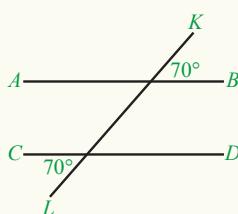
در شکل $\hat{3} = \hat{6}$ است، که دو زاویه متبادله داخلی می‌باشند، آیا $AB \parallel CD$ شده می‌تواند؟

فعالیت



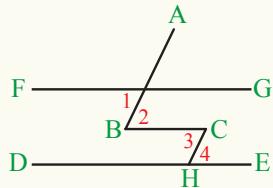
- در شکل مقابل از نقطه O وسط خط \overline{EF} بالای \overline{AB} عمود رسم کنید. نقطه تقاطع با \overline{AB} را M بنامید آن را امتداد دهید که خط \overline{CD} را در \hat{N} قطع کند.
- نشان دهید که دو مثلث MOE و FON با هم مساوی اند.
- آیا خط مستقیم \overline{MN} بر خط مستقیم \overline{CD} نیز عمود است؟
- چرا \overline{AB} موازی با \overline{CD} است؟

مثال اول: در اشکال زیر کدام دو خط مستقیم AB و CD با هم موازی اند؟



حل: $70^\circ = 70^\circ$ متبادلہ خارجی، پس $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است.
 $110^\circ = 110^\circ$ متبادلہ داخلی، پس $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است.
 $120^\circ \neq 110^\circ$ ، پس $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$ است.

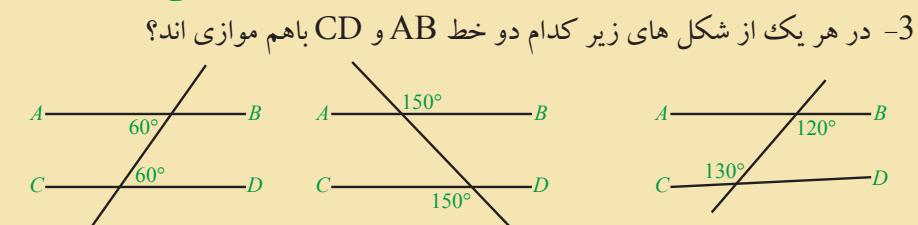
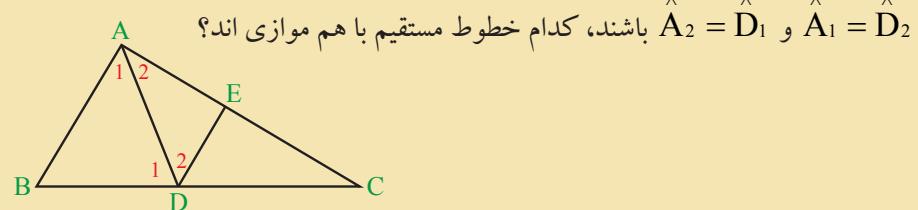
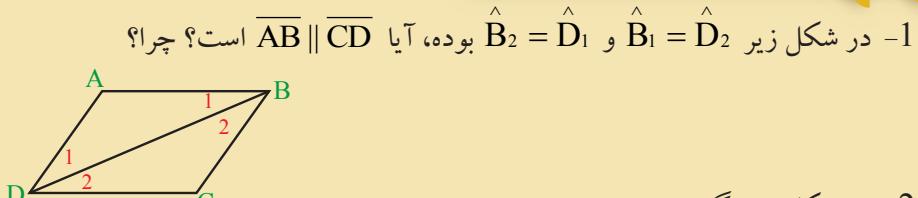
مثال دوم: اگر $\hat{3} = \hat{4}$ و $\hat{2} = \hat{3}$ باشند کدام جوره از خطوط موازی‌اند؟



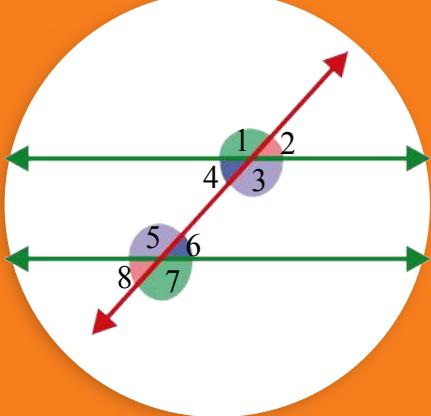
چون $\hat{1} = \hat{2}$ است، پس $FG \parallel BC$ است، پس $\hat{2} = \hat{3}$ است، پس $AB \parallel CH$ است، پس $\hat{3} = \hat{4}$ می‌باشد.

اگر دو خط توسط یک خط طوری قطع شوند که دو زاویه مساوی متبادل را بسازند، این دو خط با هم موازی‌اند.

تمرین



زوایای متوافقه (Corresponding angles)



در شکل $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است و خط EF این

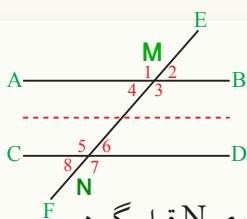
دو خط را قطع کرده است.

زوایای $(\hat{4}, \hat{8}), (\hat{2}, \hat{6}), (\hat{7}, \hat{3})$ و

$(\hat{1}, \hat{5})$ را به نام زوایای متوافقه یاد می کنند.

آیا این زوایا با هم مساوی‌اند؟

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

- چهار طرف شکل را توسط قیچی ببرید.

- سپس محل نقطه چین را جدا کنید.

- حال قطعه خط CD را به روی قطعه خط AB قرار دهید که M روی N قرار گیرد.

راجع به زوایای $\hat{1}$ تا $\hat{8}$ چه می توان گفت؟

$$\hat{1} = \hat{5}, \quad \hat{2} = \dots, \quad \dots = \hat{7}, \quad \hat{4} = \dots$$

- به کمک نقاله زوایای $\hat{1}$ تا $\hat{8}$ را به دست آورده، درستی برابری‌های فوق را بررسی کنید.

همچنین اگر دو خط توسط یک قاطع طوری قطع شوند که زوایای مساوی متوافقه را بسازند
این دو خط با هم موازی‌اند.

دو قطعه خط مستقیم AB و CD توسط خط مستقیم EF قطع شده‌اند.

اگر $\hat{6} = \hat{2}$ باشد می خواهیم نشان دهیم که $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ می باشد.

قرار متقابل به رأس $\hat{2} = \hat{4}$

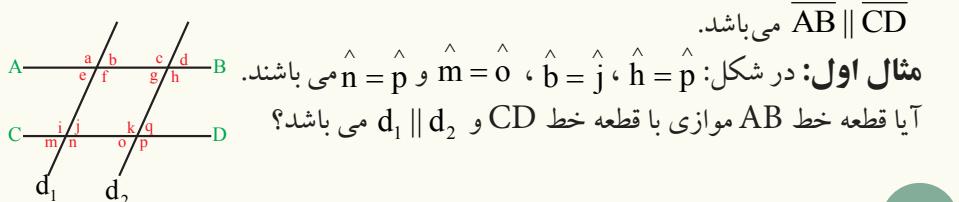
چون

$\hat{2} = \hat{6}$

در نتیجه $\hat{6} = \hat{4}$ است. از طرف دیگر چون $\hat{4}$ و $\hat{6}$ زوایای متبادل می باشند در نتیجه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ می باشد.

مثال اول: در شکل: آیا قطعه خط AB موازی با قطعه خط CD و $d_1 \parallel d_2$ می باشد؟

آیا قطعه خط AB موازی با قطعه خط CD و $d_1 \parallel d_2$ می باشد؟

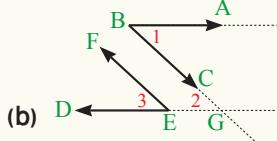


حل: چون $\hat{p} = \hat{h}$ و $\hat{j} = \hat{b}$ می باشد که زوایای متوافقه اند و باهم مساوی می باشند؛ پس $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است.

و چون $\hat{d}_1 = \hat{m}$ و $\hat{d}_2 = \hat{n}$ می باشد که زوایای متوافقه اند و باهم مساوی می باشند؛ پس $d_1 \parallel d_2$ است.

مثال دوم: در شکل (a) دو زاویه \hat{ABC} و \hat{DEF} که ضلع AB موازی و همجهت با ED و ضلع BC موازی و همجهت با EF می باشد. آیا می توانید نشان دهید که $\hat{1} = \hat{3}$ می باشد؟

حل: ابتدا مطابق شکل های (a) و (b) اضلاع BC و ED را امتداد می دهیم تا در نقطه G همدیگر را قطع کنند.



$$\begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \\ \hat{3} = \hat{2} \end{array} \quad \text{در شکل a:}$$

در نتیجه: $\hat{1} = \hat{3}$ می باشد.

همچنین در شکل (b) ضلع AB موازی و مختلف الجهت ED و BC موازی و مختلف الجهت EF می باشند. زوایای $\hat{1}$ و $\hat{3}$ نیز با هم مساوی می باشند. زیرا: $\hat{1} = \hat{2}$

(قرار متبادل)، قرار (متوافقه) $\hat{3} = \hat{2}$

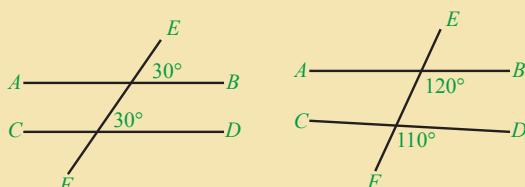
در نتیجه: زاویه های $\hat{3} = \hat{1}$ می باشد.



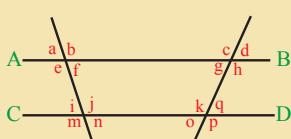
اگر دو خط موازی توسط یک خط قاطع قطع شوند زوایای مساوی متوافقه را می سازند و اگر دو خط مستقیم توسط خط قاطع طوری قطع شوند که زوایای مساوی متوافقه را بسازند این دو خط با هم موازی اند.

تمرین

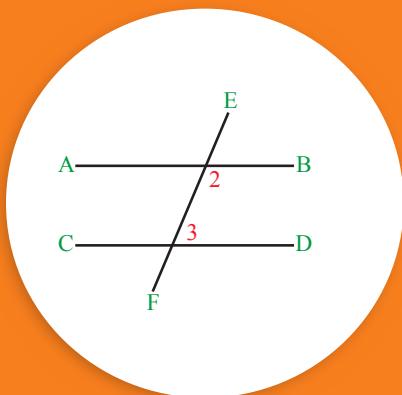
1- کدام جوره از خطوط مستقیم با هم موازی اند؟



2- دو خط مستقیم \overline{AB} و \overline{CD} با هم موازی اند، کدام زاویه ها با هم مساوی اند؟



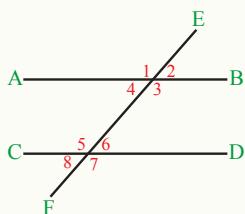
زوایای متممه داخلی یک طرف خط قاطع (Supplementary Angles)



اگر $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و خط مستقیم \overline{EF} دو خط موازی را طوری که در شکل مشاهده می‌شود قطع کرده باشد. آیا می‌توانید بگویید که $\hat{3} + \hat{2}$ چند درجه می‌شود؟

فعالیت

دو خط مستقیم AB و CD موازی اند و خط مستقیم EF آنها را مطابق شکل قطع کرده است.



$$\hat{3} + \hat{4} = \square \quad \bullet$$

از طرف دیگر $\hat{4} = \hat{6}$ است. چرا؟

از دو تساوی فوق خانه خالی زیر را پر کنید.

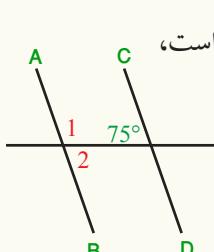
$$\hat{3} + \hat{6} = \square$$

به کمک نقاله زاویه‌های $\hat{3}$ و $\hat{6}$ را اندازه نموده مقدار زاویه $\hat{3} + \hat{6}$ را به دست آورید.

خانه خالی زیر را پر کنید.

$$\hat{4} + \hat{5} = \square$$

مثال: در شکل اگر خطوط مستقیم AB و CD با هم موازی باشند اندازه $\hat{1}$ و $\hat{2}$ دریابید.



حل: چون $\hat{1}$ و زاویه 75° متممه داخلی هستند و مجموع آنها 180° است،

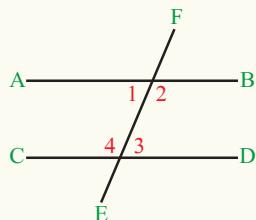
$$\hat{1} + 75^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{1} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

چون زاویه 75° و $\hat{2}$ متبادل هستند، پس:

$$\hat{2} = 75^\circ$$

هرگاه دو خط مستقیم AB و CD موازی باشند و خط مستقیم EF این دو خط را طوری

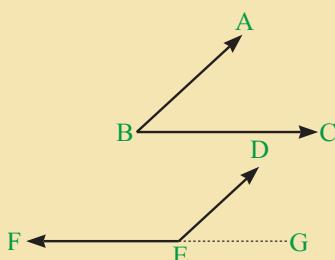


که در شکل مشاهده می‌شود قطع کرده باشد دو زاویه داخلی یک طرف قاطع به نام زوایای متمم داخلي یک طرف خط قاطع یاد گردیده که مجموع آن مساوی به 180° می‌شود.

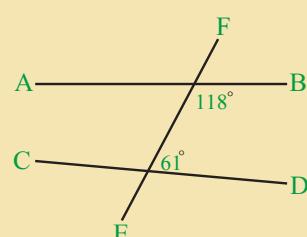
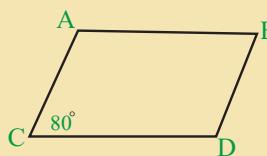
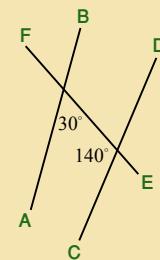
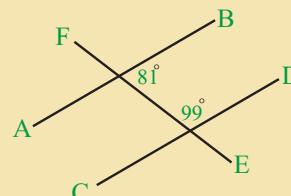
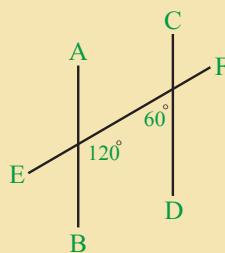
$$\hat{1} + \hat{4} = 180^\circ \quad \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$$

و اگر یک خط قاطع با دو خط مستقیم، دو زاویه متمم داخلي یک طرف خط قاطع بسازد، این دو خط با هم موازی اند.

تمرین



- 1- در شکل دو زاویه \hat{ABC} و \hat{DEF} داریم که AB موازی و هم جهت ED و ضلع BC موازی و مختلف الجهت EF می‌باشد نشان دهید که $\hat{ABC} + \hat{DEF} = 180^\circ$ می‌شود.
- 2- کدام جوره از خطوط مستقیم زیر با هم موازی اند؟

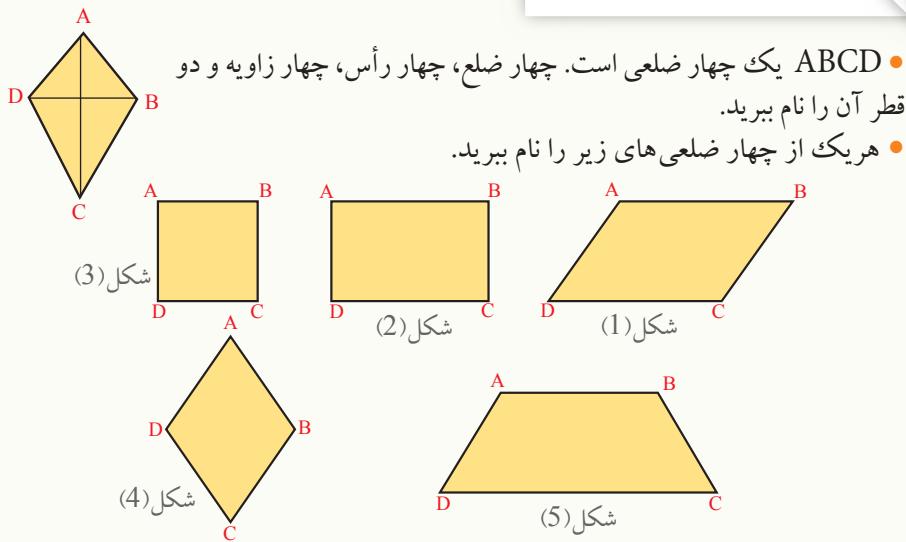


چهار ضلعی‌ها (Quadrilaterals)



چه تعداد چهار ضلعی‌ها در شکل قابل شمارش
اند؟

فعالیت



طوری که می‌دانید در تمام چهار ضلعی‌های بالا، به جز ذوزنقه، اضلاع مقابل آنها دو به دو باهم موازی اند و در ذوزنقه فقط دو ضلع مقابل آن باهم موازی هستند.

شکل شماره (1) متساوی الاضلاع (Parallelogram): یک چهار ضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو باهم موازی و مساوی می‌باشند.

شکل (2) مستطیل (Rectangle): یک چهار ضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی و مساوی هستند و هر چهار زاویه آن قایمه می‌باشد.

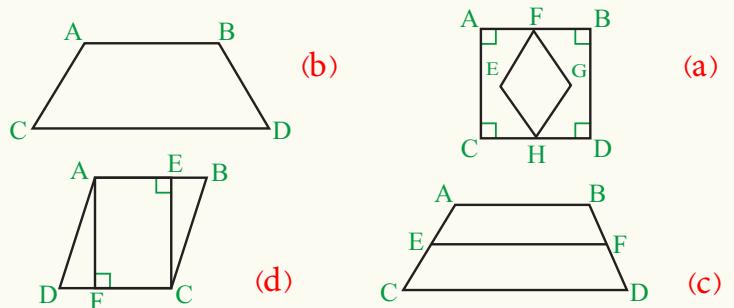
شکل (3) مربع (Square): یک چهار ضلعی است که هر چهار ضلع آن باهم مساوی و هر

چهار زاویه آن قایمه می باشند.

شکل (4) معین یا لوزی (Rhombus): یک چهار ضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی و هر چهار ضلع آن با هم مساوی و زوایای مقابل آن نیز با هم مساوی می باشند.

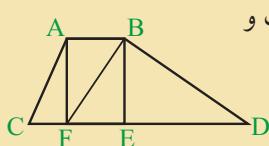
شکل (5) ذوزنقه یا منحرف (Trapezoid): چهار ضلعی است که فقط دو ضلع مقابل آن با هم موازی باشد.

مثال: در اشکال زیر مربع، مستطیل، متوازی الاضلاع، معین یا لوزی و ذوزنقه را نشان دهید.



حل: در شکل (a) مربع و شکل (b) معین می باشد در شکل (c) ذوزنقه است در شکل (d) متوازی الاضلاع است.

تمرین



1- در شکل مقابل کدام یک مستطیل و کدام یک ذوزنقه است و نیز بگویید که در این شکل چند مثلث موجود است؟

2- کدام جملات درست و کدام نادرست اند؟

- هیچگاه یک ذوزنقه متوازی الاضلاع شده نمی تواند.

- اضلاع مقابل مستطیل دو به دو موازی و مساوی اند.

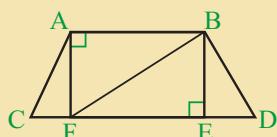
- اضلاع مقابل ذوزنقه دو به دو موازی و مساوی می باشند.

- لوزی یک متوازی الاضلاع است.

- مربع یک متوازی الاضلاع است.

- لوزی یک مربع است.

3- در شکل مقابل سه ذوزنقه، یک مستطیل و یک متوازی الاضلاع را نشان دهید.

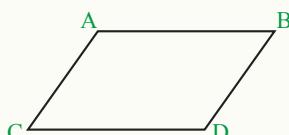


زوایای مقابل متوازی الاضلاع



آیا زوایای مقابل متوازی الاضلاع با هم مساوی‌اند؟

فعالیت



متوازی الاضلاع $ABDC$ داده شده است.

• چون $\hat{A} + \hat{C} = \boxed{\quad}$ ، پس $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

• چون $\hat{C} + \hat{D} = \boxed{\quad}$ ، پس $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

• از رابطه بالا داریم $\hat{A} + \hat{C} = \hat{C} + \boxed{\quad}$

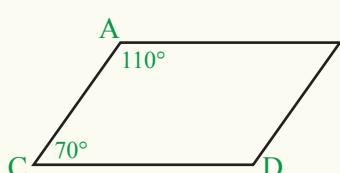
• از تفیریق کردن \hat{C} از هر دو طرف چه رابطه‌یی به دست می‌آید؟

• راجع به زوایای \hat{A} و \hat{D} چه می‌توان گفت؟ به همین ترتیب نشان دهد $\hat{B} = \hat{C}$

می‌باشد.

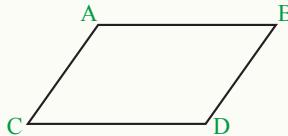
در یک متوازی الاضلاع زوایای مقابل آن با هم مساوی‌اند.

مثال : شکل $ABDC$ یک متوازی اضلاع است، اندازه زوایای \hat{B} و \hat{D} را معلوم کنید.



حل: چون زوایای مقابل یک متوازی الاضلاع باهم مساوی‌اند، پس $\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$ و $\hat{D} = \hat{A} = 110^\circ$

فعالیت



چهارضلعی $ABDC$ را درنظر می‌گیریم.

$$(I) \dots\dots \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \boxed{\quad} \bullet$$

با توجه به تساوی زوایای مقابل متوازی الاضلاع داریم: $\hat{B} = \hat{C}$, $\hat{A} = \boxed{\quad}$

اکنون در رابطه (I) به عوض A و B مقدار های C و D را می‌گذاریم.

$$\hat{D} + \hat{C} + \hat{C} + \hat{D} = \boxed{\quad}$$

$$2\hat{C} + 2\hat{D} = \boxed{\quad} \quad \text{از رابطه فوق}$$

$$\hat{C} + \hat{D} = \boxed{\quad}$$

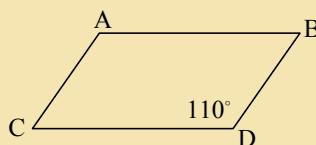
قطعه خط های CD و AB چه رابطه ای با هم دارند؟

به طور مشابه چه رابطه‌یی بین \overline{AC} و \overline{BD} وجود دارد؟

اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل آن با هم مساوی باشند، این چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

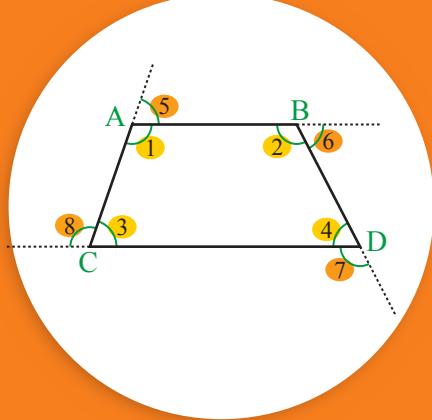
تمرین

1- اگر در متوازی الاضلاع زیر $\hat{D} = 110^\circ$ باشد، زوایای $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ و \hat{D} را دریابید.



2- هرگاه قطر یک چهارضلعی، چهارضلعی را به دو مثلث انبساط پذیر تقسیم کند، آیا این چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟

زوایای خارجی یک چهار ضلعی



آیا می توانید بگویید که مجموع زوایای خارجی یک چهار ضلعی چند درجه می شود؟

اصلان $\hat{1}$ ، $\hat{2}$ ، $\hat{3}$ و $\hat{4}$ را مطابق شکل بالا امتداد می دهیم. زوایای $\hat{5}$ ، $\hat{6}$ ، $\hat{7}$ و $\hat{8}$ زوایای خارجی این چهار ضلعی می باشند.

$$\hat{1} + \hat{5} = 180^\circ$$

$$\hat{2} + \hat{6} = 180^\circ$$

$$\hat{4} + \hat{7} = 180^\circ$$

$$\hat{3} + \hat{8} = 180^\circ$$

می خواهیم نشان دهیم که $\hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 360^\circ$ می باشد.

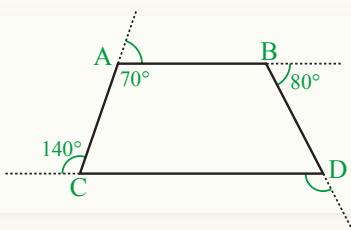
اگر هر دو طرف را جمع کنیم داریم که:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

با توجه به این که مجموع زوایای داخلی چهارضلعی 360° است داریم:

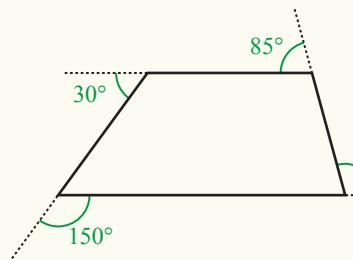
در نتیجه $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 360^\circ$ پس مجموع زوایای خارجی یک چهار ضلعی 360° می باشد.

فعالیت



در شکل دو زاویه خارجی چهارضلعی نامعلوم می باشد. زاویه های نامعلوم را دریابید.

مثال: سه زاویه خارجی این چهار ضلعی داده شده‌اند. زاویه‌چهارمی آن چند درجه می‌شود؟



حل:

$$150^\circ + 30^\circ + 85^\circ = 265^\circ$$

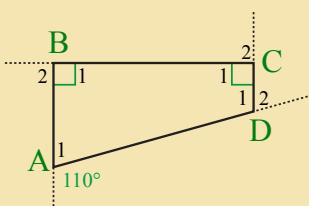
چون مجموعه هر چهار زاویه خارجی یک چهار ضلعی 360° می‌باشد.

زاویه چهارمی مساوی است به: $360^\circ - 265^\circ = 95^\circ$

مجموعه زوایای خارجی یک چهار ضلعی 360° می‌باشد.

تمرین

1- مجموع سه زاویه خارجی یک چهار ضلعی 301° می‌باشد. زاویه چهارمی این چهار ضلعی چند درجه می‌شود؟



2- در شکل مقابل یک زاویه خارجی چهار ضلعی داده شده است سه زاویه خارجی دیگری این چهار ضلعی را دریابید.

3- آیا مجموع چهار زاویه داخلی یک چهار ضلعی با مجموع چهار زاویه خارجی یک چهار ضلعی مساوی است؟ چرا؟

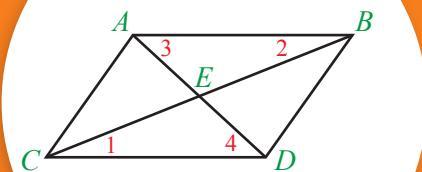
4- مجموع زوایای داخلی و خارجی یک چهار ضلعی مساوی است به:
a) 360° b) 720°

5- هر گاه مجموع سه زاویه داخلی یک چهار ضلعی 315° باشد. زاویه چهارم داخلی این چهار ضلعی مساوی است به:
a) 50° b) 45° c) 25°

خاصیت‌های قطرهای چهارضلعی

خاصیت‌های قطرهای متوازی الاضلاع

در مورد قطرهای یک متوازی الاضلاع چه می‌توان گفت؟



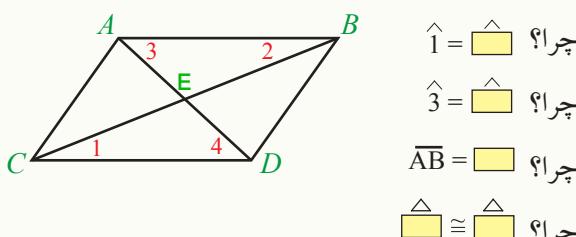
و AD و BC دو قطر متوازی الاضلاع $ABDC$ می‌باشد.

فعالیت

• ابتدا طول قطرهای متوازی الاضلاع را معلوم کنید.

• گفته می‌توانید که قطرها با هم دیگر چه رابطه‌ی دارند؟

• خانه‌های خالی زیر را پر کنید.

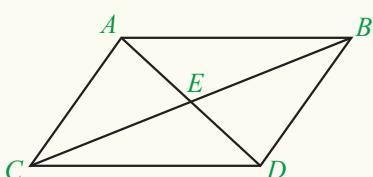


آیا می‌توانید از تساوی دو مثلث ABE و CED بگویید که قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند؟

قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

مثال: در متوازی الاضلاع $ABDC$ قطر $AD = 6\text{cm}$ و $BC = 8\text{cm}$ می‌باشد

طول EC و AE را معلوم کنید.

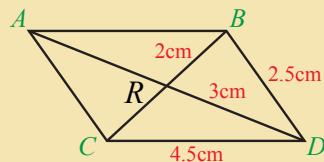


حل: چون قطر های متوازی الاضلاع یکدیگر را تنصیف می کنند. بنابراین:

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{6\text{cm}}{2} = 3\text{cm} \quad , \quad \overline{EC} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{8\text{cm}}{2} = 4\text{cm}$$

تمرین

1- در چهار ضلعی زیر قطعه خط های نامعلوم را دریابید.



2- کامل ترین جواب را نشانی کنید.

در یک متوازی الاضلاع قطرها:

- (a) بر هم عموداند.
- (b) یکدیگر را تنصیف می کنند.
- (c) هر دو درست است.

3- در یک متوازی الاضلاع:

- (a) زوایای مقابل آن دو به دو با هم مساوی اند.
- (b) اضلاع مقابل آن دو به دو باهم مساوی اند.
- (c) هر دو درست است.

4- از تقاطع قطر های متوازی الاضلاع:

- (a) دو جوره مثلث های انبساط پذیر تشکیل می شوند.
- (b) چهار مثلث انبساط پذیر تشکیل می شوند.

قطر های مستطیل

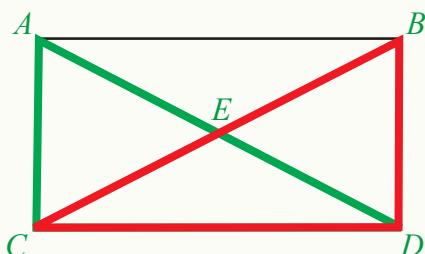


در شکل مقابل سطح روی میز کدام
شکل هندسی را دارد. در مورد خواص
آن چه می‌دانید؟

فعالیت

مستطیل ABCD را در نظر بگیرید:

- قطر های مستطیل را رسم نموده نقطه تقاطع را E بنامید.
- توسط خط کش اندازه کنید که آیا قطر های مستطیل با هم مساوی اند؟
- با در نظر داشت شکل زیر دو مثلث ACD و BCD ، خانه های خالی زیر را پر کنید.



$$DB = \boxed{\quad}$$

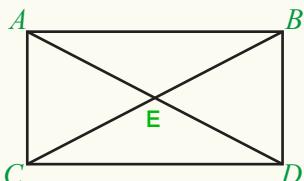
$$\hat{C} = \hat{\boxed{\quad}}$$

$$\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

صلع مشترک

- راجع به دو مثلث ACD و BCD چه می‌توان گفت؟
- می‌توانید بگویید که $\overline{BC} = \overline{AD}$ می‌باشد؟

در هر مستطیل قطرها با هم مساوی و یکدیگر را تنصیف می‌کنند.

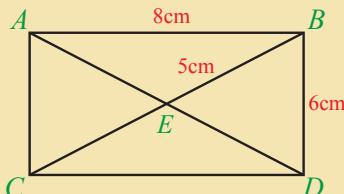


مثال: در شکل مقابل \overline{BC} و \overline{AD} قطر های مستطیل ABDC می‌باشد، اگر $\overline{ED} = 4\text{cm}$ باشد طول BC را معلوم کنید.

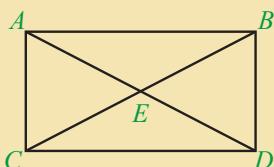
حل: چون قطرهای مستطیل یکدیگر را تنصیف می‌کنند؛ پس: $\overline{AE} = 4\text{cm}$ و $\overline{AD} = 8\text{cm}$ می‌باشند.
از طرف دیگر چون قطرهای مستطیل با هم دیگر مساوی‌اند. $\overline{BC} = \overline{AD}$ ، پس $\overline{BC} = 8\text{cm}$ می‌باشد.

تمرین

1- در مستطیل زیر طول‌های نامعلوم را دریابید.



2- اگر $\overline{BC} = 6\text{cm}$ باشد، طول \overline{EC} ، \overline{ED} ، \overline{AE} و \overline{EB} را معلوم کنید.



3- اگر یک قطر مستطیل 18 cm باشد اندازه قطر دیگر این مستطیل مساوی است به:
a) 9 cm b) 18 cm c) 4.5 cm

4- اگر نصف یک قطر یک مستطیل 6 cm باشد، هر قطر این مستطیل مساوی است به:
a) 12 cm b) 6 cm c) 24 cm

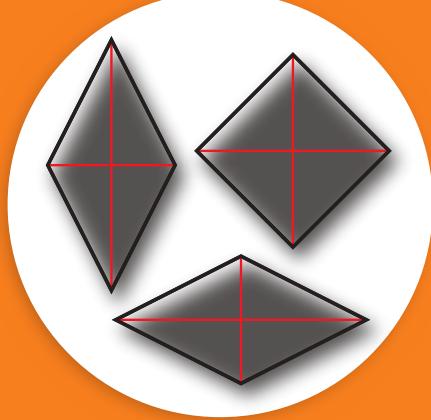
5- از تقاطع قطرهای یک مستطیل چند مثلث انباق پذیر تشکیل می‌شوند؟
a) 2 b) 4 c) هر دو غلط است.

6- کامل ترین جواب را نشانی کنید.
در مستطیل قطرها:
a) با هم مساوی‌اند.
b) یکدیگر را تنصیف می‌کنند.
c) هر دو درست است.

7- چهار ضلعی‌هایی که تمام خواص متوازی الاضلاع را دارند، عبارت‌اند از:
a) مربع b) معین (لوزی) c) مستطیل d) هر سه درست است.

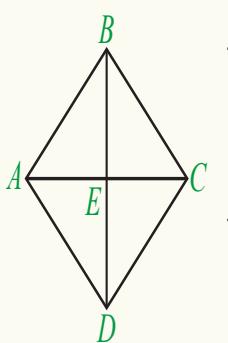
قطرهای لوزی(معین)

در شکل مقابل اشکال هندسی را نام ببرید.



فعالیت

- یک لوزی را ترسیم نمایید که یک ضلع آن 4cm و یک زاویه آن 50° باشد.
- قطرهای این لوزی را رسم کنید.
- زاویه بین قطرهای این لوزی را اندازه کنید. در مورد آن چه می توان گفت؟



دو قطر لوزی \overline{BD} و \overline{AC} می خواهیم ثابت کنیم که قطرهای یک لوزی بالای یکدیگر عمود اند.

در لوزی $ABCD$ داریم که:
 اضلاع لوزی با هم مساوی اند
 از طرف دیگر دو قطر \overline{AC} و \overline{BD} یکدیگر را تنصیف می کنند.
 (لوزی یک متوازی الاضلاع است).

پس:

$$\overline{EB} = \overline{ED}$$

$$\overline{AE} = \overline{EC}$$

دو مثلث ABC و ACD متساوی الساقین می باشند. (اضلاع لوزی با یکدیگر مساوی اند).
 در مثلث متساوی الساقین ABC ضلع AC به دو قسمت متساوی تقسیم شده است.
 بدین معنی که خط مستقیم BE میانه و ارتفاع مثلث ABC نیز می باشد.
 چون در نقطه E خط مستقیم BE عمود بر AC و همچنین در نقطه E خط مستقیم ED

عمود بر AC می باشد.

در نتیجه: $BD \perp AC$ می باشد.

مثال: در شکل مقابل AC و BD قطر های لوزی $ABCD$ می باشند.

اگر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C}_5 = \hat{C}_6 = 60^\circ$ باشند.

اندازه زوایای $\hat{B}_3, \hat{B}_4, \hat{D}_7$ و \hat{D}_8 را دریابید.

حل: چون مثلث های ADE , BCE , ABE و CDE قائم الزاویه می باشند.

$$\hat{D}_7 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

در نتیجه: $\hat{B}_3 = \hat{B}_4 = \hat{D}_7 = \hat{D}_8 = 30^\circ$ می باشند.

قطرهای لوزی بر هم دیگر عمود و یکدیگر را تنصیف می کنند.

تمرین

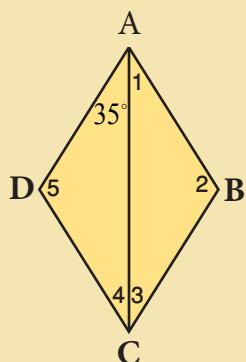
1- آیا قطرهای لوزی زاویه های رأس را تنصیف می کنند؟

2- آیا در لوزی قطرها با هم مساوی و بالای یکدیگر عمود اند؟

3- آیا قطرهای معین یکدیگر را تنصیف می کنند؟

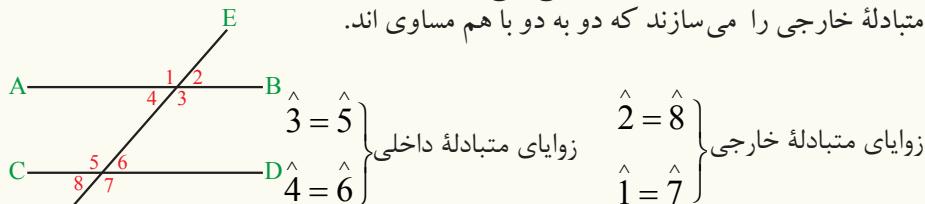
4- آیا معین(لوزی) یک متوازی الاضلاع است؟

5- در این شکل معین(لوزی) در صورتیکه یک زاویه آن 35° باشد، مقدار زوایای $1, 2, 3, 4$ و 5 را دریابید.



خلاصه فصل ششم

- دو خط مستقیمی که در یک مستوی واقع بوده خود یا امتداد شان نقطه مشترکی نداشته باشند، باهم موازی‌اند فاصله بین دو خط موازی مساوی است.
- دو خط مستقیم عمود بر یک خط مستقیم با هم موازی‌اند.
- دو خط مستقیم وقتی بر هم‌دیگر عمود می‌باشند که زاویه بین آنها 90° باشد.
- اگر دو خط موازی توسط خط قاطع قطع شوند، چهار زاویه متبادلۀ داخلی و چهار زاویه متبادلۀ خارجی را می‌سازند که دو به دو با هم مساوی‌اند.



- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط مستقیم طوری قطع شوند که زاویه‌های مساوی متبادلۀ را بسازند این دو خط با هم موازی‌اند.
- اگر دو خط موازی توسط یک خط مستقیم قطع شود ۸ زاویه متوافقه مساوی را می‌سازند که دو به دو باهم مساوی‌اند.

$$\hat{2} = \hat{6}, \quad \hat{1} = \hat{5}$$

$$\hat{3} = \hat{7}, \quad \hat{4} = \hat{8}$$

- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که زاویه‌های مساوی متوافقه را بسازند، این دو خط با هم موازی‌اند.

- اگر دو خط مستقیم موازی توسط یک خط مستقیم قطع شود، مجموع زوایای داخلی یک طرف خط قاطع مساوی به 180° می‌باشد.

- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که مجموع زوایای داخلی یک طرف خط قاطع 180° باشد، این دو خط با هم موازی‌اند.

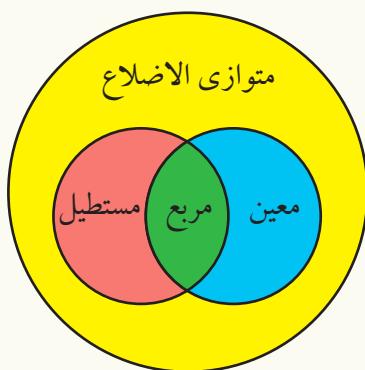
- در یک متوازی الاضلاع زوایای مقابله می‌باشد.

- قطراهای متوازی الاضلاع یکدیگر را تنصیف نموده از تقاطع قطرها دو جوره مثلث‌های انطباق پذیر تشکیل می‌شوند.

- در مستطیل قطرها با هم مساوی و یکدیگر را تنصیف نموده و از تقاطع قطرها دو جوره مثلث انطباق پذیر تشکیل می‌شوند و هر چهار زاویه مستطیل قایمه می‌باشند.

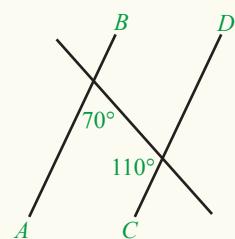
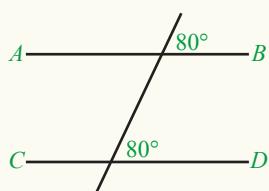
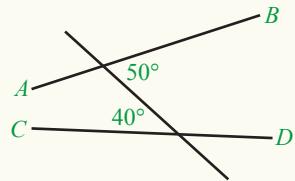
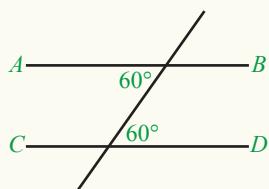
- چهار ضلع معین (لوزی) با هم مساوی‌اند، قطرها بر هم عمود و یکدیگر را تنصیف می‌کنند و از تقاطع قطرها چهار مثلث انطباق پذیر تشکیل می‌شوند. و نیز قطرها زاویه رأس را تنصیف می‌کنند.

- قطرهای مربع باهم مساوی اند، بر یکدیگر عمود بوده و یکدیگر را تنصیف می کنند.
- قطرهای مربع زاویه رأس را تنصیف می کنند. از تقاطع قطرها چهار مثلث انباق پذیر تشکیل می شوند.
- مجموع چهار زاویه داخلی یک چهار ضلعی 360° می باشد و مجموع چهار زاویه خارجی یک چهار ضلعی نیز 360° است.
- تقاطع خاصیت های متوازی الاضلاع، مستطیل، معین (لوزی) و مربع در دیاگرام وین توسط تقاطع سط ها نشان داده شده است.

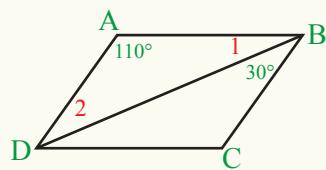
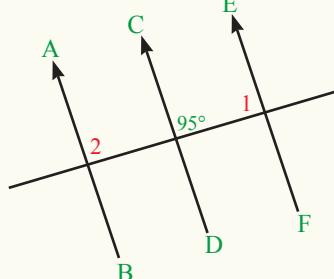


تمرینات فصل ششم

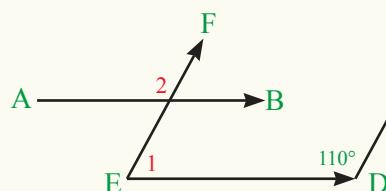
1- در کدام یک از اشکال زیر، دو قطعه خط AB و CD موازی اند؟



2- در اشکال زیر اگر $\hat{1}$ و $\hat{2}$ چند درجه می باشد؟



3- در شکل زیر اگر $\hat{1}$ و $\hat{2}$ را دریابید.



4- هر خاصیتی که چهار ضلعی ها دارند در مقابل آن علامه ✓ را بگذارید.

خاصیت ها	متوازی الاضلاع	مستطیل	معین (لوزی)	مربع
قطرها یکدیگر را تنصیف می کنند.				
قطرها باهم مساوی اند.				
قطرها بر هم عموداند.				
قطرها زوایای رأس را تنصیف می کنند.				
از تقاطع قطرها دو جوره مثلث های انبساط پذیر تشکیل می شوند.				
از تقاطع قطرها، چهار مثلث انبساط پذیر تشکیل می شوند.				
اضلاع مقابل مساوی و موازی اند.				
تمام اضلاع مساوی اند.				
زوایای مقابل مساوی اند.				
هر چهار زاویه باهم مساوی اند.				

5- جواب درست را انتخاب کنید:

وقتی که از تقاطع دو خط مستقیم با یک قاطع زاویه های مساوی متبادله تشکیل شود این دو خط باهم:

a) عمود اند. b) موازی اند. c) متقارن اند.

6- دو زاویه که اضلاع شان موازی و هم جهت یا موازی و مختلف الجهت باشند این دو زاویه:
 a) مساوی اند. b) متمم یکدیگراند. c) مجموع این دو زاویه 90° می شود.

7- دو زاویه بیی که دو ضلع آنها موازی و هم جهت و دو ضلع آنها موازی و مختلف الجهت باشند:
 a) مجموع آنها 180° می شود. b) مجموع آنها 90° می شود. c) باهم مساوی اند.

8- دو خط مستقیم عمود بر یک خط، با هم:

(c) متقاطع اند

(b) عمود اند

9- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شود که مجموع دو زاویه داخلی یک

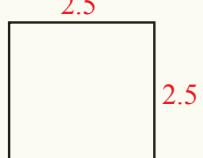
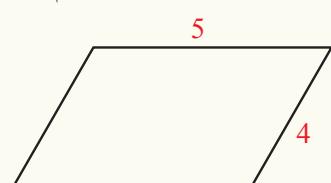
طرف خط قاطع 180° شود، این دو خط با هم:

(c) متقاطع اند

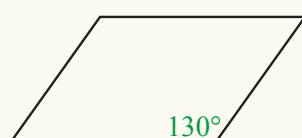
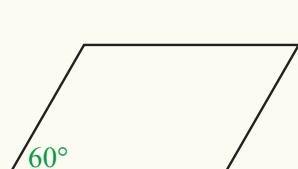
(b) عمود اند

(a) موازی اند

10- در چهار ضلعی های زیر طول اضلاعی که معلوم نیستند، دریابید:

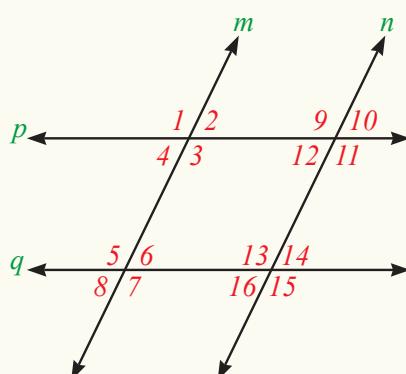


11- در چهار ضلعی های زیر، هر سه زاویه دیگر آن ها چند درجه می باشد؟



12- در شکل $p \parallel q$ و $m \parallel n$ است، اگر زاویه $\hat{2} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه های متناظر

چند درجه می باشند؟



13- کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است؟

- قطرهای متوازی الاضلاع با هم مساوی‌اند.
- قطرهای مربع بر یکدیگر عمود‌اند.
- قطرهای معین (لوزی) یکدیگر را تنصیف می‌کنند.
- هر چهار زاویه معین (لوزی) قایمه می‌باشند.
- اضلاع مقابله یک متوازی الاضلاع دو به دو با هم مساوی و موازی‌اند.
- اضلاع مقابله یک ذوزنقه دو به دو موازی می‌باشند.
- هیچ گاه یک ذوزنقه متوازی الاضلاع شده نمی‌تواند.
- هر مستطیل یک چهار ضلعی است.
- معین (لوزی) یک متوازی الاضلاع می‌باشد.
- تنها مربع چهار ضلعی است که هر چهار زاویه آن قایمه می‌باشد.
- اگر مجموع سه زاویه یک چهار ضلعی 300° باشد زاویه چهارم آن 60° است.
- مجموع زوایای خارجی یک چهار ضلعی 360° می‌باشد.
- مجموع زوایای داخلی یک چهار ضلعی 360° می‌باشد.
- قطرهای یک متوازی الاضلاع بر هم عموداند.
- از تقاطع قطرهای مستطیل چهار مثلث انبساط پذیر تشکیل می‌شود.
- از تقاطع قطرهای معین (لوزی) چهار مثلث انبساط پذیر تشکیل می‌شود.
- قطرهای مستطیل یکدیگر را تنصیف می‌کنند.
- قطرهای معین با همدیگر عمود‌اند.

14- اگر یک زاویه یک متوازی الاضلاع قایمه باشد، نشان دهید که سه زاویه دیگر آن نیز قایمه می‌باشند.

15- اگر یک زاویه یک متوازی الاضلاع 55° باشد، سه زاویه دیگر این متوازی الاضلاع را دریابید.

16- در شکل زیر $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ می‌باشد $\hat{1}$, $\hat{2}$ و $\hat{3}$ را دریابید.

