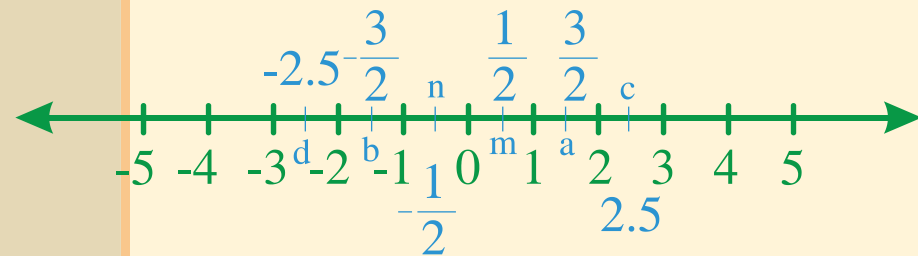




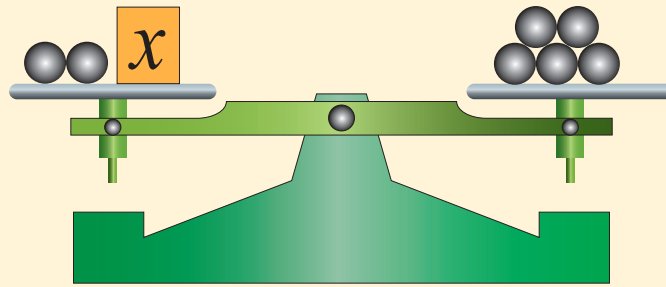
# ریاضی

## صنف ۱۱

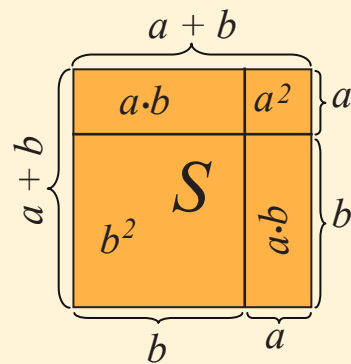
(برای مدارس دینی)



صنف ۱۱



$$x+2=5$$



کتاب های درسی مربوط وزارت معارف بوده  
خرید و فروش آن ممنوع است.

# ریاضی

صنف یازدهم  
برای مدارس دینی

۱۳۹۸

ه.ش

## مؤلفان

- سرمؤلف عبدالکبیر عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- سرمؤلف نظام الدین عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- معاون مؤلف نویدالله هاشمی عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

## ادیتوران علمی

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی
- میرنقیب الله عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درس

## ادیتوران زبان

- معاون مؤلف عین الدین اسدی عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

## کمیته دینی، سیاسی و فرهنگی

- مولوی عبدالوکیل
- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی

## إشراف

دکتور شیر علی ظریفی رئیس پروژه انکشاف نصاب تعلیمی.



الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين، أما بعد: نصاب تعلیمی معارف، اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعه علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد. نصاب تعلیمی با گذشت زمان، تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زنده گی، مطابق با نیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضه معلومات، تطور و انکشاف نماید. یکی از عرصه های نصاب تعلیمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعلیمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین مبین اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زنده گی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.

علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنامندی سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصاً انکشاف تدریجی نصاب تعلیمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفا کرده اند. مطالعه دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان میدهد که نصاب تعلیمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پا بر جای دین اسلام، که برای همه انسانها در همه زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است. کشور عزیز ما افغانستان با سابقه درخشان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی؛ مانند: عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه و غیره، گواه واضح آنچه گفته شد می باشد. همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند.

وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت و رسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعه کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.

در این راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصان باتجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی را با شرح و توضیح متون، جا به جا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت. امیدوارم این تلاشهای قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده و سبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفیق

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

## استادان عالقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است که قوانینی را که خداوند در طبیعت حاکم ساخته فورمول بندی می کند و مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارائه می نماید.

انسان ها در زنده گی روز مره به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد، زیرا که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکا، تعیین زکات و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.

برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری را آموخته، مسائل روزمره زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل؛ مانند: میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.

به گونه یی که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسائل ضروری این علم را با در نظر داشت فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تألیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند برود و نقش مؤثر و مثمر را در جامعه بازی نمایند.

و الله ولی التوفیق

### فصل اول: اعداد حقیقی، تناسب مرکب و مشارکت

اعداد حقیقی.....	۳
تناسب مرکب.....	۵
مشارکت.....	۷
تمرینات فصل اول.....	۱۰

### فصل دوم: مشابهت ها

قضیه تالس در مثلث.....	۱۳
حالت های تشابه مثلث ها (حالت اول).....	۱۵
حالت های تشابه مثلث ها (حالت دوم).....	۱۷
حالت های تشابه مثلث ها (حالت سوم).....	۱۹
عکس قضیه فیثاغورث.....	۲۳
قضایای مثلث قائم الزاویه.....	۲۵
قضایا در مثلث قائم الزاویه برای زوایای $30^\circ$ و $60^\circ$ .....	۲۹
نکات مهم فصل دوم.....	۳۳
تمرینات فصل دوم.....	۳۴

### فصل سوم: افاده های الجبری

مربع مجموع و تفاضل افاده های دو حده.....	۳۷
تجزیه افاده های الجبری.....	۳۹
نکات مهم فصل سوم.....	۴۱
تمرینات فصل سوم.....	۴۲

### فصل چهارم: معادلات، رابطه و تابع

مفهوم معادله.....	۴۵
تشکیل معادلات.....	۴۷
معادلات معادل.....	۴۹
رابطه.....	۵۱

۵۳.....	رابطه خطی.....
۵۵.....	تشکیل رابطه های خطی.....
۵۷.....	تابع.....
۵۹.....	نکات مهم فصل چهارم.....
۶۰.....	تمرینات فصل چهارم.....

### فصل پنجم: مساحت و احجام

۶۳.....	مساحت و حجم مکعب مستطیل.....
۶۷.....	مساحت و حجم منشور.....
۶۹.....	مساحت و حجم استوانه.....
۷۱.....	مساحت و حجم هرم.....
۷۵.....	مساحت و حجم مخروط.....
۷۷.....	مساحت و حجم کره.....
۷۹.....	نکات مهم فصل پنجم.....
۸۱.....	تمرینات فصل پنجم.....

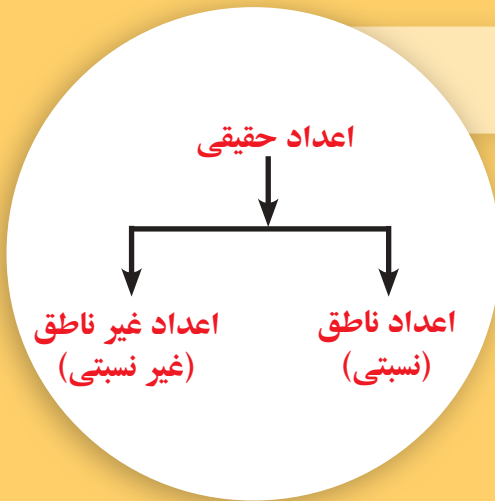


# فصل اول

اعداد حقیقی، تناسب  
مرکب و مشارکت

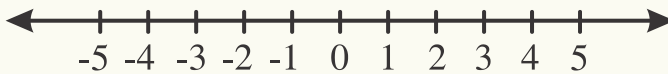




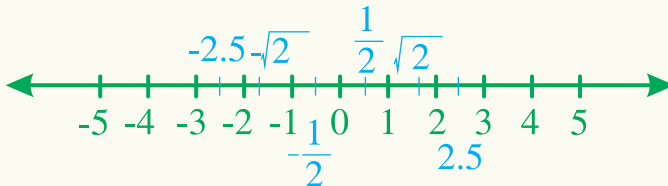


در صنف هشتم ست اعداد حقیقی را مطالعه نمودیم و دیدیم که اعداد در ریاضی اهمیت زیاد دارد؛ بنابراین فهمیدن اعداد در زنده گی انسانها ضروری شمرده میشود.

اگر شما به ترمامیتر (میزان الحرارة) متوجه شده، ممکن دیده باشید که درجه بندی آن از صفر به طرف بالا و پائین ادامه دارد به همین ترتیب محور اعداد هم به قسم ترمامیتر یک خط جهت دار درجه بندی شده است که از یک نقطه به دو جهت مخالف ذریعۀ استعمال یک واحد معین ادامه پیدا می کند؛ مانند شکل زیر:

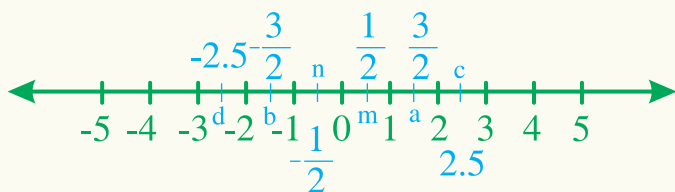


شما میدانید که ست اعداد تام از اعداد تام مثبت، اعداد تام منفی و صفر تشکیل شده است که در شکل بالا بعضی از اعداد تام روی آن نشان داده شده اند؛ ولی علاوه از اعداد تام اعداد دیگری هم وجود دارد که تا به حال بر روی محور اعداد نشان داده نشده اند. یا به عبارت دیگر یک تعداد زیاد اعداد ناطق و اعداد غیر ناطق به روی محور اعداد واقع اند، جهت روشن شدن بهتر این مسئله به شکل ذیل توجه نمایید.



دیده می شود که هر نقطه محور اعداد به یک عدد ارتباط دارد؛ پس به این ترتیب بین اعداد و نقاط محور چنین رابطه موجود است که هر نقطه محور یک عدد را و هر عدد یک نقطه محور را نشان میدهد. هر گاه عدد  $a$  بزرگتر از  $b$  باشد در این حالت باید عدد  $a$  روی محور

اعداد به طرف راست عدد  $b$  واقع باشد؛ پس به صورت عمومی روی محور اعداد، اعداد طرف راست بزرگتر از اعدادی اند که به طرف چپ محور واقع اند؛ مانند شکل زیر:



در شکل دیده می شود که نقطه  $n$  عدد  $(-\frac{1}{2})$  را، نقطه  $m$  عدد  $(\frac{1}{2})$  را و به همین ترتیب

هر یکی از نقاط  $a, b, c$  و  $d$  یک عدد را روی محور اعداد نشان می دهد. دیده می شود که نقطه  $m$  به طرف راست نقطه  $n$  روی محور اعداد واقع است؛ بنابر آن  $(-\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$  است و همچنان نقطه  $b$  به طرف راست نقطه  $d$  روی محور اعداد واقع است؛ پس گفته می شود که

$-\frac{3}{2} > -2.5$  است. در شکل دیده می شود که نقطه  $c$  به طرف راست نقطه  $a$  واقع است پس  $2.5 > \frac{3}{2}$  می باشد.

همان طوری که اعداد ناطق دارای معکوس جمعی می باشند اعداد غیر ناطق نیز معکوس جمعی دارند.

### تعریف اعداد حقیقی

تمام اعداد ناطق و غیر ناطق را اعداد حقیقی گویند.



## تناسب مرکب compound proportion

$$\frac{5}{3} = \frac{25}{15} = \frac{30}{18}$$

تناسب به چند نوع است؟  
می تواند یک تناسب تنها مستقیم و  
یا معکوس باشد.  
آیا تناسبی وجود دارد که همزمان  
هم مستقیم و هم معکوس باشد؟

## فعالیت



به اندازه دو قاشق چای خوری، شربت را در یک گilas آب مطابق شکل حل کرده ایم که نسبت هر گilas آب و تعداد قاشق های شربت 1 بر 2 است. جک شکل مقابل گنجایش 2 گilas آب را دارد. مطابق شکل، 4 قاشق چای خوری شربت را در آن حل کرده ایم. آیا شیرینی آب گilas و جک به یک اندازه است؟ جدول زیر را تکمیل کنید:

تعداد گilas های آب	1	2	3	4
تعداد قاشق های شربت	2		6	

- نسبت تعداد گilas های آب بر تعداد قاشق های شربت را بنویسید.
- چه رابطه بین این نسبت ها وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که هر قدر تعداد گilas های آب بیشتر یا کمتر شود، تعداد قاشق چای خوری شربت نیز متناسب به آن تغییر می کند تا نسبت  $\frac{1}{2}$  ثابت بماند؛ بنا بر آن جدول فوق یک جدول تناسب است که مساوی بودن چهار نسبت را نشان می دهد.

## تعریف

تساوی زیاده تر از دو نسبت را تناسب مرکب گویند در تناسب مرکب صورت نسبت اول و مخرج های نسبت های دیگر را به نام طرفین و مخرج نسبت اول و صورت های نسبت های دیگر را به نام وسطین تناسب یاد می کنند.

طور مثال:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{18}{27}$$

وسطین      طرفین

**توجه:** در یک جدول تناسب مرکب جهت تیر به طرف بالا، تناسب مستقیم و جهت تیر به طرف پایین، تناسب معکوس را نشان می دهد.

**مثال 1:** 5 نفر کارگر برای 4 روز کار کرده اند و 80000 افغانی مزد می گیرند. 8 نفر برای 6 روز کاری چند افغانی مزد خواهند گرفت؟

**حل:** چون رابطه بین نسبت ها مستقیم است؛ پس جدول را طور زیر تشکیل می دهیم:

مزد	روز	تعداد نفر
80000	4	5
x	6	8

$$\frac{80000}{x} = \frac{4 \times 5}{6 \times 8}, \quad \frac{80000}{x} = \frac{5}{12}$$

$$x = 192000$$

**مثال 2:** اگر 10 نفر، کانالی را به طول 12 متر در 8 روز حفر نمایند 5 نفر کانال مشابه را که طول آن 15 متر باشد در چند روز حفر کرده می توانند؟

**حل:** متحول مطلوب، یعنی تعداد روز ها با تعداد نفر تناسب معکوس و با طول کانال تناسب مستقیم دارد؛ پس داریم:

روز	طول	تعداد نفر
8	12	10
x	15	5

$$\frac{8}{x} = \frac{12 \times 5}{15 \times 10}, \quad x = \frac{8 \times 15 \times 10}{12 \times 5}$$

$$x = 20$$

## تمرین

1- 24 نفر دهقان با کار روزانه 8 ساعت، زمینی را به وسعت 2000 متر مربع در ظرف 20 روز بیل می زنند. اگر 40 نفر دهقان روزانه 12 ساعت کار کنند، زمینی به وسعت 3000 متر مربع را در چند روز بیل زده می توانند؟

2 - اگر برای انتقال 4200 کیلو گرام گندم به فاصله 810 کیلو متر 500 افغانی ضرورت باشد؛ پس برای حمل و نقل 6000 کیلو گرام گندم به فاصله 630 کیلو متر چند افغانی ضرورت خواهد بود؟



هرگاه دو یا چند نفر به طور شراکت تجارت کنند سرمایه و وقت شراکت آنها از هم متفاوت باشند. مفاد آنها را چگونه بین شان تقسیم می نمایید؟

بعضی اوقات دو یا چندین نفر باهم سرمایه خود را یکجا جمع کرده و تجارت می کنند، فایده و نقص تجارت را در بین خود به نسبت سرمایه تقسیم می کنند. بعضی اوقات طوری هم می شود که سرمایه آنها با هم مساوی بوده، لیکن وقت شراکت آنها با هم فرق می کنند در این صورت فایده و نقص تجارت به نسبت وقت بین شان تقسیم می شود. گاهی امکان دارد که سرمایه و وقت هر دو فرق داشته باشد باز هم نفع و ضرر در بین آنها باید طوری تقسیم شود که عدالت بین شان برقرار باشد یعنی هم سرمایه و هم وقت در نظر گرفته شود، پس ضرورت است که به این نوع مسایل و سوالهای مشارکت جوابها گفته شود که مثال های زیر توضیح کننده موضوع می باشد.

**مثال اول:** زلمی و احمد به ترتیب با سهم 48000 و 64000 افغانی مشترک باهم تجارت می کنند اگر آنها 24500 افغانی مفاد کرده باشند، فایده هر کدام آنها را معلوم کنید.  
**حل:** معلوم است که نفع باید به نسبت سرمایه های زلمی و احمد بین شان تقسیم گردد که نسبت بین سرمایه های شان به ترتیب ذیل است:

سرمایه احمد		سرمایه زلمی
64000	:	48000
64	:	48
4	:	3

پس گفته می توانیم که نسبت سرمایه زلمی و احمد عبارت از  $\frac{3}{4}$  است. اکنون تمام مفاد

یعنی 24500 افغانی را به نسبت  $\frac{3}{4}$  تقسیم کرده و فایده هر کدام را دریافت می داریم:

$$3+4=7 \text{ = مخرج نسبت + صورت نسبت}$$

$$\text{افغانی} = \frac{24500 \times 3}{7} = 3500 \times 3 = 10500$$

$$\text{افغانی} = \frac{24500 \times 4}{7} = 3500 \times 4 = 14000$$

**مثال دوم:** سه نفر تاجر طور مشترک با هم تجارت می کنند، سرمایه نفر اولی 120000 افغانی، سرمایه نفر دومی 360000 افغانی و سرمایه نفر سومی 600000 افغانی اند. اگر آنها در این معامله 225000 افغانی نفع کرده باشند، مفاد هر کدام را معلوم کنید.

**حل:** باز هم مانند مثال گذشته مفاد کلی را به نسبت سرمایه ها تقسیم نموده و مفاد هر کدام شان را به دست می آوریم:

سرمایه نفر اول	سرمایه نفر دوم	سرمایه نفر سوم
120000	360000	600000
:	:	:
12	36	60
:	:	:
1	3	5

اکنون می نویسیم:  $1+3+5=9$

$$\text{افغانی} = \frac{225000 \times 1}{9} = 25000 \times 1 = 25000$$

$$\text{افغانی} = \frac{225000 \times 3}{9} = 25000 \times 3 = 75000$$

$$\text{افغانی} = \frac{225000 \times 5}{9} = 25000 \times 5 = 125000$$

**مثال سوم:** احمد سه ماه بعد از شروع تجارت خود محمود را همراهی خود در تجارت شریک می کند. اندازه سرمایه های آنها با هم مساویست. اگر در این معامله یک سال بعد از شروع تجارت 350000 افغانی فایده کرده باشند فایده هر کدام را معلوم کنید.

**حل:** سرمایه های آنها با هم مساویست؛ اما وقت به کار انداختن سرمایه ها با هم مختلف است. سرمایه تجار اولی 12 ماه و سرمایه تجار دومی 9 ماه فعالیت نموده است توجه باید نمود که برای دریافت مفاد هر کدام مفاد کل به نسبت وقت تقسیم می شود:

وقت احمد	وقت محمود
12	9
:	:
4	3

یا مجموع نسبت ها:  $4+3=7$



$$\text{افغانی} = \frac{350000 \times 4}{7} = 50000 \times 4 = 200000 \text{ مفاد احمد}$$

$$\text{افغانی} = \frac{350000 \times 3}{7} = 50000 \times 3 = 150000 \text{ مفاد محمود}$$

**مثال چهارم:** دو نفر یکجا با هم تجارت می کنند، تاجر اولی 150000 افغانی را برای 9 ماه و تاجر دومی 90000 افغانی را برای 7 ماه به کار انداخته اند، در این وقت تمام نفع 77000 افغانی شده است نفع هر کدام را به مقایسه سرمایه ها و وقت معلوم کنید.

**حل:** در اینجا می بینیم که هم سرمایه مختلف است و هم اوقات کار فرق دارند، در این صورت کوشش می کنیم که یکی از آنها را باهم مساوی نماییم و این کار را طور ذیل انجام می دهیم:

نفع 150000 افغانی در 9 ماه مساویست به نفع  $9 \times 150000 = 1350000$  افغانی در یک ماه.

همچنان نفع 90000 افغانی در 7 ماه مساویست به نفع  $7 \times 90000 = 630000$  افغانی در یک ماه

اکنون می توانیم سرمایه تاجر اولی را 1350000 افغانی و سرمایه تاجر دومی را 630000 افغانی و وقت هر دو را یک ماه در نظر بگیریم مانند سوال گذشته حل نمود و مفاد هر کدام را دریافت کنیم:

سرمایه تاجر اولی	:	سرمایه تاجر دومی	
1350000	:	630000	
135	:	63	یا
15	:	7	یا
پس: $15+7=22$			

$$\text{افغانی} = \frac{77000 \times 15}{22} = 3500 \times 15 = 52500 \text{ مفاد تاجر اولی}$$

$$\text{افغانی} = \frac{77000 \times 7}{22} = 3500 \times 7 = 24500 \text{ مفاد تاجر دومی}$$

**یادداشت:** در مشارکت نفع یا نقص به نسبت سرمایه ها و یا اوقات تقسیم می گردد.

## تمرینات فصل اول

عبارت های زیر را به دقت خوانده؛ اگر درست است حرف (ص) و اگر غلط است حرف (غ) را پیش روی سؤال بگذارید.

- 1- ( ) تمام اعداد نسبتی و اعداد تام را به نام اعداد حقیقی یاد میکنند.
- 2- ( ) تنها اعداد تام مثبت و منفی را اعداد حقیقی گویند.
- 3- ( ) تمام اعداد ناطق و غیر ناطق را اعداد حقیقی گویند.
- 4- ( ) روی محور اعداد، اعداد طرف راست بزرگتر از اعدادی است که به طرف چپ واقع اند.

- 5- ( ) دو یا چند نفر باهم پول خود را یکجا جمع کرده و تجارت می کنند فایده و نقص تجارت را در بین خود به نسبت سرمایه ها تقسیم می کنند.
- 6- ( ) مساوات دو تناسب را نسبت گویند.  
جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

- 1- در هر تناسب صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام..... و مخرج نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام ..... یاد می کنند.
- 2- هرگاه در یک مشارکت سرمایه ها با هم مساوی باشند تمام..... آن به..... سرمایه ها تقسیم می شود.  
سؤال های زیر را حل کنید:

- 1 - زمینی با مساحت 1200 متر مربع را 14 نفر تحت شرط این که روزانه 3 ساعت کار کنند؛ 8 روز بیل میزنند، زمین دیگری را با مساحت  $1500m^2$  توسط 15 نفر، در صورتی که روزانه شش ساعت کار کنند در چند روز بیل خواهند زد؟
- 2- در یک شرکت تجارتي 3 نفر به ترتیب به سرمایه های 90000، 120000 و 150000 تجارت می کنند هرگاه تمام مفاد آنها 72000 افغانی باشد مفاد هر کدام را دریافت کنید؟

# فصل دوم

## مشابهت ها







## قضیه تالس در مثلث

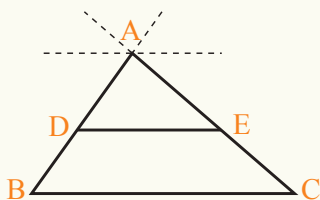
آیا می‌توانید خطوط موازی را در مثلث ببینید؟

## فعالیت

- یک مثلث کیفی را رسم نموده، یک نقطه را روی یکی از اضلاع آن در نظر بگیرید.
- از این نقطه خطی موازی با یک ضلع مثلث رسم نمایید که ضلع دیگر مثلث را در یک نقطه قطع کند، مثلث ایجاد شده را نامگذاری کنید.
- نسبت هر ضلع مثلث ایجاد شده را بر ضلع هم مانند متناسبه آن در مثلث اولیه بنویسید. این نسبت‌ها باهم چه رابطه دارند؟

از انجام دادن فعالیت بالا قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

**قضیه 1:** هرگاه یک خط دو ضلع یک مثلث را طوری قطع نماید که با ضلع سوم موازی باشد اضلاع قطع شده را متناسباً تقسیم می‌کند.



$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AE}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

**قضیه 2:** در مثلث ABC شکل فوق نقطه D بالای ضلع AB و نقطه E بالای ضلع AC

طوری واقع است که رابطه  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  برقرار است در نتیجه  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  است.

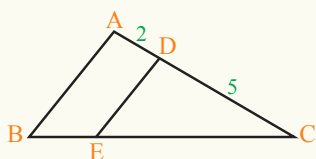
این رابطه را به عنوان معکوس قضیه تالس می‌شناسیم.

**مثال 1:** در شکل زیر  $AB \parallel DE$  و  $\frac{CD}{DA} = \frac{5}{2}$  است. نسبت  $\frac{CE}{EB}$  مساوی به چند است؟

**حل:** چون  $AB \parallel DE$  است.

تناسب بین اضلاع وجود دارد، و نظر به قضیه تالس

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA} = \frac{5}{2} \quad \text{پس:} \quad \frac{CE}{EB} = \frac{5}{2}$$



**مثال 2:** در مثلث ABC روی ضلع  $\overline{AB}$  و  $\overline{AC}$  به ترتیب دو نقطه M و N را طوری انتخاب کنید

که  $AM = \frac{1}{3} AB$ ،  $AN = \frac{1}{3} AC$  باشند.

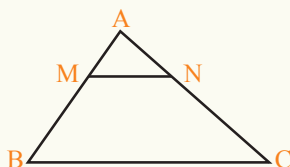
آیا MN با BC موازی شده می تواند؟

**حل:** از روابط فوق می توان نوشت:  $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$ ،  $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$

از مقایسه روابط بالا داریم:  $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

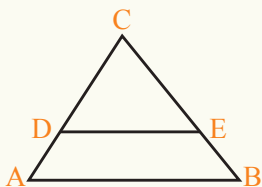
چون تناسب بین اضلاع وجود دارد نظر به معکوس قضیه تالس می توان نوشت:

$$MN \parallel BC$$

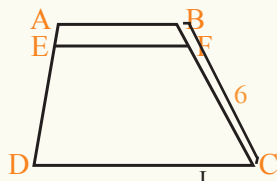


## تمرین

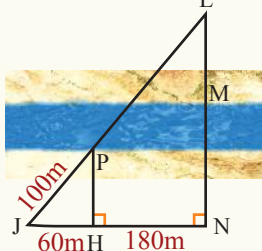
1- در شکل مقابل  $DE \parallel AB$  و  $AC = 12\text{cm}$  و  $BC = 15\text{cm}$  و  $EB = 5\text{cm}$  است طول های AD، DC و EC را معلوم کنید.



2- در دوزنقه ABCD،  $EF \parallel CD$  و  $AE = \frac{1}{7} ED$ ، طول BF و FC را دریابید.  $BC = 6\text{cm}$  است.



3- قریه L در یک طرف دریا و پایه های انتقال برق به طرف دیگر دریا واقع است. با در نظر داشت فاصله های داده شده در شکل، طول سیم مورد ضرورت برای برق رسانی به قریه، یعنی طول JL را محاسبه کنید.



## حالت های تشابه مثلث ها حالت اول



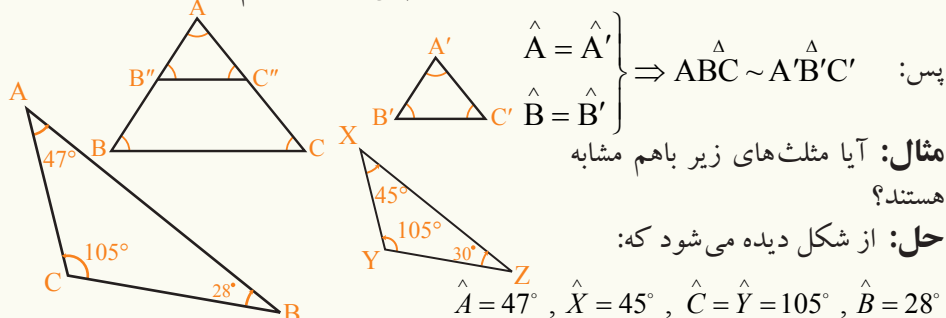
آیا می توانید با دانستن طول سایه احمد و طول سایه درخت، ارتفاع درخت را دریافت کنید؟

## فعالیت

- مثلث های  $ABC$  و  $A'B'C'$  را قسمی رسم کنید که  $\hat{A} = \hat{A}'$  و  $\hat{B} = \hat{B}'$  باشند.
  - $B''$  را روی ضلع  $AB$  طوری انتخاب کنید که  $\overline{A'B''} = \overline{AB''}$  باشد.
  - از نقطه  $B''$  زاویه را ترسیم کنید که ضلع  $\overline{AC}$  را در نقطه  $C''$  قطع نموده و با  $B'$  مساوی باشد.
  - آیا قطعه خط  $BC$  موازی با این خط است؟ چرا؟
  - مثلث های  $AB''C''$  و  $A'B'C'$  باهم چه رابطه دارند؟
  - در مثلث  $ABC$ ،  $\overline{B''C''} \parallel \overline{BC}$  است، رابطه تالس را بنویسید.
  - آیا نتیجه گرفته می توانید که  $\hat{A}B''C'' \sim \hat{A}BC$  است؟
- در فعالیت فوق دیدیم که  $AB''C''$  و  $ABC$  بایکدیگر مشابه بوده و چون  $AB''C'' \cong A'B'C'$

است؛ پس:  $\hat{A}BC \sim \hat{A}'B'C'$  می شود.

**قضیه:** هرگاه دو مثلث دو زاویه مساوی داشته باشند؛ پس مثلث ها باهم مشابه اند.

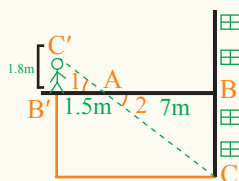


و  $\hat{Z} = 30^\circ$  دیده می‌شود که زوایای دو مثلث یک به یک با هم مساوی نبوده؛ بنابراین:  $\triangle ABC$  و  $\triangle XYZ$  با هم مشابه نیستند.

**مثال:** دو قسمت مختلف یک شفاخانه به وسیله یک پل هوایی با هم ارتباط داده شده اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل زیر در یک انجام آن ایستاده و شعاع دید خود را به رأس زاویه بین خط دید و ساختمان قرار داد.

چرا دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  با هم مشابه اند؟

با توجه به اندازه های مشخص شده در شکل، اگر طول قد محسن  $1.8m$  باشد ارتفاع پل یعنی  $BC$  را به دست آورید.



**حل:** در شکل دیده می شود که:  $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$

قرار مقابل به رأس  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

پس:  $\hat{C} = \hat{C}'$

نظر به حالت اول تشابه مثلث ها  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

چون مثلث ها باهم مشابه اند؛ پس تناسب بین اضلاع آن ها وجود دارد.

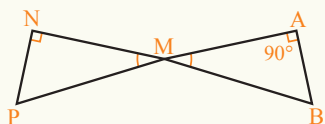
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{1.8m} = \frac{7m}{1.5m}, \quad \overline{BC} = \frac{7m \cdot 1.8m}{1.5m} = \frac{7 \cdot 18m^2}{15m}$$

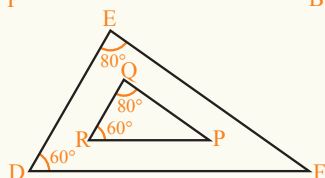
$$\overline{BC} = \frac{42}{5} m$$

$$\overline{BC} = 8.4m$$

## تمرین

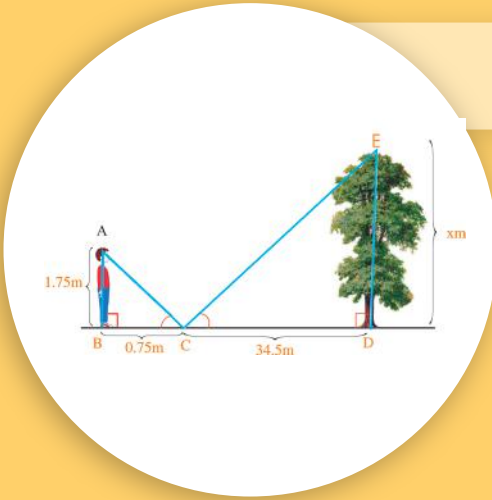


1- در شکل مقابل ثابت کنید که:  $\triangle NMP \sim \triangle MAB$



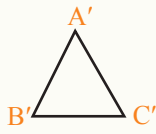
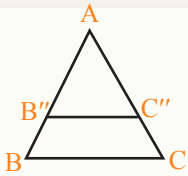
2- در شکل مقابل نشان دهید که:  $\triangle RQP \sim \triangle DEF$





چگونه می‌توان ارتفاع درخت را محاسبه کرد؟

## فعالیت



در دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$ ،  $\hat{A} = \hat{A}'$  و

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

را در نظر بگیرید.

• نقطه  $B''$  را روی ضلع  $AB$  طوری انتخاب کنید که  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$  شود.

• از نقطه  $B''$  خطی موازی به ضلع  $BC$  رسم کنید و نقطه تقاطع آن را  $C''$  بنامید.

• رابطه تالس را در  $\triangle ABC$  بنویسید.

• در تناسب  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$  قیمت مساوی  $A'B'$  را وضع نمایید.

• از تناسب  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$  و  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$  کدام رابطه را به دست آورده می‌توانید؟

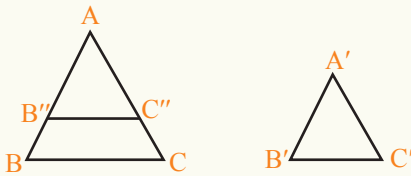
• آیا دو مثلث  $A'B'C'$  و  $AB''C''$  با هم انطباق پذیر اند؟ چرا؟

• دو مثلث  $ABC$  و  $AB''C''$  با هم چه رابطه دارند. چرا؟

• آیا می‌توان از توضیحات بالا تشابه  $\triangle ABC$  و  $A'B'C'$  را نتیجه گرفت؟

در فعالیت فوق دیدیم که:  $A'B'C' \cong AB''C''$  و  $AB''C'' \sim \triangle ABC$  است؛ پس می

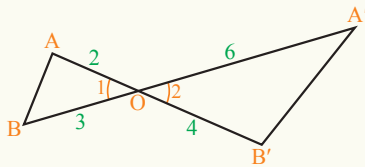
توان نتیجه گرفت که  $\triangle ABC \sim A'B'C'$  است.



**قضیه:** اگر دو ضلع یک مثلث با دو ضلع مثلث دیگر متناسب و زاویه ما بین این دو ضلع در هر دو مثلث انطباق پذیر باشند مثلث ها باهم مشابه اند.

اگر  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$  و  $\hat{A} = \hat{A'}$  باشند.

پس:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



**مثال:** آیا  $\triangle OAB$  و  $\triangle OA'B'$  متشابه اند؟

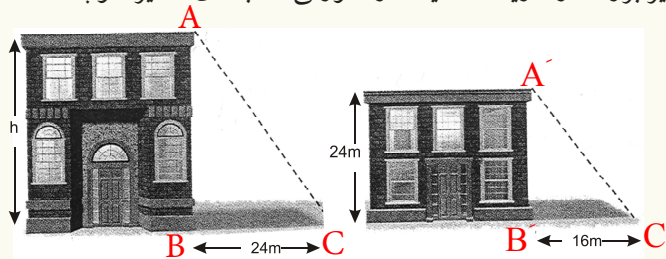
**حل:** در دو مثلث  $\triangle OAB$  و  $\triangle OA'B'$  داریم:

قرار متقابل به رأس:  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  .....

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{1}{2}$$

در دو مثلث یاد شده دو ضلع شان متناسب و زاویه بین آنها مساوی است، در نتیجه  $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$

**مسأله:** طول سایه یک تعمیر 16m است، در حالی که سایه تعمیر بلندتر از آن 24m است بلندی تعمیر بزرگ را دریافت کنید، در صورتی که بلندی تعمیر کوچک 24m باشد.



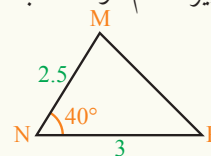
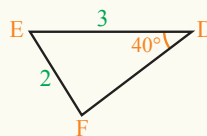
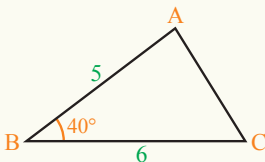
**حل:** چون مثلث های  $ABC$  و  $A'B'C'$  با هم مشابه هستند پس نسبت بین اضلاع مثلث های  $ABC$  و  $A'B'C'$  را چنین می توان نوشت:

$$\frac{h}{24m} = \frac{24m}{16m}$$

$$h = \frac{24m \times 24m}{16m} = 36m$$

## تمرین

در اشکال زیر کدام دو مثلث با هم مشابه اند؟





اگر طول انگشت مقابل  $5\text{cm}$  باشد  
طول تصویر آن چند خواهد بود؟

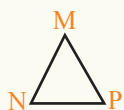
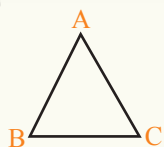
## فعالیت

- مثلث  $ABC$  را طوری رسم کنید که  $\overline{AB} = 6$  واحد و  $\overline{AC} = 9$  واحد و  $\overline{BC} = 12$  واحد باشد، سپس زوایای آن را اندازه کنید.
- مثلث  $MNP$  را طوری رسم کنید که:  $\overline{MN} = 2$  ,  $\overline{MP} = 3$  ,  $\overline{NP} = 4$  واحد طول بوده؛ سپس زوایای آن را اندازه کنید.
- با در نظر داشت قیمت های فوق جدول زیر را تکمیل نمایید:

مثلث	اضلاع	زوایا
$\triangle ABC$	$\overline{BC} = 12, \overline{AC} = 9$ و $\overline{AB} = 6$	$\hat{A} = ? , \hat{B} = ? , \hat{C} = ?$
$\triangle MNP$	$\overline{NP} = 4 , \overline{MP} = 3 , \overline{MN} = 2$	$\hat{M} = ? , \hat{N} = ? , \hat{P} = ?$
نسبت بین اضلاع	$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = ? , \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = ? , \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = ?$	

در فعالیت بالا دیدیم که نسبت بین اضلاع مثلث ها وجود دارد و زوایای دو مثلث نیز با هم

مساوی اند، بنا بر آن مثلث  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$



قضیه: اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث باهم مشابه اند.

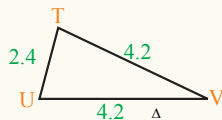
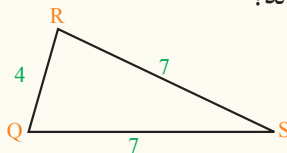
$$\frac{\overline{QR}}{\overline{UT}} = \frac{4}{2.4} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{TV}} = \frac{7}{4.2} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{UV}} = \frac{7}{4.2} = \frac{5}{3}$$

**مثال:** آیا دو مثلث ذیل با هم مشابه اند؟

**حل:**



پس:  $\triangle QRS \sim \triangle TUV$  می باشد.

**مثال:** ارتفاع برج  $\overline{AB}$  را به کمک طول سایه آن یعنی  $\overline{AC}$  تعیین کنید.

**حل:** برای این منظور میله یی را عمود بر سطح زمین در جایی قرار می دهیم که انجام بالایی

آن یعنی نقطه  $N$  با نقاط  $B$  و  $C$  روی یک خط قرار گیرد؛ چون  $\triangle ABC \sim \triangle CMN$  است.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

پس:

در رابطه بالا طول قطعه خط های  $MC$  و  $MN$ ،  $AC$  معلوم اند؛ پس به کمک رابطه بالا طول

$AB$  را که ارتفاع برج است می توان طور زیر حساب کرد:

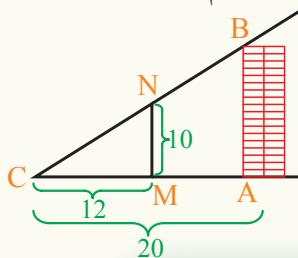
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{10} = \frac{20}{12}$$

$$12\overline{AB} = 20 \cdot 10$$

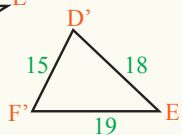
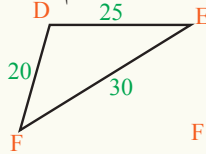
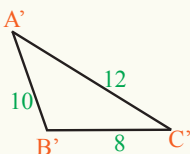
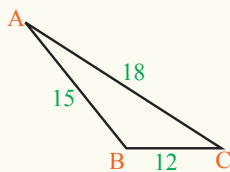
$$\overline{AB} = \frac{200}{12}$$

$$\overline{AB} = 16.6$$



## تمرین

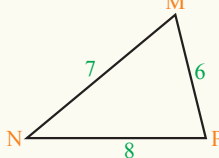
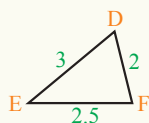
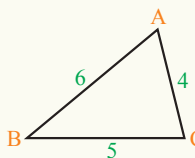
1- کدام جوره از مثلث های ذیل با هم مشابه اند؟



a

2- نشان دهید که در اشکال ذیل کدام دو مثلث با هم متشابه اند؟

b



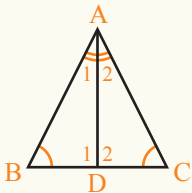
## فعالیت

- مثلث  $ABC$  را طوری رسم کنید که در آن  $\hat{B} = \hat{C}$  باشد.
- طول اضلاع مثلث  $ABC$  را با استفاده از خط کش اندازه گیری کنید.
- چه رابطه‌ی بین طول اضلاع این مثلث مشاهده می‌شود؟
- مثلث دیگری را با دو زاویه مساوی رسم نموده عملیه فوق را تکرار کنید.

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود، مثلث‌هایی که دو زاویه مساوی دارند، اضلاع مقابل زوایای مذکور با هم مساوی‌اند. این مطلب را به شکل یک قضیه طور زیر، بیان می‌نماییم:

**قضیه:** اگر دو زاویه در یک مثلث با هم مساوی باشند، اضلاع مقابل زوایای مذکور باهم مساوی هستند.

**ثبوت:** فرض می‌کنیم در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{B} = \hat{C}$  است. ناصف الزاویه  $\hat{A}$  را رسم نموده آن را  $DA$  می‌نامیم.



در دو مثلث  $ABD$  و  $ACD$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ \quad (\text{چرا؟})$$

حال در دو مثلث  $ABD$  و  $ACD$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \text{ زوایای قائمه‌اند} \\ \overline{AD} = \overline{AD} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

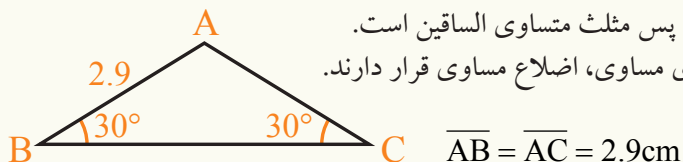
با در نظر داشت تساوی اصل دو زاویه و ضلع بین آن‌ها، مثلث‌های  $ABD$  و  $ACD$  باهم انطباق پذیراند؛ بنابراین اضلاع مقابل آن‌ها نیز باهم مساوی هستند.

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

**مثال:** در شکل زیر  $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ ،  $\overline{AB} = 2.9\text{cm}$  است طول ضلع  $AC$  را معلوم کنید.

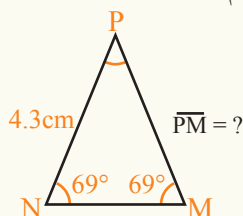
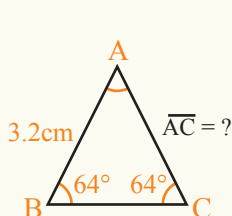
**حل:**

چون:  $\hat{B} = \hat{C}$  است، پس مثلث متساوی الساقین است.  
در نتیجه، مقابل زوایای مساوی، اضلاع مساوی قرار دارند.  
بنابراین:

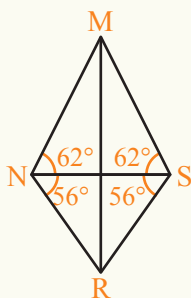


## تمرین

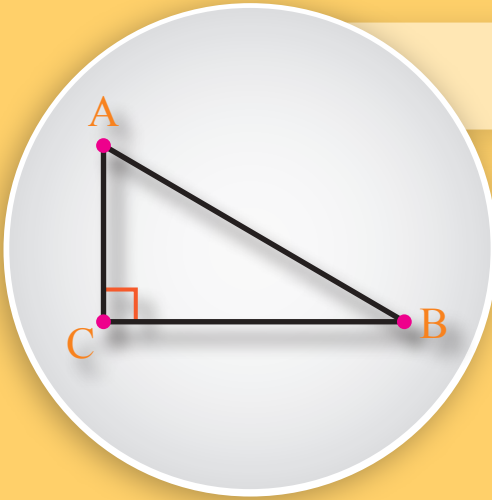
1- در شکل های زیر اضلاع نا معلوم را دریافت کنید.



2- با توجه به اندازه زاویه ها در شکل زیر نشان دهید که دو مثلث  $MNR$  و  $MSR$  انطباق پذیر اند.



## عکس قضیه فیثاغورث Pythagorean



در کدام حالت با سه قطعه خط  
کیفی یک مثلث قائم الزاویه  
تشکیل می گردد؟

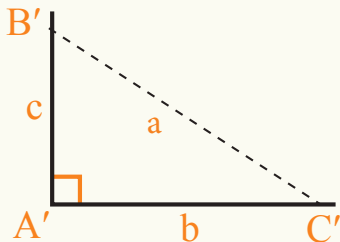
### فعالیت

- مثلی را با طول اضلاع 3، 4 و 5 سانتی متر رسم کنید.
- اندازه زاویه های این مثلث را محاسبه کنید.
- مثلث به دست آمده چه نوع مثلی است؟
- چه رابطه یی بین طول اضلاع این مثلث مشاهده می شود؟
- عملیه های فوق را برای مثلی به طول اضلاع 10, 8 و 6 سانتی متر تکرار کنید.

مشاهدات قضیه فوق را به عنوان عکس قضیه فیثاغورث طور زیر می توان بیان کرد:

### عکس قضیه فیثاغورث

اگر مجموع مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به مربع ضلع سوم آن باشد، آن مثلث  
قائم الزاویه است.



**ثبوت:** در مثلث ABC که طول اضلاع آن  
 $a, b$  و  $c$  باشد داریم:  $a^2 = b^2 + c^2$

مثلث  $A'B'C'$  را با طول اضلاع  $b, c$  طوری رسم  
می کنیم که در رأس  $A'$  قائمه باشد، برای این منظور  
ابتدا زاویه قائمه  $A'$  را رسم نموده روی اضلاع آن  
قطعه خط هایی را به طول  $b$  و  $c$  جدا می کنیم.  
آن نقاط را  $B'$  و  $C'$  می نامیم.

طبق قضیه فیثاغورث در مثلث  $A'B'C'$  داریم:

$$\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2$$

از طرف دیگر می‌دانیم که  $b^2 + c^2 = a^2$  است در نتیجه:

$$\overline{B'C'}^2 = a^2$$

$$\overline{B'C'} = a$$

پس دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  نظر به حالت تساوی سه ضلع، انطباق پذیر هستند، در نتیجه زوایای آنها نیز یک به یک مساوی اند؛ چون:  $\hat{A}' = 90^\circ$  پس:  $\hat{A} = 90^\circ$  می‌شود.

یعنی: مثلث  $ABC$  قائم الزاویه است.

**مثال:** مثلی به طول اضلاع  $\overline{AB} = \sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $\overline{AC} = \sqrt{2} \text{ cm}$  و  $\overline{BC} = \sqrt{5} \text{ cm}$  چه نوع مثلی است؟

**حل:** به اساس قضیه فیثاغورث داریم:

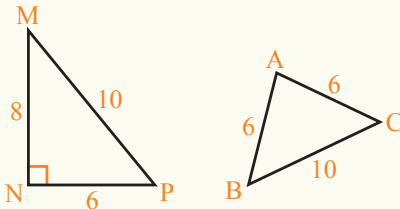
$$(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

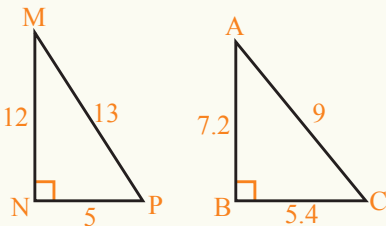
پس به اساس معکوس قضیه فیثاغورث مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائم است.

## تمرین

1- دو مثلث  $ABC$  و  $MNP$  داده شده‌اند. نشان دهید که کدام یکی آن‌ها مثلث قائم الزاویه است.

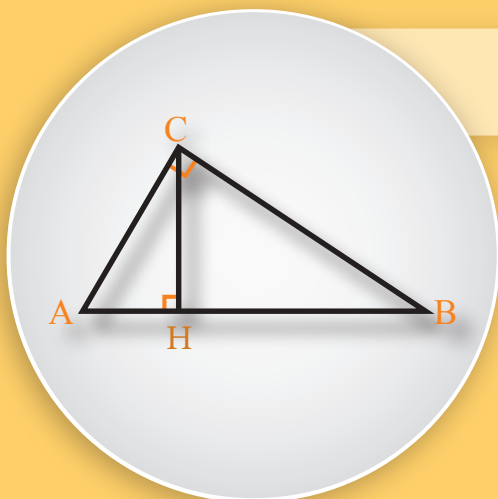


2- درست بودن یا تحقق رابطه فیثاغورث را در مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر تحقیق کنید.





## قضایای مثلث قائم الزاویه



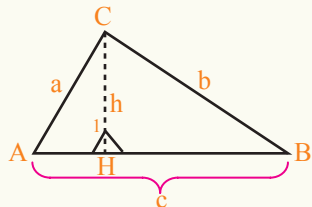
در شکل مقابل چند مثلث قائم الزاویه را می‌بینید؟ آیا این مثلث‌ها باهم مشابه‌اند؟

## فعالیت

- مثلث قائم الزاویه  $ABC$  را رسم کنید که زاویه  $C$  آن قائمه باشد.
- از رأس  $C$  ارتفاع بالای وتر آن رسم نموده آن را  $\overline{CH}$  بنامید.
- مثلث‌های  $ACH$  و  $BCH$  چه نوع مثلث‌هایی هستند؟
- آیا مثلث‌های  $ACH$  و  $ABC$  مشابه‌اند؟ چرا؟
- آیا مثلث‌های  $BCH$  و  $ABC$  مشابه‌اند؟ چرا؟
- آیا مثلث‌های  $ACH$  و  $BCH$  مشابه‌اند؟ چرا؟

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود که ارتفاع بالای وتر یک مثلث قائم الزاویه، مثلث را به سه مثلث متشابه تقسیم می‌کند. از این مطلب می‌توان برای ثبوت قضایای زیر استفاده کرد.  
**قضیه 1:** در هر مثلث قائم الزاویه، حاصل ضرب اضلاع قائم مساوی به حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است.

**ثبوت:** فرض کنید  $\overline{CH}$  ارتفاع بالای وتر مثلث قائم الزاویه  $ABC$  باشد. در دو مثلث  $ACH$  و  $ABC$  داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{H}_1 = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{A} \text{ زاویه مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACH$$

از تشابه دو مثلث نتیجه می شود که اضلاع مقابل زاویه های مساوی باهم متناسب اند.  
یعنی:

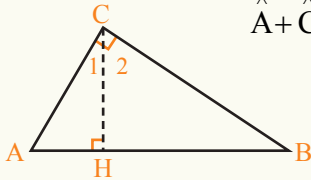
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CB}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{CH} \cdot \overline{AB}$$

**قضیه 2:** در هر مثلث قائم الزاویه مربع ارتفاع بالای وتر مساوی به حاصل ضرب دو قطعه خط ایجاد شده بالای وتر می باشد.

**ثبوت:** فرض کنید  $\overline{CH}$  ارتفاع بالای وتر مثلث قائم الزاویه  $ABC$  باشد.

در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  داریم: I  $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$

در مثلث قائم الزاویه  $ACH$  داریم: II  $\hat{A} + \hat{C}_1 = 90^\circ$



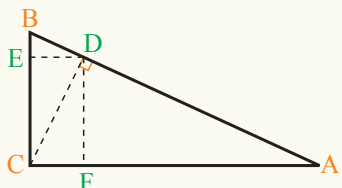
از روابط (I و II) نتیجه می گیریم که:  $\hat{B} = \hat{C}_1$   
به همین ترتیب می توانیم نشان دهیم که:  $\hat{A} = \hat{C}_2$  است. چرا؟  
در دو مثلث قائم الزاویه  $ACH$  و  $CBH$  داریم که:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{B} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle CBH$$

از تشابه دو مثلث  $ACH$  و  $CBH$  نتیجه می شود که اضلاع مقابل زاویه های مساوی باهم متناسب اند، یعنی:

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} \Rightarrow \overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$$

**مثال 1:** در شکل زیر  $\overline{CD}$  عمود بالای  $\overline{AB}$  است و چهار ضلعی  $DECF$  یک مستطیل می باشد، نشان دهید که مثلث  $BED$  با مثلث قائم الزاویه  $ABC$  مشابه است.



**حل:** در مثلث های  $ACB$  و  $BED$  داریم که:  
مشترک  $\hat{B} = \hat{B}$  چون  $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$  است و  $BC$  قاطع است؛ پس زوایای یک طرف قاطع با هم مساوی اند.

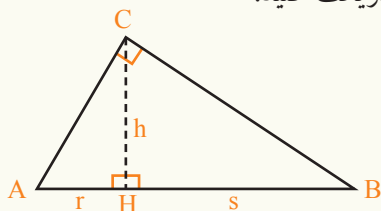
$$\hat{C} = \hat{BED} = 90^\circ$$

چون دو زاویه دو مثلث با هم مساوی شدند، بنابر آن در مقابل زوایای مساوی اضلاع متناسب وجود دارد. در نتیجه نظر به حالت تشابه مثلث ها می توان گفت:

$$\triangle BED \sim \triangle ACB$$

**نوت:** در شکل بالا تعداد مثلث های مشابه تشکیل شده را حساب کنید.

**مثال 2:** در شکل زیر  $\overline{CH}$  ارتفاع بالای وتر مثلث قائم الزاویه  $ABC$  است. اگر  $r = 4\text{cm}$  و  $s = 9\text{cm}$  باشد طول  $h$  را دریافت کنید.



**حل:**

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

$$\overline{CH}^2 = 4 \cdot 9\text{cm}^2$$

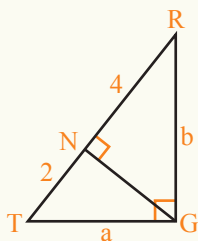
$$\overline{CH}^2 = 36\text{cm}^2$$

$$\sqrt{\overline{CH}^2} = \sqrt{36}$$

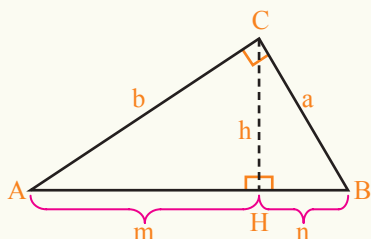
$$\overline{CH} = 6\text{cm}$$

## تمرین

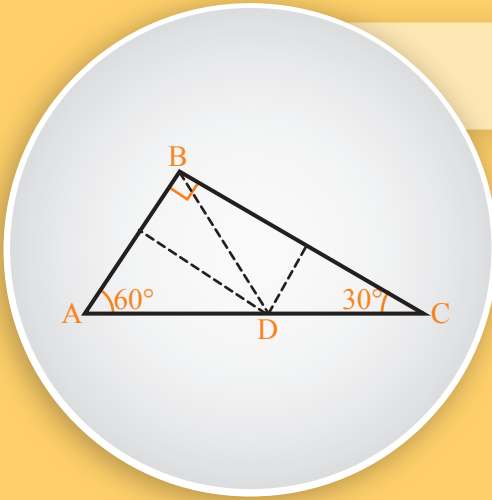
- 1- مثلث قائم الزاویه بی که زاویه  $G$  آن قائم است داده شده است، قیمت های  $a$  و  $b$  را به دست آورید.



- 2- در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ، ارتفاع بالای وتر  $AB$  می باشد. هرگاه  $m = 9$  واحد طول و  $n = 3$  واحد طول باشد قیمت های  $a$ ،  $b$  و  $h$  را دریافت کنید.

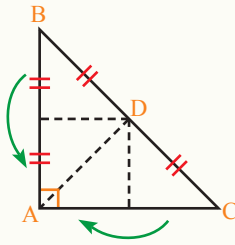


## قضایا در مثلث قائم الزاویه برای زوایای $30^\circ$ و $60^\circ$



در شکل مقابل، آیا ضلع مقابل زاویه  
 $30^\circ$  برابر نصف طول وتر است؟

## فعالیت



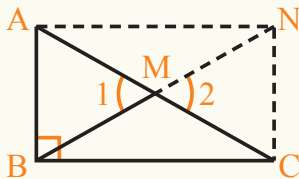
روی یک صفحه کاغذ، مثلث قائم الزاویه یی مانند شکل زیر رسم  
و آن را قیچی کنید.

- مثلث  $ABC$  را طوری قات کنید که رأس  $B$  بالای رأس  $A$   
قرار گیرد.
- همچنان آن را دوباره طوری قات کنید که رأس  $C$  بالای رأس  $A$   
قرار گیرد.

- اگر نقطه تقاطع را  $D$  بنامیم، آیا می توان گفت  $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$  است؟ چرا؟

نتیجه یی که از فعالیت فوق به طور عملی به دست می آید می توانیم به صورت قضیه زیر  
بیان و ثابت نماییم:

**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه طول میانه که از رأس قائم بالای وتر آن رسم شده باشد،  
مساوی به نصف طول وتر است.



**ثبوت:** فرض کنید  $\overline{BM}$  میانه وارد بر وتر مثلث  
 $ABC$  باشد. می خواهیم نشان دهیم که:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

برای ثبوت میانه  $\overline{BM}$  را به اندازه خودش امتداد  
می دهیم تا نقطه  $N$  به دست آید.

پس:  $\overline{BM} = \overline{MN}$

در دو مثلث  $AMB$  و  $MNC$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MC} \text{، میانه است} \\ \overline{BM} = \overline{MN} \text{، قرار ترسیم} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{، قرار متقابل برأس} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AMB} \cong \hat{MNC}$$

با توجه به انطباق پذیری دو مثلث  $AMB$  و  $MNC$  نتیجه می شود که:

$$\overline{AB} = \overline{NC} \dots\dots\dots I$$

به همین ترتیب از انطباق پذیری دو مثلث  $AMN$  و  $BMC$  نتیجه می شود که:

$$\overline{AN} = \overline{BC} \dots\dots\dots II$$

چرا؟

پس از روابط (I و II) نتیجه می شود که در چهار ضلعی  $ABCN$  اضلاع مقابل با هم مساوی اند، چون یک زاویه آن قائمه است، پس:  $ABCN$  یک مستطیل می باشد. چون در یک مستطیل قطر ها باهم مساوی بوده و همدیگر را نصف می کنند؛ پس:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

## فعالیت

• مثلث قائم الزاویه  $ABC$  را طوری رسم کنید که اندازه زوایای حاده آن  $30^\circ$  و  $60^\circ$  باشد.

• طول وتر و اضلاع قائم آن را با خط کش اندازه گیری کنید.

• چه رابطه بین طول اضلاع این مثلث وجود دارد؟

• تجربه فوق را با یک مثلث قائم الزاویه ای که شما رسم می کنید با داشتن زوایای  $30^\circ$  ,  $60^\circ$  تکرار کنید.

مشاهدات فعالیت فوق را می توان طور زیر بیان و ثبوت کرد:

**قضیه:** در یک مثلث قائم الزاویه اگر اندازه یک زاویه حاده آن  $30^\circ$  باشد، طول ضلع مقابل این زاویه نصف طول وتر است.

**ثبوت:** در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  فرض کنید  $\hat{A} = 30^\circ$  و  $\hat{B} = 90^\circ$  باشد.

$$\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AC} \quad \text{می خواهیم ثابت کنیم که:}$$

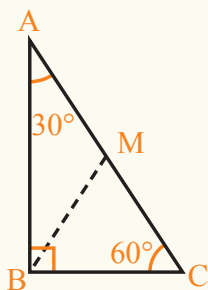
برای اثبات، میانه  $BM$  را بالای وتر رسم می کنیم، می دانیم که میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

$$\overline{BM} = \overline{MC} \quad \text{پس:}$$

در نتیجه: مثلث  $BMC$  متساوی الساقین است.

از اینجا نتیجه می گیریم  $\hat{MBC} = \hat{MCB} = 60^\circ$

پس مثلث  $MBC$  متساوی الاضلاع است. چرا؟

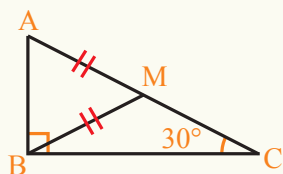


بنا بر آن:  $\overline{BC} = \overline{MC}$

چون  $M$  نقطه وسط  $AC$  است. در نتیجه  $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$

**مثال:** در شکل مقابل اگر  $\overline{BM}$  میانه وارد بر وتر مثلث  $ABC$

3 واحد باشد، طول اضلاع مثلث را تعیین کنید.



**حل:** در مثلث قائم الزاویه می دانیم که میانه وارد بر وتر نصف

وتر است؛ پس:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AC} \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \overline{AC} \Rightarrow \overline{AC} = 6$$

از طرف دیگر می دانیم ضلع مقابل زاویه  $30^\circ$  نصف وتر است؛ پس:

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6 \Rightarrow \overline{AB} = 3$$

حال با استفاده از قضیه فیثاغورث می توانیم اندازه ضلع سوم مثلث را محاسبه کنیم.

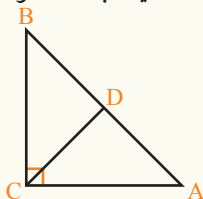
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\Rightarrow 3^2 + \overline{BC}^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow 9 + \overline{BC}^2 = 36 \Rightarrow \overline{BC}^2 = 36 - 9 = 27$$

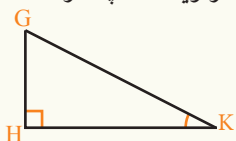
$$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{27}$$

- 1- در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{C}$  قائمه است، اگر  $\overline{AB} = 16$  واحد طول و  $\overline{CD}$  میانه باشد، طول  $\overline{CD}$  را دریابید.

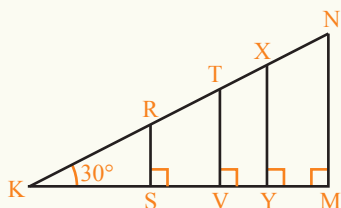


- 2- در شکل فوق اگر طول میانه  $\overline{CD} = 15$  واحد طول باشد طول  $\overline{AB}$  را دریابید.

- 3- در مثلث  $GHK$ ،  $\hat{H}$  قائمه است و  $\overline{GH} = \frac{1}{2} \overline{GK}$ ، اندازه زاویه  $K$  چقدر است؟



- 4- در مثلث  $KMN$ ،  $\hat{M}$  زاویه قائمه و  $\hat{K} = 30^\circ$  است.  $\overline{RS}$ ،  $\overline{TV}$ ،  $\overline{XY}$  بر  $\overline{KM}$  عمود اند. اگر  $\overline{KN} = 16$  واحد،  $\overline{KX} = 13$  واحد،  $\overline{KT} = 10$  واحد و  $\overline{KR} = 6$  واحد باشند در این صورت طول های  $\overline{RS}$ ،  $\overline{TV}$ ،  $\overline{XY}$  و  $\overline{MN}$  را دریابید.





- هرگاه یک خط، دو ضلع مثلث را طوری قطع نماید که موازی به ضلع سوم آن باشد آن دو ضلع را متناسباً تقسیم می کند.
- دو مثلث را وقتی مشابه می گوئیم که تمام زوایای آن یک به یک انطباق پذیر و یا اضلاع آن با هم متناسب باشند، یعنی اگر یکی از دو خاصیت آن در مثلث ها صدق کند مثلث ها مشابه اند.
- مثلث ها در سه حالت با هم مشابه اند.
- حالت اول: هرگاه دو زاویه یک مثلث با دو زاویه مثلث دیگر مساوی باشند.
- حالت دوم: هرگاه دو ضلع یک مثلث با دو ضلع مثلث دیگر متناسب و زاویه بین شان مساوی باشند.
- حالت سوم: هرگاه سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند.
- عکس قضیه فیثاغورث: اگر مجموع مربعات دو ضلع مثلث مساوی به مربع ضلع سوم باشد، مثلث قائم الزاویه است.
- در هر مثلث قائم الزاویه، حاصل ضرب اضلاع قائم مساوی به حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است.
- در هر مثلث قائم الزاویه، طول میانه که از رأس قائم بالای وتر آن رسم شده باشد مساوی به نصف طول وتر است.

## تمرینات فصل دوم

جملات زیر را به دقت بخوانید، در مقابل جمله صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله غلط حرف (غ) بنویسید.

1- ( ) دو مثلث قائم الزاویه، در صورتی با هم مشابه اند که طول وتر های شان باهم مساوی باشند.

2- ( ) اگر در یک مثلث دو ضلع و زاویه مابینی شان با دو ضلع و زاویه مابینی مثلث دیگر انطباق پذیر باشند مثلث های مذکور با هم مشابه اند.

3- ( ) اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، مثلث های مذکور مشابه اند.

4- ( ) تمام مثلث های قائم الزاویه با هم مشابه اند.

5- ( ) اگر یک خط با یک ضلع مثلث موازی باشد با دو ضلع دیگر آن نیز مساوی است. جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

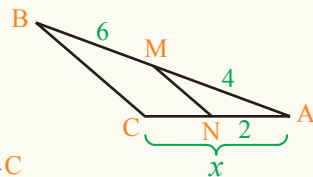
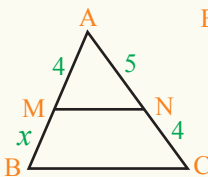
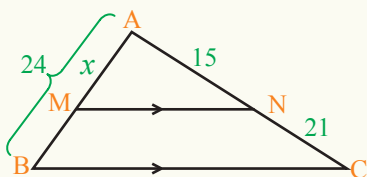
1. اگر مجموع مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به ..... آن باشد آن مثلث قائم الزاویه است.

2. در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب ..... مساوی به حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد به وتر است.

3. اگر یک خط دو ضلع یک مثلث را طور متناسب تقسیم نماید به ضلع سوم آن ..... است.

4. دو مثلث وقتی با هم مشابه اند که ..... یک مثلث با ..... دیگر انطباق پذیر باشد. سؤال زیر را حل کنید:

در اشکال زیر  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$  است با استفاده از قضیه تالس  $X$  را در یابید.



# فصل سوم

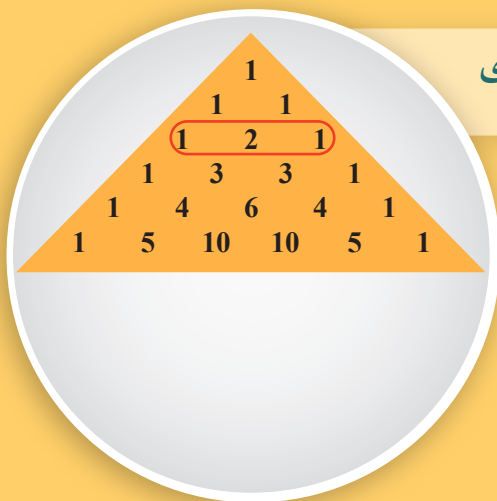
## افاده‌های الجبری

$$\frac{y^2 x^4 y^2}{y^2 x + 5} x$$

$n - 7s$



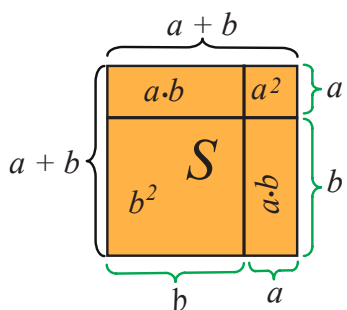
$(5 - 2)n + (8 - 7)s = 3n + s$



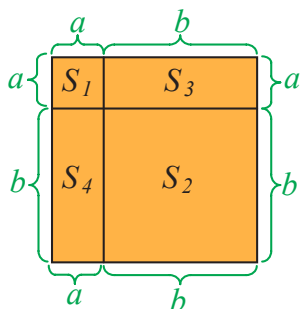
## مربع مجموع و تفاضل افاده های دو حده

مثلث عددی مقابل، به نام مثلث پاسکال مشهور است. سطر سوم مثلث چه چیزی را نشان می دهد؟

## فعالیت



- طول هر ضلع مربع مقابل  $a+b$  است.
- مساحت مربع را به  $S$  نشان دهید و قیمت آن را بنویسید.
- مربع اولی را به دو مربع با مساحت های  $a^2$  و  $b^2$  و دو مستطیل با مساحت های  $a \cdot b$  مانند شکل مقابل تقسیم و به  $S_1, S_2, S_3$  و  $S_4$  نامگذاری نمایید.
- مجموع مساحت های مربعات و مستطیل ها را بنویسید.
- مساحت مربع اولی با مساحت های مربعات و مستطیل ها چه رابطه یی دارد؟ بنویسید.
- رابطه به دست آمده را با استفاده از خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع نشان دهید.



از فعالیت فوق می توان بیان کرد:

مربع مجموع دو حد، مساوی است به مربع حد اول جمع دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم، یعنی:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**مثال 1:** افاده  $(x+3)^2$  را انکشاف دهید.

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times 3 \times x + (3)^2$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

**مثال 2:** افاده  $(3x+5y)^2$  را انکشاف دهید.

**حل:** با استفاده از مطابقت  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  می توان نوشت:

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ (3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 \\ = 9x^2 + 30xy + 25y^2 \end{array}$$

**مثال 3:**  $(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2$

انکشاف مطابقت  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  است که آن را می توان طور زیر به دست آورد:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مربع تفاضل دو حد مساوی است به مربع حد اول منفی دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{جمع مربع حد دوم؛ مانند:}$$

**مثال 4:**  $(x-1)^2$  را انکشاف دهید.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + (1)^2$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**حل:** با استفاده از مطابقت داریم:

**مثال 5:**  $(8x-\frac{1}{3})^2$  را انکشاف دهید:

$$(8x-\frac{1}{3})^2 = (8x)^2 - 2(8x)(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2$$

$$= 64x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$$

**حل:**

## تمرین

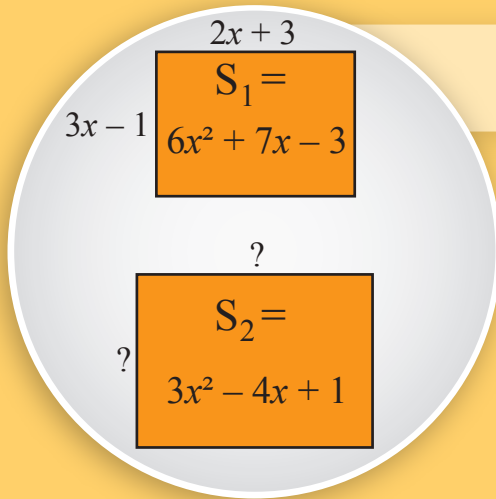
1- افاده های زیر را انکشاف دهید:

a)  $(m+1)^2$       b)  $(x+7)^2$       c)  $(x+12)^2$       d)  $(x+\frac{3}{4})^2$

2- افاده های زیر را انکشاف دهید:

a)  $(\frac{1}{x}-3)^2$       b)  $(12x-5y)^2$       c)  $(6xy-\frac{1}{2})^2$       d)  $(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y)^2$

## تجزیه افاده‌های الجبری



شما می‌توانید مساحت مستطیل را به طول  $2x+3$  و عرض  $3x-1$  پیدا کنید.  
آیا فکر کرده‌اید چگونه می‌توانید طول و عرض مستطیل به مساحت  $3x^2 - 4x + 1$  را دریافت کنید؟

## فعالیت

$$(2x-3)(2x+3) = \dots - \dots$$

$$(3y + \dots)(3y - \dots) = 9y^2 - a^2$$

$$(\dots + \dots)(\dots - \dots) = 4x^2 - 9$$

$$(4y - 2x)^2 = \dots - \dots + 4x^2$$

$$(\dots + 2y)^2 = a^2 - 4ay + \dots$$

$$(\dots + \dots)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

جاهای خالی را در تساوی‌های مقابل با افاده‌های مناسب پر کنید.

در فعالیت فوق دیدیم که بعضی اوقات یک افاده الجبری را به صورت ضرب دو افاده الجبری می‌توان نوشت:

ارائه یک افاده الجبری به شکل حاصل ضرب دو یا چند افاده الجبری را تجزیه می‌نامیم.

**مثال 1:** افاده الجبری  $4 - 16x^2$  را تجزیه کنید.

**حل:** با استفاده از مطابقت:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(2)^2 - (4x)^2 = (2 - 4x)(2 + 4x)$$

**مثال 2:** افاده الجبری  $25a^2 - 4b^2$  را تجزیه کنید:

**حل:**

$$\begin{aligned} 25a^2 - 4b^2 &= (5a)^2 - (2b)^2 \\ &= (5a - 2b)(5a + 2b) \end{aligned}$$



**مثال 3:** افاده الجبری  $x^2 + 12x + 36$  را تجزیه می کنیم.

**حل:** می دانیم که:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x^2 & + & 2 \times x \times 6 & + & (6)^2 \end{array}$$

دیده می شود که دو چند حاصل ضرب جذر مربع حد اول و سوم حد وسط را می دهد. پس افاده فوق به شکل  $(a + b)^2$  مطابقت دارد.

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2 = (x + 6)(x + 6)$$

**مثال 4:** افاده  $4a^2 + 28a + 49$  را به شکل حاصل ضرب دو قوس بنویسید.

$$(2a)^2 + 2 \times 2a \times 7 + (7)^2$$

**حل:**

دیده می شود که دو چند حاصل ضرب جذر مربع حد اول و سوم حد وسط را می دهد؛ پس افاده فوق شکل مطابقت  $(a + b)^2$  را دارد.

$$4a^2 + 28a + 49 = (2a + 7)^2 = (2a + 7)(2a + 7)$$

در نتیجه:

**مثال 5:** افاده الجبری  $x^2 - 4x + 4$  را به دو قوس تجزیه می نمایم.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x^2 & - & 2 \times x \times 2 & + & (2)^2 \end{array}$$

دیده می شود دو چند حاصل ضرب جذر حد اول و حد سوم حد وسط را می دهد؛ پس افاده فوق شکل مطابقت  $(a - b)^2$  را دارد.

$$x^2 - 2 \times x \times 2 + (2)^2 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$$

در نتیجه:

## تمرین

1- افاده های الجبری زیر را تجزیه کنید:

a)  $49x^2 - 16$

b)  $m^2 - 36$

c)  $49 - y^2$

d)  $25 - x^2$

e)  $x^2y^2 - 64$

f)  $\frac{1}{64x^2} - y^2$

2- افاده های زیر را به اساس مطابقت  $(a + b)^2$  و  $(a - b)^2$  به دو قوس تجزیه نمایید.

a)  $x^2 + 2xy + y^2$

b)  $x^2 + 6x + 9$

c)  $2a^2 + 4ab + b^2$

d)  $4x^2y^2 + 4xy + 1$

e)  $b^2 - 12b + 36$

f)  $4a^2 - 12ab + 9$



## نکات مهم فصل سوم

- مربع مجموع دو حد، مساوی است به مربع حد اول، جمع دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم، جمع مربع حد دوم، یعنی:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- مربع تفاضل دو حد، مساوی است به مربع حد اول، منفی دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم، جمع مربع حد دوم؛ مانند:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- ارائه یک افاده الجبری به شکل حاصل ضرب دو یا چند افاده الجبری را تجزیه می‌نامیم.

## تمرینات فصل سوم

1- دو حده های زیر را تجزیه کنید.

- a)  $x^2 - 1$                       b)  $x^2y^2 - 64$   
c)  $m^2 - 16a^2$                 d)  $121 - y^2$

2- افاده های زیر را انکشاف دهید.

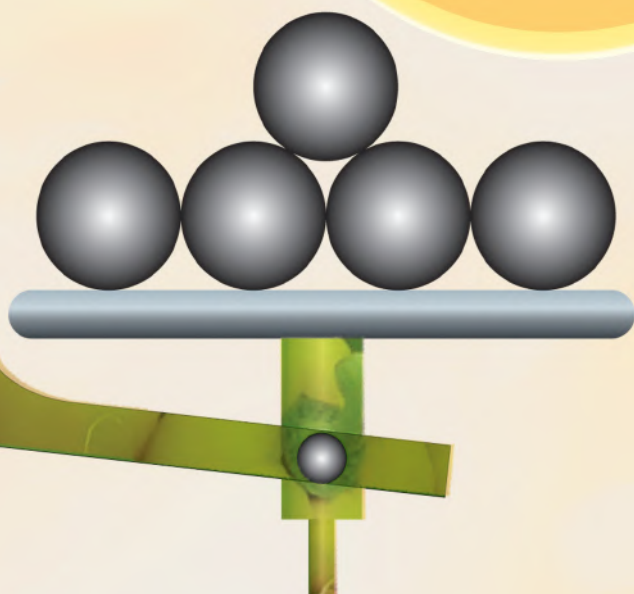
- a)  $(m+1)^2$                       b)  $(y-b)^2$   
c)  $(x - \frac{3}{2})^2$                       d)  $(a+7)^2$

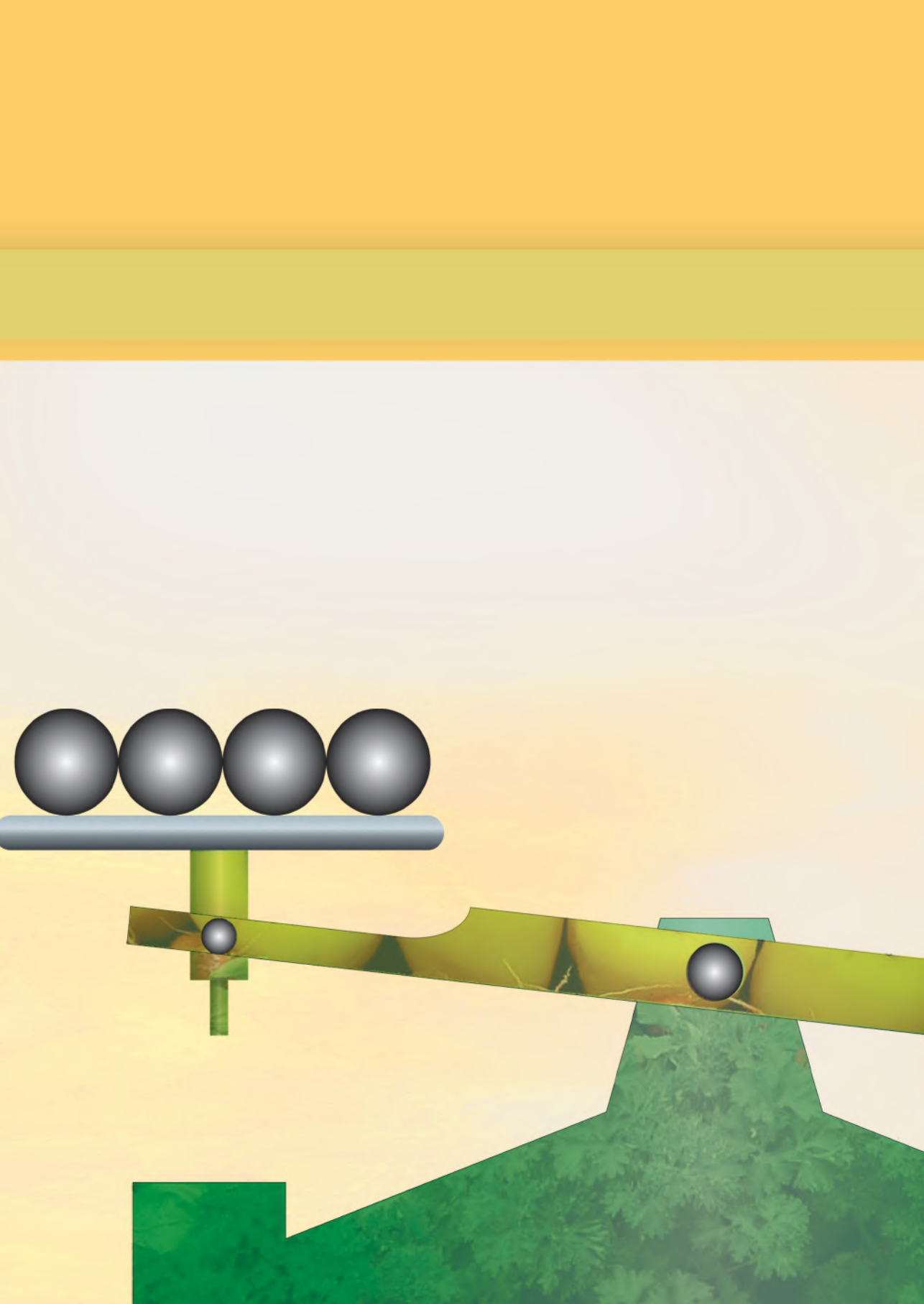
3- افاده های زیر را تجزیه کنید.

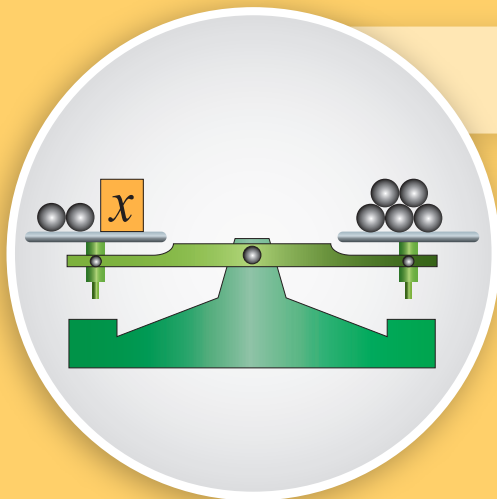
- a)  $4x^2y^2 - 9z^4$                       b)  $x^2 - 8x + 16$   
c)  $a^2x^2 + 4axy + 4y^2$               d)  $x^2 + 2xy + y^2$

# فصل چهارم

معادلات، رابطه  
و تابع







قبل از اینکه به مطالعه معادلات آغاز نماییم لازم است که مفهوم مساوات را واضح سازیم تا بتوانیم به کمک مساوات معادله را یک بار دیگر تعریف نماییم:

مفهوم مساوات: هرگاه قیمت عددی دو افاده الجبری با هم مساوی باشند گفته می شود که این دو افاده با هم مساوی اند و افاده های نامبرده یک مساوات را تشکیل میدهند.  
مثلاً: اگر  $A = 2a + b$  و  $B = 2a + b$  را در نظر بگیریم نوشته کرده می توانیم که  $A = B$  یا  $2a + b = 2a + b$

دیده می شود که افاده ها توسط علامه مساوات (=) با هم دیگر ارتباط دارند و هر افاده یک طرف مساوات را تشکیل میدهد. به صورت عموم در الجبر دو نوع مساوات عمومیت دارد نوع اول مساوات شرطیه که معادله هم به آن گفته می شود و نوع دوم آن عبارت از مطابقت یا عینیت است که در فصل قبلی مطالعه شد. برای معلومات بیشتر مساوات شرطیه یا معادله را قرار ذیل مورد مطالعه و تحقیق قرار میدهم.

### مساوات شرطیه یا معادله:

میدانیم که هرگاه اعداد 2 و 5 را با هم جمع نماییم عدد 7 به دست میاید که این جمله در ریاضی چنین نوشته میشود  $2 + 5 = 7$   
اکنون اگر گفته شود که کدام عدد با عدد 2 جمع شود تا حاصل جمع آن 7 شود و این جمله در ریاضی چنین نوشته می شود  $7 = 2 + (?)$   
در اینجا علامه(?) عبارت از عدد نا معلوم(مجهول) است. اگر عدد مجهول را با  $x$  نمایش دهیم: پس افاده بالا را چنین نوشته کرده می توانیم:

$$x + 2 = 7$$

$$2 + x = 7$$

به همین قسم اگر از عدد  $y$  عدد 7 تفریق شود حاصل تفریق آن مساوی به 2 می شود، یعنی

$$y - 7 = 2$$

اگر گفته شود که از کدام عدد 7 تفریق گردد تا عدد 2 به دست آید در این جا اگر عدد

مجهول  $y$  نامیده شود افاده را چنین می توان نوشت:  $y - 7 = 2$  و همچنان اگر بگوییم کدام عدد ضرب 4 گردد تا عدد 20 به دست آید. باز هم اگر عدد مجهول را  $x$  بگوییم افاده را چنین میتوان نوشت:  $4x = 20$  در افاده بالا  $x + 2 = 7$ ،  $y - 7 = 2$  و  $4x = 20$  هر کدام عبارت از معادله الجبری اند به صورت عموم معادله را چنین تعریف می نماییم:

هر گاه به بعضی قیمت های مجهولات هر دو طرف مساوات با هم برابر شود اینطور مساوات را به نام معادله و یا مساوات شرطیه یاد می کنند.

دیده میشود اگر در معادله  $x + 2 = 7$  به عوض متحول  $x$ ، عدد 5 نوشته شود هر دو طرف معادله با هم مساوی میشوند؛ بنابر این عدد 5 را جذر معادله  $x + 2 = 7$  می نامند.

به همین ترتیب در معادله  $y - 7 = 2$  اگر به جای متحول  $y$  عدد 9 نوشته شود هر دو طرف معادله باهم مساوی میگردد. عدد 9 حل و یا جذر معادله  $y - 7 = 2$  می باشد.

به همین قسم اگر در معادله  $4x = 20$  به جای  $x$  عدد 5 نوشته شود هر دو طرف معادله باهم مساوی می شوند؛ پس عدد 5 جذر معادله  $4x = 20$  است.

در نتیجه گفته می توانیم: قیمت های مجهولی که در معادله صدق میکنند جذر های معادله نامیده می شوند. اعدادی که جذر های معادله نباشند. هیچگاه هر دو طرف معادله را مساوی ساخته نمی توانند. معادلاتی که دارای یک مجهول بوده و توان مجهول آن یک باشد، معادله یک مجهول درجه یک نامیده می شود.

**خواص معادله:** شاگردان عزیز خواص معادله را در صنف هشتم مطالعه نموده اید در درس گذشته هم گفته شد که معادله عبارت از مساوات شرطیه است و در معادله آن افاده های الجبری که به هر دو طرف علامه مساوات قرار دارند از نقطه نظر قیمت عددی با هم مساوی اند هر گاه معادله را با ترازو مقایسه نماییم دیده می شود که معادله و ترازو هر دو دارای عین خواص اند، یعنی وزن های که به هر دو طرف پله های ترازو گذاشته می شوند مشابه به افاده های الجبريست که به هر دو طرف علامه مساوی، نوشته میشوند. اگر وزن های گذاشته شده در هر دو پله ترازو با هم مساوی نباشند ترازو به حالت تعادل نمی آید.

به همین ترتیب اگر قیمت های عددی افاده های الجبری هر دو طرف مساوات با هم مساوی نباشند، افاده های نامبرده معادله را تشکیل داده نمی توانند. اگر ترازو در حالت تعادل باشد و یک مقدار وزن های مساوی از هر دو پله آن کم و یا به هر دو پله آن زیاد شود حالت تعادل ترازو تغییر نمی خورد. در معادلات نیز این خواص تطبیق میگردد، یعنی اگر به هر دو طرف معادله اعداد مساوی را جمع و یا از آن تفریق نماییم باز هم معادله به حالت خود باقی می ماند. که چهار حالت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را در یک معادله در صنف هشتم کار نموده اید.

$$\frac{1}{2}x - 5 = x - 25$$



عثمان: فرهاد، تو چند ساله هستی؟  
فرهاد: اگر از نصف عمر پدرم عدد 5 کم  
گردد مساوی به سن من است. زمانی که  
من تولد شدم پدرم 25 سال عمر داشت.  
عثمان: فهمیدم، عمر پدرت 40 و سن تو  
15 سال است.  
آیا می‌توانید بگویید که عثمان چگونه  
فهمید. که فرهاد چند ساله است؟

## فعالیت

- یک مسئله حسابی روزمره را به معادله الجبری تبدیل می‌نماییم و سعی می‌کنیم که در انجام فعالیت، شیوه تشکیل معادله و حل آن را بیابیم.
- اگر با دو چند یک عدد، عدد 4 جمع شود مساوی به 16 می‌شود، عدد کدام است؟
  - آیا مسئله را فهمیدید؟ چگونه می‌توانید آن را به یک معادله الجبری تبدیل نمایید؟
  - بعد از تبدیل آن به معادله الجبری حل آن را به دست آورید.
  - آیا واقعاً حل تان درست است؟ امتحان کنید.

از فعالیت بالا نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

- برای تشکیل یک معادله الجبری و دریافت حل آن با در نظر داشت فعالیت فوق، مراحل زیر ضروری و اساسی پنداشته می‌شود:
- تحلیل و درک مفهوم موضوع
  - انتخاب مجهول و نامگذاری
  - تشکیل یک معادله
  - حل مسئله، یا دریافت قیمت مجهول
  - امتحان کردن مسئله با جواب دریافت شده

**مثال:** اگر با دو چند پول رشاد 20 افغانی اضافه گردد، مساوی به پول خوشحال می گردد. اگر مقدار پول خوشحال 60 افغانی باشد، مقدار پول رشاد چند است؟

**حل:** برای تشکیل معادله و دریافت حل آن مرحله به مرحله پیش می رویم.  
- تحلیل و درک مسأله و خواندن آن با تمام دقت.

انتخاب مجهول، مقدار پول رشاد است که آن را  $x$  می نامیم.  
- ساختمان معادله: با دو چند پول رشاد  $(2x)$  اگر 20 افغانی اضافه گردد  $(2x+20)$  مساوی به پول خوشحال می شود  $2x+20=60$   
- حل معادله

$$2x + 20 = 60$$

$$2x = 60 - 20 = 40$$

از اطراف معادله (20) را کم می کنیم:

$$2x = 40$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

اطراف معادله تقسیم 2 :

مقدار پول رشاد:

**امتحان:** اگر با دو چند پول رشاد 20 افغانی اضافه گردد، مساوی به پول خوشحال، یعنی 60 می شود که این مسأله هم درست است.

$$2(20) + 20 = 60$$

$$40 + 20 = 60$$

$$60 = 60$$

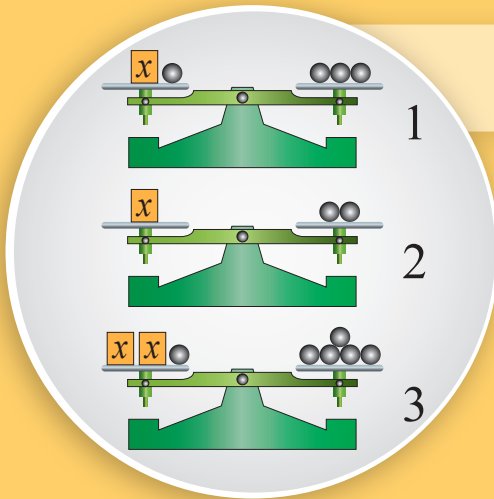
چون مساوات عددی  $60 = 60$  است، بنابراین قیمت دریافت شده صحیح است.

## تمرین

- 1- اگر از 3 چند یک عدد 5 تفریق گردد، مساوی به 4 می شود، عدد کدام است؟
- 2- حاصل جمع سن لیمه و نیلوفر مساوی به 30 است، لیمه 2 سال بزرگتر از نیلوفر است. لیمه و نیلوفر چند سال دارند؟



## معادلات معادل



در ترازوهای شماره 1، 2 و 3 چی را می بینید؟  
هر سه ترازو در حالت تعادل قرار دارند.  
چگونه می توانید با کم کردن و زیاد کردن مقادیر مساوی حالات مختلف تعادل را به وجود بیاورید؟

## فعالیت

جمله زیر را در نظر بگیرید.  
اگر از دو چند یک عدد، 4 کم شود، مساوی به 8 می شود، عدد کدام است؟  
هر گاه مجهول را  $x$  بنامیم در این صورت برای بیان فوق معادله را به شکل ذیل می توانیم بنویسیم.  
$$2x - 4 = 8$$
  
• با در نظر داشت معادله فوق فعالیت زیر را با پر کردن خانه های خالی جدول زیر انجام دهید.

شماره	عملیه ها بالای طرفین معادله	معادله به دست آمده	حل ها
1	معادله داده شده	$2x - 4 = 8$	
2	با طرفین معادله شماره 1 عدد $x$ را جمع می کنیم		
3	طرفین معادله شماره 1 را ضرب 2 می کنیم		
4	طرفین معادله شماره 1 را تقسیم 2 می کنیم		
5	معادله شماره 1 را به شکل معیاری می نویسیم	$x - 6 = 0$	

همه حالات فوق اشکال مختلف یک معادله (بیانیه) واحد اند که با هم معادل اند. با کم کردن و زیاد کردن مقادیر مساوی و یا ضرب و تقسیم به مقادیر مساوی خلاف صفر به دست آمده اند.

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

معادلاتی که دارای جذرهای مساوی باشند، به نام معادلات معادل یاد می گردند. انجام عملیات ساده الجبری بالای یک معادله، معادله های معادل را به وجود می آورد. برای دریافت جذر معادله سعی می گردد تا از روش دریافت معادلات معادل، معادله یی به دست آید که شکل ساده تری برای دریافت مجهول معادله داشته باشد.

**مثال:** معادله  $2x - 4 = 0$  را حل کنید.

**حل:** به اطراف معادله  $+4$  را جمع می کنیم:

$$2x - 4 = 0$$

$$2x - 4 + 4 = 0 + 4$$

اطراف تقسیم 2 :

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

**امتحان:** قیمت دریافت شده را در اصل معادله  $2x - 4 = 0$  وضع می نماییم:

$$2 \times 2 - 4 = 0$$

$$4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

چون هر دو طرف مساوات صفر است، بنا بر این  $x = 2$  جذر معادله می باشد. با وضع کردن قیمت دریافت شده در معادله  $2x = 4$  می بینیم:  $2 \times 2 = 4$ ، پس  $2x = 4$  و  $2x - 4 = 0$  معادلات با هم معادل هستند.

## تمرین

1- حل معادلات زیر را دریافت نموده امتحان کنید.

1)  $\frac{(a-2)}{3} = 3$

2)  $2(2x-1) = 4$

3)  $\frac{2}{5} + x = 1$

a)  $\begin{cases} x+1 = \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x}{2} + 1 = x + 2 \end{cases}$

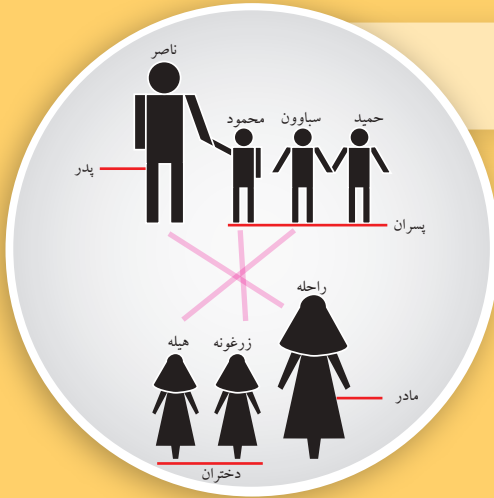
4)  $16 - 3t = 0$

5)  $3 - 4y = 2 - 6y$

2- کدام یک از معادلات زیر با هم معادل هستند؟

b)  $\begin{cases} 3x - 4 = 8 \\ 2x - 2 = 4 \end{cases}$

کی با کی چه رابطه دارد؟

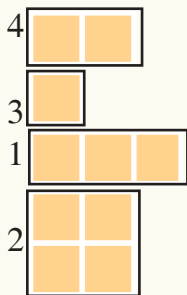


## فعالیت

شکل بالا را در نظر گرفته، با ارتباطاتی که بین اعضای یک خانواده وجود دارد، به سؤالات زیر جواب دهید:

- راحله خانم ناصر است، حمید با ناصر چه رابطه دارد؟
- محمود پسر ناصر است، راحله و حمید چه رابطه دارند؟
- هیله خواهر سیاوون است، آیا سیاوون برادر هیله است؟
- زرغونه خواهر هیله است، آیا بر عکس هیله خواهر زرغونه است؟
- هیله خواهر زرغونه و زرغونه خواهر محمود است، پس هیله با محمود چه ارتباط دارد؟
- از قرابت فامیلی برای روابط اعضای خانواده چند مثال دیگر بگویید.

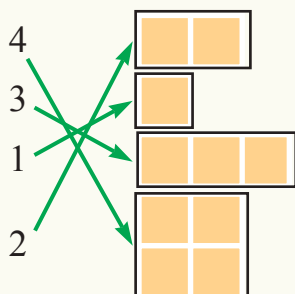
از فعالیت بالا می توانیم نتیجه زیر را به دست آوریم:



هرگاه بین دو شی (دو جسم) و یا عناصر دو ست، توسط عملیه های ریاضی و یا کدام رشته اجتماعی، پیوندی وجود داشته باشد این پیوند به نام رابطه یاد می گردد.

**مثال 1:** بین اعداد 1، 2، 3 و 4 و تعداد مربعات مقابل یک رابطه برقرار می نمایم:

حل:



مثال 2: اگر نسرین 26 سال و انجیلا 16 سال عمر داشته باشند، بعد از 5، 10 و 15 سال سن نسرین و انجیلا چند سال خواهد بود؟

حل:

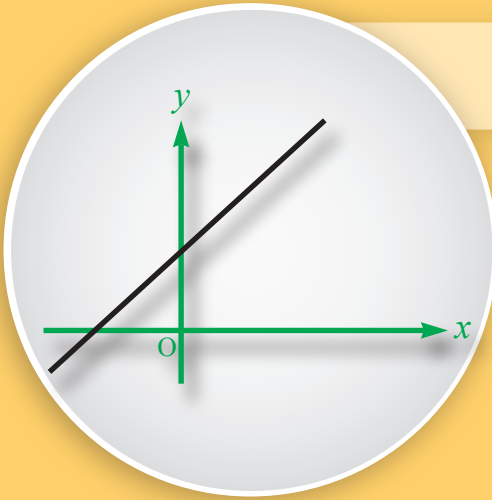
سن انجیلا	16	21	26	31
سن نسرین	26	31	36	41

## تمرین

1- یک ست 5 عنصره از نام های هم صنفان تان و یک ست 5 عنصره از میوه های مختلف تهیه نمایید، اسم هر هم صنف تان را به میوه مورد علاقه او در یک قوس به شکل جوهره بنویسید.

2- اعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 و 8 را در نظر گرفته با رابطه مساوی عددی را دریافت کنید که جذر المربع آن مساوی به یکی از اعداد فوق باشد؛ طور مثال:  $\sqrt{25} = 5$  است.

## رابطه خطی



اگر گراف یک رابطه خط مستقیم باشد، رابطه بین  $x$  و  $y$  را چه مینامند؟

## فعالیت

- رحمان 20 ساله بود که دخترش نجلا تولد شد.
- زمانی که نجلا در 7 ساله گگی شامل مکتب شد، می توانید بگویید که رحمان چند ساله بود؟
  - زمانی که نجلا 20 ساله شود، پدرش چند سال خواهد داشت؟
  - با در نظر داشت سن نجلا و پدرش جدول زیر را تکمیل کنید:

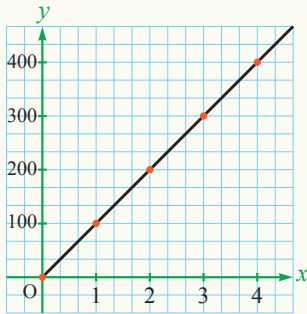
سن نجلا			7		15
سن رحمان	21	23		29	

- گراف سن نجلا را نظر به رحمان در سیستم مختصات قایم رسم کنید.
- اگر رحمان 24 ساله باشد، از روی گراف پیدا کنید که نجلا چند ساله است؟
- چه رابطه بین سن رحمان و نجلا وجود دارد؟
- اگر سن رحمان را به  $y$  و سن نجلا را به  $x$  نشان دهیم، رابطه بین سن رحمان و نجلا را با یک افاده الجبری بنویسید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

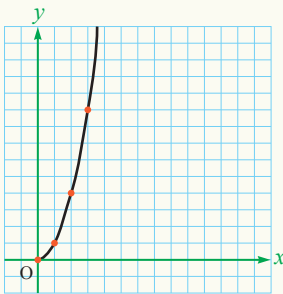
هرگاه گراف یک رابطه خط مستقیم باشد، در این صورت رابطه بین متحولین را به نام رابطه خطی یاد می نمایند.

**مثال 1:** هرگاه فاصله کابل - هرات را نظر به زمان با سرعت وسطی 100Km فی ساعت طی نماییم، چگونه رابطه بین فاصله و سرعت وسطی وجود دارد؟  
**حل:** ابتدا رابطه بین فواصل طی شده نظر به زمان را در جدول زیر درج می نماییم:



زمان به ساعت	0	1	2	3	4
فاصله به کیلومتر	0	100	200	300	400

هرگاه موقعیت جوهره های مرتب فوق را در سیستم کمیات وضعیه تثبیت و باهم وصل نماییم دیده می شود که یک خط مستقیم به وجود می آید. بنابر این رابطه بین سرعت وسطی و فاصله طی شده یک رابطه خطی می باشد.  
**مثال 2:** رابطه بین طول اضلاع مربع و مساحت آن را در نظر می گیریم. به این منظور هرگاه



ضلع مربع را به  $a$  و مساحت آن را به  $a^2$  نشان دهیم، در برابر قیمت های مختلف  $a$  قیمت های مختلف برای مساحت به دست می آوریم که در جدول زیر درج شده اند:

ضلع $a$	0	1	2	3	4	5
مساحت مربع $a^2$	0	1	4	9	16	25

موقعیت نقاط را در سیستم کمیات وضعیه مشخص نموده گراف را ترسیم نمایید. آیا گراف یک خط مستقیم است؟ آیا رابطه خطی است؟

نخیر در این صورت رابطه بین طول ضلع  $a$  و مساحت مربع، یعنی  $a^2$  خطی نبوده که این نوع رابطه به نام رابطه غیر خطی یاد می گردد.

## تمرین

- 1- طول یک فنر در حالی که وزن به آن آویزان نشده است 10cm است، هرگاه وزن  $m$  کیلو گرام را به آن بیاویزیم طول فنر توسط رابطه  $L = 10 + 0.5 \times m$  افزایش می یابد.  
 (a) برای وزن 4 کیلو گرام طول فنر چند است؟  
 (b) چه مقدار وزن را در فنر آویزان نماییم تا طول فنر به 15 سانتی متر برسد؟
- 2- طول یک سوسمار نوزاد 30 سانتی متر است. هرگاه سالانه به طور وسطی 22 سانتی متر به طول نوزاد اضافه شود، پس در چه زمانی طول سوسمار به 96 سانتی متر خواهد رسید؟



## تشکیل رابطه های خطی

با در نظر داشت متن فعالیت زیر  
احمد در فروش 100 پوقانه چند  
افغانی مفاد خواهد داشت؟

## فعالیت

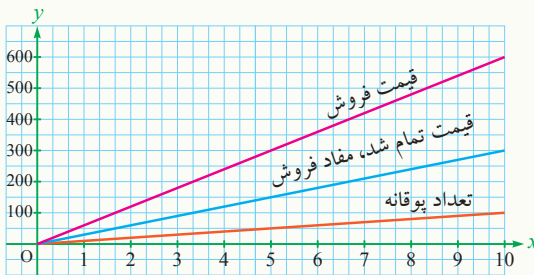
احمد به خاطر این که پول قلم و کاغذ خود را پیدا نماید، به مشوره مادرش تصمیم میگیرد تا بعد از ظهر در شهر پوقانه هوایی بفروشد. هرگاه احمد برای خرید 100 بالون پوقانه 260 افغانی و علاوه بر آن 20 افغانی برای خوردن غذا و 20 افغانی هم برای کرایه ترانسپورت بپردازد. احمد تصمیم می گیرد که هر پوقانه را 6 افغانی به فروش برساند. به خاطر اطمینان خود، موضوع را با معلم ریاضی خود مطرح می کند و معلم به او مشوره می دهد، تا معادلات تعداد پوقانه ها را نظر به قیمت تمام شد و مفاد از سبب فروش تشکیل نموده، گراف های هردو حالت را با هم مقایسه کند. در تحلیل گراف و تحقیق موضوع با احمد در تکمیل جوابات کمک کنید.

- بعد از فروش چند عدد پوقانه، عواید فروش مساوی به قیمت تمام شد می شود؟
- جدول مصرف مجموعی را برای 100 عدد پوقانه که جمله مبلغ 300 افغانی می شود تکمیل کنید:

تعداد پوقانه	0	10		30	40		60	70			100
قیمت تمام شد	0	30	60			150			240	270	

• هرگاه  $x$  تعداد پوقانه ها و  $y$  مقدار مصرف باشد، رابطه الجبری مصارف پوقانه ها را به دست آورده گراف آن را در سیستم مختصات قایم ترسیم کنید. مانند جدول قیمت تمام شد، جدول فروشات زیر را بر حسب عواید فروش پوقانه ها تکمیل کنید.

تعداد پوقانه	0	10			40			70		90	100
قیمت تمام شد	0		60			150			240		
قیمت فروش	0	60		180			360				
مقدار فروش	0		60								



• در نقطه تقاطع گراف مفاد و قیمت تمام شد با هم چه رابطه دارند؟  
 • چند پوقانه به فروش برسد تا مقدار فروش و مصرف با هم مساوی گردد؟ این مسأله از نگاه گراف چه معنا می دهد؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

حل دو معادله خطی عبارت از نقطه تقاطع گراف های آن ها می باشد؛ و مختصات این نقطه هر دو معادله را صدق می کند.

## تمرین

1- قرار شد یک رستوران برای یک شرکت، غذا تهیه کند. این رستوران 1000 افغانی پیش پرداخت سالانه و به علاوه 600 افغانی هر ماه مطالبه کرده است. رستوران دیگر بدون پیش پرداخت و ماهانه 850 افغانی مطالبه نموده است. جدول زیر را تکمیل کنید.

ماه	حمل	ثور	جوزا	سرطان	اسد	سنبله	میزان	عقرب	قوس	جدی	دلو	حوت
رستوران اول	1600	2200							6400			
رستوران دوم	850	1700							7650			

گراف پرداخت به این دو رستوران را در یک سیستم مختصات رسم نمایید، اگر 6 ماه غذا بخوریم قرارداد کدام رستوران به نفع ما است؟





- اگر سرعت یک موتر  $50 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$  باشد:
- موتر یاد شده در دو ساعت  $h$  کدام فاصله را طی میکند؟
- موتر یاد شد در سه ساعت کدام فاصله را طی میکند؟
- آیا گفته می‌توانید که برای هر زمان به یک فاصله جداگانه با یک سرعت معین ارتباط می‌گیرد؟

## فعالیت

- حال رابطه بین سرعت یک موتر و فاصله طی شده نظر به زمان را در نظر می‌گیریم:
- اگر یک موتر با سرعت ثابت  $17 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  حرکت نماید. جدول زیر را با در نظر داشت زمان داده شده برای فاصله طی شده تکمیل کنید:

t	5sec	10sec	15sec	20sec	25sec	30sec
x						

- برای جوره‌های مرتب به دست آمده، هرگاه سیستم مختصات قائم را برای زمان  $t$  منحنی متحول مستقل و محور  $x$  را متحول مربوطه در نظر بگیریم گراف آن را رسم کنید.
- آیا گفته می‌توانید که به هر زمان داده شده یک فاصله جداگانه وجود دارد؟
- هرگاه  $t$  متحول مستقل رابطه فوق باشد در این صورت قیمتهای متحول مربوطه را تعیین کنید.

از فعالیت فوق نتیجه، زیر را به دست می‌آوریم:

## تعریف

تابع عبارت از رابطه‌ی است که ارتباط بین دو ست از عناصر را برقرار می‌نماید. طوری که برای هر عنصر از ست اولی تنها و تنها یک عنصر از ست دومی تقابل نماید. ست اولی را به نام ناحیه تعریف (Domain) و ست دومی را به نام ناحیه قیمت‌ها (Codomain) یاد می‌کنند.

**مثال 1:** افاده  $f(x) = 2x + 1$  با قیمت های  $-2$ ،  $1$ ،  $4$  و  $-6$  داده شده است نشان دهید که  $f$  یک تابع است.

**حل:** با وضع کردن قیمت های داده شده در تابع، قیمت های  $f(x)$  طور زیر به دست میاید:

$x$	$f(x)$
$-2$	$-3$
$1$	$3$
$4$	$9$
$-6$	$-11$

دیده می شود که برای قیمت های مختلف متحول مستقل تصاویر مختلف وجود دارد، بناءً افاده فوق یک تابع است.

هر افاده الجبری که شکل  $y = ax + b$  را داشته باشد به نام تابع خطی یاد می شود یا به عبارت دیگر هر رابطه خطی را به نام تابع یاد می نمایند.

**مثال 2:** هرگاه قیمت های  $4$ ،  $9$ ،  $16$  به افاده  $f(x) = \pm\sqrt{x}$  داده شده باشد آیا  $f$  یک تابع است یا خیر؟

**حل:** با قرار دادن قیمت های متحول در افاده، قیمت های  $f(x)$  را به دست می آوریم:

$x$	$f(x)$
$4$	$2$
$4$	$-2$
$9$	$3$
$9$	$-3$
$16$	$4$
$16$	$-4$

در شکل فوق می بینیم که برای هر عنصر از ست  $x$  دو قیمت در ست  $f(x)$  وجود دارد، بنابراین نظر به تعریف تابع،  $f$  یک تابع نیست ولی رابطه است.

## تمرین

آیا افاده  $f(x) = \frac{4}{3}x$  برای قیمت های داده شده  $0$ ،  $1$ ،  $2$ ،  $3$  و  $-3$  یک تابع است؟

- هرگاه با بعضی قیمت های مجهولات، هر دو طرف مساوات با هم مساوی شود، این مساوات را به نام معادله یا مساوات شرطیه یاد می کنند.
- اگر به هر دو طرف معادله اعداد مساوی را جمع و یا تفریق نماییم باز هم معادله به حالت خود باقی می ماند.
- معادلات معادل: معادلاتی که دارای جذر های یکسان باشند، به نام معادلات معادل یاد می گردند. انجام عملیات ساده الجبری بالای یک معادله، معادلات معادل را به وجود آورده که با معادله اولی حل یکسان دارد.
- هرگاه مسائل روز مره را به قسم یک معادله الجبری تنظیم کنیم تا با استفاده از حل معادله جذر معادله را به دست بیاوریم این پروسه تشکیل معادله بوده که حل آن را به اختیار ما می گذارد.
- رابطه: هرگاه بین دو شی، جسم و یا عناصر دو ست توسط عملیه های ریاضی و یا کدام رشته اجتماعی پیوندی وجود داشته باشد این پیوند به نام رابطه یاد می گردد.
- رابطه خطی: هرگاه گراف یک رابطه یک خط مستقیم باشد در این صورت رابطه بین متحولین را به نام رابطه خطی یاد می کنند.
- تابع عبارت از رابطه ای است که ارتباط بین دو ست از عناصر را برقرار می نماید.
- طوری که برای هر عنصر ست اولی تنها و تنها یک عنصر از ست دومی تقابل نماید.
- ست اولی را به نام ناحیه تعریف (Domain) و ست دومی را به نام ناحیه قیمت ها (Codomain) یاد می کنند.

## تمرینات فصل چهارم

برای هر سؤال زیر، چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح را حلقه بکشید.

1- حل معادله  $10 + x = 18$  عبارت است از:

- a) -8      b) 8      c) 2      d) 4

2- قدم های حل یک معادله عبارت است از:

a - تحلیل و درک      b - انتخاب مجهول و نام گذاری

c - دریافت مجهول و امتحان      d - همه آنها

3. معادل، معادله  $3x - 6 = 3$  عبارت است از:

(a)  $3x - 2 = 1$       (b)  $x - 2 = 3$

(c)  $x - 2 = 1$       d - هیچ کدام

معادلات زیر را حل کنید:

- a)  $t + 4 = 8$       b)  $6x - 6 = 6$       c)  $7x - 2 = 19$       d)  $x + \frac{1}{2} = 4$

سؤال های زیر را حل کنید:

1. اگر از پنج چند یک، عدد 2 را کم کنیم مساوی به 3 می شود. عدد کدام است؟

2. اگر با نصف یک عدد 4 اضافه گردد، مساوی به 8 میشود. عدد کدام است؟

3. یک رابطه را بین عناصر ست  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8\}$  توسط ترسیم گراف برقرار کنید.

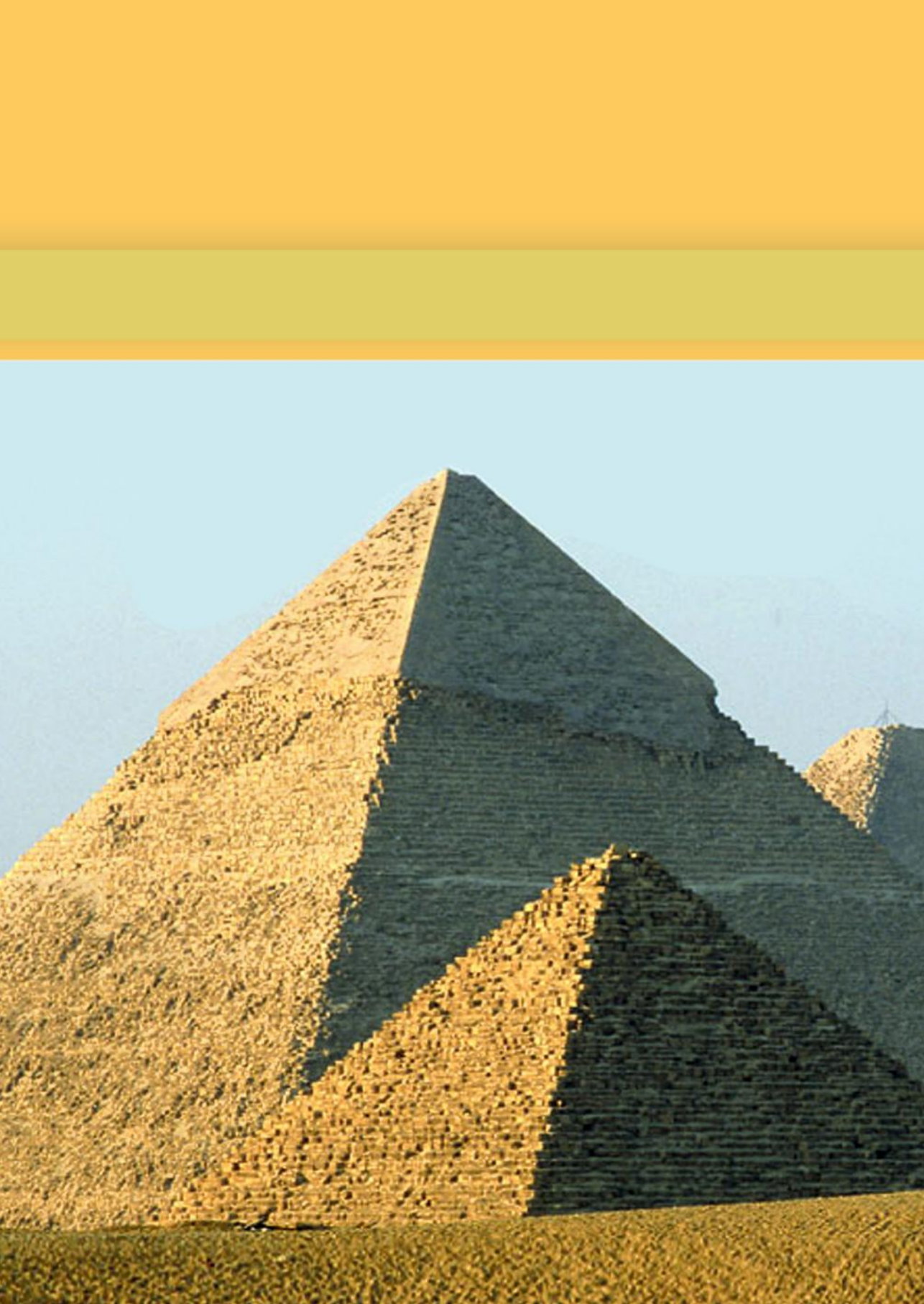
4. سن عبدالله 25 سال کمتر از سن پدرش است، اگر مجموع سن عبدالله و پدرش 41

سال باشد، عمر عبدالله چند است؟

# فصل پنجم

مساحت و احجام



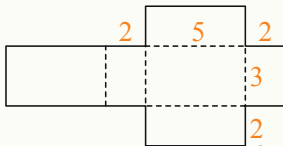






آیا تا به حال فکر کرده اید که یک انسان در هر بار تنفس چه مقدار هوا را داخل شش های خود می کند؟

## فعالیت

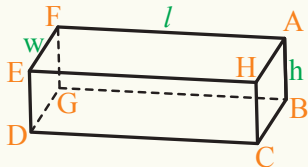


- شکل مقابل را به اندازه های داده شده در کاغذ رسم، قیچی و بر روی خط های نقطه چین آن را قات کنید.
- یک مکعب مستطیل را به طول 5cm، عرض 2cm و ارتفاع 3cm رسم کنید.
- مکعب مستطیل مذکور چند رأس، چند ضلع و چند سطح دارد؟ هر یک را بشمارید.
- مساحت سطوح جانبی را که هر سطح آن مستطیل می باشد دریابید.
- مکعب مستطیل مذکور چند قاعده دارد؟ مساحت قاعده آن را دریافت کنید.
- با استفاده از مجموع مساحت های فوق مساحت کلی مکعب مستطیل مذکور را بنویسید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می یابیم که:

## تعریف

مکعب مستطیل یک شش وجهی منظم هندسی است که همه سطوح آن مستطیل شکل بوده و مساحت های هر وجه مقابل آن دو به دو مساوی و موازی، و همه زوایای آن قائم باشند. اگر طول مکعب مستطیل را به  $l$ ، عرض آن را به  $w$  و ارتفاع آن را به  $h$  ارائه نماییم. طوری که مکعب مستطیل دارای شش



سطح بوده و مساحت سطح جانبی آن عبارت است از:

$$S = 2(wh + hl)$$

و مساحت قاعدتین آن عبارت است از:

$$B = 2wl$$

و مساحت کلی آن عبارت است از:  $A = w\ell + \ell h + wh + w\ell + \ell h + wh$

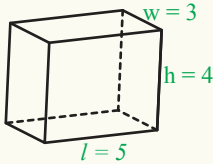
و یا  $A = 2(\ell w + \ell h + wh)$

مکعب مستطیل که هر سه بعد (طول، عرض و ارتفاع) آن با هم مساوی باشند به نام مکعب می نامیم. اگر مساحت کلی آن را به  $A$  نشان دهیم داریم که:

$$A = 6a^2 \quad \text{و یا} \quad A = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$

مکعبی که طول، عرض و ارتفاع آن یک واحد باشد آن را مکعب واحد گویند.

**مثال 1:** مساحت کلی مکعب مستطیلی را دریافت نمایید که طول آن 5cm، عرض آن 3cm و ارتفاع آن 4cm باشد.



$$\ell = 5\text{cm}$$

$$w = 3\text{cm}$$

$$h = 4\text{cm}$$

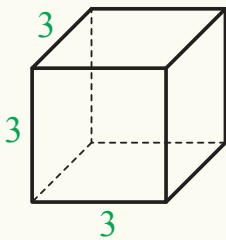
**حل:**

$$A = 2(\ell w + \ell h + wh) = 2(5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4)$$

$$A = 2(15 + 20 + 12) = 2(47)$$

$$A = 94\text{cm}^2 \text{ مساحت کلی}$$

**مثال 2:** اگر مساحت کلی یک مکعب  $54\text{cm}^2$  باشد، طول یک ضلع این مکعب چقدر است؟ آن را رسم کنید.



$$A = 6a^2$$

$$6a^2 = 54$$

$$a^2 = \frac{54}{6} = 9$$

$$a = 3\text{cm}$$

**حل:**

## فعالیت

- مکعب مستطیلی را به طول 3cm، عرض 2cm و ارتفاع 2cm رسم کنید.



- با چند مکعب واحد، می توان داخل این مکعب مستطیل را پر کرد؟ حجم شکل تشکیل شده چقدر است؟
- چه رابطه بین طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل برای محاسبه حجم می توان دریافت؟
- آیا می توانید فرمولی برای محاسبه حجم مکعب مستطیل ارائه کنید؟

از فعالیت فوق می دانیم که:

حجم مکعب مستطیل که طول آن  $\ell$ ، عرض آن  $w$  و ارتفاع آن  $h$  باشد مساوی است به:

$$V = \ell \times w \times h \quad \text{حجم مکعب مستطیل}$$

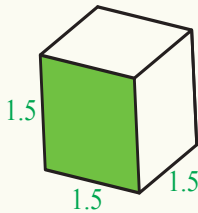
$$V = a \times a \times a = a^3 \quad \text{حجم مکعب}$$

**مثال 1:** حجم مکعب مقابل را دریافت کنید.

$$V = a \times a \times a = a^3 \quad \text{حل:}$$

$$V = 1.5 \times 1.5 \times 1.5$$

$$V = 3.375 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم مکعب}$$



**مثال 2:** حجم یک مکعب مستطیل 24 متر مکعب و مساحت قاعده آن 8 متر مربع است.

ارتفاع این مکعب چند متر است؟

$$V = \ell \times w \times h \quad \text{حجم مکعب مستطیل}$$

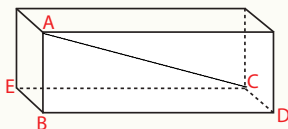
$$24 = 8 \times h$$

$$h = 24 \div 8 = 3 \text{ m}$$

**حل:**

شما می دانید که در هر مکعب مستطیل قطعه خطی که دو رأس مقابل را با هم وصل می کند قطر مکعب مستطیل نامیده می شود. برای دریافت آن فعالیت زیر را انجام دهید.

## فعالیت



- در شکل مقابل طول اضلاع  $\overline{AB}$ ،  $\overline{BD}$  و  $\overline{BE}$  را به ترتیب  $a$ ،  $b$  و  $c$  نامگذاری کنید.

- رأس A را به C و رأس C را به B طوری وصل کنید تا یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شود.
  - در مثلث قائم الزاویه ABC وتر آن  $\overline{AC}$  است رابطه فیثاغورث را برایش بنویسید.
  - چون تمام سطوح یک مکعب مستطیل، مستطیل شکل بوده و سطوح مقابل دو به دو با هم انطباق پذیر اند؛ پس  $\overline{BE} = \overline{DC}$ .
  - در مثلث قائم الزاویه BCD وتر آن  $\overline{BC}$  بوده و با استفاده از قضیه فیثاغورث طول ضلع BC را دریافت و در رابطه قبلی وضع کنید.
- از فعالیت فوق می یابیم که:
- $$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

اگر در یک مکعب مستطیل  $a=b=c$  باشد پس قطر مکعب قرار زیر به دست می آید:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \overline{AC} = a\sqrt{3}$$

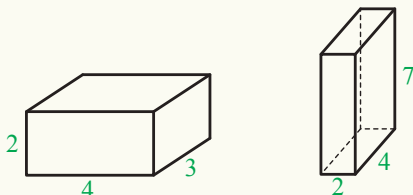
**مثال:** قطر مکعب مستطیلی را به ابعاد 2cm ، 3cm و 6cm محاسبه کنید.

**حل:** با قرار دادن  $a = 2\text{cm}$  ،  $b = 3\text{cm}$  و  $c = 6\text{cm}$  در فرمول قطر، طول ضلع  $\overline{AC}$  را به دست می آوریم:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7\text{cm}$$

## تمرین

- 1- طول سنگ کاری یک دیوار 60cm، عرض آن 30cm و ارتفاع آن 120cm است. حجم آن را به سانتی مترمکعب دریافت کنید.
- 2- اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب 3 برابر شود، حجم مکعب چند برابر می شود؟
- 3- مساحت کل و حجم مکعب مستطیل های زیر را به دست آورید.

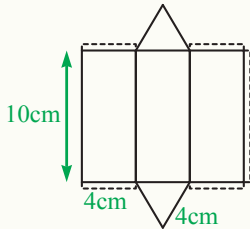


- 4- اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب را دو برابر کنیم، چه تغییری در طول قطر آن به وجود می آید؟



آیا تا به حال فکر کرده‌اید. خیمه‌هایی که در آن زنده‌گی می‌کنیم کدام شکل هندسی را دارا اند؟

## فعالیت



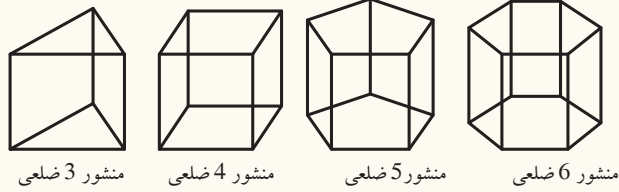
- شکل مقابل را روی یک کاغذ به اندازه‌های داده شده رسم کنید. پس از جدا کردن شکل از کاغذ، کاغذ را به امتداد خطوط طوری قات نمایید تا یک جسم بسته به وجود بیاید.
- شکل تشکیل شده کدام شکل هندسی است؟
  - در شکل فوق چند سطح و چند قاعده را مشاهده می‌کنید؟
  - مساحت هر یک از مستطیل‌های مساوی فوق را به دست آورید.
  - مساحت دو قاعده مثلثی فوق را دریافت کنید.
  - مجموع دو مساحت به دست آمده در فوق چه چیزی را نشان می‌دهد؟
- از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

## تعریف

منشور: جسم منظم هندسی است که سطوح مقابل آن با هم مساوی و موازی بوده و زوایای سطوح مقابل آن با هم انطباق پذیراند. چون هر سطح آن مستطیل شکل می‌باشد، پس همه شان سطوح جانبی منشور نامیده می‌شود.

اگر محیط قاعده را در ارتفاع آن ضرب کنیم مساحت سطوح جانبی به دست می‌آید که با جمع کردن مساحت سطوح جانبی با مساحت‌های قاعدتین مساحت کلی منشور حاصل می‌شود. اگر سطح‌های منشور بر قاعده عمود باشد، آن را منشور قائم می‌نامند.

منشورها را بر اساس شکل چند ضلعی قاعده‌های آن‌ها نامگذاری می‌کنند.



کتاب ریاضی خود و همصنفان خود را گرفته طوری که در شکل مقابل می‌بینید بالای هم قرار دهید. شکل تشکیل شده یک منشور مستطیلی یا مکعب مستطیل می‌شود. در اینجا به ملاحظه می‌رسد که حجم مکعب مستطیل مذکور مساوی مساحت قاعده B ضرب در ارتفاع h می‌باشد. یعنی  $V = B \times h$

گونیه‌های خود را روی هم قرار دهید. یک منشور مثلی به دست می‌آید که حجم آن مساوی به مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است؛ که در آن B مساحت قاعده و h ارتفاع است.  
**مثال:** مساحت کلی و حجم منشور 3 ضلعی را پیدا کنید که قاعده آن یک مثلث متساوی الاضلاع با طول 2cm و ارتفاع 4cm است.

**حل:** در قدم اول ارتفاع مثلث قاعده منشور یعنی AH را دریافت می‌کنیم.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH^2 = (2^2) - (1)^2 \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

$$\text{مساحت یک سطح جانبی} = 2 \times 4 = 8\text{cm}^2$$

$$\text{مساحت سه سطح جانبی} = 3 \times 8 = 24\text{cm}^2$$

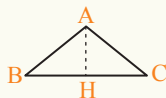
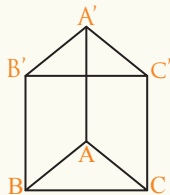
$$\text{مساحت قاعده} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{مساحت قاعدتین} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت کلی} = \text{مساحت سطوح جانبی} + \text{مساحت قاعدتین}$$

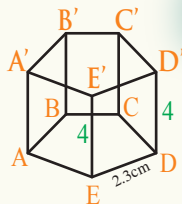
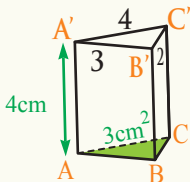
$$\text{مساحت کلی} = 24 + 2\sqrt{3}$$

$$V = 4\sqrt{3}$$



## تمرین

مساحت کلی و حجم منشورهای مقابل را محاسبه کنید.



$$S_{(ABCDE)} = 12.92\text{cm}^2 \quad S_{(ABC)} = 3\text{cm}^2$$

## مساحت و حجم استوانه



بسیاری از وسایلی که در زنده گی روزانه با آن سروکار داریم استوانه یی شکل اند. مانند: گیلای آب، نل آب و غیره...  
آیا می توانید چند شی استوانه یی شکل را نام ببرید؟

## فعالیت

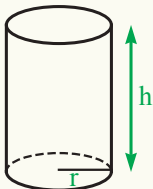
- طول ارتفاع یک استوانه قائم مساوی به 5cm و شعاع قاعده آن 2cm است. به امتداد ارتفاع، استوانه باز شده آن را رسم کنید.
- طول و عرض مستطیل حاصله چند است؟
- مساحت مستطیل را به دست آورید.
- مساحت این مستطیل چه رابطه با مساحت سطح جانبی استوانه دارد؟
- مساحت هر یک از قاعدتین استوانه را با در نظر داشت شعاع قاعده (2cm) دریابید.
- مساحت کلی استوانه را حساب کنید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می توان نتیجه گرفت:

## تعریف

استوانه قائم از دو قاعده دایروی انطباق پذیر و یک سطح جانبی که بر قاعدتین عمود می باشد تشکیل شده است. اگر ارتفاع آن را به  $h$ ، شعاع قاعده آن را به  $r$ ، مساحت سطوح جانبی آن را به  $S$  و مساحت کلی را به  $A$  نشان دهیم:

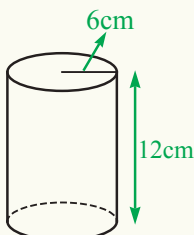
$$2\pi r \times h = \text{مساحت سطح جانبی} \quad \text{و} \quad 2\pi r^2 = \text{مساحت قاعدتین}$$



$$\text{مساحت کلی استوانه} \quad A = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$$

$$\pi = 3.14$$

$$A = 2\pi r(r + h)$$



**مثال 1:** مساحت کلی استوانه مقابل را محاسبه کنید.

**حل:**  $A = 2\pi r(r + h) = 2 \times 3.14(6)(6 + 12)$

$$A = 6.28 \times 6(18) = 37.68(18)$$

$$A = 678.24 \text{ cm}^2$$

**یادداشت:** برای محاسبه حجم منشور ابتدا مساحت قاعده را محاسبه و در ارتفاع آن ضرب کردیم. برای پیدا کردن حجم استوانه نیز مساحت قاعده دایروی را در ارتفاع آن ضرب می کنیم. اگر حجم استوانه را به  $V$  نشان دهیم داریم که:  $V = \pi r^2 \times h$

**مثال 2:** هرگاه حجم یک ماشین 4 سلندره، که قطر هر سلندر آن 8cm است مساوی به  $1600 \text{ cm}^3$  باشد ارتفاع هر سلندر چند است؟

**حل:** چون  $r = 4 \text{ cm}$ ،  $h = ?$ ،  $V = 1600 \text{ cm}^3$  است، پس با استفاده از فرمول برای 4 سلندر داریم:



$$V = 4(\pi r^2 \cdot h)$$

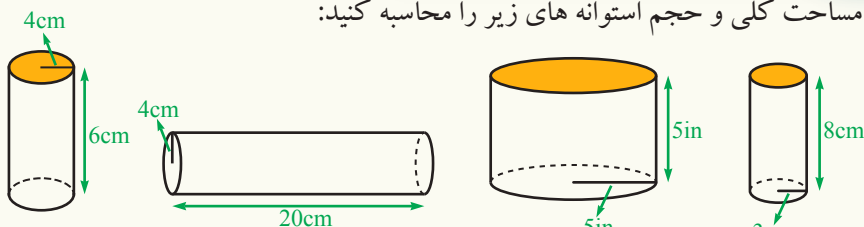
$$1600 = 4(\pi \cdot 16 \cdot h)$$

$$1600 = 200.96h$$

$$h = \frac{1600}{200.96} = 7.96 \text{ cm}$$

## تمرین

1- مساحت کلی و حجم استوانه های زیر را محاسبه کنید:



2- هرگاه شعاع قاعده یک استوانه 3 برابر شود، حجم آن به کدام اندازه تغییر می کند؟

3- یک ذخیره آبی که شکل استوانه را دارد شعاع قاعده آن 40cm و ارتفاع آن 120cm است. در این ذخیره آبی چند متر مکعب آب ذخیره می شود؟

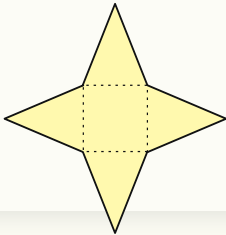
4- هرگاه ارتفاع یک استوانه دو برابر شود، اندازه سطح جانبی آن چقدر تغییر می کند؟

## مساحت و حجم هرم



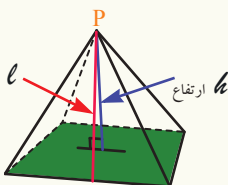
آیا کدام وقت فکر کرده‌اید که چند سال طول کشید تا مصری‌ها هرم‌های مصر را اعمار کردند؟

## فعالیت



- شکل مقابل را روی یک کاغذ رسم کنید.
  - هریک از مثلث‌ها را در نقاط، نقطه چین‌ها نمایش دهید.
  - رأس مثلث‌ها را با هم وصل کنید چه شکلی به دست می‌آید؟
  - با توجه به شکل، آیا می‌توانید روشی برای پیدا کردن مساحت سطوح جانبی هرم بیان کنید؟
- از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

## تعریف



هرم: یک جسم هندسی چند وجهی است که قاعده آن یک مضلع و سطوح جانبی آن مثلث‌ها بوده و در یک رأس مشترک‌اند. مساحت سطوح جانبی مساوی است؛ به مساحت تعداد مثلث‌هایی که وجه جانبی آن را تشکیل نموده‌اند؛ بنابر آن:

$$s = \frac{1}{2} \times nb \ell$$

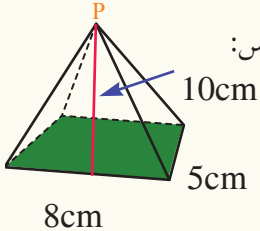
مساحت سطوح جانبی

$n$  عبارت از تعداد اضلاع قاعده،  $b$  عبارت از قاعده مثلثی است که ارتفاع جانبی بالای آن ترسیم می‌گردد و  $\ell$  ارتفاع جانبی هرم می‌باشد.

مساحت سطوح جانبی + مساحت قاعده = مساحت کلی هرم  
یا  $A = B + S$

ارتفاع هرم، قطعه خطی است که از رأس هرم بر قاعده آن عمود باشد.

**مثال:** طول، عرض و ارتفاع جانبی هرم در شکل زیر داده شده است، مساحت کلی آن را حساب کنید.



**حل:** می دانیم که قاعده هرم مستطیلی است و چهار وجه دارد، پس:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8\text{cm} \cdot 10\text{cm} \quad , \quad S = 160\text{cm}^2$$

چون قاعده هرم مستطیلی است، پس:

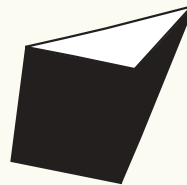
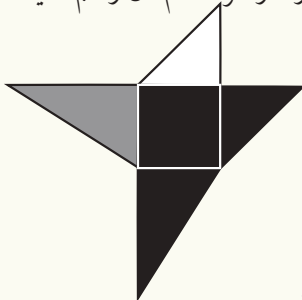
$$B = 8\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 40\text{cm}^2$$

$$A = S + B \Rightarrow A = 160\text{cm}^2 + 40\text{cm}^2$$

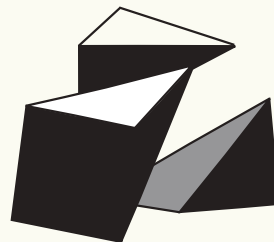
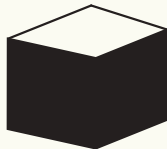
$$A = 200\text{cm}^2$$

## فعالیت

- سه قطعه کاغذ سفید را در نظر گرفته و شکل زیر را در هر کدام آن رسم کنید.



- هر سه قطعه کاغذ را برش و سه هرم از آن بسازید.
- هرم های به دست آمده را طوری کنار همدیگر قرار دهید تا از آن یک مکعب به دست آید؟
- حجم مکعب و حجم هرم را باهم مقایسه کنید.



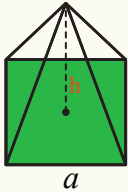


از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:

که حجم مکعب مستطیل سه چند حجم هرم است یا حجم هرم  $\frac{1}{3}$  حجم مکعب مستطیل است.

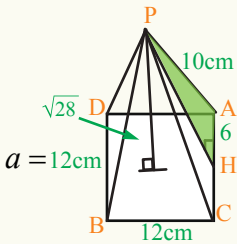
حجم هرم =  $\frac{1}{3}$  حجم مکعب مستطیل  
اگر حجم هرم را به  $V$  ارتفاع آن را به  $h$  و مساحت قاعده آن را به  $B$  نشان دهیم، پس حجم هرم مساوی است به:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$



**مثال:** در هرم مربع شکل زیر، طول قاعده، طول ضلع مثلث و ارتفاع آن داده شده است. مساحت کلی و حجم آن را حساب کنید.

**حل:** چون قاعده هرم مربع شکل است.



$$B = a^2 \Rightarrow B = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$$

حال باید ارتفاع  $PH$  (ارتفاع وجه جانبی) را دریافت کرد:  
در مثلث قائم الزاویه  $PAH$  داریم:

$$\overline{PA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{PH}^2$$

$$10^2 = 6^2 + \overline{PH}^2 \Rightarrow \overline{PH} = 8 \text{ cm}$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot h$$

چون هر چهار سطح آن از مثلث های مساوی تشکیل شده است.

$$S = 4 \times \frac{1}{2} (12 \times 8)$$

$$= 2(96) = 192 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت کلی } A = 192 + 144 = 336 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} 144 \cdot \sqrt{28}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 144 \text{cm}^2 \cdot 5.29 \text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 761.76 \text{cm}^3$$

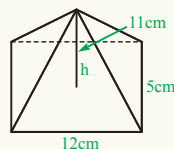
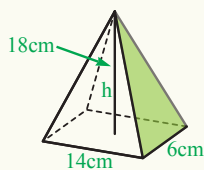
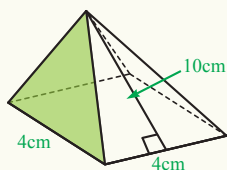
$$V = 253.92 \text{cm}^3$$

## تمرین

1- حجم هرمی را دریافت کنید که قاعده آن مربع بوده، طول یک ضلع آن 40m و ارتفاع آن 27m باشد.

2- چند مترمکعب هوا داخل خیمه یی به شکل هرم مربع القاعده موجود است؟ در صورتی که طول ضلع مربع 7m و ارتفاع هرم 5m باشد.

3- حجم اشکال زیر را دریافت کنید:



## مساحت و حجم مخروط



آیا تا به حال فکر کرده اید که یک مخروط از دوران کدام نوع مثلث به دور یک ضلع آن پدید می آید؟

## تعریف

مخروط قایم، جسمی است که از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اطراف یکی از اضلاع قایم آن حاصل می شود. قطعه خطی که رأس مخروط را به مرکز قاعده آن وصل می کند به نام محور مخروط یاد می شود. اگر محور بر قاعده عمود باشد مخروط قایم و در غیر آن مایل نامیده می شود. مساحت سطح جانبی و کلی مخروط توسط فرمول زیر به دست می آید:

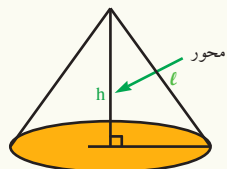
$$S = \pi r l \quad \text{مساحت جانبی، } l \text{ طول مولد مخروط است.} \quad A = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

## فعالیت

- یک جسم استوانه یی و یک جسم مخروطی را که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، بسازید. جسم مخروطی را از سرمه ریگ پر کرده و در جسم استوانه یی خالی کنید.
- با چند مخروطی پر از سرمه ریگ استوانه به شکل کامل پر می گردد.
- حجم استوانه و حجم مخروط چه رابطه یی با هم دارند؟

از فعالیت فوق داریم که:

حجم استوانه سه چند حجم مخروط است؛ پس حجم مخروط  $\frac{1}{3}$  حصه حجم استوانه است که دارای عین قاعده و ارتفاع باشند.



$$V = \frac{1}{3} \text{ حجم مخروط}$$

$$\text{چون } \pi r^2 h \text{ حجم استوانه است، پس: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

**مثال 1:** یک خرمن گندم مخروطی شکل دارای ارتفاع  $1.5m$  و قطر قاعده  $3m$  است. مساحت کلی آن را دریافت نمایید.

**حل:**  $h = 1.5m$  ,  $d = 3m$  ,  $r = 1.5m$

چون قاعده مخروط دایروی است؛ پس:

$$\text{مساحت قاعده} = \pi r^2 = 3.14(1.5)^2 = 7.065m^2$$

حال برای دریافت مساحت سطح جانبی باید وتر مثلث قائم الزاویه را حساب کنید:

$$\overline{SA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OS}^2$$

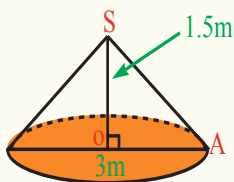
$$\overline{SA}^2 = (1.5m)^2 + (1.5m)^2 = 4.5m^2$$

$$\overline{SA} = 2.12 \quad \ell = 2.12$$

$$S = \pi r \ell = 3.14 \times 1.5 \times 2.12$$

$$S = 9.9852m^2$$

$$\text{مساحت کلی} = 7.065 + 9.9852 = 17.0502m^2$$



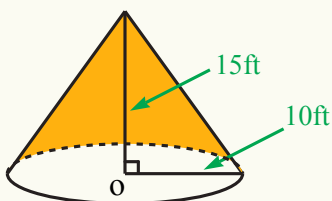
**مثال 2:** حجم مخروط زیر را محاسبه کنید:

**حل:**  $h = 15ft$  ,  $r = 10ft$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \times 3.14(10)^2 \times 15$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4710 = 1570(ft)^3$$

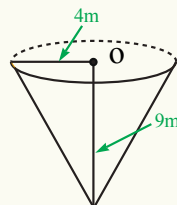
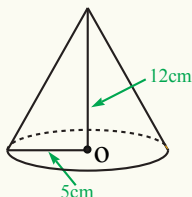
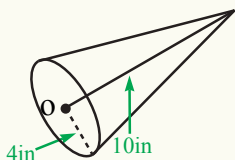
$$V = 1570ft^3$$



## تمرین

1- توده ریگ مخروطی شکل، دارای ارتفاع  $2m$  و قطر  $4m$  است، حجم ریگ آن را محاسبه کنید.

2- شعاع قاعده و ارتفاع هر مخروط داده شده است، حجم هر یک را حساب کنید.

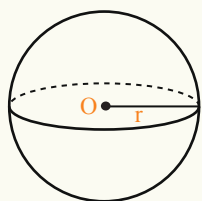




## مساحت و حجم کره

آیا اشکالی و یا اجسامی در اطراف شما وجود دارند که شکل دایروی یا کره‌ای داشته باشند؟ نام بگیرید.

## تعریف



کره، جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت مساوی الفاصله باشد. نقطه ثابت را مرکز و فاصله بین نقطه ثابت و سطح کره را به نام شعاع کره می‌نامند. اگر مساحت را به  $A$  و حجم را به  $V$  نشان دهیم داریم:

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{مساحت کره}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{حجم کره}$$

**مثال 1:** مساحت سطح و حجم کره‌ی را دریافت نمایید که قطر آن  $10\text{cm}$  باشد.

**حل:**

$$d = 10\text{cm}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10\text{cm}}{2} = 5\text{cm}$$

$$A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (5)^2$$

$$= 12.56 \times 25$$

$$A = 314\text{cm}^2$$

مساحت کره:

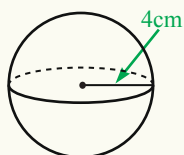
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (5)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125 = \frac{4}{3} \times 392.5$$

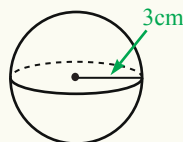
$$= \frac{1570}{3} = 523.33\text{cm}^3 \quad , \quad V = 523.33\text{cm}^3$$

حجم کره:

**مثال 2:** حجم هر یک از کره های زیر را که اجزای آن در شکل داده شده اند، حساب کنید:



جز (b)



جزء (a)

**حل:** جزء (a)

$$r = 3, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (3)^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 27 = \frac{4}{3} \times 84.78 \Rightarrow V = 113.04 \text{ cm}^3$$

$$r = 4, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (4)^3$$

**حل:** جزء (b)

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 64 = \frac{4}{3} \times 200.96 \Rightarrow V = 267.946 \text{ cm}^3$$

## تمرین

1- مساحت یک کره  $36\pi$  سانتی متر مربع است.

الف: شعاع کره را به دست آورید. ب: حجم کره را محاسبه کنید.

2- در جدول زیر شعاع کره داده شده است، حجم و مساحت آن را محاسبه نموده و تحت ستون مربوطه در جدول آن بنویسید:

$r$	6cm	$6 \times \frac{3}{4} \text{ cm}$	9cm	12cm	314cm
$A$					
$V$					

3- اگر شعاع کره 2 برابر شود، حجم و مساحت آن چگونه تغییر می کند؟

### • مکعب مستطیل

یک شش وجهی منظم هندسی است که همه سطوح آن مستطیل شکل بوده و مساحت های وجوه مقابل آن دو به دو مساوی و موازی، زوایای آن قائمه باشند. اگر طول مکعب مستطیل را به  $\ell$ ، عرض آن را به  $w$  و ارتفاع آن را به  $h$  ارائه نماییم داریم:

مساحت جانبی آن عبارت است از:  $S = 2(wh + h\ell)$

مساحت قاعدتین آن عبارت است از:  $B = 2w\ell$

مساحت کلی آن عبارت است از:  $A = 2(\ell w + \ell h + wh)$

حجم مکعب مستطیل:  $V = \ell \times w \times h$

### • مکعب

مکعب مستطیل که هر سه بعد (طول، عرض و ارتفاع) آن باهم مساوی باشند، آن را مکعب می نامیم. اگر مساحت آن را به  $A$  و حجم آن را به  $V$  نشان دهیم داریم که:

$$A = 6a^2$$

$$V = a^3$$

### • منشور

جسم منظم هندسی است که سطوح مقابل آن باهم مساوی و موازی بوده و زوایای سطوح متقابل آن باهم انطباق پذیر اند.

### • استوانه

استوانه قائم از دو قاعده انطباق پذیر و یک سطح جانبی که بر قاعدتین عمود اند تشکیل شده است. اگر حجم را به  $V$  و مساحت را به  $A$  نشان دهیم داریم که:

$$A = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 \times h$$

### • هرم

هرم یک چند وجهی هندسی است که قاعده آن یک مضلع منظم و سطوح جانبی آن مثلثها بوده و در یک رأس مشترک اند.

مساحت سطوح جانبی + مساحت قاعده = مساحت کلی هرم

$$A = B + S$$

ارتفاع هرم قطعه خطی است که از رأس هرم بر قاعده آن عمود باشد.

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

### • مخروط

مخروط قائم، جسمی است که از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اطراف یکی از اضلاع قائم آن حاصل می شود. قطعه خطی که رأس مخروط را به مرکز قاعده آن وصل می کند به نام محور مخروط یاد می شود. اگر محور مخروط بر قاعده آن عمود باشد مخروط قائم و در غیر آن مایل نامیده می شود.

$$A = \pi r^2 + \pi r \times \ell$$
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

### • کره

جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت مساوی الفاصله باشد. نقطه ثابت را مرکز و فاصله بین نقطه ثابت تا سطح آن را به نام شعاع کره می نامند. اگر مساحت کره را به  $A$  و حجم کره را به  $V$  نشان دهیم داریم:

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



## تمرینات فصل پنجم

• برای هر سؤال زیر چهار جواب داده شده است، دور جواب صحیح حلقه بکشید:

- 1- اگر محور استوانه بر قاعده آن عمود باشد، زاویه زیر را می سازد:
  - (a) حاده
  - (b) منفرجه
  - (c) قائم
  - (d) a و b درست است.
- 2- ارتفاع هرم، قطعه خطی است که از رأس بر قاعده آن:
  - (a) موازی باشد
  - (b) مایل باشد
  - (c) عمود باشد
  - (d) هیچ کدام
- 3- اگر ارتفاع یک مخروط که قاعده آن دایروی است  $20\text{cm}$  و شعاع قاعده آن  $10\text{cm}$  باشد حجم آن عبارت است از:
  - (a)  $2093.3\text{cm}^3$
  - (b)  $2093.3\text{cm}^2$
  - (c)  $209.33\text{cm}^2$
  - (d)  $209.33\text{cm}^3$
- 4- اگر ابعاد یک مکعب مستطیل به ترتیب 3، 2 و 1 سانتی متر باشد، طول قطر AC عبارت است از:
  - (a) 2
  - (b)  $\sqrt{14}$
  - (c)  $\sqrt{1}$
  - (d) 6
- 5- فضایی را که یک جسم اشغال می کند به نام چه یاد می شود؟
  - (a) وزن جسم
  - (b) حجم جسم
  - (c) کتله جسم
  - (d) هر سه درست است.

• جاهای خالی زیر را با کلمات مناسب پر کنید:

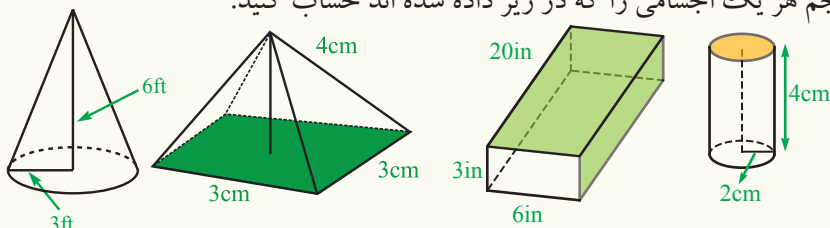
- 1- مکعب مستطیلی که طول، عرض و ارتفاع آن مساوی باشد عبارت از ..... است.
  - 2- مکعب مستطیل یک ..... منظم هندسی است که همه ..... آن مکعب مستطیل شکل بوده و ..... سطوح آن دو به دو با هم قائم باشند.
  - 3- استوانه قائم، جسمی است که از دو قاعده ..... انطباق پذیر و ..... که بر قاعده ها عمود اند تشکیل شده است.
  - 4- حجم هرم ..... حصه حجم ..... بوده که دارای عین قاعده و ..... اند.
  - 5- مخروط قائم، جسمی است که از دوران یک مثلث ..... به اطراف یک ..... از ..... قائم آن حاصل می شود.
- کدام یک از جمله های زیر صحیح و کدام یکی از آن ها غلط است؟ در مقابل جمله صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله غلط حرف (غ) بگذارید:
- 1- ( ) در یک منشور با جمع کردن مساحت های دو قاعده با مساحت کلی مساحت

سطح جانبی به دست می آید.

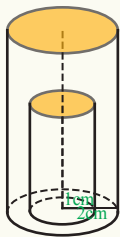
- 2- ( ) اگر استوانه به امتداد محور قطع و باز گردد یک هرم حاصل می شود.
- 3- ( ) اگر طول مکعب مستطیل  $a$ ، عرض آن  $b$  و ارتفاع آن  $c$  باشد حجم آن عبارت از  $abc$  است.
- 4- ( ) کره، جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت متساوی الفاصله باشد.
- 5- ( ) حجم مخروط  $\frac{1}{5}$  حصه حجم استوانه است که دارای عین قاعده و ارتفاع باشد.

• سوالات زیر را حل کنید.

- 1- حجم و مساحت کلی مکعب هایی را که خط رأس آن قرار زیر داده شده است دریافت کنید:
- a)  $24m$       b)  $\sqrt{9m}$       c)  $3\frac{3}{5}m$       d)  $4\sqrt{27}$
- 2- قطی شیر پودری که شکل استوانه یی دارد دارای شعاع قاعده  $6cm$  و ارتفاع  $12cm$  است. مساحت کلی و حجم آن را دریافت نمایید.
- 3- چند متر مکعب هوا داخل خیمه مربع القاعده موجود است، در صورتی که طول ضلع مربع و ارتفاع هرم  $5m$  باشد.
- 4- حجم هر یک اجسامی را که در زیر داده شده اند حساب کنید.



- 5- دو کره به ترتیب دارای شعاع های  $1cm$  و  $2cm$  هستند. الف: مساحت هر کدام از آنها را پیدا کنید. ب: حجم هر یک را به دست آورید.
- 6- با توجه به شکل مقابل، دو استوانه قائم را در نظر بگیرید که مرکز قاعده های آنها یکی باشد. الف: نسبت مساحت سطح جانبی استوانه بزرگتر و مساحت سطح جانبی استوانه کوچکتر را دریابید. ب: نسبت حجم استوانه بزرگتر و حجم استوانه کوچکتر چقدر است؟
- 7- زمین که تقریباً به شکل یک کره است، شعاع آن  $6400$  کیلو متر می باشد.



- الف: مساحت سطح زمین را محاسبه کنید.
- ب: حجم کره زمین را محاسبه کنید.