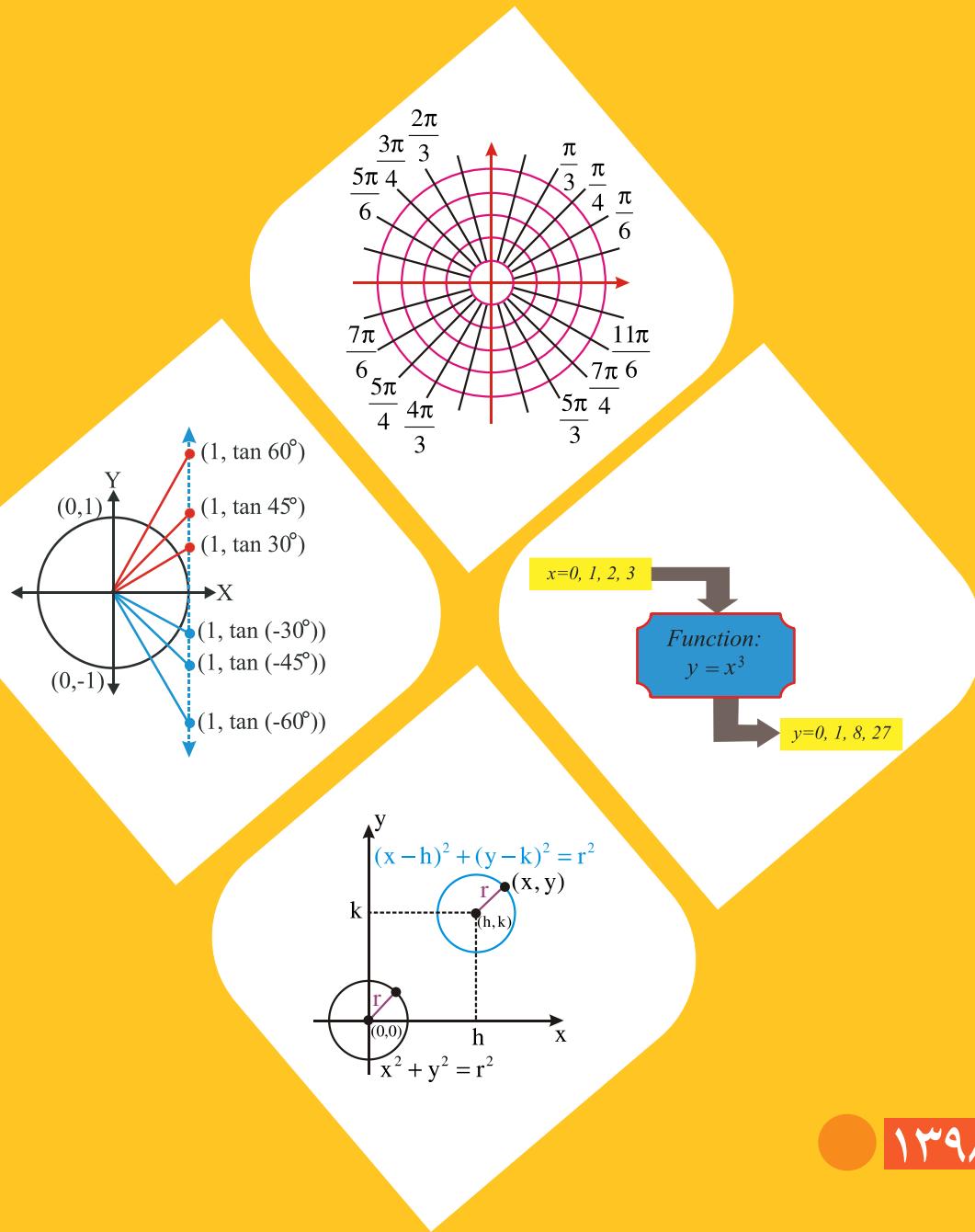




ریاضی

لسم توکی



MATHEMATICS

Grade 10

ریاضی
لسم توکی



ملي سرود

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ايماق، هم پشه ٻان
لکه لم پرشنه آسمان
لکه زره وي جاويдан
وايو الله اکبر وايو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی
کور د سولي کور د توري
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجردی
براھوي دي، قزلباش دي
دا هيوا د به تل حليري
په سينه کې د آسيا به
نوم د حق مودي رهبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی
لسم
تولگی

١٣٩٨
ھ. ش.

د کتاب خانګړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضياتو دیپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفین

ادیت کوونکي: د پښتو زې د ادیت دیپارتمنت غږي

تولگۍ: لسم

د متن زبه: پښتو

انکشاف ورکوونکي: د تعلیمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی ریاست

خپروونکي: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوی ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسی

د چاپ ځای: کابل

چاپ خونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دي. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغروونکو سره قانوني چلنډکېږي.

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

دلوي او بیونکي خدادی ﷺ شکر په خای کوو، چې مورته بي ژوند رابنلی، او د لوسټ او ليک له نعمت خخه بي برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنۍ پیغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

خرنګه چې تولو ته بنکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هپواد بنوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. بنوونکي، زده کونکي، کتاب، بنوونځۍ، اداره او د والدينو شوراګانې د هپواد د پوهنیز نظام شپږگونې بنسټيز عناصر بلل کېږي، چې د هپواد د بنوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسي مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشترابه مقام، د هپواد په بنوونيز نظام کې د ودي او پراختیا په لور بنسټيزو بدلونونو ته ژمن دي.

له همدي امله د بنوونېز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لوړې یتونو خخه دي. همدارنګه په بنوونځيو، مدرسو او تولو دولتي او خصوصي بنوونېزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې خاي لري. مور په دې باور يو، چې د باکيفيه درسي کتابونو له شتون پرته، د بنوونې او روزنې اساسی اهدافو ته رسپدلي نشو.

پورتنيو موخو ته د رسپدو او د اغښناک بنوونېز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هپواد له ټولو زړه سواندې بنوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو خخه په درناوي هيله کوم، چې د هپواد بچيانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېردو لو کې، هیڅ چول هڅه او هاند ونه سیموی، او د یوه فعال او په دینې، ملي او انتقادې تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوشښن وکړي. هره ورڅ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوسټ پیل کړي، چې دن ورځې ګران زده کونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمنن او ګپور او سپدونکي وي.

همدا راز له خورو زده کونکو خخه، چې د هپواد ارزښتناکه پانګه ده، غونښنه لرم، خو له هر فرصت خخه ګټه پورته کړي، او د زده کړي په بروسه کې د حکير کو او فالو ګډونوالو په توګه، او بنوونکو ته په درناوي سره، له تدریس خخه بنه او اغښناکه استفاده وکړي.

په پاي کې د بنوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د بنوونېز نصاب له مسلکي همکارانو خخه، چې د دې کتاب په لیکلوا او چمتو کولو کې بي نه ستري کېدونکي هلي خلپي کړي دي، مننه کوم، او د لوي خدادي ﷺ له دربار خخه دوي ته په دې سپیخلي او انسان جوروونکي هڅي کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي بنوونېز نظام او د داسي ودان افغانستان په هيله چې وګړي په خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دكتور محمد ميرويسي بلخي

عنوان	فهرست	مح
لومری خپر کی (پولینوم) الجبری افادی، د پولینوم درجه او د پولینوم دولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم د ضرب بونو د مجموعی پیداکول، د پولینوم خلور گونی عملی د باقی مانده قضیه، فکتور قضیه او ترکیبی و بش د خپر کی لنیز او پوشتني	۳
دویم خپر کی: رابطه مرتبی جورپی او کارتیزینی مستوی، د کارتیزینی ضرب حاصل او گراف یې رابطه او معکوسه رابطه. معادله رابطه.	۵۳
دریم خپر کی: تابع د تابع د لیکلو طریقه او دیوپی تابع د قیمت پیداکول، د تابع د تعریف د ساحی پیداکول، د یوپی تابع گراف او د گراف له مخچی د یوپی تابع پیژندنه، د گراف له مخچی د یوپی تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، چینی خاصی تابع گانپی او گرافونه یې. متزایدی او متقاضی تابع گانپی، جفتی او طاقی تابع گانپی د گرافونو انتقال (عمودی انتقال، افقی انتقال او دعمودی او افقی انتقالونو ترکیب، د تابع گانو عملی د تابع گانو ترکیب، معکوسه تابع، یوپه یو تابع، د تابع او د هنچی د معکوسی تابع گراف، پولینومی تابع گانپی (لومری او دویمه درجه تابع گانپی) او گرافونه یې ناطقی تابع گانپی او گراف یې (عمودی، افقی او مایل مجانبونه) د خپر کی لنیز او پوشتني	۶۹
خلورم خپر کی: مثلثاتی تابع گانپی زاویه او د زاویپی د اندازه کولو واحدونه، دیوپی زاویپی معیاري حالت او کوتیر مینل زاویپی مثلثاتی تابع گانپی او د چینو خاصو زاویو مثلثاتی نسبتونه د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتی نستونه د یوی حاده زاویپی او نورو زاویو د مثلثاتی نسبتونو په منځ کې اړیکې د مثلثاتی تابع گانو گراف د خپر کی لنیز او پوشتني	۱۴۹
پنځم خپر کی: د مثلثاتو تطبیقات د مرکبو زاویو د مثلثاتی نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعی او تفاضل مثلثاتی فورمولونه د α زاویپی د مثلثاتی نسبتونو له مخچی د 2α او 3α زاویو د مثلثاتی نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتی نسبتونو د مجموعی او تفاضل بدلوں، د زاویو د مثلثاتی نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،	۲۲۳

مخ

فهرست

عنوان

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا په تفاضل باندې، د قوس او بر دوالى، د بوي دایري قطاع او مساحت یې، د دایري قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلع او ددي دوو ضلعو ترمنځ د زاويې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دريو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې

د خپرکي لنډيز او پونښتني

۲۷۷ شپرم څېركۍ: مختلط عددونه

موهومي عددونه او د موهومي عددونو خلورګونې عملې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملې

د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربی معکوس

د مختلطو عددونو وپش

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دوبی په درجې یو مجھوله معادلو حل

د خپرکي لنډيز او پونښتني

۳۰۵ اووم څېركۍ تحليلي هندسه

د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هېڅ نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وبشي

د یوه مستقيم خط ميل

د یوه مستقيم خط معادله (د یو مستقيم خط معیاري معادله، ده ګه مستقيم خط معادله چې

میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محورونو سره ېې د تقاطع نقطې

معلومې وي، د مستقيم خط نورمال معادله او د مستقيم خط عمومي معادله)

د یوه مستقيم خط د عمومي معادله بدلول، د مستقيم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقيم خط خڅه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دایره او د دایري معادله، د یوه مستقيم خط حالتونه له یوې دایري سره، د مماس معادله او د

مماس اوږدوالى

د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و ضعيه کميات ېې معلوم وي.

د خپرکي لنډيز او پونښتني

۳۵۹ اتم څېركۍ احصائيه

د فريکونسي خو ضلعي ګراف، د ساقې او پانې ګراف، ريعي (خلورمې)، صندوقچه یې ګراف،

د نارمل منځني د مرکزې ټاكونکو پرته کول، ريعي انحراف، واريانس، معیاري انحراف،

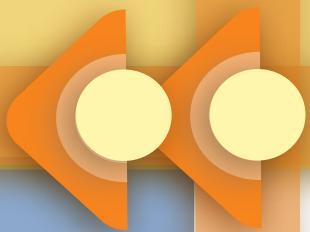
د خپرکي لنډيز او پونښتني

۳۹۱ نهم څېركۍ د رياضي منطق

د شهودي درک استدلال، تمثيلي استدلال، استقرائي استدلال، د رياضي د استقرا استدلال،

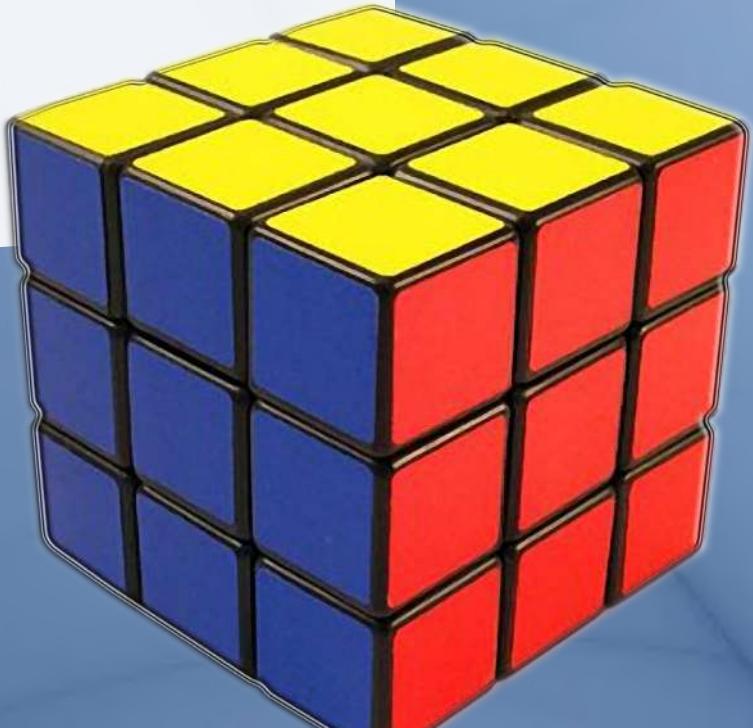
استنتاجي استدلال، د مثل د نفې کولو استدلال، غير مستقيم ثبوت، د رياضي منطق او د بيان

استنتاج، د خپرکي لنډيز او پونښتني



لومړۍ څېرکۍ پولینوم (Polynome) پولینوم (Polynomial)

$$\begin{aligned}(3x^2 + 5x + 2) + (5x + 6) \\= 3x^2 + 5x + 2 + 5x + 6 \\= 3x^2 + 5x + 5x + 6 + 2 \\= 3x^2 + 10x + 8\end{aligned}$$





الجبری افادي (Algebraic Expressions)

ایسا ویلای شئ چې په $\frac{x^4 - 1}{x^2}$

او $x^3 + \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} + y^3$ او $\sqrt{y^2 + 1}$ الجبری

افادو کې کومه یوه ناطقه او کومه یوه غیر ناطقه

الجبری افادة ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبل (Symbol) دی چې

د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په څای وضع کېږي. یا یو تورې چې قيمتونه یې تغير کوي د مثال په

ډول که $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$ او $A = \{x / x \in \mathbb{N}\}$ وي.

نو د A په سټ کې X له یوه څخه تر 10 پوري د طبیعی عددونو قيمتونه اخیستلاي شي. X ، ته

متحول (Variable) وايی. عموماً متحولونه د انگلیسي ژې د کوچنيو تورو، لکه: x, y, z او

نورو په واسطه بنودل کېږي.

د یوه عدد قيمت تغير نه کوي، لکه: د 4 عدد هيڅکله له 5 يا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوی

کېډاڼه شي، نو تول حقيقی عددونه ثابت (Constants) دی.

د حقيقی عددونو سریره د انگلیسي ژې توري، لکه: ... a, b, c ... او نور هم د ثابتونه په څای کارول

کېږي.

الجبری افادة (Algebraic Expression): کېډاڼه شي الجبری افادة له یوه ثابت، یو

متحول او یا د ثابتونه او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبری افادة لاندې مثالونه

وګوري.

$x, x^2 - x + 1, \sqrt{3}x, 4x + 5 + \frac{15}{t^2}, 5\sqrt{x}$ او داسي نور.

په $3x^2$ الجبری افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وايی. په $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ کې د عدد او په x کې (1) ضریب دی. او $15x^5 - 3x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دی چې مشابه متحولونه او مساوی توانونه لري، خو عددی ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبری افادو دولونه: الجبری افادي په درو دولونو دي.

1- پولینومي الجبری افادي (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا خو حله الجبری افاده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېري او $1 + x - x^3 + x^2 + x - 1$ ، $x - 1$ ، 12 پولینومونه دي، خو $x^3 + \sqrt{x} + \frac{y}{x^2} + x - 1$ او $x^{-2} + x - 1$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.

- په مخرج کې متحول ونه لري.

- متحول تر جذر لاندي نه وي.

لومړۍ مثال: په لاندي راکړل شوو الجبری افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو پولینوم نه دی؟

$$e) x^{-3} + x^2, d) x^{\frac{1}{2}}, c) \frac{1}{y^2} - \frac{2}{x^3}, b) 2\sqrt{x}, a) \sqrt{2}x \\ i) 6a^2 - 4a, h) 88, g) 9x^2 - \frac{7}{x^2}, f) 8p^2 + p^{2.2}$$

حل: او i پولینومونه دي، خو h, a, f, e, d, c, b او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولئه چې هر

پولینوم، یوه ناطقه الجبری افاده ده، خو هره ناطقه الجبری افاده پولینوم نه دي. د مثال په ډول:

$$x^3 + \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x} + y^3$$

12 هم یو پولینوم دي، خکه چې: $12x^0 = 12$ دي او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دي، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، خکه چې $5x^{-3}$ ، $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$ او -3

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P شودل کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول خخه جوړ شوي وي عمومي شکل یې په لاندي ډول دي چې د معیاري شکل په نامه یادېږي.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

یو مکمل عدد او a_n, a_2, \dots, a_n ضربونه دي چې حقيقی عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه دي.

فعاليت

له x^2 او $2x^3 - x^2$ ، $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 6$ ، x ، $\frac{1}{x}$ ، $\sqrt{8x^3}$ ، $-8x^2$ ګډه افادو خخه کومه یوه یې پولینوم دی او ګډه یوه پولینوم نه دي؟

دویم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولینوم کې، $a_2 = 1$ ، $a_n = -5$ ، $n = 3$ او $a_1 = 0$ ، $a_n = 11$ ، $n = 2$ دی. او د $a_0 = 12$ و $a_1 = -1$ او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبری افاده (Rational algebraic expression)

که یوه الجبری افاده د $\frac{p}{q}$ ($p \neq 0$) په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبری افادي ته ناطقه الجبری افاده وايې. د مثال په ډول $\frac{x^4 - 1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ چې د شکل یې هم ولیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبری افاده ده. خرنګه چې هرې الجبری افادي ته یو مخرج ورکولای شو، نو $(1 - x^2)^{-1}$ هم یوه ناطقه الجبری افاده ده، خکه چې $1 - x^2$ دی.

3- غير ناطقه الجبری افاده (Irrational algebraic expression)

داسې يوې الجبری افادې ته چې د دوو پولینومونو د خارج قسمت په بنه يې نه شوليکلای، غير ناطقه

الجبری افاده ده، لکه: $\sqrt{y^2 + 1}$ او $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}}$ د غير ناطقو الجبری افادو مثالونه دي.

يوه الجبری افاده کېدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او یا پولینومي الجبری افاده وي. پولینوم هغه يو با
شو حده الجبری افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوبنستې

1- په لاندې الجبری افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولینومي الجبری افاده ده؟

$$13, 3x^2 + \frac{xy}{2}, \quad x + \frac{1}{x}, \quad \frac{m+3}{6}, \quad \frac{3x^2}{2}, \quad \sqrt{x} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{x}$$

2- په لاندې الجبری افادو کې کومه يوه يې یو پولینوم او کومه يوه يې پولینوم نه دی؟

$$\frac{1}{7}x^3 - x, \quad -20a^3b + 28ab^4, \quad 3x^2 + \frac{xy}{2}, \\ -0.03, \quad 3x, \quad 8x^{-8}, \quad 8\sqrt{x}, \quad \frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$$

.3 د $Px^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d$ په پولینوم کې، a_0, a_1, a_2, a_3, a_n او a_0 وبنیاست.

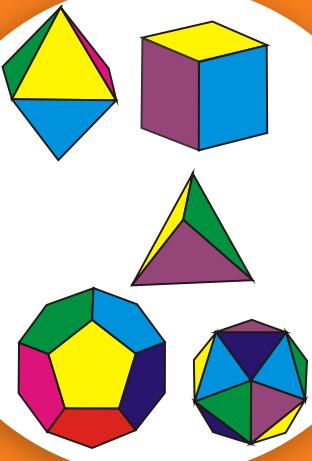
$$.4 \quad P(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 - 1 \quad د \quad a_1, a_2, a_3 \quad په پولینوم کې، او a_0 وبنیاست.$$

د پولینوم درجه او د پولینوم دولونه

آيا ويلاي شئ چې د:

$$12y^5x^3 + x^4y^3 - 2x^3 - x^2 - x$$

12 د پولینومونو درجې خو دي؟



مونوم عدد، يو متحول يا د يو عدد او يو يا خو متحولينو د ضرب حاصل دي.
 $3x$ يا $16x$ ته مونوم يا (Monomial) (يو حده) الجبري افадه وايي. $x - 4$ يا $ab - y$ ته
باينوم (Binomial) يا (دوه حده) الجibri افاده وايي او د $2x^3 - x - 1$ الجيري

افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجيري افاده ده او $\frac{1}{y} + \sqrt{2x} - 1$ الجيري افادي ته
مولتینوم (Multinomial) وايي. په يوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه يادېږي او
هر مونوم يو پولینوم دي.

خینې وختونه پولینوم له يو، دوه، درې او خو متحولونو خخه جوړ شوي وي.
د $11x^3 - 8x^2 + 7x + 1$ پولینوم د يو متحول، $y^3 - 3y^2 + 2x^3$ پولینوم د دوه متحولونو او
 $x + y + z$ د درې متحولونو لرونکي پولینوم دي چې په لاندې جدول کې بنودل شوي دي.

ترینوم (درې حده)	باينوم (دوه حده)	مونوم (يو حده)	متحول
$3x^2 + 2x - 4$	$5y^2 + 3y$	$5x^3$	يو متحول
$6x^2 + 5x - 3y^2$	$7x^2 - 4y^3$	$7x^2y$	دوه متحولونه
$3a^2b^2 + 6c^2 - z^5a$	$8a^2b + 4c$	$4xyz^2$	درې متحولونه

يادوونه: باید پام مو وي چې y^{-3} او $\frac{5}{x}$, $2\sqrt{xy}$ هريوې په مونوم نه دي.

د $ax^2 + bx + c$ ترینوم و بنیاست.
او $4x^2 - 4y$ ، 15 ، $-3x$ ، $2x - y$ الجبری افادو کې مونوم، باینوم او

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري خخه جور شوی وي، د هغه توري لوپ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $x^5 - x^3 + 2x + 1 + x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له دېرو تورو خخه جور شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3 - 5xy^5 + x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده ($3+5=6$) او دا پولینوم نظر x ته دريمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دي. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطی پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دويمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه يې درې وي، دريمه درجه پولینوم (Cubic Polynomail) ورته وايي. او هم د $3x^2$ مونوم دويمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وايي، خکه چې $12x^0 = 12$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دي چې درجه يې صفر وي. يا هغه پولینوم دي چې د ټولو متحولونو ضربونه يې صفر وي.

لومړۍ مثال: د m او n قيمتونه پیداکړئ، که $13 + (5-n)x + (2m-4)x^2$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: خرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دي، نو د هر حد د متحول ضربې يې صفر دي.

$$2m - 4 = 0 \quad 5 - n = 0 \quad \text{نو:}$$

$$2m = 4 \quad n = 5$$

$$m = 2$$

صفری پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفری پولینوم وايي، لکه: $P(x) = 0$ ، د صفری پولینوم درجه تعريف شوي نه ده.

دوييم مثال: د a قيمت پيدا کړئ که چېري (b - 4)x³ - (2c + 6)x + (a - b + c) یو صفری پولينوم وي.

حل: په صفری پولينوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$\begin{array}{lcl} b - 4 = 0 & 2c + 6 = 0 & a - b + c = 0 \\ b = 4 & 2c = -6 & a - 4 - 3 = 0 \\ c = -3 & & a = 7 \end{array}$$

درېيم مثال: د $h(x) = \sqrt{3}$ او $g(x) = 2xy^2 - x^2y^3$ ، $P(x) = x^2 - 1 + 3x^5$ پولينومونو درجې پيدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولينوم درجه 5 د $g(x)$ د پولينوم درجه هم 5 ده، ($n = 5$) خود د پولينوم درجه صفر ده.

فعاليت

د هر پولينوم درجه خو ده؟ او هم د دي پولينومونو درجې نظر هر توري ته پيدا کړئ.
 $x^2 - x^3 + 2x + 5x^5$ ، $x - 1$ ، 15 ، $2m^3n^2 - 3mn^3 - mn$

مکمل او ناقص پولينومونه: مکمل پولينوم هغه پولينوم دی چې له لوړ توان خخه تر ثابت عدد پورې تبول حدونه ولري $x - 1$ ، $x^3 + 1 + 2x - x^2$ او 51 مکمل پولينومونه دي، خو $-1 - x^2 + x^3 + x + 1$ ناقص پولينومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولينومونه د مکملو پولينومو په شکل ولیکو، لکه: $x^3 + x - 1 = x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 1$ او $x^2 - 1 = x^2 + 0 \cdot x - 1$

منظم او غير منظم پولينومونه: د $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ یا $3x^4 - x + 1 + x^3 + x^2 - 11 + 12x + 13x^2 - x^3$ پولينومونه منظم، خو د $1 - x + x^2 + x^3 + 3x^4$ پولينوم یو غير منظم پولينوم دی. کولای شو چې یو غير منظم پولينوم د منظم پولينوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولينوم په دوه ډوله د منظم پولينوم په شکل ليکلای شو. $3x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ یا $1 - x + x^2 + x^3 + 3x^4$

نزولي او سعودي پولينومونه

(Descending and ascending Polynomials)

که يو پولينوم د متحول له لور توان خخه تيپ توان ته ترتيب شوي وي، نزولي او که له تيپ توان خخه لور توان ته ترتيب شوي وي، سعودي ترتيب ورته وابي.

د مثال په چول $1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1$ پولينوم په سعودي ترتيب ليکل شوي دي.

که يو پولينوم له دوو يا خو تورو خخه جور شوي وي، نو موره کولاي شو نظر هر توري ته يې په سعودي يا نزولي چول ترتيب کړو، لکه: د $x^3y^3 + 2xy^3 - 5y^4 + 3x^2y^2$ پولينوم نظر x ته په نزولي چول او نظر y ته په سعودي چول ترتيب شوي دي.

فعاليت

دا پولينومونه په سعودي چول ترتيب کړئ:

$$4x - 5 + 6x^2 + 8x^3, 2y^2 - 4y + 3 - 3y^4 + y^3, 2a^3 - 5 + 4a^4 + a^5 + 3a^2 + a$$

خلورم مثال: د $y^5 + 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + x^4 + y^5$ پولينوم نظر y ته په سعودي ترتيب ولیکي:

$$P(y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$$

حل

معادل پولينومونه: هغه پولينومونه دي چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضربونه پې سره مساوي وي.

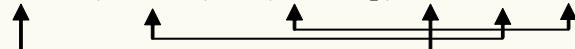
پنځم مثال: که د $x^2 + 3x + 2$ او $m(x - 1)^2 + n(x - 1) + P$ پولينومونه سره معادل وي، د n, m او P قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$m(x^2 - 2x + 1) + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$

$$mx^2 - 2mx + m + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$

$$mx^2 + (-2m + n)x + (m - n + p) = x^2 + 3x + 2$$



په نتیجه کې:

$$m = 1$$

$$-2m + n = 3 \Rightarrow n = 5$$

$$m - n + p = 2 \Rightarrow p = 6$$

متجانس پولینومونه (Homogeneous Polynomials): چې د ټولو حدلونو توانونه یې سره

مساوي وي، لکه: $d^2 - z^2 + y^2$ یو متجانس پولینوم دي.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قيمتونه پيدا

کړئ.

حل:

$$m+1 = 2+1 \quad n-3+2 = m+1$$

$$m = 2 \quad n-1 = m+1$$

$$n-1 = 2+1$$

$$n = 4$$

که پولینوم له یوه توري خخه جور شوي وي، د دې توري لور توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم
له دېرو تورو خخه جور شوي وي، د لور توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه
پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدلونو ضریبونه یې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو
په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدلونو توانونه یې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دي.

پوښتې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وبنیاست او درجې یې پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2}x^2y^5, \quad x^2 - y + 4, \quad x - 1 \\ x - x^2 - x^3, \quad 12x, \quad -12$$

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وبنیاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومونو په شکل ولیکي.

$$x, \quad x+1, \quad x^2 - 1, \\ 2x^2 - 2x - 2, \quad 15, \quad x^3 + x - 1$$

3- لوړۍ د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

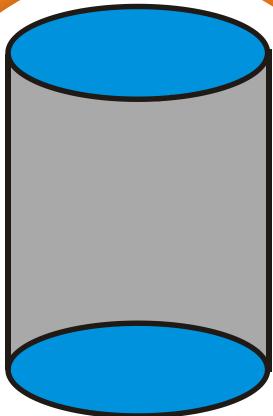
$$4x - 5 + 6x^2 + 8x^3 \\ 2y^2 - 4y + 3 - 3y^4 + y^3 \\ 1 - x^3 + x^2 + 2x^4 - x^5 + x$$

4- که $P(x) = (x-1)^2 + n(x+3) + c = 2x^2 - x + 22$ د n, p او c قیمتونه پیدا کړئ.

5- د $P(x) = 7x^4 - (2a-3)x^3 + 5x - (c-3)$ او b, a د c قیمتونه پیدا کړئ که $(3b+4)x^4 + 2x^3 + 5x$ معادل پولینومونه وي.

6- که $5xy^2 + 8x^p z - 3y^{m-3}z^2$ د m او p قیمتونه پیدا کړئ.

د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعی پیدا کول



آیا ویلای شئ د $x = -1$ لپاره د

$$P(x) = x^3 - x^2 - x - 1 \quad \text{پولینوم قیمت}$$

$$P(-1) = ? \quad \text{یا خودی؟}$$

که په یوه پولینوم کې د متتحول پر څای یو حقیقی عدد (د متتحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقی عدد په لاس راخي چې دا حقیقی عدد ددې پولینوم قیمت دی. د $x = 2$ لپاره د پولینوم قیمت $8 = 3 \cdot 2 + 2 = P(2)$ دی.

لومړۍ مثال: د $P(x) = 2x^2 - 7x + 1$ پولینوم قیمتوونه د $P(5)$ ، $P(0)$ او $P(-1)$ لپاره پیدا کړئ.
حل:

$$P(5) = 2 \cdot 5^2 - 7(5) + 1 = 50 - 35 + 1 = 51 - 35 = 16$$

$$P(0) = 1$$

$$P(-1) = 2(-1)^2 - 7(-1) + 1 = 2 + 7 + 1 = 10$$

فعالیت

د $P(x) = x^5 - x^3 - x - 1$ پولینوم لپاره $P(0)$ ، $P(1)$ او $P(-1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x) = 16x^3 - 8x^2 + \frac{3}{4}$ پیدا کړئ.
حل:

$$P\left(-\frac{1}{4}\right) = 16\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 8\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = 16\left(-\frac{1}{64}\right) - 8\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{-1 - 2 + 3}{4} = \frac{-3 + 3}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

دریم مثال: لکه: خرنگه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د

$$C = 2\pi r \text{ له فورمول خخه لاس ته راخي چې که چېږي } \pi = \frac{22}{7} \text{ او د دایرې شعاع}$$

$$\text{حل: } r = 3 \frac{1}{2} \text{ cm وی، نو د دی دایرې محیط (C) پیداکړئ.}$$

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو او بردواړی او P د مثلث د محیط نیمایي وی یعنې

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ د مثلث مساحت د دی فورمول په واسطه لاس ته راخي.}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو او بردواړی $b = 12 \text{ cm}$, $a = 9 \text{ cm}$ او $c = 15 \text{ cm}$ وی، د دی مثلث مساحت پیداکړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول خخه لاس ته راخي چې V د استوانې حجم ، r د قاعدي شعاع او h د استوانې لورواړی دی. که د یوې استوانې $r = 5 \text{ cm}$ او $h = 21 \text{ cm}$ وی، د دی استوانې حجم پیداکړئ.

د پولینوم د ضربیونو د مجموعې پیداکول:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ که د } a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \text{ ټکنیکاً مجموعه یې.}$$

پنځم مثال: د ۱ پولینوم $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ د ضربیونو مجموعه په لاس راوړئ.

$$\text{حل: } p(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 + 5 - 3 + 1 = 5$$

که پولینوم له خو تورو خخه جور شوي وي، د هر توري پر خاي يو (1) وضع کوو، لکه: د
x⁴ + 4x³y + 6x²y² + 4xy³ + y⁴
خاي يو (1) وضع کوو:

$$1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1^3 + 1^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

شپرم مثال: د (x - 3y)⁴ د ضربونو مجموعه پيدا کړئ.

حل:

$$(1 - 3 \cdot 1)^4 = (1 - 3)^4 = (-2)^4 = 16$$

اووم مثال: د (7x² - 5x - 1)⁶⁰⁰ (2x³ - 1)¹⁷ (x + 2)⁴ د ضربونو مجموعه په لاس

راوړئ.

حل:

$$(7 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1)^{600} (2 \cdot 1^3 - 1)^{17} (1 + 2)^4 = (1)^{600} (1)^{17} (3)^4 = 81$$

اقم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پيدا کړئ.



حل:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6\text{cm})^3 = \frac{4}{3}\pi(216\text{cm}^3) = 288\pi\text{cm}^3$$

د x د راکړل شوي قيمت لپاره د P(x) په پولينوم کې د x پر خاي راکړل شوي قيمت وضع کوو،
د پولينوم قيمت په لاس راخي که په يوه پولينوم کې د توري (متحول) پر خاي يو وضع شي د پولينوم
د ضربونو مجموعه په لاس راخي.

. 1. که $p(x) = -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ د پولینوم کې وی $p(-1)$ او $p\left(\frac{1}{2}\right)$ پیداکړي.

. 2. د $p(x) = kx^3 - x^2 + 3x - 1$ په پولینوم کې که $p(2) = 17$ د قيمت پیداکړي.

. 3. که د $mx^2 - 2x + 1$ د ضربونو مجموعه 18 وی د m قيمت پیداکړي.

. 4. $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ د لپاره د $x = -\frac{1}{2}$ پولینوم قيمت پیداکړي.

. 5. $C = -x + 3x^4 - 6x^3$ $\square B = -4x^3 + 10x^2$ $\square A = x^2 - 4x + 4$ د او

. 6. په پولینومونو کې د $x = 4$ لپاره د کوم پولینوم قيمت له 100 خخه زيات دی؟

- a) C b) D c) A d) B

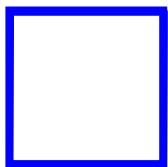
. 6. په لاندې پولینومونو کې د $x = 5$ لپاره د کوم پولینوم قيمت تر ټولو زيات دی؟

- a) $x^2 - 2x + 6$
 b) $3x^4 + 6x + 12$
 c) $-x^3 - 40x - 300$
 d) $x^5 - 120x^4 + 10$

. 7. که $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ د $p(0)$ ، $p(-1)$ وی $p\left(\frac{1}{2}\right)$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیداکړي.

. 8. د $x = 2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}$ پولینوم قيمت پیداکړي.

د پولینوم خلورگونی عملی



$3W-4$



$W+2$

که د مربع هره ضلع $3w - 4$ او د متساوي
الاضلاع مثلث هره ضلع $w + 2$ وي، يوه
الجبری افاده ولیکي چې د دواړو شکلونو
محیط بشکاره کړي.

که $B = 9x - 5$ او $A = 8x^2 - 2x + 3$
وي، $A - B$ او $A + B$ پیدا کړي.

1 د جمعی عملی: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه

يو له بله تفرقی کېږي، دا دواړه عملی په افقی او عمودی ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړۍ مثال: که $A + B = 9cd - 7cd^2 - 5$ او $B = -3cd^2 - 2cd + 5$ وي $A + B$ پیدا کړي.
حل:

$$\begin{aligned} A + B &= (-3cd^2 - 2cd + 5) + (9cd - 7cd^2 - 5) \\ &= -3cd^2 - 2cd + 5 + 9cd - 7cd^2 - 5 = -10cd^2 + 7cd \end{aligned}$$

فعاليت

که $C = 2a + 4$ او $B = 2ab^2 + 3a - 2$ ، $A = ab^2 + 3a$ وي، د دې درې دا پولینومونو د جمعی حاصل پیدا کړي. ($A + B + C = ?$)

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $B = 3x - 5 - 2x^2$ ، $A = 1 + 2x + 3x^2$ او $C = x^2 - 5x + 4$ او هم که

$B = a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4b - 4$ ، $A = a^4b - 2a^3b^2 - 3a^2b^3 - 4c - 2b$
او $C = a^4b + a^3b^2 - 2c$ وي.

حل: لومړۍ پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کړو.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 2x + 1 \\
 -2x^2 + 3x - 5 \\
 + \quad x^2 - 5x + 4 \\
 \hline
 2x^2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 a^4b - 2a^3b^2 - 3a^2b^3 - 4c - 2b \\
 a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4b - 4 \\
 a^4b + a^3b^2 - 2c \\
 \hline
 2a^4b - 5a^2b^3 - 6c + 2b - 4
 \end{array}$$

2- د تفريقي ع مليه: د تفريقي په عملية کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. يا په بل عبارت د مفروق علامې تغيورو او له مفروق منه سره يې جمع کوو.

لومړۍ مثال: د A = $-x^3 + x^2 + x - 7$ له پولينوم خخه تفريقي کړئ، که $B = -x^3 + x^2 + 4x + 3$ او $A = 2b^2 - 2c^2 - 2d^2 - 2e^2$ وی او هم که $B = b^2 - 3c^2 - 3d^2 - 3e^2 - f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{r}
 A = -x^3 + x^2 + x - 7 \\
 -B = \mp x^3 \pm x^2 \pm 4x \pm 3 \\
 \hline
 A - B = \quad \quad \quad -3x - 10
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 A = 2b^2 - 2c^2 - 2d^2 - 2e^2 \\
 B = \pm b^2 \mp 3c^2 \mp 3d^2 \mp 3e^2 \mp f^2 \\
 \hline
 A - B = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2
 \end{array}$$

يا

$$\begin{aligned}
 & -x^3 + x^2 + x - 7 - (-x^3 + x^2 + 4x + 3) \\
 & = -x^3 + x^2 + x - 7 + x^3 - x^2 - 4x - 3 \\
 & = -3x - 10
 \end{aligned}$$

باید په ياد ولرو چې د یو پولينوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع يا تفريقوو. د مثال په ډول

- a) $x^2 + 6x^4 - 8 + 9x^2 + 2x^4 - 6x^2 = 8x^4 + 4x^2 - 8$
- b) $3x - x - 1 + 3 - 2x = 2$
- c) $2x^2 - x - x^2 - x - 2 = x^2 - 2x - 2$
- d) $6xy - xy - x - y + 2x = 5xy + x - y$
- e) $mn - 4 + mn - 5 = 2mn - 9$

فعالیت

په لانډي پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وبنياست.

$$-t + 5t^2 - 6t^2 + 6t - 3$$

$$9rs - 2r^2s^2 + 4r^2s^2 + 3rs - 7$$

$$3p - 4p^2 + 6p + 10p^2$$

$$2fg + f^2g - fg^2 - 2fg + 3f^2g + 5fg^2$$

دویم مثال: د له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل يې 2a⁴ - 3a³b - 3ab³ - b⁴ + a²b² شي؟

حل:

$$2a^4 - 3a^3b + a^2b^2 - 3ab^3 - b^4$$

$$\begin{array}{r} -a^4 \pm 2a^3b \pm a^2b^2 \mp 3ab^3 \\ \hline a^4 - 5a^3b & \quad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

$$-2x^3 + 3x - 7 \text{ او } x^3 + x^2 - 2x \text{ د } 3x^2 - x^3 - 4x + 6 - 2x^2$$

پولینومونو له مجموعې خخه تفريقي کړئ.

دریم مثال: تفريقي يې کړئ.

$$202x^4y - 303x^3y^2 - 101x^2y^3 - 404xy^4 - 505y^5$$

$$-101x^4y \mp 303x^3y^2 \pm 101x^2y^3 \mp 404xy^4 \pm 505 y^5$$

$$101x^4y \quad -202x^2y^3 \quad -1010y^5$$

$$3ax - 5bx - 8cx - 11dx$$

$$\pm 3ax \mp 5bx \mp 8cx \mp 11dx$$

$$0$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده يې کړئ.

$$20 - k - k - 10 - 6 - k^2 = -k^2 - 2k + 4$$

$$8 - 10 + x - 7 + x = 2x - 9$$

$$y^2 - 1 + y^2 - 1 = 2y^2 - 2$$

$$ab + a - b - a = ab - b$$

$$4b^3 - 2b^2 - 2 + b - 4b^3 + b^2 + b^2 - b + 2 = 0$$

$$x^2 - 5x - 2x^2 + 5 = -x^2 - 5x + 5$$

باید په یاد ولرو چې که P, Q او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبدیلی خاصیت) $P + Q = Q + P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

(د ضرب توزيعي خاصیت پر جمع باندي) $P(Q + R) = PQ + PR$

یا $(Q + R)P = QP + RP$

د پولینومونو د جمعې او تفرقې په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا يو له بله تفرق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفرقې په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزيعي قانون پر جمع باندي په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پونتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه $x^2 + 2x - y^2$ ده، که یو پولینوم $x^2 - 2xy + 3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

2. د $4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1$ پولینوم له $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ پولینوم خخه تفرق کړئ.

3. د $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ پولینوم خخه د $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ پولینوم تفرق کړئ.
4. که $C = 2a^3 - a^2 + 2a - 8$ او $B = a^3 + 2a + 5$ ، $A = a^3 + 2a^2 - 6a + 7$ وي

($A + B + C = ?$) ددې درې وارو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ.

5. د $(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$ افادې د جمعې حاصل مساوی دی، په:

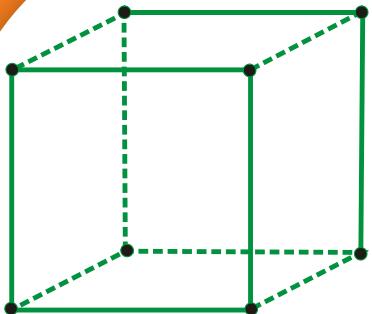
a) $3ab^2 + 8a + 2$ b) $3ab^2 + 8a$ c) $3ab^2 + 8a + 2$

6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$$

7. که دوو الوتکې له یوه هوایې ډګر خخه یو د بل مخالف لوري له والوري، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واتېن له هوایې ډګر خخه $x^2 + 2x + 400$ ميله وي او دبلې الوتکې واتېن له هوایې ډګر خخه $3x^2 - 50x + 100$ ميله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واتېن (فاصله) پیدا کړئ.

د پولینومونو ضرب



د هغه مکعب حجم به خومره وي چې هره

صلع بې $(x+1)$ سانتي متراه وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل بې $(3r^2s^3)(5r^4s^5) = 15r^6s^8$ کېږي.

فعاليت

د $(-30a^2b)(-5ab)(-\frac{1}{3}x)(-x)$ ، $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ سره ضرب کړئ.

لومړۍ مثال: د لانډي مونومونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$\frac{1}{4}(4)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{16}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{16} = 1$$

$$(-5y^a)(5y) = -25y^{a+1}$$

$$(-2a)^3(-2a)^2 = -32a^5$$

$$(-4s^2t^2)(2st^3) = -8s^3t^5$$

$$x(x^m) = x^{m+1} = x^{1+m}$$

$$-a^{2x} (-2a) = 2a^{2x+1}$$

$$\left(\frac{5}{2}mn\right)\left(\frac{5}{2}mn\right)\left(\frac{5}{2}mn\right) = \frac{125}{8}m^3n^3$$

$$\left(-\frac{1}{2}a\right)\left(-\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a^2$$

$$(-a^b)(-a) = a^{b+1} = a^{1+b}$$

$$(-0.1)(-0.1)(-0.1) = -0.001$$

$$(0.01p)(0.01p) = 0.0001p^2$$

$$(-mn)(-mn^2) = m^2n^3$$

$$(0.1x^2)(0.1x^2) = 0.01x^4$$

د مونوم ضرب په پولینوم کې:

دویم مثال: د ضرب لانډي حاصل لاس ته راوړئ.

$$x^3(x - x^2y^4) = x^4 - x^5y^4$$

$$(2m^2n^3)(1 - 4mn^4) = 2m^2n^3 - 8m^3n^7$$

$$-3b(5b^4 - 8b + 12) = -15b^5 + 24b^2 - 36b$$

$$-4s^2t^2(5s^2t + 6st - 2s^2t^2) = -20s^4t^3 - 24s^3t^3 + 8s^4t^4$$

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې او بدواں یې، $2x$ ، سورېي x او لورواں یې $x+2$ وي.

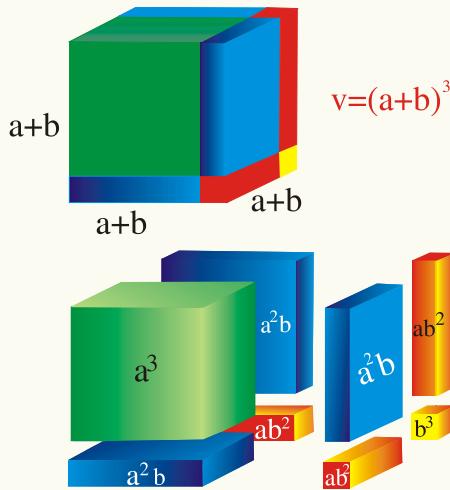
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

دريېم مثال: د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

$$(x-4)(x-5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



$P(x) \cdot Q(x)$ وې. $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ او $P(x) = x^3 + 2x$ کې :
پیدا کړئ.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 + 2x) \cdot (2x^2 - x + 1)$$

$$\begin{aligned} &= x^3 \cdot 2x^2 + x^3 \cdot (-x) + x^3 \cdot 1 + 2x \cdot 2x^2 + 2x \cdot (-x) + 2x \cdot 1 \\ &= 2x^5 - x^4 + x^3 + 4x^3 - 2x^2 + 2x = 2x^5 - x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

څلورم مثال: لاندې افادي د $a^3 - b^3$ او $a^3 + b^3$ مطابقونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

$$\text{a) } (x^m + y^n)(x^{2m} - x^my^n + y^{2n}) = (x^m + y^n)[(x^m)^2 - (x^m)(y^n) + (y^n)^2] \\ = (x^m)^3 + (y^n)^3 = x^{3m} + y^{3n}$$

$$\text{b) } (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)(x - \sqrt{xy} + y) \\ = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) \\ = [(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3] = [(\sqrt{x})^3]^2 - [(\sqrt{y})^3]^2 \\ = (x^{\frac{3}{2}})^2 - (y^{\frac{3}{2}})^2 = x^3 - y^3$$

په ياد ولري چې که P, Q او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبديلى خاصيت) $P \cdot Q = Q \cdot P$

(د ضرب اتحادي خاصيت) $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$

فعالیت

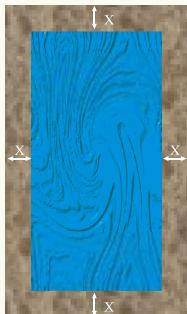
که لاندې جدول کي د هندسى شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.
په کې وڅېږي.

په لاندې جدول کي د هندسى شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

هندسى شکلونه	رآکړ شوی او برداوالي	مساحت
مستطيل	او برداوالي یې $n+5$ او سور یې $n-4$	$n^2 + n - 20$
مستطيل	او برداوالي یې $3y+3$ او سور یې $2y-1$	$6y^2 + 3y - 3$
مثلث	قاعده یې $2b-5$ او لورواли یې b^2+2	$b^3 - \frac{5}{2}b^2 + 2b - 5$
مربع	هره ضلع یې $m+13$ ، ده	$m^2 + 26m + 169$
مربع	هره ضلع یې $2g-4$ ده	$4g^2 - 16g + 16$
دایره	شعاع یې $3c+2$ ده	$(9c^2 + 12c + 4)\pi$

فعالیت

د ضرب حاصل په لاس راوپئ.



پوبستنه: د یوه حوض خلورو خواوو ته له سمنتو خخه پخه شوي لاره ده، که د دې لاري سور X متره وي او د حوض اوبردواالی او سور په ترتیب سره 50m او 25m وي د لاري مساحت معلوم کړي.

حل: د لاري او حوض مجموعي مساحت

$$A = (25 + 2x)(50 + 2x) = 1250 + 150x + 4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m) = 1250m^2$

د لاري مساحت: $1250 + 150x + 4x^2 - 1250 = 4x^2 + 150x$

پولینومونو په ضرب کې کیدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزيعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کړي.

پوبستني

1. ضرب یې کړي: $-2xy(2x^2 + 2y^2 - 2)$ ، $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې X انچه، اوبردواالی یې $(x+1)$ او سور یې $4 - 2x$ انچه دی، که

لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوی دی، په:

- a) 40in^3 b) 24in^3 c) 48in^3 d) 20in^3

3. د ضرب حاصل مساوی دی، په: $\left(\frac{a^p}{a^{-q}}\right)^{p-q} \left(\frac{a^q}{a^{-r}}\right)^{q-r} \left(\frac{a^r}{a^{-p}}\right)^{r-p}$

- a) 1 b) -1 c) صفر d) درې واپه سم نه دی

د پولینوم و پش پر مونوم

آياد



$$\frac{4m^2}{n} , \frac{1}{\frac{a}{b}} , \frac{3mn^2}{-mn} , \frac{-x^2}{x}$$

$$\text{او د } \frac{14x^5}{2x^2} \text{ د پش حاصل په لاس}$$

راورلای شی؟ (هیچ یو مخرج له صفر سره مساوی نه دی).

د مونوم و پش پر مونوم (Dividing monomial by monomial)

لوړۍ مثال: وې وېشی:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4 , \quad \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y , \quad \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x} , \quad \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

د پولینوم و پش پر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \quad (x^2 \neq 0)$$

دویم مثال: وې وېشی:

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \quad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \quad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

د پش حاصل په لاس راوري. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a : \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8}$$

$$b : \frac{x^2}{y^2 - 1} \div \frac{x^2}{y - 1}$$

$$c : \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

د پولینوم و بش پر پولینوم: خه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم و بش، مقسوم او مقسوم عليه (Dividend) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x^4 + 2x^4 + 12 + 3x^3 - 4x^2) \div (3 + x^2 - 2x)$ د بش حاصل په لاس راوړي.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x + 12 \\ \pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2 \\ \hline 7x^3 - 10x^2 + 13x \\ \pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x \\ \hline 4x^2 - 8x + 12 \\ \pm 4x^2 \mp 8x \pm 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

فعاليت

د بش حاصل په لاس راوړي.

څلورم مثال: د بش حاصل په پیداکړي $(a^5 + b^5) \div (a + b)$ حل:

$$\begin{array}{r} x^3 - 19x - 30 \\ \underline{-x^3 \pm 3x^2} \\ -3x^2 - 19x \\ \hline \mp 3x^2 \mp 9x \\ \hline -10x - 30 \\ \mp 10x \mp 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

پنځم مثال: د $4x^3 - 10x^2 + 12x + 6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووبشل شي؟

حل

$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 10x^2 + 12x + 6 \quad 2x + 1 \\
 \underline{- 4x^3 \pm 2x^2} \qquad \qquad \qquad 2x^2 - 6x + 9 \\
 -12x^2 + 12x \\
 \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} \\
 \hline
 18x + 6 \\
 \underline{- 18x \pm 9} \\
 \hline
 -3
 \end{array}$$

په نتیجه کې که له پورتنی پولینوم سره 3 جمع کرو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو ور دی.
باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغۇپوري دواو ورکوو چې پاتې(باقى مانده) صفر او ياد باقى
مانده درجه د مقسوم عليه له درجى خىخه د يو په اندازه كمه شي.

فعاليت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $3y^2 - 4y + 1$ د $6y^3 - 11y^2 + 6y - 1$ دى. که يو پولینوم
وي، بل پولینوم پيدا كرپي.

شپږم مثال: د x په کوم قيمت 5 پولينوم $12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ باندي
پوره وېشل کېري؟

حل

$$\begin{array}{r}
 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5 \quad 3x^2 - 1 \\
 \underline{- 12x^4 \quad \mp 4x^2} \qquad \qquad \qquad 4x^2 + x - 3 \\
 3x^3 - 9x^2 + x \\
 \underline{- 3x^3 \quad \mp x} \\
 -9x^2 + 2x + 5 \\
 \underline{\mp 9x^2 \quad \pm 3} \\
 2x + 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 2x + 2 = 0 \\
 2x = -2 \\
 x = -1
 \end{array}$$

نو د $x = -1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2 - 1$ پوره وېشل کېري.

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لوړۍ باید مقسوم عليه په نزولي چول ترتیب شي او د وېش عملې ته تر هغه پوري دوام ورکوو، تر خود پاتې (باقي) درجه د مقسوم عليه له درجې خخه دیو په اندازه کمه شي.

پوښتني

۱. د $P = 3x^3 - 7x^2 - 9x + 13$ پولینوم پر x پوره وېشل کېږي.

۲. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c)$$

$$(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$$

$$(x^5 - y^5) \div (x - y)$$

$$\frac{j^5 k^2 - 3j^8 k^4}{2j^4 k}$$

$$\frac{12x^5 + 9x^4 + 15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6 b^{13} - 18a^{12} b^8}{9a^3 b^8}$$

$$(x^3 - a^3) \div (x^2 - ax + a^2)$$

$$(9x^4 + 2x^2 + 7x + 2) \div (3x + 2)$$

$$(8x^3 + 27y^3) \div (2x + 3y)$$

$$(7x - 12 + 2x^4 - 8x^3 - x^2) \div (2x^2 + 5)$$

د باقی مانده قضیه (Remainder Theorem)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 2x + 1 \\ \hline x - 3) 2x^2 - 5x - 1 \\ - (2x^2 - 6x) \\ \hline 0 + 1x - 1 \\ - (x - 3) \\ \hline 0 + 2 \end{array} \\
 \text{پاتې 2}
 \end{array}$$

آيا د وېش د عملې له سرتې رسولو پرته ويلاي
شي چې که د $x^3 - 6x^2 - x - 6$ پولینوم په
 $x - 4$ ووبشو پاتې (باقی) به خو وي؟

که د $P(x)$ پولینوم په $x - a$ ووبشل شي باقی (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. يا $P(a) = 2x^2 + 3x + 4$ که د $P(x)$ پولینوم پر $(x + 3)$ ووبشل شي، نو باقی $P(-3)$ سره مساوي ده. (Remainder)

$$P(-3) = 2(-3)^2 + 3(-3) + 4 = 13 \quad \text{حل:}$$

اوسمې ازمایو او د وېش عملیه سرتې رسوو.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} x + 3 \\ \hline 2x^2 + 3x + 4 \\ - 2x^2 \pm 6x \\ \hline - 3x + 4 \\ \mp 3x \mp 9 \\ \hline 13 \end{array}
 \end{array}$$

قضیه: که د $P(x)$ پولینوم په $(x - a)$ ووبشو، نو باقی يا پاتې R ده.

ثبت: که د $P(x)$ پولینوم په $(x - a)$ ، ووبشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R \quad x - a = 0$$

$$P(a) = Q(a)(a - a) + R \quad x = a$$

$$P(a) = R$$

دویم مثال: که د $2x^3 - x^2 - 7$ پولینوم پر $(2 - x)$ ووبشل شي، پاتې به خو وي؟

حل:

$$P(2) = 2(2)^3 - (2)^2 - 7 = 16 - 4 - 7 = 5$$

$$R = 5$$

فعالیت

د پورتنی قضیپه مرسته یې پاتې (باقي ماندہ) پیدا کړئ.

- که $x^3 - x^2 - 226x + 1410$ پر $(x+17)$ ووبشل شي.

- که $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ پر $(x-4)$ ووبشل شي.

- که $x^3 + 18x^2 + 164x + 199$ پر $(x+8)$ ووبشل شي.

دریم مثال: که د $x - 9 + \frac{5x^2}{2}$ پولینوم پر $(x+9)$ ووبشل شي، د وپشن د عملیې له سرته رسولو خخه پرته وواياست چې خو پاتې کېږي؟

حل

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 9 \quad x + \frac{1}{2} = 0$$

$$= 5\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5-2-36}{4} = -\frac{33}{4} \quad x = -\frac{1}{2}$$

څلورم مثال: که د $11y^3 + 7y^2 - y - 11$ پولینوم پر $(2y+1)$ ووبشو، د وپشن د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 11 \quad 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{8}\right) + 7\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 11 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} - 11 = \frac{-5 + 7 + 2 - 44}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$

$$R = -10$$

د 4 مثال په پوښته کې د وپشن عملیه سرته ورسوئ او باقی ېپه لاس راوري.

پنځم مثال: که د $4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ پولینوم پر $(x + 4)$ ووبشل شي،

باقی ېپه پیداکړئ

حل:

$$\begin{aligned} P(-4) &= 4(-4)^4 + 12(-4)^3 - 13(-4)^2 - 33(-4) + 18 \\ &= 1024 - 768 - 208 + 132 + 18 = 1174 - 976 = 198 \end{aligned}$$

اوسم د وپشن عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r} 4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18 \\ \underline{- 4x^4 \pm 16x^3} \\ \hline - 4x^3 - 13x^2 \\ \underline{\mp 4x^3 \mp 16x^2} \\ \hline 3x^2 - 33x \\ \underline{\pm 3x^2 \pm 12x} \\ \hline - 45x + 18 \\ \underline{\mp 45x \mp 180} \\ \hline 198 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} x + 4 \\ \hline 4x^3 - 4x^2 + 3x - 45 \end{array} \right.$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $P(x-a)$ ووبشل شي، د وپشن د عملیې له سرته رسوولو پرته ېپه د باقی مانده (Remainder Theorem) په مرسته باقی پیداکولای شو چې باقی مانده (R) له (a) سره مساوی ده.

پونتنی

1. د باقی مانده قضیي (Remainder theorem) په مرسته یې باقی (باتې) پیدا کړئ.

$$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3) , \quad (6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$$

$$(6x^2 + 15) \div (4x + 9) , \quad (4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$$

2. د باقی مانده قضیي په مرسته ووایاست چې د k په کوم قيمت د

پولینوم پر $(x + 2)$ ووېشل شي، تر خو 44- باقی شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولینوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، تر خو 2 باقی شي؟

4. که چېږي $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولینوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقی 17 وي، د m قيمت به خو وي؟

د فکټور قضيې (The Factor Theorem)

$$(x^5 + 1) \div (x + 1)$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= [(-1)^5 + 1] \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

آيا $x - 1$ د $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ پولينوم يو فکټور دی؟

که د $P(x)$ پولينوم پر $(x - a)$ ووبشل شي او $P(a) = 0$ شي، نو $x - a$ ددي پولينوم يو فکټور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضيې په اساس $R = P(a)$ د $P(x)$ پولينوم پر $(x - a)$ ووبشل شي او د وېش حاصل(خارج قسمت) چې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x) = Q(x)(x - a) + R$ وي، نو:

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R$$

ليدل کېږي چې $P(x)$ د $(x - a)$ د پولينوم يو فکټور دی. او یا که $(x - a)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکټور وي، نو $P(a) = 0$ دی.

لومړۍ مثال: وبنياست چې $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28$ د $(x - 2)$ د پولينوم يو فکټور دی.

حل

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28 \quad x - 2 = 0$$

$$P(2) = 2^3 + 3(2)^2 + 4 \cdot 2 - 28 = 8 + 3(4) + 8 - 28 = 0 \quad x = 2$$

خرنګه چې $P(2) = 0$ يا $R = 0$ دی، نو $(x - 2)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکټور دی.

فعاليت

د وېش د عملې له سرته رسولو پرته، د فکټور د قضيې په مرسته وبنياست چې $x - 1$ د $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 15$ پولينوم يو فکټور دی.

دویم مثال: د فکټور د قضيې په مرسته وبنياست چې $(x - 2)$ د $P(x) = x^5 - 32$ پولينوم يو فکټور دی.

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$

$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

خرنگه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم يو فکتور دی.

دریم مثال: وبنیاست چې $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم يو فکتور دی.

$$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$$

خرنگه چې R يا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د $2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم يو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قيمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم يو فکتور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$

$$-2 - 2k = 0$$

$$-2k = 2$$

$$k = -1$$

د -1 لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x-1$ د $P(x)$ پولینوم يو فکتور دی.

فعاليت

د فکتور د قضيې په مرسته وبنیاست چې آيا د کينې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکتورونه دی او که نه؟

$$(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$$

$$(y+5) : (y^3 + 125)$$

$$(x + \frac{1}{2}) : (20x^3 + 7x + 6)$$

$$(x - \frac{1}{2}) : (x^3 - \frac{1}{8})$$

$$(x - 0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$$

$$(x + 2) : (x^5 + 32)$$

د فکتور د قضيې معکوس (Converse of Factor Theorem)

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم يو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد پولینومي معادلي يو جذر (Root) دی.

لومړۍ مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم يو فکتور وي، نو

وښیاست چې $P(2) = 0$ دی او $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ معادلې یو جذر دی.

حل: که $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، نو $(x - 2)$ ددې پولینوم یو فکټور دی $P(2) = 0$ دی.

$$P(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

دویم مثال: که $x^3 + 4x^2 + kx + 8 = 0$ د د -2 د معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3 + 4(-2)^2 + k(-2) + 8 = 0$$

$$-8 + 16 + k(-2) + 8 = 0$$

$$-2k = -8 + 8 - 16$$

$$k = 8$$

دریم مثال: وښیاست چې 3 د $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

حل:

$$(3)^3 - 6(3)^2 + 5(3) + 12 = 0$$

$$27 - 54 + 15 + 12 = 0$$

$$54 - 54 = 0$$

$$0 = 0$$

نو ليدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

وښیاست چې 2 د $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ معادلې یو جذر دی.

څلوروم مثال: د k د کوم قیمت لپاره 3 د $2x^4 - 6x^3 - 7x^2 + kx - 15 = 0$ معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4 - 6(3)^3 - 7(3)^2 + 3k - 15 = 2(81) - 6(27) - 7(9) + 3k - 15 = 0$$

$$162 - 162 - 63 + 3k - 15 = 0$$

$$3k = 15 + 63 + 162 - 162 = 78$$

$$3k = 78$$

$$k = 26$$

که $(x-a)$ د پولینوم يو فكتور وي، نو $P(x) = P(a) = 0$ دی او که $(x-a)$ پولینوم کې.
 د $P(x) = P(a) = 0$ شى نو $(x-a)$ د پولینوم يو فكتور دي.

پونتني

1 - د k د کوم قيمت لپاره $P(x) = 2x^4 - x^3 + kx^2 + kx - 12$ د $(x-2)$ د پولينوم يو فكتور دي؟

2 - آيا $(x+3)$ د پولينوم يو فكتور دي؟

3 - د فكتور د قصيبي په مرسته وبنياست چې $P(x) = x^3 + 8x^2 + 8x + 7$ د پولينوم يو فكتور دي، که نه؟

4 - د وېش د عملېي د سرته رسولو پرته وبنياست چې آيا $(y-7)$ د

$P(y) = y^4 + 2y^3 - 6y^2 - 14y - 7$ پولينوم يو فكتور دي که نه؟

5 - وبنياست چې آيا $P(x) = 2m^2 + 4m - 2$ د $(m + \frac{1}{2})$ پولينوم يو فكتور دي که نه؟

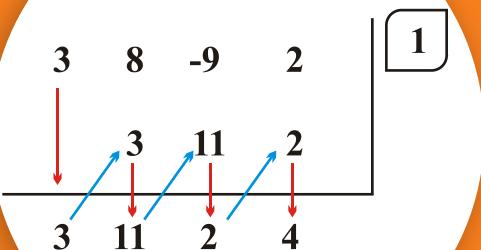
6 - د $x^3 + x^2 - 10x + 8$ پولينوم د فكتور د قصيبي به مرسته تجزيه کړي.

7 - که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ د پولينوم فكتورونه وي، د a او b قيمتونه پيدا کړي.

8 - د k ، د کوم قيمت لپاره $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 16x + k$ د $(x-5)$ د پولينوم يو فكتور دي؟

9 - د k د کوم قيمت لپاره $x^3 - 9x^2 + 14x + k = 0$ د (-1) د پولينومي معادلي يو جذر دي؟

ترکیبی و پش (Synthetic Division)



آيا د وپش عملیې له سرته رسولو پرته، د وپش حاصل او باقي پیدا کولای شي.
که د $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ پولینوم پر $(x - 2)$ ووپشل شي؟

د $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ، د وپسلو لپاره ترکیبی و پش (Horner's Method) يوه لنډه طریقه ده چې په عمومي دول د دې هدفونو لپاره تري کار اخیستل کېږي.

- 1 - د x د مختلفو قيمتونو لپاره د $P(x)$ پولینوم د قيمت پیدا کول.
- 2 - د $P(x) = 0$ معادلي د ناطق جذر د پیدا کولو لپاره.
- 3 - د الجبری افادو د تعزې لپاره.

لومړۍ مثال: که د $18x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 4$ پولینوم پر $(x + 4)$ باندي ووپشو د وپش د عملیې له سرته رسولو پرته د ترکیبی و پش (تقسیم) په مرسته يې د وپش حاصل او باقي مانده (Quotient) پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \text{لومړۍ کربنه} \\ 4 \end{array} & 12 & -13 & -33 & 18 \\
 \begin{array}{c} \text{دویمه کربنه} \\ -16 \end{array} & 16 & -12 & 180 \\
 \hline
 \begin{array}{c} \text{دریمه کربنه} \\ 4 \end{array} & -4 & 3 & -45 & 198
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{c} -4 \\ \hline x + 4 = 0 \\ x = -4 \end{array} \right.$$

چې د وپش حاصل (خارج قسمت) يې $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$ او پاتي يا باقي مانده يې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x) = (x + 4)(4x^3 - 4x^2 + 3x - 45) + 198$ پورتني عملیې په لاندې پراوونوکې بنوදلاي شو.
د لومړۍ کربنې عددونه د مقسوم ضربونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي چول ترتیب شوي دي.
1. د 4 عدد له لومړۍ کربنې خخه دریمه کربنې ته رابنکته شوي دي.

2. 4 په (4-) کې ضرب شوی دی چې (16-) کېږي او (16-) د عدد لاندې په دويمه کربنه کې ليکل شوی دی.
3. د 12 او (16-) د جمعې حاصل چې (4-) کېږي، په دريمه کربنه کې ليکو.
4. د (4-) عدد په (4-) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13-) لاندې یې په دويمه کربنه کې ليکو.
5. د 16 او (13-) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دريمه کربنه کې ليکل شوی دی.
6. د 3 او (4-) د ضرب حاصل چې (12-) کېږي، د (33-) لاندې په دويمه کربنه کې ليکل شوی دی.
7. د (33-) او (12-) د جمعې حاصل چې (45-) کېږي، په دريمه کربنه کې ليکو.
8. د (45-) او (4-) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دويمه کربنه ليکل شوی دی.
9. د 180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دريمه کربنه کې دی، باقی مانده دی او $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$.

$$Q(x) = 4x^3 - 4x^2 + 3x - 45 \quad R = 198$$

$$P(x) = (4x^3 - 4x^2 + 3x - 45)(x + 4) + 198$$

پاتې + د وېش حاصل X (مقسوم عليه)= مقسوم

فعاليت

د وېش عملېي د سرته رسولو په مرسته د پورتنې پونستې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دويم مثال: د ترکيبيي وېش او د وېش د عملېي د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2)$$

په ياد ولري کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوي د ضربوونو پر خاي صفر ليکو يا په بل عبارت پولينوم د مکمل پولينوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	-5	2	-3		
8	16	22	48			
					2	
4	8	11	24	45		

اوں د وېش عملیه سرتە رسوو:

$$\begin{array}{r}
 4x^4 & -5x^2 + 2x - 3 \\
 -4x^4 + 8x^3 & \\
 \hline
 8x^3 - 5x^2 & \\
 -8x^3 + 16x^2 & \\
 \hline
 11x^2 + 2x & \\
 -11x^2 + 22x & \\
 \hline
 24x - 3 & \\
 -24x + 48 & \\
 \hline
 45 &
 \end{array}
 \quad
 \left| \begin{array}{c} x - 2 \\ \hline 4x^3 + 8x^2 + 11x + 24 \end{array} \right.$$

د وېش حاصل $4x^3 + 8x^2 + 11x + 24$
او باقي (45) ده.

دریم مثال: $(x^5 - x^3 + 27x^2 - 28) \div (x + 3)$ د ترکيبيي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پیدا کړئ.

$$\begin{array}{r}
 x^5 - x^3 + 27x^2 - 28 = x^5 - 0 \cdot x^4 - x^3 + 27x^2 + 0 \cdot x - 28 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad -1 \quad 27 \quad 0 \quad -28 \\
 -3 \quad 9 \quad -24 \quad -9 \quad 27 \\
 \hline
 1 \quad -3 \quad 8 \quad 3 \quad -9 \quad -1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{حل: } x + 3 = 0 \\
 x = -3
 \end{array}$$

د وېش حاصل(خارج قسمت) يې $x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 3x - 9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) خخه دي.

څلورم مثال: د $(2t^3 - 7t^2 - 2t + 14) \div (2t - 3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې(باقي) پیدا کړئ.
حل:

$$\begin{array}{r}
 2 \quad -7 \quad -2 \quad 14 \\
 3 \quad -6 \quad -12 \\
 \hline
 2 \quad -4 \quad -8 \quad 2
 \end{array}
 \quad
 \left| \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ \hline 2t - 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2t - 3}{2} &= t - \frac{3}{2} \\
 t - \frac{3}{2} &= 0 \\
 t &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

نو $8 - 4t^2 - 2t$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل $(4 - 2t - 4t^2)$ دی. (مقسوم او
مقسوم عليه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکيبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient)

او پاتې يې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3 - 2V^2 + 5) \div (V - 5)$$

$$\begin{array}{r} 4 & -2 & 0 & 5 \\ & 20 & 90 & 450 \\ \hline 4 & 18 & 90 & 455 \end{array}$$

$$\text{نو } R = 455 \text{ او } Q(x) = 4v^2 + 18v + 90 \text{ ده.}$$

فعاليت

د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.
 $(x^5 + 6x^3 - 5x^4 + 5x - 15) \div (x - 3)$

که د $P(x)$ پولينوم پر ($x-a$) باندي ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولينوم په شکل ترتیبو او د
ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش د عملېي له سره رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته
راورلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم عليه له درجه خخه کمه ده.

پونستې

1- د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$$(10x^2 + 2x + 1) \div (x + 1) \qquad \qquad \qquad (2x^3 - 7x^2 - 2x + 12) \div (2x - 3)$$

$$(5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4) \qquad \qquad \qquad (6x^2 + 15) \div (4x + 9)$$

$$(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$$

2- د ترکيبي وېش په مرسته يې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$$(y^5 - 17y^3 - 9) \div (y - 3), \qquad (4x^3 - 2x^2 + 5) \div (x - 5)$$

$$(x^3 + 8x^2 + 8x + 7) \div (x + 7)$$

د ترکيبيي و بش په مرسته د پولينوم د فكتور او د پولينوم د قيمت پيدا کول

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 - 5 - 6 \\
 - 1 - 1 + 6 \\
 \hline
 1 \quad 1 - 6 \quad 0
 \end{array}$$

آيا د ترکيبيي و بش په مرسته و بلاني شئ چې
د $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ د $(x+3)$
پولينوم يو فكتور دی؟

لوړۍ مثال: د ترکيبيي و بش په مرسته و بنیاست چې $(x-1)$ د
پولينوم يو فكتور دی.
 $P(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\
 \hline
 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 \hline
 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

خرنګه چې $R = 0$ دی، نو $(x-1)$ د ددې پولينوم يو فكتور دی. يا دا چې:

$$2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(2x^3 + x^2 + 1)$$

يا د باقي مانده قضيې په مرسته:

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 2 - 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

دویم مثال: آيا د $x^3 + 3x^2 - 150$ د $(x+10)$ پولينوم يو فكتور دی او که نه؟

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 3 \quad 0 \quad -150 \\
 \hline
 -10 \quad 70 \quad -700 \\
 \hline
 1 \quad -7 \quad 70 \quad -850
 \end{array}$$

خرنګه چې $R = -850$ دی ($R \neq 0$)، نو $(x+10)$ د $x^3 + 3x^2 - 150$ پولينوم فكتور نه دی.

درېيم مثال: که $x = 2$ د لپاره د ترکيبيي و بش په
مرسته ددې پولينوم قيمت پيدا کړي.

حل: لومرې پولینوم په نزولي دول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{r} 3 & -12 & 5 & 25 \\ & 6 & -12 & -14 \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبی وپش په مرسته $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قيمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبی وپش په مرسته وبنیاست چې $(r - 4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$

$$r = 4$$

$$\begin{array}{r} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 \\ & 4 & 16 & 64 & 256 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{array} \quad | \quad 4$$

$$Q(r) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$

$$R = 0$$

نو $(r - 4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

د ترکیبی وپش په مرسته د یوې معادلې د جذرونه پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $0 = x^3 + 4x^2 + x - 6$ یو جذر وي، د ترکیبی وپش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{r} 1 & 4 & 1 & -6 \\ & 1 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 \end{array} \quad | \quad 1$$

نود و پش حاصل يې $x^2 + 5x + 6$ دی.

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x = -3 \quad x = -2$$

د دې معادلي دوه نور جذرونه -2 او -3 دی.

د ترکيبي و بش په مرسته د پولينوم فكتور، د پولينوم قيمت او د پولينومي معادلي جذر پيدا کولای شو، که چېري د $P(x)$ پولينوم په $(x - a)$ و بشواو ($R = 0$) وي، نو $(x - a)$ د دې پولينوم يو فكتور دی او د $P(x) = 0$ عدد د a پولينومي معادلي يو جذر دی.

پونتنې

- 1 د ترکيبي و بش په مرسته و بنیاست چې $\frac{1}{2}(x + 1)$ د $20x^3 + 7x + 6$ پولينوم يو فكتور دی او $(x + 1)^2$ د $x^4 - 2x^2 + x + 2$ پولينوم يو فكتور دی.
- 2 آيا $(x - 0,1)$ د $10x^3 - 11x^2 + 1$ د پولينوم يو فكتور دی؟ ولې؟
- 3 د ترکيبي و بش په مرسته د $y^3 - 6y^2 + y - 6$ پولينوم قيمت د $y = 6$ لپاره پيدا کړئ.
- 4 که (1) د $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ د $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ معادلي يو جذر وي، د ترکيبي و بش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.
- 5 که د (-2) عدد د $x^3 + 4x^2 + kx + 8 = 0$ معادلي يو جذر وي، د ترکيبي و بش په مرسته د k قيمت پيدا کړئ؟

د خپرکي لنديز

- الجبری افادي په درې جوله دي (ناطقه الجبری افاده، غير ناطقه الجبری افاده، پولینومي الجبری افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2$ مشابه حدونه دي.
- پولینوم هغه يو یا خو حده الجبری افاده د چې د حروفه توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د یوه پولینوم درجه چې له یوه توري (متحول) خخه جور شوي وي، د هغه توري له لور توان خخه عبارت ده او که له یوه خخه د زیاتو تورو خخه جور شوي وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولینوم درجه ده.
- د یوه حد عددی فکتور (Numerical Factor) ته ضریب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضریب دي.
- ټول ثابت عددونه پولینومونه دي چې ثابت پولینومونه نومېږي او درجې يې صفر ده، د صفری پولینوم درجه تعريف شوي نه ده.
- هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نوم یادېږي.
- د متحول په راکړۍ شوي قيمت کې د یوه پولینوم قيمت هغه عدد دي چې په پولینوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو خخه په لاس راخي.
- هغه پولینومونه چې د متحول له لور توان خخه تر ثابت عدد پوري، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولینوم او که یو یا خو حدونه، ونه لري، د ناقص پولینوم په نوم یادېږي.
- که د یوه پولینوم متحول له تېيت توان خخه تر لور توان پوري ترتیب شي، منظم صعودي او که له لور توان خخه تر تېيت توان پوري ترتیب شي، منظم نزولي پولینوم نومېږي.
- د پولینوم د جمعې په عملیه کې مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي، د تفريقي.

په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکوو او نوره عملیه د جمعې د عملیه په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعی معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي).

- د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزيعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.

- د ضرب په عملیه کې کولاۍ شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.

- په همدي ډول کولاۍ شو، د وېش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.

- که د $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ووېشود باقي مانده قضيې په اساس پاتې(باقي) له $P(a)$ سره مساوی ده.

- که د $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ووېشو او باقى صفر شي، نو $(x - a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

- د فکتور د معکوسې قضيې په اساس که $M(x - c) = 0$ پولینوم یو فکتور وي، نو $M(x) = 0$ پولینوم یو جذر دی.

- د ترکيبي وېش په مرسته کولاۍ شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقى لاس ته راپو او هم د ترکيبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قيمت کې د $P(x)$ د پولینوم قيمت پیدا کولاۍ شو.

- د ترکيبي وېش په مرسته $P(x) = 0$ د پولینوم یو معادلي جذرونه پیدا کولاۍ شو.
- د باقى مانده قضيې په مرسته الجبری افاده هم تجزیه کولاۍ شو.

د خپرکي پوبستني:

1 - د k قيمت په داسې حال کې پيداکړئ چې:

$$P(x) = x^3 + kx + 125 \quad \text{پولينوم يو فكتور وي.}$$

$$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k \quad \text{پولينوم يو فكتور وي.}$$

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - x + k \quad \text{پولينوم يو فكتور وي.}$$

2 - د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پيداکړئ.

$$(x^5 + 4x^4 + x^2 - 3x - 28) \div (x + 4), \quad (5x^4 - 6x^2 + 3x - 4) \div (x + 4)$$

$$(30x^3 - 20x^2 - 100x + 1000) \div (x - 10), \quad (10x^2 - 31x + 24) \div (x - \frac{3}{2})$$

3 - د فكتور د قضيې په مرسته وبنياست چې $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ د $(x - 1)$ د پولينوم يو فكتور دي.

4 - د فكتور د قضيې په مرسته وبنياست چې $P(x) = x^3 - \frac{1}{8}(x - \frac{1}{2})$ پولينوم يو فكتور دی.

5 - د ترکيبي وېش په مرسته د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x) = 5x^2 + x - 9$ پولينوم قيمت پيدا کړئ.

6 - د ترکيبي وېش په مرسته د $x = 3$ لپاره د $k(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ پولينوم قيمت پيداکړئ.

7 - د ترکيبي وېش په مرسته وبنياست چې د 3 عدد د $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ پولينومي معادلي يو حل (جذر) دی.

8 - د فكتور د قضيې په مرسته وبنياست چې د 1 او 2 عددونه د $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ معادلي حلونه (جذرونه) دی.

9 - د ترکيبي وېش په مرسته د k قيمت پيداکړئ چې که $(x + 3)$ د $P(x) = 3x^3 + kx^2 - 22x + 24$ پولينوم يو فكتور وي.

10 - د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او باقي پيداکړئ.

$$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2) \quad (x^3 - x^2 - 14x + 11) \div (x - 4)$$

$$(7x^4 + 41x^2 - 6) \div (x + 6) \quad (5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$$

11- د او C قيمتونه په داسي حال کې پيدا کړئ چې که د

پولينوم پر $x^2 - 3x + 2$ وو بشو، باقي صفر شي.

12- د k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4 که د

پولينوم پر $(x^2 + 2x - 1)$ وو بشو او باقي صفر شي.

$$L = 16 + b(x-1) - 3b(x-1)^2 \quad \text{او} \quad k = 3a(x-1)^2 - a(x-1) - 4 - 13$$

Kb + La پيدا کړئ.

14- د x په کوم قيمت د P(x) = 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5 پولينوم پر

پوره و پشل کېږي؟

15- د P د کوم قيمت لپاره د K(x) = 3x^3 - 7x^2 - 9x + P پولينوم پر (x-13) پوره

د و بشلو و پر دی؟

16- که د 1- د کوم قيمت لپاره د P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 پولينوم پر (2x+1) وو بشل شي، د و بش د عملې

د سرته رسولو پرته و بلاقې شي چې پاتې (باقي مانده) به خومره وي؟

a) -3	b) $-\frac{3}{2}$	c) 3	d) $\frac{7}{2}$
-------	-------------------	------	------------------

17- د m قيمت به خو وي، که د P(x) = 5x^2 + 6x - 7 پولينوم پر (x+m) وو بشل شي

تر خو باقي مانده (1) شي؟

a) 2	b) $-\frac{4}{5}$	c) -4	d) a او b سم دي
------	-------------------	-------	-----------------

18- که د P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 8 پولينوم، پر (x+3) وو بشل شي د و بش د عملې

له سرته رسولو پرته وو اي است چې باقي خومره ده؟

a) صفر	b) 13	c) -23	d) 7
--------	-------	--------	------

19- که چېږي $y = -3$ او $z = 2$ وي، د لاندي الجبری افادو قيمت پيدا کړئ.

$$a : x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2 \quad b : \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$$

20 - د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبی وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$$

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$$

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$$

$$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$$

21 - د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبی وېش په مرسته بې نور جذرونه پیدا کړئ.

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{يو جذر یې (3) دی.}$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0 \quad \text{يو جذر یې (-1) دی.}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{يو جذر یې (-1) دی.}$$

$$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0 \quad \text{يو جذر یې (-1) دی.}$$

$$P(x) = 0 \quad \text{وي، د دې پولینوم درجه خو ده؟}$$

تعريف شوې نه دی (d) صفر (c)

23 - هغه مستطيل له مساحت خخه چې بعدونه بې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطيل

مساحت تفرقیکړئ چې بعدونه بې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

$$\text{که } c = 12, b = 5, a = 13 \quad \text{او } A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad - 24$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{وي، د } A \text{ قیمت پیدا کړئ.}$$

25 - که $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوی دی په:

$$a) 1 \quad b) 3 \quad c) -3 \quad d) -1$$

$$(a \div \frac{a+1}{a-1}) (a - \frac{2}{a-1}) \quad \text{دادې حاصل مساوی دی په:}$$

- a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

: د ضرب حاصل مساوی دی په $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y)$ د - 27

- a) $x^2 - y^2$ b) $x^2 + y^2$ c) $2x^2 - y$ d) $x - y$

28 - لاندې پولینومونه په نزولي دول (Descending Order) ترتیب او هم وویاست چې درجې بې خودی ؟

- a) $-5x^2 + 3x^5 + 9$ b) $-x^2 + xy^2 z^3 - x^5$ c) 3

$Q(x) = x^2 + 3x - 5$ د - 29
په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوی دی، په:

- a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

$Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$ او $P(x) = x^2 - 2x + 3$ که - 30
وې، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$$P(x) - Q(x) \quad P(0) + Q(0) \quad P(1) - Q(-1)$$

$$P(x) - P(x) \quad [P(x) + Q(x)] + p(x)$$

- لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$$4x^2y - 3xy^2 + x^3 + y^3 \quad 4xy^3 - 3x^3y + 2x^2y^2 + x^4 + y^4$$

32 - په لاندې الجبری افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبری افادې او غیر ناطقې الجبری افادې په نښه کړئ.

$$13, \quad \sqrt{2}x, \quad 0$$

$$\frac{3x^2}{2}, \quad \sqrt{x} - \frac{1}{x}, \quad y^2 - \frac{1}{y^2}$$

33 - د دوو الجبری افادو د ضرب حاصل $(1 + 2x + 3x^2) + (3x - 5 - 2x^2) + (-x^2 - 5x + 4)$ د -

په:

- a) 1 b) صفر c) -1 d) 2

34 - د دوو الجبری افادو د ضرب حاصل $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ دی. که یوه افاده بې
وې، بله افاده پیدا کړئ. $(a + b + c)$

35 - د وېش حاصل يې پیدا کړي.

$$(12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5) \div (3x^2 - 1) \quad (a^3 + b^3) \div (a + b)$$

$$(4x^3 - 10x^2 + 12x + 6) \div (2x + 1) \quad (a^5 - b^5) \div (a - b)$$

$$\frac{x^{a-2}}{x} \quad \frac{-m^a}{m^b}$$

36 - ضرب يې کړي.

$$(a^{2x} - 2)(a^{2x} - 2) \quad \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

$$(e^x + 1)(e^x - 1) \quad (m^2 - 2n^2)(2m^2 - n^2)$$

$$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2) \quad (2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$$

37 - لومړی لاندې افادي ساده او بیا يې جمع کړي.

$$(a - 1) + 1 - (a - 1) - 3 \quad -(10mn - m) - (m^2 + m) + m^2$$

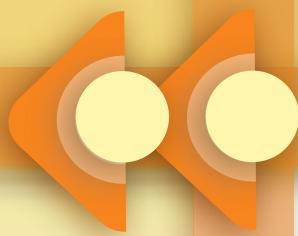
$$(y^2 - 1) + (y^2 - 1) \quad [-4(a - b) - 5] + [(2a + b) - (a - b)]$$

$$10[-\{-(x^2 - 1) + 5\} - x(x - 2)] \quad 10(x + 1) - (x + 1) - 3(x + 2)$$

$$mn - 4 + mn - 5$$

38 - د کومې لاندې راکړل شوې یو حده درجه صفر ده؟

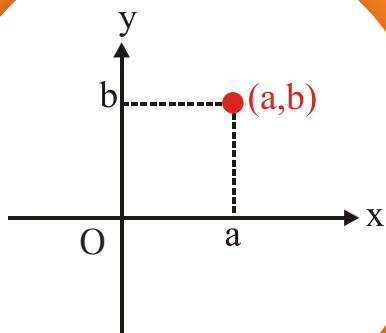
a) x b) $\sqrt{2} x$ c) $\sqrt{2}$



دویں چپر کی رابطہ

$$\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \\ S \end{matrix} \times \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \\ S \end{matrix} = \begin{matrix} (S_1, S_2) \\ (S_2, S_2) \\ \vdots \\ (S_n, S_n) \\ R \end{matrix}$$

مرتبی جوړي او کارتیزیني مستوي



- د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبی جوړي سره مساوی کېدای شي؟
- آیا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبی جوړي سره مساوی ده؟

که a او b د یوه سټ او یا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لوړنۍ عنصر او b ته دویم عنصر وولیو، نو (a,b) ته مرتبه جوړه وايی او (b,a) هم یو مرتبه جوړه ده، خو (a,b) \neq (b,a) د (a,b) له مرتبی جوړي سره مساوی کېدای شي چې $a=c$ او $b=d$ وي.

لومړۍ مثال: که $(1,3) = (x-2, y+1)$ وي د x او y قيمتونه پیدا کړئ.
حل

$$y + 1 = 3 \quad x - 2 = 1$$

$$\boxed{y = 2} \quad \boxed{x = 3}$$

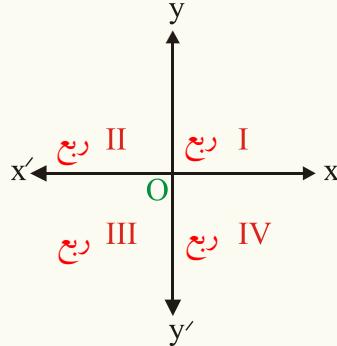
فعاليت

که $(a+1, 2b-3) = (0, -1)$ وي، د a او b قيمتونه پیدا کړئ.

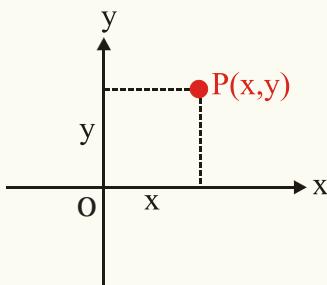
کارتیزیني مستوي (Cartesian Plane)

دوه، عمود او افقی خطونه رسم کړئ او د تقاطع تکي ته یې مبدأ (Origin) وايی، افقی خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايی.
د X محوریه $X'OX$ او د Y محور په $Y'OY'$ سره وښي، هغه مستوي چې دا محوروونه په کې واقع دي د کارتیزیني مستوي په نامه يادېږي.
دواړه محوروونه مستوي په خلورو برخو و بشي چې هرې برخې ته یې ربع (ناحیه) (Quadrant)

وایي، د ساعت د عقربی د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتیب سره لومړنۍ دویمه، دریمه او خلورمه ربع ده، لکه: خنگه چې په شکل کې لیدل کېږي.

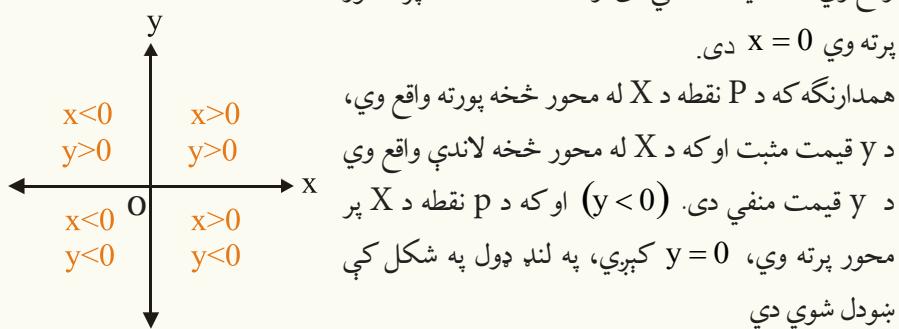


په دې مستوی کې د P نقطې موقعیت د (X, Y) د حقيقی عددونو د مرتبې جوري په واسط داسې بنوبل کېږي چې د P د نقطې افقی فاصله د X له محور خخه X او د P د نقطې عمودی فاصله د X له محور خخه y ده.



که د P نقطه د Y د محوربني خواته واقع وي، د X قيمت مثبت ده او که د Y د محور کيني خواته واقع وي، د X قيمت منفي ده او که د P نقطه د Y پر محور

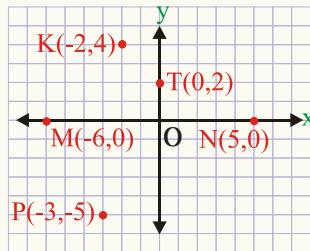
پرته وي $x = 0$ ده.



چې x او y ته کارتیزیني مختصات (Cartesian Coordinates) وايي چې په $P(x,y)$ کې لوړنۍ عنصر X ته فاصله (abscissa) او دویم عنصر y ته ترتیب (ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، خرګنده د چې د حقيقی عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې يوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقيقی عددونو يوه جوړه شته دی.

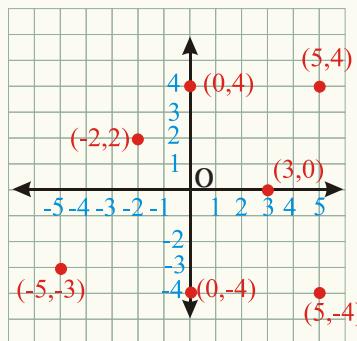
دویم مثال: د $M(-6,0)$, $N(5,0)$, $T(0,2)$, $K(-2,4)$, $P(-3,-5)$ نقطې د وضعیه

کمیاتو په مستوي کې وتاکی.



دریم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې بشودل شوي دي، اړوندې مرتبه جوړه

ولیکي.



فعاليت

د $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(-1,2)$, $(2,-1)$ د نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وتاکی.

پونتني

1 - که د P د نقطي فاصله مثبت او ترتيب يې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د يوه شکل خلور رأسونه $D(3,-3)$, $C(-3,-3)$, $B(-3,3)$, $A(3,3)$ وي، داکوم چول هندسي شکل دي؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوی کې هغه مثلث چې رأسونه يې $B(0,2)$, $A(2,0)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او وواياست چې د اکوم چول مثلث دي؟

4 - د $P_3(1,5)$, $P_2(-3,2)$, $P_1(2,-3)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وتاکئ.

5 - وواياست چې لاندې مرتبې جوري په کومه ربع کې واقع دي؟

$$(1,5) \quad , \quad (-5,1)$$

$$(-4,-6) \quad , \quad (4,-5)$$

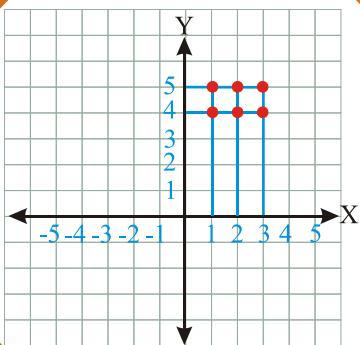
$$\left(-\frac{1}{2}, -2\right) \quad , \quad \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$\left(2\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad , \quad (2,0)$$

$$(0,-1)$$

د کارتیزني ضرب حاصل او گراف يې

آيا په مخامنځ شکل کې $A \times B$ بنو دلای
شي؟



فعاليت

که A او B دوه غير خالي ستونه وي، $(A \times B)$ په لاندي چول تعريف شوي دي:

$A \times B$ پيدا کړئ.

$A \times B$ د عناصر دو شمېر پيدا کړئ.

آيا $A \times B = B \times A$ دی؟

آيا $A \times A$ او $B \times B$ پيدا کولای شي؟

که A او B دوه غير خالي ستونه وي، $(A \times B)$ په لاندي چول تعريف شوي دي:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

په دي معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A \times B)$ داسي یوست دی چې عناصر يې د (x, y) د هغه مرتبو جو روست دی چې x د سټ او y د سټ عنصروي، که $A \neq B$ وي نو:
 $A \times B \neq B \times A$ دی که د A د سټ د عناصر دو شمېر m او د B د سټ د عناصر دو شمېر n وي، د $A \times B$ د عناصر دو شمېر له $(m \times n)$ خخه عبارت دی.

لومړۍ مثال: که $A = \{0, 1, 2\}$ او $B = \{3, 4\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پيدا کړئ.
حل

$$A \times B = \{0, 1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B \times A = \{3, 4\} \times \{0, 1, 2\} = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$$

$$A \times A = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$$



که $A = \{-4, -1, 0\}$ او $B = \{1, 4\}$ او $A \times A, A \times B$ وی $B \times B$ پیدا کرئ.

دوييم مثال: که $L = \{0\}$ او $IN \times L = \{1, 2, 3, \dots\}$ وی، نو $IN \times L$ پیدا کرئ.
حل:

$$IN \times L = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), \dots\} = \{(x, 0) / x \in IN\}$$

درېيم مثال: که $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ او $IN = \{1, 2, 3, \dots\}$ وی $W \times N$ پیدا کرئ.
حل:

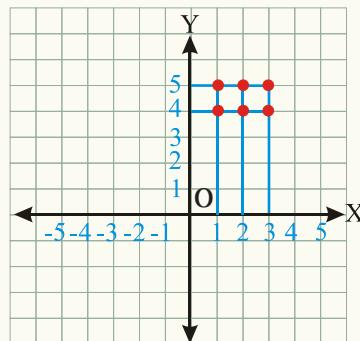
$$\begin{aligned} W \times IN &= \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, \} \\ &= \{(x, y) / x \in W \wedge y \in IN\} \end{aligned}$$

د کارتیزني حاصل ضرب ګراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوی کې هم وبنو دلای شو.

څلورم مثال: که $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{4, 5\}$ وی $A \times B$ پیدا کرئ او د وضعیه کمیاتو په مستوی کې یې وبنیاست.
حل:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

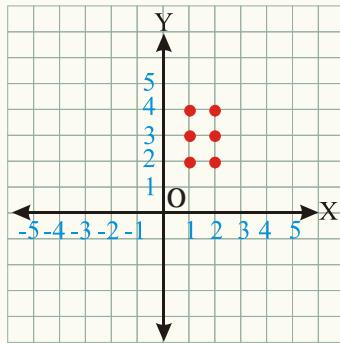


د X پر محور د $1, 2, 3$ عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه تاکو له $2, 1$ او 3 خخه عمود خطونه او له 4 او 5 خخه افقی خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A \times B$ مرتبې جوړې بنکاره کوي.

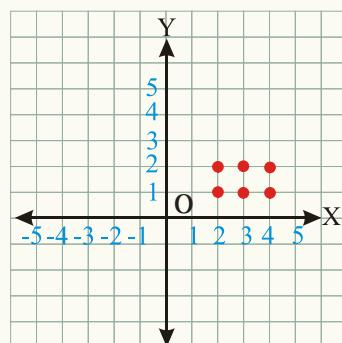
پنجم مثال: که $B \times A$ و $A \times B$ پیدا کری او په شکل کې بې وبنیاست.

$$A \times B = \{1,2\} \times \{2,3,4\} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$$

$$B \times A = \{2,3,4\} \times \{1,2\} = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$$



$A \times B$

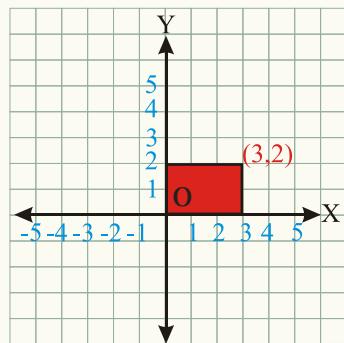


$B \times A$

شېړم مثال: که $A = \{x / x \in \text{IR}, 0 \leq x \leq 3\} = [0,3]$ او $B = \{y / y \in \text{IR}, 0 \leq y \leq 2\} = [0,2]$ په شکل کې بې وبنیاست.

حل

$$A \times B = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$



فعالیت

که چېږي $A = \{1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وی $A \times B$ پیدا او په شکل کې بې وبنیاست.

پوښتني

که: 1

i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1,3\}$

ii) $B = \{2,3\}$

$A = \{-1,1\}$

وی $A \times B$ پیدا او په شکل کې يې وبنیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د سټونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې يې وبنیاست.

که 3 - $A \times A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیداکړئ.

که 4 - $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ او $A \times A, B \times A, A \times B$ پیداکړئ.

رابطه (Relation)



عطالله د عزت الله ورور دی
(عطا الله عزت الله)
ورورولي هم يوه رابطه ده.

يوسيت چې د شيانو او مفهومونو له مرتبو جورو څخه جوړ شوي وي، له يوې رابطي څخه عبارت دی. ياكه A او B دوو غير خالي ستونه (non empty sets) وي، نو د $A \times B$ هر فرعی سته له A څخه په B کې يوه رابطه ده، که $a \in R(b)$ وي، ويل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل لیکل کېږي.

که له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R \subset A \times B$ ده او که $R \subseteq A \times A$ یو فرعی سته وي، نو R په A کې يوه رابطه ده.

لومړۍ مثال: که $A = \{x, y\}$ او $B = \{(1,2), (2,1)\}$ وي، $A \times B$ پیدا کړئ، او له A څخه په B کې خلور رابطي ولیکړي.

حل

$$A \times B = \{(x,1), (x,2), (y,1), (y,2)\}$$

$$R_1 = \{(x,1), (x,2)\}$$

$$R_2 = \{(y,1)\}$$

$$R_3 = \{(y,2)\}$$

$$R_4 = \{(x,1), (y,1)\}$$

چې د $A \times B$ د عناصر و شمېر خلور او د $B \times A$ د ټولو فرعی سټونو شمېر $= 16^2 = 256$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطه شمېر 16 دی.

دویم مثال: که $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 19\}$ د چې د A د سټ د عناصر و شمېر 10 دی او $\{2, 4, 6\}$ وي چې د B د عناصر و شمېر (3) دی، د $A \times B$ د عناصر و شمېر (بولې مرتبې جوړې)

$10 \times 3 = 30$ دی او له A خخه په B کې د تولو رابطو شمېر³⁰ 2 دی.
 پام مووي چې: \emptyset او $A \times B$ هم په فرعی ستونو کې شامل دی.
دریم مثال: که $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{a, b\}$ وي له A خخه په B کې (3) رابطې ولیکي.
حل:
 $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

درې رابطې عبارت دی له:

$$R_1 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, a), (3, b)\}$$

$$R_2 = \{(1, b), (2, a), (3, a), (3, b)\}$$

$$R_3 = \{(2, a), (2, b), (3, a)\}$$

فعاليت

که $\{x, y) / x + y = 5\}$ د R عناصر ولیکي.
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ په R کې يوه رابطه وي، د

څلورم مثال: که $\{x, y) / x - y = 2\}$ د R عناصر ولیکي.
 په $A = \{1, 2, 3, 4\}$ په R کې يوه رابطه وي، د
حل: $R = \{(3, 1), (4, 2)\}$ ده.

د رابطې د تعريف ساحه (Domain) او **د قيمتونو ساحه** (Range) یې:
 پوهېړو چې که R له A خخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R \subseteq A \times B$ ده، په دې معنا چې R يو سې دی چې عناصرې د (x, y) مرتبې جوړې دی چې $x \in A$ او $y \in B$ ده.
 د R د تعريف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دی چې په Dom_R سره بنودل کېږي. همدارنګه د R د قيمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمي عناصر دی، په $Range_R$ سره بنودل کېږي.

لومړۍ مثال: که $A = \{1, 2\}$ او $B = \{x, y\}$ وي او R له A خخه په B کې يوه رابطه وي، لومړۍ د دې رابطې عناصر ولیکي، بیا درابطې د تعريف ساحه (Dom_R) او د قيمتونو ساحه ($Range_R$) یې ولیکي.

حل

$$R = \{(1,x), (2,x), (1,y), (2,y)\}$$

$$\text{Dom}_R = \{1,2\} \quad \text{Range}_R = \{x,y\}$$

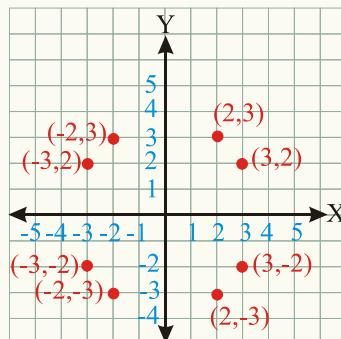
دویم مثال: که د $A = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $R = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 13\}$ په سټ کې.

تعريف شوي وي، لمړۍ د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکي، (Range_R) او (Dom_R) پیدا کړئ او بیا یې ګراف رسم کړئ.

$$R = \{(-3,-2), (-3,2), (-2,-3), (-2,3), (2,-3), (2,3), (3,-2), (3,2)\}$$

$$\text{Dom}_R = \{-3, -2, 2, 3\}$$

$$\text{Range}_R = \{-3, -2, 2, 3\}$$



فعاليت

که $R = \{(x,y) / y = 2x\}$ وي او د R د تعريف ناحيې $\{0, 4, 8\}$ وي، د R د قيمتونو ناحيې معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A خخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره بنودل کېږي او له R^{-1} خخه عبارت ده:

$$R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$$

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$$

د R د تعريف ساحه د R^{-1} د قيمتونو ساحه او د R^{-1} د تعريف ساحه د R د قيمتونو له ساحې خخه عبارت ده.

مثال: که $\{(1,2)(2,3)(3,4)\} = R$ د طبیعی عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه يا R^{-1} پیدا کړئ.

$$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$$

معادله رابطه (Equivalent Relation) د R رابطه د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده، که درې لاندنې خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property) د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x, x) \in R$ په R کې شامله وي، نو $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$ يا

2- تناظری خاصیت (Symmetric Property) د $(x, y) \in R$ په R کې شامله وي، نو

$\forall (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ کې شامله وي يا: (y, x)

3- انتقالی خاصیت (Transitive Property) د $(x, y) \in R$ او $(y, z) \in R$ که $(x, z) \in R$ او هم

وي په نتیجه کې (X, Z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي يا:
 $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقی عددونو په سټ کې يوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقی عددونو کې د هر $X = X$ لپاره $= 5$ دی، $5 = 5$ (انعکاسي خاصیت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که $x = y$ وي، نو $y = x$ ده (تناظری خاصیت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او $y = z$ وي په نتیجه کې $x = z$ دی (انتقالی خاصیت)

پونسني

-1 که $B = \{0, 4, 6\}$ $\square A = \{1, 2\}$ وي.

له A خخه په B کې درې رابطي وليکي.

له B خخه په A کې خلور رابطي وليکي.

په A کې خلور رابطي وليکي.

-2 که $A = \{1, 2, 3, 4\}$ او $B = \{1, 3, 5\}$ وي او $A \subseteq B$ ، له A خخه په B کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکي.

-3 که $R = \{(x, y) | y + 1 = 2x^2\}$ د طبیعی عددونو په سټ کې يوه رابطه وي او د تعريف ساحه

ېږول طبیعی عددونو وي، د قيمتوونو ساحه (Range) ېږیدا کړئ.

دڅرکي لنډيز

- (a,b) : چې د لیکلوا ترتیب په کې اهمیت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لوړنۍ مختصه او b ته دویمه مختصه ولیي، په عمومي ډول $(a,b) \neq (b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوري په داسې حال کې سره مساوی دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.

د کارتیزیني ضرب حاصل: د A او B دستونو کارتیزیني ضرب چې په $A \times B$ سره بنودل کېږي په دې ډول تعريف شوي دي: $A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$

- که د A سټ د عناصر د شمېر په m او د B د سټ د عناصر د شمېر په n سره وبنایو، د $A \times B$ د عناصر د شمېر $m \times n$ دي.

• کولای شوچې د A او B، دستونو ضرب $(A \times B)$ د وضعیه کمیاتو په مستوی کې وبنایو.

د رابطه: د $A \times B$ هر فرعی سټ له A خخه په B کې د R یوه رابطه ده.

او که $R \subset A \times A$ او $R \subset A \times B$ په A کې یوه رابطه ده.
 $(x, y) \in R \Leftrightarrow x R y$

که د A سټ د عناصر د شمېر په n سره وبنایو، د A د فرعی سټونو شمېر 2^n دي.

که د A سټ د عناصر د شمېر په m او د B د سټ د عناصر د شمېر په n سره وبنایو له A خخه په B کې د رابطه شمېر 2^{mn} دي

که R له A خخه په B کې یوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومرنیو عناصر د سټ او د قیمتونو ساحه ($Range_R$) یې د مرتبو جوړو د دویمه عناصر د سټ دی.

د معکوسه رابطه: که R له A خخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره بنودل کېږي چې:

$$R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$$

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R د قیمتونو له ساحې سره او د R^{-1} د قیمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوی ده.

د معادله رابطه: R د په سټ کې یوه معادله رابطه ده که چېږي لاندې درې خاصیتونه ولري.

1- انعکاسي خاصیت. 2- تناظري خاصیت. 3- انتقالی خاصیت.

دڅرکې پوښتې

-1- که $A = \{1, 3, 5\}$ او $B = \{2, 4, 6\}$ وي $A \times A, A \times B$ او $B \times A, B \times B$ پیدا کړي.

-2- که $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{0, 1\}$ وي $A \times B$ په شکل کې وسیاست.

-3- که $(x - 2y, 2x + y) = (3, 1)$ وي د y او x قيمتونه پیدا کړي.

-4- په R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

-5- که $A = \{a, b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکي.

-6- که د $R = \{(x, y) | y = x^2\}$ رابطه د حقيقی عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې ګراف رسم کړي.

-7- که $R = \{(x, y) | y^2 = x\}$ رابطه د حقيقی عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې ګراف رسم کړي.

-8- که $R = \{(1, -1), (2, -2)(3, -3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قيمتونو ساحې وټاکي.

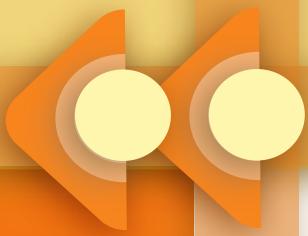
-9- که $R = \{(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قيمتونو ساحې وټاکي.

-10- که $A = \{-1, 0\}$ او $B = \{3, 6, 12\}$ وي په A کې د رابطه شمېر او له A خخه په B کې درابطو شمېر پیدا کړي.

درابطو شمېر پیدا کړي.

-11- که د $(5, 3a - 4b)$ او $(4a + 1, 2b + a)$ دوہ مرتبې جوړي سره مساوی وي د a او b قيمتونه پیدا کړي.

-12- که $A = \{a, b, c\}$ او $B = \{x, y\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پیدا کړي.



دریم چپرکی

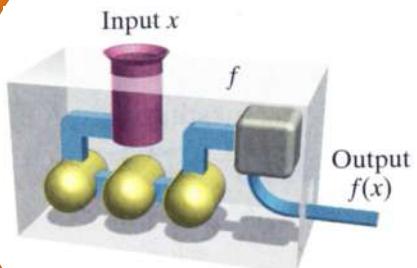
تابع

$x=0, 1, 2, 3$

Function:

$$y = x^3$$

$y=0, 1, 8, 27$



آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جورو هر سټ یوه تابع ده ؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ ؟

د لومنې خل لپاره د تابع مفهوم د یوه الماني ریاضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1646–1716) له خوا معافي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده د چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړکه ورکوي، د تابع د مفهوم د بنه پوهیللو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونسی.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (X) پوري اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پوري اړکه ورکوي له $A = x^2$ خخه عبارت ده.

	x	د مربع ضلع
د مربع مساحت	1 A	1 4 9 16 25 ...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نږۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پوري اړه لري، لکه: خرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبې ډول د نږۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب بنودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
(p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

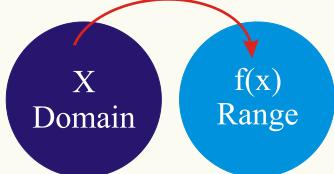
- لیدل کېري چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$
- 3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري $(A = \pi r^2)$
- 4 - د کېي حجم (V) د کېي په شعاع (r) پورې اړه لري چې د معادلې په واسطه بنودل کېري.

له پورتنيو مثالونو خخه دا نتيجه اخيستل کېري چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزی حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه تاکلې قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې تاکلې شمېرې جوازسپر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(2^3 = 8)$ ، $3^3 = 27$.

په پورتنيو مثالونو کې لیدل کېري چې مساحت (A)، نفوس (P) او حجم (V) د مربع ضلعې (X)، وخت (t) او د کېي شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول او د مربع ضلعې، د کېي شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایې کولای شو چې تابع داسې تعريف کرو:

تعريف

تابع د دوو ستونو تر منځ یوه داسې رابطه یا فاعده ده چې د لومړنی ست هر عنصر یوازې او یوازې د دویم ست له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړنی ست د تعريف د ناحيې (Domain) او دویم ست د قیمتونو د ناحيې (Range) په نوم یادېږي.



یا تابع د هغه مرتبو جورو ست دی چې لومړنی عناصر یې تکرار شوي نه وي. که $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}, \{4, 3\}$ د $S = \{(5, 4)\}$ وي، نو د رابطه د یوې تابع بنودونکي ده، څکه چې د مرتبو جورو لومړنی عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$$\text{Domain}(s) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Range}(s) = \{2, 3, 4\}$$

فعالیت

که $T = \{(1,4), (2,3), (3,2), (2,4), (1,5)\}$ یوه تابع بنسيي؟

لومړۍ مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع بنکاره کوي؟

(جدول I)

(جدول II)

(جدول III)

Domain	Range	Domain	Range	Domain	Range
د عدد مکعب (عدد)	د عدد مربيع (عدد)	د عدد مربيع جذر (عدد)			
-2 → 8	-2 → 4	0 → 0			
-1 → -1	-1 → 1	1 → -1			
0 → 0	0 → 0	4 → 2			
1 → 1	1 → 2	4 → -2			
2 → 8	2 → 1	9 → 3			

I او II جدولونه تابع بنکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه بنکاره کوي، خکه چې د لومړني ستې یا (Domain) یو عنصر د دویم ست (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جو پو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جزوی یې :

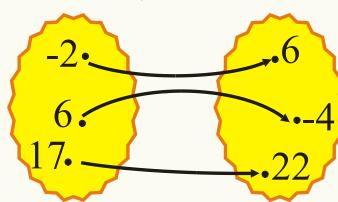
ست د یو عنصر لپاره په دویم ست کې دوو تصویرونه (Images) موجود دي، ګډرہ بشه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د خپرکې په لومړۍ مخ کې راکړل شوي دي، خام مواد یا ورووی (input) یا خروجی (output) د Domain f(x) یا Range د حقيقی تابع په نامه یادېږي. که A او B د حقيقی عددونو سټونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقيقی تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $\text{Range} \subseteq \text{codomain}$ دی.

دویم مثال: که $f = \{(-5, 3m), (-5, 2m-10), (1, 2)\}$ د یوې تابع بشودونکي وي، د m قيمت پیدا کړئ.

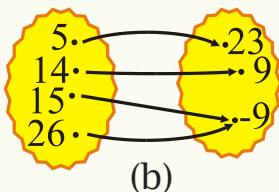
حل: خرنګه چې $-5 = -5$ دی، نو باید $3m = 2m - 10$ سره وي، په نتيجه کې $m = -10$

کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m = -10$ وي.

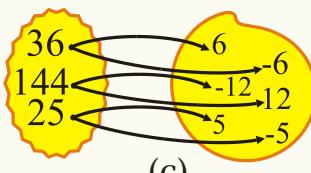
درېم مثال: له لاندېنيو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع بنسيي؟



(a)



(b)



(c)

حل: د a او b دیاگرامونه تابع بنيي، ليكن د c دیاگرام د يوې تابع بشودونکي نه دى.
تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ يوه داسې رابطه د چې د X د سټ يا (Domain) هر عنصر
يواني د Y د سټ (Range) ديو عنصر سره اړيکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقيد (مربوط)
متحول وائي يا تابع د هغه مرتبو جورو سټ دى چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتني

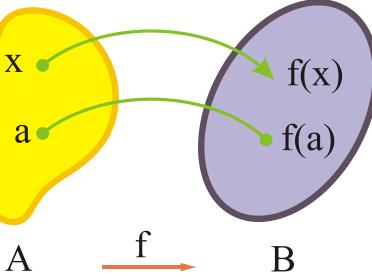
1	Domain	Range
	-1 0 1	1 2 3
2	Domain	Range
	2 4 6	1 3 5
3	Domain	Range
	1 3 5	3 5 7 9
4	Domain	Range
	-1 -2 -3	0 5 8
5	Domain	Range
	-1 0 1 2	3
6	Domain	Range
	2 3 4 5	8 9

1 - د مخامنځ جدولونو خخه کوم یوې
تابع بشودونکي دى؟

2 - د لاندې مرتبو جورو له سټونو خخه کومه یوه یې یوه تابع بنيي؟ د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) یې تعين کړئ.

- 1- $\{(2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$
- 2- $\{(-1, 4), (0, 3), (1, 2), (2, 1)\}$
- 3- $\{(10, -10), (5, -5), (0, 0), (5, 5), (10, 10)\}$
- 4- $\{(-10, 10), (-5, 5), (0, 0), (5, 5), (10, 10)\}$
- 5- $\{(0, 11), (1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$
- 6- $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

د تابع د لیکلو طریقه او د یوې تابع د قیمت پیدا کول



• خه وخت یوه معادله د یوې تابع بنکارندوبه ده؟

• یوه رابطه خه وخت یوه تابع بنیي؟

• یو جدول خه وخت یوه تابع بنیي؟

د لومړی خل لپاره سویسی ریاضی پوه او یولر (Euler) (1707 - 1783) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د لپاره y یا $f(x)$ د تابع قیمت دی. که f له A خخه B ته یوه تابع وي، په لاندې ډولښودل کېږي چې

$$f : A \rightarrow B$$

$$y = f(x) \quad \text{یا}$$

په شکل کې x له $f(x)$ او $(input)$ د چخه عبارت دی، تابع ګانې د f او h,g,f نورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طریقو ښودل کېږي.

1 - د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 - د یوه جدول په واسطه یا عددی (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د یو واضح فورمول یا معادلې په واسطه یا په الجبری چول (Algebraically)

فعالیت

که $f(x)$ او $g(x)$ په جدولونو کې به لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قیمتونو کې ددې تابع ګانو قیمت پیدا کړئ. یا په بل عبارت د تابع د تعريف ساحه (Domain) درکړل شوي ده، د تابع اړوندہ قیمتونه (Range) یې پیدا کړئ.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

x =	-1	-2	0	2	4
f(x) =	?	?	?	?	?

$$g(x) = x^3 - 1$$

x =	0	-1	1	2
g(x) =	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(a)$ او $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ وي $f(x) = x^2 + 3x - 2$ پیدا کړئ.
حل:

د تعريف ساحه	f(x) = x ² + 3x - 2 (Rule)	تابع	د تابع قيمتونه
2	$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 4 + 6 - 2$	8	
0	$f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$	-2	
-3	$f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) - 2 = 9 - 9 - 2$	-2	
a	$f(a) = a^2 + 3a - 2$		$a^2 + 3a - 2$

یا $f(2) = 8$, $f(0) = -2$, $f(-3) = -2$, $f(a) = a^2 + 3a - 2$ دویم مثال: که $f(x+3)$, $f(-x)$ وي $f(x)$ پیدا کړئ.
حل

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 4 + 6 + 5 = 15$$

$$f(x+3) = (x+3)^2 + 3(x+3) + 5 = x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 5 = x^2 + 9x + 23$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) + 5 = x^2 - 3x + 5$$

فعاليت

که $g(x) = x^2 - 2x + 7$ او $g(-5)$ وي $g(x+4)$, $g(-x)$ وي $g(h(x))$ پیدا کړئ.

درېډ مثال: که $f(x) = 2x + 6$, $h(x) = 3 - 2x$ او $\bar{h}(6)$, $f(-1)$ وي $\bar{f}(-1) + f(3)$ پیدا کړئ.

حل:

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$

$$h(6) = 3 - 2 \cdot 6 = 3 - 12 = -9$$

$$f(-1) + f(3) = 4 + 2 \cdot 3 + 6 = 4 + 12 = 16$$

څلورم مثال: که $f(x) = ax^2 - bx + 1$ د a او b قيمتونه پيدا

کړئ.

حل:

$$10 = 9a - 3b + 1 \quad , \quad 0 = a - b + 1$$

$$10 = 9a - 3b + 1$$

$$0 = \underline{9a - 3b} \pm 3$$

$$10 = 6a - 2$$

$$10 = 18 - 3b + 1$$

$$12 = 6a$$

$$3b = 19 - 10$$

$$a = 2$$

$$3b = 9$$

$$b = 3$$

پنځم مثال: له لاندېنيو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع بنېي؟

$$a: \quad x^2 + y = 4 \qquad \qquad b: \quad x^2 + y^2 = 4$$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع بنېي چې د X د هر قيمت لپاره د y یو قيمت موجود شی.

$$a: \quad x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2$$

د X د هر قيمت لپاره y یو قيمت لري، د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = 4 - 1^2 = 3$ نو،

$$y = 4 - x^2$$

$$b: \quad x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

د X د یوه قيمت لپاره y دوه قيمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = \pm\sqrt{3}$ يا $(1, \sqrt{3})$ (1, $-\sqrt{3}$) چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

فعاليت



وسياست چې د $x^2 + y^2 = 1$ د $x^3 - y = 2$ اود $y - x^2 = 4$ معادلې د تابع بنودونکي دي او د معادله د یوې تابع بنودونکي نه ده.

يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قيمت د پیداکولو لپاره د X قيمت د تابع په معادله کې وضع کړو، د تابع قيمت په لاس راخې او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع بشکارندويه وي چې د هر X لپاره یو y وجود ولري.

پوښتني



$g(-2), f(-3)$ ، $g(2) - g(-3)$ وي $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ او $g(x) = x^2 + x - 2$ که

او $\frac{f(0) \cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړي.

$f(x-1)$ ، $f(-2)$ او $g(0)$ ، $f(-2)$ او $g(x) = \sqrt{x+4}$ او $f(x) = x^2 - x - 2$ که f پیدا کړي.

$h(-3)$ ، $h(16)$ وي $h(x) = 1 + 4x$ او $g(-4)$ پیدا کړي.

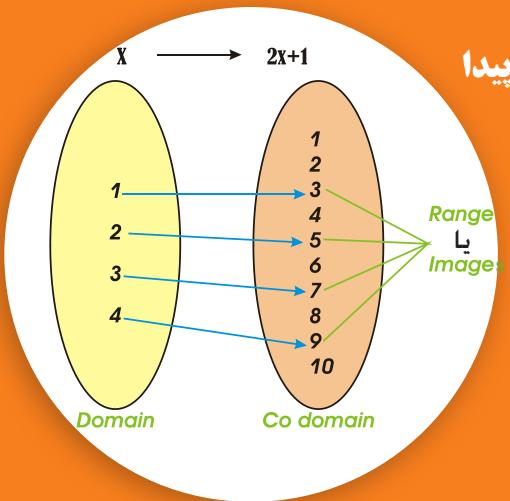
$g(-7), f(6)$ وي $h(x) = \sqrt{25-x^2}$ او $g(x) = 16 + 3x - x^2$ ، $f(x) = \frac{15}{x-3} - 4$ که

او $f(0) + g(4) - h(-3)$ پیدا کړي.

$g(0), g(4), g(5), g(12)$ وي $g(x) = \sqrt{x+40} - 2$ که 5 - 2 اور $g(-2)$ پیدا کړي.

آيا د معادله یوه تابع بشیئي؟

د یوې تابع د تعريف د ساحې پیدا کول



آيا کېدای شي چې د هرې تابع د تعريف ساحه ټول حقیقی عددونه وي؟

فعالیت

- د x کوم قیمتوونه د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x) = \frac{1}{x-4}$ تابع د تعريف ساحه وتاکي.
- آيا $g(x) = 3\sqrt{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې $-4 \leq x$ شامل دي؟

د یوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قیمتوونه شامل وي چې تابع په هغه قیمتوونو کې تعريف شوي وي يا د تابع قیمت یو حقیقی عدد وي.
لومړۍ مثال: د لاندې تابع ګانو د تعريف ساحه (Domain) وتاکي.

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$h(x) = x^2 - 7x$$

$$R(x) = \sqrt{3x+12}$$

$$K(x) = \frac{6x}{x^2-9}$$

حل:

- د $f(x) = \frac{1}{x-3}$ تابع په $x = 3$ کې تعريف شوي نه ده، خکه چې $x = 3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي يا د $x = 3$ لپاره د تابع قیمت یو حقیقی عدد نه دی نو:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\}$$
- د $g(x) = \sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قیمت یو حقیقی عدد (Real number)

وی، باید $x \geq 0$ وی، نو $Dom g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا
 په تابع کې، خرنګه چې د X د هر قيمت لپاره د $h(x)$ تابع تعريف شوي
 $Dom h = IR = (-\infty, \infty)$ ده، نو: (د حقيقي عددونو سټه)

$$k(x) = \frac{6x}{(x-3)(x+3)} \text{ یا } k(x) = \frac{6x}{x^2-9} \text{ د تابع د تعريف ساحه عبارت ده له:}$$

$$Dom k(x) = \{x \in IR / x \neq 3, x \neq -3\}$$

$$R(x) = \sqrt{3x+12} \text{ د تابع کې باید } 3x+12 \geq 0 \text{ وی، نو } x \geq -4 \text{ کېږي.}$$

$$Dom R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعاليت

د لاندي تابع گانو د تعريف ساحه Domain پيدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17, \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49}, \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x-3}$ د تابع د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$Dom y = \{x \in IR / x \geq 3\} = [3, \infty)$$

درېم مثال: د لاندي تابع گانو د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad Dom f = \{x / x \geq 2\} \quad [2, \infty]$$

$$g(x) = \frac{2x+3}{x-4} \quad dom g = IR - \{4\} \text{ یا } (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

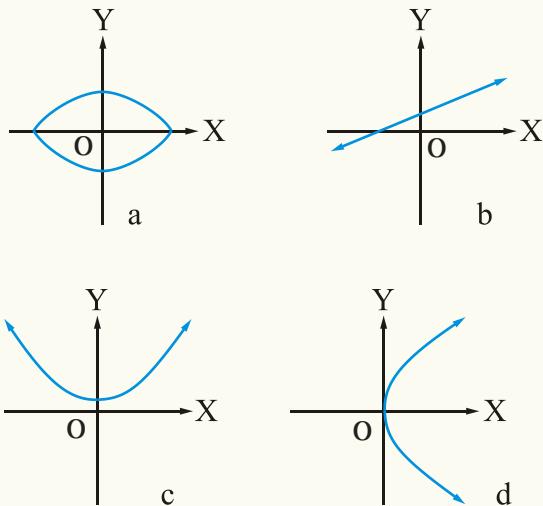
$$dom g = \{x \in IR / x \neq 4\} \quad \text{یا د سټه په شکل:}$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$$Dom h = \{x / x \leq -1 \text{ یا } x \geq 3\} \text{ یا } (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

د یوی تابع گراف او د گراف له مخی د یوی تابع پیژندنه (Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم گراف د یوی تابع گراف دی؟



فعالیت

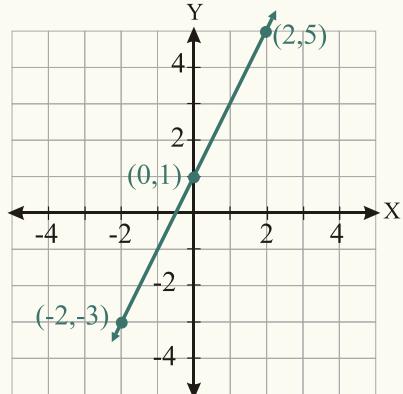
- د y له محور سره یو موازی خط رسم کړي.
- وګورئ چې دا خط د تابع گراف په خونقظو کې قطع کوي؟
- که دا خط گراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا گراف به د یوی تابع گراف وي؟
- که دا خط، گراف له یوی نقطې خنډ په زیاتون نقطو کې قطع کړي آیا دا گراف به د یوی تابع گراف وي؟

که $y=f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع گراف د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوی تابع گراف د مستوی XOY د هغون نقطو سټ دی چې $\{y = f(x) | x \in \text{dom } f(x)\}$ صدق کړي او $x \in \text{dom } f(x)$ وي.

لومړی مثال: د $y = f(x) = 2x + 1$ تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړي
x	$2x + 1$	$y = f(x)$	(x, y)
0	$2(0) + 1$	1	(0, 1)
2	$2(2) + 1$	5	(2, 5)
-2	$2(-2) + 1$	-3	(-2, -3)



د دویم مثال: د $f(x) = x^2 + 1$ او $y = -1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې پې هم پیدا کړئ.

حل:

$$f(x) = x^2 + 1$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د مرتبو جوړو په نظر $(-3, 10), (-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 10)$ د

کې نیولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

$$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

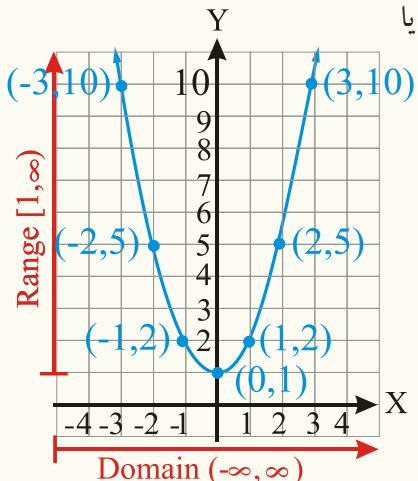
$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

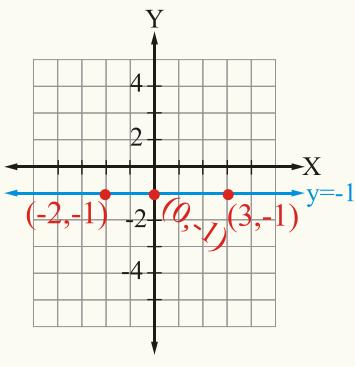
$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, \infty)$$

$$\text{Range } f = (1, \infty)$$





$$f(x) = -1$$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	(-2, -1)
0	-1	(0, -1)
3	-1	(3, -1)

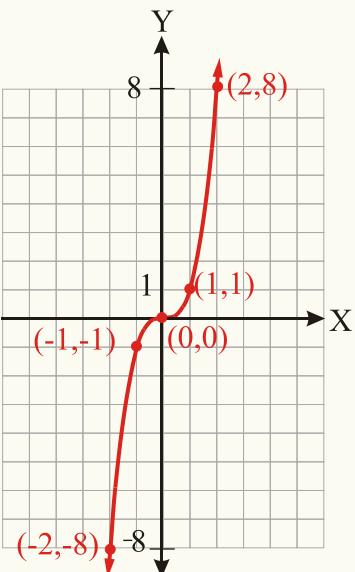
Dom y = IR

Range y = -1

فعالیت

د تابع ګراف $f(x) = x^2 - 4$ رسم کړئ.

دریم مثال: د تابع ګراف $y = f(x) = x^3$ رسم کړئ.

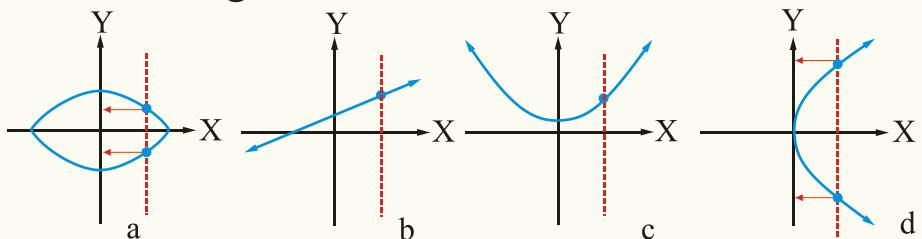


$$f(x) = x^3$$

x	2	1	0	-1	-2
y = f(x)	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (d) له محور سره موازي یو ګراف
موازي په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع
ګراف دی او که له یوې نقطې خخه یې په زیاتو نقطو کې
قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې ليدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، خکه چې عمود خط بې ګرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن d او a د ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، خکه چې عمودي خط ګرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه X پاره د y يا $f(x)$ دوو قيمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعريف په ناحيه $domain$ کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي یا د تابع قيمت یو حقيقی عدد وي. د یوې تابع ګراف د XOY په مستوی کې S د نقطو سپت دي، په دې ډول چې $S = \{(x, y) | y = f(x)\}$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازي په یوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د یوې تابع ګراف دي.

پوښتني

1 - د لاندې تابع ګانو د تعريف ساحې (Domains) پیدا کړئ.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$g(x) = 2x - 5$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

$$g(x) = |x - 3|$$

$$h(x) = \frac{3}{x - 4}$$

$$f(x) = \frac{7x}{x^2 - 16}$$

$$g(x) = \frac{2}{(x + 3)(x - 7)}$$

$$h(x) = \frac{4}{x^2 + 11x + 24}$$

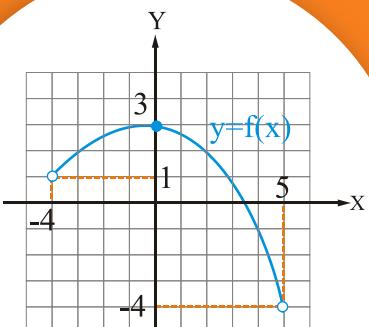
$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

2 - د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x) = 2x - 1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ وي.

4 - د $x = y^2 - 2$ ګراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع ګراف دي؟ ولې؟

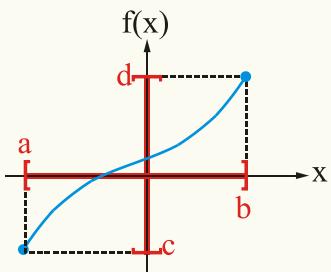
د گراف له مخې د یوې تابع د
تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د
تابع د قيمتونو پيدا کول:



$$\text{Dom } f(x) = (-4, 5)$$

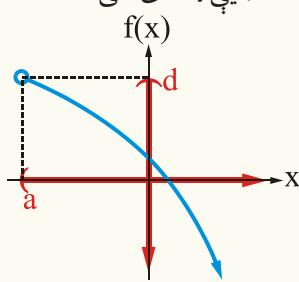
$$\text{Range } f(x) = [-4, 3]$$

آيا د تابعو په لاندېنيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) یې تاکلای شي؟



$$\text{Dom } f = [a, b]$$

$$\text{Rang } f = [c, d]$$



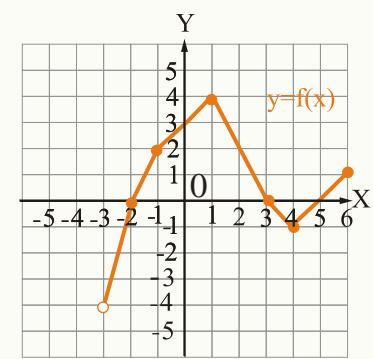
$$\text{Dom } f = (a, \infty)$$

$$\text{Rang } f = (-\infty, d)$$

فعاليت

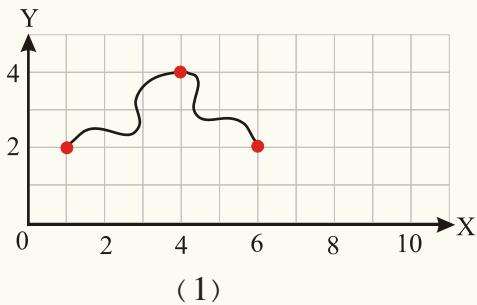
شكل وګوري لاندېنيو پونستنو ته خواب ورکړئ:

- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 – عدد د f د تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دي؟ ولې؟
- آياد 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دي؟ ولې؟
- آياد 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دي؟

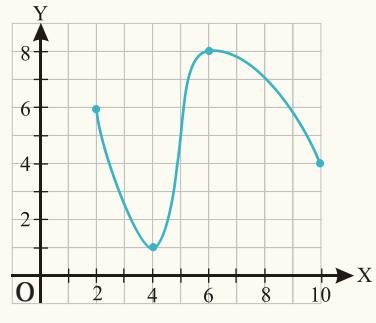


لیدل کېږي چې $f(-1) = 2$ او $f(1) = 4$ دی او هم د شکل له مخې د تابع د تعريف ساحه له $-3 < x < 6$ پوري ده، لیکن $6 \in \text{dom } f$ او $3 \notin \text{dom } f$ نو $\text{dom } f = (-3, 6]$ او په همدي ډول د قيمتونو ساحه (Range) له $-4 < y < 4$ پوري ده، خو $\text{Range } f = (-4, 4)$ نو $4 \notin \text{Range } f$

لومړۍ مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعريف او د قيمتونو ساحې پيداکړئ.



(1)



(2)

حل:

د لوړۍ شکل په ګراف کې د تعريف ساحه د $1 \leq x \leq 6$ تر منځ ټول حقيقی عددونه دی او د قيمتونو ساحه پې د $2 \leq y \leq 4$ تر منځ ټول حقيقی عددونه دی یا:

$$\text{Dom} = [2, 10] \text{ یا } 2 \leq x \leq 10$$

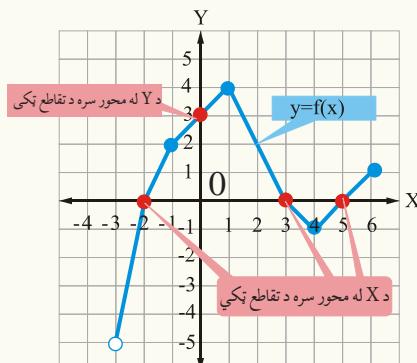
$$\text{Range} = [1, 8] \text{ یا } 1 \leq y \leq 8$$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونيسي.

• $f(3)$ او $f(-2)$ پيداکړئ.

• د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پيداکړئ.

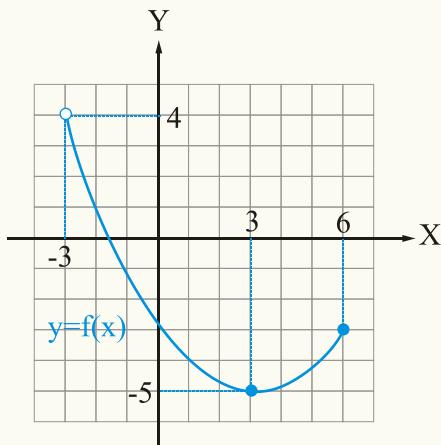
حل: خرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په تکي کې $y = 0$ دی، $f(3) = 0$ ، $f(-2) = 0$ نو، د X محور د $f(5) = 0$ دی، نو ګراف د X محور



او $(3, 0)$ ، $(-2, 0)$ په نقطو کې قطع کوي.

خرنگه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په تکي کې $x = 0$ دی $f(0) = 3$ ، نو ګراف د محور د $(0, 3)$ په نقطه کې قطع کوي.

درېم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع پیدا کړئ (3) او $f(6)$ هم په لاس راوري.



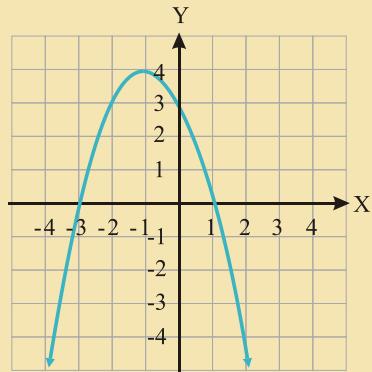
حل: ليدل کېږي چې د تعريف ساحه يې له $3 < x \leq 6$ پوري ده، خو 3 - د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

$$\text{Domain } f(x) = -3 < x \leq 6 \quad \text{يا} \quad (-3, 6]$$

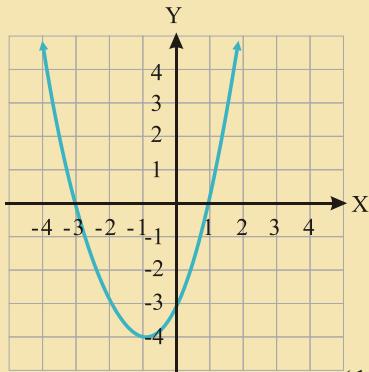
او د قيمتونو ساحه يې: $f(6) = -3$ ، $f(3) = -5$ د $f(6) = -3$ ، $[-5, 4)$ يا $\text{Range } f(x) = -5 \leq y < 4$ د $f(3) = -5$ او.

پوښتني

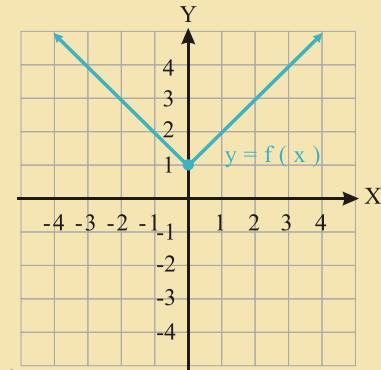
په راکړل شوو شکلونو کې:



(2)



(1)



(3) $f(-1) = ?$ $f(3) = ?$

a- د تابع د تعريف ساحه

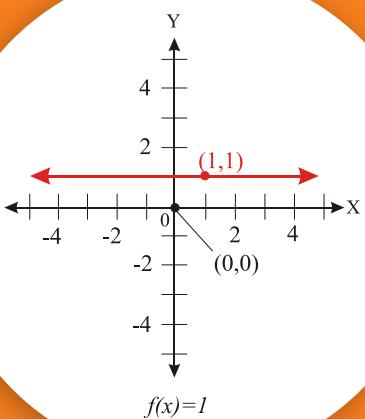
b- د تابع د قيمتونو ساحه

c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع پکي

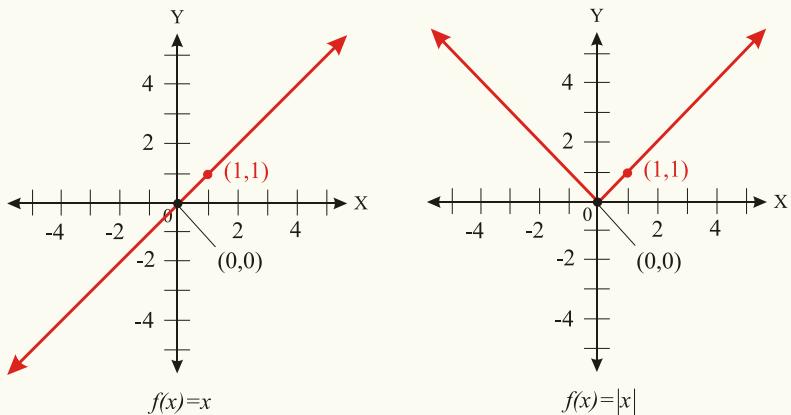
d- د Y له محور سره د تقاطع پکي او په دریم شکل کې د تابع غوبنتل شوي قيمتونه پیدا کړئ.

حئيني خاصي تابع گانبي او گرافونه يې

د هغۇ تابع گانو نومونە واخلى چې گرافونه يې
راکىل شوي دى



توابع ۋېر چولونە لرى چې حئيني خاصي تابع گانبي تر چېپنې لاندى يىسىو:
ثابتە تابع، د عىنيت تابع، د مطلقه قىمت تابع، خۇ معادله يى تابع او د علامې تابع



فعاليت

- ثابتى تابع تە ولې ثابتە تابع وايى؟
- آيا د عىنيت تابع د تعريف او د قىمتىنۇ ساحى سره مساوى وي؟
- آيا د مطلقه قىمت د تابع د قىمتىنۇ ساحە منفي قىمتىنە اخېستىلەشى؟

ثابته تابع (Constant Function)

که X او y د حقيقی عدلونو سټونه وي، د $y = f(x) = c$ په تابع کې که y له یوه ثابت عدد سره مساوی وي یا $f(x) = c$ چې (C) یو ثابت عدد دی، نو y د ثابتی تابع په نوم یادپري. د مثال په ډول: $f(x) = -2$ او $f(x) = 2$ او د اسې نورې ثابتی تابع ګانې دی.

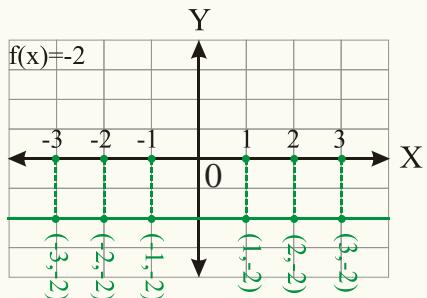
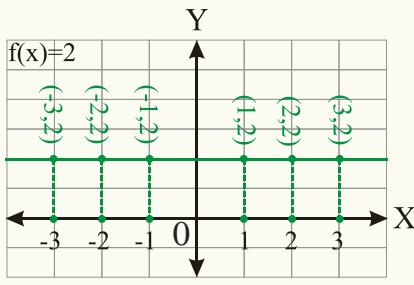
لومړۍ مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x) = 2$$

x =	1	2	3	-1	-2	-3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

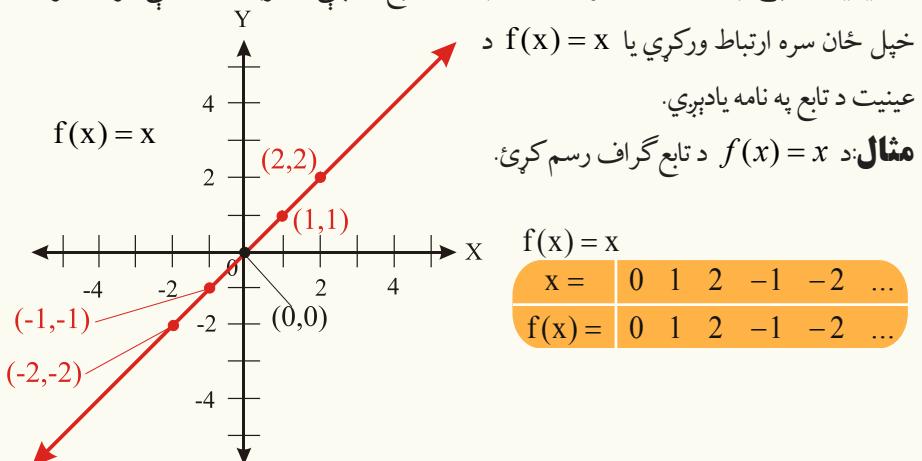
$$f(x) = -2$$

x =	1	2	3	-1	-2	-3
f(x) =	-2	-2	-2	-2	-2	-2



په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعريف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عينیت تابع (Identity function): هغه تابع د چې د تعريف د ساحې هر عنصر ته له



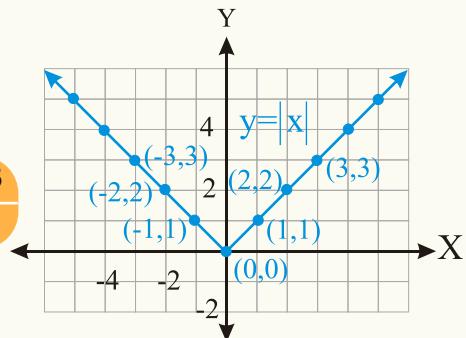
د مطلقه قيمت تابع (Absolute value function)

د مطلقه قيمت تابع $f(x) = |x|$ په لاندي دول تعريف شوي ده:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

لومړۍ مثال: د $f(x) = |x|$ تابع ګراف رسم کړئ.

$f(x) = x $	0	1	2	3	-1	-2	-3
$x =$	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کېږي چې د مطلقه قيمت د تابع د تعريف ساحه ټول حقيقی عددونه او د قيمتونو ساحه یې (0, ∞) ده.

خو معادله یې تابع (Piecewise function) او ګراف یې

آيا کېډا شی چې یوه تابع د تعريف په ساحه کې د دوو یا خو معادلو په واسطه تعريف شوي وي؟

لومړۍ مثال: که $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & : x < 4 \\ x^2 - 1 & : 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$ د تابع د تعريف ساحه پیدا کړئ.

حل: خرنګه چې $4 < x < 5$ دی، نو په لومړۍ معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5) = 2(-5) + 3 = -10 + 3 = -7$$

او خرنګه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4 < x < 8$ دی، نو په دویمه معادله کې وضع کېږي لرو چې:

$$f(8) = 8^2 - 1 = 64 - 1 = 63$$

د f تابع د تعريف ساحه په لومړۍ معادله کې $(4, 10)$ او په دویمه معادله کې $(-\infty, 4)$ ده، نو د

f د تعريف ساحه د $(-\infty, 10]$ خخه عبارت ده.

فعاليت

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{11}{60}x + 15 & : 0 \leq x < 60 \\ \frac{1}{5}x - 8 & : 60 \leq x \leq 90 \end{cases}$$

که چېږي

وښیاست چې $g(30) = 9.5$ او $g(80) = 8$ ده.

د خو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

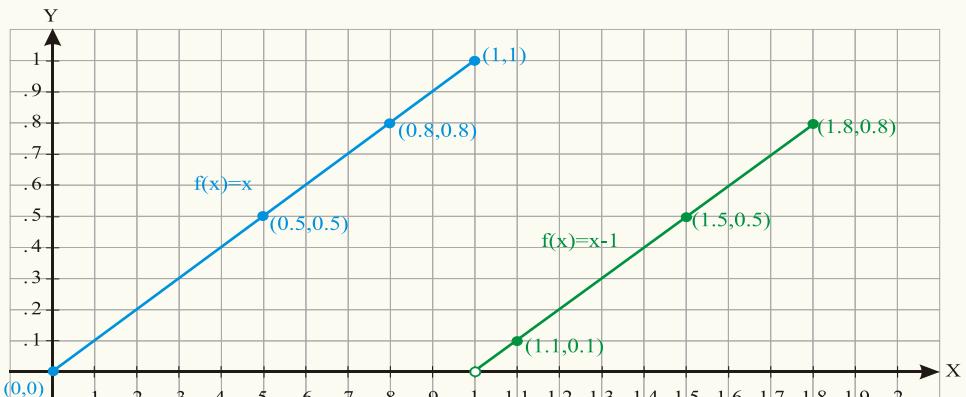
دوييم مثال: د $f(x)$ تابع د تعريف او قيمتونو ساچې پيدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$$f(x) = \begin{cases} x & : 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & : 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

حل: د لوړۍ معادله د تعريف ساحه $[0,1]$ او د دوييمې معادله د تعريف ساحه $(1,2]$ ده چې په

نتیجه کې د $f(x)$ د تعريف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



$$y = f(x) = x$$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$$y = f(x) = x - 1$$

x	1,1	1,5	1,8
f(x)	0,1	0,5	0,8

په نتیجه کې دوو مستقیم خطونه په لاس راخېي چې دواړه د (X) تابع ګراف دی.

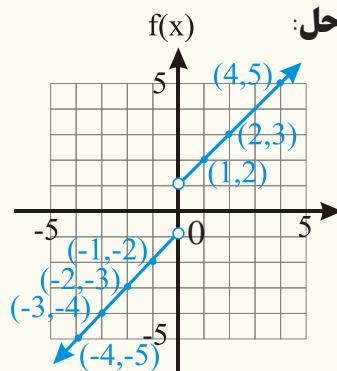
فعاليت

که: $f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 \leq x \leq 4 \\ x - 1 & \text{for } 0 < x < -4 \end{cases}$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

درېډ مثال: د تابع ګراف رسم د تعريف او د قيمتونو ساحې ېې وټاکړ.

حل:

x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
f(x)	2	3	5	-2	-3	-4	-5



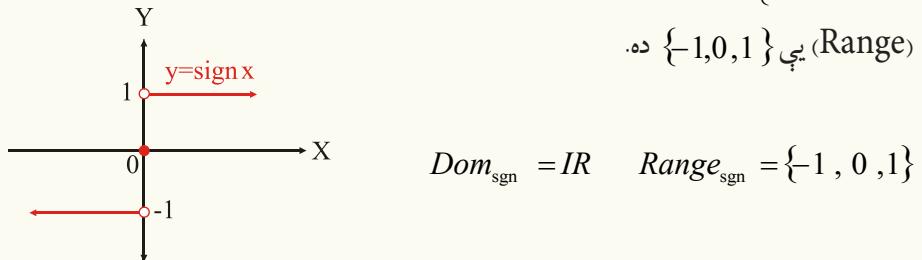
لیدل کېږي چې د تعريف په ساحه کې صفر شامل نه دی ($x \neq 0$) یا

او د قيمتونو ناحيه ($Dom f(x) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$) عبارت دی له:

$$y < -1 \text{ او } y > 1 \text{ یا } (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn سره بنوول کېږي د خو معادله ېې تابع یو مثال دی چې په لاندې چول تعريف شوي ده:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$$



$f(x) = c$ ثابته تابع ، $f(x) = |x|$ د عینیت تابع او $f(x) = x$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه بې ټول حقيقی عددونه او د قیمتونو ساحه بې صفر او مثبت حقيقی عددونه دی.

پوښتني

$$h(x) = 4 \quad \text{او} \quad g(x) = \frac{1}{2} \quad f(x) = -5 \quad \text{د گرافونه رسم کړئ.}$$

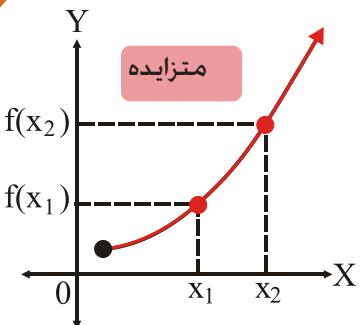
$$f(x) = |x| - 3 - 2 \quad \text{تابع ګراف رسم کړئ.}$$

$$f(-2, 3), f(0) \text{ وی } f(16) \quad \text{پیدا کړئ.}$$

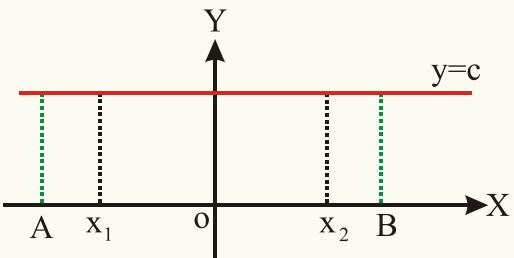
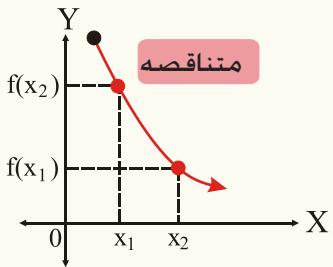
$$f(x) = \begin{cases} -x & : x < 0 \\ x & : x \geq 0 \end{cases} \quad \text{که } -3$$

$$h(x) \quad \text{وي د (} h(x) = \begin{cases} x+1 & : -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & : 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{که } -4$$

متزايد او متناقصه تابع گانې (Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزايد تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصه تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزايد دی او نه متناقص؟



1 - یوه تابع په یوه انټروال کې متزايد ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې ($f(x_1) < f(x_2)$) شي.

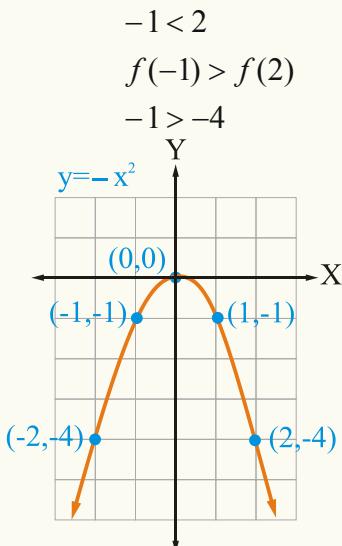
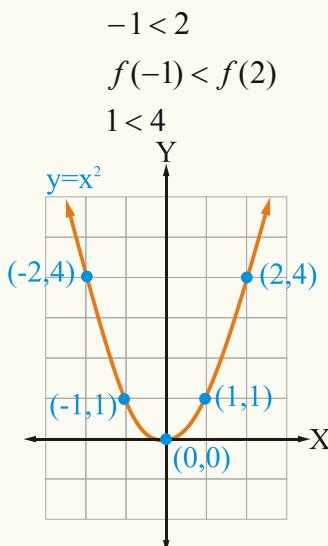
2 - یوه تابع په یوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې ($f(x_1) > f(x_2)$) شي.

3 - که $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې ($f(x_1) = f(x_2)$) شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزايد. لکه: خرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي دا یوه ثابته تابع ده.

مثال: د تابع گانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزايد او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

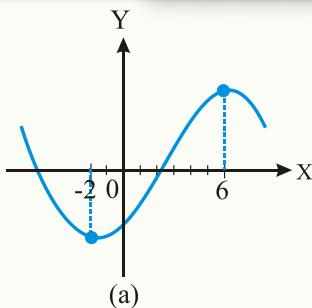
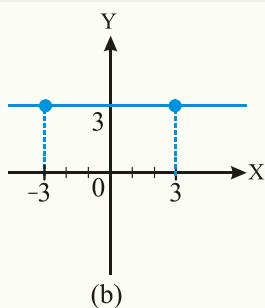
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = -x^2$	0	-1	-1	-4	-4



لیدل کېرىي چې د $f(x) = x^2$ تابع د $(-\infty, 0)$ په انقروال کې متناقصه او د $(0, \infty)$ په انقروال کې متزايد ده، لیکن د $f(x) = -x^2$ تابع په $(-\infty, 0)$ انقروال کې متزايد ده او د $(0, \infty)$ په انقروال کې متناقصه ده.

فعاليت

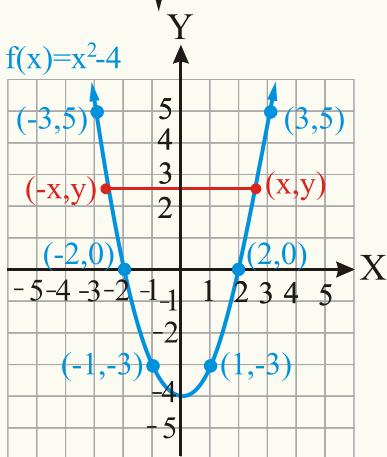
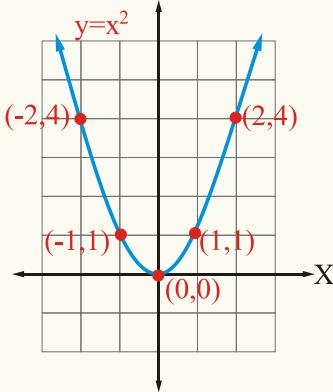
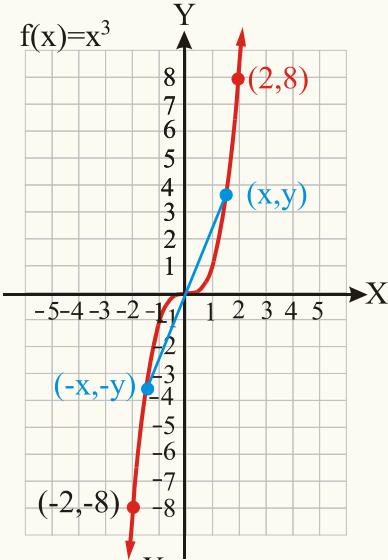


په راکپل شوو شكلونو کې د تابع گراف په کوموا نتیروالونو کې متزايد په کومو کې متناقص دی، کوم گراف نه متزايد او نه متناقص دی؟

جفتی او طافقی تابع گانى (Even and Odd Functions)

1- د $f(x)$ تابع يوه جفته تابع ده كه چېرىي $f(-x) = f(x)$ وي، په دې معنا كه په تابع کې د x پر خاي $-x$ - عوض كړو، د تابع په قيمت کې تغيير رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع يوه طافقه تابع ده كه چېرىي $f(-x) = -f(x)$ وي يا دا چېي كه په تابع کې د



X پر خای - عوض کرو، د تابع قیمت منفی شی.

لومپی مثال: د تابع $f(x) = x^3$ او $f(x) = x^2$ په

تابع گانوکې کومه تابع جفتہ او کومه یوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابع گانوکې

د X پر خای - عوض کړو:
 $f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$

نود $f(x) = x^3$ تابع یوه طاقه تابع ده،

څکه چې $f(-x) = -f(x)$ کېږي لکه:

$f(x) = x^2$ $f(-2) = -f(2) = -8$ په

تابع کې لرو چې:

$f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$

نو $f(x) = x^2$ یو جفتہ تابع ده، څکه چې

$f(-2) = f(2) = 4$ $f(-x) = f(x)$ کېږي لکه:

لیدل کېږي چې د جفتتو تابع گانوګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تو گانوګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.

دویم مثال: د $f(x) = x^2 - 4$ او

$g(x) = x^2 + 3x + 2$ په تابع گانوکې کومه یوه

جفتہ او کومه یوه طاقه ده؟

حل:

$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$

نو دا تابع جفتہ ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دووه

نقاطې د $(3, 5)$ او $(-3, 5)$ تابع د $x = 3$ او $x = -3$

لپاره د تابع قیمت سره مساوی دی چې د 5 عدد دی.

$$f(-3) = f(3) = 5$$

همدارنگه د $x = -2$ او $x = 2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوی دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x) = (-x)^2 + 3(-x) + 2 = x^2 - 3x + 2$$

چې د تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریده مثال: که f له حقیقی عددونو خخه حقیقی عددونو ته یوه طاقه تابع وي او

$$f(-2) = k + 5 \quad f(2) = 2k + 3 \quad \text{او} \quad f(-2) = k + 5 \quad f(2) = 2k + 3$$

حل: خرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو:

$$f(-x) = -f(x)$$

د طاقې تابع د تعريف په اساس:

$$f(-2) = -f(2)$$

$$k + 5 = -(2k + 3)$$

$$k + 5 = -2k - 3$$

$$3k = -8$$

$$k = -\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي تابع متزايده او که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x) = f(x)$ وي تابع جفته او $f(-x) = -f(x)$ شي تابع طاقه ده جفتو تابع گانو گراف نظر د \mathbb{Y} محور ته او د طاقه تابع گانو گراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پونستې

1- د لاندېنيو تابع گانو خخه کومه یوه یې متزايده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزايده او نه متناقصه ده؟

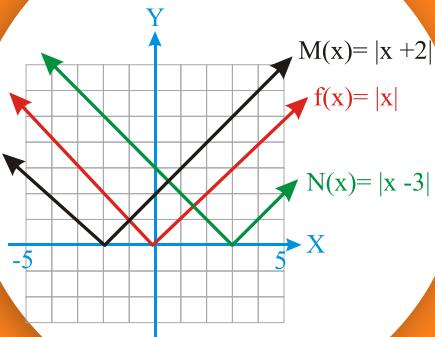
$$f(x) = x^3 + x, \quad f(x) = x^2 + x, \quad f(x) = x^2 - x^4$$

2- د لاندېنيو راکړل شوو تابع گانو خخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

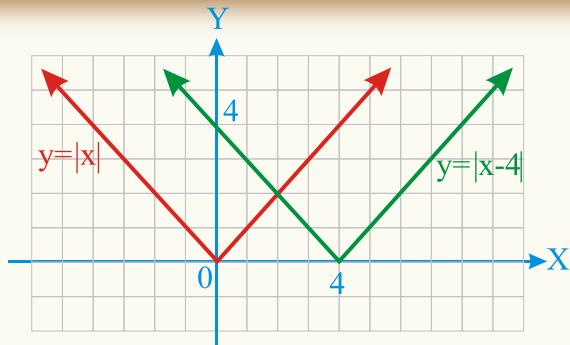
$$f(x) = x, \quad f(x) = |x|$$

$$f(x) = x^4, \quad f(x) = x^5$$

د گرافونو انتقال (Translation)



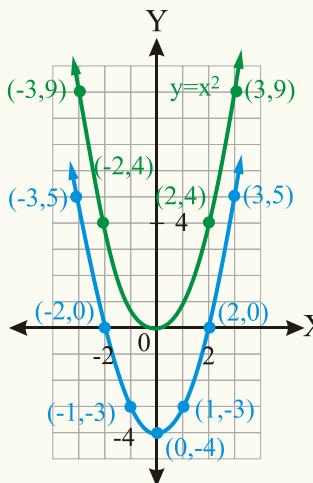
آياکولاي شئ چې ووايى راکپل شوي گرافونه
يو له بله سره خه اړیکه لري؟



فعاليت

- د $f(x) = x^2$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x) = x^2 + 4$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x) = x^2 - 4$ تابع گراف رسم کړئ.
- ووايast چې پورتني گرافونه يو له بله سره خه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x) = x^2$ گراف رسم کړو، خنګه کولاي شو د $f(x) = x^2$ د گراف له انتقال خخه د $f(x) = x^2 - 4$ تابع گراف رسم کړو؟
د $y = x^2$ د گراف د (x, y) د هري نقطې لپاره د $(x, y - 4)$ اړونده نقطه د $y = x^2 - 4$ په گراف واقع ده، نو د $y = x^2$ تابع گراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه بنکته خواهه انتقال کوي تر خو د $y = x^2 - 4$ گراف لاس ته راشي، لکه: خنګه چې په شکل کې ليدل کېږي، دا انتقال



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم يادپوري.
انتقال په دوه چوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- عمودي انتقال (Vertical Translation)

عمودي انتقال پورته او يا بنکته خواته وي.

كه $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د C په اندازه پورته خواته
انتقال شوي وي، نو د $y = f(x) + c$ گراف لاس ته راخي.

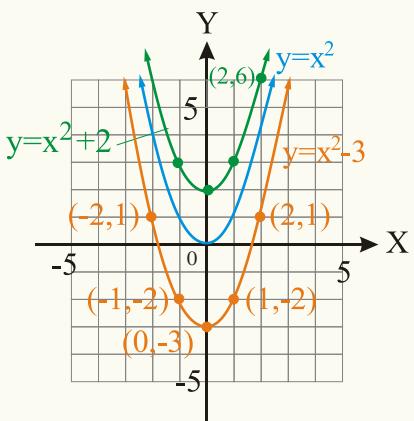
2: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د C په اندازه بنکته خواته
انتقال شوي وي، نو د $y = f(x) - c$ گراف لاس ته راخي.

لومړۍ مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع ګانو

ګرافونه د $y = x^2$ تابع له ګراف سره خرنګه اړیکه لري؟ درې واړه ګرافونه د وضعیه کمیاتو
په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع گراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د
تابع گراف په لاس راشي او که د $y = x^2 - 3$ د تابع گراف د (3) واحدو په اندازه بنکته خواته نقل کړو،

د $y = x^2 - 3$ تابع گراف لاس ته راخي:



x =	0	1	2	-1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	-3	-2	1	-2

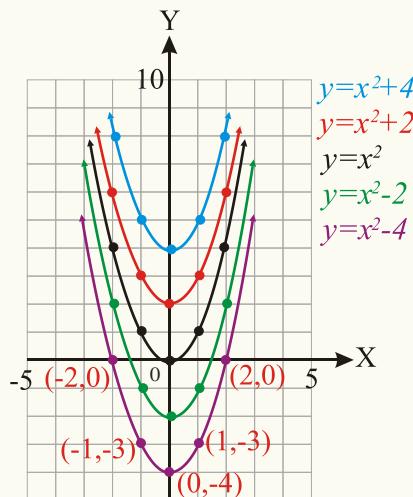
يا عمودي انتقال داسي هم تعريفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای a - وضع کړو داسي چې a یو ثابت عدد دی، نو ګراف د
 $|a|$ په اندازه په عمودي چول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي چول پورته خواته او که
 $a < 0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي چول بنکته خواته انتقال کوي.

دوبیم مثال: د $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 + 4$ تابع گراف له انتقاله خخه د او $y = x^2 - 4$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پر تله کړئ.

$$y = x^2 \quad y = x^2 + 2 \quad y = x^2 + 4 \quad y = x^2 - 2 \quad y = x^2 - 4$$

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	-2	0	-4
± 1	1	± 1	3	± 1	5	± 1	-1	± 1	-3
± 2	4	± 2	6	± 2	8	± 2	2	± 2	0



افقی انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په گراف کې د $x - b$ پر خای b وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع گراف د $|b|$ په اندازه په افقی ډول انتقال کوي، که $b > 0$ وي گراف بنی خواه او که $b < 0$ وي، گراف کېنې خواهه انتقال کوي.

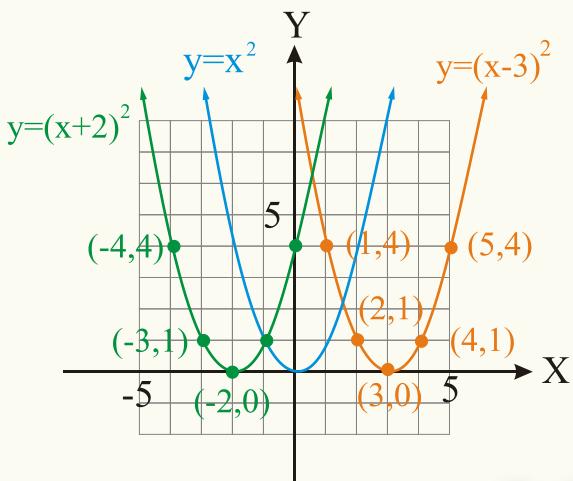
دوبیم مثال: د $y = x^2$ گراف له انتقال خخه د $y = (x+2)^2$ او $y = (x-3)^2$ گرافونه رسم کړئ.

حل: لکه خنګه چې په شکل کې لیدل کېږي که د $y = x^2$ تابع گراف د 2 واحدو په اندازه کېنې

خواته انتقال کړو، د $y = (x+2)^2$ ګراف لاس ته راخي، که د $y = x^2$ ګراف 3 واحده بني خواته انتقال کړو، د $y = (x-3)^2$ د تابع ګراف لا س ته راخي، لکه: خنګه چې په شکل کې هم ليدل کېږي.

x	-2	0	-1	-3	-4
$y = (x+2)^2$	0	4	1	1	4

x =	3	4	2	5	1
$y = (x-3)^2$	0	1	1	4	4



فعايلت

د $|f(x)| = |x|$ تابع ګراف له انتقال خخه د $g(x) = |x+2|$ او $h(x) = |x-3|$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقی انتقالونو تركیب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x) = (x+1)^2$ او $h(x) = (x-3)^2 - 3$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: لوړۍ د $f(x) = x^2$ تابع ګراف رسموو چې د دویمه درجې تابع د معیاري ګراف په نامه یادېږي لوړۍ د ګراف پر مخ د $(0,0)$, $(2,4)$ او $(-2,-4)$ درې نقطې پاکو.

بیا د تابع گراف رسموو چې د $f(x) = x^2$ د تعريف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x) = x^2$ گراف کینې خواهه د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې بنودل شوي دي. په پای کې د $f(x) = (x+1)^2 - 3$ تابع گراف د رسمولو لپاره د دویم شکل گراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي چول بنکته خواهه انتقالوو چې گراف يې په دريم شکل کې بنودل شوي دي:

$$f(x) = x^2$$

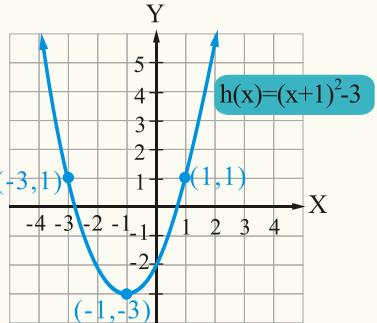
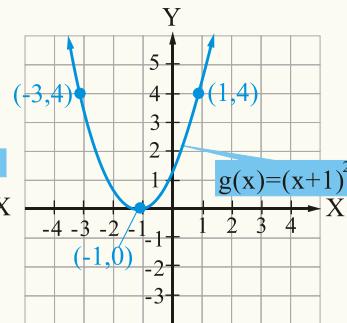
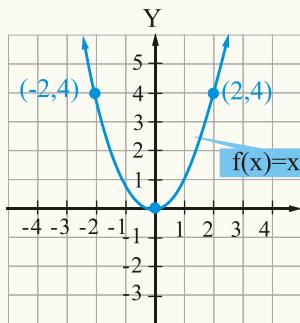
x	0	2	-2
f(x)	0	4	4

$$g(x) = (x+1)^2$$

x	-1	1	-3
f(x)	0	4	4

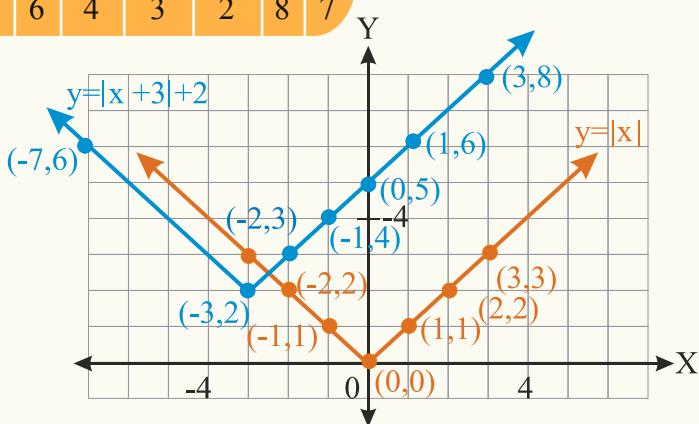
$$f(x) = (x+1)^2 - 3$$

x	1	-3	-1
f(x)	1	1	-3



پنځم مثال: د $y = |x|$ تابع گراف له انتقال کولو خخه د $y = |x+3|+2$ تابع گراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	-2	-3	3	2
$y = x $	0	1	1	2	3	3	2
$y = x+3 +2$	5	6	4	3	2	8	7



انتقال په (2) چول دی، (عمودی او افقی)

عمودی انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چېري د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي چول پورته خواته انتقال

شي، د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راخي.

2- که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي چول بسته خواته انتقال شي د

$y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راخي.

افقی انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه کينې خواته انتقال شي، د

گراف لاس ته راخي.

2- که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه سبي خواته انتقال شي، د

تابع گراف لاس ته راخي.

پوښتني

1- د $y = x^2$ تابع گراف له انتقال خخه د لاندېنیو تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

$$g(x) = x^2 - 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = (x - 2)^2$$

2- د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ تابع گراف رسم کړئ او ددي له انتقال خخه د او

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$
 تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع گراف رسم کړئ او ددي گراف له انتقال خخه د

$$h(x) = |x - 4| \quad , \quad g(x) = |x + 4| \quad , \quad g(x) = |x| + 4$$
 تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ تابع گراف له انتقال خخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x - 3)^3$ تابع

گانو گرافونه رسم کړئ.

د تابع گانو عملی

(Operations on functions)

$$f(x) = \sqrt{4-x}$$

$$g(x) = \sqrt{3+x}$$

$$(f+g)(x) = ?$$

که $g(x) = 2x + 11$ او $f(x) = x + 2$
وی پیدا $(f-g)(x)$ او $(f+g)(x)$
کولای شی؟

د تابع گانو خلورگونی عملی په لاندې چوں تعريف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \left(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\right) \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\text{dom}(f+g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f-g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f \cdot g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g - \{x / g(x) = 0\}$$

لومړۍ مثال: که $f(x) = 2x + 1$ او $g(x) = x^2 - 4$ وی، $(f+g)(x)$ پیدا کړئ او هم

د دې تابع د تعريف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f+g)(x) = (2x+1) + (x^2 - 4) = 2x - 3 + x^2 = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{dom } g = IR \quad \text{او} \quad \text{dom } f = IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x) = IR \cap IR = IR$$

دویم مثال: که $f(x) = x^2 - 3$ او $(f+g)(x) = 4x + 5$ وی، $g(x) =$

پیدا کړئ.

حل:

$$(f+g)(x) = (x^2 - 3) + (4x + 5) = x^2 + 4x + 2$$

$$(f+g)(3) = 3^2 + 4(3) + 2 = 9 + 12 + 2 = 23$$

$$\text{dom } g = \mathbb{R} \quad \square \quad \text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{dom}(f+g)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

فعالیت



که $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ پیدا کری و دلیل این را بفرمایی کنی.

دریم مثال: که $f \cdot g$ که $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ و $f \cdot g(x) = (2x - 1)(x^2 + x - 2)$ پیدا کری او دلیل این را بفرمایی کنی.

حل $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 1)}$

$$(f-g)(x) = (2x-1) - (x^2+x-2) = 2x-1-x^2-x+2 = -x^2+x+1$$

خزنگه چې $\text{dom } g = \mathbb{R}$ و $\text{dom } f = \mathbb{R}$

$$\text{dom}(f-g)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x-1)(x^2+x-2) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

$$\text{dom}(f \cdot g)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{x / g(x) = 0\}$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \text{ و } x \neq 1\}$$

فعالیت



که $f(x) = x - 5$ و $g(x) = x^2 - 1$ پیدا کری و دلیل این را بفرمایی کنی.

څلورم مثال: که $f(x) = x + 3$ او $g(x) = x - 1$ وی، $(f \cdot g)(x) , (f - g)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x + 3 - (x - 1) = x + 3 - x + 1 = 4$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$$

خرنگه چې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې ټول حقیقی عددونه شامل دي (X هر حقیقی عدد اخیستلای شي) یا $dom g = IR$ په همدي چول:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{x-1} \quad (x \neq 1)$$

$$dom(f - g)(x) = IR \cap IR = IR$$

$$dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = IR - \{1\}$$

$$dom(f \cdot g)(x) = IR \cap IR = IR$$

$$dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \{x \in IR / x \neq 1\}$$

یا

$$dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

یا

پنځوم مثال: که $f(x) = \sqrt{4-x}$ او $g(x) = \sqrt{3+x}$ وی، $f \cdot g , f - g , f + g$ پیدا کړئ او د تعريف ناحیه (Domain) یې وټکړئ.

حل:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{3+x}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{3+x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x}) = \sqrt{(4-x)(3+x)}$$

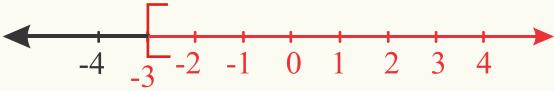
$$= \sqrt{12+x-x^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}} = \sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$$dom f : \{4-x \geq 0 , x \leq 4\} \text{ یا } (-\infty , 4]$$

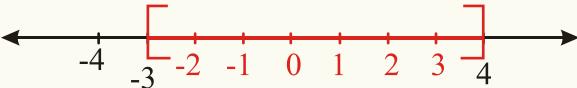


$\text{dom } g : \{x / 3+x \geq 0, x \geq -3\}$ يا $[-3, \infty)$

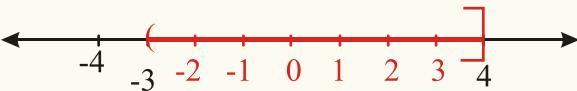


$$(-\infty, 4] \cap [-3, \infty) = [-3, 4]$$

چې $[-3, 4]$ د تابع ګانو د تعريف ساھه ده.



د $\frac{f}{g}$ د تعريف په ناحیه کې خرنګه چې $g(-3) = 0$ دی، نو: $\text{dom } \frac{f}{g}$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$$(c f)(x) = c \cdot f(x)$$

شپږم مثال: که $c = 5$ او $f(x) = x^2 - x + 2$ وي.

$$(5 f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$$

پونستې

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسی.

$\frac{f}{g}(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(f - g)(x)$ ، $(f + g)(x)$ - 1 پیدا کړئ.

- د تعريف ناحیې یې وټاکۍ.

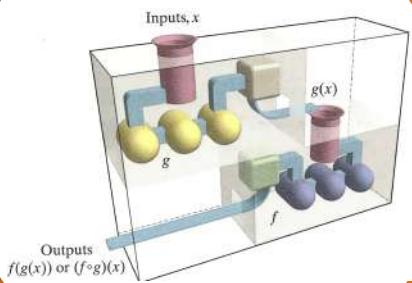
$$a: f(x) = 2x + 3 \quad , \quad g(x) = x - 1 \quad , \quad b: f(x) = x - 5 \quad , \quad g(x) = 3x^2$$

$$c: f(x) = 2x^2 - x - 3 \quad , \quad g(x) = x + 1 \quad , \quad d: f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x - 5$$

$$e: f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad f: f(x) = \sqrt{3x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

د تابع گانو ترکیب یا مرکبی تابع گانی

composition of functions or
composite functions

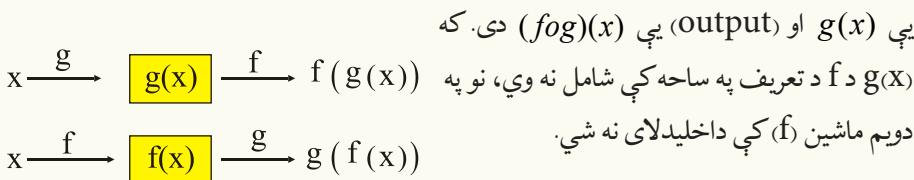


فعالیت

- که چې f او g د x تابع گانې وي د ترکیب له g سره د $(f \circ g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره بنودل کېږي $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$
- د $(f \circ g)(x)$ د تعريف ساحه عبارت له x څخه د g د x د تعريف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعريف په ساحه کې شامل وي.
- $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{IR} / x \in \text{dom } g, g(x) \in \text{dom } f\}$

- چې x د g د تعريف په ساحه کې شامل وي.
- $f(g(x))$ د f د تعريف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f \circ g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه بنودل شوي ده چې په لومړی ماشین (input) کې ورودي x ، او خروجي (output) یې $g(x)$ ده، په دویم ماشین کې (input) یې $f(g(x))$ او $f(g(x))$ یې $(f \circ g)(x)$ ده. که



لومړۍ مثال: که $f(x) = x^2 - 1$ او $g(x) = 3x$ وي $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 - 1 = 9x^2 - 1$ پیدا کړي.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 - 1 = 9x^2 - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$$

لیدل کېږي چې:
 $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
 $9x^2 - 1 \neq 3x^2 - 3$

دويں مثال: که $f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = x^2 + 6$ وي $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 6) = 3(x^2 + 6) - 4 = 3x^2 + 18 - 4 = 3x^2 + 14$ پیدا کړي.

حل: په حقیقت کې په $(f \circ g)(x)$ کې د f تابع د g تابع د په Domain، يا x خای نیسي

$$f(g(x)) = f(x^2 + 6) = 3(x^2 + 6) - 4 = 3x^2 + 18 - 4 = 3x^2 + 14$$

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = g(3x - 4) = (3x - 4)^2 + 6 = 9x^2 - 24x + 22$$

بنکاره خبره ده چې د $(f \circ g)(x)$ او $(g \circ f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقی عددونه دي.

فعالیت

که $f(x) = x + 6$ او $g(x) = x - 6$ وي، وبنیاست چې $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ د.

دریم مثال: که $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = 1 - x$ وي:
 لومړۍ د fog او fog د تعریف ساحې پیدا کړي، بیا $f \circ g$ او $g \circ f$ په لاس راوړئ.
حل: د f تابع د تعریف ساحه $(-\infty, \infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقی عددونه $(0, \infty)$ د.

$\text{Dom } f = [0, \infty)$ $\text{Dom } g = (-\infty, \infty)$ دی.
 $\text{Dom}(f \circ g) = \{x / x \in \text{dom } g, g(x) \in \text{dom } f\}$ یا:

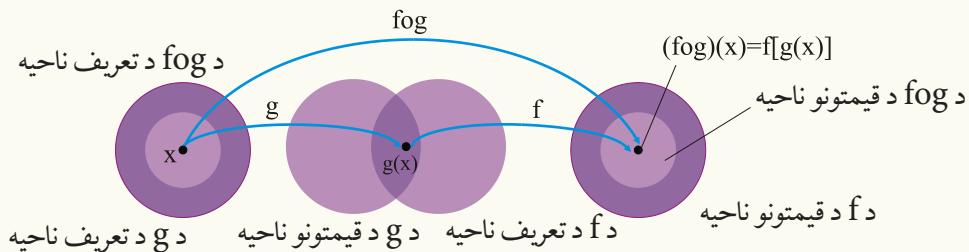
$$\text{Dom}(\text{fog}) = \{x / x \in \text{IR}, 1-x \geq 0\}, -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1 = (-\infty, 1]$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x / x \in \text{dom } f, f(x) \in \text{dom } g\} = \{x / x \geq 0, \sqrt{x} \in \text{IR}\} = (0, \infty]$$

$$(f \circ g)(x) = f(1-x) = \sqrt{1-x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$$

د مرکبو تابع گانو د تعريف د ساحې د لا روښاتیا لپاره لاندې شکل وګوري.



څلورم مثال: که $h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ وي، په دوو طریقو سره و بشیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو

دوو تابع گانو له ترکیب خخه په لاس راغلي ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شود $(j \circ k)(x)$ او $(g \circ f)(x)$ دوو تابع گانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې دول که: $g(x) = \sqrt{x}$ او $f(x) = 3x^2 + 1$ وي.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 1) = \sqrt{3x^2 + 1}$$

په هملي چوکولای شود $(j \circ k)(x)$ د دوو تابع گانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې

چوکولای شود $k(x) = 3x^2$ او $j(x) = \sqrt{x+1}$ وي.

$$(j \circ k)(x) = j(k(x)) = j(3x^2) = \sqrt{3x^2 + 1}$$

پنځم مثال: که $(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(2)$ وي، $(f \circ f)(2) = f(f(2))$ او $f(2) = \frac{x}{x+2}$ پیدا کړي.

حل:

$$(f \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2} + 2} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x+2x+4}{x+2}} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{3x+4} = \frac{x}{3x+4}$$

$$(f \circ f)(2) = ? \quad (f \circ f)(x) = \frac{x}{3x+4} \Rightarrow (f \circ f)(2) = \frac{2}{3 \cdot 2 + 4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(x) &= \frac{\frac{x}{x+2}}{3\left(\frac{x}{x+2}\right)+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}} \\ &= \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{7x+8} = \frac{x}{7x+8}\end{aligned}$$

فعالیت

که $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = x + 3$ او $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ پیدا کړي.

پوښتني

که $f(x) = -3x + 2$ و $g(x) = x^3$ او $(f \circ g)(x)$ پیدا او د تعریف ساحې تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړي.

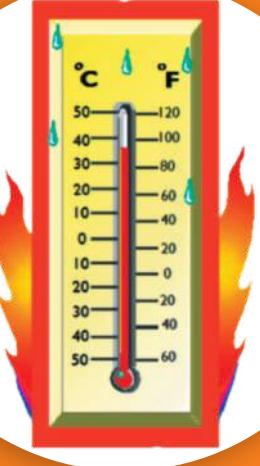
که $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ او $(f \circ g)(x)$ پیدا کړي.

که $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ او $(f \circ g)(x)$ پیدا کړي.

که $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = x^2$ او $(g \circ f)(3)$ پیدا کړي.

که $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ او $f \circ g$ و $g \circ f$ پیدا کړي.

که $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $g(x) = x^{10}$ او $(f \circ goh)(x)$ پیدا کړي.



فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع ګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، د اسې تابع په خه نامه یادېږي؟
- که د f تابع معکوس g یوه تابع ده، او $g = \{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ او $f = \{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ وی آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده؟
- که $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ وی، آیا g د f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو تېرمامیټر لیدل کېږي او پوهېږو چې د سانتي گرباه او فارنهایت د تودونځې د درجو ترمنځ د $f = \frac{9}{5}c + 32$ اړیکه شته دي، که دا معادله د (C) له پاره حل شي لرو چې:

$$f = \frac{9}{5}c + 32 \Rightarrow f - 32 = \frac{9}{5}c + 32 - 32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f - 32) = \frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c = \frac{5}{9}(f - 32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x, y) رابطې معکوس له (y, x) خخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعريف له ساحې خخه عبارت ده.

$$domain f^{-1} = Range f \text{ او } Range f^{-1} = dom f$$

د f د تابع معکوس په f^{-1} بشودل کېږي، پام مو وي چې:

$$(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)})$$

لومړۍ مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \quad f^{-1}(7) = 3$$

$$f(1) = 5 \quad f^{-1}(5) = 1$$

$$f(8) = -10 \quad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خوکه $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ وي، $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د x لپاره دوه مختلف تصویرونه په $f(2) = 3$ او $f(2) = 1$ کې وجود لري.

نود هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکي نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړې او دویمو عناصر څایونه ېړی یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راخې، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس ېړی هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکي ده.

دویم مثال: آيا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکي دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنۍ او دویمو عناصرو څایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنۍ

عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

لیدل کېرى چې g^{-1} ياد ($g(x)$ معکوس تابع نه ده، ئىكە د $x=1$ لپاره دوه قىمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونكى تابع نه ده.

په لنډ ډول خرنگە چې f يو په يو تابع ده، نو معکوس منونكى ھم ده او د g تابع چې يو په يو تابع نه ده، نو معکوس منونكى ھم نه ده.

نتيجه: يوازى د يو په يو تابع معکوس ھم يوه تابع وي.

يو په يو تابع (one-to-one function)

د (x) تابع يوه يو په يو تابع ده كە چېرى $x_1 \neq x_2$ وي او په نتيجه كې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

يا : $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$ او كە $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

كه يوه تابع يو په يو وي، نو معکوس بې ھم يوه تابع ده.

درېم مثال: كە 12 او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي، وبنیاست چې كومه يوه له

دي تابع گانو خخە يو په يو تابع ده؟

حل: كە $a \neq b$ وي، $12 \neq -4b + 12$ ده.

نو (x) يوه يو په يو تابع ده.

$f(2) = -4(2) + 12 = -8 + 12 = 4$ دمثال په ډول: كە $x = 2$ وي:

كه $x = 3$ وي:

$$f(3) = -4(3) + 12 = -12 + 12 = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $(f(x))$ يو په يو تابع ده. او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ لپاره:

كه $x = 3$ وي.

$g(3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ كە $x = -3$ وي.

$g(-3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

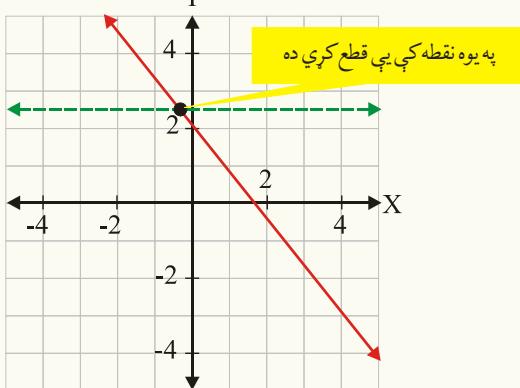
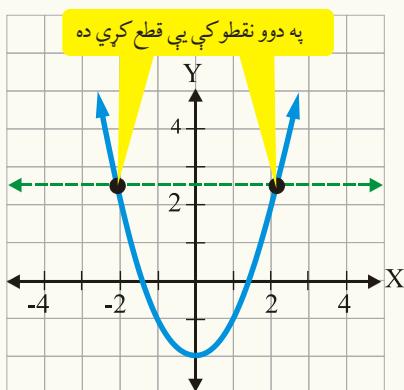
لېكىن $3 \neq -3$ نو $(g(x))$ يو په يو تابع نه ده.

فعاليت

كه $g(x) = x^2$ او $f(x) = 3x + 8$ وي، وبنیاست چې كومه يوه تابع يو په يو تابع ده او كومه يوه تابع يو په يو تابع نه ده؟ ولې؟

د گراف له مخي د يو په يو تابع پيژندنه: که يو افقي خط چې د X له محور سره موازي وي د تابع گراف په يوه نقطه کې قطع کړي، دا يو په يو تابع ده، که افقي خط د تابع گراف له يوې نقطې خخه په زیاتون نقطوکې قطع کړي، نو دا گراف د يو په يو تابع گراف نه ده.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونوکې ليدل کېږي چې د X له محور سره موازي خط لوړنۍ تابع گراف په يوه نقطه کې او د دويمې تابع گراف يې په دوو نقطوکې قطع کړي ده، نو لوړنۍ تابع يو په يو تابع ده، خو دويمې تابع يو په يو تابع نه ده.



د معکوسی تابع تعريف: که f يوه يو په يو تابع وي چې د تعريف ساحه پې X او د قيمتونو ساحه پې y ده، نو د g د تابع f د معکوسه تابع ده، که د g د تعريف ساحه y او د قيمتونو ساحه پې X وي او یاد g تابع په هغه صورت کې f د تابع معکوسه ده که چېږي:

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

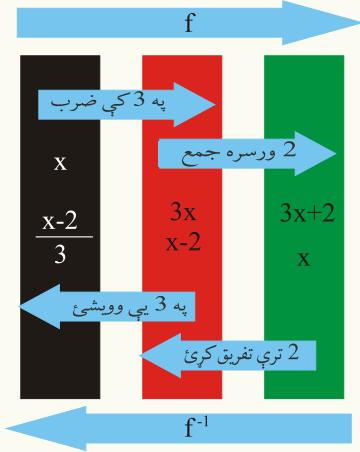
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $(f^{-1}(x))$ د تابع معکوسه تابع $f(x)$ پیدا کړئ.
حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$

$$x = 3y + 2$$

$$3y = x - 2$$



$$y = \frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

دا مثال په لند ډول په شکل کې هم بنودل شوي دي.

له بلې خواکه $g(x) = \frac{x-2}{3}$ سره وبنودل
شي، $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ دي.

حکه چې:

$$(f \circ g)(x) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{3x+2-2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

يا: $f(f^{-1}(x)) = x$ او $f^{-1}(f(x)) = x$

شپږم مثال: که $f^{-1}(x)$ او $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = x^2$ پیدا کړي.

حل:

$$y = x^3 + 1$$

$$x = y^3 + 1 \Rightarrow y^3 = x - 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \text{ سره وبنيو، نو } f^{-1}(x) = y$$

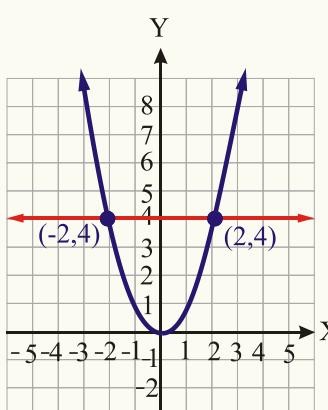
$$g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدللوو.

$$y = \pm\sqrt{x} \text{ يا } g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

ليدل کېږي چې $g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ یوه تابع نه ده، حکه چې که

اويا $x = 2$ و، $g(2) = 4$ او $g(-2) = 4$ کېږي شکل وګوري نو د $g(x)$ تابع معکوس پذيره نه ده.



اوم مثال: د x د کوم قمیت لپاره د $f(x) = 5x - 2$ تابع له خپل معکوس سره مساوی کېږي؟
حل: که $y = 5x - 2$ وي، نو معکوس یې

$$x = 5y - 2 \Rightarrow 5y = x + 2$$

$$y = \frac{x+2}{5} \quad f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5} = 5x - 2 \Rightarrow 24x = 12$$

$$x = \frac{1}{2}$$

نود $x = \frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلی معکوسی تابع سره مساوی کېږي.

اهم مثال: وسیاست چې د $f(x) = 7x - 2$ او $g(x) = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}$ تابعگانی یو د بل معکوسی تابع گانې دي.
حل:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}\right) = 7\left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}\right) - 2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = g(7x - 2) = \frac{1}{7}(7x - 2) + \frac{2}{7} = x$$

نود $f(x)$ او $g(x)$ تابع گانې یو د بل معکوسی تابعگانی دي، نو نتیجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسی تابع ترکیب د عینیت $(f(x) = x)$ تابع د.

فعالیت

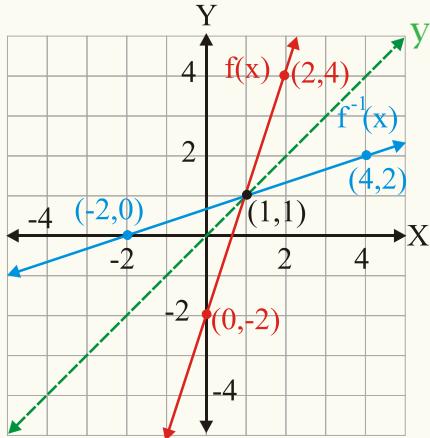
$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{که} \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{وی،} \quad f^{-1}(x) \quad \text{پیدا کړئ او هم وسیاست چې} \quad f^{-1}(x) \quad \text{کېږي.}$$

د تابع او د هغې د معکوسی تابع ګراف: د $f(x)$ د یو په یو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ یوه رابطه موجوده ده، خکه که چېږي (a, b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ یوه نقطه وي، نود (b, a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پر مخ واقع ده چې (a, b) او (b, a) نقطې له نظره د $y = x$ خط ته سره متناظري دي.

نهم مثال: که $f(x) = 3x - 2$ د معکوسه $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ وی، نوبنکاره د چې تابع د. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره بې پرته کړئ چې ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.

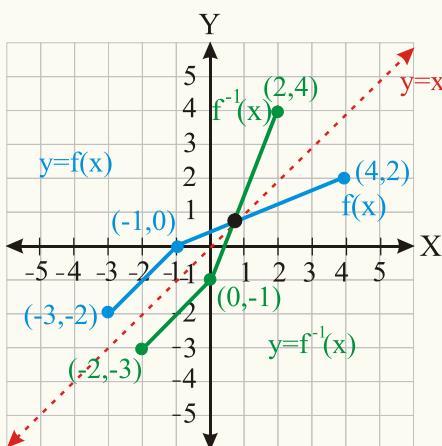
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.

لسیم مثال: که $f(x)$ د $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ او $(2, 4)$ مرتبو جورو لرونکي وي د $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړي او وسیاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.



لیدل کېرىي چې د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ تابع گانو گرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

• د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقى خط) د يو په يو تابع گراف په يوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پیداکولو لپاره د تابع معادله د X لپاره حلوو، بيا x پر y او y پر X بدللوو په لاس راغلى تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.

• د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسی تابع گرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.

Range $f(x) = \text{dom } f^{-1}(x)$ او $\text{dom } f(x) = \text{Range } f^{-1}(x)$ •

پوښتني

1 - د لاندېنيو تابع گانو معکوس پیداکړئ او ووایع چې د کومې تابع معکوس هم يوه تابع ده؟

$$f = \{(-1,0), (-2,1), (4,3), (3,4)\} \quad h = \{(1,4), (2,3), (4,1)\}$$

$$g = \{(1,2), (2,3), (3,2), (4,1)\} \quad k = \{(3,0), (2,-1), (1,2), (0,1), (-1,2)\}$$

2 - د لاندېنيو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیداکړئ او د خپل خواب صحت د $x = f(f^{-1}(x))$ سره واژمایي.

$$f(x) = x + 3$$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f(x) = (x+2)^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

3 - د لاندېنيو تابع گانو گرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقى خط) په واسطه

وبنیاست چې ددوی معکوس هم يوه تابع ده.

$$f(x) = 1 - x^2 \quad g(x) = \frac{7 - 2x}{5}$$

4 - له لاندېنيو تابع گانو څخه کومه يوه يو په يو تابع ده.

$$y = 4x - 5$$

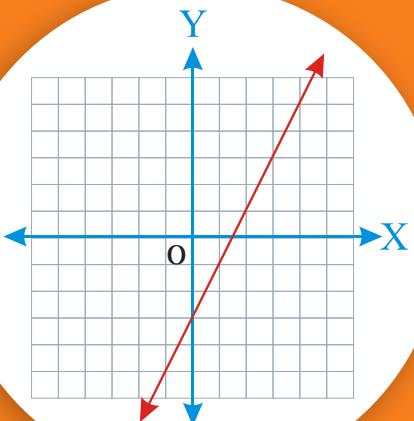
$$y = 6 - x$$

$$y = (x - 2)^2$$

$$y = 9$$

$$y = \frac{1}{x+2}$$

پولینومي تابع گانې



• آيا پوهېږي چې لومړۍ درجې تابع ته ولې
خطي تابع وايي؟

• آيا د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقيم خط
دي؟

پولینومونه مو په لومړۍ فصل کې تر خېړنې لاندې ونيول. هغه پولینوم چې له یوه تورې (متتحول)
څخه جور شوې وي د پولینومي تابع په نامه يادېږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړۍ درجه تابع

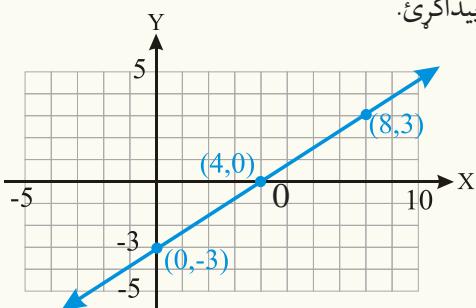
هغه پولینومي تابع د چې درجه يې یوه وي، د لومړۍ درجې تابع عمومي شکل $f(x) = ax + b$ دی چې $a \neq 0$ او b حقيقې عددونه دي.

د مثال په جول: $f(x) = \frac{1}{2}x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = 3x + 4$ خطي تابع ګانې دي.

لومړۍ مثال: د $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیداکړئ.

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	-3



د X له محور سره ګراف د تقاطع نقطه $(0, -3)$ او د Y له محور سره ګراف د تقاطع نقطه $(4, 0)$ د.

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدي سبېه ورته خطی تابع هم وايې، د خطی تابع د ګراف د رسمولو لپاره همداومره کافي د چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع تکي پیدا کړو او مستقیم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې لیدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات هم پیدا کړئ.

دوييم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطی تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د $y = 0$ یا $f(x) = 0$ قيمت صفر دی

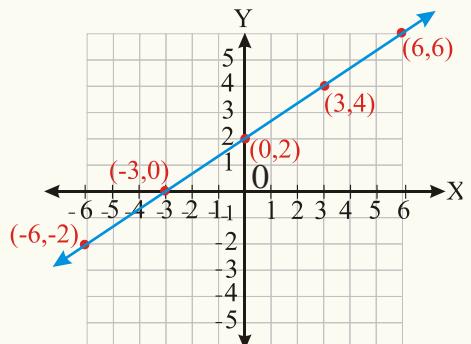
$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع تکي $(-3, 0)$ دی.

د $(2, 0)$ او $(0, -3)$ نقطې یو له بله سره نښلوو او مستقیم خط رسموو او هم کولای شو چې

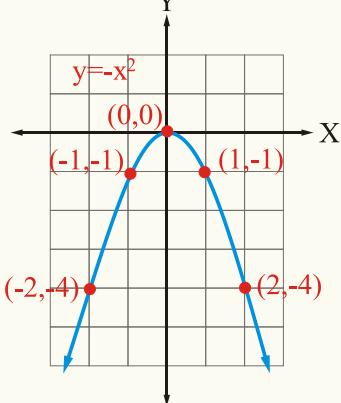
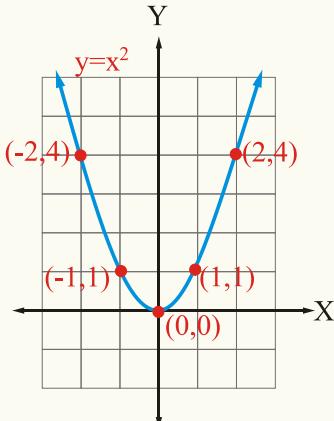
د ګراف یو خونوري نقطې وټاکو چې بر همدي مستقیم خط باندي پرتې دي.

$x =$	0 3 -3 6 -6 ...
$f(x) =$	2 4 0 6 -2 ...



دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او گراف یې:

دا گرافونه د کوم چول تابع گرافونه دی؟



- دا دواړه گرافونه سره خه توپیر لري؟

- له $k(x) = x^2$, $h(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 + 7x + 12$ او

- $r(x) = 2x - 1$ خخه کومه یوه یې دویمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولینومي تابع چې درجه یې یوه وي، لوړۍ درجه یاد خطی تابع (Liner Function)، په نامه یادېږي او که د پولینومي تابع درجه (2) وي، د دویمي درجې تابع په نوم یادېږي.

فعالیت

- د دویمي درجې تابع گراف په کوم نوم یادېږي؟
- د دویمي درجې تابع د گراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دویمي درجې تابع گراف خه وخت پورته خواته او کوم وخت بنکته خواته خلاصېږي؟
- د دویمي درجې تابع د گراف رأس په کوم وخت کې اصغری (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آیا د دویمي درجې تابع گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دویمي درجې تابع گراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آیا د X او Y له محورونو سره د دویمي درجې تابع د گراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا

کولای شی؟

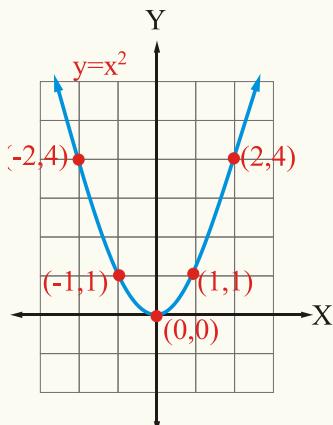
ددويمې درجي تابع عمومي شكل دى چې a ، b او c حقيقى عددونه او $a \neq 0$ دى.

د دويمې درجي تابع گراف: ترقولو ساده دويمه درجه تابع

د $f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع د چې $a = 1$ او $b = c = 0$ که X ته يو خو قيمتونه ورکړل شي د تابع يا y اپونده قيمتونه

لاس ته راولپلاي شو، گراف یې رسم کېدای شي لکه: خنګه چې په شكل کې ليدل کېږي.

دويمې درجي تابع گراف د پارابولا (Parabola) په نوم يادېږي چې دا گراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس خخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د متناظر د محور په نامه يادېږي چې د y محور ددي تابع د گراف د متناظر د محور دی.

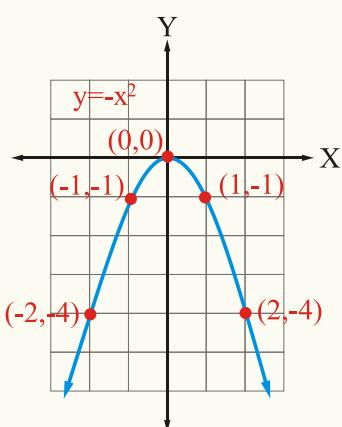


x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

هغه نقطه چې د متناظر د محور په کې گراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه يادېږي. که $a > 0$ وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د گراف د رأس تکي اصغری دی د تابع گراف د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0, \infty)$ په انټروال کې گراف متزايد دی.

لومړۍ مثال: د $y = -x^2$ تابع گراف رسم کړئ.
حل:

د پارابول خوله بنکته خواته خلاصېږي، حکمه چې $a < 0$ دی، د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې گراف متزايد او د $(0, \infty)$ په انټروال کې گراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

فالیت

د ۴ تابع گراف رسم کړي.

دویم مثال: د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ او $g(x) = 2x^2$ ، $f(x) = x^2$ په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړي.

$$g(x) = 2x^2$$

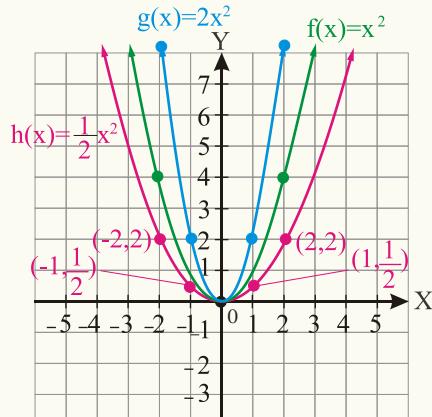
$x =$	0	1	-1	2	-2
$g(x) =$	0	2	2	8	8

$$f(x) = x^2$$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

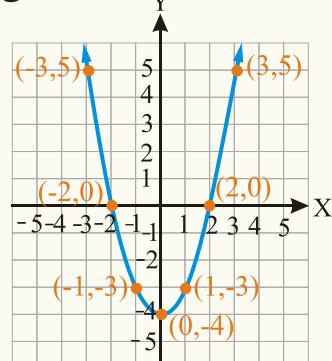
$$h(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$h(x) =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د تابع گراف رسم کړي.

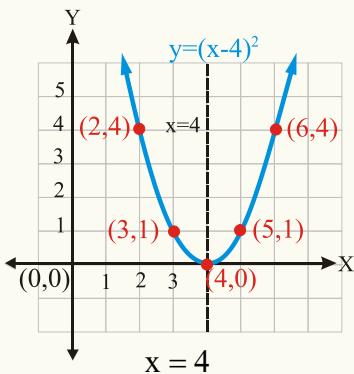
x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5



په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع گراف 4 واحده بنکته خواته نقل شوي دي.

څلورم مثال: د $y = (x - 4)^2$ تابع گراف رسم کړي.

حل: که X ته یو خو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع گراف رسیدلای شي لکه:

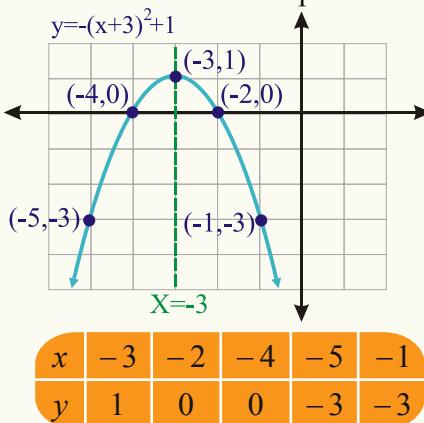


x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېرىي چى گراف د $(-\infty, 4)$ په انټروال کېي متناقص او د $(4, \infty)$ په انټروال کېي متزايد دى. لە شکل خە لیدل کېرىي چى د $y = x^2$ گراف په افقىي چوول 4 واحدە بىي خواتە انتقال شوي دى دپارابول رأس د $(4, 0)$ تكى دى او د تناظر محور بىي $x = 4$ مستقىم خط دى.

پنخىم مثال: د $y = -(x+3)^2 + 1$ تابع گراف

رسم كرئى.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

د $y = x^2$ گراف درى واحدە كىنې خواتە او يو واحد په عمودى چوول پورتە خواتە نقل شوي دى او د پارابول راس د $(-3, 1)$ تكى د گراف اعظمى نقطە او د تناظر محور بىي $x = -3$ دى چى پە شکل كېي هم لیدل کېرىي.

فعاليت

د $y = 3x^2$ او $y = -3x^2$ تابع گانو گرافونه رسم كرئى.

د X او Y لە محورونو سره د گراف د تقاطع تكى:

ددى لپارە چى پە اسانى سره پارابول رسم كرۇ، د X او Y لە محور سره يې د تقاطع تكى پيدا كوو (كە چېرىي د X لە محور سره تقاطع ولرى)

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پيدا کولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې $x=0$ وضع کېږي په نتیجه کې $y=c$ دی.

د X له محور سره د تقاطع د پيدا کولو لپاره $0 = y$ وضع کوو، نول رو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

خرنگه چې پوهېږي $ax^2 + bx + c = 0$ يوه دويمه درجه معادله ده او جذرونه يې

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

چې $b^2 - 4ac < 0$ وي، که $b^2 - 4ac \geq 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ

ډول يې په لاندې جدول کې وګوري:

تابع ګراف ۵

د دويمې درجي تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې	a
په هغه صورت کې د X محور په يوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.	b
په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.	c

د پارabol د راس د نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول:

د تکمیل مریع په طریقه هم کولای شو چې د پارabol د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a \left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 \right] + c$$

$$= a \left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

د پارابولا د رأس د تکي وضعیه کمیات $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ او یا (h, k) دی او خرنگه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس خخه تبریدي، نو $x = -\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده. که چېري $a > 0$ وي، رأس اصغری (Minimum) او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي (Maximum).

شپړم مثال: د $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ تابع ګراف رسم کړئ.

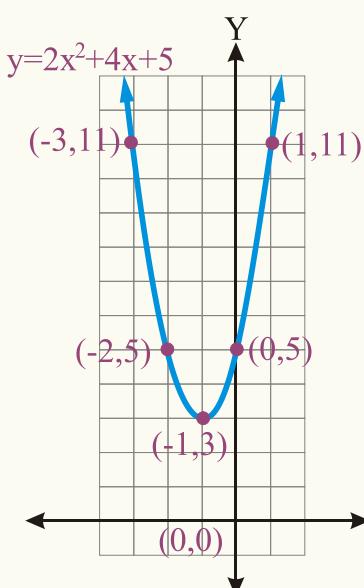
1- د X له محور سره د تقاطع تکي پيداکړو. خرنگه چې 2 د $b = 4$ او $c = 5$ دی. $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24 < 0$ کوي.

2- د Y له محور سره د تقاطع تکي پيداکړو په دی حالت کې $x = 0$ دی.

د $y = ax^2 + bx + c$ په تابع کې که $x = 0$ شي $y = c$ کېږي، نو $y(0, c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده.

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5$$

نو په دې مثال کې $(0, 5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



$f(x) = 2x^2 + 4x + 5$					
$x =$	-1	-2	0	1	-3
$f(x) =$	3	5	5	11	11

3- د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دی له:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - 4^2}{4 \cdot 2} = \frac{40 - 16}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

(-1, 3) د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دی او رأس اصغری دی، خکه چې $a > 0$ دی.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{4} = 1$$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x = -1$ ده، د ګراف د تناظر کولای شو د ګراف یو خو ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو خو نوري نقطې هم پيداکړو:

اوم مثال: د تابع گراف رسم کړئ. $y = -3x^2 - 2x + 1$

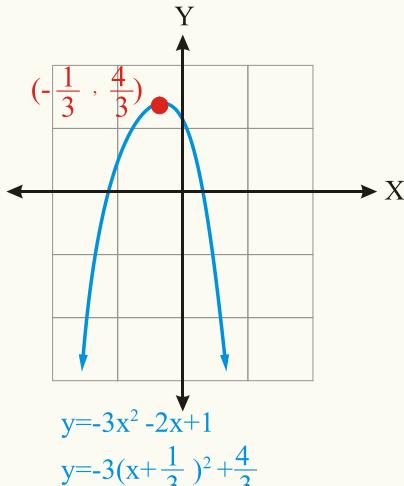
$$y = -3(x^2 + \frac{2}{3}x) + 1$$

د x د ضریب نیمایی مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y = -3\left[x^2 + \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2\right] + 1$$

$$y = -3\left[x^2 + \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2\right] - 3(-\frac{1}{9}) + 1 = -3\left[(x^2 + \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2)\right] + \frac{4}{3}$$

$$y = -3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{4}{3}$$



په نتیجه کې $x = -\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، خکه
چې $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ او $x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$:
رأس د پکي وضعیه کمیات دي او خرنګه چې $a < 0$
دي، نو د پارابولا رأس اعظمي دي.

یادداونه: که دویمه درجه تابع د $y - k = a(x - h)^2$
يا $y = a(x - h)^2 + k$ په شکل ولیکل شي
د تناظر د محور معادله او (h, k) درأس د نقطې وضعیه
کمیات دي.

$f(x) = ax + b$ د لومړۍ درجې يا خطې

تابع عمومي شکل دي.

او د دویمي درجې معادلي عمومي شکل دي. $y = ax^2 + bx + c$ (ا $\neq 0$)

دویمي درجې تابع گراف ته پارابول (Parabola) وایي که $a > 0$ وي، رأس اصغری او که $a < 0$ وه، رأس اعظمي دي. $x = -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}$ د پارابولا درأس وضعیه کمیات او د تناظر د محور معادله ده. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

پونتني

د تابع $h(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ گراف رسم کړئ.

تابع $g(x) = 2x + 1$ د $g(x) = 2x - 1$ او $g(x) = 2x + 1$ د ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتلہ یې کړئ.

$f(x) = \frac{1}{3}x^2$ او $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، $f(x) = 3x^2$ ، $f(x) = 2x^2$ ، $f(x) = x^2$ د 3

تابع $g(x)$ د ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتلہ کړئ

4 - د لانډي تابع $g(x)$ د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x) = x^2 + 8x + 13$ ، $f(x) = x^2 - 12x + 30$ ، $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$

تابع $h(x) = (x - 3)^2$ او $g(x) = (x + 1)^2$ ، $f(x) = (x - 2)^2$ د 5

کړئ او وویاست چې د $f(x) = x^2$ له ګراف سره خه اړیکه لري؟

6 - د $y = -x^2 - 1$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

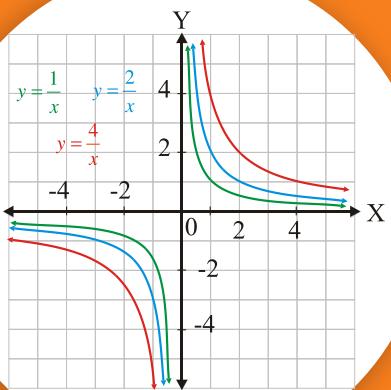
a : (-1, 1) b: (1, -1) c: (0, -1) d : (0, 1)

7 - د $y = (x - 1)^2 - 2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : (1, 1) b: (-1, 2) c: (-1, -2) d : (1, -2)

ناطقی یا نسبتی تابع گانی (Rational functions)

دا شکل د کوم چول تابع گانو گرافونه دي؟



فعالیت

- آیا د ناطقی تابع د عمودی مجانب معادله پیدا کولای شئ؟
- آیا د هری ناطقی تابع د تعريف په ساحه کې ټول حقیقی عددونه شاملیدلای شي؟
- آیا د یوپی ناطقی تابع افقی مجانب پیدا کولای شئ؟
- آیا هره ناطقه تابع عمودی مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولینومي تابع گانو له خارج قسمت خخه جوره شوي وي که $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ یوه ناطقه تابع ده.

ناطقی تابع د تعريف ساحه ټول حقیقی عددونه دي، پرته د X له هغونه قميتونسو خخه چې د ناطقی تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $h(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$ ، $f(x) = \frac{1}{x}$ او $P(x) = 2x^2 - 3$ د ناطقی تابع گانې دي.

فعالیت

آیا $k(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ یوه ناطقه تابع ده؟ ولې؟

د ناطقې تابع د تعريف د ساحې پیدا کول (Finding Domain of Rational function)

لومړۍ مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د هرې یوې د تعريف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 9}, \quad h(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x = 3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی یا: $\{x / x \in IR, x \neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېږي $x = 3$ یا $x = -3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او -3 عددونه د $g(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

$$Dom\ g(x) = \{x / x \in IR, x \neq 3, x \neq -3\}$$

خرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د X په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعريف ساحه ټول حقيقې عددونه دی.

$$Dom\ h(x) = IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x) = (-\infty, \infty)$$

فعالیت

د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې تعین کړئ.

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 25}, \quad h(x) = \frac{x + 5}{x^2 + 25}$$

دویم مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعريف او قيمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 4}, \quad g(x) = \frac{x - 3}{x + 5}$$

حل: د $f(x)$ تابع د تعريف ساحه پرته له (4) څخه ټول حقيقې عددونه دی.

$$dom f(x) = IR \setminus \{4\} \quad \text{يا} \quad IR - \{4\}$$

$$y = f(x) = \frac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$$

$$xy - x = 4y + 3$$

$$(y-1)x = 4y + 3$$

$$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow x = \frac{4y + 3}{y - 1}$$

$$Range f(x) = IR \setminus \{1\} \quad \text{يا} \quad IR - \{1\}$$

د (X) تابع د تعريف ساحه ټول حقيقی عددونه دي، پرته له (5-) خخه:

$$dom g(x) = IR - \{-5\} \quad \text{يا} \quad \{x \in IR / x \neq -5\}$$

$$g(x) = y = \frac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$$

$$x = \frac{-5y-3}{y-1} \quad Range g(x) = IR - \{1\} \quad \text{يا} \quad \{y \in IR / y \neq 1\}$$

فعاليت

د لاندي راکړل شوو ناطقو تابع ګانو د تعريف او قيمتونو ساحي پيدا کړئ.

$$h(x) = \frac{1}{x^3}, \quad k(x) = \frac{x+1}{3}, \quad r(x) = \frac{4x-1}{2-x}, \quad m(x) = \frac{x}{3x-2}$$

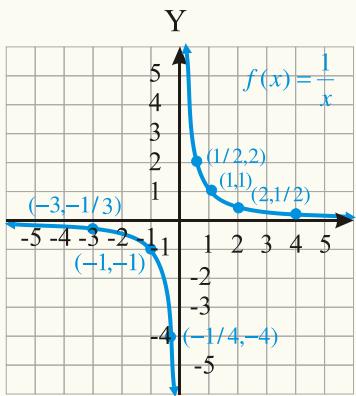
د ناطقي تابع د ګراف رسوم (Graphing Rational function)

درېم مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom f = IR - \{0\}$$

x	... -4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4...
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...



او س د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:
 شرنگه چې $f(x)$ د $x = 0$ تابع د تعريف په ناحیه
 کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره X
 ته د اسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو خخه صفر
 ته نزدې شي (تقریب وکړي)، که X له کینې خوا خخه
 صفر ته نزدې شي ($x \rightarrow 0^-$) د تابع قیمت ∞
 ته نزدې کېږي ($f(x) \rightarrow -\infty$) او که X له بنې خوا
 خخه صفر ته نزدې کېږي، ($x \rightarrow 0^+$) د تابع قیمت
 ∞ + ته تقریب کوي ($f(x) \rightarrow \infty$) لاندې جدول وګورئ.
 X له کینې خوا خخه صفر ته نزدې کېږي. a

x	... -1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$x \rightarrow 0^-$
$f(x) = \frac{1}{x}$... -1	-2	-10	-100	-1000	$f(x) \rightarrow -\infty$

x	$0^+ \leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\infty \leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکټور، ونه لري او
 $p(a) \neq 0$ وي، که $g(a) = 0$ شي، نو د $x = a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې
 د y له محور سره موازي دي. د عمودي مجانبوو شمېر د مخرج د جذرنوو له شمېر سره مساوی دي
 يا په بل عبارت که $a \rightarrow x$ په نتیجه کې $\rightarrow +\infty$ يا $\rightarrow -\infty$ ، نو د $x = a$ د تابع عمودي
 خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:
 $x \rightarrow a \Rightarrow |f(x)| \rightarrow \infty$

X هر خومره چې د a قيمت ته نزدې شي، خود تابع ګراف د $x = a$ مستقيم خط قطع کولای نه شي، څکه چې د a عدد د تابع دتعريف په ساحه کې شامل نه دي، لکه: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع دتعريف په ساحه کې صفر شامل نه دي، نو $0 = x$ یا د Y محور د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع عمودي مجائب دي.

څلورم مثال: د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ او $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$ ، $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ تابع ګانو عمودي مجابونه پیداکړئ.

حل:

1 - د $f(X)$ تابع د عمودي مجائب د پیداکولو لپاره د X هغه قيمت پیداکوو چې د $f(X)$ تابع مخرج پري صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع دتعريف په ساحه کې شامل نه دي.
 $domf(x) = \{x / x \in IR, x \neq 3\}$

نو د $x = 3$ خط د $f(X)$ تابع عمودي مجائب دي.

- 2

$$g(x) = \frac{x}{x^2-25} = \frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

د $x=5$ او $x=-5$ لپاره د $g(X)$ تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د $g(X)$ د تابع دتعريف په ساحه کې شامل نه دي.

$$domg(x) = \{x / x \in IR, x \neq -5, x \neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجابونه د 5 او $x = -5$ خطونه دي.

3 - خرنګه چې د X په هر قيمت د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجائب نه لري يا ددي تابع دتعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

افقی مجائب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو بنکاره خبره ده چې دوبش

حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دي ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y = b$ افقی خط ددي تابع افقی مجانب دی چې دا خط يا د X محور او يا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توanonو د ضریبونو له نسبت خخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج ویشو.

د مثال په ډول د $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ د تابع افقی مجانب د $y = 2$ خط دی.
افقی مجانب داسې تعريفوو:

که $x \rightarrow \infty$ يا $x \rightarrow -\infty$ او په نتیجه کې b $\rightarrow f(x)$ نو $y = b$ مستقیم خط د $f(X)$ تابع افقی مجانب دی او یا که $\infty \rightarrow |x| \rightarrow b$ او $y = b$ نو $y = b$ مستقیم خط ددي تابع افقی مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې

$0 = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $x = 0$ نو د تابع ګراف د X محور په $x = 0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه: $f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$

نو ګراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددي تابع ګراف د وضيعه کمیاتو له مبدأ خخه تېږي.

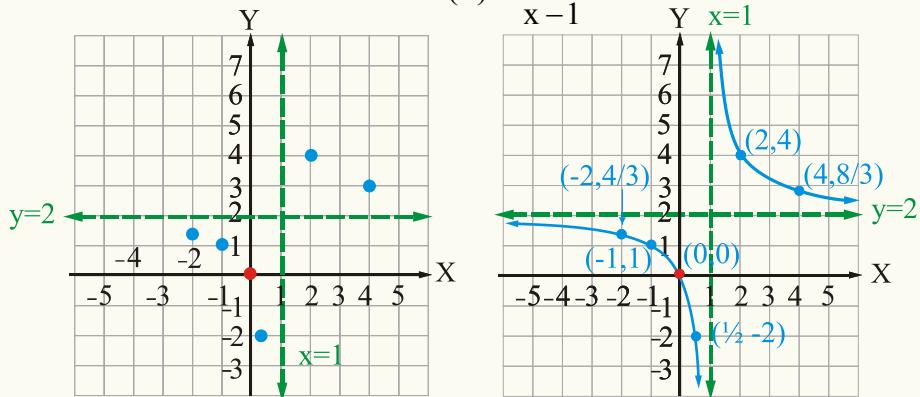
3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د ګراف افقی مجانب د $y = f(x) = \frac{2}{1-x}$ دی، نو $y = f(x)$ د تابع افقی مجانب دی، یا $\frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$ افقی مجانب پې هم رسم کړئ.

5 - د ګراف یو خونوري نقطې هم پیداکوو، لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y = f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بیا یې گراف، لکه: خنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، رسموو.



فعاليت

د $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ د تابع افقی او عمودی مجانبونه پیدا کړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقی مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$1 - \text{د عمودي مجانب معادله } x = 2$$

$$2 - \text{د افقی مجانب معادله } f(x) = y = 1$$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x = 0$ شي، نو $-1 = f(x)$ دی، گراف د Y محور په $(0, -1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x) = 0$ شي، نو:

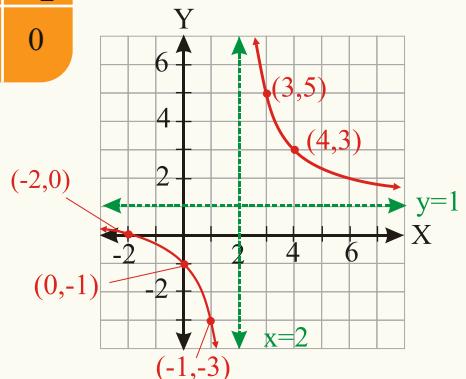
$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

نود $(-2, 0)$ په نقطه کې گراف د X محور قطع کوي.

5 - ددې لپاره چې گراف په اسانه ډول رسم شی، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې خانګې قيمتونه وګوري.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج ووبشو $\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع ګراف دیو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه بنې خواته انتقال شوی دی او $y = f(x)$ د تابع افقی مجانب دی.

مايل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطې تابع د صورت درجه دیو په اندازه د مخرج له درجې خخه زیانه وي بشکاره خبره ده چې تابع افقی مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مايل مجانب لري.

اوم مثال: د $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مايل مجانب د پیداکولو لپاره صورت پر مخرج وپشو، نو لرو چې:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x+1 + \underbrace{\frac{2}{x-1}}_{\text{مايل مجانب}}$$

که $|x|$ هر خومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نزدي کېږي، نو په نتیجه کې ګراف د $f(x) = x+1$ خط ده.

مستقیم خط ته نزدي کېږي چې همدا د $y = x+1$ تابع مايل مجانب دی.

2 - د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه:

$$f(0) = 0 + 1 + \frac{2}{0-1} = 1 - 2 = -1$$

گراف د $(-1, 0)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

- ### 3 - بنکاره خبره ده چی گراف د X محور قطع

کولای نہ شی، خکہ چی $x = \sqrt{-1}$ کپری۔

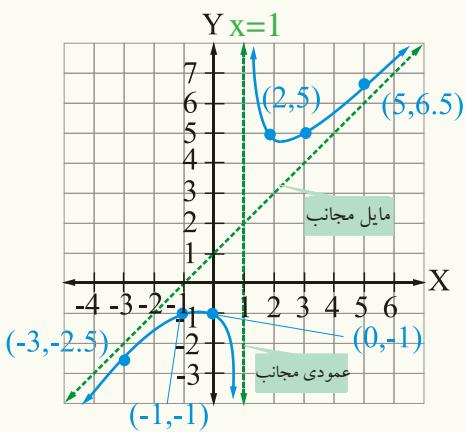
4 - عمودی مجانب یپی

$$\therefore x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

5 - بنکاره ده چی افقی مجانب نه لری.

6 - يو خونوري نقطي پيداکوو او د تابع گراف

رسموو:



x	2	3	5	-1	-3
f(x)	5	5	6.5	-1	-2.5

اتم مثال: د تابع گراف رسم کری.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{خط دی، حکه چی} \quad 1 - \text{تابع عمودی مجانب د}$$

$$\frac{x^2+1}{x-2} = x+2 + \frac{5}{x-2} : \text{وېشولرو چې: } (x-2) \text{ پر } x^2+1 - 2$$

که $|x|$ لوی شی $\frac{5}{x-2}$ صفر ته نردی کبیری او دتابع گراف د $y = x + 2$ خط ته نزدی کبیری

چی $y = x + 2$ خط ددی تابع مایل مجانب دی.

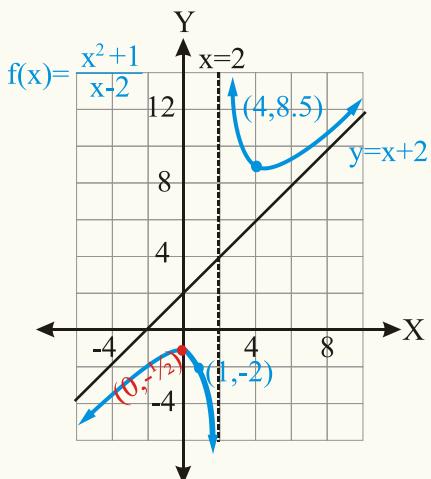
$$f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2} \text{ ده، خکه که } x=0 \text{ شی -}\frac{1}{2} \text{ له محور سره تقاطع -} 3$$

4- گراف د X له محور سره تقاطع نه لري، حکه چي که $f(x) = 0$ شي، نو:

(چې په حقيقی عددونو کې تعریف شوي نه دی)

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او خونرو قيمتونو په مرسته د تابع ګراف

رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x) = \frac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتیب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:
1- که $m < n$ وي د X محور افقی مجانب دی.

2- که $m = n$ وي b د تابع افقی مجانب دی چې b د درجو حدونو د ضریبونو

نسبت دی یا که چېږي $y = \frac{a_n}{b_n} x^n + \dots + a_0$ د $f(x)$ تابع وی، نو $(b_n \neq 0)$.

3- که $m > n$ وي، نو افقی مجانب نه لري.

4- که د صورت درجه دیو په اندازه د مخرج له درجې شخه زیاته وي، نو د تابع ګراف مایل مجانب لري چې په بې نهايیت کې له ګراف سره موازي ګېږي، یوه ناطقه تابع یو یا خو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقی یا مایل مجانب به لري.

3 - د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعريف ساحې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې يې ولیکۍ.

$$f(x) = \frac{5x}{x-4}, g(x) = \frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}, h(x) = \frac{x+7}{x^2-49}, k(x) = \frac{x+7}{x^2+49}$$

4 - له لاندې تابع ګانو خڅه کومه یوه چې عمودي مجانب ولري، پیدا يې کړئ.

$$f(x) = \frac{x}{x+4}, \quad g(x) = \frac{x+3}{x(x+4)} \\ h(x) = \frac{x}{x(x+4)}, \quad k(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

5 - د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x) = \frac{4x}{x-2}, \quad g(x) = \frac{2x}{x-4} \quad \text{تابع افقی مجانب عبارت دی له: } f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$$

$$a: \quad y = 2 \quad b: \quad y = 3 \\ c: \quad y = -2 \quad d: \quad y = -3$$

6 - 7 د تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ او د $f(x) = \frac{3}{x+2}$ د ګراف سره يې پر تله کړئ.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{تابع مایل مجانب پیدا کړئ.}$$

د څېرکي لدېیز

- تابع د دوو سهونو تر منځ داسې یوه رابطه یا قاعده (Rule) ده چې د لومړني ست هر عنصر یوازي او یوازي د دويم ست له یو عنصر سره اړیکه ولري. لومړني ست ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم ست ته د قيمتونو ساحه (Range) وايی یا تابع د هغو مرتبو جورو ست دی چې لومړني عناصر پې تکرار شوي نه وي.
- یوه تابع د $y = f(x)$ په شکل لیکل کېږي، په یوه نقطه کې د تابع د قيمت د پیداکولو لپاره د X راکړل شوي قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راخي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع بنودونکي وي چې د هر X لپاره یو y وجود ولري.
- د یوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي یا د تابع قيمت یو حقيقي عدد وي. د یوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو ست دی په دې ډول چې $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او X د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازي په یوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د یوې تابع ګراف دي.
- $f(x) = c$ ثابتہ تابع، $f(x) = ax + b$ خطی تابع، $f(x) = ax^2 + bx + c$ د عينت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه پې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه پې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.
- د علامې تابع دا ډول تعريف شوي ده:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

- ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه پې $\{-1, 0, 1\}$ ده.
- د دويمي درجي تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) دی او د دويمي درجي تابع ګراف ته پارabolا (parabola) وايی که $a > 0$ وي، رأس اصغری او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. ($x = -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}$) د پارabolا د رأس وضعیه کمیات او

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ محور په دوو نقطه کي او که $\Delta = 0$ ، نو

پارabolala د X محور په يوه نقطه کي قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارabolala د X محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کي $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه کي $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزايده، که

- $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع

جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.

- انتقال په (2) دوله دي (عمودي او افقی انتقال)

عمودي انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي چول پورته خواته انتقال شي د

$y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راخي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي چول بنکته خواته انتقال شي، د

$y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راخي.

افقی انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه کيني خواته انتقال شي، د $(c, y) = f(x+c)$

گراف لاس ته راخي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه سبي خواته انتقال شي، د $(x-c, y) = f(x)$

تابع گراف لاس ته راخي.

- د تابع گانو عملې په لاندې چولتعريف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\text{dom}(f+g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f-g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f \cdot g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g - \{x / g(x) = 0\}$$

• د مرکبو تابع گانو د تعريف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \text{ , } g(x) \in domf\}$$

$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \text{ , } f(x) \in domg\}$$

• د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د يو په يو تابع گراف په يوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ يو په يو تابع د معکوس د پيداکولو لپاره معادله د X لپاره حللو، بيا X پر y او y

پر X بدللو په لاس راغلی تابع $(x^{-1})^f$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د $f(X)$ او د $f(x)$ د معکوسې تابع گرافونه نظر د $y = X$ خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \frac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1- که $m < n$ وي، د X محور افقی مجانب دي.

2- که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقی مجانب دي چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی ياكه چېري $y = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $f(x)$ د تابع افقی مجانب دي.

3- که $m > n$ وي، نو افقی مجانب نه لري.

4- که د صورت درجه د يو په اندازه د $f(X)$ د مخرج له درجې خخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

• يوه ناطقه تابع يو يا خو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقی يا مایل مجانب به لري.

د خپرگي پونتنې

1 - د لاندېنيو مرتبو جوړوله سټونو خخه کوم یوېي د یوېي تابع بنودونکي دی؟ د تعريف او د قيمتونو ساحې یې پیدا کړئ.

- 1- $\{(1,2),(3,4),(5,5)\}$
- 2- $\{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$
- 3- $\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$
- 4- $\{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x+5)$ و $g(-x)$ او $g(-1)$ د یوېي $g(x) = x^2 + 2x + 3$ پیدا کړئ.

3 - که $h(3a)$ او $h(-x)$ د یوېي $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ پیدا کړئ.

4 - د لاندېنيو تابع ګانو د تعريف ساحې پیدا کړئ.

$$f(x) = 2x \quad f(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \sqrt{16-x^2} \quad f(x) = \frac{2}{x^2-4}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2+25}} \quad f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & : x < 0 \\ 4x+7 & : x \geq 0 \end{cases} \quad \text{که چېږي} \quad 5$$

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & : x \geq -3 \\ -(x+3) & : x < -3 \end{cases} \quad \text{که چېږي} \quad 6$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow x \neq 3 \\ 6 & \Leftarrow x = 3 \end{cases} \quad \text{که چېږي} \quad 7$$

8 - له لاندېنيو معادلو خخه کومه یوه یې تابع تعريفوي؟

$$x+y=16 \quad x^2+y=16 \quad x^2+y^2=16$$

$$x=y^2 \quad y=\sqrt{x+4} \quad x+y^3=8$$

9 - په لاندېنيو تابع ګانو کې کومه طاقه، کومه یوه جفته او کومه یوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5 \quad , \quad f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad . \quad f(x) = \frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x) = x^2 - 1$ سره ېبی $f(x) = (x-1)^2$ ، $f(x) = x^2 - 1$ پرته کړي.

11 - د لاندېنيو تابع ګانو $(\frac{f}{g})$ پیداکړئ او د تعريف ساحې ېبی وټاکۍ.

$$f(x) = 4x - 1 \quad g(x) = 6x + 3$$

$$f(x) = \sqrt{2x+5} \quad g(x) = \sqrt{4x-9}$$

$$f(x) = 4x^2 - 11x + 2 \quad g(x) = x^2 + 5$$

12 - که $f(x) = 4x^2 - 2x$ وي، نو: $g(x) = 8x + 1$ او $(f+g)(3)$ ، $(f+g)(-5)$ ، $(f \cdot g)(4)$

$$(\frac{f}{g})(4) \quad (fog)(2) \quad (gof)(-5)$$

پیداکړئ.

13 - f و g پیداکړئ که:

$$f(x) = 8x + 12 \quad g(x) = 3x - 1$$

$$f(x) = 5x + 3 \quad g(x) = -x^2 + 4x + 3$$

$$f(x) = -x^3 + 2 \quad g(x) = 4x$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad g(x) = 8x^2 - 6$$

14 - د $y = f(x)$ تابع د ګراف په پام کې نیولو سره وواياست چې د $y = f(x) - 5$ تابع ګراف د

5 واحدو په اندازه:

a - پورته خواهه انتقال شوي دي.

c - کينې خواهه انتقال شوي دي.

15 - که د $f(x)$ تابع په لاندې ډول تعريف شوي وي ګراف ېبی رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

ساحجي يې وټاکي.

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & : x > 1 \\ x^2 & : -1 < x < 1 \\ x+2 & : x < -1 \end{cases}$$

16 - د $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحجي وټاکي.

17 - د $f(x) = \sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحجي وټاکي.

18 - د لاندپينيو ناطقو تابع گانو د تعريف ساحجي پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلي يې هم پيدا کړي.

$$f(x) = \frac{5x}{x-4} \quad g(x) = \frac{7x}{x-8} \quad h(x) = \frac{x+8}{x^2-64}$$

$$f(x) = \frac{x+8}{x^2+64} \quad g(x) = \frac{x+7}{x^2-49} \quad h(x) = \frac{x+7}{x^2-36}$$

19 - د $f(x) = x^2 - 2$ او $f(x) = x^2 + 1$ او $f(x) = x^2 + 2$ تابع گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x) = x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتلہ کړئ.

20 - د لاندپينيو دویډي درجې تابع گانو د رأسونو وضعیه کمیات او د تناظر د محورونو معادلي پيدا کړئ.

$$y = (x-2)^2 \quad y = (x+3)^2 - 4$$

$$y = -\frac{x}{2} \quad \text{تابع ګراف رسم کړئ.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-5}{x+2} \quad \text{تابع عمودي او مایل مجانبونه پيدا کړئ.}$$

$$h(x) = \frac{x+1}{x-4} \quad \text{تابع د افقې مجانب معادله عبارت ده له:}$$

a) $y = -1$

b) $y = 1$

c) $y = -\frac{1}{4}$

d) $y = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & : x < 2 \\ -x & : x \geq 2 \end{cases}$$

د 24

25 - د تابع گراف رسم او د قيمتونو ساحه يې پيدا كړئ.

$$g(x) = |x| - 5$$

26 - د علامې تابع د قيمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنيو تابع ګاتو معکوسه تابع پيدا كړئ او وبنیاست چې $x = f(f^{-1}(x))$ دی.

$$f(x) = \frac{1}{8}x$$

$$f(x) = 8x - 1$$

$$f(x) = x^2 + 6$$

$$f(x) = \frac{4x+6}{5}$$

$$f(x) = x^3 - 1$$

28 - آیا د $g(x) = x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس يې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x) = (gof)(x)$ د f او g تابع ګانوپ سره خه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x) = 3 - \frac{3}{2}x$ د ګراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات

پیدا کړئ.

31 - د $f(x) = -3$ تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ تابع د ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ او $f(x) = 2x^2$ ، $f(x) = 3x^2$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ د تابع ګانو ګرافونه

د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $x^2 = f(x)$ تابع د ګراف سره يې پرتله کړئ.

34 - د $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجائب عبارت دی له:

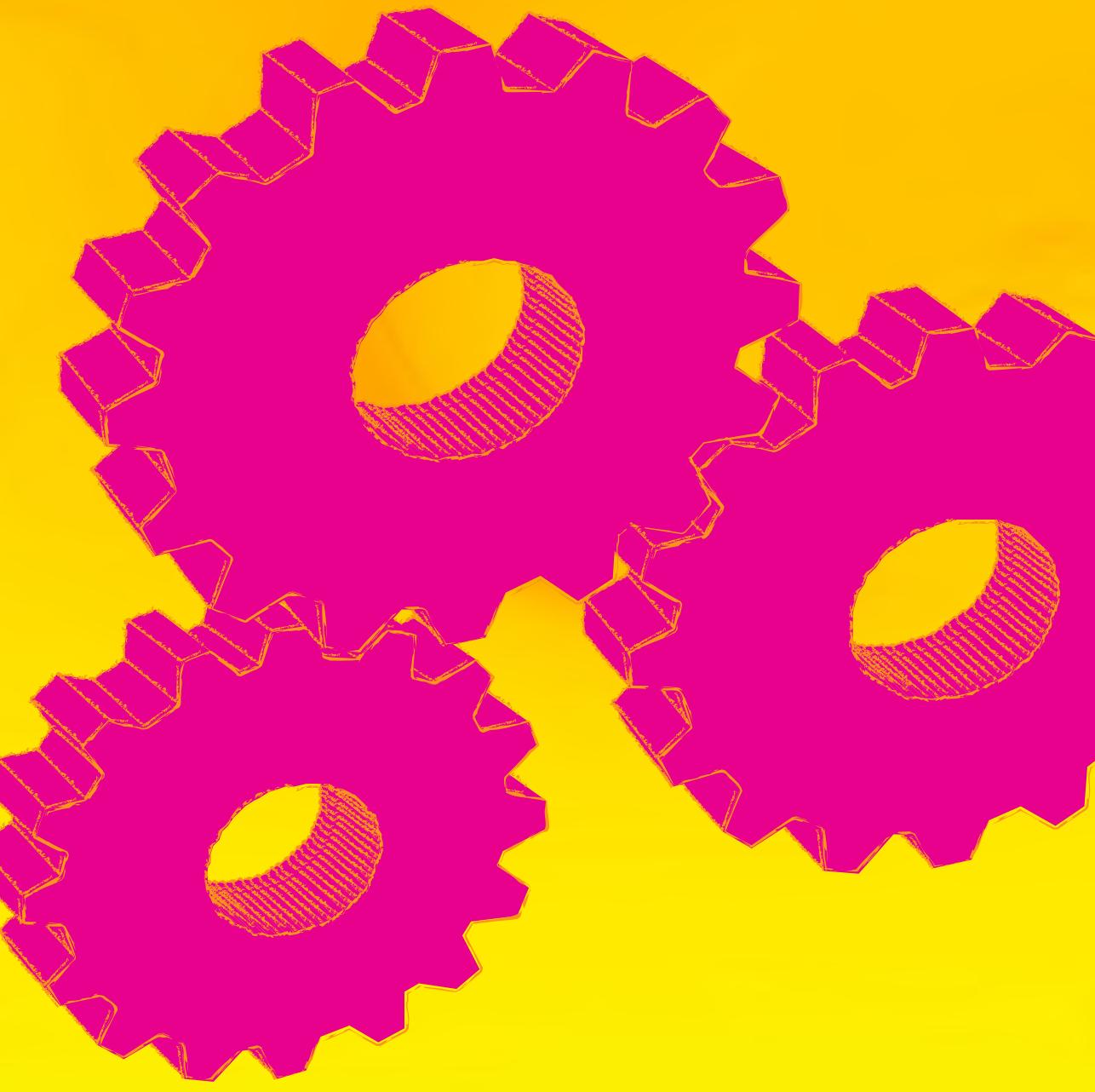
a: $y = x$

b: $y = x - 1$

c: $y = x + 1$

خُلورم خپرگی

مِثلثاتی قابع گانی



زاویه او رادیان (Angle and Radian)

زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:



آيا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟

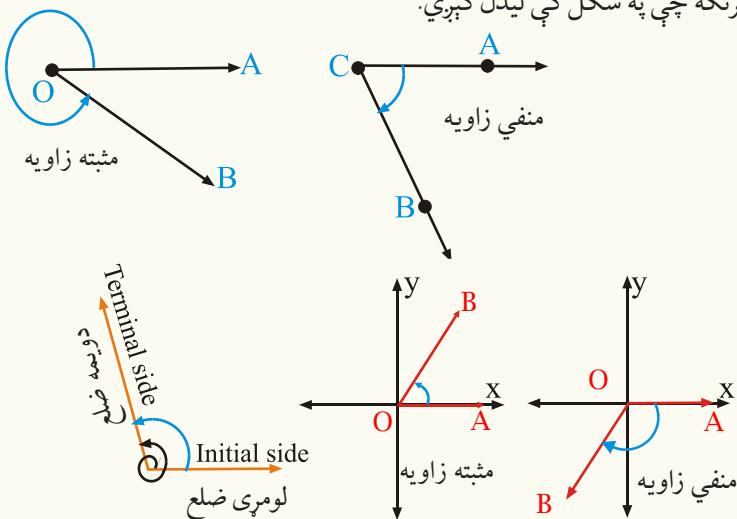
آيا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

له هندسي خخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نيمو خطونو له یو خای کيدو خخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکيل شوي وي چې مشترکه مبدأ د زاویه له رأس خخه عبارت د. په هندسه کې زاویه له 1° خخه تر 360° پوري وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران خخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راخي. چې د لومړي خط دوران د دویمه ضلعې موقعیت اختياراوي (یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران (clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف (Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوي دي.

چې لومړي ضلعې ته (Initial side) او د دوران پاڼي ته دویمه ضلع (Terminal side) وابي.

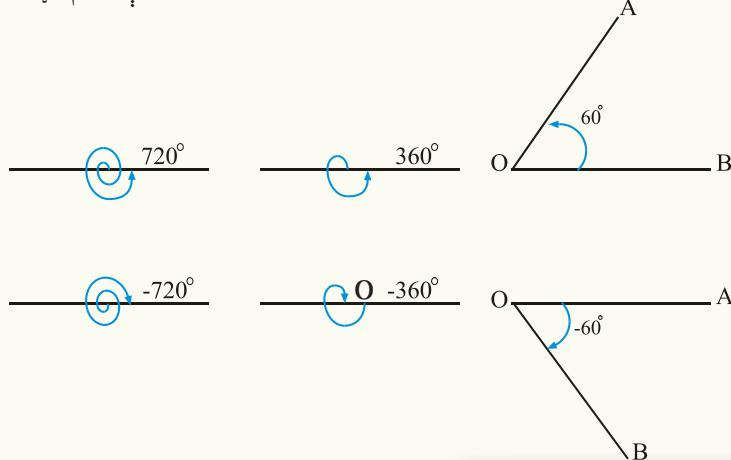
لكه: خرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



که په شکل کې د OA نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاونخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته رائحي.

که د OA نیم خط ته د 360° په اندازه (یو پوره دوران) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر خو OA نیم خط د OB موقعیت ته ورسپېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta + 360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B پکې ته ورسپېږو، طې شوې زاویه به $\theta + 720^\circ$ او په همدي چول که د OA نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B پکې ته ورسپېږو، نو د زاویې اندازه به $360^\circ \cdot K + \theta$ وي، لکه: خرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° خخه لوې زاویې هم شته دي.

لومړۍ مثال: د 60° -360° 720° او $720^\circ - 60^\circ$ زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 180° ، 90° ، 45° او $180^\circ - 180^\circ$ زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، گراد او رادیان په مرسته اندازه کېږي.

درجه: ديو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجي خخه عبارت ده، يا ديو پي قاييمي زاويه $\frac{1}{90}$ برخه ته درجه وابي.

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^\circ = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1' \quad , \quad \left(\frac{1}{60}\right)' = 1'' \quad \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ = 1''$$

دويم مثال: $35^\circ 15' 27''$ د درجي په اعشاري شکل ولیکي او $(48,3625)$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واروئ.

حل

$$35^\circ 15' 27'' = 35^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{27}{3600}\right)^\circ = 35^\circ + 0,25^\circ + 0,0075^\circ = 35,2575^\circ$$

$$\begin{aligned} 48,3625^\circ &= 48^\circ + 0,3625^\circ = 48^\circ + (0,3625 \cdot 60)' = 48^\circ + (21,75)' \\ &= 48^\circ + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^\circ 21' 45'' \end{aligned}$$

فعالیت

$36^\circ 47' 12''$ په درجه واروئ او $967663,55$ په درجه، دقیقه او ثانیه (Degree, Minute, Second).

گراد: گراد هم د زاويه د اندازه کولو واحد ده، ديو دوران $\frac{1}{400}$ برخه ته گراد وابي. د گراد

برخه ته دقیقه گراد او د دقیقه گراد $\frac{1}{100}$ مې برخه ته ثانیه گراد وابي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجي بدلول په گراد او د گراد بدلول په درجي باندي: کولاي شو چې درجه په گراد او گراد په درجه واروو.

دریم مثال: 45° درجي په گراد او $100g$ په درجه واروئ.

حل: خرنګه چې يو مکمل دوران 360° يا $400g$ دی نو:

$$360^\circ = 400g$$

$$1^\circ = \frac{400}{360} g = \frac{10}{9} g$$

$$45^\circ = 45(\frac{10}{9})g = 50g$$

$$400g = 360^\circ$$

$$1g = (\frac{360}{400})^\circ = (\frac{9}{10})^\circ$$

$$100g = 100(\frac{9}{10})^\circ = 90^\circ$$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200}, \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

رادیان (Radian): د درجې او گراد سرپېره د زاوېي د اندازه کولو بل واحد رادیان دی. رادیان

د هغوي مرکزي زاوېي اندازه د چې د مقابل قوس اوبردوالي يې د شعاع له اوبردوالي سره مساوي وي.

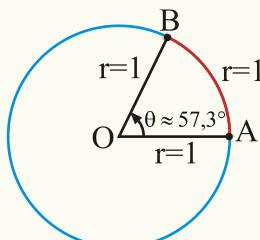
رادیان په عالي ریاضیاتو کې دېر استعمالپېري. په شکل کې د \hat{ACB} مرکزي زاوېه چې شعاع يې او د \hat{AB} قوس اوبردوالي له r سره مساوي دي، نو د \hat{ACB} زاوېه 1 radian ده.

$$\hat{ACB} = 1 \text{ radian} = 1^R$$

که د \hat{AB} قوس د دایري له شعاع r سره مساوي وي، θ د رادیان په حساب مساوي ده په:

$$\theta = \frac{\hat{AB}}{r} = \frac{s}{r} \quad \text{او یا } s = r\theta$$

په مثلثاتي دایره یا واحده دایره (Unit Circle) کې چې شعاع $r=1$ د اوبردوالي واحد او مرکز يې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي، د رادیان په حساب د مرکزي زاوېي اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.



$$\theta = \frac{\hat{AB}}{r} = \frac{\hat{AB}}{1} = \hat{AB} = S \text{ radian}$$

خرنگه چې د دایرې محیط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radian په دې معنا چې یو پوره دوارن 360° یا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17' 45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \text{ Randians}$$

څلورم مثال: د مرکزی زاوې د مقابل قوس او بدوالی پیدا کړئ، که د دایرې قطر $30m$ وي.

$$\text{حل:} \text{ خرنگه چې: } s = r\theta = 15\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\pi m \approx 15.7m \text{ دی، نو: } r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$$

فعالیت

د مرکزی زاوې د مقابل قوس او بدوالی به خو سانتي متراه وي؟ که د دایرې شعاع 10cm دی، نو:

د درجي او ګراد بدلوں په راډیان او د راډیان بدلوں په درجه او ګراد:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi} \text{ او یا } \frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi} \text{ دی، نو } 360^\circ = 400g = 2\pi^R$$

$$360^\circ = 2\pi^R \text{ او یا}$$

$$1^\circ = \left(\frac{2\pi}{360}\right)^R = \left(\frac{\pi}{180}\right)^R$$

$$2\pi^R = 360^\circ \text{ په همدي چول خرنگه چې:}$$

$$1^R = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 40° زاویې په راډیان واروئ.

$$\text{خرنګه چې } 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^R \text{ ده، نو:}$$

$$75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{ radain}$$

$$220^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{ radain,}$$

$$-400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radain}$$

$$40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian}$$

خرنګه چې یو پوره دوران $2\pi^R$ او یا $400g$ دی، نو:

$$1g = \left(\frac{2\pi}{400}\right)^R = \left(\frac{\pi}{200}\right)^R$$

$$-100g = \left(-100 \cdot \frac{\pi}{200}\right)^R = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^R$$

پوښته: که د ګراد په حساب له یوې زاویې خخه 30° واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاویې اندازه په درجه راکوي، دا زاویه خو راډیانه ده؟

حل

$$\frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{ Radian}$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

نو دا زاویه $\frac{3\pi}{2}$ راډیانه ده.

شپږم مثال a : $\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{5}, (\frac{5\pi}{6})$ او 6π راډیان په درجه واروئ.

(b) د یو دوران (Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه خو راډیانه کېږي؟

حل

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ , \quad \frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

$$a : \left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^\circ , \quad 6\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 1080^\circ , \quad \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

$$b : = \frac{1}{4} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2} \text{ radian}$$

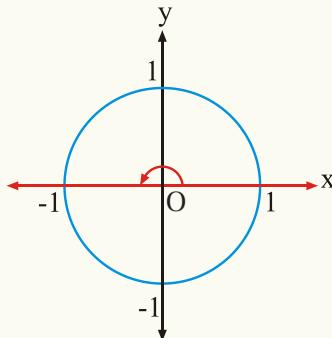
لأندي شكلونه وگوري.

$$\frac{1}{2} \text{ Rev v}$$

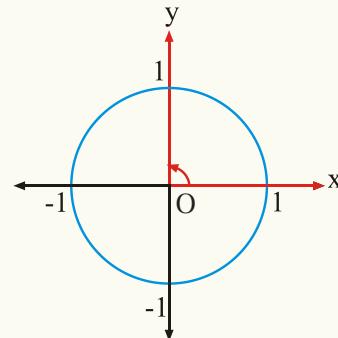
$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi^R$$

$$\frac{1}{4} \text{ Rev v}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \text{ Radain}$$



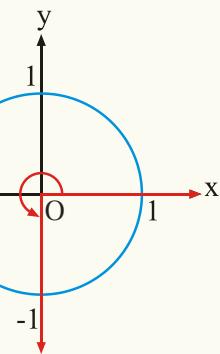
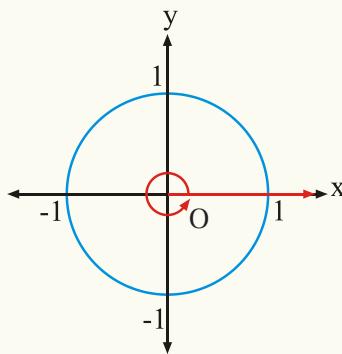
1 Revolution

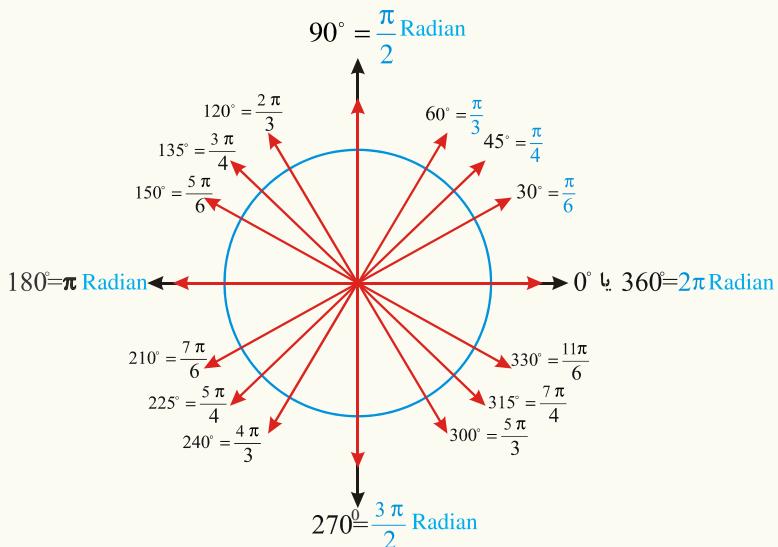


$\frac{3}{4}$ Revolution

2π Radians

$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





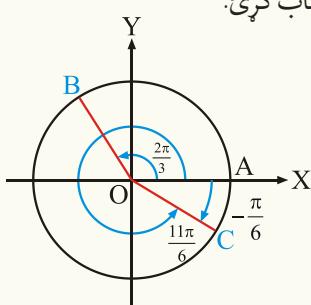
د درجې او رادیان
تر منځ د اړکې
د بنه خرګندېدو
لپاره لاندې شکل
هم وګوري:

فعالیت

او $\frac{5\pi}{4}$ - رادیانه زاوې په درجه واروئ.

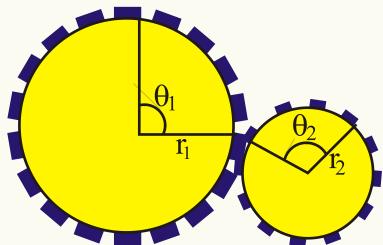
(a) د $\frac{\pi}{6}$ او $\frac{11\pi}{6}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ زاوې په شکل کې وبنیاست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی خرڅښو دل شوی دي، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د رادیان په حساب وي، د θ_2 د زاویبی مقدار د θ_1 ، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.
د (a) حل:



له شکل خخه ليدل کېرى چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}$ -زاویو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اچم مثال: که د ساعت د ثانیې عقرې 40 ثانیې دوران کېرى وي، د ثانیې د عقرې په واسطه طي شوې مثبته زاویه په رادیان پیدا کړئ.

حل: خرنګه چې 60 ثانیې يو پوره دوران يا 2π رادیان کېرى، نو $v = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} R e v$ او خرنګه چې $\frac{2}{3} \cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian یو دوران دی، نو:

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو تر منځ د زاویې د پیدا کولو لپاره له $\theta = |5,5 \text{ min} - 30 \text{ hr}| = 0$ خخه کارا خلو.

دمثال په توګه د 3 بجواو 40 دقیقو په وخت کې د ساعت گرد او دقیقہ گرد په منځ کې زاویه خود رجې 55°؟

$$\theta = |5,5 \cdot 40 - 30 \cdot 3| = 130^\circ$$

پوښتني

1 - که د یوې مرکزی زاویې مقابل قوس 50cm او د دائیرې شعاع 25cm وي، مرکزی زاویه به

څو رادیانه وي؟

2 - $32,4222^\circ$ په درجې، دقیقې او ثانیې واروئ

3 - د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو رادیانه، څو درجې او څو گراده کېرى؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ رادیانه څو گراده او $7,5^\circ$ - څو رادیانه کېرى؟

-5 - 225° , 720° , -315° او 45° زاویې په راډيان او گراد وارپوئ

6 - دیو دوران او $\frac{4}{5}$ برخچی خوراډيانه او خودرجه کېږي؟

7 - $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{2\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{10}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{3}$ او راډيانه په درجو وارپوئ

8 - که دیو ساعت د ثانیې د عقربې او بردوالی 6cm وي، په 40 ثانیوکې د ثانیې عقربې خو سانتي

متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دایري شعاع 3cm او مرکزي زاویه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاویې د مقابل قوس

او بردوالی به خو سانتي متره وي؟

10 - که دیو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 35 ثانیې وي، نو د ثانیې عقربې به خوراډيانه مثبته

زاویه طی کړي وي؟

11 - د دوو زاویو مجموعه 152° ده، که دیو زاویې اندازه د درجه په حساب له بلې زاویې سره

د گراد په حساب برابره وي، د هرې زاویې اندازه د راډيان په حساب خومره ده؟

12 - 1620° خوراډيانه کېږي؟

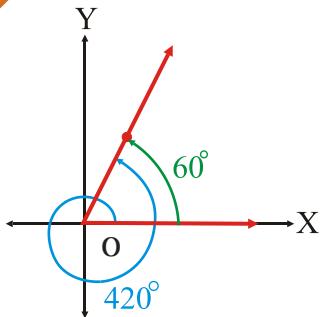
- a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

13 - خلور دورانونه خوراډيانه کېږي؟

- a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14 - که دیو دایري شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاویې، مقابل قوس به خو متره
وي؟

د یوې زاوېي معياري حالت او کوتړمینل زاوېي

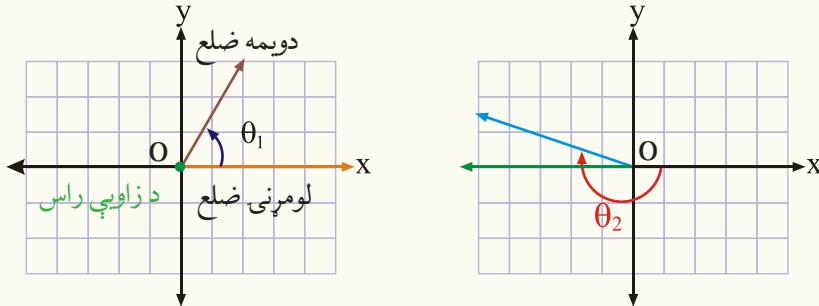


آيا ویلای شئ چې د 60° او 420° زاویو
دویمه ضلعې یو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

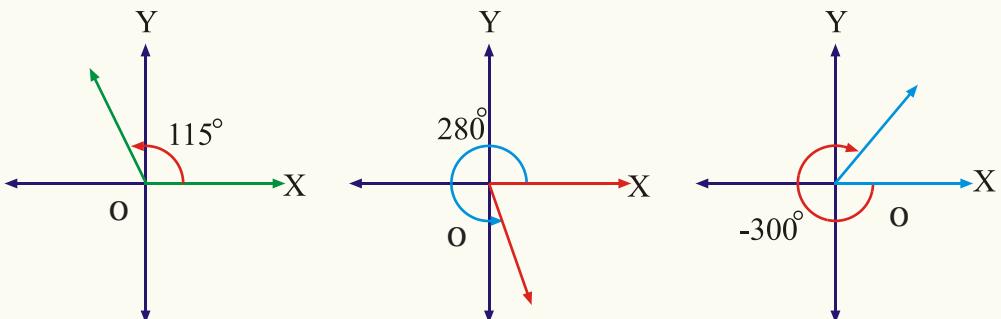
د یوې زاوېي معياري حالت (Standard position of an angle)

که د یوې زاوېي رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لوړنۍ ضلع بې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاویه په معياري حالت کې ده.

د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاوېي په معياري حالت کې بنودل شوي دي.



لوړۍ مثال: 115° ، 280° او -300° - زاوېي په معياري حالت کې رسم کړئ.



که په معیاري حالت کې د یوې زاوې دويمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاوېي
ته ريعي زاوې (Quadrantale angle) وایي.
د مثال په توګه: $360^\circ, 180^\circ, 90^\circ$ او داسې نوري زاوې ريعي زاوې دي.

فعاليت

د $130^\circ, 50^\circ, 130^\circ$ او $500^\circ, 210^\circ$ زاوېي په معیاري حالت کې رسم کړئ.

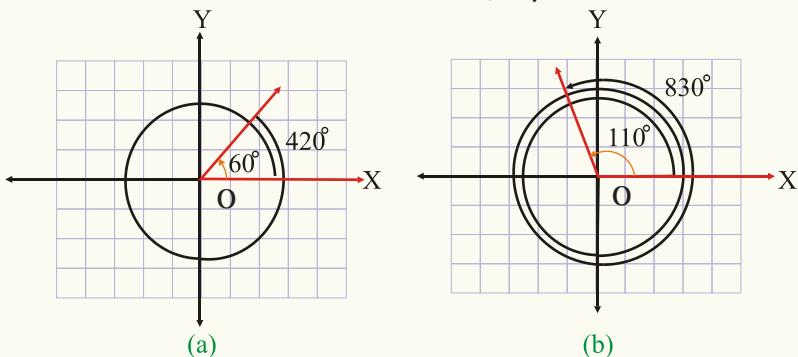
کوتړمینل زاوېي (Conterminal angles)

دوي په خو زاوېي چې په معیاري حالت کې یې دويمې ضلعي یو پر بل منطبقي شي، د کوتړمینل زاوېي په نامه یادپېږي.

دويم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420° زاوېي او همدارنګه د 110° او 830° زاوېي چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوتړمینل زاوېي دي.

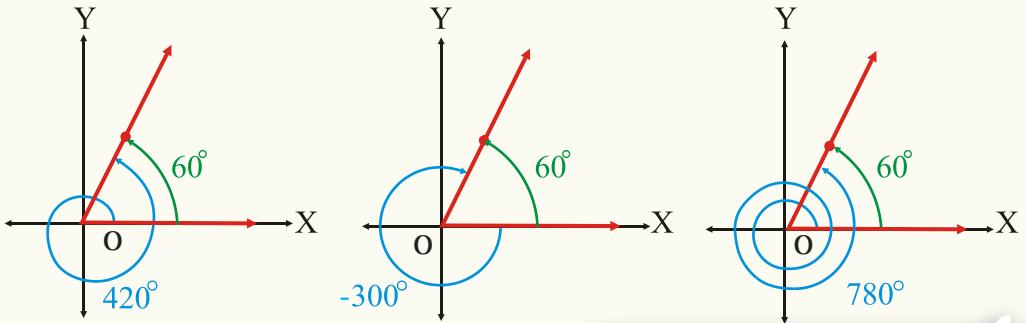
حل: خرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاوېي لوړنې ضلعي یو پر بل منطبق دي، لکه خنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د 60° او 420° زاوېي دويمې ضلعي (Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعريف په اساس دا دواړه زاوېي سره کوتړمینل دي.

همدارنګه د 110° او 830° زاوېي هم سره کوتړمینل دي.



دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاوېي سره درې کوتړمینل زاوېي رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

$$\text{حل: } 60^\circ + 360^\circ = 420^\circ, \quad 60^\circ - 360^\circ = -300^\circ, \quad 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$$



فعالیت

ایا 130° ، 230° او 590° زاویه سره کوتრمینل دی؟ رسم بې کړئ.

خرنګه چې کوتრمینل زاویې یو له بله سره د یوه پوره دوران (360°) یا $2\pi^R$ او یا خو دورانونه $n \cdot 360^\circ$ او یا $n \cdot 2\pi$ تويیر لري، نو د θ د زاویې سره کوتრمینل زاویې عبارت دی له:

$$\begin{array}{ll} \theta + 2\pi & \theta + 360^\circ \\ \theta + 2 \cdot 2\pi & \theta + 2 \cdot 360^\circ \\ \theta + 3 \cdot 2\pi & \theta + 3 \cdot 360^\circ \\ \hline \hline \theta + 2n\pi & \theta + n \cdot 360^\circ \end{array}$$

څلور مثال:

- (a) له 30° زاویې سره څلور کوترمينل زاویې پیدا کړئ.
 (b) له 90° زاویې سره دوه کوترمينل زاویې پیدا او په شکل کې بې وښیاست.

حل

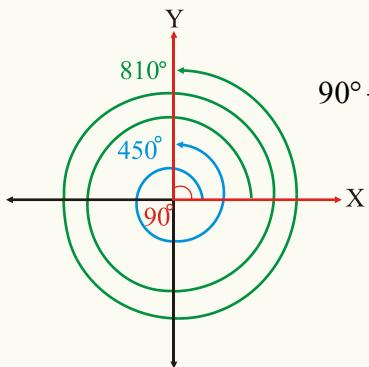
$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 750^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 1110^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi = \frac{37\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ + 4 \cdot 360^\circ = 1470^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6} + 4 \cdot 2\pi = \frac{49\pi}{6} \text{ Radian}$$

حل(b)



$$90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$$

$$90^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 810^\circ$$

پنجم مثال: آیا $50^\circ, 410^\circ, 40^\circ, 80^\circ, 800^\circ$ اور $60^\circ, 680^\circ$ زاویہ سرہ کو ترمیمیں دی؟

حل: خرنگہ چی $50^\circ + 360^\circ = 410^\circ$ دی، نو د 50° اور 410° زاویہ سرہ کو ترمیمیں دی او $80^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 800^\circ$ نو د 80° اور 800° زاویہ هم سرہ کو ترمیمیں دی. همدرانگہ $60^\circ - 680^\circ = 40^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 40^\circ$ اور $40^\circ - 680^\circ = 40^\circ$ زاویہ هم سرہ کو ترمیمیں دی، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$ ، نو د 410° اور 60° زاویہ سرہ کو ترمیمیں نہ دی.

کہ دیوبی زاویہ رأس د وضعیہ کمیاتو په مبدأکپی او لو مرپنی ضلع پی د X د محور پر مثبت جہت منطبق وي، نو دا زاویہ په معیاري حالت کپی ده. کہ په معیاري حالت کپی د دوو یا خو زاویو دویمی ضلعی یو پر بل منطبق وي، داسپی زاویہ د کو ترمیمیں زاویو په نوم یادبڑی.

پونتنی



1 - د $90^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 270^\circ$ اور 240° زاویہ په معیاري حالت کپی رسم کرئ.

2 - تر ہولو کوچنی مثبتہ زاویہ پیداکرئ چی لہ لاندپنیو زاویو سرہ کو ترمیمیں وي.

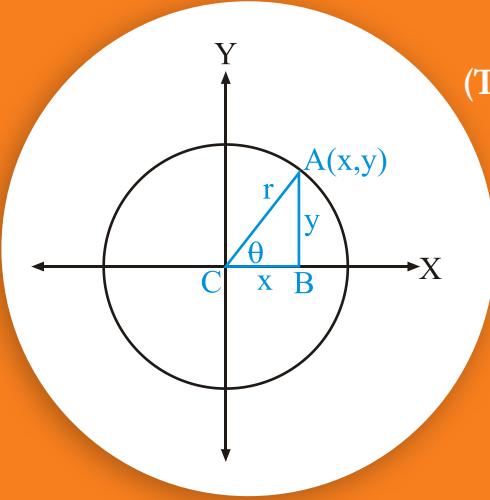
$-40^\circ, -125^\circ, 450^\circ, 539^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

3 - آیا د $(-80^\circ, -280^\circ)$ اور $(35^\circ, 395^\circ)$ زاویہ سرہ کو ترمیمیں دی؟

4 - لہ 40° زاویہ سرہ، شپر کو ترمیمیں زاویہ پیداکرئ.

5 - آیا د $(180^\circ, 900^\circ)$ اور $(150^\circ, 930^\circ)$ زاویہ سرہ کو ترمیمیں دی، په شکل کپی یې هم وبنیاست؟

مئلائي تابعکانې (Trigonometric Functions)



آيا ويلاي شئ چې د θ د زاوېي مئلائي نسبتونه
د زاوېي د ضلعو په اوږدوالي پوري اړه لري
او که نه؟

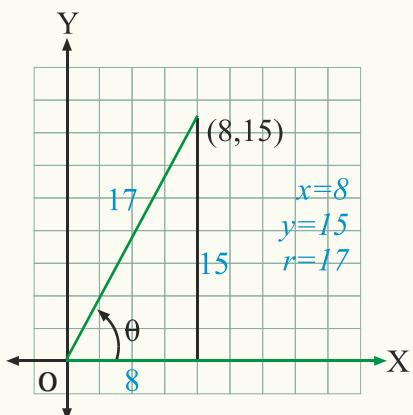
خرنګه چې پوهېرو چې د دیوپ حادې زاوېي (θ) مئلائي نسبتونه (Trigonometric ratios)
په یوه قایمه الزاوېه مثلث کې په لاندې ډول تعريف شوي دي.

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}, \quad \csc \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

. $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ او $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ ، $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$



لومړۍ مثال: که په معاري حالت کې د θ زاوېي
دويمه ضلع د (8,15) له ټکي خخه تېره شي، د θ
زاوېي مئلائي نسبتونه پیدا کړي.
د فیثاغورث د قصیپ په اساس لروچې:
 $r^2 = x^2 + y^2$.

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8}, \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاویو د ځینو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسی اړیکې:

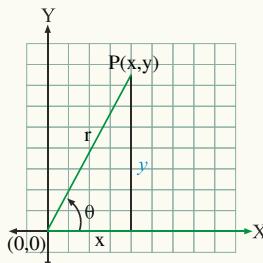
د فيثاغورث د قضيي په اساس د شکل له مخي ليکلای شوچې:

دوارو خواوي په r^2 وېشو:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$



همدارنگه که د (I) معادلی دواوه خواوی په y^2 ووپشو، نولرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

او که د (I) معادلی دوازه خواوی په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$$1 + \tan^2 \theta \equiv \sec^2 \theta$$

لہ بلي خوا:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} = \cot \theta$$

او له دې خایه خخه نتیجه کېږي چې:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \sin \theta \cdot \csc \theta = 1, 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1, \cos \theta \cdot \sec \theta = 1, 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

خرنګه چې د اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعالیت

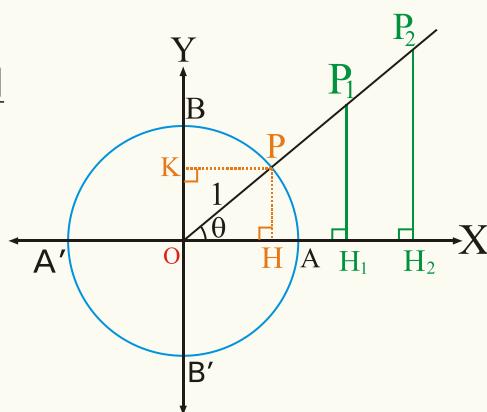
که په معیاري حالت کې د θ دویمه ضلع د (12,5) له تکيي خخه تېره شي، د θ د زاوېي مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابع ګانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاوېي د اندازې پوري اړه لري، د P د تکيي پرموقعيت پوري چې د θ پر دویمه ضلع واقع دي اړه نه لري چې دا حقیقت په شکل کې د $\triangle OPH$ او $\triangle OH_2P_2$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کېږي.

$$|OP|=1$$

$$\cos \theta = \frac{|OH|}{|OP|} = \frac{|OH_1|}{|OP_1|} = \frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin \theta = \frac{|PH|}{|OP|} = \frac{|P_1H_1|}{|OP_1|} = \frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



که د θ زاویه در این دایره حساب وی. آزاد متحول او $\sec \theta, \cot \theta, \tan \theta, \cos \theta, \sin \theta$ او $\csc \theta$ مقید (مربوط) متحولونه دی. په دې معنا چې

$\csc \theta$ او $\sec \theta, \cot \theta, \tan \theta, \cos \theta, \sin \theta$

مثلثاتی تابعگانی دی چې مقداری د θ د ضلعو او بردوالی پوری اړه نه لري، بلکې د θ د زاویه په مقدار پوری اړه لري.

څرنګه چې مثلثاتی دایره

(Trigonometric Circle) هغه دایره ده چې د

شعاع او بردوالی پې د او بردوالی واحد دی.

په مثلثاتی دایره کې چې مرکز پې د وضعیه کمیاتو په

مبدأ کې او د 'XX' او 'YY' محورونه د دایرې افقی او عمودی قطرونه دی. د فرارداد په اساس $y'y$ ته د ساینو محور او $x'ox$ ته د کوساینو محور وايی. د 'AT' محور چې د A په تکی کې له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د 'BQ' محور چې د B په تکی کې پر دایره مماس دی، د کوتاچانګاتې محور بلکې. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدأ د دایرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A تکی د کوتاچانګاتې د محور مبدأ، د B تکی دی.

که چېرې د A له تکی خخه په مثبت جهت کې د M تر تکی حرکت وکړو او د \hat{MOA} زاویه ته θ وولیو، د θ د زاویې مثلثاتی توابع په لاندې ډول همتعريفېږي.
($r = OM = OA = OB = 1$)

$$\sin \theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan \theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \overline{AP}$$

$$\sec \theta = \frac{OM}{OH} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \overline{OP}$$

$$\cot \theta = \frac{OH}{HM} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \overline{BQ}$$

$$\csc \theta = \frac{OM}{OH} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتی نسبتونو ته مثلثاتی خطونه هم وايی.

په همدي ډول که د θ دويمه ضلع او یا دقوس پا یا دويمه، دريمه یا خلورمه ناحیه(ربع) کې وی.

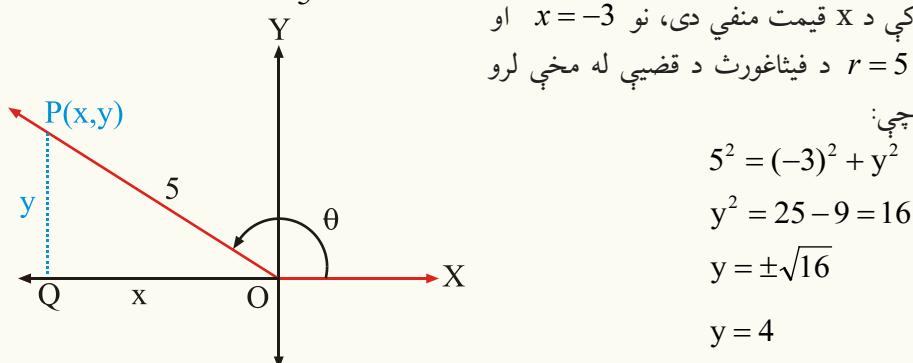
کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه یې پر لاس راړو:
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحیو(ربعو) quadrants کې په لاندې ډول دي.

			ربع		
$\sec \theta, \cos \theta$	$\tan \theta, \cot \theta$	$\sin \theta, \csc \theta$	I	$\sin \theta > 0$	$\sin \theta > 0$
+	+	+	II	$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
-	-	+	III	$\tan \theta < 0$	$\tan \theta > 0$
-	+	-	IV	$\cot \theta < 0$	$\cot \theta > 0$
+	-	-		$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
				$\csc \theta > 0$	$\csc \theta > 0$
				$\sin \theta < 0$	$\sin \theta < 0$
				$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
				$\tan \theta > 0$	$\tan \theta < 0$
				$\cot \theta > 0$	$\cot \theta < 0$
				$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
				$\csc \theta < 0$	$\csc \theta < 0$

د ویم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع، په دویمه

ناحیه(ربع) کې واقع وي او $\cos \theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه پیداکړي.

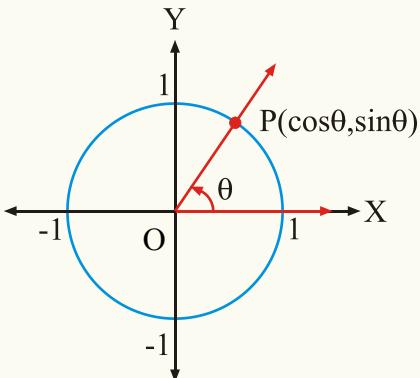
حل: لوړۍ د P د تکي وضعیه کمیات پیداکړو: خرنګه چې $\cos \theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دویمه ربع
کې د X قیمت منفي دي، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو



(خکه چې د P تکي په دويمه ربع کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



خرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور واي، مورکولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د تکي وضعیه کمیات له او يا $P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$ سره وبنابو.

د θ د زاوېي مثلثاتي توابع یوازې د θ د زاوېي په مقدار پوري اوه لري چې θ آزاد متتحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقید متتحولونه دي.

په لومړي ناحيہ(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيہ(ربع) کې $\sin \theta$ او $\csc \theta$ مثبت، په دريمه ناحيہ(ربع) کې $\cos \theta, \sec \theta$ مثبت او په خلورمه ناحيہ(ربع) کې $\tan \theta, \cot \theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتني

1- د لاندېنیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي چول وواياست.

$$\sin 120^\circ \quad \tan 170^\circ \quad \tan 60^\circ \quad \cos 330^\circ \quad \sec 200^\circ$$

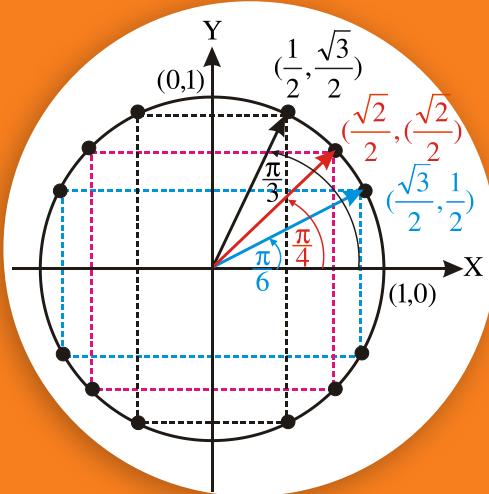
$$\cot 271^\circ \quad \csc 91^\circ \quad \sin 271^\circ \quad \csc 181^\circ \quad \csc 315^\circ$$

2- که θ په معیاري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو تکو خخه تېره شي، $\tan \theta$ او $\cos \theta$, $\sin \theta$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

د چینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

آياكولاي شئ چې ووایئ
دی؟



د 45° مثلثاتي نسبتونه: په يوه قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې، دوې قايمې خنليې يې
يو، يو واحد په پام کې ونسی.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

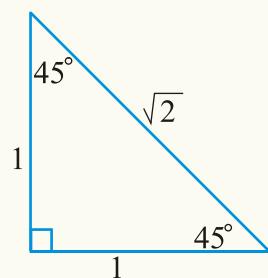
$$\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec \frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc \frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



فعالیت

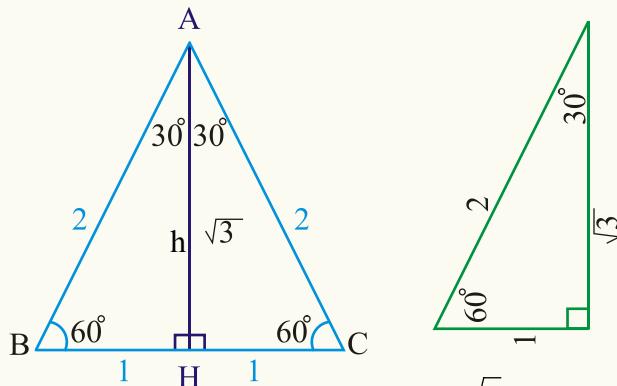
یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسیئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي،
د 45° زاویه مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ.

که د $\triangle ABC$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له
رأس خخه د AH ارتفاع رسموو، خرنګه چې د \hat{A} زاویه نیمایی شوې ده چې نیمایی بې 30°
د، نو:

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$

$$h^2 = 4 - 1 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$



$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \csc \frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسیئ چې هره ضلع یې a واحده وي د
زاویې مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ.

همدارنگه که شکل ته پام وکرو:

$$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec \frac{\pi}{3} = 2$$

$$\csc 60^\circ = \csc \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کېرىي چې 30° + 60° = 90° كېرىي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

يا پە عمومىي چول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، كە يوه زاویه θ وي، بلە زاویه بە $(90^\circ - \theta)$ وي.

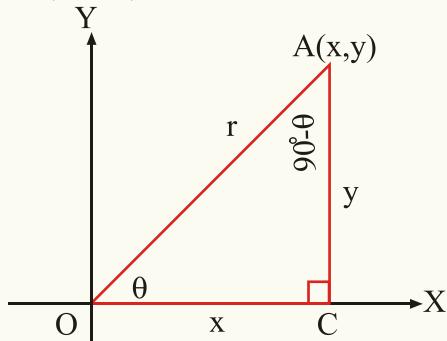
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y}, \cot \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y}, \csc \theta = \frac{r}{y} \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x}, \sec \theta = \frac{r}{x} \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$



فعالیت

په همدي چوں ونبیاست چې:

لکه: خنګه چې د نهم تولگي په مثلثانو کې موږلي دي چې د زاویو د مثلثائي نسبتونو جدول هم
په همدي اساس جوړ شوي دي:

لومړۍ مثال: د 39° زاوېي مثلثائي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51° زاوېي مثلثائي نسبتونه پیدا
کړئ.

$$\sin 39^\circ = 0,6293 \quad \tan 39^\circ = 0,8098 \quad \sec 39^\circ = 1,287$$

$$\cos 39^\circ = 0,7771 \quad \cot 39^\circ = 1,235 \quad \csc 39^\circ = 1,589$$

حل: خنګه چې $39^\circ + 51^\circ = 90^\circ$ کېږي، نو:

$$\sin 51^\circ = \cos 39^\circ = 0,7771 \quad \cos 51^\circ = \sin 39^\circ = 0,6293$$

$$\tan 51^\circ = \cot 39^\circ = 1,235 \quad \cot 51^\circ = \tan 39^\circ = 0,8098$$

$$\sec 51^\circ = \csc 39^\circ = 1,589 \quad \csc 51^\circ = \sec 39^\circ = 1,287$$

پونټني

که: 1

$$\sin 17^\circ = 0,2927 \quad \cos 17^\circ = 0,9563 \quad \sec 17^\circ = 1,046 \quad \csc 17^\circ = 3,420$$

وې د 73° زاوېي مثلثائي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د لاندې اړیکو خخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$$\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$$

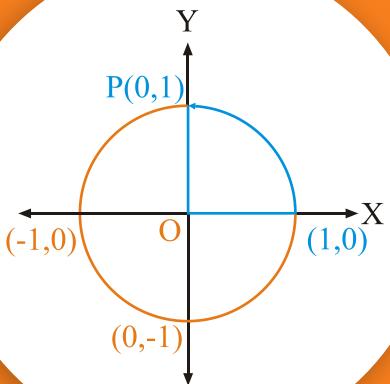
$$\cos 12^\circ 10' 20'' = \sin 77^\circ 49' 40''$$

$$\sec 12^\circ = \sec 88^\circ$$

$$\tan 70^\circ = \cot 20^\circ$$

د $270^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ او
زاویو مثلثاتی نسبتونه: 360°

آیا $\tan 90^\circ$ او $\tan 270^\circ$ تعریف شوی دی؟



د 90° زاویي مثلثاتي نسبتونه: $= \frac{\pi}{2}$

خرنگه چې $P(0,1)$ پکی په مثلثاتي دایره باندې د 90° زاویي په دویمه ضلع واقع دی، نو:
 $r = 1$ $x = 0$ $y = 1$

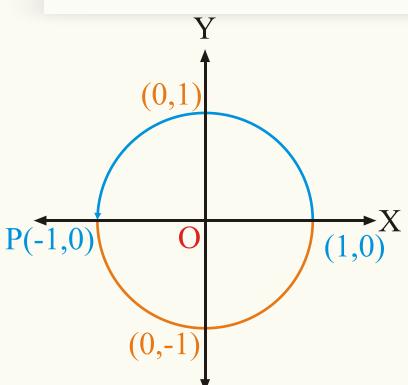
$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \quad (\text{تعریف شوی نه دی}) \quad \cot \frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec \frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \quad (\text{تعریف شوی نه دی}) \quad \csc \frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

فعالیت

آیا کولای شی، ووایئ چې $\cot 0^\circ$ او $\csc 0^\circ$ تعریف شوی نه دی؟ ولی؟



د 180° زاویي مثلثاتي نسبتونه: خرنگه چې د $p(-1,0)$ پکی په مثلثاتي دایره باندې د 180° زاویي
په دویمه ضلع باندې پرووت دی، نو:
 $x = -1$ او $y = 0$ دی. $r = 1$.

$$\sin 180^\circ = \sin \pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad \cos 180^\circ = \cos \pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

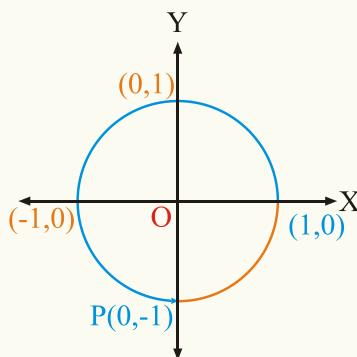
$$\tan 180^\circ = \tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \cot 180^\circ = \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعريف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\csc 180^\circ$ او $\sec 180^\circ$ پیدا کړئ.

$$\text{د زاویې مثلثاتي نسبتونه: } \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

خرنګه چې د $P(0, -1)$ تکی په مثلثاتي دایره باندې د 270° زاویې پر دویمه ضلع واقع دی.



$$r = 1 \quad x = 0 \quad y = -1$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan \frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \text{(تعريف نه دی)} \quad \cot \frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec \frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = \text{(تعريف نه دی)} \quad \csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

په ياد ولري چې د 360° او 0° زاويو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووائی ولې؟

د $360^\circ = 2\pi$ زاويي مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاويې په دويمه ضلعه باندي پرته ده، نو:

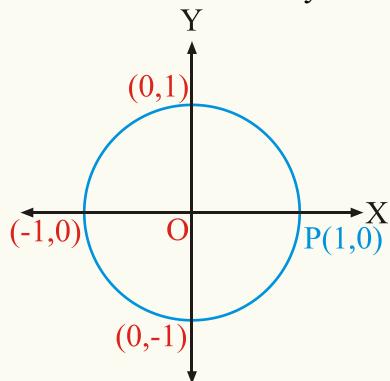
$$x = 1 \quad y = 0 \quad r = 1$$

$$\sin 2\pi = \sin 360^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad \cos 2\pi = \cos 360^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 2\pi = \tan 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 2\pi = \cot 360^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \quad (\text{تعريف شوي نه دي})$$

$$\sec 2\pi = \sec 360^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1 \quad \csc 2\pi = \csc 360^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \quad (\text{تعريف شوي نه دي})$$



فعاليت

د 0° زاويې ټول مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

نسبتونه تعريف شوي نه دي.
د $360^\circ, 270^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ او 0° زاويو ته محوري زاويې وايې چې د هرې زاويې دوه، دوہ مثلثاتي.

پوښتني



1- لاندي جدول ډک کري.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					

$$\tan 270^\circ = ? \quad -2$$

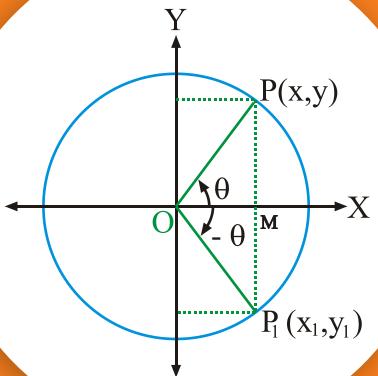
- a) -1 b) 1 c) 0 d) تعريف شوي نه دي

$$\cos 90^\circ = ? \quad -3$$

- a) -1 b) 1 c) 0 d) تعريف شوي نه دي

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{9\pi}{2} \quad \text{آيا} \quad -4$$

د یوی حاده زاویي او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولidel چې
مثلثاتي جدول یوازې د یوی حاده مثبتې زاویې
مثلثاتي نسبتونه را بشني ددې لپاره چې د منفي
او منفرجه زاویو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي
جدول خخه پیدا کړي شو، نو باید ددې زاویو
او د یوی حاده مثبتې زاویې د مثلثاتي نسبتونو په
منځ کې اړیکې پیدا کړو.

د θ او $-\hat{\theta}$ - زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې:

د حاده زاویه مثبت او له θ سره مساوی زاویه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$
زاویه په معیاري حالت په مثلثاتي دایره کې رسموو.

د $P(x, y)$ تکی د θ پر دویمه ضلع او د $(P_1(x_1, y_1))$ تکی د $-\theta$ - د زاوی پر دویمه ضلع واقع
دي.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\triangle OMP_1$ او $\triangle OMP$ مثلثونه يو له بله سره مساوی دي.

$$x_1 = x \quad |y_1| = |y| \quad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

لومړۍ مثال: د -30° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \quad \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

. $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$ ، $\csc(-\theta) = -\csc\theta$ و بنیاست چې:

د دویم مثال: د $\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

حل:

فعالیت

د $\frac{3\pi}{2}$ د زاویې نور خلور مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta$$

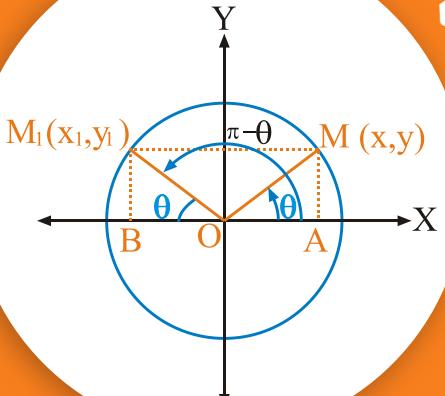
پونستني

1 - د 360° - 2π يا رادیان مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

2 - د -45° - $-\frac{\pi}{4}$ يا راجیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

3 - د -90° - $-\frac{\pi}{2}$ يا رادیان مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

د دوو زاویو د مثلثاتی نسبتونو په
منځ کې اړیکې چې مجموعه او یا
ټوپیرې π یا 180° وي



- آیا د 150° او 135° زاویو مثلثاتی نسبتونه پیداکولای شی؟
- آیا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوی دي؟ ولې؟
- آیا ویلای شی چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ یو له بله سره خه اړیکه لري؟

دوو زاویې چې مجموعه یې π یا 180° وي، په پام کې نیسو. که θ یوه حاده مثبته زاویه وي بله زاویه $(\pi - \theta)$ ده. دا دواړه زاویې په مثلثاتی دایره کې په معیاري حالت کې رسموو. د $M(x, y)$ تکی د θ د زاویې په دویمه ضلع باندې او د $M_1(x_1, y_1)$ تکی د $(\pi - \theta)$ یا $(180^\circ - \theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دي. خرنګه چې په پورته شکل کې د $\triangle OAM$ او $\triangle OM_1B$ مثلشونه سره مساوی دي.

$$(r=1) \quad |x_1| = |x| \quad -x_1 = x \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x \quad y_1 = y$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\pi - \theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = \sin \theta$$

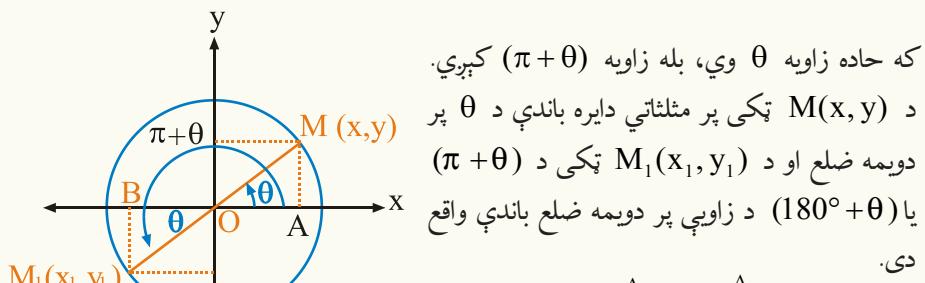
$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos(\pi - \theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{1} = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

فعالیت

د $(\pi - \theta)$ زاویې نور درې مثلثاتی نسبتونه پیداکړئ.

د هغو دوو زاویو د مثلثاتی نسبتونو قرمنځ اړیکې چې ټوپیرې 180° او یا π راډیان وي.



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi + \theta)$ کېرى.

د $M(x, y)$ تکى پر مثلثاتي دايىه باندى د θ پر دويىمە ضلۇغ او د $(\pi + \theta)$ تکى د $M_1(x_1, y_1)$ د زاوىي پر دويىمە ضلۇغ باندى واقع يىا $(180^\circ + \theta)$ د زاوىي پر دويىمە ضلۇغ باندى واقع دى.

خىنگە چى د $\triangle OBM_1$ او $\triangle OAM$ مىثلۇنە سره

مساوىي دى: $y_1 = -y, x_1 = -x$

$$\sin(180^\circ + \theta) = y_1 = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = x_1 = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{\sin(180^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\cot(180^\circ + \theta) = \frac{\cos(180^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} = \frac{-\cos \theta}{-\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\sec(180^\circ + \theta) = \frac{1}{\cos(180^\circ + \theta)} = \frac{1}{-\cos \theta} = -\sec \theta$$

$$\csc(180^\circ + \theta) = \frac{1}{\sin(180^\circ + \theta)} = \frac{1}{-\sin \theta} = -\csc \theta$$

لۇمۇرى مثال: د 120° او 240° زاوىي مىثلثاتي نسبتىنە پىدا كىرى.

حل

$$\sin 120^\circ = \sin(\pi - 60^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(\pi - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(\pi - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو sin ، cos او tan پیدا کړئ.
حل:

$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

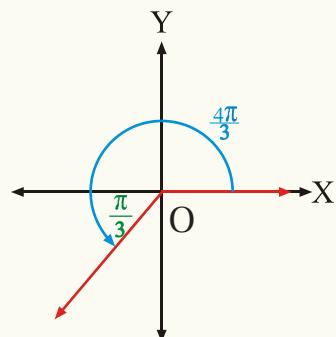
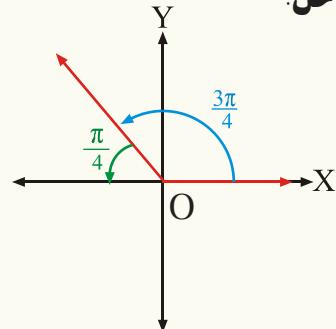
$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan \frac{3\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



خرنګه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاوېي دویمه ضلع په دویمه ناحیه(ريع) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاوېي نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او خرنګه چې د $\csc \theta$ او $\sin \theta$ مثبت او د $(\pi + \theta)$ زاوېي دویمه ضلع په دریمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاوېي $\tan \theta$ او $\cot \theta$ مثبت او د $(180 + \theta)$ د زاوېي نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

پوښتني



۱- د 225° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

۲- د 210° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

۳- د 150° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\cot \frac{3\pi}{4} = ? -4$$

a) $-\frac{1}{2}$

b) 1

c) 0

d) -1

$$\sec(225^\circ) = ? -5$$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

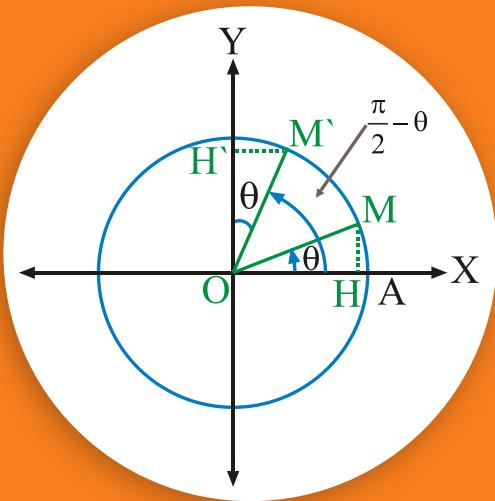
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

د دوو زاویو د مثلثاتی نسبتونو
تر منځ اړیکې چې مجموعه یې

$\frac{\pi}{2}$ یا 90° راډیانه وي

• آیا $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ دی؟ ولې؟

• د 150° او 60° زاویو مثلثاتی نسبتونه سره
څه اړیکه لري؟



د $\frac{\pi}{2} - \theta$ زاویه او د $\frac{\pi}{2} - \theta$ خخه عبارت ده چې د θ او د $\hat{AO}M'$ زاویه له ($\Delta OH'M$ او ΔOHM) متشونه سره مساوی
زاویو مجموعه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ کېږي . خرنګه چې د ΔOHM متشونه سره مساوی دی.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta$$

فعالیت

وبنیاست چې: $\csc(90 - \theta) = \sec \theta$ او $\sec(90 - \theta) = \csc \theta$ دی.

لومړۍ مثال: که:

$$\sin 23^\circ = 0,3907 \quad \cos 23^\circ = 0,9205 \quad \tan 23^\circ = 0,4245$$

$$\cot 23^\circ = 2,356 \quad \sec 23^\circ = 1,086 \quad \csc 23^\circ = 2,559$$

وې، د 67° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

حل:

$$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205$$

$$\cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$$

$$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907$$

$$\sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$$

$$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356$$

$$\csc 67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$$

فعالیت

: ۴۵

$$\sin 8^\circ 10' = 0.1421 \quad \cos 8^\circ 10' = 0.9899$$

$$\tan 8^\circ 10' = 0.1435 \quad \cot 8^\circ 10' = 6.968$$

$$\sec 8^\circ 10' = 1.010$$

$$\csc 8^\circ 10' = 7.040$$

وې، د $50^\circ 81'$ زاوېي مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

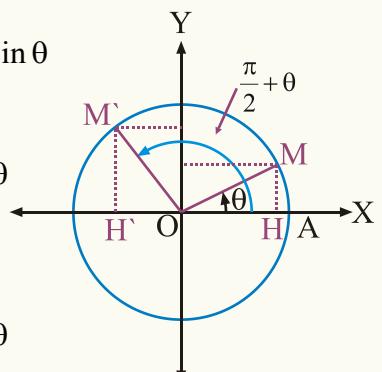
د هغو زاویو مثلثاتي نسبتونه چې توپیر بې $\frac{\pi}{2}$ یا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$



$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{-\sin \theta} = -\csc \theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

دویم مثال: د 120° زاویہ مثلثائی نسبتونه پیدا کرئے۔

حل

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \cot(90^\circ + 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ = \sec(90^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

$$\csc 120^\circ = \csc(90^\circ + 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc \theta \quad \sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\csc \theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec \theta \quad \csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sec \theta$$

پوښتني



د 135° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د 150° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ? \quad -3$$

a) $\cos x$

b) $\sin x$

c) $-\cos x$

d) $-\sin x$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = ? \quad -4$$

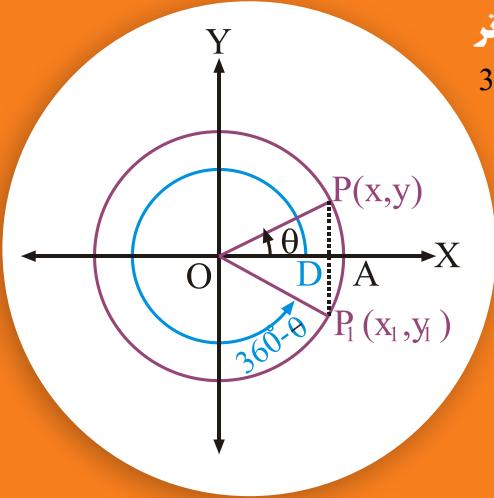
a) $\tan \theta$

b) $-\tan \theta$

c) $\cot \theta$

d) $-\cot \theta$

د هغه زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر
منځ اړیکې چې مجموعه يې 360°
یا 2π وي.



آیا بنودلای شئ چې
 $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$ او
 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$
دي؟

په پورته شکل کې د $\triangle OP_1D$ او $\triangle OPD$ مثليونو له مساوي والي خخه لرو چې:

$$x_1 = x \quad |y_1| = |y| \quad -y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = y_1 = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = x_1 = x = \cos \theta$$

$$\tan(360^\circ - \theta) = \frac{\sin(360^\circ - \theta)}{\cos(360^\circ - \theta)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

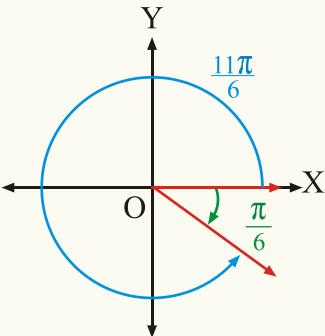
فعاليت

په همدي چول د θ او -360° زاویو د θ او \csc, \cot او \sec د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې پیدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاویو مثلثاتي نسبتونو له اړیکو سره پې پرتله کړئ.

مثال: د 330° یا $\frac{11\pi}{6}$ راډيانه زاوېي مثلثاتي نسبتونه پیدا

کړئ.

حل:



$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot \frac{11\pi}{6} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cot 330^\circ = \cot(360^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec \frac{11\pi}{6} = \sec(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sec 330^\circ = \sec(360^\circ - 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc \frac{11\pi}{6} = \csc(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \csc 330^\circ = \csc(360^\circ - 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

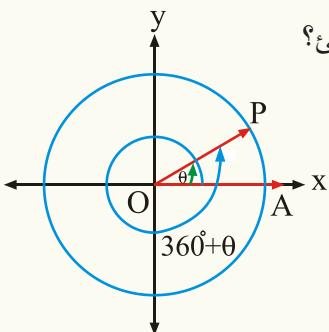
د 315° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټرمينل زاویو مثلثاتي نسبتونه:

• آيا $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پیدا کولای شي؟

• آيا $\sin 450^\circ$ ، $\sin 90^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره

برابر دي؟ ولې؟



په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $360^\circ + \theta$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(360^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot(360^\circ + \theta) = \cot \theta$$

$$\csc(360^\circ + \theta) = \csc \theta$$

$$\sec(360^\circ + \theta) = \sec \theta$$

لومړۍ مثال: د 405° زاوې پیشتابی نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دویم مثال: د 1500° زاوې پیشتابی نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

درېم مثال: د 900° او 930° زاوې پیشتابی نسبتونه \tan ، \sin او \cos پیدا کړئ.

حل

$$-930^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

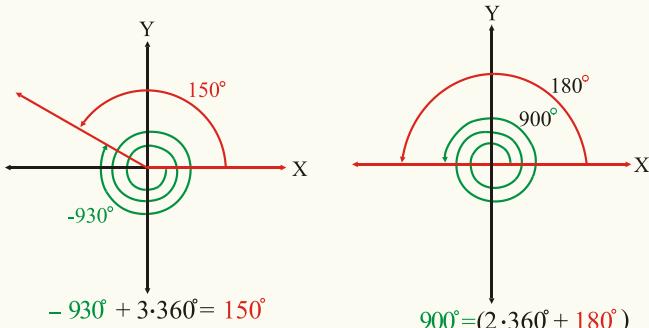
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



حل: $\frac{7\pi}{3} - \frac{5\pi}{2}$ او زاویو مثلثاتی نسبتونه پیدا کری.

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{0}$$

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

تعريف

شوی نه

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتی نسبتونه پیدا کړي.

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2\pi - \theta) = \tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\cot(2\pi - \theta) = \cot(360^\circ - \theta) = -\cot \theta$$

$$\sec(2\pi - \theta) = \sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$$

$$\csc(2\pi - \theta) = \csc(360^\circ - \theta) = -\csc \theta$$

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(2\pi + \theta) = \cos(360^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2\pi + \theta) = \tan(360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot(2\pi + \theta) = \cot(360^\circ + \theta) = \cot \theta$$

$$\sec(2\pi + \theta) = \sec(360^\circ + \theta) = \sec \theta$$

$$\csc(2\pi + \theta) = \csc(360^\circ + \theta) = \csc \theta$$

پونتني



-1 د 480° او 390° زاویو مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ.

-2 د 600° او 300° زاویو مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ.

-3 د 1830° او د (1095°) زاویو مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ.

-4 د زاویې مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ. $\frac{25\pi}{6}$

-5 د زاویې مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ. $\frac{5\pi}{3}$

-6 د $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{41\pi}{6}$ زاویو مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ.

-7 د 780° , -300° , 420° زاویو مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ.

-8 $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1

b) -1

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

-9 $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1

b) -1

c) 0

d) درې واپه سم نه دي.

-10 $\sin(-1110^\circ) = ?$

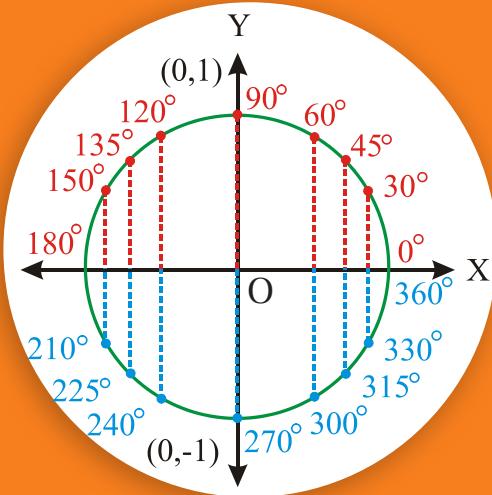
a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

د مئلشاتي تابع گانو گراف



- آیا کولای شی و وایاست چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د تابع گانو د تناوب دوره خومره ۵۰°؟
- آیا وبلای شی چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

۵ تابع د گراف رسمول (graph of the sine function) $f(x) = \sin x$

د تابع $f(x) = \sin x$ د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقی عددونو سټ دی او یې $[-1,1]$ دی. د ټابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهېږي چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقی عددونه (Real numbers) دی چې تابع په کې تعریف شوي وي. د هر حقیقی عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مئلشاتي دائري سره د x راډیان د زاوې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوي دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $x + 2k\pi$ راډیان ده، نو د cosine او sine د تابع گانو د تعریف ساحه ټول حقیقی عددونه دی. څرنګه چې $\sin x$ او $\cos x$ په مئلشاتي دائري باندې د یوه ټکی وضعیه کمیات دی، نو د $f(x) = y = \cos x$ او $f(x) = y = \sin x$ د تابع گانو $f(x) = y = \cos\theta$ او $y = \sin\theta$ دی، یاد $[-1,1]$ انتروال د تابع گانو دی.

فعالیت

$$\text{وښیاست چې } -1 \leq \sin\theta, \cos\theta \leq 1 \text{ دی.}$$

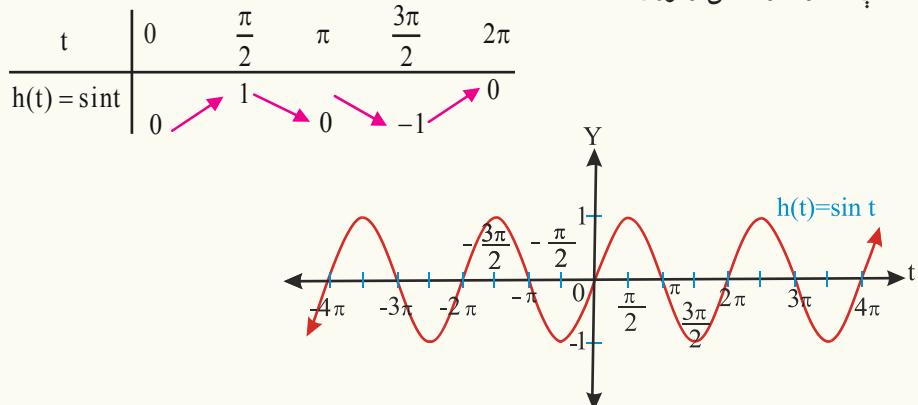
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کېږي، که چېږي د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړي $x \in D_F$ او $x + t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي او $f(x + t) = f(x)$ وي. تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: $f(x + t) = f(x)$ چې د (t) په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

عدد f د تابع د اصلی تناوب په نوم یادېږي. که $f(t) = f(t+2\pi)$ د تابع د تناوب دوره وي. نو t هم f د تابع د تناوب دوره ده. خرنګه چې پوهېږي $\cos(x + 2K\pi) = \cos x$ او $\sin(x + 2K\pi) = \sin x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو $\cos x$ او $\sin x$ توایع متناوبې توایع دی او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنيو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د ډې دواړو توابعو اصلی تناوب 2π دی.

له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د t راډیان زاویه په پام کې ونسیئ په داسې حال کې چې د t د زاوې دویمه ضلع مثلثاتی دایره د P په تکې کې قطع کوي، نو د P د تکې د y مختصه له t خخه عبارت ده. $h(t) = \sin t$ او $sint$ تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګوري:

اپونده شکل	$\sin t$	د P د تکې حرکت	د t په قيمت کې تغير
	له صفر خخه تر یوه پورې تزايد کوي	له (1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر پورې
	له یوه خخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (-1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر پورې
	له صفره خخه تر -1- پورې تناقص کوي	له (0,-1)	له π خخه تر پورې
	له صفره پورې تزايد کوي	له (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ خخه تر پورې

په همدي چول په هر 2π کي تکرار پوري په نتیجه کي $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دي.
لاندي جدول او شکل وگوري:

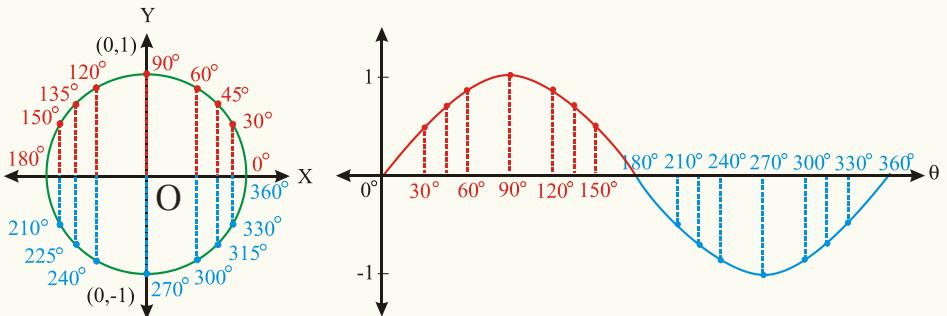


او يا کولاي شو، که ديو دوران زاوي د درج په حساب وي، د $\sin t$ تغيرات په لاندي جدول او شکل کي وسایو:

$$h(t) = \sin t$$

t	واعي	تقريبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50

180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00



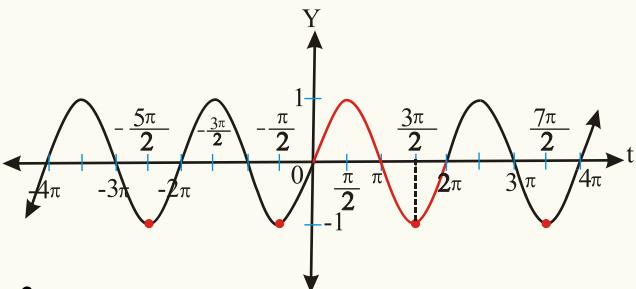
دې ته په پام سره چې $\sin t$ د تابع د تابع د تابع دوره 2π ده، نو $\sin t = \sin(t \pm 2\pi)$ دی، نو $\sin t$ د تابع گراف په $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ او داسې نورو انټروالوکې یو شان دی.

فعاليت

په $\sin t$ د تابع قيمتونه پيدا کړي.

لومړۍ مثال: د t هغه ټول قيمتونه وبنياست چې د $\sin t$ قيمت په کې (-1) وي.

حل: خرنګه چې د $\sin t$ قيمت د (-1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندي تکرار پری، نوبې شمېره قيمتونه شته چې په هغه کې د $\sin t$ قيمت -1 دی. د نمونې په ډول خو تکي په سور رنګ په شکل کې بنودل شوې دي.

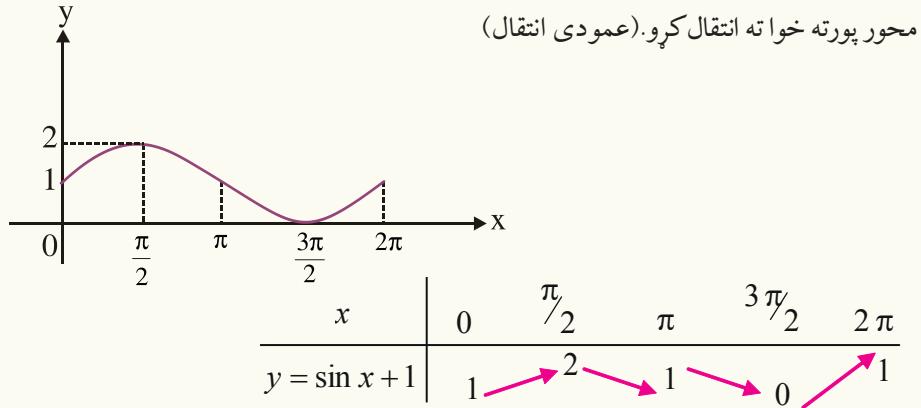


د $\sin t$ په گراف کې له صفر څخه تر 2π پوري یوازي یو تکي (نقطه) د $(-\frac{3\pi}{2}, -1)$ شته چې په

سره رنګ بنودل شوې دي. ټول هغه قيمتونه چې $\sin t$ په کې (-1) دی، له $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ده، کې k یو تام عدد دی.

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع گراف په $[0, 2\pi]$ انتروال کي رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعريف ساحه $[0, 2\pi]$ او Range $[0, 2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ گراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y محور پورته خواه انتقال کړو. (عمودی انتقال)



د \cosine او $sine$ د تابع گانو پريود او لمن (Amplitude)

که $b > 0$ وي د $g(t) = \cos bt$ او $f(t) = \sin bt$ د صفر او 2π تر منځ يوه

$y = \cos 3t$ (Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع گانو پريود $\frac{2\pi}{b}$ دی ($b > 0$). د مثال په ډول د

$y = a \sin bt$ د $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ تابع پريود $y = \sin \frac{1}{2}t$ دی او د $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ پريود

او $y = -2 \sin 4t$ د تابع گانو لمن د $|a| \neq 0$ دی ($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = a \cos bt$ او لمن

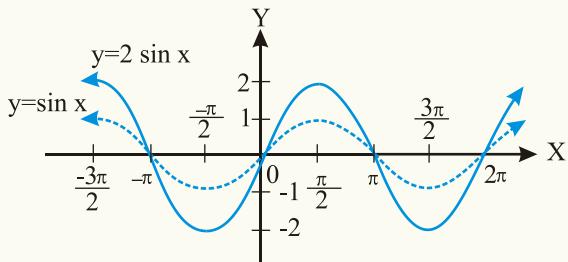
$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ دی او پريود یې } |a| = -2 = 2$$

دریم مثال: د $y = 2 \sin x$ تابع گراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

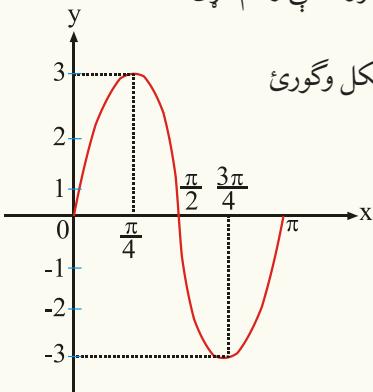
حل: د دې تابع گراف توپير د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2 \leq y \leq 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن (amplitude) ولبي. څکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پريو د هم

دی، لاندی جدول او شکل و گورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$2 \sin x$	0	2	0	-2	0



څلورم مثال: د $y = 3 \sin 2x$ تابع ګراف په $[0, \pi]$ انټروال کې رسم کړئ.



حل: د دې تابع پریوو $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندی جدول او شکل و گورئ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$3 \sin 2x$	0	3	0	-3	0

د $\sin t$ تابع د تعريف ساحه ټول حقيقی عددونه دی، د $\sin t$ د تابع ګراف د y محور په $(0,0)$ او د X محور په $(0,0)$ ، π ، 2π ، 3π ، 4π ... او $-\pi$ ، -2π ، -3π ، -4π - او نورو کې قطع

کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پوري متزايده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پوري متناقصه، له

څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پوري متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پوري متزايده ده.

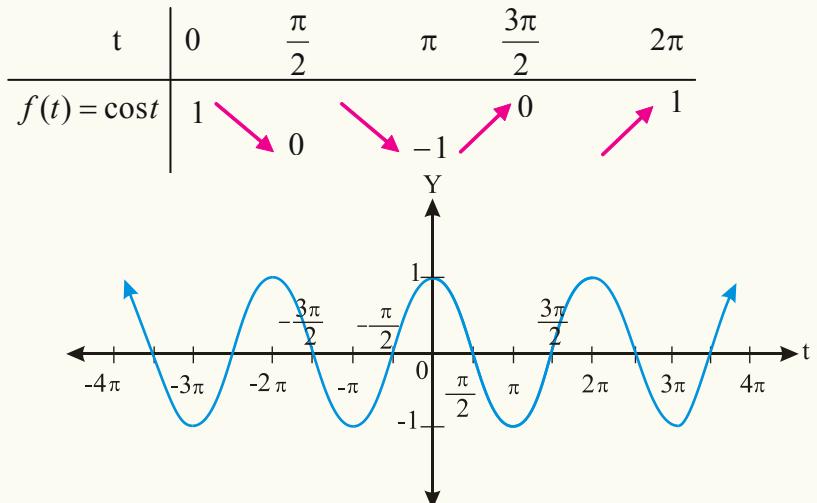
(Graph of the cosine function) د تابع ګراف $f(t) = \cos t$

د دې تابع د تعريف ساحه (domain) هم د ټولو حقيقی عددونو سپت دی او $[-1, 1]$ بې Range

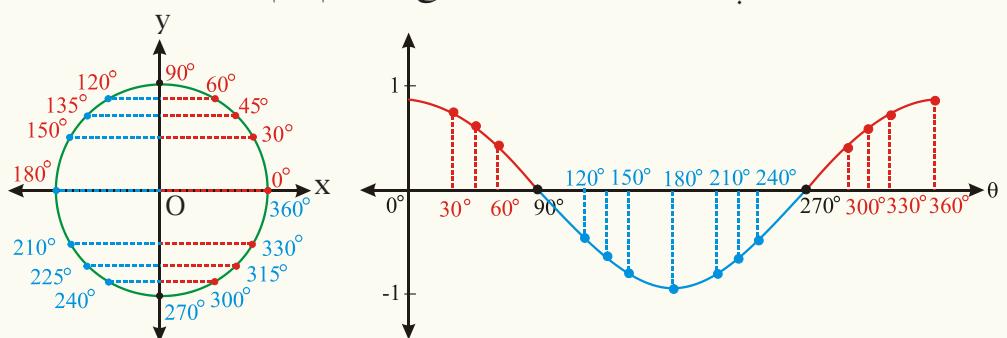
دی، د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت Standard د تابع $\cos x$ د تکي position کې د t راديان یوه زاویه په پام کې ونيسي چې د t د زاویې دويمه ضلع مثلثاتي دائريه $f(t) = \cos t$ د تکي کې قطع کوي، نود p د تکي د x مختصه د $\cos t$ خخه عبارت ده. د تابع گراف د رسماولو لپاره لاندي جدول او شکلونه وګوري.

ارونده شکل	x مختصه په د $\cos t$ تکي د p	د P د تکي حرکت	د t په قيمت کې تغير
	له یوه خخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (1,0) خخه تر پورې	له 0 خخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر خخه تر -1 پورې تناقص کوي.	له (0,1) خخه تر پورې	له خخه تر $\frac{\pi}{2}$ π
	له -1 خخه تر صفره پورې ترايد کوي.	له (-1,0) خخه تر پورې	له خخه تر $\frac{3\pi}{2}$ π
	له صفر خخه تر یوه پورې ترايد کوي	له (0,-1) خخه تر پورې	له خخه تر $\frac{\pi}{2}$ 2π

په همدي چول په هر 2π کې تکرارېږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل و گورئ.



کولای شو، د درجې په حساب د ګراف هم رسم کړو:



تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د $\cos t$ د ګراف د $[0, 2\pi]$ او $[-2\pi, 0]$ او $[4\pi, 6\pi]$ دا داسې نورو کې یو شان دی.

تابع $\cos t$ د تعريف ساحه د حقیقی عدلونو سټ او y دا Range یا د $[-1, 1]$ دی. منځ دی، یا د $[-1, 1]$ انتروال د $\cos t$ د ګراف دا Range دی.

$$f(t) = \cos t$$

t	واعی	تقریبی
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87

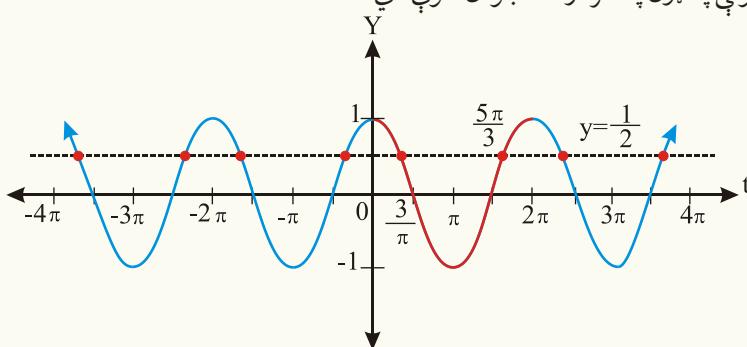
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د تابع $g(t) = \cos t$ په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړۍ مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د $\cos t$ د تابع قیمت په کې له سره مساوی وي.

حل: خرنګه چې بې شمېرہ زاوې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y = \cos t = \frac{1}{2}$ دی، په شکل کې خوپکي د نمونې په ډول په سره رنګ بنودل شوې دي.



د $[0, 2\pi]$ په انټروال کې داسي دوه ټکي شته چې له $\cos t = \frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2})$ او $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ او $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ چې په هغو کې $\cos t = \frac{1}{2}$ وي، له $t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ یا $t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ چې یو تام عدد دي.

د \cos او \sin تابع گانو د تعريف ساحه تول حقيقی عددونه دي، $y = \cos t$ تابع له صفره خخه تر $\frac{\pi}{2}$ پوري متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π خخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزايده او 2π خخه تر 2π پوري هم متزايده ده. د $y = \sin t$ او $y = \cos t$ د تابع گانو پريود 2π دی، په دې معنا چې:

د $\sin(-t) = -\sin t$ $f(t) = \cos t$ تابع يوه حفته تابع ده، خکه چې: $f(t) = \sin t$ د تابع طاقه او $\cos(-t) = \cos t$ د تابع گراف نظر مبداء ته متناظر او د $\sin t$ د تابع گراف نظر د y محور ته متناظر دي.

پوبنښې

1- د لاندي تابع گانو گرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.
 $f(t) = \sin t : [2\pi, 6\pi]$ $g(t) = \cos t : [\pi, 3\pi]$

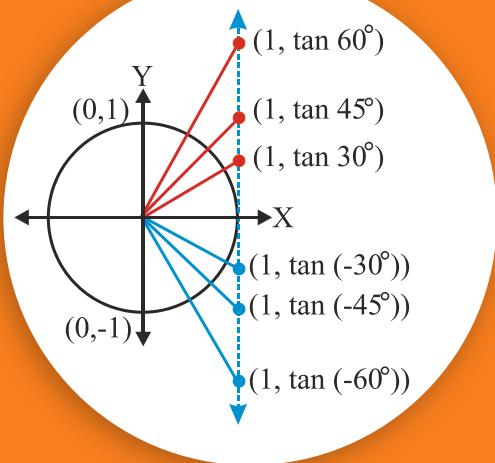
2- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قيمت لپاره $\sin t = 1$ دی؟

3- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قيمت لپاره $\cos t = 0$ دی؟

4- د $[-2\pi, 6\pi]$ د تابع گراف په $g(t) = -\frac{1}{2} \sin t$ د انټروال کې رسم کړئ.

د تانجانت د تابع گراف

آيا پوهېږي چې د \tan تابع یوه متزايده تابع ده؟



خرنګه چې د $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ تابع د تعريف

ساحه ټول حقيقی عددونه دی، پرته له هغو زاویو څخه چې \cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{او} \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

خرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتی دایري سره د (0,1) ټکی دی، نود

$\dots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \dots$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د

زاویې په لاس راخې چې د دی زاویو د \tan قيمتونه تعريف شوي نه دی او د $\frac{\pi}{2}$ مستقيمه خطونه د \tan د تابع عمودي مجانونه دی.

په هملدي ډول د (0, -1) ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دويمه ضلع واقع دي، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره

دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\dots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \dots$ زاویې په لاس

راخې چې د \tan د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

يا د \tan د تابع د تعريف په ناحيې (domain) کې ټول حقيقی عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$

طاقي مضرب څخه، او یا $\{t / t \in \mathbb{R}, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د \tan د تابع Range د

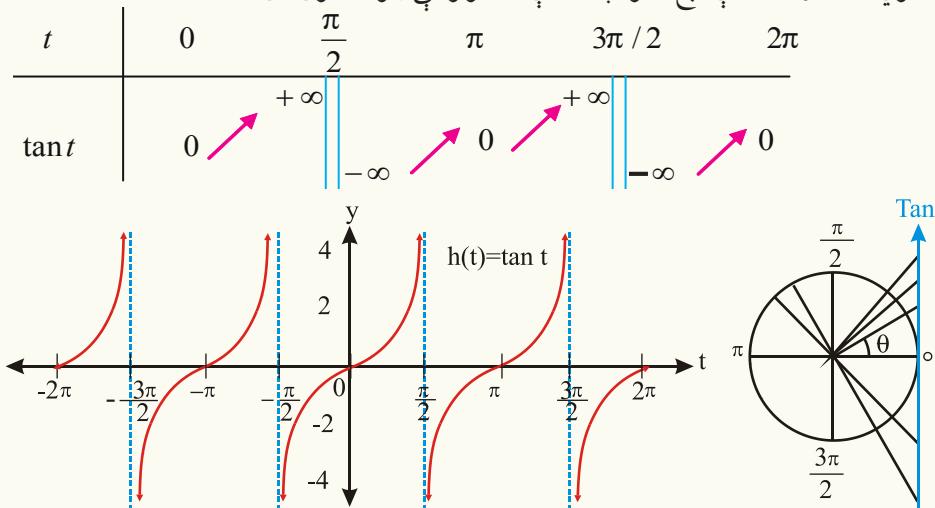
تولو حقيقی عددونو سټ دی. د تانجانت د تابع پریود π دی. د رادیان زاویې لپاره لرو چې:

$$\tan(t \pm \pi) = \tan t$$

د $\tan t$ دی. خه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزايد وکړئ، نو $\tan t$ هم له صفره خخه تر ∞ + پورې تزايد کوي ($\tan \frac{\pi}{2}$ تعريف شوی نه دی). په د ویمه ربع کې هم

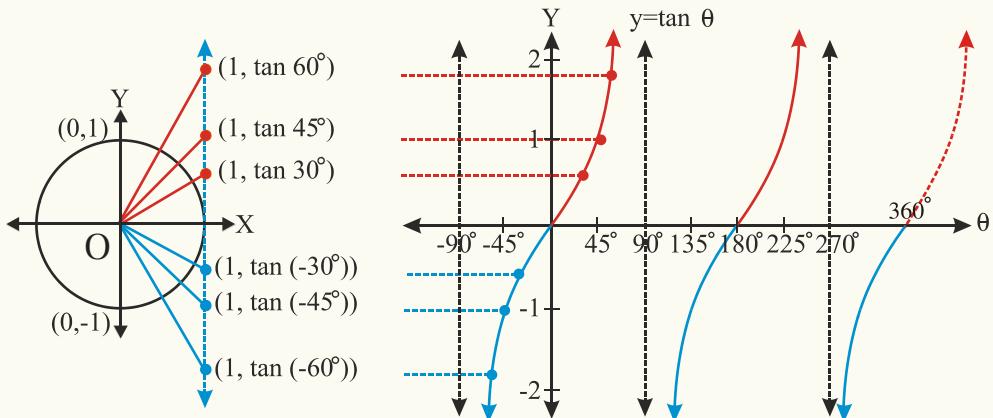
خه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر π پورې تزايد وکړئ، $\tan t$ هم له $-\infty$ - خخه تر صفره پورې تزايد کوي.

په همدي ډول په دريمه ناحيې کې هغه وخت چې د t زاویه له π خخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزايد وکړئ، د t د زاویې تانجانت له صفره خخه تر ∞ + پورې تزايد کوي. په خلورمه ناحيې کې د t د زاویې تانجانت له $-\infty$ - خخه تر صفره پورې تزايد کوي. لاندې جدول د تانجانت د تابع تحول بنکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې بنودل شوی دی:



که θ د درجې په حساب وي، د تانجانت تابع قيمتونه او شکل په لاندې ډول وګوري.

	θ	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°
$\tan \theta$	حقيقي	تعريف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبی	تعريف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73



خونگه چې د $(0, \pi)$ او $(\pi, 2\pi)$ په فاصله کې د پانجانې د تابع تغیرات یو شی دي، نو د $\tan t = \tan bt$ تابع پریود π دی او د \tan تابع یوه متزايده تابع ده. له بلې خواکه $b > 0$ وي، د

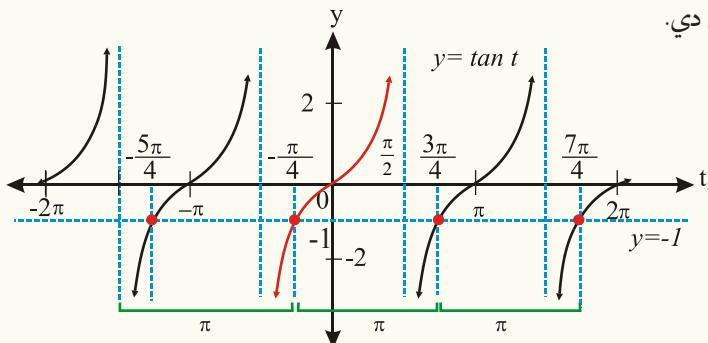
تابع د $\tan t$ او $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره (Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دي. د مثال په ډول د

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \text{ دی. } f(t) = \tan 2t$$

مثال: د t ټول هغه قيمتونه پیداکړئ چې $\tan t = -1$ وي.

حل: خونگه چې د $\tan t$ قيمتونه د π په فاصله کې تکرارپري، نو د t بې شمېره قيمتونه شته چې $y = \tan t$ له $y = -1$ سره مساوی وي چې په لاندې شکل کې خوپکي د نمونې په ډول بنوදل

شوي دي.



خونگه چې د $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ یو پکي لري، نو د t ټول قيمتونه

چې $\tan t = -1$ دی مساوی دی په: $t = -\frac{\pi}{4} + K\pi$ یو تام عدد دی).

د \tan تابع هر وخت متزايده د او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاويو خخه پرته به تولو حقيقيي

عددونو کې تعريف شوي ده. او د تناوب دوره يې π ده، خکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$

خرنگه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ يوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ به تام مضرب کې عمودي محاذب هم لري.

د \tan گانو د مشخصو لنپيز: tangent ، cosine ، sine او

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه جفته
$\sin e$	$f(t) = \sin t$	د تولو حقيقيي عددونو سټ	تول حقيقيي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
\cosine	$f(t) = \cos t$	تول حقيقيي عددونه	تول حقيقيي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t) = \tan t$	تول حقيقيي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب خخه	تول حقيقيي عددونه	π	طاقه

يا په بل عبارت:
 $D_{\sin} = D_{\cos} = \text{IR}$ $R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$

$D_{\tan} = \{x \in \text{IR} : \cos x \neq 0\}$

پوښتني

1 - د زاويې په کوم قيمت د $\tan t$ د تابع قيمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنۍ دي؟

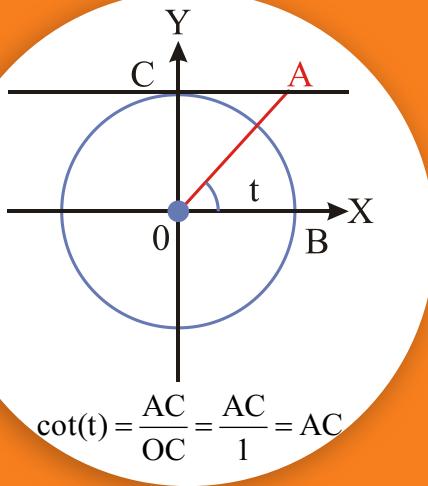
2 - د $y = 3 \tan \theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

3 - د $\tan \theta$ تابع پریود مساوي دي په:

درې واړه سم نه دي (a) 2π b) π c) 3π d)

4 - که د θ زاويه له 0° خخه تر 90° پوري تحول وکړي، د $\tan \theta$ تحول عبارت دي له:
 a) له صفر خخه تر $+ \infty$ b) $- \infty$ - خخه تر c) $+\infty$ -

د کوتانجانت د تابع گراف



- آيا د کوتانجانت د تابع د تناوب دوره پېژنی؟
- که $\sin t = 0$ وي، آيا $\cot(t)$ تعريف شوي نه دی چې t یو
شوي دی؟ که نه، ولپي؟

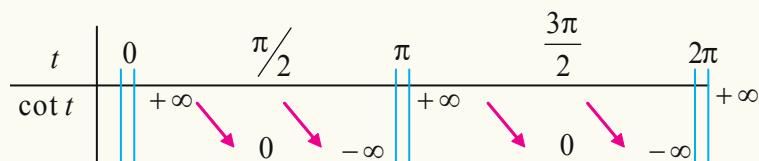
خونگه چې $\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعريف شوي نه دی چې t یو
تام عدد وي.

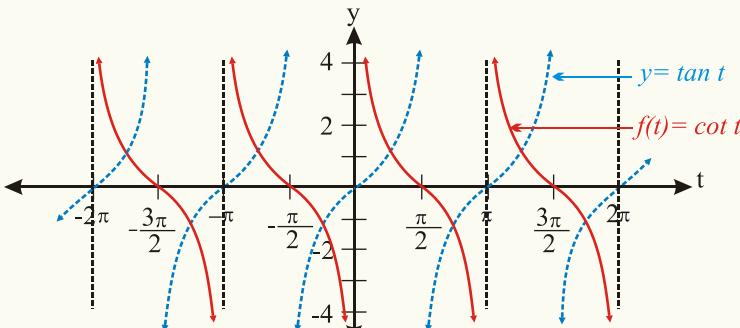
د تابع د تعريف ساحه (domain) ټول حقيقی عددونه دی پرته د π له تام مضرب خخه،
یا په بل عبارت $\{t \in \mathbb{R} / \sin t \neq 0\}$ یا $\mathbb{R} - \{t / t \in \mathbb{R}, t = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ او
د دې تابع Range ټول حقيقی عددونه دی.

د $f(t) = \cos(t)$ د تابع گراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب
(Vertical asymptotes) لري $t = k\pi$ چې k یو تام عدد دی.

خه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پوري زیاته شي، د $\cot(t)$ قيمت له $+\infty$ خخه تر
صفره پوري کمپېري ($\cot 0^\circ$ نه دی تعريف شوي) په دويمه ناحيې کې خه وخت چې د t زاویه

له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر π پوري زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پوري کمپېري (تناقص کوي). دې
ته په پام سره چې د $\cot(t)$ د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دريمه او خلورمه ناحيې کې د
تابع تغيرات د لوړۍ او دویډې ناحيې په شان دي. پورتنې حققت په لاندې جدول او شکل کې
ليډلای شي.





د گراف sec(t) قابع

د گرافونه $\cos(t)$ او $\sec(t)$ سره خه اړیکه لري؟

د $f(t) = \sec(t)$ د تابع گراف $\cos t$ د تابع له ګراف سره معکوسه اړیکه لري، خکه چې

$$\text{په شکل په پام کې ونيسو، } \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

قيمت له صفر خه تر $\frac{\pi}{2}$ يا 90° پوري زيات شي، د $\cos t$ قيمت له (1) خخه صفر ته نزدي

کېږي، د $\sec t$ قيمت له 1 خخه تر ∞ زياتېږي، که $t = 90^\circ$ شي، $\sec t$ تعريف

شوی نه دی، که $t = 90^\circ$ لې خه زياته شي د $\sec t$ قيمت له ∞ - کېږي او په $t = \pi = 180^\circ$

کې د 1 - سره مساوی کېږي. په همدي ډول که $t = 180^\circ$ خخه تر 270° پوري زياته شي، نو د $\sec t$ قيمت له 1 - خخه صفر ته نزدي کېږي او $\sec(t) = 1 - \infty$ - پوري کېږي.

په $t = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ کې د $\sec t$ قيمت غير معين کېږي په همدي ډول، خه وخت چې د

قيمت له 270° خخه تر 360° زيات شي، نو $\cos(t)$ له صفر خخه تريوه پوري قيمت اخلي

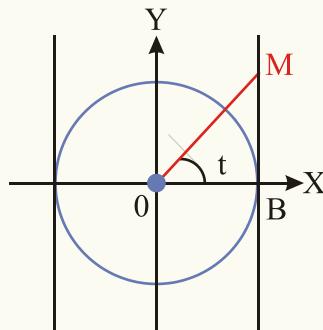
او $\sec(t) = \infty$ + خخه تر (1) پوري تناقص کوي. ليدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = \text{IR} - \left\{ t \mid t = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \text{Z} \right\}$$

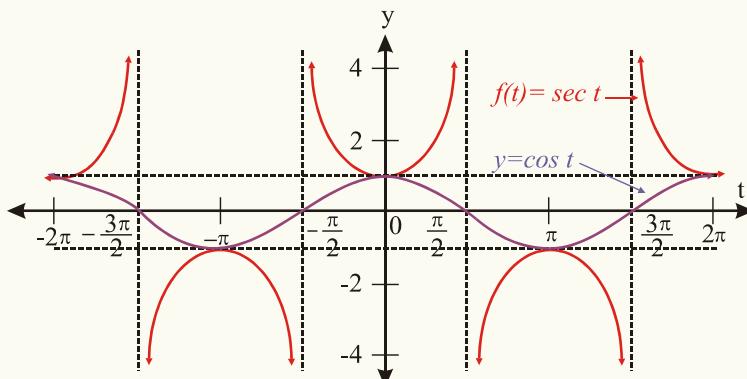
او $\sec(t) = \text{IR} - \{t \mid -1 \leq t \leq 1\}$ یا ټول حقيقی عددونه پرته د $[-1, 1]$ له انتروال
شخه یا په بل عبارت د $f(t) = \sec(t)$ تابع د تعريف ساحه (Domain) ډټولو حقيقی عددونو

ست دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب خخه او د $f(t) = \sec(t)$ د تابع Range ټول حقيقی عددونه
دي چې لوی یا مساوی د یو او یا کوچنۍ یا مساوی له -1 وي، لکه: خنګه چې ليدل کېږي د

تابع $\sec(t)$ دی او د $f(t) = \sec(t)$ تابع د 2π دی هم پریود تابع $\sec(t)$ کې عمودي مجانبوه لري چې k يو تام عدد دی.



$$\sec t = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	0°	90°	180°	270°	360°
$F(t) = \sec t$	1	$+\infty$	-	-1	$+\infty$

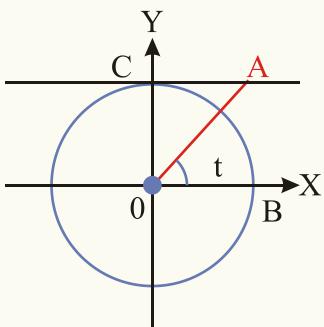
فعالیت

د $f(t) = \frac{4}{3} \sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

(Graph of the cosecant Function) د تابع گراف cosecant

د تابع گراف $f(t) = \csc(t)$ د تابع گراف سره خه اړیکه لري؟

خونګه چې $\sin(t) = \frac{1}{\csc t}$ د تابع $f(t) = \csc(t)$ د تابع د تعریف شوی نه دی، د $\sin t$ دبل معکوس دی. خه وخت چې 0 دی $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t) = \csc(t)$ د تابع د تعریف ناجیه ټول حقیقی عددونه دی پرته له هغه زاویو خخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دی قیمتونو کې عمودی مجانبونه هم لري او د $f(t) = \csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقی عددونه دی چې لوی یا مساوی ديو، کوچنۍ یا مساوی له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.

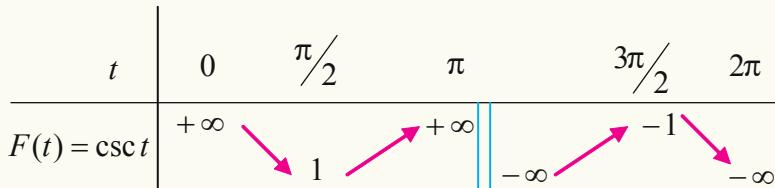


خه وخت چې t زاویه له 0° خخه ټر 90° پوري زیاته شي،
نو $\sin t$ له صفر خخه ټر (1) پوري زیاتپري (تزايد کوي)، او
 $\csc(t)$ له $+\infty$ خخه ټر (1) پوري کمپري (تناقص کوي)،
خه وخت چې $t = 90^\circ$ شي، $\csc(t) = 1$ کېږي او که د
 t زاویه له 90° خخه ټر 180° زیاته شي، نو $\sin(t)$ له $-\infty$ خخه
یوه خخه صفر ته راکمپري او $\csc(t)$ له (1) خخه $+\infty$ ته
زیاتپري (تزايد کوي). کله چې $t = 180^\circ$ شي نو $\sin(t) = 0$
او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه 180° خخه
تر 270° پوري زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر خخه ټر (-1) پوري کمپري او
خخه ټر (-1) پوري زیاتپري، د $t = 270^\circ$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوی کېږي.
په همدي ډول کله چې t زاویه له 270° خخه ټر 360° پوري زیاته شي (تزايد وکړي)، نو
 $\sin t$ له -1 خخه صفر ته نژدي کېږي او $\csc(t)$ له (-1) خخه ټر $-\infty$ پوري کمپري. په
 $t = 360^\circ$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی).
کې تابع عمودي
مجانبونه لري.

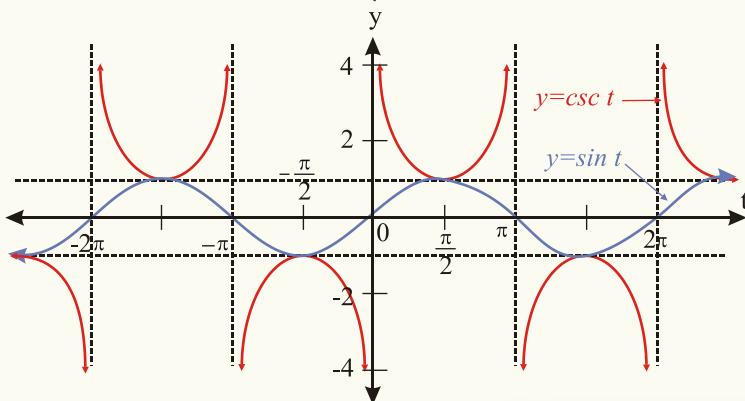
په شکل کې د مثلثائي دایري د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $\triangle OCA$ په قائم الزاویه مثلث

$$\csc(t) = \csc \angle OAC = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{1} \quad (\hat{t} = \hat{\angle OAC})$$
 کې لرو چې:

د خط يا \overline{OA} تحول په لاندي جدول کې لنډوو:



لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر 360° يا (2π) پوري قيمتونه واخلي، نو $\csc(t) \geq 1$ او يا $\csc(t) \leq -1$ کېږي، نو لاندي شکل وګورئ.



فعاليت

د $h(t) = -3 \csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندي جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پريود	طاقة یا جفته
$f(t) = \sec t$	ټول حقيقی عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقيقی عددونه کوچني يامساوي په، -1 لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

$f(t) = \csc(t)$	ټول حقيقی عددونه پرته د π له تام مضرب خخه	ټول حقيقی عددونه کوچنی یامساوی په -1 لوی یا مساوی په 1	2π	طاقة
$f(t) = \cot(t)$	ټول حقيقی عددونه پرته د π له تام مضرب خخه	ټول حقيقی عددونه	π	طاقة

له مثلثاتي تابع ګانو خخه دا نتیجه په لاس راخی چې: د θ یا t د زاویې په زیاتوالی سره د $\sin \theta$ او $\tan \theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زیاتیری، خو د $\cos \theta$ او $\cot \theta$ قيمت کمپري.

پونتنې

1 - د $f(t) = \cot(t) - 1$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوي نه ده او ولې؟

2 - خه وخت چې د θ زاویه له $\frac{\pi}{2}$ خخه تر π پوري تحول وکړي، د $\cot \theta$ تحول عبارت دي:
a) $1 \rightarrow -\infty$ b) $0 \rightarrow -\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 - که $\hat{t} = \pi$ ووي، $\cot(\hat{t})$ عبارت دي له:

a) صفر b) -1 c) نه دی تعريف شوي

4 - د \sec او \csc تابع ګانو $Range$ عبارت دي له:

a) $IR - \{t \mid -1 < t < 1\}$ b) ټول حقيقی عددونه c) $IR - \{t \mid -1 \leq t \leq 1\}$

5 - د $f(t) = \csc(t)$ تابع د تعريف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

(a) ټول حقيقی عددونه پرته د π له تام مضرب خخه

(b) ټول حقيقی عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب خخه

(c) ټول حقيقی عددونه پرته د 2π له تام مضرب خخه

(d) درې واړه سمې نه دي په انټروال کې:
$$\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$
 تابع د $f(t) = \csc(t)$ د

a) متزايده او نه متناقصه ده b) متناقصه ده c) متزايده ده

د خپرگی لندیز

• د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد خخه بل واحد ته وارپوو.

• یو راډیان هغه مرکزی زاویه د چې د مقابل قوس او بردالی یې د شعاع له او بردوالی سره مساوی وي.

• د راډیان په حساب مساوی ده په: $\frac{\theta}{r} = \frac{s}{r}$ چې s د مرکزی زاوې مقابل قوس او r د دایري شعاع ده.

• که دیوې زاوې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لو مرنۍ ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.

• که په معیاري حالت کې د دوو یا خو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاوې کوپرمیل زاوې نومېږي.

• مثلثاتی دایره هغه دایره د چې د شعاع او بردوالی یې د او بردوالی واحد وي.

$\sin(90 - \theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
$\cos(90 - \theta) = \sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
$\tan(90 - \theta) = \cot \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(90 - \theta) = \tan \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$
$\sec(90 - \theta) = \csc \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sec(\pi - \theta) = -\sec \theta$
$\csc(90 - \theta) = \sec \theta$	$\csc(-\theta) = -\csc \theta$	$\csc(\pi - \theta) = \csc \theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$	$\cot(\pi + \theta) = -\cot \theta$	$\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$
$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\csc \theta$	$\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta$	$\sec(2\pi - \theta) = \sec \theta$
$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sec \theta$	$\csc(\pi + \theta) = -\csc \theta$	$\csc(2\pi - \theta) = -\csc \theta$

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاوېي چې k يو تام عدد دی، کوتريمینل زاوېي دی چې ټول مثلثاتي نسبتونه بې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د تابعو *domain* ټول حقيقی عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y = \sin\theta$ تابع یوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ددي تابع ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته متناظر دی او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ او د \cos تابع ګراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د 0° ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاویو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوي نه دي.

• د \sin ، \cos ، \tan او \csc ، \sec ، \cot د تابع گانو د تناوب دوره 2π او د \tan او \cot د تابع گانو د تناوب دوره(*پریود*)، π ده.

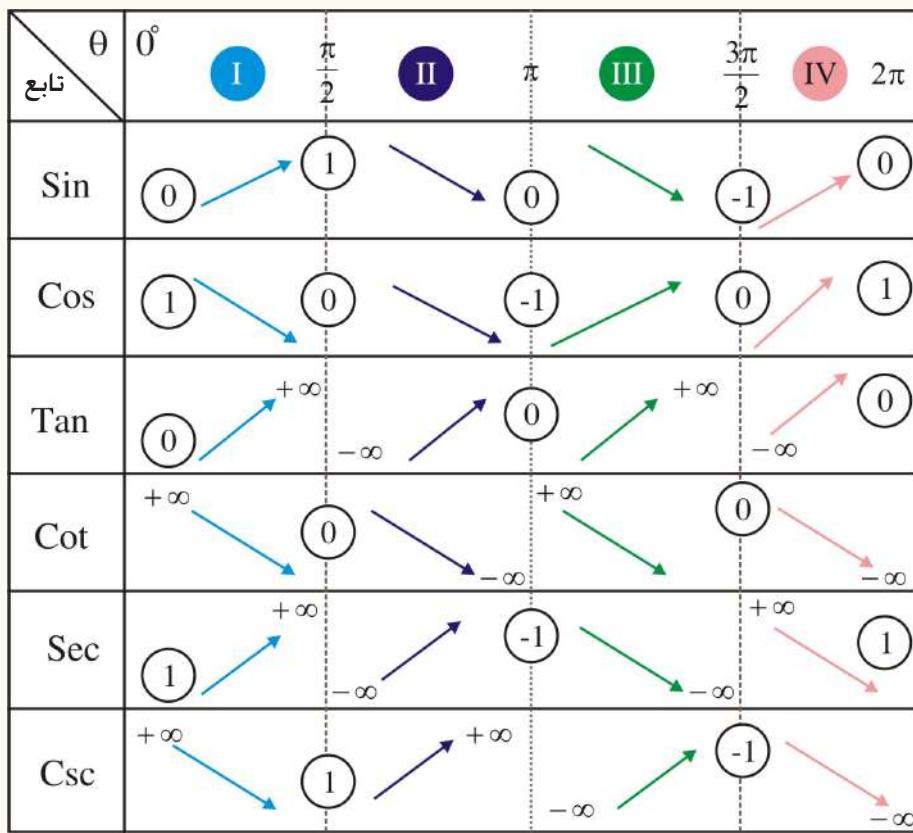
• د \tan تابع هر وخت متزايد او د \cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د \cos او \sec تابع گانې جفتې او د \sin ، \tan ، \cot او \csc تابع گانې طاقې دی.

• که د یوې تابع ګراف نظر د محور ته متناظر وي، دا ډول تابع گانې جفتې دی یا د هر x لپاره، $f(-x) = f(x)$ د $x \in \text{domf}$ رابطه صدق وکړي.

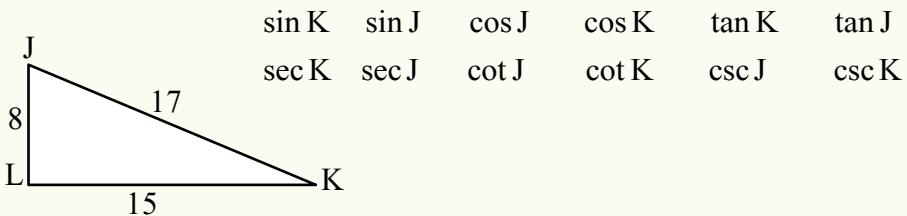
• که د یوې تابع ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع د چې د هر x لپاره، $f(-x) = -f(x)$ د $x \in \text{domf}$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې بنودل شوي دی.



د څرکي پوښتني

- 1 - 42,6033° په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟
- 2 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او 25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به خوراډيانه مثبته زاویه طې کړي وي؟
- 3 - د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟



4 - که د یو په دائري شعاع 20cm او د مرکزی زاویې مقابل قوس یې $s = 85\text{cm}$ وي، مرکزی زاویه خوراډيانه ده؟

5 - د 1 radian او 2 radian مرکزی زاویو د مقابلو قوسو اور بدواли پیدا کړئ. په دې ډول چې د دائري قطر 10 cm وي.

6 - د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چېږي واقع کېږي؟

$$\frac{3\pi}{2}, -7\pi, -\frac{11\pi}{2}, -500^\circ, 900^\circ, -\pi$$

7 - لاندې زاویې چې په راډيان راکړل شوي دي، په درجه یې واپوئ.
 $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{45}$

8 - په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه خوراډيانه طې کوي؟

9 - که د یوه تراکټور د کوچنۍ تایير قطر یو متر او د لوی تایير قطر 120cm وي، خه وخت چې کوچنۍ تایير د 70° درجو په اندازه وخرخېږي لوی تایير خوراډيانه طې کوي؟

10 - یو خرڅ په یو ساعت کې 300ReV دورانو نه کوي، دا خرڅ په یوه ثانیه کې خوراډيانه ګرځی؟

11 - د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډيانه دي. هره یوه

زاویه خو درجی ده؟

$\hat{C} + \hat{D} = 200g$ ، $\hat{A} + \hat{D} = 240^\circ$ که \hat{D} دیوپی خلور ضلعی زاویه دی، $\hat{C}, \hat{B}, \hat{A}$ -12

او $\hat{B} + \hat{D} = \frac{2\pi}{3}$ ر وی: دی خلور ضلعی زاویه درجی په حساب پیدا کړئ.

- دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برحه مساوی ده په: 13

a) $= 30^\circ$ b) $\frac{\pi}{6}$ radian c) $\frac{100}{3}g$ d) درې واړه سمې دی

14 - د دوو زاویو مجموعه 17° او تفاضل یې 17 ګراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجی په حساب د دوو زاویو مجموعه X او تفاضل یې د ګراد په حساب هم X دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 - لاندې زاویې د درجی په اعشاري شکل ولیکړ.

$47^\circ 15' 36''$ $15^\circ 24' 45''$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

23.16° 4.2075°

18 - زاویو مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ $\cot \frac{7\pi}{6}$ او $\tan \frac{3\pi}{4}$ ، $\sin(-\frac{\pi}{3})$

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin \theta = 1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan \theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودی مجانب لري؟

21 - له (i) خخه تر (iii) پوري کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

$$(i) \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$(ii) \quad \cos(-x) = -\cos x$$

$$(iii) \quad \tan(-x) = -\tan x$$

(a) او ii سمې دی. (b) یوازې ii سمې ده.

(c) او iii سمې دی. (d) درې واړه سمې دې.

(e) هېڅ یو.

$$\tan \frac{8\pi}{3} \text{ او } \sin(-13\pi), \cos \frac{47\pi}{2} - 22$$

23- داسې زاویه پیداکړئ چې که د ګراد په حساب يې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24- د دریو زاویو مجموعه 240 ګراده ده، که لوړنۍ زاویه 40 ګراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ رادیانه وي، دریمه زاویه خو درجې ده؟

25- د 4185° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

26- د (-3660°) زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

27- $y = \cos \theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

هـ متزايده او هـ متناقصه ده (a)

هـ متناقصه ده (b)

28- د $y = \tan \theta$ تابع پريود عبارت ده، له:

a) 2π

b) π

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{3\pi}{2}$

29- د $f(t) = \cos(t)$ تابع:

a) جفته ده (a)

b) طاقه ده (b)

c) نه جفته او نه طاقه ده (c)

30- هـ تابع چې ګراف يې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده (a)

b) طاقه ده (b)

c) نه جفته او نه طاقه ده (c)

31- د $y = \cos \theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$

c) 2π

d) 3π

32- سره خه اړیکه لري $\sin 787^\circ$ له $\sin 67^\circ$

a) $\sin 787^\circ > \sin 67^\circ$ b) $\sin 787^\circ < \sin 67^\circ$ c) $\sin 67^\circ = \sin 787^\circ$

33- کومه يوه له لاندې اړیکو خڅه سمه ده؟

a) $\sec 135^\circ = -\csc 45^\circ$

d) $\sec 135^\circ = \sec 45^\circ$

b) $\sec 135^\circ = \csc 45^\circ$

c) $\sec 135^\circ = -\sec 45^\circ$

- کومه یوه له لاندې اړیکو خخه سمه ده؟ 34

a) $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$

c) $\tan 240^\circ = \cot 60^\circ$

b) $\tan 240^\circ = -\tan 60^\circ$

d) $\tan 240^\circ = -\cot 60^\circ$

$\cot 0^\circ = ?$ - 35

a) 1

b) -1

c) 0

d) 0

تعريف شوي نه دی.

$\cos 9\pi = ?$

- 36

a) 1

b) -1

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

$\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

- 37

a) 1

b) -1

c) 0

d) درې واړه سم نه دی

- 2430° - له زاوې مثلاټي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin(270^\circ - \theta) = ?$

- 39

a) $\sin \theta$

b) $-\sin \theta$

c) $\cos \theta$

d) $-\cos \theta$

$\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

- 40

a) 1

b) -1

c) 0

d) تعريف شوي نه دی

$\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

- 41

a) 1

b) -1

c) 0

d) تعريف شوي نه دی

$\tan(-15\pi) = ?$

- 42

a) 1

b) -1

c) 0

d) تعريف شوي نه دی

$\sec(-1530^\circ) =$

- 43

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعريف شوی نه دی (- 44
 $\cot(-2430^\circ) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعريف شوی نه دی (- 45
 $\sin\left(\frac{235\pi}{2}\right) = ?$
a) 1 b) -1 c) 0 d) تعريف شوی نه دی (

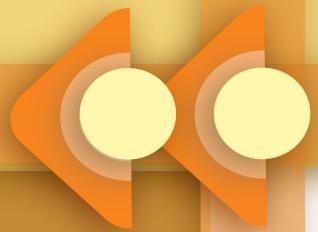
$\cos\left(\frac{407\pi}{2}\right) = ?$ - 46
a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

: مساوی دی په $\tan(90 + \theta)$ - 47
a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $-\tan\theta$ d) $\tan\theta$
 $\tan(270 + \theta) = ?$ - 48
a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $\tan\theta$ d) $-\tan\theta$
 $\sin(-1980^\circ) = ?$ - 49

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$
 $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = ?$ - 50
a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

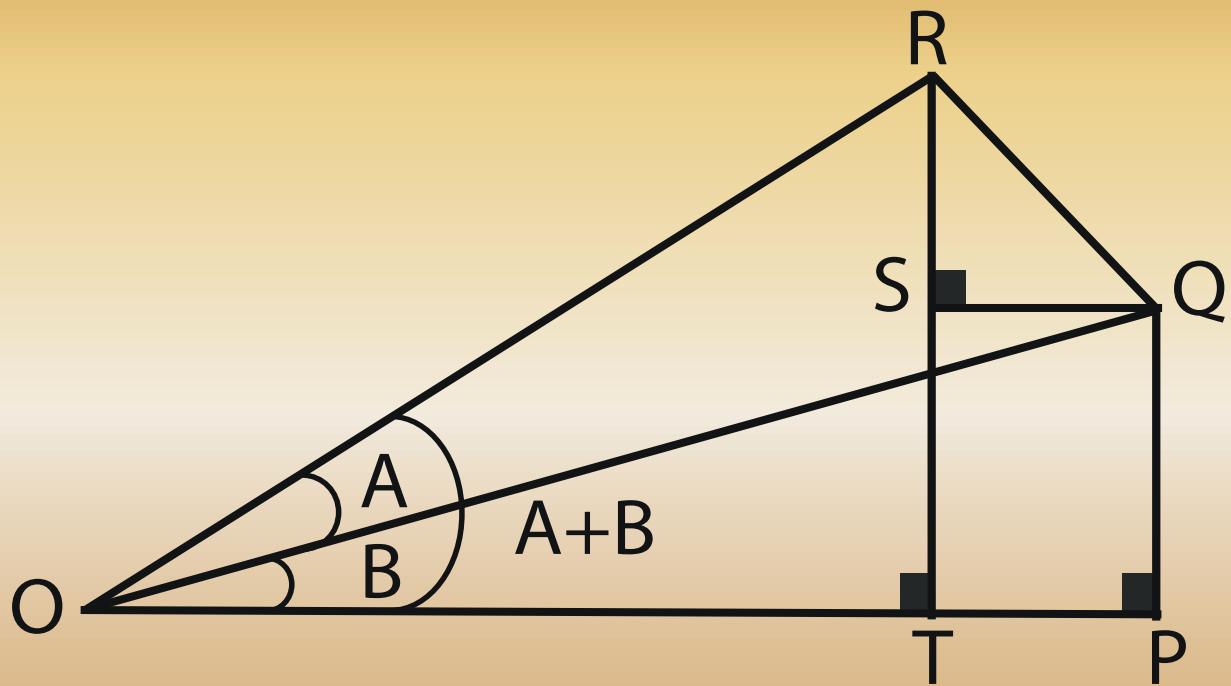
51 - له لاندې اړیکو خخه کومه یوه یې سمه ده؟

a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$



پنځم څېرکي

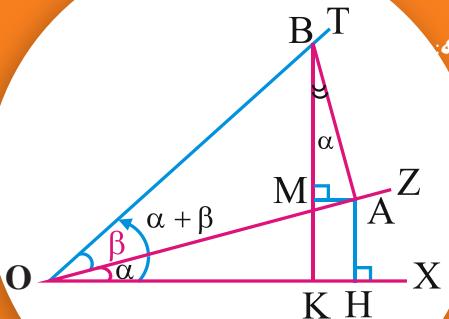
د مثلثاتو تطیقات



آياد

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

رابطي سموالي بنودلای شی؟



-1 د Sin($\alpha + \beta$) محاسبه کول: د $\overset{\wedge}{XOZ}$ زاویه له α او د $\overset{\wedge}{ZOT}$ زاویه له β سره مساوي جلاکوو او داسې يې يو د بل خنگ ته بدو چې دوو مجاوري زاويې جوري کړي بيا د OT د قطعه خط پر مخ د OB د قطعه خط د واحد په اندازه جلاکوو. د B له تکي خنخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بيا د A له تکي خنخه د OX خط پر AH عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\sin\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{HA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HA}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{HA} = \sin\alpha \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{OH} = \cos\alpha \cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{KB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{KB}}{1} = \overline{KB}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OK}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OK}}{1} = \overline{OK}$$

د A له تکی خخه پر KB باندی د AM عمود رسموو چې د KHAM خلور ضلعي مستطيل دي، په نتيجه کې KM=HA او .

زاویه د α له زاویه سره مساوی ده (ددی دواړو زاویو ضلعي یو پر بل باندی عمود دي). د \hat{MBA} په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(\hat{MBA}) = \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\hat{MBA}) = \sin\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha \sin\beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د، KM او KB پر خای یې قيمتونه وضع کړو،
 $(KM = AH = \sin\alpha \cos\beta)$ لرو چې:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

د ۵: محاسبه کول : په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د

او OH پر خای یې قيمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

د ۶: محاسبه کول $\tan(\alpha + \beta)$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha \cos\beta$ وپشو:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

لومړۍ مثال: $\tan \frac{5\pi}{12}$ ، $\cos 120^\circ$ ، $\sin 120^\circ$ ، $\sin \frac{7\pi}{12}$ پیدا کړئ.

حل

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ \cos 30^\circ + \cos 90^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 120^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

د دوو زاویو د تفاضل مثلاوی نسبتونه:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = ?$$

که د جمعی په فورمولونو کې د β پر څای β - وضع کړو، نولرو چې:

$$\sin[\alpha + (-\beta)] = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta)$$

پوهېرو چې:

$$\cos(-\beta) = \cos \beta$$

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta$$

$$\tan(-\beta) = -\tan \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan[(\alpha + (-\beta))] = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

فعالیت

په همدي چول وبنیاست چې:
 $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$.

لومړۍ مثال: $\cos \frac{\pi}{12}$ او $\sin 150^\circ$ پیداکړئ.
حل:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 150^\circ &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 180^\circ \cos 30^\circ - \cos 180^\circ \sin 30^\circ \\&= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) \cdot \frac{1}{2} = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

دوييم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته بشکاره کړئ چې
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ $\cos \theta$ دی.
حل:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta = 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta = \sin \theta$$

درېيم مثال: وبنیاست چې
 $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$ دی.
حل:

$$\cos(270^\circ - \theta) = \cos 270^\circ \cos \theta + \sin 270^\circ \sin \theta$$

$$\cos(270^\circ - \theta) = 0 \cdot \cos \theta + (-1) \sin \theta = -\sin \theta$$

څلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:
حل:

$$\begin{aligned}\tan 120^\circ &= \tan(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1} \\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

فعالیت

وبنیاست چې: او $\sin 211^\circ \cos 59^\circ + \cos 211^\circ \sin 59^\circ = -1$
دی. $\cos 211^\circ \cos 149^\circ - \sin 211^\circ \sin 149^\circ = 1$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

- وبنیاست چې:

$$\tan(45 - \theta) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

- وبنیاست چې:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ?$$

-3

- a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

-4 د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 240^\circ$ ، $\sin 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پیداکړئ.

-5 د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وبنیاست چې:

$$\frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \cos x \cdot \cos y$$

-6 د جمعې د فورمولونو په مرسته د 210° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

$$105^\circ = (60^\circ + 45^\circ) \text{ پیداکړئ} \quad \text{او} \quad \tan 105^\circ \text{، } \cos 105^\circ \text{، } \sin 105^\circ \quad -7$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \text{ پیداکړئ.} \quad \text{که } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \text{ وی او} \quad \sin x = -\frac{3}{4} \quad -8$$

-9 د جمعې $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$ دی.

$$\sin 2^\circ \cos 88^\circ + \cos 2^\circ \sin 88^\circ = ? \quad -10$$

- a)-1 b)1 c)0 d) $\frac{1}{2}$

د 2α مىلئاتى نسبتونه د α لە

جنسە:

$$\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} = ?$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = ?$$

آيا سبودلاي شى چې:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

دى؟

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{خىنگە چې} \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ دى}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{او هىمارىنگە } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \text{ دى، نو:}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

لۇمۇرى مثال: كە $\sin \theta = \frac{4}{5}$ او د θ دويمە ضلۇغ پە دويمە ناحىيە (رېع) كې واقع وي 2θ

او 2θ پىدا كىرى.

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad \text{حل}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25-16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{-3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت



که $\cos \alpha$ ، وي او د α دويمه ضلعي په لومړي ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیداکړي.

او که $\sin \beta$ او د β دويمه ضلعي په دويمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیداکړي.

دویم مثال: د 60° زاوې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د 120° زاوې د مثلثاتي نسبتونه پیداکړي.

حل

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 120^\circ = 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \tan 120^\circ = \frac{2 \tan 60^\circ}{1 - \tan^2 60^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$$

په همدي ډول:

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $\cos \theta = -\frac{3}{4}$ او $90^\circ < \theta < 180^\circ$ د $\cos 2\theta$ وی، د قیمت پیدا کړئ.
حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

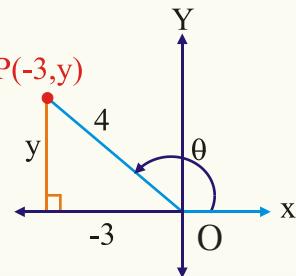
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$

$$y = \pm \sqrt{4^2 - (-3)^2}$$

$y = \sqrt{7}$ (خکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$



فعالیت

که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ او $\sin \frac{\theta}{2}$ وی، د $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ قیمت پیدا کړي.

همدارنګه کولای شو چې د $\tan \frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin \theta = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

پوهېرو چې:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ وېشون)

$$\sin \theta = \frac{\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + 1} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2}} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{2}}{\frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاوېي مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاوېي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راپرو:

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \quad \text{یا} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

په همليٽ دول:

$$1 - 2 \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$-2 \sin^2 \theta = -1 + \cos 2\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \quad \text{یا} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

په نتیجه کې:

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}} \quad \text{یا} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

لومړۍ مثال: 30° زاوې په مثلثاتي نسبتونه د 60° له جنسه په لاس را پړئ.

حل:

$$\sin 30^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

د دویم مثال: که $\cos \frac{\theta}{2}$ د قيمت پیدا کړئ.
وې د $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ او $180^\circ < \theta < 270^\circ$

حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + (-2)^2 = 3^2 \quad x = \pm \sqrt{3^2 - (-2)^2} = -\sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{5}}{3} \quad (\text{حکه چې } x \text{ د قيمت په دویمه ربع کې منفي دي})$$

خرنگہ چی د ۹۰° < θ < ۱۳۵° یا $\frac{180^\circ}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270^\circ}{2}$ نو ۱۸۰° < θ < ۲۷۰° ده په دی معنا چی د $\cos \frac{\theta}{2}$ علامه منفی د.

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وسياست چی : $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ او $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ دی.

دریم مثال : که $\cos \theta = \frac{4}{5}$ وی او د θ دویمه ضلع په لومړنۍ ریع کې وي قیمتونه پیدا کړئ. او $\tan \frac{\theta}{2}$

: حل

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{9}} = \frac{1}{3}$$

خورم مثال: وبنیاست چې دی .

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = 2$$

$$\frac{\sin 3\theta \cos \theta - \cos 3\theta \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin(3\theta - \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad , \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}}$$

۱- د 120° زاوېي د مثلثاتي نسبتونو له مخچي د 240° زاوېي مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

- که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وی او د θ دويمه ضلعي په لوړنۍ ربع کې وي، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيداکړئ.

- که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وی او د θ دويمه ضلعي په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيداکړئ

$\sin\frac{\pi}{6}$ د $\sin\frac{\pi}{12}$ له جنسه پيداکړئ.

- که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وی او د θ دويمه ضلعي په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيداکړئ.

۶ - د 15° زاوېي مثلثاتي نسبتونه د 30° زاوېي له جنسه پيداکړئ.

- که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وی او د β دويمه ضلعي په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی

دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دی

$$\frac{\cos 3\beta}{\cos \beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = ?$$
 - 8

- a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

د 3α زاویي مثلثاتي نسبتونه د α
زاویي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4 \cos^3 45^\circ - 3 \cos 45^\circ = ?$$

آيا سبودلای شئ چې دارابطه

$$\cos 90^\circ = 4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$$

سمه د؟

خرنگه چې:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \quad (\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \quad (\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړي.
حل:

$$\sin 180^\circ = 3 \sin 60^\circ - 4 \sin^3 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

خرنگه چې:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha \\
 &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha(1 - \cos^2 \alpha) \quad (\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha) \\
 &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha + 2\cos^3 \alpha
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha}$$

فعالیت ،

دوييم مثال: $\cos 90^\circ$ د $\cos 270^\circ$ له جنسه پيدا کري.

حل: $\cos 60^\circ$ د $\cos 180^\circ$ له جنسه پيدا کري.

$$\cos 180^\circ = 4\cos^3 60^\circ - 3\cos 60^\circ = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

پيدا کول: $\tan 3 \propto 5$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{2 \tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}{1 - \frac{2 \tan^2 \alpha - 2 \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha - 2 \tan^2 \alpha} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

درديم مثال: $\tan 45^\circ$ د $\tan 135^\circ$ له جنسه په لاس راوړي.
حل:

$$\tan 135^\circ = \frac{3 \tan 45^\circ - \tan^3 45^\circ}{1 - 3 \tan^2 45^\circ} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1 - 3 \cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

خورم مثال: وبنیاست چه حل:

$$4 \sin \theta \sin(60^\circ - \theta) \sin(60^\circ + \theta) = \sin 3\theta$$

$$= 4 \sin \theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

$$= 4 \sin \theta \left(\frac{3}{4} \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) = \sin \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sin \theta [3(1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta] = \sin \theta \cdot 3 - 3 \sin^3 \theta - \sin^3 \theta$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \sin 3\theta$$

مثبتاتی نسبتوفه: $(\alpha + \beta + \square)$

$$\sin(\alpha + \beta + \square) = \sin[\alpha + (\beta + \square)] = \sin \alpha \cos(\beta + \square) + \cos \alpha \sin(\beta + \square)$$

$$= \sin \alpha (\cos \beta \cos \square - \sin \beta \sin \square) + \cos \alpha (\sin \beta \cos \square + \cos \beta \sin \square)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta \cos \square - \sin \alpha \sin \beta \sin \square + \sin \beta \cos \alpha \cos \square + \sin \square \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos[\alpha + (\beta + \square)] = \cos \alpha \cos(\beta + \square) - \sin \alpha \sin(\beta + \square)$$

$$= \cos \alpha (\cos \beta \cos \square - \sin \beta \sin \square) - \sin \alpha (\sin \beta \cos \square + \cos \beta \sin \square)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta \cos \square - \cos \alpha \sin \beta \sin \square - \cos \square \sin \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \sin \square$$

$$\tan(\alpha + \beta + \square) = \tan[\alpha + (\beta + \square)] = \frac{\tan \alpha + \tan(\beta + \square)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(\beta + \square)}$$

$$\tan(\alpha + \beta + \square) = \frac{\tan \alpha + \frac{\tan \beta + \tan \square}{1 - \tan \beta \tan \square}}{1 - \tan \alpha \frac{\tan \beta + \tan \square}{1 - \tan \beta \cdot \tan \square}}$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \alpha \tan \beta \tan \square + \tan \beta + \tan \square}{1 - \tan \beta \tan \square}$$

$$= \frac{1 - \tan \beta \tan \square - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \square}{1 - \tan \beta \cdot \tan \square}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma + \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \alpha \tan \gamma}$$

پنجم مثال: $\sin(30^\circ + 45^\circ + 60^\circ)$ د لاس راوړئ.
:

$$\begin{aligned} \sin 135^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ + 60^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ \cos 60^\circ \\ &\quad - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ \cos 45^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

پوښتني

$\tan 30^\circ$ ، $\sin 30^\circ$ او $\cos 30^\circ$ په ترتیب سره د $\tan 90^\circ$ ، $\sin 90^\circ$ او $\cos 90^\circ$ له جنسه پیدا کړي.

$135^\circ = (30^\circ + 45^\circ + 60^\circ)$ پیدا کړي. $\tan 135^\circ$ او $\cos 135^\circ$ -2

$$8\cos^3 \theta - 6\cos \theta = ? \quad -3$$

- a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړي.

-5 وسیاست چې:

$$4\cos x \cos(60^\circ - x) \cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$

$$\tan x \tan(60^\circ - x) \tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

دزاویود مثلاًتی نسبتونو د مجموعي
او تفاضل بدلول د ضرب دحاصل په
شکل

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = ?$$

آیا د $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ قيمت پيدا��ولي
شيء؟

$$\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = ?$$

خرنگه چې پوهېرو:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \dots \text{(I)}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \dots \text{(II)}$$

که $A - B = q$ او $A + B = P$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

$$\begin{aligned} A + B &= p \\ A - B &= -q \\ 2B &= P - q \\ B &= \frac{P - q}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B &= p \\ A - B &= q \\ 2A &= P + q \\ A &= \frac{P + q}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}$$

په نتيجه کې لرو چې:

که له I رابطې خخه II رابطه تفریق کړو، نولرو چې:

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}$$

په همدي چوں:

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \dots \text{III}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \dots \text{IV}$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې خخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\cos 60^\circ + \cos 30^\circ$ او $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ د قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q - \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

لومړۍ مثال (a): ونبیاست چې:

$$\frac{\sin 7\theta + \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta} = \tan 5\theta$$

$$\frac{\sin 7\theta + \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta} = \frac{2 \sin \frac{7\theta + 3\theta}{2} \cos \frac{7\theta - 3\theta}{2}}{2 \cos \frac{7\theta + 3\theta}{2} \cos \frac{7\theta - 3\theta}{2}} = \frac{\sin 5\theta \cos 2\theta}{\cos 5\theta \cos 2\theta} = \tan 5\theta$$

وينياسٽ چې دی: $\sin 3x + \sin x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$

$$\sin 3x + \sin x = 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$$

حل:

فعالیت

وينياسٽ چې او $\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$ و $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$

دویم مثال: وينياسٽ چې: $\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta - \theta)$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2 \sin 3\theta \sin \theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2 \sin \frac{2\theta + 2\beta}{2} \sin \frac{2\theta - 2\beta}{2}}{2 \sin \frac{2\theta + 2\beta}{2} \cos \frac{2\theta - 2\beta}{2}} = \frac{-2 \sin(\theta + \beta) \sin(\theta - \beta)}{2 \sin(\theta + \beta) \cos(\theta - \beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta - \beta)}{\cos(\theta - \beta)} = -\tan(\theta - \beta) = \tan(\beta - \theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2 \sin \frac{4\theta + 2\theta}{2} \sin \frac{4\theta - 2\theta}{2} = -2 \sin 3\theta \sin \theta$$

د زاویو د مثلثاتی نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندي:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\begin{aligned} A + B &= P \\ A - B &= q \end{aligned}$$

خرنگه چې:

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

یا

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$\boxed{\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]}$$

خرنگه چې: $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$ دی.

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

نو:

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

خزنگه چې:

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

نو:

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

خزنگه چې:

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$$

نو:

$$-2 \sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$$

$$\begin{aligned} \sin A \sin B &= -\frac{1}{2} [\cos(A + B) - \cos(A - B)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \end{aligned}$$

لومړۍ مثال: وبنیاست چې:

$$a : \quad \frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$$

$$b : \quad \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

: حل a د

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \sin 5x}{2 \cos \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \cos 5x} \\ &= \frac{2 \sin 5x \cos 3x + \sin 5x}{2 \cos 5x \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2 \cos 3x + 1)}{\cos 5x(2 \cos 3x + 1)} = \tan 5x \end{aligned}$$

د حل:

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \cdot \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعی یا تفاضل شکل ته یې واروئ.

$$2 \cos 95^\circ \sin 13^\circ = \sin(95^\circ + 13^\circ) - \sin(95^\circ - 13^\circ) = \sin 108^\circ - \sin 82^\circ$$

$$\cos 38^\circ \cos 61^\circ = \frac{1}{2} [\cos(38^\circ + 61^\circ) + \cos(38^\circ - 61^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2} [\cos 99^\circ + \cos(-23^\circ)] = \frac{1}{2} [\cos 99^\circ + \cos 23^\circ]$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} \cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34^\circ \sin 28^\circ = \frac{1}{2} [\sin(34^\circ + 28^\circ) - \sin(34^\circ - 28^\circ)] = \frac{1}{2} (\sin 62^\circ - \sin 6^\circ)$$

$$2 \cos 45^\circ \cos 15^\circ = \cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ) = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2} [\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2} (\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وبنیاست چې:
حل:

$$\frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2} [(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2} [2 \cos x \cos y] = \cos x \cos y$$

$$\frac{\sin 8\theta \cos \theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta$$

پنجم مثال: وبنیاست چی:

: حل

$$\begin{aligned} \frac{\sin 8\theta \cos \theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} &= \frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta + \sin 7\theta) - \frac{1}{2}(\sin 9\theta + \sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos \theta) + \frac{1}{2}(\cos 7\theta - \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin 7\theta - \sin 3\theta}{\cos 3\theta + \cos 7\theta} = \frac{2 \cos 5\theta \sin 2\theta}{2 \cos 5\theta \cos(-2\theta)} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta \end{aligned}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} \quad \tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - (\cos A - \cos B)] = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې یا تفاضل شکل ته واروئ.

$$\sin 5x \cos 8x \quad \sin 3\theta \cos 5\theta \quad \cos 30^\circ \cos 60^\circ$$

$$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ \quad \cos 5x \sin 8x \quad \cos 7\theta \sin 5\theta$$

$$\sin 88^\circ \sin 12^\circ \quad 2 \sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$$

$$2 \cos 8\theta \cdot \sin 4\theta \quad 2 \cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha \quad \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفرقې حاصل، ضرب ته واروئ.

$$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ \quad \sin 84^\circ - \sin 76^\circ \quad \sin 94^\circ - \sin 86^\circ$$

$$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ \quad \cos 84^\circ - \cos 76^\circ \quad \sin 80^\circ + \sin 4\theta$$

$$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ \quad \sin \frac{P+Q}{2} - \sin \frac{P-Q}{2} \quad \sin \frac{5x}{3} - \sin \frac{5x}{6}$$

$$\cos \frac{3A}{4} + \cos \frac{4A}{3} \quad \cos 84^\circ + \cos 76^\circ \quad \cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2}$$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A \quad , \quad \frac{\cos \beta + \cos 9\beta}{\sin \beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (ديو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

6- وبنیاست چې:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$$

-7

- a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

8- د جمعي یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وبنیاست چې:

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

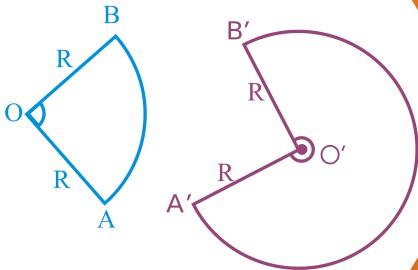
$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$$

د قوس اوبردواالی (Arc length)

که دیوپی دایرې شعاع 5cm وي، د دی دایرې
د 45° مرکزی زاوېي د مقابل قوس اوبردواالی
به خو cm وي؟



که د دووقوسونو شعاع گانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوبردواالی د راډيان په حساب د قوس
له مقدار سره متناسب دي، لکه: خنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

$$\frac{\overset{\cap}{AB}}{mA B} = \frac{\overset{\cap}{A'B'}}{mA'B'}$$

چې $\overset{\cap}{AB}$ او $\overset{\cap}{A'B'}$ د دې دوارو قوسونو مقدار د راډيان په حساب دي. که د قوس مقدار
دوه چنده شي، د قوس اوبردواالی هم دوه چنده کېږي.

که د یو قوس مقدار θ° او شعاع پې R وي، د θ° د زاوېي د مقابل اوبردواالی L او د دایرې محیط
وي، نولرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360^\circ}$$

خرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\theta^\circ}{180^\circ} \pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس يا θ مقدار د راډيان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لوړۍ مثال: د 45° مرکزی زاوېي د مقابل قوس اوبردواالی پیداکړئ، که د دایرې شعاع 14cm
وي.

حل:

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 14 \text{ cm} = \frac{14}{4} \pi \text{ cm} \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7} \text{ cm} = 11 \text{ cm}$$

دویم مثال: ۵ $\frac{\pi}{4}$ مرکزی زاویې د مقابل قوس اوبدوالی پیدا کړئ، که د دایري شعاع 14cm وي.

$$L = R \theta$$

$$L = 14 \text{ cm} \frac{\pi}{4} \approx 14 \text{ cm} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = 11 \text{ cm}$$

دریم مثال: که په یوه دایره کې، د 45° مرکزی زاویې د مقابل قوس اوبدوالی $3\pi \text{ cm}$ وي، د دې دایري شعاع پیدا کړئ.

حل: خرنګه چې: $\frac{\pi}{4}$ radian نو:

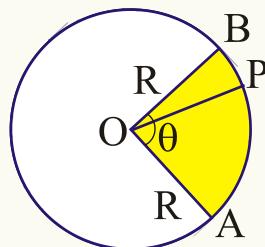
$$L = R\theta$$

$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi \text{ cm}}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 12 \text{ cm}$$

د یوې دایري قطاع (Sector of a circle): د یوې دایري د \hat{AB} قوس چې د دایري مرکز O او شعاع بې R ده، په پام کې نیسو، د \overline{OP} د تولو خطونو مجموعې ته چې P د قوس \hat{AB} ويل کېږي. یوه نقطه ده، قطاع ويل کېږي.

که د \hat{AB} قوس اندازه θ را پیان وي، θ ته د قطاع زاویه وايې.
يا قطاع په دې ډول همتعريفولای شو:

د یوې دایري د سطحې هغه برخه چې د دایري د دوو شعاع گانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ رادیان د قطاع

$$\text{مساحت مساوی دی په: } S = \frac{1}{2} R^2 \theta \quad \text{چې: } S = \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

او یاكه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \\ \theta^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow S = \pi R^2 \frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړۍ مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د
قطعاع زاویه یې 90° وي

$$\text{حل: } \text{خرنګه چې } 90^\circ \text{ دی: } S = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

$$S = \frac{1}{2} (10\text{cm})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot 100\text{cm}^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 25\pi\text{cm}^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د
قطعاع زاویه یې 72° وي.

$$\text{حل: } 72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{5} \text{ Radian}$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot 100\text{cm}^2 \cdot \frac{2\pi}{5} = 20\pi\text{cm}^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi\text{cm}^2$ وي. د قطاع
د قوس اوږد اولی پیداکړئ.
حل:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta \quad \text{یا} \quad 15\pi\text{cm}^2 = \frac{1}{2} (6\text{cm})^2 \theta$$

$$15\pi \text{cm}^2 = 180$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$L = R\theta = 6\text{cm} \cdot \frac{5\pi}{6} = 5\pi \text{cm} = 5 \cdot 3,14 \text{cm} \approx 15,7 \text{cm}$$

څلورم مثال: یوه دائیره چې 7cm شعاع لري، ددې دائيرې محیط، مساحت او د 60° مرکزی زاویې د مقابل قوس او بدواлиې پیداکړئ او هم ددې دائيرې د قطاع مساحت پیداکړئ چې $\theta = 60^\circ$ وي.

حل: خرنګه چې 60° دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 \text{cm} = 44 \text{cm}, A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7} \cdot 49 \text{cm}^2 = 154 \text{cm}^2$$

$$L = R\theta = 7 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} \text{cm}, A = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot 49 \text{cm}^2 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 25.6 \text{cm}^2$$

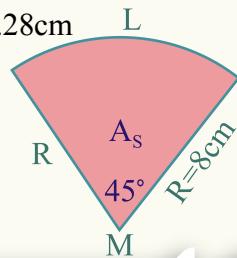
پنځم مثال: که د یوې دائيرې شعاع 8cm او د قطاع زاویه یې 45° وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس او بدواлиې او ددې قطاع محیط پیداکړئ.

حل:

$$A_s = \pi R^2 \frac{\theta}{360^\circ} = (8\text{cm})^2 (3,14) \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} \approx 25,12 \text{cm}^2$$

$$L = 2\pi R \frac{\theta}{360^\circ} = 2 \cdot 8\text{cm} \cdot 3,14 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} \approx 6.28 \text{cm}$$

$$= 2\pi R \frac{\theta}{360^\circ} + 2R = 6.28 \text{cm} + 2 \cdot 8\text{cm} \approx 22.28 \text{cm}$$



فعالیت

که د دائيرې شعاع 10cm وي، د هغه قطاع ګانو مساحت پیداکړئ چې د قوس اندازه یې 180° ، 216° او 324° وي.

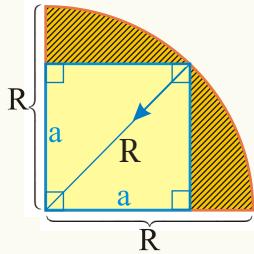
شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په 90° قطاع کې د R په شعاع مریع محاط شوي ده، د خط شوی برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: خرنګه چې د دائري شعاع R ده، د دائري په خلورمه برخه کې د مریع قطر

$$d = R = a\sqrt{2}$$

دی، که a د مریع ضلع وي، نو د مریع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مریع مساحت

دی، خرنګه چې د دائري د خلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.



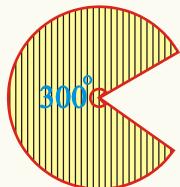
$$\text{نود خط شوی برخې مساحت مساوی دی په: } \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$$

اووم مثال: په شکل کې د دائري قطاع چې شعاع یې 1cm او مرکزی زاویه یې 300° د دې
شکل محیط خو سانتي متره کېږي؟

$$360^\circ \quad 2\pi R$$

$$300^\circ \quad x \quad x = \frac{300^\circ \cdot 2\pi R}{360^\circ} = \frac{5\pi R}{3} \text{cm}$$

$$= \frac{5}{3}\pi R + 2 \text{cm}$$



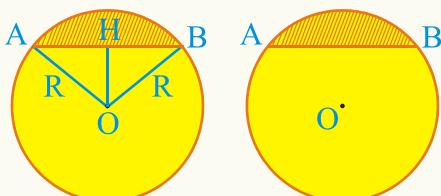
دادایري قطعه (Segment of a circle): د دائري د سطحې یوې برخې ته چې د قوس

او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه واي.

دادایري قطعه د قطعې د قوس په حساب

بنوදل کېږي. د مثال په ډول که د

قوس $\frac{\pi}{6}$ رادیان وي، قطعې ته هم



رادیان وايي.

د قطعې مساحت: د θ رادیان د قطعې مساحت چې د دایري شعاع R وي، مساوي دي، په:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

ځکه که د AB قوس θ رادیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلولو، نو لرو چې:
د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$$S_{\triangle AOB} = S_{\text{Sector } AOB} - S_{\text{Triangle } AOB}$$

په لاندي شکل کې ليدل کېږي چې د $\triangle AOB$ مثلث متساوي الساقين دي، نو په دي اساس:

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{h}{R}$$

$$h = R \cos \frac{\theta}{2}$$

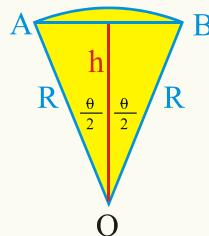
ارتفاع

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2}{R}$$

$$AB = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

د مثلث قاعده:

قاعده . ارتفاع



$$S_{\triangle AOB} = \frac{h \cdot AB}{2} = \frac{h \cdot 2R \sin \frac{\theta}{2}}{2} = R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

خرنګه چې دی.

$$R \sin \frac{\theta}{2} \cdot 2R \sin \frac{\theta}{2} = \frac{R^2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta$$

په نتيجه کېي: د مثلث مساحت

$$A_s = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

د مثلث مساحت او د قطاع مساحت د $S_{\triangle AOB} = \frac{R^2 \sin \theta}{2}$ دی.

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} R^2 \sin \theta = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

لومړۍ مثال: د پورته شکل په شان که د یوې دایري شعاع $R = 6.8\text{cm}$ وي او د دې دایري د یوې قطاع زاویه 71° وي، د قطاع مساحت، د $\triangle ABO$ د مثلث مساحت او د دې دایري د

قطعي مساحت پيداکرئ.
حل:

$$R = 6.8\text{cm}$$

$$\theta = 71^\circ$$

$$\text{د قطاع مساحت } A = \pi R^2 \frac{\theta}{360^\circ} = (6.8\text{cm})^2 \cdot 3.14 \frac{71^\circ}{360^\circ} \approx 28.64\text{cm}^2$$

$$\text{د مثلث ارتفاع } h = R \cos \frac{\theta}{2} = 6.8\text{cm} \cdot \cos \frac{71^\circ}{2} \approx 5.54\text{cm}$$

$$\cos 35^\circ 30' = 0.8141$$

$$\text{د مثلث قاعده } b = 2 \cdot R \sin \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8\text{cm} \cdot \sin \frac{71^\circ}{2} \approx 7.9\text{cm}$$

$$\sin 35^\circ 30' = 0.5807$$

$$\text{د مثلث مساحت } A = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta = \frac{1}{2} (6.8\text{cm})^2 \cdot \sin 71^\circ \approx 21.96\text{cm}^2$$

$$\sin 71^\circ = 0.9455$$

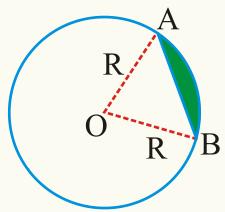
$$\text{د مثلث مساحت - د قطاع مساحت} = \text{قطعي مساحت}$$

$$\text{د قطعي مساحت} = 28.64\text{cm}^2 - 21.96\text{cm}^2 = 6.68\text{cm}^2$$

دويم مثال: د هجه قطعي مساحت پيداکرئ چې شعاع يې R او قوس يې $\overset{\wedge}{AB}$ وي، که: $\overset{\wedge}{AB} = 60^\circ$, $R = 12\text{cm}$

حل: خرنګه چې 60° دی، نو:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} (12\text{cm})^2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 144\text{cm}^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 72\text{cm}^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24\pi \text{cm}^2 - 36\sqrt{3} \text{cm}^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})\text{cm}^2 \end{aligned}$$



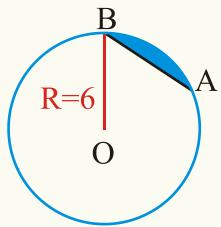
فعاليت

د هغې دايري د قطعې مساحت پيداکړئ چې شعاع يې $AB = 6\text{cm}$ او 120° قوس وي.

درېم مثال: د هغې قطعې مساحت پيداکړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوي وي او د دايري شعاع هم 6cm وي.

حل: خرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډيانه دي:

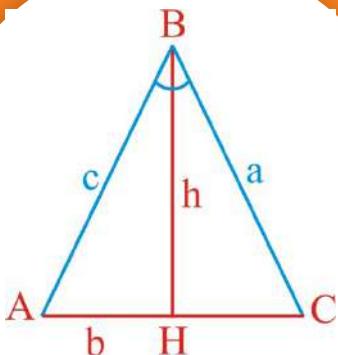
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} (6\text{cm})^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 18\text{cm}^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (6\pi - 9\sqrt{3})\text{cm}^2 \\ &\approx 6(3.14)\text{cm}^2 - 9(1.73)\text{cm}^2 = 3.27\text{cm}^2 \end{aligned}$$



پونښتني

- 1- د هغې قطاع مساحت پيداکړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډيان مرکزي زاويې په مقابل کې واقع وي، که د دايري شعاع 20cm وي.
- 2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاويه پيداکړئ چې مساحت يې 55.5cm^2 او د دايري شعاع 12cm وي.
- 3- که د یوې دايري شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پيداکړئ چې د $3,8$ راډيان او 27 مرکزي زاويه په مقابل کې واقع وي.

د مثلث د مساحت پیدا کول د
دوو ضلع او ددي دوو ضلعو تر
منځ د زاويې له جنسه:



که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اور بدواли
او 8cm وی او ددې ضلعو تر منځ
زاویه 30° وی آیا ددې مثلث مساحت پیدا
کولای شي؟

د $\triangle ABC$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس خخه د \overline{AC} ارتفاع د \overline{BH} پر ضلع باندې

رسموو:
خرنګه چې $h = c \sin A$ دی، په نتیجه کې $h = \frac{BH}{\sin A} = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ کېږي له هندسي خخه پوهېږو

چې د یوه مثلث مساحت $S = \frac{\text{ارتفاع} \cdot \text{قاعده}}{2}$ دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \quad (h = c \sin A)$$

فعاليت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو خخه ارتفاع گانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a c \sin B \quad \text{او} \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} a b \sin C \quad \text{دي.}$$

لومړۍ مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اور بدواли بې $a = 3,5\text{cm}$ او $c = 6\text{cm}$ دوو ضلعو تر منځ زاویه بې $B = 47,5^\circ$ وی.
حل:

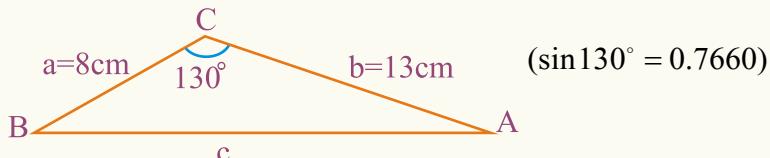
$$A = \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$\sin 47.5^\circ = 0.73727733$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3.5\text{cm} \cdot 6\text{cm} \cdot \sin 47.5^\circ \approx 7.74\text{cm}^2$$

دوييم مثال: د لاندي شکل د مثلث مساحت پيدا کړئ.
حل:

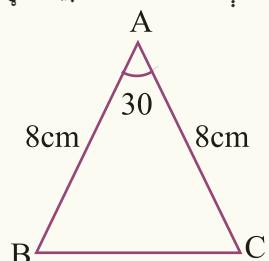
$$A = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^\circ \approx 39.83\text{cm}^2$$



درېييم مثال: د $\triangle ABC$ په متساوي الساقين مثلث کې $A = 30^\circ$ او $\overline{AB} = \overline{AC} = 8\text{cm}$ ده، ده
دېييم مثلث مساحت پيدا کړئ.

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16\text{cm}^2$$



د مثلث د مساحت پيدا کول د دريو ضلعو له جنسه (د هيرون فورمول)

دېييم کار لپاره د یوې زاوېي د نيمائي \sin ، د مثلث د ضلعو د اوردوالي له جنسه په لاس راړو:
د ABC په هر مثلث کې لاندي اړیکې صدق کوي.

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a, b, c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نيمائي ده ($p = \frac{a+b+c}{2}$) په تیرو لوستو
کې مولوستل چې:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ چې دا رابطه \cosine د قضیې په نوم یادېږي، دله د دې رابطې له ثبوت خڅه صرف نظر کوو او په خېل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر خای یې قيمت وضع کوو.

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \sqrt{1 - \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}\end{aligned}$$

خنګه چې: $a+b+c=2p$ دې.

$$a-b+c = a+b+c-2b = 2p-2b = 2(p-b)$$

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c)$$

د $(a+b-c)$ او $(a-b+c)$ قيمتونه وضع کوو، نول رو چې:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدي ډول وبنیاست چې:

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

په همدي ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د یوې زاوې نيمائي \cosine په لاس راورو:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

ثبوت: خرنگه چې د $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ دی.

$\cos A$ د قيمت وضع کړو:

$$\begin{aligned}\cos \frac{A}{2} &= \sqrt{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}\end{aligned}$$

$$b+c+a - 2a = 2p - 2a$$

$$b+c-a = 2p-2a = 2(p-a)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

په نتيجه کې لرو چې:

فعاليت

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{دی، وبنیاست چې:} \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

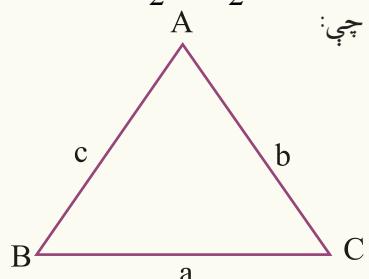
خرنگه چې پوهېرو چې د $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ دی،

پوهېرو چې د $\cos \frac{A}{2}$ او $\sin \frac{A}{2}$ دی که د قيمتونه وضع کړو لرو چې:

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



خرنگه چې د $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$ د مثلث مساحت دی.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنيو مساواتو له پرتله کولو خخه لرو چې:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot S = \frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

دريم مثال: د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې د ضلعو او بروالۍ یې په لاندې دول راکړل شوي وي.

$$a = 5\text{cm} \quad b = 4\text{cm} \quad c = 3\text{cm}$$

وی.

حل:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5\text{cm} + 4\text{cm} + 3\text{cm}}{2} = 6\text{cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)} \\ = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پيدا کري چي: $a = 4\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$ او $a = 4\text{cm}$.

څلورم مثال: که د ډیوه مثلث ضلعې $c = 30\text{cm}$ ، $a = 18\text{cm}$ و $b = 24\text{cm}$ د دي
مثلث مساحت پیدا کړئ.

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} = 36\text{cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 6} = 216 \text{ cm}^2$$

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوردوالی یې $b = 42,3\text{ft}$ ، $a = 29,7\text{ft}$ وی. د ضلعو اوردوالی یې $c = 38,4\text{ft}$ وی.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7 + 42.3 + 38.4}{2} = 55.2\text{ft}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2 - 29.7)(55.2 - 42.3)(55.2 - 38.4)} \\ = \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552\text{ft}^2$$

د یو مثلث د محیطي دایري د شاعع پیدا کول:

محیطي دایري هغه دایري د چې مثلث د دایري په داخل کې واقع وي او دایري د مثلث په درې واپو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایري مرکز د مثلث د درې واپو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\triangle ABC$ مثلث د ضلعو اوردوالی د a ، b او c خخه عبارت دی چې د O تکي چې د دایري مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واپو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع تکي هم دي. خرنګه چې د $\triangle BOC$ مثلث متساوي الساقین دي، نو ارتفاع د \hat{BOC} زاویه او د مثلث قاعده نیمایي کوي. په نتیجه کې:

$$\hat{A} = \hat{BOL} = \hat{LOC}$$

$$\sin \hat{A} = \sin BOL = \sin LOC$$

ئکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوہ برابره د چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

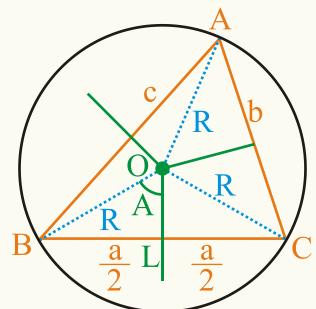
$$\sin \hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \cdot \frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \quad (\sin A = \frac{2S}{bc})$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} \quad \text{او د خخه لرو چې:}$$

$$a = R \cdot 2 \sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$



په هملي په دول

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ یا } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

لومړۍ مثال: د $\triangle ABC$ مثلث د محیطي دایري شعاع پیدا کړئ چې ضلعې بې، $a = 11\text{cm}$ او $c = 13\text{cm}$ وی. $b = 12\text{cm}$

حل:

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{4\sqrt{18 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}} = 6,98\text{cm} \quad , \quad p = \frac{11+12+13}{2} = 18\text{cm}$$

فعاليت

د هغه مثلث د محیطي دایري شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو او بردواںې 18cm ، 18cm او 30cm وی.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایري شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو او بردواںې 3cm او 6cm وی. $b = 5\text{cm}$

حل:

$$R = \frac{abc}{4 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{90}{4 \cdot \sqrt{56}} = \frac{45}{2 \cdot \sqrt{56}} \approx 3\text{cm}$$

د یو مثلث د محاطي دایري د شعاع پیدا کول:

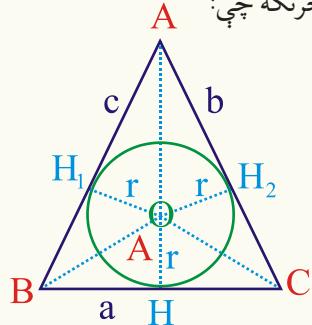
د مثلث محاطي دایري هغه دایره د چې دایره د مثلث په دنه کې واقع وي او دایره د مثلث په دنه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایري مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع پکی (O) دي.

د $\triangle ABC$ مثلث له مساحت سره $O\overset{\Delta}{B}C + O\overset{\Delta}{C}A + O\overset{\Delta}{A}B$ د مثلثونو مساحت =

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}r \cdot 2p$$

$$S = r \cdot p \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

خونګه چې:



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دریم مثال: د هغه مثلث د محاطي دایري شعاع او د محاطي دایري مساحت پیداکړئ چې د ضلعو اوردوالي بې 9cm، 8cm، 7cm وي.

حل

$$p = \frac{7+8+9}{2} = 12\text{cm}$$

$$S = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = 26.83\text{cm}^2$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{26.83\text{cm}^2}{12\text{cm}} = 2.23\text{cm}$$

د محاطي دایري مساحت مساوي دي، په: $\pi r^2 = \frac{22}{7} \cdot (2.23\text{cm})^2 \approx 15.6\text{cm}^2$

څلورم مثال: د یو قایم الزاویه مثلث دوه قایمې ضلعې په ترتیب سره 3cm او 4cm دي، د محیطي او محاطي دایرو شاع گانې بې پیداکړئ.

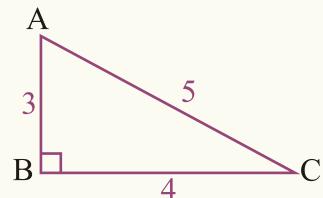
حل:

$$p = \frac{3+4+5}{2} = 6\text{cm} \quad (\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 \\ AC = \sqrt{9+16} = 5$$

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}} = \frac{60}{4 \cdot \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{60}{4 \cdot 6} = \frac{60}{24}$$

$$= \frac{5}{2}\text{cm} = 2.5\text{cm}$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{6}{6} = 1\text{cm}$$



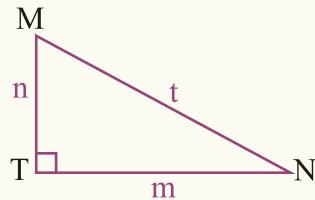
پنځم مثال: د MTN په قایم الزاویه مثلث کې که قایمې ضلعې يې m او n راکړ شوي وي، د دې مثلث مساحت او د محیطي دایري شعاع يې پیدا کړئ.
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2}, R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4 \frac{n \cdot m}{2}} = \frac{mn\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

$$\text{محیطي دایري شعاع } R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$$



فعالیت

د هغه مثلث د محاطي دایري شعاع پیدا کړئ، که چېږي د ضلعو او بدواںي يې 35cm، 34cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محیطي او محاطي دایرو د شعاع ګانو پیدا کول:

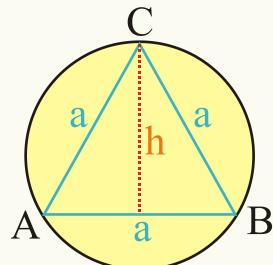
$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فيثاغورث د قضيې په اساس لرو چې:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



$$ABC \text{ دیو مثلث متساوی الاضلاع دی. } S = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3}} = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3a}}{\frac{2}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

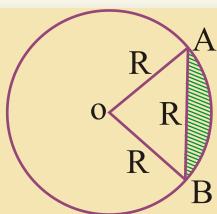
شپړم مثال: دیو متساوی الاضلاع مثلث محیط 18cm دی. دی مثلث مساحت، ارتفاع او د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې پیدا کړئ.
حل: د دی مثلث یوه ضلع (a) متساوی ده، په:

$$a = \frac{1}{3} \cdot 18\text{cm} = 6\text{cm}$$

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(6\text{cm})^2}{4}\sqrt{3} = 15,6\text{cm}^2 \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{6\text{cm}}{2}\sqrt{3} = 5,2\text{cm}$$

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{6\text{cm}}{3}\sqrt{3} = 3,5\text{cm} \quad r = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{6\text{cm}}{6}\sqrt{3} \approx 1,7\text{cm}$$

پوښتني



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوی الاضلاع دی چې هره ضلع يې R ده. د O په مرکز دایره رسم شوي ده چې د A او B له تکو خخه تیزېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت متساوی دی په:

- a) $(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4})R^2$
- b) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{5})R^2$
- c) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2})R^2$
- d) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2})R^2$
- e) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

- 2- که د یو متساوي الساقین مثلث د هر ساق اوبردواالی 6cm او د ساقو تر منځ زاویه یې 30° وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.
- 3- که د یو ه مثلث د دوو ضلعو اوبردواالی $5\sqrt{2}\text{cm}$ او 6cm وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې 45° وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.
- 4- که د یو ه مثلث د ضلعو اوبردواالی په ترتیب سره 4cm ، 3cm او 5cm وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.
- 5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوبردواالی یې $b = 9\text{cm}$ ، $a = 7\text{cm}$ او $c = 12\text{cm}$ وي.
- 6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دائري شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې 12cm او 5cm .
- 7- که د $\triangle ABC$ ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8\text{cm}$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3\text{cm}$ وي. د محیطي دائري شعاع اوبردواالی یې پیدا کړئ.
- 8- که د یو ه قایم الزاویه مثلث مساحت 84cm^2 وي او د یو ه ارتفاع اوبردواالی یې $3,36\text{cm}$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوبردواالی پیدا کړئ.

د څېرکي لندېز

• د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{او} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{او} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

• د زاوېي مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

• د یوې زاوېي مثلثاتي نسبتونه، د زاوېي د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad . \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad . \quad \tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

• د یوې زاوېي د نيمائي مثلثاتي نسبتونه د زاوېي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad , \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad , \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

• د یوې زاوېي د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاوېي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:
 $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad , \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

• د دريو زاويو د مجموعي $(\alpha + \beta + \theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha + \beta + \theta) = \sin \alpha \cos \beta \cos \theta + \sin \beta \cos \alpha \cos \theta$$

$$+ \sin \theta \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin \theta$$

$$\cos(\alpha + \beta + \theta) = \cos \alpha \cos \beta \cos \theta - \cos \alpha \sin \beta \sin \theta$$

$$- \cos \beta \sin \alpha \sin \theta - \cos \theta \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta + \theta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta - \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \theta - \tan \alpha \tan \theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوی).

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونه ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوی:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دایرې د مرکزی زاوې (θ°) د مقابل قوس اوردوالی مساوی دی په:

$$L = \pi R \frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دایرې مرکزی زاوې θ راډیان د مقابل قوس اوردوالی مساوی دی په:

$$L = R\theta$$

- د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي:

- د قطاع مساحت د $A_{\text{sector}} = \frac{1}{2} R^2 \theta$ د فورمول په مرسته لاسته رائحي:

• د دایرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:

• د قطعې مساحت د $A_{\text{Segment}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$ د فورمول په مرسته پیدا کړي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاوې له جنسه د مثلث مساحت مساوی دی په:

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

• د یوې زاوې د نیمايی مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوردوالی له جنسه:

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \\ \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\end{aligned}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوردوالی له جنسه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د یوه مثلث د محیطي دایرې شعاع (R) مساوی دی په:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{4S} \quad \text{يا}$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \quad \text{يا} \quad r = \frac{S}{p} \quad \text{يا} \quad \text{فرمول خخه په لاس راخې.}$$

د خپرگي پوښتني

1- وسیاست چې د متساوي الاصلع مثلث مساحت $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلع او بدواли $c = 9\text{cm}$ ، $b = 8\text{cm}$ او $a = 7\text{cm}$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعي د فورمولونو په مرسته $\cos 165^\circ$ او $\sin 165^\circ$ پیدا کړئ؟
4- $\sin(-165^\circ) = ?$

$$a) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$b) \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$c) \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

5- وسیاست چې: $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = \frac{\cos 3\theta}{\sin \theta \cos \theta}$

6- د جمعي او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندې ټو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$$\sin(30^\circ + 45^\circ)$$

$$\cos(150^\circ - 45^\circ)$$

$$\tan(30^\circ + 60^\circ)$$

$$\sin(135^\circ + 180^\circ)$$

$$\sin(135^\circ - 180^\circ)$$

$$\tan(180^\circ - 45^\circ)$$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعي او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندې ټو رابطه سموالی وسیاست.

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

8- که $\frac{\sin \theta}{2}$ او $\cos \frac{\theta}{2}$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ د $\sin \theta = \frac{2}{5}$ او $0^\circ < \theta < 90^\circ$ وي، د قيمتونه په لاس راوري؟
9- وسیاست چې:

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = 2 \sin \theta \quad , \quad \cos 2\theta + 1 = 2 \cos^2 \theta \quad , \quad \cos 2\theta + 2 \sin^2 \theta = 1$$

$$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos 2\theta \quad , \quad \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \cos \theta - \sin \theta$$

10- که دیوه مثلث د ضلعو اوردوالي په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې پیداکړئ؟

$$\sin(180^\circ + \theta) = ? \quad -11$$

- a) $\sin \theta$ b) $-\cos \theta$ c) $-\sin \theta$ d) $\cos \theta$

12- د جمعي او تفاضل د فورمولونو په مرسته وبنیاست چې:

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta \quad \text{او} \quad \tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta, \quad \sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ? \quad -13$$

- a) $2\sin \alpha \sin \beta$ b) $2\cos \alpha \cos \beta$ c) $-2\sin \alpha \sin \beta$

$$\frac{\sin \alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos \alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha \quad -14 \quad \text{وبنیاست چې:}$$

15- لاندې د مثلثاتي نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعي او یا تفاضل په شکل ولیکي؟

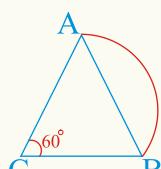
$$\cos 100^\circ \sin 50^\circ, \quad \cos 40^\circ \cos 60^\circ$$

$$\sin 8\theta \cos 10\theta, \quad \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{5\theta}{2}$$

16- لاندې د مثلثاتي نسبتونو مجموعي او یا تفاضل د ضرب د حاصل په خبر ولیکي؟

$$\sin 80^\circ - \sin 72^\circ \cdot \sin 12\theta + \sin 80$$

$$\frac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot \theta \quad -17 \quad \text{وبنیاست چې:}$$



18- دیوی دایري مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایري د 80° قطاع مساحت پیداکړئ.

19- د شکل مطابق د 60° مرکزی زاوې د مقابل قوس اوردوالي ($1cm$) دی. د دې قوس شعاع او د د وتر اوردوالي یې پیداکړئ؟

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ} = ? \quad -20$$

- a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$

-21 که $\sin \theta = \frac{3}{5}$ دویمه ضلع په لومړۍ ریع کې وي، او $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیداکړئ؟

$$\tan(45^\circ + \theta) = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \quad -22 \text{ وبنیاست چې: دی؟}$$

$$\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ \quad -23$$

- a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واپه نامن دی

$$\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ \quad -24$$

- a) $\cos 74^\circ$ b) $\cos 46^\circ$ c) $\sin 74^\circ$ d) $\sin 46^\circ$

$$\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ \quad -25$$

- a) $\cos 17^\circ$ b) $\cos 45^\circ$ c) $\sin 17^\circ$ d) $-\sin 17^\circ$

$$\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ \quad -26$$

- a) $\cos 115^\circ$ b) $\sin 115^\circ$ c) $\cos 45^\circ$ d) $\sin 45^\circ$

-27 که $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{13}$ ، $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و $\sin \beta = \frac{5}{13}$ ، α او β په لومړۍ ریع کې واقع وي () پیداکړئ؟

-28 که $\cos \square = -\frac{3}{5}$ ، $\cos \theta = -\frac{8}{17}$ دویمه ضلعې په دريمه ریع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیداکړئ؟

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = \tan x \cdot \tan y \quad -29 \text{ وبنیاست چې: دی؟}$$

$$\cos(0^\circ - t) = ? \quad -30$$

a) $\sin t$ b) $\cos t$ c) $-\frac{\sin t}{\cos \theta \cdot \sin 2\theta}$ d) $-\cos t$
 وبنیاست چې: $\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan x$ -31

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x \quad \text{وبنیاست چې: } -32$$

$$\frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t$$

$$\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y \quad -33$$

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$
 $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ? \quad -34$

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$
 -35 - د هېي قطاع مساحت چې شعاع بې 2m او مرکزی زاویه بې 0,5 radian ووي، مساوي ده په:

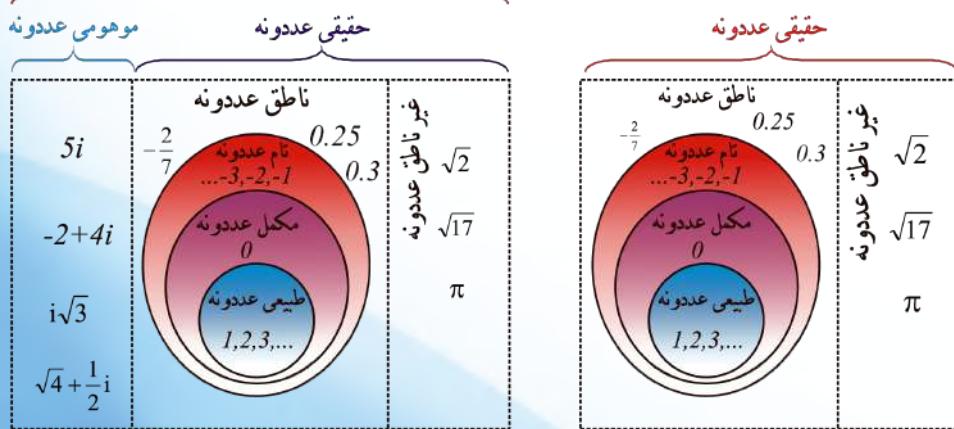
a) $3m^2$ b) $2m^2$ c) $1m^2$ d) درې واره سې نه دي (د)
 -36 - که د یوې دایري د یوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزی زاویه بې 2 radian ووي، د
 دې دایري شعاع مساوي ده په:
 a) 14.14cm b) -14.14cm c) 14cm d) درې واره غلط دي.



شپرمن خپرگی

مختلط عدد دونه

مختلط عددهونه



مختلط عددونه (Complex Numbers)

$$z = \sqrt{3} - 2i$$

Real Part of z = ?

Imaginary Part of

$$z = ?$$

آیا ویلای شئ چې د $x^2 + 9 = 0$ معادله ولې د
حقیقی عددونو په سټ کې حل نه لري؟
آیا پوهېږي چې د حقیقی عددونو سټ د مختلط
عددونو د سټ یو فرعی سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers)

$i^2 = -1$ دی د i توری له یونانی کلمې (iota) خخه اخیستل شوی دی چې
 $\sqrt{-1} = i$ ته، د موهومي عددونو واحد وايی.
لومړۍ مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

$$\text{حل: } \sqrt{-16} = \sqrt{(-1) \cdot 16} = \sqrt{-1} \sqrt{16} = i\sqrt{16} = \pm 4i$$

دویم مثال: د $x^2 + a^2 = 0$ معادله حل کړئ.
حل:

$$x^2 + a^2 = 0$$

$$x^2 = -a^2$$

$$x = \pm \sqrt{-a^2} = \pm \sqrt{(-1) \cdot (a^2)} = \pm a\sqrt{-1} = \pm ai$$

او ai - موهومي عددونه دی (چې a یو حقیقی عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i)

لیدل کېږي چې د $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو. په یاد ولرئ چې د حقیقی عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot (i) = -i$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = [(\sqrt{-1}^2)]^2 = (-1)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (1)(i) = i \quad i^6 = (i)^4 \cdot (i)^2 = (1) \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1) \cdot (i) = -i \quad i^8 = i^7 \cdot i = (-i) \cdot (i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موھومي واحد وایي.

له دي ئايە نتيجه په لاس راخي، كە د موھومي واحد توان $n=4$ يا يوداسي عددي چې پر خلورو د پيش وپوي، نوله يوه (1) سره مساوي دي.

دریم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

⋮

$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \dots i^4 = 1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

طاقتونو قیمت پیدا کړئ. $(i)^{256}$ و $(i)^{-37}$, $(i)^{61}$

خلورم مثال: i^{54} , i^{1998} او i^{89} پیدا کړئ.

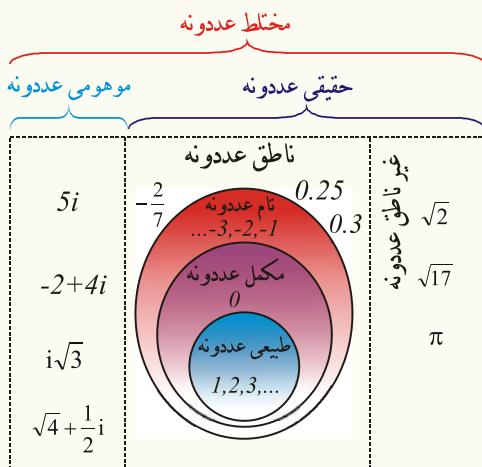
حل: کە د 54 عدد پر 4 ووبشو، پاتې (باتې) یې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4 \cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1) \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$$

$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$$

$$i^{89} = i^{4 \cdot 22} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکټور وي، د موھومي عددونو په نوم یادېږي. د طبیعي توانونه یو له i^1 , i^{-1} او $-i$ عددونو خخه دي. د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موھومي عددونو مربع منفي ده.



د عددونو سیونه د تاریخ په اوږدوکې د اپتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: خرنګه چې پوهېږي، د طبیعی عددونو سټ $IN = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ټولو مسألو ته څواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د معادله $3x = 0$ د طبیعی عددونو په سټ کې حل نه لري، بنکاره خبره ده چې څواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل سټ ته

اپتیا پیدا شوه چې د مکملو عددونو سټ $\{W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$ دی. دا سټ هم څینو پونښتو ته څواب نه شي ورکولای، لکه: $0 = 2x + 2$ د معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، څکه چې څواب یې $-2 = x$ دی چې -2 د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته اپتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ په نامه یادېږي، ده خود عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادله حل نشه، څکه چې حل یې $\frac{1}{2} = x$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغي خو د $0 = 2 - x^2$ د معادله د ناطقو یا گویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، څکه چې، ده د $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غiero ناطقو عددونو (Irrational Numbers) معادله حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غiero ناطقو عددونو سټ منځ ته راغي د ناطقو او غير ناطقو عددونو د سیټ کې شامل دی، نو د غير ناطقو عددونو سټ منځ ته راغي د ناطقو او غير ناطقو عددونو د سیټ کې مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وايی. خود حقیقي عددونو سټ هم څینو پونښتو ته څواب نه شي ورکولای، لکه: $0 = x^2 + 16$ دا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

يا په باره منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$ ، $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلي چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې يو جرمني رياضي پوه گوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندی کړ. که يو مختلط عدد په Z سره وښایو $z = a + bi$ چې د يو مختلط عدد معاري شکل دی چې a د عدد حقيقي برخه (Real Part of z) او bi د مختلط عدد موهوسي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعريف کېږي.

$C = \{z \mid z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ شکل هم لیکلای شو: $z = a + bi = (a, b)$ ، $z = a - bi = (a, -b)$ که $a=0$ شي: $z = a + bi = (a, b)$ چې bi ته خالص موهوسي عدد (Pure imaginary number) وايي او $Z = 0 + bi = bi$ که $b = 0$ وي، نو $a = 0$ (Pure real number) چې a يو خالص حقيقي عدد دی) په ياد ولري چې مختلط عددونه، لکه: حقيقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقيقي او موهوسي دواړه برخې یې صفرونه وي. ($0 = (0, 0)$ ، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفرۍ مختلط عدد دی.

فعاليت

په $4 + 3i$ او $-5i - 2$ مختلطو عددونو کې حقيقي او موهوسي برخې وښیاست.

لومړۍ مثال: د $i - 1$ ، $1 - i$ ، $5i$ او $\sqrt{3} - 3i$ په مختلطو عددونو کې حقيقي او موهوسي

برخې وښیاست.

حل: په $i - 1$ کې حقيقي برخه یې 1 او موهوسي برخه یې i ده.

د $3i - \sqrt{3} - 3i$ مختلط عدد کې حقيقی برخه يې $\sqrt{3}$ او موہومي برخه يې $-3i$ په .
 ۲ مختلط عدد کې حقيقی برخه يې ۲ او موہومي برخه يې $-5i$
 په $5i$ کې حقيقی برخه صفر او موہومي برخه يې $5i$ ده.

دویم مثال: (Standard Form) د مختلط عددونه په معیاري شکل

ولیکئ.

حل: خرنگه چې $z = a + bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وايي چې a ته د مختلط عدد حقيقی برخه او bi يې موہومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل بشودل شوي دي.

مختلط عددونه	معیاري شکل ($z = a + bi$)
$6i$	$0 + 6i$
-9	$-9 + 0i$
0	$0 + 0i$
$9 - i$	$9 - i$
$i - 1$	$-1 + i$

$z = a + bi$ دیوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقيقی برخه او bi موہومي برخه ده، که $a=0$ وي، نو bi خالصه موہومي برخه او که $b=0$ وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقيقی برخه ده او هغه معادلې چې د حقيقی عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

پوښتني

- 1 د $(3i)^2$ او $(2i)^2$, $(i)^{202}$, $(i)^{79}$, $(i)^{-33}$ قيمتونه پيداکړئ.
- 2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معياري شکل ولیکړي.
- $-i - 4$, $5i$, $-4i + \sqrt{2}$, $-3i$
- $\sqrt{5} - \sqrt{7}i$, $7 - i$, $5 + 3i$, $-3i - 3$ مختلط عددونه د مرتبو جو پوهه شکل ولیکړي.
- 4- د i -په مختلط عدد کې حقيقېي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ± 4 , b) -4 , c) $\pm 4i$, d) ± 2

د موهومي عددونو خلورگونې عملې

$$4i + 3i = 7i$$

$$4i - 3i = i$$

$$4i - (-3i) = 7i$$

آيا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع كولاي شي؟

آيا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل يو حقيقي عدد دي؟

د موهومي عددونو جمع او تفريق: موهومي عددونه كولاي شو چې په لاندي پول يې جمع او تفريق کرو.

a: د جمعي عمليه: د دوو موهومي عددونو د جمعي حاصل يو موهومي عدد دي.

لومړۍ مثال: د $(7i + 8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعي حاصل پیداکړئ.

$$7i + 8i = (7 + 8)i = 15i \quad \text{حل:}$$

$$\sqrt{7}i + 5i = (\sqrt{7} + 5)i$$

b: د تفريق علميه: د دوو عددونو د تفريق حاصل يو موهومي عدد دي.

دویم مثال: د $7i - 4i$ او $9i - 13i$ د تفريق حاصل پیداکړئ.

$$7i - 4i = (7 - 4)i = 3i$$

$$9i - 13i = (9 - 13)i = -4i$$

c: د ضرب عمليه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل يو حقيقي (Real number) عدد دي.

دریم مثال: د $(\sqrt{9}i) \cdot (\sqrt{4}i)$ او $(10i) \cdot (5i)$ د ضرب حاصل پیداکړئ.

$$(10i) \cdot (5i) = (10) \cdot (5) \cdot i \cdot i = 50i^2 = -50 \quad \text{حل:}$$

څکه چې $i^2 = -1$ دی تو $-50 = 50i^2 = 50 \cdot (-1)$ يو حقيقي عدد (Real number).

$$(\sqrt{4}i) \cdot (\sqrt{9}i) = \sqrt{4 \cdot 9} \cdot i \cdot i = \sqrt{36} \cdot i^2 = 6 \cdot (-1) = -6 \quad \text{همدارنګه}$$

د موہومی عدلونو د ضرب په عملیه کې د تبديلى خاصیت (Commutative Property)

$$(ai) \cdot (bi) = (bi) \cdot (ai) = -ab$$

فعاليت

$$\left(\frac{2}{3}i\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}i\right)$$
 د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : د وېش عملیه: د دوو موہومی عدلونو د پوش حاصل یو حقیقی عدد دی.

خلورم مثال: $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i}$ او $\frac{5i}{7i}$ ، $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$ د پوش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$1) \frac{5i}{7i} = \frac{5}{7} \text{ (یو حقیقی عدد دی)}$$

$$2) \frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \text{ (یو حقیقی عدد دی)}$$

$$3) \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}i}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

فعاليت

36i پر $-2i$ ووپشي.

د موہومی عدلونو جمعي او ضرب په عملیو کې د تبديلى خاصیت صدق کوي. د دوو موہومی عدلونو د ضرب او وېش حاصل یو حقیقی عدد دی.

پونسنج

$$\sqrt{-1}b + \sqrt{-1}c , \sqrt{-7} + \sqrt{-4} , \sqrt{7}i + \sqrt{7}i \quad (1) \text{ جمع یې کړئ.}$$

$$\sqrt{5}i - \sqrt{5}i , 12i - 7i , 5i - 2i \quad (2) \text{ تفریق یې کړئ.}$$

(3) لاندې موہومی عدلونه سره ضرب او تقسیم کړئ.

$$\frac{13i}{26i} , \frac{16i}{-4i} \quad (3i) \cdot (5i) , (\sqrt{7}i) \cdot (-7i) , \left(\frac{7}{4}i\right) \left(-\frac{2}{9}i\right)$$

د مختلطو عددونو د جمعي او تفريق عملي:

$$(1+2i) + (-1-2i) = 0$$

آيا د $3x - 2yi = 6 + i$ له مساوات خخه د

او y قيمتونه په لاس راولای شئ؟

آيا پوهېږي چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د

جمعی د عملې د عينيت عنصر واي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دو ه مختلط عددونه

هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقی او موهمي برخې يو له بله سره مساوي

وی. د $z_1 = a + bi$ او $x=a$ و $y=b$ د $z_2 = x + yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې

وی.

لومړۍ مثال: که چېږي i $z_1 = z_2 = 3 - 5i$ وی، نو هغه وخت دی

$$z_1 = x_1 + 2y_1i \quad \text{او} \quad y_1 = -\frac{5}{2} \quad \text{وی.} \quad x_1 = 3$$

فعاليت

1- که چېږي $z_1 = \sqrt{2}x + \sqrt{3}yi$ او $z_2 = -5 - 6i$ د $z_1 = z_2$ له مخې د x او y قيمتونه پیدا کړئ.

2- که چېږي $k + 3i$ او $m + 2mi = k + mi$ د m و k حقيقی عددونو قيمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعي عمليه: د مختلطو عددونو د جمعي عمليه داسې تعريف شوې

د. که چېږي $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ د $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ وی، نو:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

يا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعي حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي
برخه یې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موہومي برخه یې د دواړو عددونو د موہومي برخو
له مجموعي خڅه په لاس راغلي وي.

دويهم مثال: که چېږي $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ وی، $z_1 = 2 - 3i$ پیداکړئ

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3 + 4)i = 5 + i$$

په همدي ډول:

$$(3 - 4i) + (-2 + 6i) = (3 - 2) + (-4 + 6)i = 1 + 2i$$

$$(-9 + 7i) + (3 - 15i) = (-9 + 3) + (7 - 15)i = -6 - 8i$$

0 + 0i د مختلطو عددونو د جمعي د عملې د عينت عنصر (additive identity) دی، څکه

$$\cdot (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

همدارنګه د $a + bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a - bi$ عدد دی، څکه

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

فعالیت

د جمعي حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفريقي عملية: د دوو مختلطو عددونو د تفريقي حاصل يو بل داسې

مختلط عدد دی چې حقيقي برخه یې د حقيقي برخو او موہومي برخه یې د موہومي برخو د تفريقي

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(-4 + 3i) - (6 - 7i) = (-4 + 3i) + (-6 + 7i) = -10 + 10i$$

$$(12 - 5i) - (8 - 3i) = (12 - 8) + (-5 + 3)i = 4 - 2i$$

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چي دواپو عددونو حقيقي او موهمي برخې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعي حاصل يو داسې مختلط عدد دي چي حقيقي برخه پې د حقيقي برخو او موهمي برخه پې د موهمي برخو له مجموعى خخه په لاس راغلي وي، په همدي چول د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل يو داسې مختلط عدد دي چي حقيقي برخه پې د دواپو عددونو د حقيقي برخو او موهمي برخه پې د دواپو عددونو د موهمي برخو له حاصل تفریق خخه په لاس راغلي وي.

پونستې

1- لاندي مختلط عددونه جمع کړئ.

$$(2+5i) + (3+4i) \quad , \quad (13-12i) + (13+12i)$$

$$(-3+6i) + (10-7i) \quad , \quad (\sqrt{3}-ci) + (d+5ci)$$

2- لاندي مختلط عددونه يو له بله تفریق کړئ.

$$(5-i) - (7+3i)$$

$$(2\sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{7}i) - (\sqrt{3} + 3\sqrt{7}i)$$

$$(3c+4di) - (3c+8di)$$

3- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پیدا کړئ.

$$2+3i \quad , \quad (2,-3) \quad , \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}i$$

4- که $(x, y \in IR)$ او $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ د x او y قيمتونه پیدا کړئ.

5- لاندي عمليې سرته ورسوئ او خپل خوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکۍ

$$\begin{aligned}
 & (2 + 3i) + (-5 + 2i) \\
 & (-5 - 4i) - (-2 - \sqrt{2}i) \\
 & (2 + 3i) + (-5 - i) \\
 & (6 - 5i) + (3 + 2i) \\
 & (3.7 + 6.1i) - (1 + 5.9i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(8 + \frac{3}{4}i\right) - \left(-7 + \frac{2}{3}i\right) \\
 & \left(-6 - \frac{5}{8}i\right) + \left(4 + \frac{1}{2}i\right) \\
 & (-2 + 5i) + (3 - i) \\
 & \left(3 + \frac{3}{5}i\right) - \left(-11 + \frac{7}{15}i\right) \\
 & \left(-4 - \frac{5}{6}i\right) + \left(13 + \frac{3}{8}i\right) \\
 & (-7 - \sqrt{-72}) + (8 + \sqrt{-50}) \\
 & (\sqrt{3} + \sqrt{-2}) - (\sqrt{12} + \sqrt{8})
 \end{aligned}$$

6- دلاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پيداكرئ.

$2 - 3i$	$8 + 11i$	$1 - i$	$-1 + i$
$5 - 8i$	$-13 + 13i$	$-5i$	$2i$

د مختلطو عددونو ضرب



آيا کولای شئ چې د $(2 - 3i)(3 + 4i)$ د مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \quad \text{په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:} \\ z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bidi \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ z_1 \cdot z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

لومړۍ مثال: د $(5 - 4i) \cdot (7 - 2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$\begin{aligned} (5 - 4i)(7 - 2i) &= 5(7) + 5(-2i) + (-4i)(7) - 4i(-2i) = 35 - 10i - 28i + 8i^2 \\ &= 35 - 38i + 8(-1) \\ &= 35 - 38i - 8 \\ &= 27 - 38i \end{aligned}$$

فعالیت

د $(2 - 3i)(3 + 4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

خرنګه چې $(a + bi)(1 + 0i) = a \cdot 1 + a \cdot 0i + bi \cdot 1 + bi \cdot 0i = a + bi$ دی، نو ۱ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وايي $(3 + 5i)(1 + 0i) = 3 + 5i$ لکه:

د یو ه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number)

د i دی په دی چول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x, \quad 2x \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi, \quad 2yi \operatorname{Im}(z)$$

دوييم مثال: د عدد مزدوج $z = 3 + 4i$ دی، او $z \cdot \bar{z}$ دی، $z + \bar{z}$ دی، $z - \bar{z}$ دی، $z \cdot \bar{z} = 3 - 4i$ په لاس

راورۍ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$

(6 یو حقيقی عدد دی)

$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$

(8i یو موهمي عدد دی)

فعالیت

د $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$ او $z_2 = 7 + i$ ، $z_1 = 5 - 3i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

خزنګه چې وموليلد، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازي د موهمي برخې علامه تغیرورو لکه:

مزدوج ېږي	عدد
i	$-i$
$1+i$	$1-i$
$-4-2i$	$-4+2i$
$-5i-6$	$5i-6$

د یو مختلط عدد ضربی معکوس (Multiplicative inverse)

پوهېرو چې د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$$\cdot \text{دی} (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2 (-1) = a^2 + b^2$$

د $a + bi$ عدد د ضربی معکوس د پیدا کولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a - bi$ کې ضربوو. ($a - bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

د $(a+bi)$ د عدد ضربی معکوس $\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i\right)$ دی.

دریم مثال: د $-3i - 2$ د عدد ضربی معکوس پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$$

څلورم مثال: د $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ.

$$x^2 + 4 = x^2 - (-1) \cdot 4 = x^2 - (i)^2 \cdot 4 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

فعالیت

د $5 + 3i$ او $4i - \sqrt{2}$ مختلطو عددونو ضربی معکوس پیدا کړئ.

که چېږي $w = x' + y'i$ او $z = x + yi$ دو هه مختلط عددونه وي، نو $w \cdot z$ په دی ډول تعريف

$$z \cdot w = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

شوی دی.

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره یوازي د موہومي برخې علامه تغیرو او $a + bi$ د مختلط عدد ضربی معکوس $\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i\right)$ دی.

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$$\begin{array}{ll} (2+i)(3-2i) & , \quad (3+i)(3-i) \\ (-2+3i)(4-2i) & , \quad (2-5i)(2+5i) \\ (5+2i)(5-3i) & , \quad (\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i) \\ (\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i) & \end{array}$$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربی معکوس پیدا کړئ.

$$1-i, \quad 2+4i, \quad 5-3i, \quad 3a-4bi, \quad (7,4)$$

3- لاندې افadi تجزیه کړئ.

$$x^2 + 16, \quad x^2 + 8, \quad x^2 + 5, \quad x^2 + 7$$

4- $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.
5- $z=4-3i$ وی، $z=8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x + yi = (2 - 3i)(2 + 3i)$

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ، د i دریم جذر دی.

د دوو مختلطو عددونو وپش

Division of two complex numbers

$$\frac{-2-2i}{-5+6i} = ?$$

آيا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وپش حاصل (خارج

قسمت) په لاس راورلای شئ؟

خرنگه چې د عدد په مخرج کې c حقیقی عدد او di موهومنی عدد دی، نو لوړۍ باید مخرج په حقیقی عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګوياكول (Rationalization) وايي.

لومړۍ مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وپش حاصل په لاس راوري.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $-5i-2$ کې ضربوو.

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{2+5i} &= \frac{4+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2} = \frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)} \\ &= \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i\end{aligned}$$

لیدل کېږي چې د وپش په حاصل کې حقیقی او موهومنی برخې سره جلا دي.

فعاليت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وپش حاصل په لاس راوري او خپل خواب د مختلط عدد په معاري شکل ولیکي.

تعريف

که $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ دویں تعريف شوی دی په لاندی چول تعريف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} i$$

دویم مثال: د عدد پر i ووبشی او بیا یې امتحان کړئ. $z_1 = 2 - 3i$ و $z_2 = 1 + i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + i} = \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - 5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1 + i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وپشن حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2} = \frac{15+13i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $w = x' + y'i$ دویں مختلط عددونه وي، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعريف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2} i, \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دویں مختلط عددونه وي:

$$1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2) \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$3) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$5) z + \bar{z} = 2x$$

$$6) z - \bar{z} = 2yi$$

$$7) \overline{\overline{z}} = z$$

لومړۍ مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ و $z_2 = -3 + 2i$ وي، وبنیاست چې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{او} \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{په پایله کې}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (-3 + 2i) = -12 - 10 + (8 - 15)i = -22 - 7i$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (4 - 5i) \cdot (-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$

$$= -22 + 7i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i \quad \text{په پایله کې}$$

دويوم مثال: که $z = x + yi$ وي $z - \bar{z}$ پیدا کړئ.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x, \quad z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad \text{حل}$$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $Z - \bar{Z}$ او $\overline{\overline{Z}}, Z + \overline{Z}$ پیدا کړئ.

1- د و پش حاصل یې پیدا کړئ:

$$\frac{7-i}{3-5i}, \quad \frac{5-2i}{6-i}, \quad \frac{3-4i}{2-5i}, \quad \frac{1+i}{1-1}$$

که $z_2 = 2a - 3bi$ وي. و بنیاست چې:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ او } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

3- د و پش حاصل پیدا کړئ او خپل خوابونه د $a + bi$ په شکل ولیکي.

$$a : \frac{2}{5-i} \quad b : \frac{3-i}{2+i} \quad c : \frac{2-3i}{3}$$

4- د و پش حاصل مساوی دی په:

$$\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$$

$$a : 1 \quad b : 2 \quad c : 3i \quad d : -2$$

5- خپل خوابونه د $a + bi$ په شکل ولیکي.

$$\frac{3+4i}{4i} \quad \frac{-5}{2-3i} \quad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i} \quad \frac{-4+8i}{2-4i} \quad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې

د دويمې درجي يو مجھوله

معادلي حل:

$$x^2 + x + 4 = 0$$

$$x_1 = ?$$

$$x_2 = ?$$

آيا د $x^2 + x + 4 = 0$ معادلي جذرонه پيدا

کولاي شئ؟

ديوپي دويمې درجي يو مجھوله معادلي عمومي شکل $(a \neq 0)$ ، $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

كه $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرонه لري.

كه $\Delta = 0$ معادله دوه مساوي جذرонه لري.

كه $\Delta < 0$ معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خود مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرонه لري.

لومړۍ مثال: د $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: $a = 1$ $b = -10$ $c = 26$ دی.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$= \frac{10 \pm 2i}{2} = 5 \pm i \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 + i \quad x_2 = 5 - i$$

فعالیت

دا جذرонه په پورتني معادله کې وضع او امتحان یې کړئ.

دويمې مثال: د $4x^2 + 4i x + 15 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240 = -256$$

$$\pm \sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{-256} = \pm \sqrt{256(-1)} = \pm 16i$$

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{2 \cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دریم مثال: معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عدلونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 3^2 \cdot i^2 + 8 = -9 + 8 = -1$$

$$\pm \sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

$$x_{1,2} = \frac{-3i \pm i}{2 \cdot 1} \quad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \quad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعاليت

د $x^2 - 4x + 13 = 0$ او $x^2 - 6x + 18 = 0$ ، $x^2 + 3 = 0$ د معادلي حل کړئ.

پوښتنې

(1) هغه دويمه درجه معادله پیداکړئ چې جذرونه یې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.
 (2) لاندې معادلي حل کړئ.

$$x^2 - 4x + 13 = 0 , \quad x^2 - 6x + 18 = 0 , \quad -4x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 41 = 0 , \quad x^4 - 1 = 0 , \quad 3x^2 + x + 2 = 0$$

(3) داسي دويمې درجه معادلي په لاس راوړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i$, $2-5i$	$1+i$, $1-i$
$4i$, $-4i$	$5i$, $-5i$
$2i$, $3i$	i , $\frac{1}{i}$
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}i$	$2-i$, $2+i$

د خپرکي لنديز

- منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خود مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.

• مختلط عددونه د حقيقي او موهمي عددونو له يو څای کېدو خخه په لاس راخي.

• د حقيقي عددونو مربع مثبت، خود موهمي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

• داسي عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ بې يو فكتور وي، موهمي عددونه وايي.

• د مختلط عددونو سټ C په لاندي ډولتعريف شوي دي:

$$C = \{z / z = a + bi, a, b \in \text{IR}, i = \sqrt{-1}\}$$

• ديو مختلط عدد معياري شکل $z = a + bi$ دی چې a ته د عدد حقيقي برخه او bi د

$$\text{موهمي برخه وايي يا } a = \text{Re}(z) \text{ او } bi = \text{Im } g(z)$$

- د i د مختلفو توانونو د پيداکولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېري او که پوره پري نه وېشل کېري، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوي دی، لکه:

$$(i)^{1379} = i^{4 \cdot 344} \cdot i^3 = (1)(i)^3 = -i \quad i^{4k+r} = i^r$$

- که د $z = a + bi$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهمي عدد وايي.

- هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهمي برخې بې دواړه صفرونه وي، صفرۍ مختلط عدد ورته وايي. ($a = 0, b = 0$)

- دوہ مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دی چې د دواړو عددونو حقيقي او موهمي برخې

يو له بله سره مساوي وي. ($\text{Im } g(z_1) = \text{Im } g(z_2)$ او $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$)

- د دوو مختلط عددونو د جمعې حاصل يو بل داسي مختلط عدد دی چې حقيقي برخه بې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهمي برخې بې د دواړو عددونو د موهمي برخو له مجموعې

څخه عبارت ده.

- د دوو مختلطو عددونو د تفريقي حاصل داسي یو مختلط عدد دی چې حقيقي برخه یې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومني برخه یې د دواړو عددونو د موهومني برخو د تفريقي له حاصل څخه عبارت ده.

- که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعي، تفريقي، ضرب او وېش عملېي داسي تعريف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i, \quad (z_2 \neq 0)$$

- د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\bar{z} = x - yi$ څخه عبارت ده.

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$z - \bar{z} = 2yi$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

- د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربی معکوس یې دی $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$.

- د $0 + 0i = (0,0)$ مختلطو عددونو د جمعي د عملېي د عينيت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملېي د عينيت عنصر دی.

- هغه دويمه درجې معادلې چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

د فصل پونتني:

(1) مساوي دي په:

- a) 1 b) -1 c) i d) -i

i⁻⁹⁸ موہومي عدد مساوي دي په:

- a) 1 b) -1 c) i d) -i

i⁶⁷ موہومي عدد مساوي دي په:

- a) -i b) 1 c) -1 d) i

7i - 4i مساوي دي په:

- a) -3i b) 3i c) 3 d) -3

3i · 4i مساوي دي په:

- a) -12 b) 12 c) 12i d) -12i

$\frac{64i}{8i}$ مساوي دي په:

- a) -8 b) 8 c) 8i d) -8i

$\frac{7}{9}i \cdot \frac{2}{9}i$ مساوي دي په:

- a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

$\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دي په:

- a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1} \cdot 5}$ مساوي دي په:

- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) درې واره سم نه دي

مساوي دی په: $\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ (10)

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$

b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$

c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$

d) $\frac{x}{y}$

11) لاندی مختلط عددونه جمع کړئ.

$$(3+4i)+(2+5i)$$

$$(a+bi)+(c+di)$$

$$(1+i)+(1-i)$$

$$(2+3i)+(2-3i)$$

12) لاندی مختلط عددونه تفریق کړئ.

$$(4+3i)-(4+4i)$$

$$(3-2i)-(3+2i)$$

$$(4+4i)-(4+3i)$$

$$(1+i)-(1-i)$$

مساوي دی په: $(2a+ib)-(2a-ib)$ (13)

a) $-ib$

b) $-2ib$

c) $2ib$

d) $4a$

د ضرب حاصل مساوی دی په: $(2-3i)(2+3i)$ (14)

a) -13

b) $13i$

c) 13

d) $9i$

15) لاندی مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکړي.

$$4(2+5i)-(3-4i) \quad (4-3i)(2+i)$$

$$i(3-2i)^2 \quad i^{51}$$

16) که $z_2 = 1-i$ وي، وبنیاست چې:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

17) د لاندی مختلطو عددونو جمعي او ضربی معکوس پیدا کړئ.

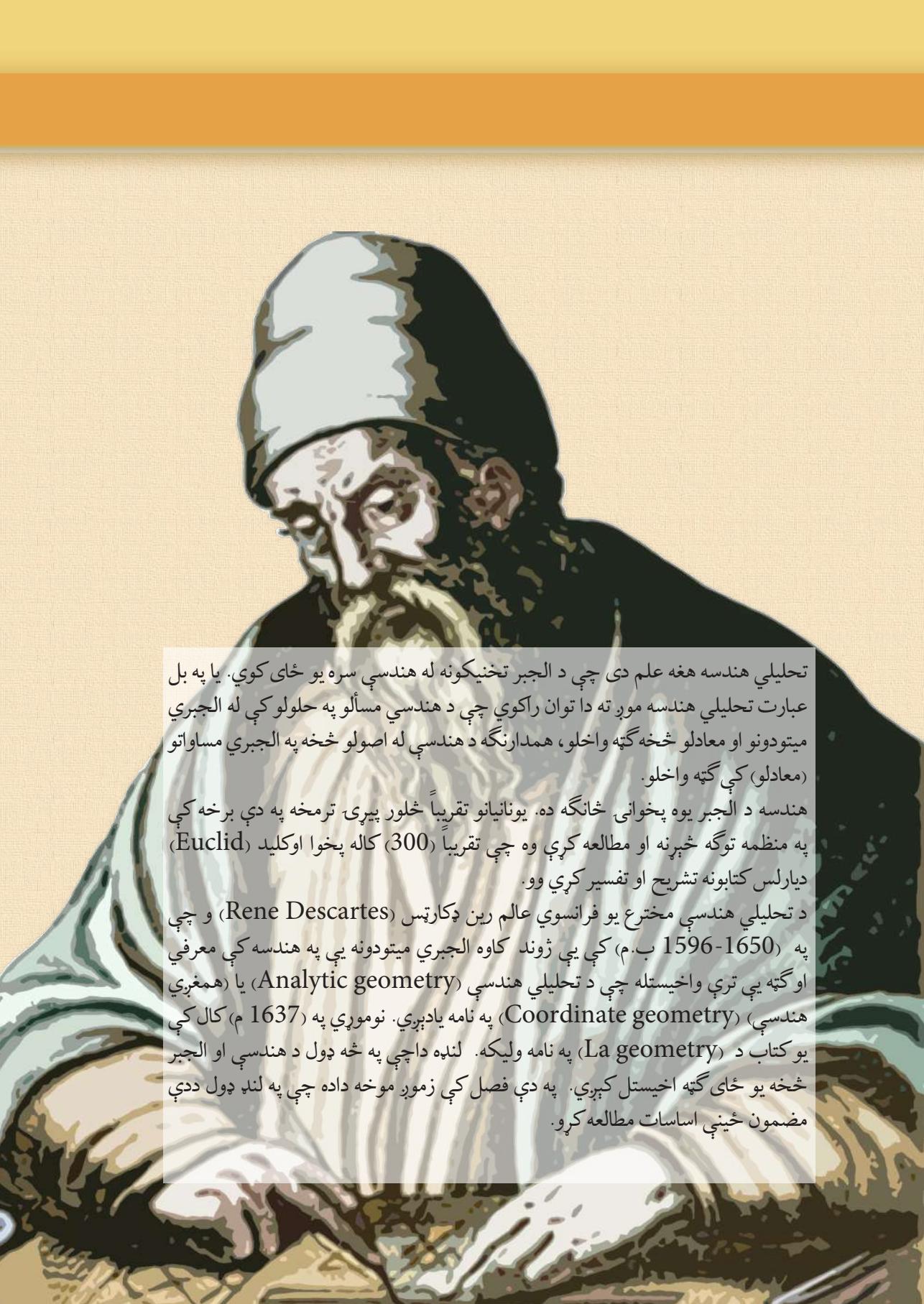
$$3x - \frac{1}{2}yi \quad 2a - bi \quad 2+5i \quad -7+3i \quad -6+2i \quad 3-i \quad \sqrt{2}+i$$

18) معادله حل کړئ. $5x^2 + 2x + 1 = 0$



اووم خپرکی

تحلیلی هندسه



تحلیلی هندسه هغه علم دی چې د الجبر تختنیکونه له هندسې سره یو خای کوي. یا په بل عبارت تحلیلی هندسه مورته دا توان راکوی چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتدونو او معادلو خخه گټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو خخه په الجيري مساواتو (معادلو) کې گټه واخلو.

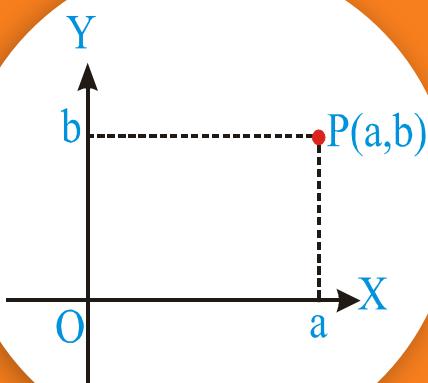
هندسه د الجبر یوه پخوانی خانګه ده. یونانیانو تقریباً خلور پېږي ترمحه په دې برخه کې په منظمه توګه څېرنه او مطالعه کړي ووه چې تقریباً (300) کاله پخوا اوکلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلی هندسې مخترع یو فرانسوی عالم رین دکارت (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجيري میتدونه یې په هندسے کې معرفی او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلی هندسې (Analytic geometry) یا (همغربی هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادېږي. نوموري په (1637) م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په خه ډول د هندسې او الجبر خخه یو خای ګټه اخیستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موځه داده چې په لنډه ډول ددې مضمون خینې اساسات مطالعه کړو.

د وضعیه کمیاتو سیستم یا

کوارڈنٹ سیستم

(Coordinate system)



آیا د $(2,0)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,2)$ ، $(0,-1)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې تاکلای شي؟

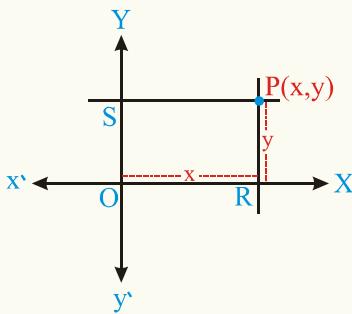
فعالیت

د وضعیه کمیاتو په مستوی کې د 'XX' او 'YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع تکي (نقطې) ته (O) واېږي چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) واېږي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارڈنٹ د محورونو (Coordinate axes) په نامه یادېږي. چې د 'XOX' افقی خط د X محور او د 'YOY' عمودی خط د Y له محور خخه عبارت دی. بنکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا بشني خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کینې خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوی کې یو نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې (OrderPair) په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې خخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د \overline{OR} مستقیمه فاصله x او $y = \overline{OS}$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x, y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې تاکل کېږي.

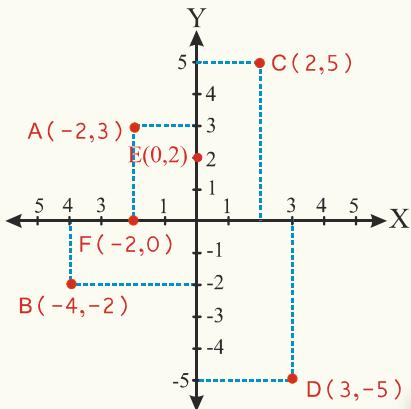
په مستوی کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوی هره نقطه د (x, y) د حقيقی عددونو د مرتبې جوړې په واسطه بندول کېږي. چې X او Y د محورونو خخه د د p



نقطې مستقىمې فاصلې دی چې دې سىstem تەكارىزنى ياكواردۇنت سىstem (Coordinate System) وایي. د مرتې جورپى لومپى مركبى تە د X مختصە او دويمى تە د y مختصە (Y-Coordinate) وایي. د كواردۇنت (quadrants) محورونە مستوي پە خلورو ناحيە (ربع) (ربع) كې، $x > 0$ وېشى. پە دې چول چې پە لومپى ناحيە (ربع) كې، $x < 0, y < 0$ ، $x < 0, y > 0$ پە دويمە ربع كې، $x > 0, y > 0$ ، $y < 0$ او پە خلورمە ربع كې $x > 0$ او $y < 0$ دى.

لۇمپى مثال: د F(-2,0) ، E(0,2) ، D(3,-5) ، C(2,5) ، B(-4,-2) ، A(-2,3) او

نقطې د وضعىيە كمياتو پە سىstem كې وتاكى. حل:



فالىت

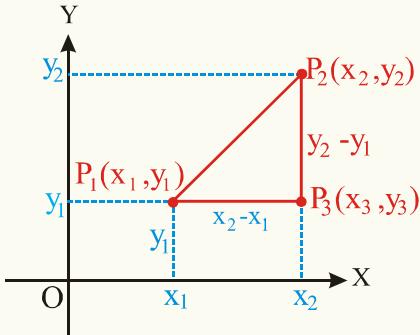
- وېياست كومې نقطې چې د X پر محور پرتى دى، د y مختصى بى صفر او كومې نقطې چې د Y پر محور پرتى دى، د x مختصى بى صفر دى.
- وېياست چې د (2,3)، (0,2)، (-2,3)، (2,-3)، (-2,-3)، (0,4) او (4,0) نقطې پە كومو ربعو كې واقع دى.

د دوو نقطو ترمنخ فاصلە (Distance between two points)

آياكولاي شى چې وېياست، د A(4,8) او B(1,2) د نقطو تر منخ فاصلە خو واحدە دە؟ كە $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ پە مستوي كې دوې نقطې وي. موركولاي شو چې د P_1

ترمنځ فاصله یا $d = |P_1 P_2|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د قایم الزاویه مثلث له مخې د فيثاغورث د قضيې په اساس پیدا کړو، لکه خرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

$$\begin{aligned} (P_1 P_2)^2 &= (P_1 P_3)^2 + (P_2 P_3)^2 \\ d = |P_1 P_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

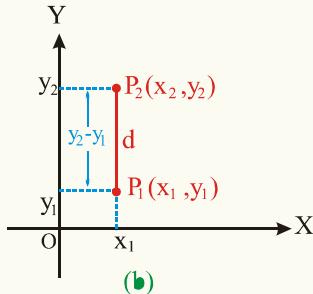
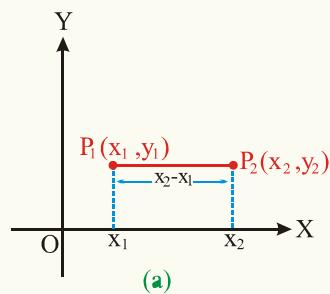


پام مو وي چې که د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ نقطې پر افقی خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1 = y_2$ کېږي، لکه: خرنګه چې د (a) په شکل کې ليدل کېږي.

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودې خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1 = x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې بشودل شوي دي.

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$



دویم مثال: د $P_2(-1, -5)$ او $P_1(3, -2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.
حل:

$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - 3)^2 + [-5 - (-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

فعالیت

د $P_1(8,0)$ او $P_2(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړي.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وبنياست چې $C(-2,5)$ ، $A(-2,-3)$ او $B(2,1)$ دوو نقطه دی. یو قایمه الزاویه مثلث راسونه دی.
حل:

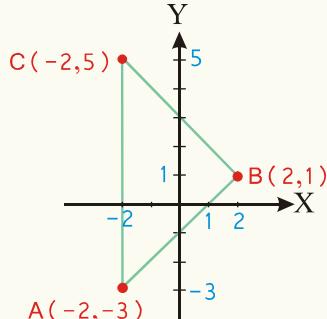
$$|AB| = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + [1 - (-3)]^2} = \sqrt{32}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{32}$$

$$|CA| = \sqrt{[-2 - (-2)]^2 + [5 - (-3)]^2} = \sqrt{64}$$

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 32 + 32 = 64$$

$$|CA|^2 = 64$$



خرنګه چې: $|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ دی نو د $\triangle ABC$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

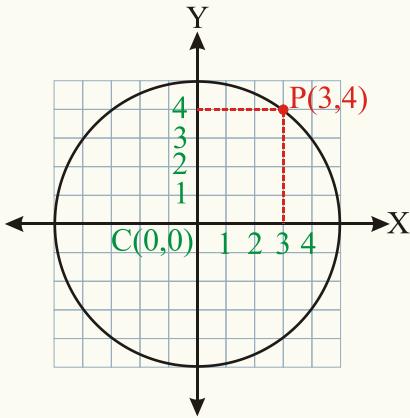
فعالیت

وبنياست چې $C(-1,5)$ او $B(3,-5)$ ، $A(-6,3)$ نقطي د قایمه زاویه مثلث راسونه دی.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایري مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایري د محیط یوه نقطه وی، ددي دایري د شعاع او بدوا لی پیدا کړي.

حل:

$$\begin{aligned} \overline{PC} = R &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$



د وضعیه کمیاتو په مستوی کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې بې صفر او
کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې بې صفر دي.

د ($P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$) د دوو نقطو تر منځ فاصله د
له فورمول خخه په لاس راخي.



1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا خنځه 15 واحده

د؟

$$a : (\sqrt{176}, 7)$$

$$b : (10, -10)$$

$$C : (1, 15)$$

$$d : \left(\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

2- وښیاست چې د $C(0, -2)$ او $B(\sqrt{3}, 1)$ ، $A(0, 2)$ نقطې د یو قابمه زاویه مثلث راسونه

دي.

3- د $(0, 5)$ او $(0, -3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4- د $B(-1, \frac{-3}{4})$ او $A(-\frac{1}{2}, 3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

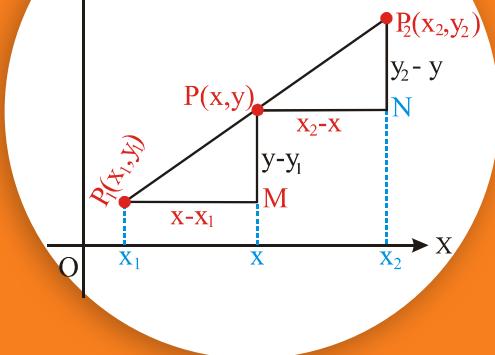
5- د $(7, 11)$ او $(1, 3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

6- د $(3, 6)$ او $(1, 2)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

7- د $(3, 7)$ او $(19, 12)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې يو قطعه خط په یوه نسبت

باندې وېشی:



آيا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو خخه تېږدی؟
که د P د نقطې وضعیه کمیات (x, y) وي

چې د $\overline{P_1 P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشی يا مثلونو له مشابهت خخه لرو چې:

$$\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P_1 M}{P N} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x + rx = rx_2 + x_1$$

$$(1+r)x = rx_2 + x_1$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P M}{P_2 N} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

$$y - y_1 = ry_2 - ry$$

$$y + ry = ry_2 + y_1$$

$$(1+r)y = ry_2 + y_1$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

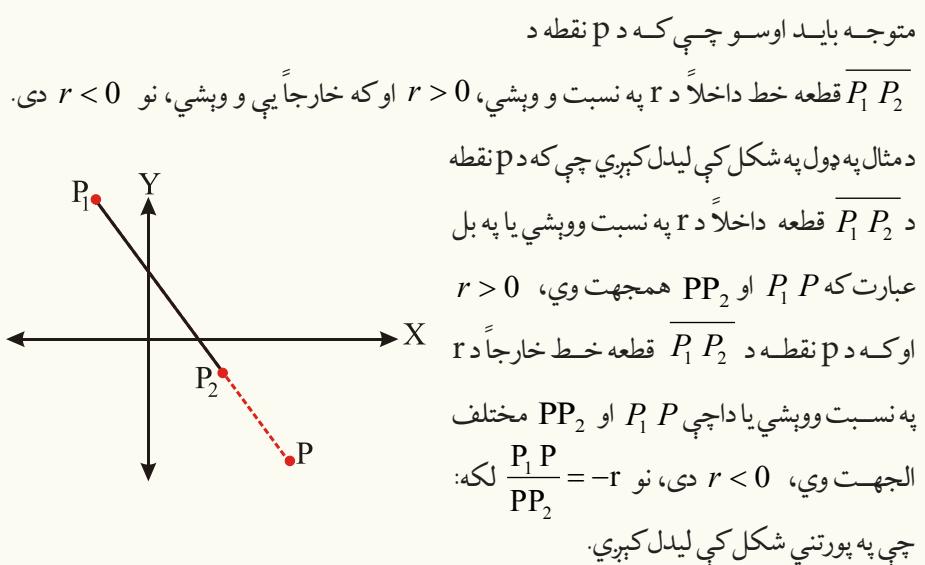
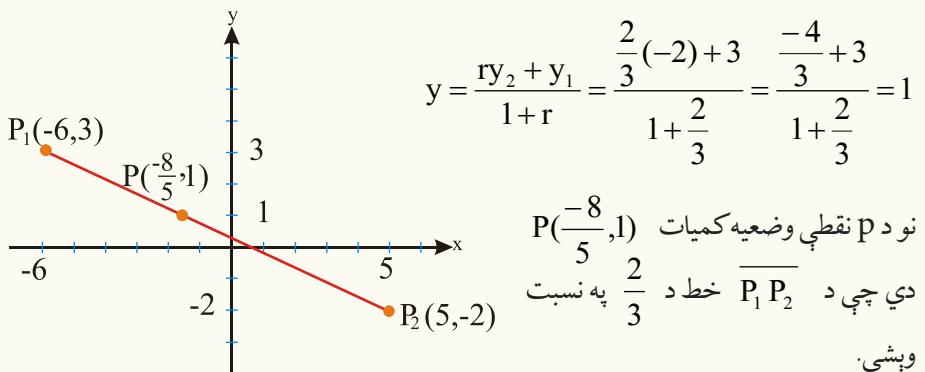
لومړۍ مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو خخه تېږدی

$$\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{2}{3} \quad \text{په نسبت وېشی يا } \frac{2}{3} \text{ وي.}$$

$$x_1 = -6 \quad x_2 = 5 \quad r = \frac{2}{3}$$

حل

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 5 - 6}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{8}{5}$$



دوييم مثال: د P د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-8, 4)$ او $P_2(2, -1)$ له نقطو خخه تېږږي.

$$a: \text{داخلا} \rightarrow \frac{2}{3} \text{ په نسبت و پشی.} \quad b: \text{خارج} \rightarrow \frac{2}{3} \text{ په نسبت و پشی.}$$

د حل:

$$r = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 2 - 8}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-20}{5} = -4, \quad y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r} = \frac{\frac{2}{3}(-1) + 4}{1+\frac{2}{3}} = \frac{10}{5} = 2$$

نود P د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاد $\frac{2}{3}$ په نسبت وپشي له $(-4,2)$

څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د P نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاد $\frac{2}{3}$ په نسبت وپشي، نو:

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\left(\frac{-2}{3}\right) \cdot 2 - 8}{1 - \frac{2}{3}} = -28, \quad y = \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)(-1) + 4}{1 - \frac{2}{3}} = 14$$

د P نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاد $\frac{2}{3}$ په نسبت وپشي له $(-28,14)$

څخه عبارت دي.

فعالیت

د P نقطې وضعيه کميات پیداکړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او

$B(-2,3)$ له نقطو څخه تېربېږي، داخلائې د $\frac{1}{2}$ په نسبت وپشي.

که د P نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ د مستقيم خط د تنصيف نقطه وي، په دې حالت کې $r = 1$ دی او د P

نقطې وضعيه کميات عبارت دي له: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ او $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

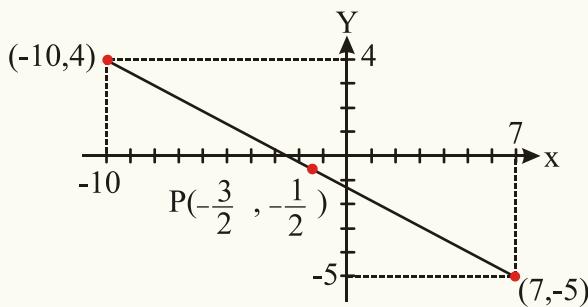
دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات پیداکړئ چې د $(-10,4)$ او

$(7,-5)$ له نقطو څخه تېربېږي.

حل:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10 + 7}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 - 5}{2} = -\frac{1}{2}$$



د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د Γ په نسبت و پشی.

د $P_1 P_2$ قطعه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات او د $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$, $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$

عبارت دي له: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د اخلاقاً.

په نسبت و پشی، نو Γ مثبت او که خارجائي و پشی، نو Γ منفي دي.

پونتنۍ

1 - د \overline{AB} مستقیم خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات $(1, -3)$ دی، که $(2, -1)$ وی،

د B د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ.

2 - د هغه قطعه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ چې د $A(3, 1)$ او $B(-2, -4)$ دی،

له نقطو خخه تېرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4, 6)$ او $B(-2, 3)$ دی،

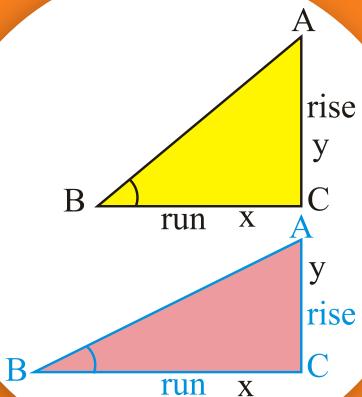
له نقطو خخه تېرېږي.

b : خارجائي د $\frac{1}{2}$ په نسبت و پشی.
a: د اخلاقاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و پشی.

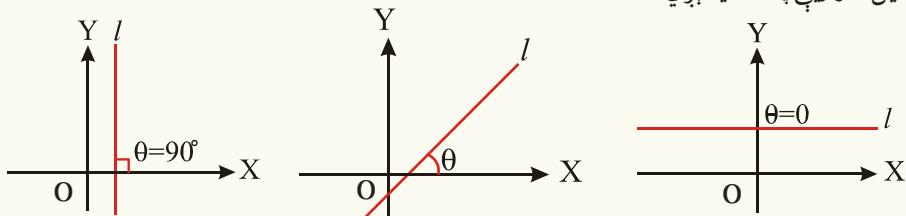
د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کولای شئ چې ووایئ د کومې مایلې
سطحې میل زیات دی؟



د \square زاویه چې د l مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جو پوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه يادپوري.



لکه خرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي که د l خط د X له محور سره موازي وي ۰ او که د Y له محور سره موازي وي، نو 90° ده.

خه وخت چې مور پر مایله سطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مستقیم خط میل په m و بنایو.

$$m = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاویې له \tan خخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جو پوي، که $90^\circ < \theta < 0$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $0 < \theta < 180^\circ$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0^\circ = 0$ ده، نو میل بې صفر او که $\theta = 90^\circ$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوي نه دی، هکه چې $\tan 90^\circ$ تعریف شوي نه دی.

فالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې خه فکر کړئ؟

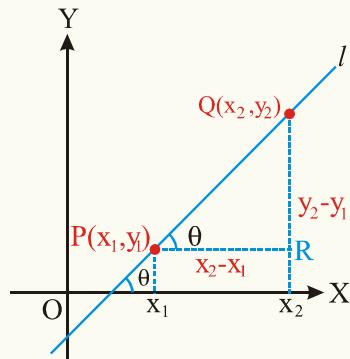
د هغه مستقیم خط میل چې عمودنه وي او د (x_1, y_1) او (x_2, y_2) له نقطو خڅه تېږدی. $m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$$

$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$

$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$

$$m = \tan \theta = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



که د A ، B ، او C درې نقطې داسې ولرو چې د \overline{AB} د مستقیم خط میل د \overline{BC} د مستقیم خط له میل سره مساوی وي، نو د A ، B ، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړۍ مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1(2, 4)$ او $P_2(6, 10)$ له نقطو خڅه

تېږدی.

حل:

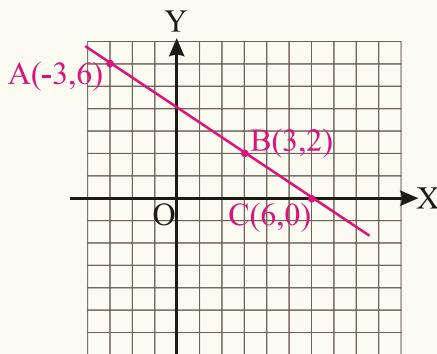
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 4}{6 - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4 - 10}{2 - 6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

یا:

دویم مثال: و بنیاست چې د $C(6, 0)$ ، $A(-3, 6)$ ، $B(3, 2)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

$$m = \frac{2 - 6}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$



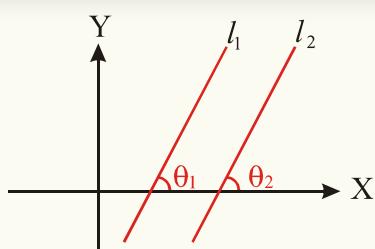
$$d_{\overline{BC}} = \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$$

خزنگه چې د \overline{BC} او \overline{AB} مستقيمو خطونو ميلونه سره مساوي دي. نو د A، B، او C نقطې په يوه مستقيم خط باندي واقع دي.

نتيجه: د يوه مستقيم خط ميل د مستقيم خط په تولو نقطو کې سره مساوي دي.

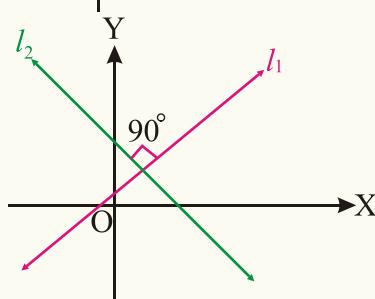
فعالیت

- د هغه مستقيم خط ميل پيدا کړئ چې د (4,-2)، (1,5) او (-4,1) له نقطو خخه تېږدې.
- د مستقيم خط د ميل په مرسته وبنیاست چې د (7,5)، (-5,4) او (15,10) نقطې پر يوه مستقيم خط پر تې دي.



که د l_1 او l_2 دوو مستقيم خطونه وي او ميلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

-1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دي.
څکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دي
 $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$
 $m_1 = m_2$



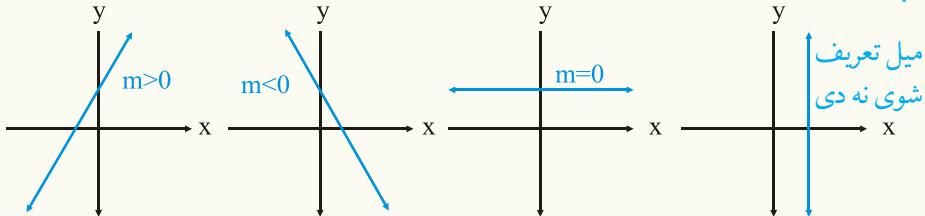
-2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:
 $m_1 m_2 + 1 = 0$ يا $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ يا
 $m_1 \cdot m_2 = -1$ دي.

ديو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو خخه تېږدې، د

لې فورمول خخه په لاس راخي د X د محور او د هغه مستقيمو

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

خطونو ميل چي د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغه مستقيمو خطونو ميل چي د Y له محور سره موازي ويتعريف شوي نه دي. كه ديوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل بې مثبت او كه منفرجه وي، ميل بې منفي دي او كه د مستقيم خط د ميل زاويه صفري، ميل بې صفر دي.



پوبتنې

- 1 - د هغه مستقيم خط ميل پيداکړئ چي د $(-2, 3)$ او $(2, 7)$ له نقطو خخه تېږدي.
- 2 - که $A(8, 6)$ ، $B(-4, 2)$ او $C(-2, -6)$ ديو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې ميل پيداکړئ.

- 3 - د مستقيم خط د ميل په مرسته و بنیاست چي د $(2c-a, 2a)$ ، $(a, 2b)$ او $(c, a+b)$. نقطي پريو مستقيم خط باندي واقع دي.

- 4 - د \overline{AB} مستقيم خط چي د $A(1, -2)$ او $B(2, 4)$ له نقطو او د \overline{CD} مستقيم خط چي د $C(4, 1)$ او $D(-8, 2)$ له نقطو خخه تېږدي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هېڅ يو

5 - د $y = 3$ مستقيم خط او د $x = 3$ مستقيم خط يو له بله سره خه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ يو

6 - د $x = -1$ او $x = 3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ يو

7 - د $y = -\sqrt{3}$ مستقيم خط ميل مساوي دي په:

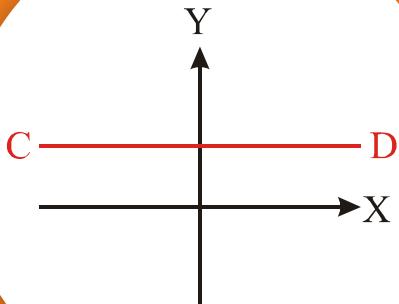
d -تعريف شوي نه دي -1 -c -b 1 - a

8 - د $x = 0,03$ مستقيم خط ميل مساوي دي په:

-1 -c -b 1 - a -تعريف شوي نه دي.

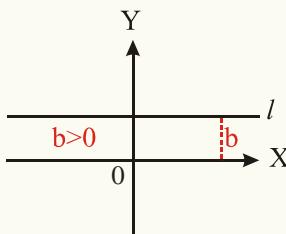
د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)



آياکولای شئ د \overline{CD} د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي وي.

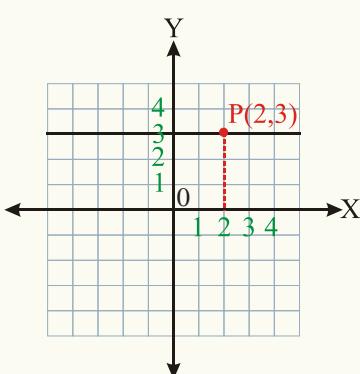
1- د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتبې وي، د X له محور خخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور خخه د l د خط فاصلې ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور خخه پورته او که

$b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



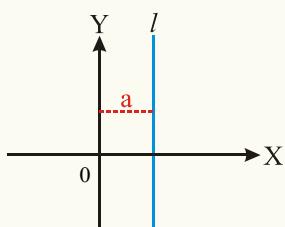
لومړۍ مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2,3)$ له نقطې خخه تېربې او د X له محور سره موازي وي.

حل: $y = 3$ ددي خط معادله ده

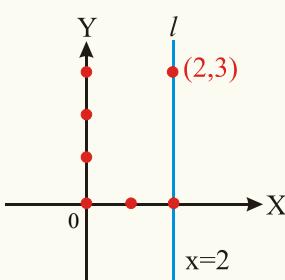
فعالیت

د X د محور معادله پیدا کړئ.

2 - د هغه مستقيم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي: ټولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور خخه مساوی فاصلې لري که د Y له محور خخه د l د مستقيم خط فاصلې ته a وایو چې a ددي نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.



که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور بنسی خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کینې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.

دوييم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2, 3)$ له نقطې خخه تپر شي او د Y له محور سره موازي وي.

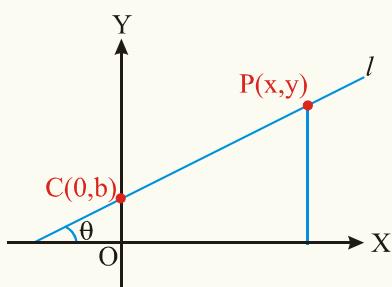
حل: $x = 2$ ددي خط معادله ده.

فعاليت

د Y د محور معادله ولیکي.

3. د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه معلومه وي يا د مستقيم خط معياري معادله:

که $P(x, y)$ د l د مستقيم خط يوه نقطه وي او $C(0, b)$ د Y له محور سره د مستقيم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقيم خط ميل عبارت دی له:



$$m = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x}$$

$$y = mx + b \quad \text{يا} \quad y - b = mx$$

که $b = 0$ وي، د مستقيم خط معادله $y = mx$ د چې په دې حالت کې مستقيم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا خخه تېرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې 6 - دی.

حل:

$$y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5 \quad b = 5 \text{ او } m = 2 : a$$

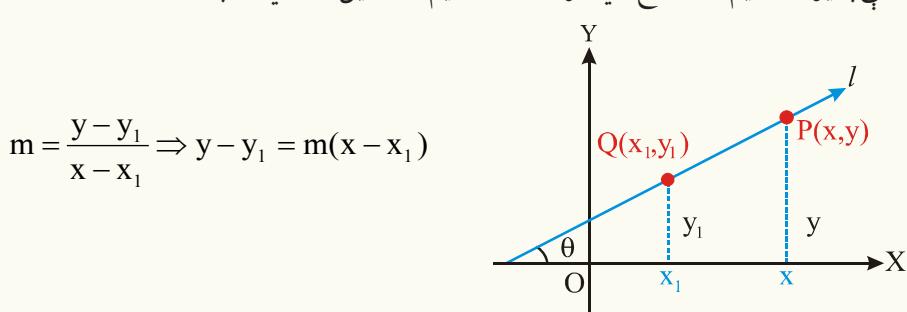
$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6} \quad b: \text{ددي خط ميل } m = \frac{1}{6} \text{ او } b = \frac{4}{3} \text{ دی؛ نو:}$$

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

دا معادله کولای شو، د $x - 6y + 8 = 0$ او یا $6y = x + 8$ ، $6y = x + 8$ په شکل ولیکو.

4- د هغه مستقيم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقيم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1, y_1)$ له نقطې خخه تېرېږي. که $P(x, y)$ د l د مستقيم خط یوه اختياری نقطه وي. خرنګه چې د $Q(x_1, y_1)$ او $P(x, y)$ نقطې په یوه مستقيم خط واقع دي، نو د l د مستقيم خط میل مساوی دي په:



څلورم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې ميل يې (2) او د (5,1) له نقطې

څخه تېربېږي.

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2(x - 5)$$

$$y = -2x + 11$$

$$2x + y - 11 = 0 \quad \text{يا}$$

5: د هغه مستقيم خط معادله چې دوي نقطې يې معلومې وي:

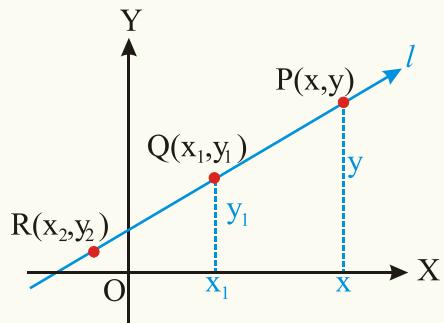
د l د خط ميل چې عمودنې وي، د (x_1, y_1) او (x_2, y_2) ل له نقطو څخه تېربېږي او

$P(x, y)$ ددي خط یوه کيفي نقطه وي، خرنګه چې د مستقيم خط ميل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نولو چې:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{يا}$$



پنځم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د (4, -4) او (6, -2) له نقطو څخه

تېربېږي.

حل:

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$$y_1 = 1, \quad x_1 = -2$$

$$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2) \quad \text{يا} \quad 5x + 8y + 2 = 0$$

$$y_2 = -4, \quad x_2 = 6$$

6: د هغه مستقيم خط معادله چې له محورونو سره يې تقاطع معلومه وي:

که $(P(x, y))$ د مستقيم خط یوه کيفي نقطه وي او د l مستقيم خط د X محور په a کې او

د Y محور په b کې قطع کړي ياد X محور د $A(a, 0)$ او د Y محور د $B(0, b)$ په نقطه کې

قطع کوي چې د A او B نقطې د l پر مستقيم خط واقع دي.

د هغه مستقيم خط له معادلي خخه چي دوي نقطي يې معلومي وي لرو چي:
 $x_1 = a$, $y_1 = 0$ $x_2 = 0$, $y_2 = b$

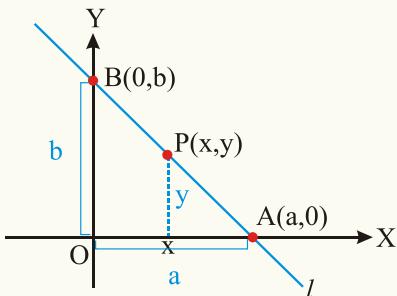
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a} (x - a) \Rightarrow -ay = b(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$bx + ay = ab$$

دواره خواوي پر ab وپشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



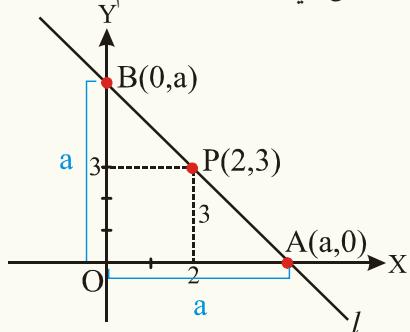
شپړم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پیدا کړئ چي د X محور په $(2, 0)$ او د Y محور په $(0, -4)$ کې قطع کوي.
حل: $b = -4$ او $a = 2$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$2x - y - 4 = 0 \quad \text{يا}$$

اووم مثال: په شکل کې که د $\triangle OAB$ مثلث متساوي الساقین وي، د \overline{AB} د مستقيم خط معادله
 په داسې حالت کې پیدا کړئ چي ددي مثلث د \overline{AB} ضلع د $P(2, 3)$ له نقطي خخه تېږدی.
حل: د \overline{AB} د مستقيم خط ميل مساوي دی په:



$$\overline{AB} \text{ د مستقيم خط ميل } \frac{a - 0}{0 - a} = -1$$

نو اوس د هغه مستقيم خط معادله چې ميل يې (1-) او د $P(2,3)$ له نقطې خخه تېربېرى عبارت ده له:

$$y - 3 = -1(x - 2) \text{ يا } x + y - 5 = 0$$

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:
 $y = mx + b$

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي عبارت ده له:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ ده.}$$

پوښتني

1- د لاندې مستقيمو خطونو معادلي پيداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پيداکړئ چې له (7,-9) نقطې خخه تېربېرى.

b: د هغه مستقيم خط معادله چې د X پر محور عمود او له (5,3) نقطې خخه تېربېرى.

2- د لاندې مستقيمو خطونو معادلي پيداکړئ چې:

a: ميل يې 7 او د (-6,5) له نقطې خخه تېربېرى.

b: ميل يې صفر او د (8,-3) له نقطې خخه تېربېرى.

c: د (-8,5) له نقطې خخه تېربېرى او ميل يې تعريف شوي نه وي.

d: د (-5,-3) او (9,-1) له نقطو خخه تېربېرى.

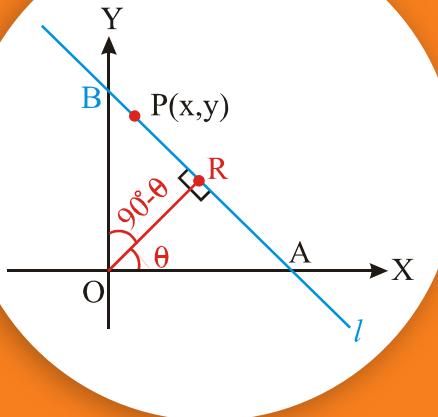
e: ميل يې 4 - او د Y محور په 9 - کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلي پيداکړئ چې راسونه يې (A(-3,2) ، B(5,4) او C(3,-8) وي.

4- د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د (-4,-6) له نقطې خخه تېربېرى او پر هغه خط عمود وي چې ميل يې $-\frac{3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د (5,-11) له نقطې خخه تېربېرى او له هغه خط سره موازى وي چې ميل يې 24 - وي.

7 - د مستقیم خط نورمال معادله



آیا ویلای شیء دیوه مستقیم خط نورمال خط

کوم خط ته وايي؟

د / د مستقیم خط معادله که P د هنگه عمود خط اوبردوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا خخه
د / پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$ يا $x \cos \theta + y \sin \theta = P$

د / د مستقیم خط د X محور د A په نقطه کې او د Y محور د B په نقطه کې قطع کوي، که
د مستقیم خط \overline{AB} د مستقیم خط يوه کيفي نقطه وي او د \overline{OR} خط د l پر خط عمود وي، نو:
د چې د \overline{OR} خط ته د l د خط نورمال خط وايي او P د نورمال اوبردوالی دی.
د $\overline{OR} = P$ او \overline{OB} او \overline{OA} په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos \theta = \frac{P}{OA} \text{ يا } OA = \frac{P}{\cos \theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \text{ يا } OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin \theta}$$

له مثلثاتو پوهېږو: $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$
خرنګه چې د \overline{AB} مستقیم خط D محور په $(OA, 0)$ او د Y محور په $(0, OB)$ کې قطع
کوي، نو د \overline{AB} د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

$$\frac{x}{P} + \frac{y}{P} = 1$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

یا:

چې $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړۍ مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا خڅه د l پر خط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه 120° وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $P = 5$ او $\theta = 120^\circ$ دی.

$$x\cos120^\circ + y\sin120^\circ = 5$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5 \quad (\cos120^\circ = -\frac{1}{2}, \sin120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x - \sqrt{3}y + 10 = 0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}}$$

نود l خط میل $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0, \frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالي یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د 30° زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله: (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د X او y دوھ متحوله لري a , b , او c ثابت عددونه دي چې a او b

دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط د عمومي معادله په نامه یادېږي.

۱) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ يا $ax + c = 0$ داده گه مستقیم خط معادله د چې د Y له محور سره موازی وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور خخه $-\frac{c}{a}$ ده.

۲) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي يا $y = -\frac{c}{b}$ چې داده گه مستقیم خط معادله د چې د X له محور سره موازی دي. د X له محور خخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

۳) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

داده گه مستقیم خط معادله د چې میل يې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

۱- د مستقیم خط د عمومي معادلي بدلول په معیاري شکل:

د 0 دی او د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلي په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واروئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{يا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل يې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوي.

۲- د مستقیم خط د عمومي معادلي بدلول د هغه مستقیم خط د معادلي په شکل چې میل او یوه نقطه يې معلومه وي.

د $ax + by + c = 0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه يې $(\frac{-c}{a}, 0)$ ده، نو:

$$y = \frac{-a}{b}(x + \frac{c}{a}) \quad m = \tan \theta = \frac{-a}{b}$$

دریم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلي په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه يې معلومه وي.

حل: د $5x - 12y + 39 = 0$ د مستقیم خط یوه نقطه $(0, \frac{39}{5})$ ده او میل يې

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{دې، نو: } \frac{5}{12}$$

$$y - 0 = \frac{5}{12}(x + \frac{39}{5}) \Rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

3- د عمومي معادلي بدلول د هغه مستقیم خط د معادلي په شکل چې دوي نقطي يې معلومي وي.

هغه خط چې معادله يې $(\frac{-c}{a}, 0)$ او $(0, \frac{-c}{b})$ ده نقطو تېبرېږي.

$$y_1 = 0 \quad x_1 = \frac{-c}{a} \quad y_2 = \frac{-c}{b} \quad x_2 = 0$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{\frac{-c}{b} - 0}{\frac{0 + \frac{c}{a}}{a}}(x + \frac{c}{a}) = \frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x + \frac{c}{a}) = -\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c}(x + \frac{c}{a})$$

$$y = \frac{-a}{b}(x + \frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلي

په شکل ولیکي چې دوي نقطي يې معلومي وي.

حل: د خط $5x - 12y + 39 = 0$ له نقطو خخه تېرىپوي. او $P_1\left(-\frac{39}{5}, 0\right)$ او $P_2\left(0, \frac{39}{12}\right)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$\text{يا} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{x + \frac{39}{5}} = \frac{\frac{39}{12} - 0}{0 + \frac{39}{5}}$$

-4 د يو مستقیم خط د عمومي معادلي بدلول د هغه مستقیم خط د معادلي په شکل چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع نقطي معلومي وي.

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

دواړه خواوي په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

يا

پنځم مثال: د 0 $5x - 12y + 39 = 0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلي ته واپوئ چې له محورونو سره يې د تقاطع نقطي معلومي وي.

$$5x - 12y = -39$$

دواړه خواوي په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39} - \frac{12y}{-39} = 1$$

:

$$\frac{x}{\frac{-39}{5}} + \frac{y}{\frac{39}{12}} = 1$$

په دي معنا چې دا مستقیم خط د X محور د $\left(\frac{39}{5}, 0\right)$ او د Y محور د $\left(0, \frac{39}{12}\right)$ په نقطه کې قطع کوي.

د $3x - 2y = 6$ مسستقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y ، له محورونو سره پیدا کړئ.

۵. د یوه مسستقیم خط د عمومي معادلې بدلوں په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مسستقیم خط نورمال معادله $x \cos \theta + y \sin \theta = P$ ده او عمومي معادله $ax + by = -c$ ده چې دواړه د یوه مسستقیم خط بنودونکي دي، نو د ضربونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوی دي.

$$\frac{a}{\cos \theta} = \frac{b}{\sin \theta} = \frac{-c}{P} = k$$

$$\frac{P}{-c} = \frac{\cos \theta}{a} = \frac{\sin \theta}{b} = \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{a^2} = \frac{\sin^2 \theta}{b^2} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{a^2 + b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} \text{ او } \sin \theta = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

د $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ په معادله کې د $\cos \theta$ او $\sin \theta$ د قيمتونو په ليکلوا سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

$$\frac{ax + by}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{b}{\sin \theta} = k \quad , \quad \frac{a}{\cos \theta} = k$$

او یا

$$k^2 \cos^2 \theta = a^2 \quad , \quad k^2 \sin^2 \theta = b^2 \quad او \quad k \cos \theta = a \quad , \quad k \sin \theta = b \quad : \text{نو:}$$

$$k^2 \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta = a^2 + b^2$$

$$k^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2 + b^2$$

$$k = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

: یا

د معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{ax + by + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}y = -\frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

ددي لپاره چې د p قيمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه د او
که $c = 0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x - 3y + 6 = 0$ معادله په نورمال شکل واروئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \pm \sqrt{13}$ باندې وېشو. ددي لپاره چې بني خوا
مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه باید منفي ونيول شي:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2x - 3y + 6}{-\sqrt{13}} = 0$$
 نو θ په دویمه ناحیه (ریعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول خخه لرو چې 40° ده، نو ددي مستقيم خط نورمال معادله عبارت ده

$$x \cos 123^\circ 40' + y \sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{له:}$$

فعاليت

د $0 - 5x - 12y + 39 = 0$ مستقيم خط معادله په نورمال شکل تبدیله کړئ.

دیوه مستقيم خط نورمال معادله $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ او د مستقيم خط عمومي معادله
ده. د مستقيم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$



1 - د مستقیم خط نورمال معادله $x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ - 7 = 0$ په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط $x \cos 225^\circ + y \sin 225^\circ - 6 = 0$ په عمومي معادله وارپوئ.

3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلي په نورمال شکل وارپوئ.

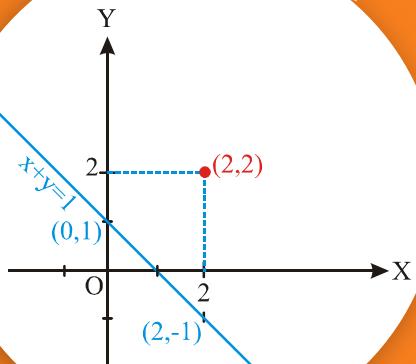
$$15y - 8x + 3 = 0$$

$$2x + 5y - 2 = 0$$

$$2x + 4y + 7 = 0$$

د یوپی نقطي فاصله له یوه مستقيم خط خخه

(Distance of a point from a line)



آياد (2,2) نقطي فاصله د $x + y = 1$ له
خط خخه پيداکولاي شئ؟

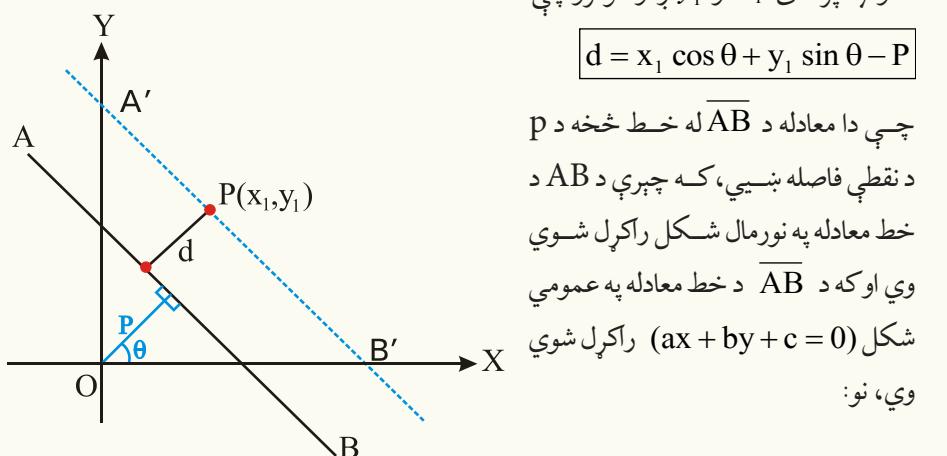
كه د P نقطي فاصله، لكه: خنگه چې په شکل کې ليدل کېږي د \overline{AB} له خط خخه چې د P نقطه پر \overline{AB} واقع نه وي، d فرض کرو (د \overline{AB} خط نه عمود وي او نه افقی)
د P له نقطي خخه د $A'B'$ مستقيم خط له \overline{AB} سره موازي رسم کړئ، په دي حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$
خرنگه چې د $A'B'$ مستقيم خط AB له خط سره موازي دی، نو د $A'B'$ د خط نورمال
معادله عبارت ده له:

$$d = x \cos \theta + y \sin \theta - p \quad \text{يا} \quad x \cos \theta + y \sin \theta - (p + d) = 0$$

خرنگه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $A'B'$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنۍ معادله کې په ترتیب سره د x او y ، پرخای x_1 او y_1 بدو، نول رو چې:

$$d = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - P$$

چې دا معادله د \overline{AB} له خط خخه د p د نقطي فاصله بنسي، که چېږي د AB د خط معادله په نورمال شکل را کړل شوي وي او که د \overline{AB} د خط معادله په عمومي شکل $(ax + by + c = 0)$ را کړل شوي وي، نو:



$$p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{او} \quad \cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

که دا قيمتونه د AB د مستقيم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

د فاصلې په معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمایتو مبداد AB د خط یوې خواته واقع وي، نو د d قيمت منفي کېږي. او که د p نقطه او مبداد AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قيمت مثبت دی. خرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قيمت یې په پام کې ونيسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړۍ مثال: د $(-2,8) P$ نقطې فاصله د $4x + 3y - 11 = 0$ له خط خخه پیداکړئ.
حل: $a = 4$ ، $b = 3$ ، $c = -11$ ده، خرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(-2) + 3(8) - 11|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{|-8 + 24 - 11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعاليت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x - 2y + 7 = 0$ له مستقيم خط خخه پیداکړئ.

د دوو موازي خطونو ترمنځ فاصله:
(Distance between two parallel lines)

د دوو موازي خطونو ترمنځ فاصله پريو ددي خطونو دي یوې نقطې فاصله ده، له بل موازي خط خخه:

دویم مثال: د $2x - 5y + 6 = 0$ او $2x - 5y + 13 = 0$ موازي مستقيمهو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددي موازي خطونو باندې پیداکړو، د مثال په ډول که د $2x - 5y + 13 = 0$

په معادله کې $x = 1$ وي، نو $y = 3$ کېږي.

اوسموند (1,3) نقطې فاصله د $2x - 5y + 6 = 0$ له مستقیم خط خخه د فاصلې د فورمول

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|2(1) - 5(3) + 6|}{\sqrt{(2)^2 + (-5)^2}} = \frac{|2 - 15 + 6|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{7}{\sqrt{29}}$$

يادوونه: د وضعیه کمیاتو له مبدأ خخه د $ax + by + c = 0$ مستقیم خط فاصله د $d = \frac{|C|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ د موافي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

فعاليت

$$d = \frac{3}{2} \quad \text{او} \quad 3x + 2y = 10$$

دریم مثال: د $2x + y + 2 = 0$ او $6x + 3y - 8 = 0$ د مستقیمو موافي خطونو ترمنځ

فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x + y + 2 = 0$ په معادله کې $x = 0$ وي، $y = -2$ کېږي. اوسموند $(0, -2)$ او

$$d = \frac{|6(0) + 3(-2) - 8|}{\sqrt{36 + 9}} = \frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1, y_1)$ نقطې فاصله له یوه مستقیم خط خخه د $d = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - P$

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



1 - د هرو دوو جورو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداکړئ چې معادلي بې په لاندې ډول دي:

$$3x - 4y + 3 = 0 \quad \text{او} \quad 3x - 4y + 7 = 0$$

$$12x + 5y - 6 = 0 \quad \text{او} \quad 12x + 5y + 13 = 0$$

$$x + 2y - 5 = 0 \quad \text{او} \quad 2x + 4y = 1$$

2 - د $P(6, -1)$ نقطې فاصله له $6x - 4y + 9 = 0$ مستقيم خط خخه پيداکړئ.
3 - د $2x + 4y + 5 = 0$ او $3x + 6y - 8 = 0$ موازي خطونو ترمنځ فاصله مساوي ده

:په

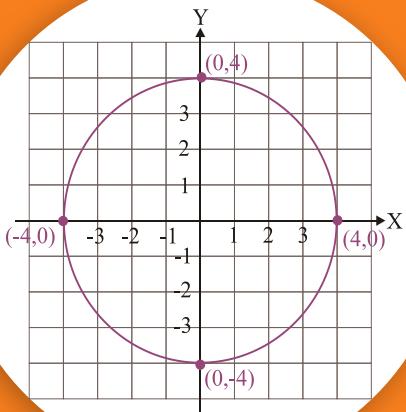
- a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هېڅ یو

4 - د نقطې $(1, 2)$ فاصله د $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 = 0$ مستقيم خط خخه مساوي ده په:
 $a : 2$ $b : 1$ $c : 3$ $d : \frac{1}{2}$

5 - د $(-2, 7)$ نقطې فاصله له $24x + 7y - 2 = 0$ مستقيم خط خخه مساوي ده په:

- a : 0,04 b : $\frac{1}{25}$ c : 4×10^{-2} d) درې واره سم دي:

دایره (Circle)



آیا د هغې دایرې معادله پیدا کولای شئ چې
مرکزې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شعاع
ې 4 واحده وي؟

تعريف

دایره د هغۇ نقطو سېت دى چې لە يوپى ثابتى نقطى خخە يې فاصلې مساوی وي. چې دې ثابتى نقطى
ته د دایرې مرکز (Center) او مساوی فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وايى.

د دایرې معادله (Equation of circle): كە د دایرې مرکز، r د دایرې شعاع
او $(x, y) P$ د دایرې په محیط يوه نقطە وي، د شکل لە مخې د فیشاغورث د قصیپې په اساس لرو

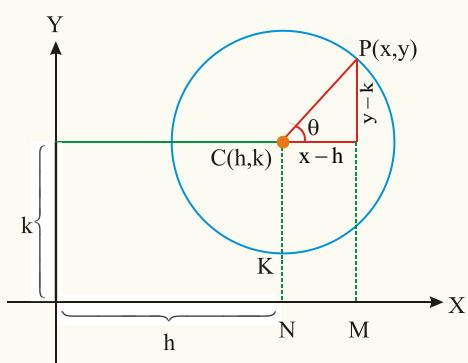
چې:

$$\begin{aligned} (\overline{CP})^2 &= (x - h)^2 + (y - k)^2 \\ (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \quad (\overline{CP} = r) \end{aligned}$$

چې دې معادلى ته د دایرې معیاري معادله وايى. كە د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې وي، نو

پە دې حالت کې $h = k = 0$ دى او د دایرې
معادله: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ يَا
 $x^2 + y^2 = r^2$

ده، او كە $r = 0$ وي داسې دایرې ته نقطوي
دایره (Point circle) وايى.



لومړۍ مثال: د هغې دایرې معادله پیداکړئ چې مرکزیې (3,5) او د شعاع او برداواليې (7) واحده وي.

$$h = -3, k = 5, r = 7 \quad \text{حل:}$$

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 7^2$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$$

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیداکړئ چې مرکزیې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او شعاع یې 3 واحده وي.

د یوې دایرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \quad \text{یا:}$$

که $h^2 + k^2 - r^2 = c$ او $-h = g$ ، $-k = f$ که $h^2 + k^2 - r^2 = c$ فرض شی، نولو چې:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{یا} \quad (x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

چې دی معادلې ته د دایرې عمومي معادله وايې چې مرکزیې $(-g, -f)$ او شعاع یې

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

که $g^2 + f^2 - c > 0$ وي دایره حقيقی ده.

که $g^2 + f^2 - c = 0$ دایره نقطوي ده.

که $g^2 + f^2 - c < 0$ دایره مجاري ده. (دایره وجود نه لري)

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$\text{په معادله کې } h^2 + k^2 - r^2 = c \quad \text{او} \quad -2h = b, -2k = a \quad \text{اعوض کړو لرو چې}$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{چې دا هم د دایرې عمومي معادله ده، خینې وختونه د دایرې}$$

عمومي معادله داسې هم بشودل کړي.

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey - F = 0 \quad \text{په دې چول چې } A = B \quad \text{او هم علامه وي، نو دا هم}$$

ددایرې عمومي معادله ده.

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ د دایرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا شکل $x^2 + (y-k)^2 = r^2$ غوره کوي.

2- او که $k=0$ وي، د دایرې مرکز د X پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا: $(x-h)^2 + y^2 = r^2$.

3- که $k=r$ وي، دایره د X پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-h)^2 + (y-r)^2 = r^2$ ده.

4- او که $h=r$ وي، دایره د Y پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-r)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ده.

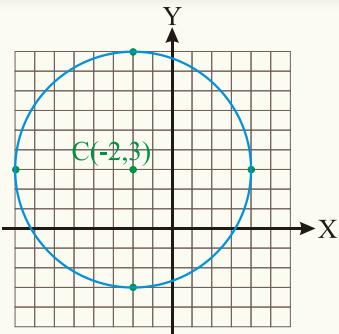
5- یوه دایره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا خخه تېربېري چې د $h^2 + k^2 = r^2$ رابطه صدق کړي.

6- یوه دایره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله یېدا شکل ولري.

دویم مثال: د $x^2 + (y-5)^2 = 10$ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی.
د $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$ دایره د X له محور سره مماس ده.
د $(x+3)^2 + y^2 = 9$ دایرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعالیت

په شکل کې وښیاست چې د دویم مثال، د لومړۍ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دویمه دایره د X له محور سره مماس ده او د دویمه دایرې مرکز د X پر محور واقع دی.



دریم مثال: د هغې دایرې عمومي او معیاري معادله پیدا کړئ چې د مرکز وضعیه کمیات یې (3, -2) او شعاع یې 6 واحده وي او هم دا دایره رسم کړئ.
(د دایرې معیاري معادله)
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 6^2$

(د دایرې عمومي معادله)

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$$

څلورم مثال: وبنیاست چې $5x^2 + 5y^2 + 24x + 36y + 10 = 0$ دیوې دایرې معادله ده او هم ددې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع او بردوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وپشو، نولو چې:

$$x^2 + y^2 + \frac{24}{5}x + \frac{36}{5}y + 2 = 0$$

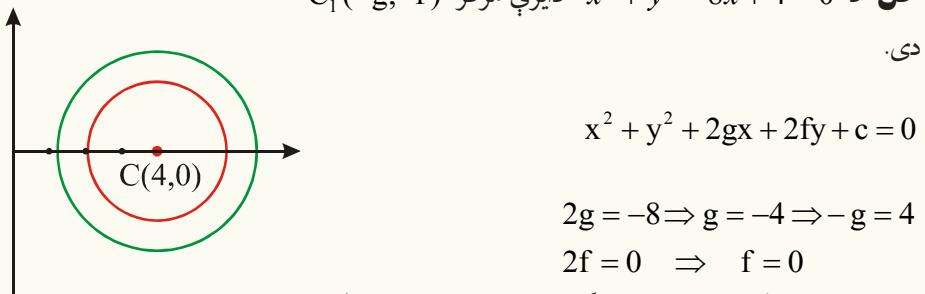
$$\text{چې } c = 2 \text{ او } f = \frac{12}{5}, g = \frac{12}{5} \text{ ده.}$$

$$(-g, -f) = \left(\frac{-12}{5}, \frac{-18}{5} \right) \text{ د دایرې مرکز.}$$

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{324}{25} - 2} = \sqrt{\frac{418}{25}} = \frac{\sqrt{418}}{5} \text{ او د دایرې شعاع:}$$

پنځم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$ له دایرې سره متحد المركز (Conceteric) وي او د $x + 2y + 6 = 0$ له مستقیم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$ دایرې مرکز



$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$2g = -8 \Rightarrow g = -4 \Rightarrow -g = 4$$

$$2f = 0 \Rightarrow f = 0$$

د $C_1(4,0)$ نقطه د هغې دایرې مرکز هم دی چې غواړو معادله پیدا کړو، نو د C_1 وضعیه کمیات د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو $(x-4)^2 + (y-0)^2 = r^2$ چې:

ددې لپاره چې د C_2 د دایرې شعاع پیدا کړو، نو خرنګه چې دایرہ د $x + 2y + 6 = 0$ له مستقیم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دی مستقیم خط خخه د دایرې شعاع ده

$$d = r = \frac{|4(1) + 2(0) + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{یا} \quad r^2 = \frac{100}{5} = 20$$

نو ددې دایرې معادله عبارت ده له: $(x - 4)^2 + y^2 = 20$ یا $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$

شپږم مثال: د هغې دایرې معادله پیداکړئ چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو خخه تېربېږي او

مرکزې د $0 = 4x + y - 16$ پر مستقیم خط پروت وي.

حل: که د ایرې مرکز $C(h, k)$ وي، نو دایرې معادله $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ده، خرنګه

چې مرکزې د $0 = 4x + y - 16$ پر مستقیم خط واقع دی، نو $4h + k = 16$ دی.

$$|AC|^2 = |BC|^2 \quad \text{او} \quad |AC| = |BC| \quad \text{او} \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(h - 4)^2 + (k - 1)^2 = (h - 6)^2 + (k - 5)^2$$

$$4h + 8k = 44$$

$$\underline{\pm 4h \pm k = \pm 16}$$

$$7k = 28$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad h = 3$$

$$r^2 = (3 - 4)^2 + (4 - 1)^2 = 10$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$$

چې دا د غونبنتل شوې دایرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دایرې معادله پیداکړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو خخه تېربېږي او د $y - 1 = 0$ له خط سره مماس وي.

اوم مثال: د هغې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع او بردوالی پیداکړئ چې معادله یې

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 9 = 0$$

حل:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 4y - 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + (-2^2) - (-2^2) + y^2 + 4y + 2^2 - 2 - 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 17$$

نو مرکزی بی (2-2) او شعاع بی $r = \sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکزی بی د وضعیه کمیاتو په مبدأکې واقع وي له $x^2 + y^2 = r^2$ څخه

ubarat ده او که مرکزی بی د وضعیه کمیاتو په مبدأکې واقع نه وي او (h, k) بی مرکز وي: معادله

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{يا} \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\text{او} \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{يا} \quad \text{ده}.$$

پونتنې

1 - د هغې دایرې معادله پیداکړئ چې:

a: د مرکز مختصات بی (5,-2) او $r = 4$ وي

b: د مرکز مختصات بی $(\sqrt{2}, -3\sqrt{3})$ او شعاع بی $2\sqrt{2}$ وي

c: مرکز بی $(0,0)$ او د $(1,2)$ له نقطې څخه تېربېږي.

d: د مرکز مختصات بی $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېربېږي.

e: د مرکز مختصات بی $(-6,8)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدأ څخه تېربېږي

2 - لومړی وبنياست چې لاندې راکپل شوی معادله د دایرې معادله دي، بیا بی د مرکز وضعیه

کمیات او د شعاع او بدوالی پیداکړئ.

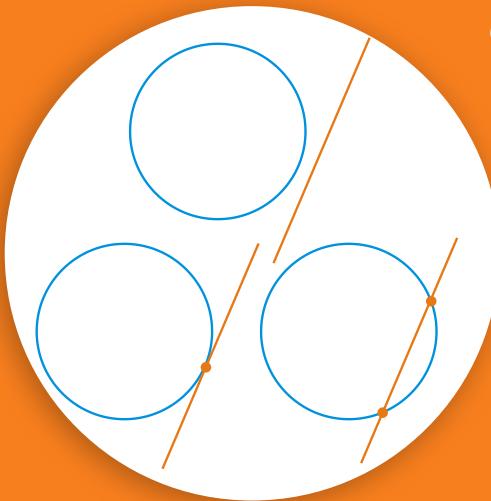
$$x^2 + y^2 + 12x - 10y = 0 \quad , \quad 5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0 \quad , \quad 3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$$

د یو مستقیم خط حالتونه له یوی

دایرې سره



$$کولای شی چې ووایاست د 0 = 4y - 3x + 20$$

$$\text{مستقیم خط د } x^2 + y^2 = 25 \text{ دایرہ په خو}$$

نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ دایرې معادله په پام کې نیسو او غواړو چې د یو مستقیم خط حالت له دایرې سره وڅېرو چې آیا دا مستقیم خط دایرہ په دوو نقطو کې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایرہ مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایرہ نه قطع کوي.

د X او یا y قیمت د مستقیم خط له معادلې خخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجھوله معادله په لاس راخي.

1) که په دې معادله کې $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ وي، مستقیم خط دایرہ په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ مستقیم خط دایرہ نه قطع کوي.

لومړۍ مثال: آیا د $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ د مستقیم خط د $2x + y + 7 = 0$ دایرہ قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې خخه $2x - 7 = y$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2 + (2x - 7)^2 - 8x - 2(2x - 7) + 12 = 0$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \text{یا}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دی له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتو نه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نولرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2 \cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3, -1)$ او $(5, 3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آيا د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ مستقیم خط د

دایري سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلي خخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایري په

معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایري سره مماس دی او د تماس د نقطې

وضعیه کمیات یې عبارت دی له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

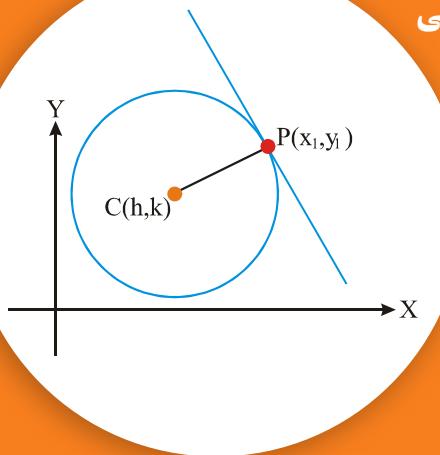
$$x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

نو مستقیم خط د $(2, 1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آيا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایري سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او يا دا چې دایره نه قطع کوي؟

د مماس معادله او د مماس اوبردوالي



آيا د هغه مماس معادله پيدا کولای شى چې د
 $x^2 + y^2 = 13$ په نقطه کې د $P(-3, -2)$
 په دائريه مماس وي؟

که يو مستقيم خط پر هغه دائريه چې مرکزېي $C(h, k)$ او د $p_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر دائريه
 مماس وي، نو د شعاع ميل مساوي دي په:
 $m = \frac{k - y_1}{h - x_1}$
 او خرنگه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس ميل له
 $- \frac{h - x_1}{k - y_1}$ سره
 مساوي دي.

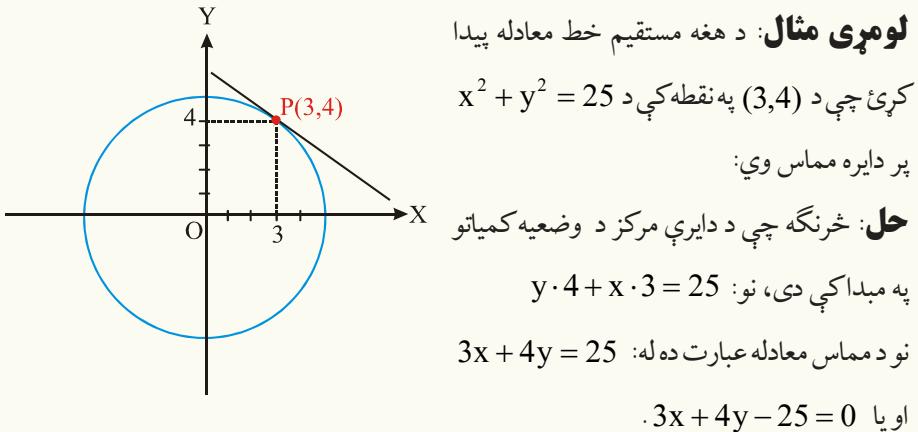
خرنگه چې د مستقيم خط يوه نقطه (x_1, y_1) او ميل يې $\frac{h - x_1}{k - y_1}$ د دی.
 د مستقيم خط د $y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلي په نظر کې نيو لو سره لرو چې:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر دائريه مماس دي.
 او که د دائريې مرکز د وضعیه کمياتو په مبدأ کې وي، نو په دي حالت کې $h = k = 0$ دي او د
 مماس معادله دا شکل اختياروي.

$$yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{يا} \quad y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$\text{خرنگه چې } yy_1 + xx_1 = r^2, \text{ نو د مماس معادله } x_1^2 + y_1^2 = r^2 \text{ ده.}$$



دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایري مماس دی چې مرکز بې $(1,2)$ دی.

$$h = 1 \quad k = 2$$

$$x_1 = 3 \quad y_1 = 5$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$m = -\frac{1 - 3}{2 - 5} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$2x + 3y = 21$$

$$2x + 3y - 21 = 0$$

یا:

د مماس اوږدوالي

که د $(P_1(x_1, y_1))$ له نقطې خنځه چې له دایري د باندې واقع ده، د

پر دایري د P_1T . مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماست نقطه د دایري له مرکز (C) سره

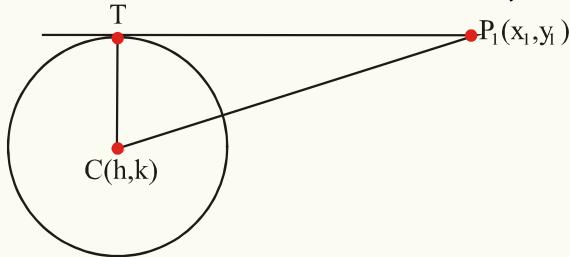
ونسلوو، دفيثاغورث د قضيې په اساس د P_1TC په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

$$(P_1C)^2 = (P_1T)^2 + (CT)^2$$

$$(P_1 T)^2 = (P_1 C)^2 - (CT)^2 \quad \text{يا}$$

له بلې خوا: $\overline{CT} = r$ او $(P_1 C)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$

$$P_1 T = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \quad \text{دي په:}$$



په ياد ولري چې د مماس په امتداد د مماس د اوبردوالی د پيداکولو لپاره د دايري له کومې خارجي نقطې خخه د x او y قيمتونه د دايري په معادله کې وضع کوو.

درېم مثال: د $(-5, 10)$ له نقطې خخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دايره د مماس اوبردوالی پيداکړئ.

حل: د معادلي دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$$

فعاليت

د هغه مماس اوبردوالی پيداکړئ چې د $(-2, 2)$ له نقطې خخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دايره باندي مماس وي.

د دايري په معادله کې د مستقيم خط ديو مجھول په وضع کولو سره، یوه دويمه درجه یو مجھوله معادله په لاس رائخي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مستقيم خط دايره په دوو

نقطوکې قطع کوي اوکه $\Delta < 0$ وي خط پر دایره مماس دی اوکه $\Delta > 0$ وي، مستقیم خط دایرە نه قطع کوي.

د هغه مستقیم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دایرە چې مرکزې بې دی مماس وي، عبارت د له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدأکې وي، نود مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$ يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ د مماس اوبردوالى د $P(x, y)$ له نقطې خخه چې د دایرې د باندې واقع ده او د دایرې مرکز (h, k) دی مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2}$$

پوشتنې

1 - د لاندې مستقیو خطونو حالتونه له دایرو سره چې معادلې په لاندې ډول راکړل شوي دي وڅېږي.

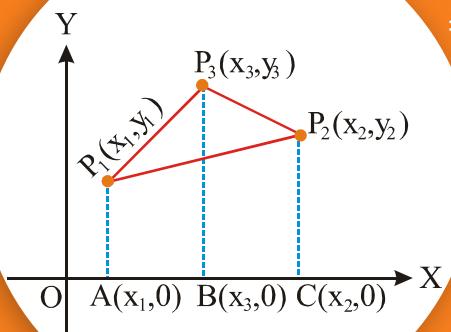
د دایرو معادلې	د مستقیمو خطونو معادلې
$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$	$3x - 2y + 3 = 0$
$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$	$x - y - 1 = 0$
$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$	$5x - y = 1$

2- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې په $(-3, 2)$ نقطه کې د $(-2, -3)$ نقطې خخه د له دایرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوبردوالى پیداکړئ چې د $(-5, 4)$ له نقطې خخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دایرە مماس رسم شوي وي

4- د هغه مماس اوبردوالى پیداکړئ چې د $(-5, -2)$ له نقطې خخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دایرە مماس رسم شوي وي.

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي



آیا د هغه مثلث مساحت پیدا کولای شی
چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$
وي؟

که چې په شکل کې ليدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1 A}$ ، P_3 او P_2 لکه چې په شکل کې ليدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_3 B}$ او $\overline{P_2 C}$ ،
د ذونقې مساحت $= P_1 P_2 P_3$ دوزنقې مساحت $+ P_1 A B P_3$ د مثلث مساحت
 $- P_1 A C P_2$

لکه خرنګه چې پوهېړو:

$$\text{د ذونقې مساحت} = (\text{د موازی ضلعو د نیمایې مجموعه}) \times (\text{د موازی ضلعو ترمنځ فاصله})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{P_1 P_2 P_3} &= \frac{1}{2}(|P_1 A| + |P_3 B|)(|AB|) + \frac{1}{2}(|P_3 B| + |P_2 C|)(|BC|) \\ &\quad - \frac{1}{2}(|P_1 A| + |P_2 C|)(|AC|) \\ &= \frac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)] + \frac{1}{2}[(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)] - \frac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)] \\ &= \frac{1}{2}(x_3 y_1 + x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_2 y_2 \\ &\quad - x_3 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + x_1 y_1 + x_1 y_2) \\ &= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \end{aligned}$$

مثال: که چېږي $C(3,1)$ او $B(5,-6)$ ، $A(4,-5)$ د ډیوہ مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل: $x_1 = 4$ ، $y_1 = -5$ ، $x_2 = 5$ ، $y_2 = -6$ $x_3 = 3$ $y_3 = 1$

$$\begin{aligned} \text{مثلاً } \triangle ABC \text{ د مساحت } &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [4(-6 - 1) + 5(1 + 5) + 3(-5 + 6)] \\ &= \frac{1}{2} (-28 + 30 + 3) = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

□

که د $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ ، $P_3(x_3, y_3)$ د مثلث رأسونه وي، نو

د مثلث مساحت د له فورمول خخه
په لاس راخي.

پوښتني

- 1 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.
- 2 - که د ډیوہ مثلث رأسونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.
- 3 - د هغه خلور ضلعي مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

د څېرګي لنډيز:

• د وضعیه کمیاتو په مستوی کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصه یې صفر او

کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصه یې صفر ده

د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ او $P(x_1, y_1)$ د دوونقطو تر منځ فاصله د $Q(x_2, y_2)$

له فورمول خخه په لاس راخي.

• د نقطې وضعیه کمیات چې د $\frac{P_1 P_2}{\overline{P_1 P_2}}$ قطعه خط د r په نسبت و بشی عبارت دي له:

$x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ $\square y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$
ubarat di leh:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\square y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

r مثبت او که خارجائي و بشی، نو r منفي دي.

• د یو مستقيم خط ميل چې د (P_1, y_1) او (x_2, y_2) د نقطو خخه تپربري د

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول خخه په لاس راخي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y د

میل چې د X د محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له

محور سره موازي وي،تعريف شوي نه دي. که د یوه مستقيم خط د ميل زاویه حاده وي، ميل یې

مثبت او که منفرجه وي ميل یې منفي دي.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له:

$$y = mx + b$$

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او یوه نقطه یې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوي نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ او د هغه مستقيم خط معادله چې } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ده.

- د یوه مستقیم خط نورمال معادله $x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax + by + c = 0$ ده.

- د (x_1, y_1) د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط خخه د $d = x \cos\theta + y \sin\theta - P$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ياد ده فورمول خخه په لاس رائحي.

- د هغې دایري معادله چې مرکزې د وضعیه کمیاتو په مبداکې واقع وي له $x^2 + y^2 = r^2$ شخه عبارت ده او که مرکزې د وضعیه کمیاتو په مبداکې واقع نه وي او (h, k) يې مرکزو،

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{او یا} \quad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

- د دایري په معادله کې د مستقیم خط د یو مجھول په وضع کولو سره، یوه دویمه درجه یو مجھوله معادله په لاس رائحي، که په دې معادله کې $0 < \Delta$ وي، مستقیم خط دایرہ په دوو نقطوکې قطع کوي او که $0 = \Delta$ وي خط پر دایرہ مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، خط دایرہ نه قطع کوي.

- د هغه مستقیم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دایرہ چې مرکزې (h, k) دی مماس وي عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

او که د دایري مرکز د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي، نو د مماس معادله يې:

$$\text{له } P(x_1, y_1) \quad \text{یا } yy_1 + xx_1 = r^2 \quad \text{یا } yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$$

نقطې خخه چې له دایري د باندې واقع ده او مرکزې (h, k) دی، مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2}$$

- - که د یوه مثلث رأسونه $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ او $P_3(x_3, y_3)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_1(x_1, y_1)$ وي، نو د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ له فورمول خخه په لاس رائحي.

د خپرگي پونشي:

1- د لاندي هري جورپ نقطو ترمنج فاصله پيداکري او همدرانگه ددي مستقيمو خطونو د تنصيف د نقطو وضعیه کمييات پيداکري چي د A او B له دو نقطو خخه تبرپري.

$$A(3,1), B(-2,-4) \quad A(-8,3), B(2,-1)$$

$$A(-\sqrt{5}, -\frac{1}{3}), B(-3\sqrt{5}, 5)$$

2- كه $C(h,-2)$ او $B(0,2)$ ديوه قايم الزاويه مثلث راسونه وي او د \hat{A} وي، د (h) قيمت پيداکري.

3- د نقطي وضعیه کمييات پيداکري، په داسي حال کي هغه مستقيم خط چي د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو خخه تبرپري د $\frac{AP}{PB} = 2$ په نسبت و بشي.

4- د هغه مستقيم خط معادله پيداکري چي ميل يي (-2) او د Y محور په 3 کي قطع کري.

$$x = \sqrt{7} \text{ او } y = -\sqrt{7}$$

5- د محور ميل مساوي دي په:

a) -1 b) 1 c) 0 d) شوي نه دي

7- ديوه مستقيم خط ميل $m = \frac{2}{3}$ دی، دهغه خط ميل چي پردي خط عمودي، مساوي دي په:

$$a) \frac{2}{3} \quad b) -\frac{2}{3} \quad c) \frac{3}{2} \quad d) -\frac{3}{2}$$

8- د هغه مستقيمو خطونو ميل پيداکري چي د لاندي راکپل شو نقطو له جورپ خخه تبرپري.

$$(4,6) \text{ او } (2,7) \quad (3,-2) \text{ او } (5,11) \quad (4,8) \text{ او } (-2,4)$$

9- د $4x - y + 2 = 0$ او $4x - 3y + 1 = 0$ مستقيم خطونه:

a) موازي او نه عمود دي b) عمود دي c) نه موازي او نه عمود دي

10- د $3x - 4y + 7 = 0$ او $3x - 4y + 3 = 0$ مستقيمو خطونو ترمنج فاصله پيداکري.

11- د هغه مستقيم خط معادله پيداکري چي د $(-4,7)$ له نقطي تبرشي او د $2x - 7y + 4 = 0$ له مستقيم خط سره موازي وي.

- 12 - د نقطي فاصله د $6x - 4y + 9 = 0$ له مستقيم خط خخه پيداکړئ.
- 13 - د نقطي وضعیه کمیات په داسې حال کې پيداکړئ چې $\frac{P_1}{P_2}$ مستقيم خط چې د $P_1(2, -5)$ او $P_2(6, 3)$ له نقطو خخه تېربېري د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووبشي.
- 14 - د لاندي مستقيمو خطونو معادلي نورمال شکل ته واروئ.
- $$2x + 5y - 2 = 0 \quad 2x - 3y + 6 = 0$$
- 15 - د هغه مستقيم خط ميل چې د $(4, 0)$ او $(0, -4)$ له نقطو خخه تېربېري مساوي دي په:
- a) 1 b) -1 c) 0 d) تعريف شوي نه دي
- 16 - د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې نورمال او بدواولي یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د 30° زاویه جوروسي.
- 17 - د هغه مثلث مساحت پيداکړئ چې راسونه یې $A(2, 3)$ ، $B(-1, 1)$ او $C(4, -5)$ وي.
- 18 - د هغه مثلث مساحت چې راسونه یې $A(1, 4)$ ، $B(2, -3)$ او $C(3, -10)$ دي مساوي دی په: دايرې سره پيداکړئ.
- a) 1 b) 2 c) 0 d) هېڅ يو
- 19 - د مستقيم خط د تقاطع نقطي د $x + 2y = 6$ او $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 39 = 0$ له دايرې سره پيداکړئ.
- 20 - د هغې دايرې معادله پيداکړئ چې د $B(2, -1)$ ، $A(1, 1)$ او $C(3, -2)$ له نقطو خخه تېربېري.
- 21 - د هغې دايرې معادله پيداکړئ چې د $A(-1, 3)$ او $B(0, 1)$ له نقطو خخه تېربېري او مرکز یې د $4x - 3y - 3 = 0$ پر مستقيم خط واقع وي.
- 22 - د هغې دايرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع او بدواولي یې پيداکړئ.
- 23 - د هغې دايرې معادله پيداکړئ چې د $A(1, 4)$ او $B(5, 6)$ له نقطو خخه تېربېري او مرکز یې د $4x + y - 16 = 0$ پر مستقيم خط باندې واقع وي.

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

a) متساوي الساقين دی b) متساوي الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

a) متساوي الاضلاع دی b) متساوي الساقين دی

26 - که $(-8,4)$ او $P(2,-1)$ وي د A نقطې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د

PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و و بشي.

27 - د $x^2 + y^2 = 5$ د تفاطع نقطې له $x - y + 1 = 0$ دایرې سره پیدا

کړئ.

28 - که د $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ مستقیم خط د $x + ay - 5 = 0$ پر دایرہ مماس

وي، د a قيمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو خخه تېربېږي او د $y - 1 = 0$ له

مستقیم خط سره مماس وي، عبارت د له:

$$a) x^2 + y^2 - 4x = 0 \quad b) x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad c) x^2 + y^2 + 2x = 0$$

30 - هغه دایرہ چې معادله یې $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 14 = 0$ ده:

a) حقيقي ده b) نقطوي ده c) موهمي ده

31 - هغه دایرہ چې معادله یې $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ ده:

a) حقيقي ده b) نقطوي ده c) موهمي ده

32 - که $(A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د \overline{AB} د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - که د یوه مثلث رأسونه $(A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وبنیاست چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وبنیاست چې د مستطیل $D(a,b)$ او $C(0,b)$ ، $B(a,0)$ ، $A(0,0)$ د یوه مستطیل رأسونه دی

او هم وبنیاست چې د مستطیل د قطرنو او بدوا لى سره مساوی دی.

35 - وبنیاست چې $C(9,3)$ او $B(6,2)$ ، $A(3,1)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

36 - د هغه مستقيمو خطونو معادلي پيداکړئ چې د لاندي هروجورو له نقطو خخه تېربېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(-1,-3)	(2,-1)	(-2,-1)	(3,-4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(-2,0)

37 - د هغه مستقيم خط معادله چې د (5,8) او (-1,10) له نقطو خخه تېربېږي عبارت ده له:

$$a: \quad y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$$

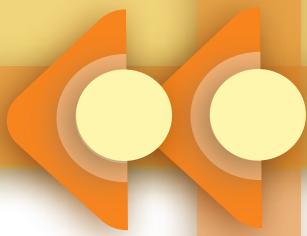
$$b: \quad y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$$

$$c: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$$

d: درې واپه سم دي

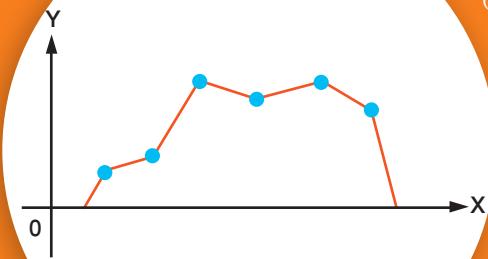


اتم خپرگی
احصائیه





د فریکونسی خو ضلعي گراف (Frequency Polygon graph)



مخامنځ شکل په پام کې ونيسي، آيا کولای شئ د راکړل شوي منحنۍ لاندې مساحت پيدا کړئ؟
آيا ويلاي شئ چې تر منحنۍ لاندې مساحت له
خه شې سره برابر دي؟

فعاليت

د فریکونسیو مخامنځ جدول په نظر کې ونيسي.

کلاسونه	د کلاس (صنف) مرکز	فریکونسی
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لوړۍ مختصې او اړوندې فریکونسی یې د دویمې مختصې په حيث د مرتبو جورو په شکل په نظر کې ونيسي.
- د دې مرتبو جورو موقعیت د قاییمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وتاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوی کې له دې مرتبو جورو خخه په لاس راخي، سره ونبسلوئ.
- آيا کولای شئ چې د دې گراف لاندې مساحت پيدا کړئ؟
- د X پر محور د گراف دواړو خواوو ته $(8.5, 0)$ او $(38.5, 0)$ نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلې گراف د فریکونسی جدول له مستطیلې گراف سره یوڅای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحنۍ لاندې مساحت سره پرته کړئ.
- په خو ضلعي گراف کې د هر کلاس مرکز پر افقېي محور او د هر کلاس مطلقه فریکونسی یا نسبې

فریکونسیو پر عمودی محور بنودل کېرى، دکلاس مرکز (منځنی نقطه) او دکلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوی کې یوه نقطه ټاکل کېرى چې عرض یې دکلاس مرکز او اوبردوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول دکلاسونو په شمېر په مستوی کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راخي. که دکلاسونو په اول او اخر کې دوي نوري $(x_1 - c, 0)$, $(x_n + c, 0)$ اختياري نقطې زیاتې کړئ، خرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندیني سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو خخه یو گراف په لاس راخي چې د فریکونسی خو ضلعی گراف نومیرې.

مثال: د لاندې جدول د دیتا (Data) مستطيلي (هستوگرام) او د فریکونسیو خو ضلعی گرافونه یې رسم کړئ.

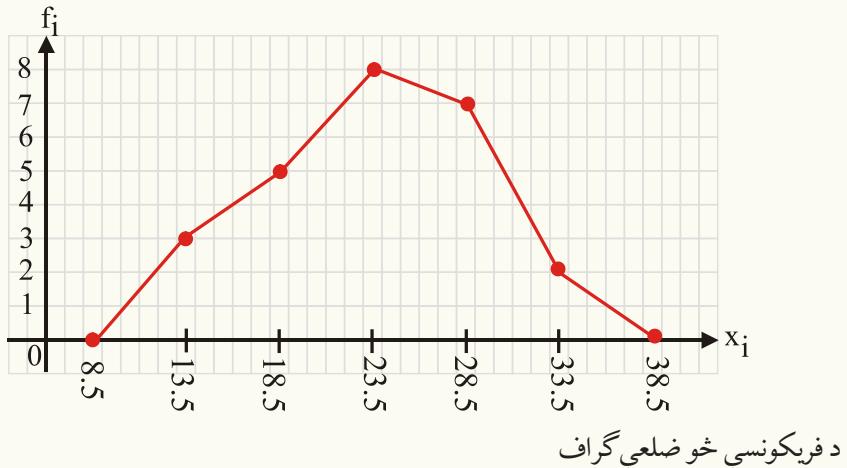
دکلاسونو حدود	= CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسی	= f_i	3	5	8	7	2
دکلاسونو مرکز	= X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېرو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوو اختياري نقطې په لاس راپو، نو:

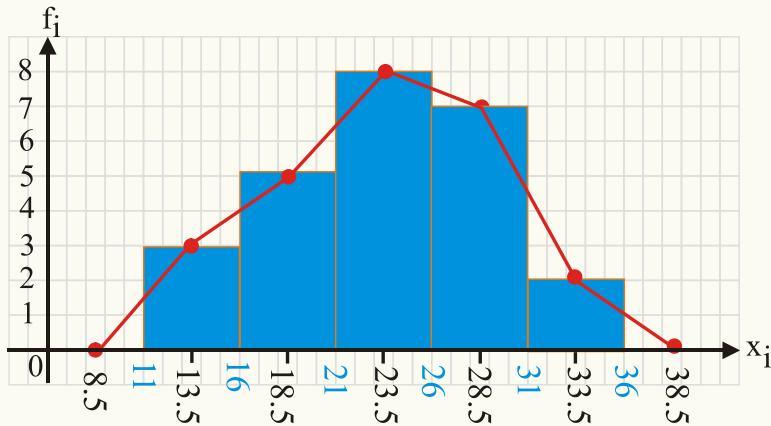
$$(x_1 - 5, 0) = (13.5 - 5, 0) = (8.5, 0)$$

$$(x_n + 5, 0) = (33.5 + 5, 0) = (38.5, 0)$$

ددې نقطو $(0, 8.5)$ او $(38.5, 0)$ په اضافه کولو سره گراف رسموو:



مستطيلي گراف د فريكونسي خو ضلعي گراف سره:



له پورتني گراف خخه ليدل کېږي چې:

- د فريكونسيو خو ضلعي گراف راسونه تر مطالعې لاندې د فريكونسيو له جدول د اړونده مستطيل د پورتني ضلعي منځني نقطه سره واقع دي.
- د فريكونسيو خو ضلعي گراف د لاندې سطحې مساحت د مستطيلي گراف له مساحت سره برابر دي.
- د نسبي فريكونسيو خو ضلعي گرافونه زيات د متصلو ډیتاوو (Data) له پاره کارول کېږي.

1 - د نهم اوسم ټولگيو د 24 زده کونکو د تې لوروالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوي دي.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنى ډيتا (Data) لپاره د فريکونسي يو جدول ترتيب کړئ. ډيتا (Data) په شپږو طبقو ووبشي، ددي ډيتا (Data) د بنودلو لپاره کوم ډول ګراف بنه دي، د فريکونسيو خو ضلعي ګراف رسم کړئ.

د ساقی او پانی گراف



مورد د عددونو په نپی کې ژوند کوو، هر تن
د خپل هیواد د ټولنې د یو غړی په حیث یوه
خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د
اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره خه
شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنې؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نوبو پیدا شوو ماشومانو د تې لوروالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوي دي، راکړل شوي دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی دیتا (Data) له کوچني عدد خخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.
- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

- له 0 تر 9 بوري رقمونه هر یو رقم خو واري تکرار شوي دي.
پورتنی رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0		
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
7	7	7	
8	8		
9	9	9	9

• که د عددونو پورتني شکل د 90° زاوې په اندازه کينې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دي؟

دیتا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پانې ګراف په نامه یادېږي. او که دې ګراف ته د 90° زاوې په اندازه کينې خوا ته دوران ورکړو، ميله یې ګراف لاس ته راخي. د مثال په ډول که دیتا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پانې په حیث ولیکو.

د ساقې او پانې ګراف د هغۇ ډیتا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولو کوچنی ډیتا (Data) ترمنځ توپیر یې لېږوي، مناسب دي.

لومړۍ مثال: د کتابونو په یو پلورنځی کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دي، ددي ډیتا (Data) د ساقې او پانې ګراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: بشکاره ده چې د ډیتا (Data) د کينې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسوسو. او د هري څانګه اړونده ډیتا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راخي.

ساقه	پانې					
1	0	1	5			
2	3	7	8			
3	8	8	9	9		
4	0	1	4	5	6	6
5	2	7	8			
6	5					

که د کتاب مخ ته د ساعت د سنتی حرکت په مخالفه خواکې د 90° زاویې په اندازه دوران ورکړو.
د اگراف د ميله یي ګراف په شکل بدلېږي چې په لاندې ډول یې ليکلای شو.

6		6
5		6
4		9 5
3	5 8 9 4 8	
2	1 7 8 1 7	
1	0 3 8 0 2 5	
	1 2 3 4 5 6	

دویم مثال: درياضي په یوه امتحان کې لاندې نتیجې له زده کوونکو خخه پلاس راغلي دي، ددي
دیتا لپاره د ساقې او پانې ګراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

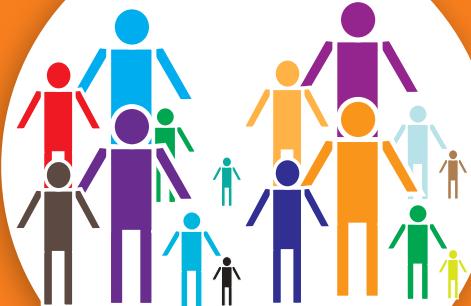
حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پانې د ترسیم لپاره له یوویزو رقمونو خخه استفاده
کړو:

ساقه	پانې
2	5
3	
4	5 6
5	0 0 0 5 5 5 5 7 8 8
6	0 0 2 5 7
7	2

1- د لاندي چيتا (Data) لپاره د ساقې اوپانې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

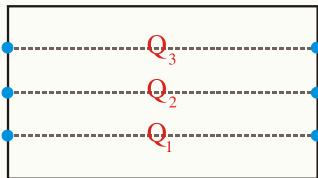
پاملرنه: د ساقې اوپانې د ګراف د بېودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112 په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل ليکو.



په مخامنځ شکل کې که دا د خالکو ټولنه نظر د دوى د تې د لوروالي په نسبت په خلورو مساوي برخو ووبشل شي، هره برخه بې په کوم نامه يادوي؟

فعاليت

مخامنځ شکل یو مستطيل دی چې د Q_3, Q_2, Q_1 او خطونو په واسطه په خلورو مساوي برخو ووبشل شوي دي.



- د مستطيل د مساحت خو فيصده مساحت د Q_1 د خط لاندي، خو فيصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- د مستطيل خو فيصده مساحت د Q_2 تر خط لاندي او خو فيصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطيل خو فيصده مساحت د Q_3 تر خط لاندي او خو فيصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډیتا په خلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لوړۍ ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وايی او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره بشودل کېږي.

لوړۍ ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیتا له هغې لاندي او 75% ډیتا له هغې پورته واقع وي. دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیتا له هغې لاندي او 50% ډیتا له هغې پورته واقع وي. دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیتا تری لاندي او 25% ډیتا بې له پاسه واقع وي.

که ډیتا (Data) په صعودي دول ترتیب کړو، د ډیتا (Data) میانه د Q_2 سره مساوي لوړنې نیمایي ډیتا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمه نیمایي میانه له Q_3 سره مساوي ده. د ریعد پیدا کولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونسی.

- دیتا (Data) په سعودی چول ترتیب کړئ.
 - ترتیب شوی دیتا له (1) خخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
 - د P ام موقعیت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راخي.
- $$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

د ریعي د موقعیت په اساس، د ریعي مقدار وټاکنے.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي دیتا (مشاهدی) په لاندې چول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لوړۍ او دریمې ریعي خایونه وټاکنے.

د لوړۍ او دریمې ریعي مقدارونه پلاس راوري.

1 2 3 4 5 6 د دیتا شمېره:

80 85 90 100 120 140 دیتا :

د لوړۍ او دریمې ریعي خایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لوړۍ او دریمې، ریعي مقدارونه مساوی دي په:

$Q_1 = 85$

$Q_3 = 120$

پوښتنې

فرض کړئ په لاس راغلي دیتا په لاندې چول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لوړۍ او دریمه ریعي (خلورمې) پیدا کړئ.
- له میانې تر مخه عددونه ولیکي.
- له میانې وروسته عددونه په لاس راوري.

صندوقچه يې گراف

ديوپ تختي کاغذ له خلورو-کنجونو خخه خلور
مربعگانې چې هره ضلع يې 5cm وي، جلا
کړئ، بیا د کاغذ خندي له پورته خواخنه قات
کړئ.

کوم شکل چې په لاس راخي، له خه شي سره
ورته والي لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورخو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت
شوي دي.

11	10	15	23	14	27	16	17	24
28	13	31	31	18	25	26	19	

• ميانه يې پيدا کړئ.

• هغه عددونه ولیکي چې د ميانې تر مخې نيمائي کې پرا انه دي.

• ددي عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.

• هغه عددونه ولیکي چې د ميانې په وروسته نيمائي کې پرا انه دي.

• ددي عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.

• دويمه ربع (خلورمه) يا Q_2 کوم عدد دي؟

صندوقچه يې یا جعبه یې گراف: دا یو داسې تصویری گراف دی چې د دیتا (Data) تیت
والی د نورو گرافونو په نسبت بشه روښانه کوي، د اگراف د لاندېنيو اندازو پر بنیاد د دیتا (Data)
گراف بنکاره کوي.

ج) ميانه

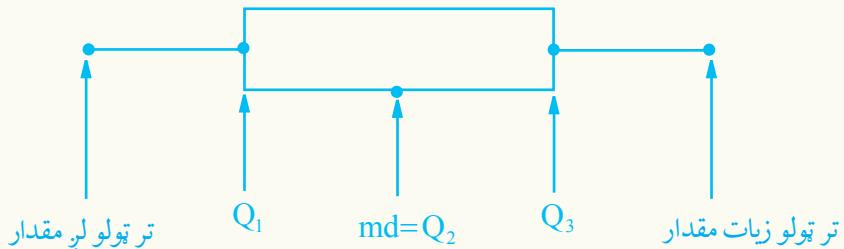
ب) لوړنۍ ربع (خلورمه)

الف) تر ټولو کوچنۍ دیتا

هـ) تر ټولو لویه دیتا

د) درېمه ربع

صندوقچه يې گراف د ریعو او له زیات نه زیات او کم تر کمہ دیتا (Data) بنودونکی دی.



کولای شود صندوقچه يې گراف د رسمولو پراونه په لاندې ډول ولیکو:

الف) تر تولو کوچنۍ دیتا پیدا کړئ. ب) تر تولو لوبه دیتا پیدا کړئ.

د) لوړۍ ربع پیدا کړئ ج) ميانه پیدا کړئ

ه) دريمه ربع پیدا کړئ و) گراف رسم کړئ.

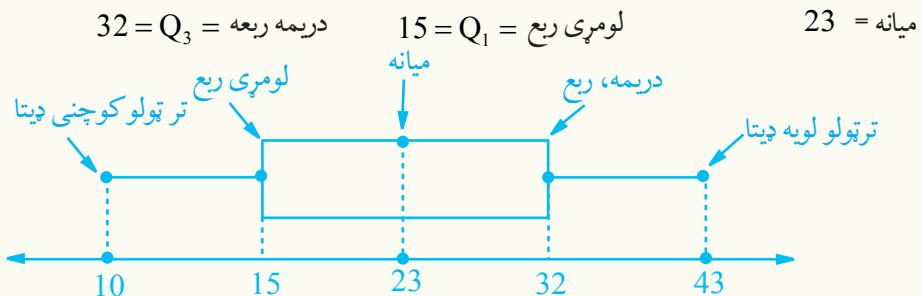
مثال: که په یو سنارکې د 15 ورخو په موده کې د ترافیکي پیښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي
وی، صندوقچه يې گراف يې رسم کړئ.

12	10	15	23	14	27	16	34
41	43	32	18	25	31	19	

حل: پورتنۍ دیتا په ترتیب لیکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر تولو کوچنۍ دیتا = 10 10 = 43



پورتنۍ گراف صندوقچه يې گراف دی چې 50% دیتا د صندوق په داخل کې (د لوړۍ، دريمې او رباعي ترمنځ) پرتې دی، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% دیتا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

د نارمل منحنی د مرکزی ټاکوونکو پرتله کول

آيا کولای شو چې د نارمل منحنی په مرسته
مرکزی ټاکوونکی پلاس را پرو؟

$\text{mod} = ?$

$\text{med} = ?$

$\bar{x} = ?$

لاندې کوم منحنی چې وينې، په احصائيه کې بوله مشهورو منحنۍ ګانو خخه دي، کولای شو چې زیاتې طبیعی پیښې د دې منحنی په مرسته ونبایو. نارمل منحنی یو متناظره منحنی دی چې د یوه زنگ په شان شکل لري.

- آيا د اوسيط، ميانې او مود د مرکزی ټاکوونکو ځایونه په دې منحنی کې بنو دلای شي؟

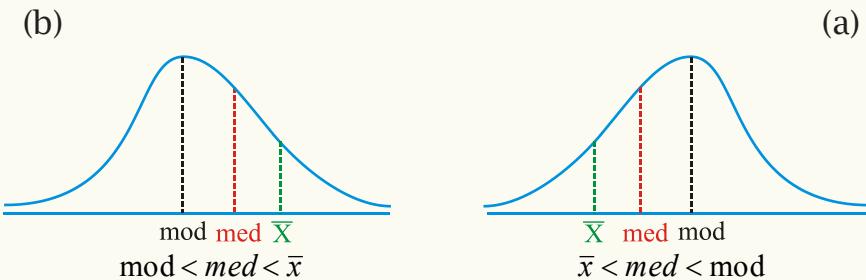
فعاليت

- که په یوه تولګي کې ټول زده کوونکي بنې نمرې واخلي:
- آيا خه فکر کوي چې د دوى د نمرو اوسيط هم بنه دي؟
- آيا د اوسيط لوړوالی د تولګي د تعليمي وضعی پر بنه والي دلالت کوي؟
- د دې لپاره چې د تولګي وضع بنه ارزیابی کړي، نیم تولګي بايد بنې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمایي تولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

- که میانه له اوست خخه ډېره کوچنی وي، له دې خخه خه شی په لاس راخي؟
- که میانه له اوست خخه ډېره لویه وي، له دې خخه خه شی په لاس راخي؟
د پورتني فعالیت او د منحنی له متناظر والي خخه نتیجه په لاس راخي چې د میانې او اوست خای په نارمل منحنی کې يو دی او خرنګه چې نارمل منحنی اعظمي نقطه لري، نوله همدي سببه د موده خای هم له اوست او میانې سره مساوي دی يعني:

$$\bar{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحنی، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



- که چېري اوست او میانه سره مساوي وي، له اوست او میانې خخه تر مخه او له اوست او میانې خخه وروسته دیتاگانې سره مساوي دي.

- که اوست د میانې کینې خواته پروت وي، د هغو دیتا شمېر چې د اوست بنې خواته پرتی دي، د هغو

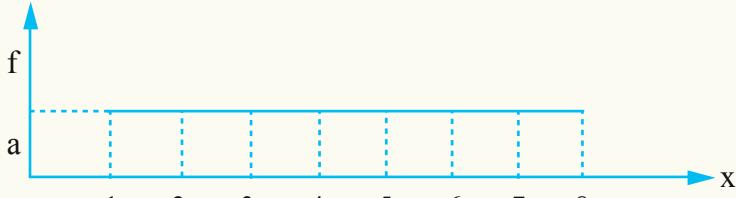
دیتا (Data) له شمېر خخه چې د اوست کینې خواته پرتې دي، زیات دي، لکه: د a به شکل کې.

- که اوست د میانې بنې خواته پروت وي، د هغه دیتا (Data) شمېر چې د اوست بنې خواته پرتې

دي، د هغه دیتاوو (Data) له شمېر خخه چې د اوست کینې خواته پرتې دي، لبر دي.

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې گراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

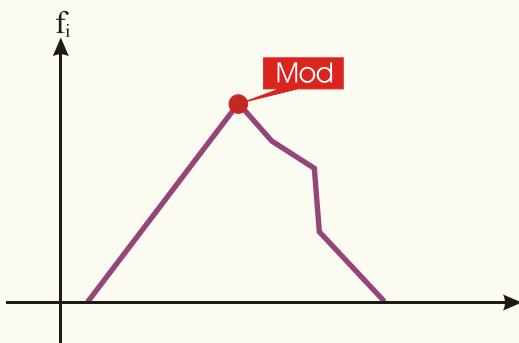
میانه =

$$\text{اوسط} = \text{med} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

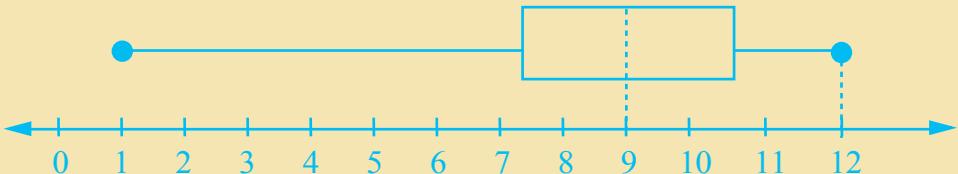
$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې گراف کې د موډ تقریبی قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.
حل:



پوښتنې

1- د لاندې صندوقچه يې ګراف په نظر کې نیولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته خوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې ميانه خومره ده؟
- په دې چیتاکې لوړنې، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، خه شی بنېي؟
- دريمه ربع خو ده؟ دا عدد، د خه شی بنودونکې ده؟
- دا چې ميانه د صندوق کېنې خواهه ده، د خه شی بنکارندويه دی؟
- داچې د کېنې خوا د عددونو شمېر نظر شې خوا ته زيات دی دا زیاتوالی د خه بشکاره کوونکې دی؟

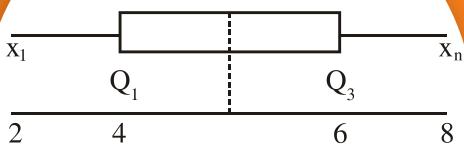
2- د یوه هپواد د فوتیال ملي ټیم د لوړغارو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتیجو خخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغو لوړغارو شمېر چې عمرونه يې له اوست خخه لور وي، ډېر دي.
- د هغو لوړغارو شمېر چې عمرونه يې له ميانې خخه لور وي، ډېر دي.
- د هغو لوړغارو شمېر چې عمرونه يې له اوست خخه بنکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوړغارو شمېر چې عمرونه يې له اوست خخه ډېر وي د هغه لوړغارو له شمېر سره مساوی دي چې عمرونه يې له اوست خخه لور دي.

ربعي انحراف



$$X_n - X_1 = ?$$

$$Q_3 - Q_1 = ?$$

که د یوې ټولنې د احصائيوي تغيراتو لمن لویه وي، آیا فکر کوي چې د دیتا د تحول ساحه به له ټولنې خخه نامناسبه پایله وړاندې کړي؟

فعاليت

له یو موزیم خخه د لیدونکو شمېر په 12 ورڅو کې په لاندې ډول دي.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- د دې دیتا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
 - په عمومي ډول پورتنۍ دیتاوې د کومو دوو عددونو تر منځ تیت شوي دي؟
 - یو په خلورمه برخه دیتا له پورته اوښکته خوا خخه حذف کړئ او بیا د پاتې دیتا (Data) د تحول ساحه پیدا کړئ.
 - دا د تحول دوو ساحې چې په لاس راغلي دي، یو له بله سره ېې پرتله کړئ، کومه یو ۵ ېې ډېر تیت والي بشي؟
 - په څینو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنيو او یا ډېرو لویو مقدارونو له سبیه، نامناسبه تعبریونه له ټولنې خخه مور ته په لاس راکوي.
 - نو له دې امله د نورو ټاکونکو خخه چې دریعو د انحراف په نامه یادېږي، ګهه اخیستل کېږي، تر خو د ټولنې د تحول ساحه په بنه ډول وټاکي.
- که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د دیتا دستې، لوړۍ ریغ او دریمه ریغ وي، نو دریغو انحراف په (Q) سره بنودل کېږي او په لاندې ډول تعريف شوي دي.
- $$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف یو له هغو ټاکونکو خخه دی چې د دیتا (Data) تیت والي بشکاره کوي.

داسي چې د لوړۍ او دریمه ریغ په تعريف خخه پوهېږو چې $50\% \text{ ټولنے } D = Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، دیتا سره نزدې دي، یا په بل عبارت د هغوي

تیت والی لېر دی.

خېنې وختونه د ربیعو (خلورمو) انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعريفوي او دي ته د ربیعو نیمایي لمن ولېي.

مثال: دلاندي عددونو د ربیعو (خلورمو) انحراف بیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کړو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

نوله دي خایه:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

همدارنګه:

$$Q_1 = 22.25$$

نوله دي خایه:

دلومړنۍ او درېمې، ربیعې قیمتونه په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دی نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

پوبنتني

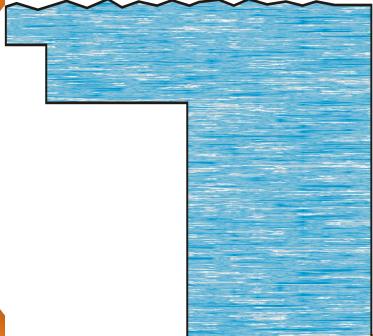
1 - د لاندې دیتا د تحول ساحه، د ربیعو (خلورمو) انحراف او مود پیدا کړئ او وویاست چې د دیتا ګواں په کومه ساحه کې دېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 - د لاندې دیتا د تحول ساحه او د خلورمو انحراف پیدا او د لومړی پوبنتني د تحول د ساحې او د خلورمو د انحراف سره یې برتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

واریانس (variance)



که ستاسو لامبو بنه زده نه وي او وغوارپي چې په
داسې ډنډ کې ولامبې چې ژور والي يې په ټولو
برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه
زړه ولامبې، کوم معلومات باید ولري؟

فعالیت

که د لمبا په یو ډنډ کې د یو خای ژوروالي 1.5 متره او دبل خای ژوروالي يې 2.5 متره وي.

• ددې ډنډ د دواړوو څایونو د ژوروالي اوسط پیدا کړئ.

• ددې دوو دیتاوو د انحرافونو مریع له حسابي اوسط خخه پیدا کړئ.

• ددې دوو دیتاوو د انحرافو د مریعگانو مجموعه پیدا کړئ.

• د پورتنيو دیتاو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و پېشی.

د x_1, x_2, \dots, x_n دیتا د واریانس د پیدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونسی.

- دیتا اوسط پیدا کړئ یعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- د انحرافونو د مریعگانو مجموعه یعنې:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوري.

- پورتني مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و پېشی او په s^2 یې ونسی:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

چې دلته S^2 د واریانس په نامه يادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسته خخه.
پاړلنه: ځینې وختونه واریانس د پیداکولو لپاره له دې لاندې فورمول خخه هم ګهه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتني فورمول کولای شو، په لاندې دول لاس ته راوړو.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

پوهېرو چې :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې دیتا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

$$i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5}$$

الف: د

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5} = \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

ب: له دې فورمول خخه هم کولی شو چې همدا قيمت په لاس راولو

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2 = 38.4 - 31.36 = 7.04$$

يادونه: که دیتا په گروپونو (کلاسونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه x_1, x_2, \dots, x_n او f_1, f_2, \dots, f_n فربنکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول خخه کار واخلو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N = \sum_{i=1}^n f_i$ دی.

د واریانس د واحد تاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قيمت په نیول کېږي، څښې وخت د متحول د واحد مریع د واریانس د واحد په حیث ګټل کېږي.

پونتني

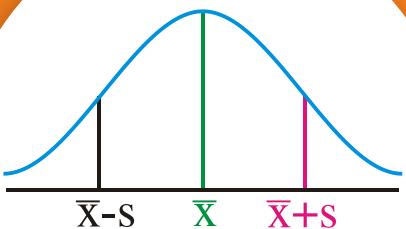


د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونى کې د لویو کولو لپاره تاکلې دی، په لاندې چول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

دادي چيتا (Data) وريانس پيدا کړئ.

معياری انحراف



$$\bar{X}-S < \bar{X} < \bar{X}+S$$

که S دوریانس جذر \bar{X} دیتا اوسط وي
مخامن شکل کوم ډول تاکونکی توضیح کوي؟

فعالیت

که S^2 د x_1, x_2, \dots, x_n دیتا واریانس وي. آیا خه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره خه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه اونۍ کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمی وخت له ځېنو تاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قيمت د انحرافونو مریع په لاندې جدول کې راکړل شوي وي، خرنګه چې:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په وړخ x_i	\bar{x}	انحراف $x_i - \bar{x}$	دانحراف مطلقه قيمت $ x_i - \bar{x} $	دانحرافونو مریع $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

- د دیتا (جامو) د ورکرپی د وخت اوست پیدا کړئ.
 - د انحرافو د مطلقه قیمت اوست یا په لنډ چول د انحراف اوست (AD) پیدا کړئ.
 - د توکو د ورکرپی وخت واریانس پیدا کړئ.
 - د واریانس مریع جذر محاسبه کړئ.
 - د واریانس د مریع جذر واحد د واریانس له واحد سره پرتله کړئ.
- د واریانس له فورمول خخنه مو زده کړل چې په توان ورپلو سره نه یوازې داچې د واریانس اندازه کولو مقیاس له شک سره مخامنځ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی بنسي.
- ددې لپاره چې دا ستونزې له مینځې یوسو، په کار ده چې د واریانس مریع جذر په لاس راورو.
د واریانس جذر د دیتا (Data) د تیت والي، یوبل تاکونونکی د معیاري انحراف یا مطلق تیت والي په نوم را پیژنۍ.
- معیاري انحراف چې د S په سمبول بنودل کېږي، د واریانس له مریع جذر سره مساوی دی.
په دې معنا:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2}$$

د معیاري انحراف یا د مطلق تیت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.
پورتنی رابطه په لاندې چول ثبوت کېږي:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right) \\ S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \Rightarrow S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2} \end{aligned}$$

مثال: د ۵ ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معياري انحراف پي پيدا کړئ
حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980$$

پاملرنه: د فربیکونسیو له جدول خخه، معیاري انحراف په تقریبی ډول په لاندې ډول په لاس راخي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

چې \bar{x} د ډيتا، اوسيط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فربیکونسی سبي.

پونتني

د خلورو ټلویزونې سټیشنونو د بنوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي دي، د ډيتا معیاري انحراف پيدا کړئ.

1 3 4 5

۰ د فريكونسي خو ضلعي گراف: د هغه مرتبه جورو نقطي چې عرض يې د کلاس مرکز او او بردوالي يې د هماغه کلاس له فريكونسي سره مساوي دي، يوه له بلې سره ونبليو، د فريكونسي خو ضلعي گراف په لاس راخي، د فريكونسي به خو ضلعي گراف کې دوي نوري اختياري نقطي د صفر په فريكونسي د کلاسونو (گروپونو) په لومړۍ او اخیرنې برخه کې ډپروو، تر خو د فريكونسي خو ضلعي گراف له محور سره ونبليو.

۰ د ساقې او پانې گراف: د ساقې او پانې د گراف د رسمولو لپاره له عددونو خخه ګهه اخیستل کېږي. احصائيوی دیتا د عددونو په شکل راپرو، بيا له دي عددونو خخه د ساقې او پانې گراف رسموو. دا ډول گراف د هغه دیتا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنۍ رقم تر منځ توپير لړو وي، مناسب دي.

۰ ربعي: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوي برخو ووبشي، د ميانې په نوم يادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونيسى چې مرتبه جامعه په خلورو مساوي برخو ووبشي، دا عددونه په Q_1 , Q_2 , Q_3 سره بندول کېږي، دي عددونو ته په ترتیب سره لومړۍ ربع، دويمه ربع او د دريمه ربع وايي. بنکاره ده چې Q_2 ميانه ده.

۰ صندوقه ېي يا جعبه ېي گراف: له دي گراف خخه د هغې دیتا (Data) لپاره چې سره نزدې دي يا هغه دیتاوې چې د اوسيط پر شاوخوا راتولي شوي دي او يا هم هغه دیتا چې ترقولو لوېو يا ترقولو کوچنيو پيتاکانو پرشاوخوا راتولي شوي وي، ګته اخیستل کېږي، دا گراف یو تصویرې گراف دي چې ترقولو لوې دیتا، ترقولو کوچني دیتا، ميانې، لومړۍ ربعي او دريمې ربعي په اساس بنکاره کوي.

۰ د نارمل منحنۍ په بنیاد د مرکزي تاکونکو پرتله کول: خه وخت چې وغوارو مرکزی تاکونکي (اوسيط، ميانه، او مود) له نارمل منحنې خخه په ګته اخیستنې سره پرتله کرو: په دي حالت کې که نارمل منحنۍ متناظر وي، نو اوسيط، ميانه او مود سره مساوي دي. که نارمل منحنۍ متناظر نه وي، نو مرکزی تاکونکي نظر خپل موقعیت ته د منحنۍ بشې خوايکې خوانه قیمتونه اخلي.

۰ ربعي انحراف: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د دیتا (Data) لومړۍ ربع او دريمه ربع وي، کولای شوو چې د خلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتنې تعريف خخه بنکاري چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

چې دا فاصله لړه وي، پیتاګوري دی او د پیتا تیت والي لړ دی.

واريانس: د تیت والي پاکونکي هغه مقدارونه دی چې د دیتا (Data) د تیت والي حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې او سط ته پاکني. واريانس د تیت والي له پاکونکو خخه یو مهم پاکونکي دی چې په S^2 سره بنودل کېږي او له لاندې رابطې خخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

د واريانس پیداکول د فريکونسي په جدول کې له دې فورمول خخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (x_i \text{ دکلاس مرکز دی})$$

معياری انحراف: د واريانس مریع جذر په S بنېي چې معیاري انحراف ورته وايی:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

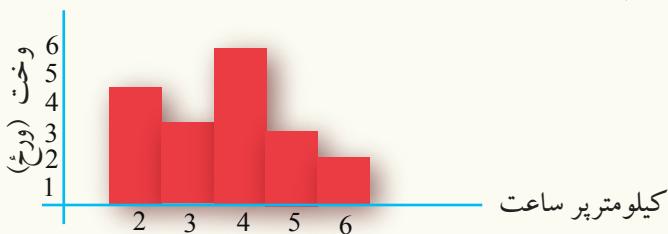
د معیاري انحراف پیداکول د فريکونسي له جدول خخه د لاندې فورمول خخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} \quad (x_i \text{ دکلاس مرکز دی})$$

د خپرکي پونستني

1 - لاندي گراف د باد سرعت په 19 ورخو کې سکاره کوي، په گراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسته د باد سرعت لپاره د فريکونسي خو ضلعي گراف رسم کړئ.
که چېږي یوې کشتی ته د حرکت لپاره لېږت لړه په یوه ساعت کې 5 کيلو متره د باد سرعت ته اړپيا
وي، نو خو ورځي د کشتی د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پونستنه کې ولې د فريکونسي خو ضلعي گراف، نظر مستطيلي گراف ته مناسب دي؟



2 - د فريکونسي خو ضلعي گراف هغه گراف دی چې په افقي محور او د عمودي محور پر مخ بنودل کېږي.

ب) نسبي فريکونسي، د کلاسونو مرکز

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فريکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فريکونسي

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فريکونسي

3 - د ساقې او پانې گراف راکړل شوي دي:

- له دې گراف خخه په لاس راغلي ديتا ولیکي.

ساقه	پانې			
1	0	3	3	4
2	0	2	4	8
3	2			

4 - کوم گراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو،
تر خو ميله يې گراف لاس ته راشي.

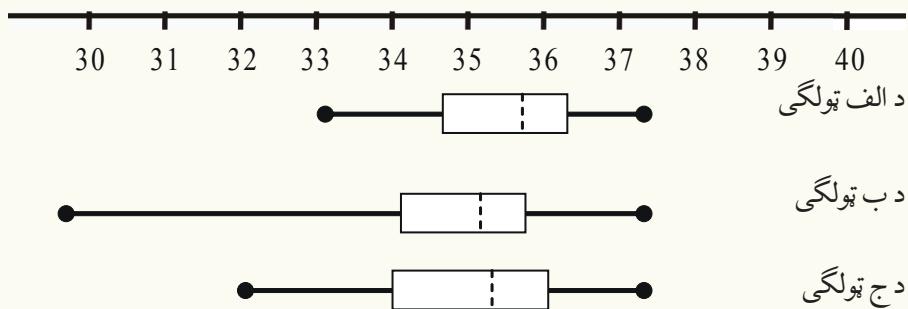
الف) د ساقې او پانې گراف

ب) مستطيلي گراف

ج) د فريكونسي د خو ضلعي گراف

5: لاندې گراف د الف، ب او ج د دريو ټولګيود رياضي ازموينې نمرې بنکاره کوي، گراف ته

په پامنې سره لاندې پونشنو ته ځواب ورکړئ.



• د کوم ټولګي د تحول ساحه زیاته ده؟

• د کوم ټولګي د نمره ميانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولګي د نمره ميانه تر ټولو لړه ده؟

• د کوم ټولګي د نمره تیت والی تر ټولو ډېر دی.

• ددي دريو ټولګيود ازموينې نمرې له کمزوري خخه د قوي په لور ترتیب کړئ.

6: په گراف کې د a مقدار عبارت دی له:

د) موج

ج) دريمه ربع

ب) اوسيط

الف) ميانه

7: د غذایي موادو د تولید دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 گرامو په قطيوکې بسكيت خرخوي.

• په تصادفي چول د دواپو فابريکو د بسكيت له قطيو خخه 5 قطي تاکل شوي دي او په پوره غور سره ېپي وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندي ډول دي.

A: 48.08 48.32 47.96 47.84 47.96

B: 49.16 48.84 48.88 49.08 49

• په قطيوکې کومه فابريکه زيات بسكيت خرخوي؟ د پوبنتني د حل لپاره له کوم ټاكونکي خخه استفاده کوي؟

• د بسكيت په وبشلوکې کومې فابريکې يو شان عمل کړي دي؟

8: که د ډيتا د تحول ساحه صفر وي. د ډيتا په برخه کې خه نتيجه اخلي؟

9: د هغه ساعتونو شمېر چې زده کونکو په يوه اونې کې د لوبو لپاره تاکلې دي، په لاندي ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

دادي ډيتا (Data) ورایانس پیدا کړئ.

10: په لاندي ګدول کې واریانس پیدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15



نهم څېړکي

د ریاضي منطق



د شهودي درک استدلال:



پخوا تر دېر و پېپېو پوري خلکو فکر کاوه چې
خمکه هواره ده او ستوري د خمکې پر شاوخوا
خرخېري.

آيا پوهېري چې خمکه کروي ده؟
آيا لمړ د خمکې پر شاوخوا او که خمکه د لمړ
پرشاوخوا خرخېري؟

تعريف: هغه طبیعی یا حسی پوهه چې دهفي په مرسته دیوې موضوع سموالي یا حقیقت او یا یو
مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک خخه عبارت دی چې کيدلی شي، دوخت په مختلفو
مرحلوکې يوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کي نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوي نقطې په پام کې
ونیسي.



يو سړۍ غواړي چې ددي مستقیم خط پر مخ د A له نقطې خخه د B نقطې ته لارشي چې د
د قطعه خط منځنی نقطه A₁ کې توقف وکړي او بل وار چې د A₁ نقطې ته رسیدلې دی، ددي
لپاره چې د B نقطې ته ورسېږي، بیاد A₂ په نقطه (د A₁B د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف
وکړي، که په همدي چول دوام ورکړي، نو لاندې پوبنتنو ته څوابونه ورکړئ:

- آيا په پورته چول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لري؟
- که په همدي چول تر پایه دوام ورکړي، دا سړۍ به د B نقطې ته ورسېږي؟
- که دا سړۍ توقف و نه کړي او یا له لارې بيرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به
ورسېږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددي مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک
ترمنځ خه توپیر شته؟

له پورتني فعالیت خخه لاندی نتیجه لاس ته راخی:

نتیجه: د شهودي درک نتیجه هر وخت صحیح نه وي، خوکپدای شي چې د قضیو دحل لپاره يو بنې بنسټ وي.

له هغه مثال خخه چې په پورتني فعالیت کې مو تري استفاده وکره او باداسي نور مثالونه دا ددي په معنا نه دي چې د شهودي درک استدلال گمراه کونکي دي، بلکې بر عکس په زیاتو حالتونوکې د شهودي درک استدلال د مسلو دحل، د انګيزې د پیداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سب گرځي.

لومړۍ مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانۍ سره حکم کولای شو چې دوه موازي خطونه يو بل نه قطع کوي.

څرنګه چې ددي مسلې په قبليولو کې استدلال په کار وړل شوي نه دي، په واقعيت يو احساس دي چې پر اساس يې داحکم ملن کېږي، نو دا ډول نتیجه اخيستنه د شهودي درک په نامه يادوو.

د ویم مثال: که يوه نقطه د داسې دایري پرته وي چې قطرې 4 واحده وي. ددي نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده خخه زیاته ده، نه شو ویلاي چې دا استدلال يو شهودي درک دي، څکه د مسلئې دوضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنګه چې د دایري د مرکز فاصله له محیط خخه 2 واحد ده. نقطه د دایري پرته ده، نوله دي امله د دایري له مرکز خخه د نقطې فاصله د 2 واحده خخه لویه ده. یعنې پرته له استدلال خخه د طبیعی پوهې او یا غریزه يې احساس په واسطه نه شوکولای، مسئله درک او صحت يې قبول کړو.

پښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له يوه مستقیم خط خخه عبارت ده، آيا ددي مسئله درک کولو چې د شهودي درک دي؟ څرنګه استدلال کوئ؟

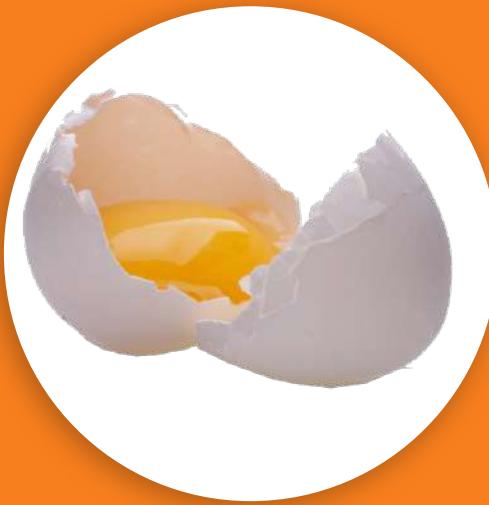
2- له لاندې حکمونو خخه کوم یوې د شهودي استدلال په طریقه د درک وردی؟

a- دیوې متوازي الاصلاح مقابلي زاوې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معین) قطرونه يو پر بل عمود او یوبل نیمایي کوي.

c- په يوه قایم الزاویه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو خخه لوی دي.

تمثيلي يا گمانني استدلال



ووايه زما په لاسونو کې خه شى دى؟ تقریباً
گرددى، رنگ يې سپين دى او دسپینو په منع
کې يو ژير شى دى؟

د منطق يوه بنوونكىي غوبنتل چې دخپل يوه زده کووننكىي قياسي استدلال وازمائي، خپل مخ يې هغه
ته ورواروه او ورته وې ويل:

پوهېرىئ چې گمان او ياتمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دى. د لوست په جريان کې مو زده کېل چې
تمثيلي استدلال مور حقيقت ته نزدي کوي، ليكن هر وخت سوچه حقيقت نه دى.
بنوونكىي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونو کې يې د چرگې هىگى پته کري وە، له زده کووننكىي
پوشتل: ووايه زما په لاسونو کې خه شى دى؟ تقریباً گرددى، رنگ يې سپين دى او دسپینو په منع
کې يو ژير شى دى.

زده کووننكىي چې په همدې وخت کې له زراعتى فارم نه راغلى و، له ژور فكر كولو وروسته يې
بنوونكىي ته مخ ورواروه او وې ويل:
استاده فكر كوم چې دسپين شوي شلغەم(تىپر) په منع کې گازرە دە.

تعريف

د دوو پېپنۇ ترمنع د ورته والىي پىداكول او دھغۇي باره کې د يوشان نتيجىي اخىستلۇتە تمثيلي يا
قياسي (گمانىي) استدلال وابىي.

فعالىت

يوه بنوونكىي يوشوخ زده کووننكىي چې لوست يې اخلاقلو، له تۈلگىي خخە وویست. دتۈلگىي د باندى
يې د خپل تۈلگىي بل زده کووننكىي ولىدە چې هغە هم له تۈلگىي خخە د باندى و تلى دى. دپورتنىي
تعريف پە نظر كې نىولو سره له لاندى اپىكۇ خخە كوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دى.
- دويم زده کووننكىي د لوست پە وخت كې تفريح كوي.

- دویم زده کونکی هم شوخي کري ده.
 - ناروغه دی، نه غواپي چې په تولگي کې واوسی.
 له تعريف او د زده کونکو له فعالیت خخه لاندې نتیجه په لاس راخي:
نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سبې تمثیلونه کېدای شي، د دېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودی زمينه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمينه برابروي.
لومړۍ مثال: په عامه ژ به (مارخورلی) له برګ پېږي خخه دارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، خکه چې برګ پېږي له مار سره پر تله شوی دی او د هغوي په منځ کې ورته والي لیدل شوی دی.
دویم مثال: له تمثیلي استدلال خخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راپرو: مثلاً ددې حقیقت درک کولو لپاره چې که چېږي د یوه زده کونکی لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والي د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواپو عملونو د حاصل (ددي) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس خخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لرو چې:



پونسني

- 1 - دا بیان چې (بختور کال د هغه کال له پسرلی نه معلومېږي)، په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.
 a- شهودي درک استدلال.
 b- قیاسي استدلال.
 c- هیڅ دول استدلال په کې نشته دی.
- 2 - د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلاي شي:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

استقرائي استدلال:



يو زده کونکى په لومرنی صنفي ازموينه کې
100 نمرې اخلي او په دويم او دريم صنفي
ازموينو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخري ازموينه کې خه نتيجه اخيسلاي
شئ چې دا زده کونکى به خونمرې
واخلي؟

فعاليت

د مسلسلو طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نيسو، ددي کار لپاره له يو 1 له عدد خخه
پيل وکړئ او تشن خايونه ډک کړئ.

$$1+3 = \boxed{\quad} = (\quad)^2$$

$$1+3+5 = \boxed{\quad} = (\quad)^2$$

$$1+3+5+7 = \boxed{\quad} = (\quad)^2$$

$$1+3+5+7+9 = \boxed{\quad} = (\quad)^2$$

پورتنيو پښتنو ته په پاملنې سره ليدل کېږي چې د طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل د طبيعي
عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دي.

- آياکولاي شو نتيجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددي عددونو
د شمېر له مربع سره مساوي دي؟

- کوبسین وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعالیت د سرته رسولو په اساس لاندې نتيجه په لاس راخي.

نتیجه: استقرائي استدلال ديو شمېر مشاهد و پرنسټ د عمومي نتيجه اخيستنې طریقه ده. په
حقیقت کې یوې کوچنۍ نمونې ته په لویه نمونه عمومیت ورکول دي.

لومړۍ مثال: (موټۍ د خروار نمونه ده) دا خبره استقرائي استدلال ته اشاره کوي، څکه په دې مثال

کې له يوپى كۈچنى نۇمنى خىخە دكلى نىتىجە اخىستىل كېرىي، پە حقيقةت كې لە مسئلەي خىخە ديوشمىپر مشاھد و پېرىنسىت نىتىجە اخىستىل شوي دى، نولە استقرايىي استدلال خىخە كار اخىستىل شوي دى.

دوييم مثال: يوزده كۈونكى پە اتفاقىي ڈول پە خومىر حلو كې درې مىسىز عىددونو سره ضرب كېل او وېلىد چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دى. لە كار خىخە نىتىجە اخلىي چې (د هر دروو مىسىز عىددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دى)

نۇمۇرپى زىدە كۈونكىي كوم استدلال كېرىي دى.

الف: شەھىدىي استدلال ب: قىياسىي (گمانىي) ج: استقرايىي استدلال
حل: استقرايىي استدلال

پۇشتىنى

1 - ھەفە طەرقە چې د يوھ مەحدودە شىمپر دېتا پە اساس تىرىنە عمومى نىتىجە اخىستىل كېرىي، خىرنىگە يو استدلال دى.

ب: استقرايىي استدلال
ج: د شەھىدىي درك استدلال

2 - د عىددونو ترتىب تە پە پاملىنى سره لاندى تىش خایونە دك كېرىي:

$$1 \times 8 + 1 = \boxed{}$$

$$12 \times 8 + 2 = \boxed{}$$

$$123 \times 8 + 3 = \boxed{}$$

$$1234 \times 8 + 4 = \boxed{}$$

-3

a) د دويىم پۇشتىنى حل تە پە پام سره كېدايى شي چې د عىددونو پورتىنى ترتىب تە تر بې نەھايت پورى دواو ورکىرى؟

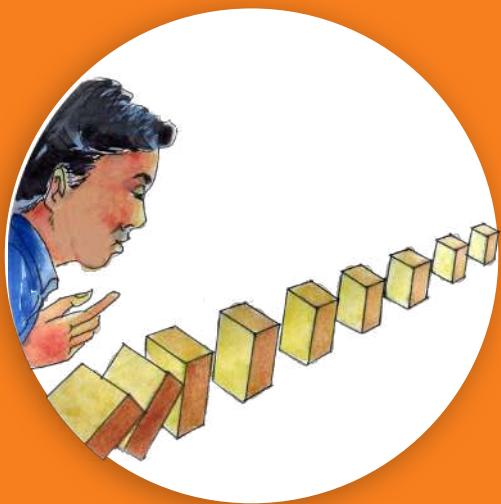
b) د محاسبە كولو پرته او د پورتىنۇ پۇشتىنۇ پە پاملىنى سره اتكىل كېرى ئىچى كوم عىددونە د لاندى پۇشتىنۇ پە تىش خایونۇ كې راتلايى شي:

$$12345 \times 8 + 5 = \boxed{}$$

$$123456 \times 8 + 6 = \boxed{}$$

درياسي د استقرا استدلال

د دوو مينو لو به :



آيا تاسوکله د دوو مينو لو به تر
سره کړي ده؟

پوهېږئ چې د دوو مينو په لو به کې د لومړۍ خښتې لويدل، د دويمې خښتې پرمخ چې يوه دبلې خنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنۍ پر دويمه، دويمه پر دريمه... تر پا یه پوري پر مخکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل خنګ ته پریوزې، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پوري تصویر بشکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام خښتې لوېدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب گرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلي شمېږي څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولېږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعاليت

پوهېږئ چې $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ دی، که د عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندي ډول وليکو:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

- آيا هر وخت د مسلسلو طبیعی عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مریع سره مساوی ده؟

- آيا کولای شئ د پورتنې پوبنتې د حل لپاره یوه عمومي طریقه ووایاست، د پورتنې پوبنتې د خواب لپاره لاندې جدول ډک کړي.

د متوالي عددونو شمېر	د متوالي طبيعي عددونو معکبونه	د معکبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مرتع
1	1^3		1^2
2	$1^3 + 2^3$		
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$		10^2
n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې $n = 1$ ، $n = 2$ ، $n = 3$ ، $n = 4$ او $n = 3$

$$\text{فورمول سموالي وازمائي: } \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ لپاره د}$$

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتني فورمول قبول کړو یعنې که:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پې ثبوت کړئ یا داچې وښیاست:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$$

د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو خخه لاندې نتیجه لاس ته راخې.

نتیجه: که چېري $P(n)$ د طبيعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د $n = 1$

لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دویم پر او کې که د $P(k)$ له سموالي خخه $P(k+1)$ په لاس راشي،

نو دا ادعا د $P(n)$ د هر طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړۍ مثال: وښیاست چې $P(n) = 4^{2^n} - 1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دي.

حل: د $n = 1$ لپاره سمه د څکه چې:

$$n = 1 , P(1) = 4^{2^1} - 1 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

ليدل کېږي چې $P(1) = 15$ پر 5 د وېش وړ دي.

قبلو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنۍ ادعا سمه ده یعنې: $P(k) = 4^{2^k} - 1$ پر 5 د وېش وړ

۶۱

خرنگه چې پر 5 د وېش وړ دي، نو کولای شو په لاندې چول یې ولیکو

غواړو وښایو چې د $n = k + 1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لرو چې:

$$n = k + 1 \quad , \quad P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1 \dots \dots \dots (**)$$

د (۴) درابطی دوارہ خواوی په ۴^۲ کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k} - 1) = 5r \cdot 4^2$$

$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r \cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot (5r)$$

$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

د پورتني مساوات له بني خوا (3+16r) 5 خخه بنکاري چې د مساوات کينه خوا پر 5 د وېش ور 5د.

نو اخري مساوات بنکاره کوي چي $P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1$ هم پر 5 دوپش وردي، خرنگه چي د $P(k)$ له سموالي خخنه د سموالي نتيجه شوه، نود رياضي د استقراد اصل په اساس پورتني ادعا $(P(n))$ د هر طبيعي عدد (N) لپاره سمه 55.

یادوونه: د ریاضي د استقراء په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لوړۍ (1) P په لاس راواړو، یا (k) د استقراء حکم په حيث په پام کې نیسو او په هملي ترتیب له فرضیې خخه حکم ثبوتولو.

دوبیم مثال: د ریاضی د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هر طبیعی عدد 11 لپاره سمه 5:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتني رابطه کي د $n = 1$ لپاره لرو چي:

$$n=1 \quad , \quad P(1) = 1 \times 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

$$\Rightarrow 2 = 2$$

$n = k + 1$ نو د n لپاره پورتني رابطه سمه ده، که د $k =$ لپاره يې سمه قبوله کرو، نو د لپاره يې داسې ثبوتتو، لروچي:

$$n = k, P(k) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k \times (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n = k + 1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی بنکاره کړو، نو لروچې:

$$\begin{aligned} n &= k + 1, \quad P(k+1) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

د استقرا حکم:

د استقدار فرضیه په نظر کې نیولو سره لروچې:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= [1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1)] + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \\ \Rightarrow 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k+1)(k+2) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

دا رابطه د $n = k + 1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعی عدد (n) لپاره سمه ده.

پوبنتني

1 - د ریاضي د استقرا په مرسته و بنیاست چې د هر طبیعی عدد n لپاره لروچې:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 - د ریاضي د استقرا په مرسته و بنیاست چې:

$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2 \quad (i)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (ii)$$

استنتاجی(نتیجوي) استدلال:



آياکولای شود شپې په تیاره کې له رینا خخه پرته
شيان ووينو؟

فعالیت

درې مختلف داسې سټونه ولکئ چې د هرسټ عناصر درې اختياري مسلسل طبیعی عددونه وي.

- د هرسټ د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راورې.

- آيا ويلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آيا ويلای شو چې د دريو مسلسلو طبیعی عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟
ولې؟

- د دريو مسلسلو طبیعی عددونو د ضرب حاصل مولې پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتنې فعالیت
له سرته رسولو خخه لاندې نتیجه لاس ته راخي.

نتیجه: داسې طبیقې ته چې د حقایقو سموالی یې به لوړۍ پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې
لاس ته راورو، استنتاجي استدلال يا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وايې یا په بل عبارت استنتاجي
استدلال هغه طریقه د چې سموالی مو ثبوت کړي یا منلي وي.
خه وخت چې له استنتاجي استدلال خخه استفاده کړو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه

.5

لومپی مثال: د لاندې جدول پړاونو ته په دقت سره وګورئ مور خرنګه له عددونو سره چې د هر

پړاون حقیقت او سموالی منو، بل پړاوته خو او نتیجه په لاس راورو.

د یادونې وړو ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددي

عدد پرڅای بل هر عدد چې موغونستی وي، وټاکۍ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

12	7	4	يو عدد په خپله خوبنه وټاکۍ.
17	12	9	له لومړي عدد سره 5 جمع کړي.
34	24	18	اوسمې دوه برابره کړي.
30	20	14	له حاصل خخه د 4 عدد کم کړي.
15	10	7	پر 2 یې ووپشی.
3	3	3	هغه عدد چې لومړي موټاکلی و، له عدد خخه کم کړي.

اساسي خبره داده چې مورو په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسته چې سموالی یې مور قبول کړي دی، بله نتیجه لاس ته راورو، دا مسله مور دا من کوي چې دهرا اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوی ده.

پونښنې

1 - بشکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 - ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد $2k + 1$ په شکل دی.

3 - د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبی ده چې له نورو سکو خخه یې وزن کم دی.

خرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو خخه د استفادې کولو پرته د پله یې ترازو په واسطه له دوه واره

تللو سره تقلبی سکه پلاس راورو؟



د مثال د نفي کولو استدلال:

يومونې د خروار نمونه ده.

که د یو جنس یوه کوچنی نمونه بې کيفيته وي.

آيا کولای شو ادعا وکړو چې د دې جنس لویه
کتله بنه کيفيت لري؟

فعاليت

کولای شو، پېر طبیعی عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:
 $9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تشن خایو نه ډک کړئ؟

$$15 = \square + 2 \square + 4 + 5$$

$$\square = \square + 5 + \square + 7$$

$$\square = 12 + \square + \square + 14$$

$$74 = 17 + \square + 19 + \square$$

- آيا کولای شو چې هر طبیعی عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟

- که چېږي خواب مو (نه) وي، نومثال بې وویاست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو خخه لاندې نتيجه لاس ته راخې.

نتیجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسمواли بشکاره کړو دې

ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د X او Y دوو غیر ناطق عددونه

لیکن ددوى د جمعي حاصل $y+x$ يو ناطق عدد دى.

دادي لپاره که د $x = 1 + \sqrt{2}$ او $y = 1 - \sqrt{2}$ وتاکو، لروچي:

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 1 + 1 = 2$$

لیدل کېرىي چې ددې دواپو عددونو د جمعي حاصل د 2 عدد دى چې يوناطق عدد دى، په داسېي حال کې چې x او y غير ناطق (گنگ) عددونه دې، نو دا ادعانه شوکولاي چې د دووغیر ناطقو عددونو د جمعي حاصل هر وخت يو غير ناطق عدد دى.

پوشتنې

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وسنياست چې (د هر مثبت حقيقي عدد مربع د عدد له مكعب خخه کوچنۍ ده)

2- دلاندي کوم يو بيان لپاره د نفي مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه يو ناطق عدد دى.

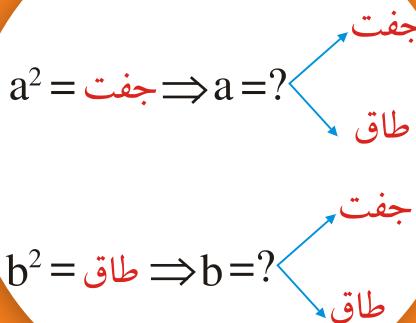
b) د هر مثبت عدد مربع له عدد خخه لويه ده.

c) دوي زاويې چې متناظري ضلعي يې سره موازي وي، دا دوي زاويې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه يو جفت عدد دى.

e) د دوو غير ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غير ناطق عدد نه دى.

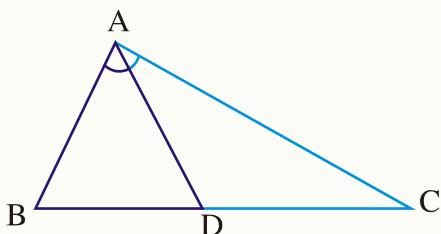
د خلف برهان يا غير مستقيم ثبوت:



که د يوه عدد مربع جفت وي آيا خپله عدد جفت دی که طاق؟ آيا کولای شو چې دا ادعا وکرو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟ که وشايو چې خپله عدد طاق نه دي، خه نتيجه اخلي؟

فعاليت

د مثلث ABC د لاندي شکل په شان په پام کې ونيسي:



- د \hat{A} د زاوي ناصل رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د \overline{AC} او \overline{AB} ضلعي سره خه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ وي، خو $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتيجه ته رسوي؟

نتيجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او ياد قبلاولو په نتيجه کې د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسپړو، نو په دي حالت کې زموږ فرض شوي ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غير مستقيم ثبوت (برهان خلف) په نامه يادېږي.

يادونه: په ياد ولري خه وخت چې له غير مستقيم ثبوت خخه گته اخلو، لاندې پراونه په پام کې

نيسو:

لومري پراو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دوم پراو: بشکاره کوو چې دا فرض د اسې نتيجه په لاس راکوي چې بیزندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

دریم پراو: اوس چې نتيجه نفي شوي ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړۍ پراو فرض سمه نه دی، نو مطلوب سمه دی.

مثال: وبنیاست که n^2 يو جفت طبی عدد وي، نو n هم جفت دی؟
ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n يو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k + 1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k يو تام عدد دی، نو ددې $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ عدد مریع مساوی ده په:
 $\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$

پورتني مساوات بشکاره کوي چې n^2 يو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتيجه کې دا فرض چې n يو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتيجه ته رسپرو چې n هم يو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتيجه ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پونته

وبنیاست چې $\sqrt{3}$ يو غیر ناطق عدد دی.

د ریاضی منطق او دییان استنتاج

له خنگ ملګری خخه دیو خبر اوريدل به خه
نتیجه ولري؟
آیا خبر سم دی که ناسم؟

تعريف

يوې خبری جملې ته بیان وايی چې نتیجه ېې په سموالي يا ناسم والي پای ته ورسپړي.

فعالیت

لاندې جملې په پام کې ونسیع او ونسیاست چې له هغه خخه کومه یوه ېې بیان او کومه یوه ېې بیان
نه دی او منطقی نتیجه ېې خه ده؟
(i) نن ورڅ باران نه اوري.
(ii) آیا نن ورڅ باران نه اوري?
(iii) بارانه اوره..
(iv) خه زیات باران اوري!

له پورتني فعالیت خخه لاندې نتیجه لاس ته راخی.
نتیجه:

1 - هره جمله نه شی کېدای چې بیان وي. یوه جمله کیدای شي یوه حکمي، تعجبی پونسته او یا
يو خبر وي.

2 - هره خبری جمله سمه يا ناسمه ده.

یادوونه: که یو بیان ته P ووایو، د سم بیان د لیکلو طریقه $T \equiv P$ او د ناسم بیان د لیکلو طریقه

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دی $\sim P$ د بیان نفی بنیي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابی په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هریان لپاره لروچې:

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثال: د مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده $= P$) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.

حل: د پورتنې بیان د ارزیابی لپاره پوهېړو چې نو مورې بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نوکولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفی حالت عبارت دی له « P سم نه دی » یعنی $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دی په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعنی P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $T = \sim P$ دی. د پورتنې څواب صحت په لاندې جدول کې گورو:

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوہ بیانونه را کړښوی وي، په دې حالت کې:

1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفی ترکیب یا (منطقی " او ") په نامه یادېږي، د " \wedge " علامه د (او) په معنا په کار ورل شوی ده.

2 - د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلی ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادېږي، د " \vee " علامه د (یا) په معنا په کار ورل شوی ده.

3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د \Rightarrow علامه بنکاره کوي چې p د شرطی ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.

4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطی ترکیب په نامه او یا د (که او یوازی که) په نامه یادېږي.
د (\Leftrightarrow) علامه بنکاره کوي چې که p د شرطی ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که د شرطی ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که او یوازی که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې گورو:

		\Leftrightarrow	\Rightarrow	\vee	\wedge	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T			T		T	T		T	T	T
T	F			F		F	F		F		F
F	T			F		F	T		T		F
F	F			F		F	F		T		T

لوړۍ مثال: که چېږي $P \equiv (2+4=6)$ او (د منفي عدد مریع) $q \equiv$ بیانونه راکړل شوي ووي د q ، $\sim P$ ، $\sim p$ ، $\sim (p \wedge q)$ ، $\sim (p \vee q)$ ، $\sim q$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړي.

حل: پورتنيو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په ترتیبولو سره بنکاره کړئ چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ د بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وينو چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ د بیان هر وخت سم دی.

1 - د صحت د جدول په تر تیبولو سره و بنیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی - متوجه اوسي چې p او $\sim p$ يوله بله مستقل نه دی.

2 - د صحت د جدول په جورپولو سره و بنیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (p \vee q)$ او د $(p \Rightarrow q) \sim$ د بیانونو ارزښت سره مساوی دی یعنې:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنديز

د رياضي استدلال:

هغه طريقه چې د هغې په واسطه د رياضي د يو بيان سموالي په لاس راخي، د رياضي د استدلال په نامه يادېږي.

شهودي درگ:

هغه طبیعی یا حسی پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالي یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درگ خخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلاکې يوله بله سره توپير لري.

تمثيلي یا قياسي استدلال:

د دوو پينبو تر منځ د ورته والي پيداکول او د هغوي په باره کې يوشان نتيجې اخيسنلو ته تمثيلي یا قياسي استدلال وابي.

استقرائي استدلال:

هغه طريقه چې د يو شمېر مشاهد و پر اساس ور خخه عمومي نتيجه اخيسنل کېږي یعنې د جز نه کل په لاس راخي د استقرائي استدلال په نامه يادېږي.

د رياضي د استدلالا:

که چېږي $P(n)$ د طبیعی عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوي وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ سم وي او په دويم پراوکې د $p(k)$ له سموالي خخه د $p(k+1)$ سموالي په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعی عدد (n) لپاره سم دی او درياضي د استدلال د استدلال په نامه يادېږي.

نتیجوی استدلال:

له هغه حقیقتونو خخه په گته اخیستنه چې صحیح والي یې په پیل کې منل شوی وي، عمومی نتیجه لاس ته راول شی، د استنتاجی استدلال يا د نتیجې اخیستې د طریقې په نامه یادېږي. یا په بل عبارت هغه طریقه د چې سم والي مو ثبوت يا قبول کړي وي.

د نفی مثال استدلال:

کله چې له مثال سره وبنایو چې عمومی نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومی ډول بنکاره کړو، دې ته د مثال د نفی کولو استدلال وايي.

غیر مسقیم ثبوت:

که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسپرو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وايي.

بیان:

یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادېږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه او با ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:

که د p او q دوہ بیانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:

-1 د $p \wedge q$ ترکیب د P او Q دوہ بیانونه د عطفی ترکیب یا (منطقی "او") په نامه یادېږي.

چې د p او q د بیان په شکل ویل کېږي.

-2 د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلی ترکیب (منطقی "یا") په نامه یادېږي، د

(\vee) علامه د (یا) په معنا په کار ورل شوي ده.

-3 (که چېږي نو) او یا د " \Rightarrow " منطقی علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو q ویل کېږي، د \Rightarrow علامه بنکاره کوي چې p د شرطی ترکیب اساس دی، دې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.

-4 که یوازې که یا دا " \Leftrightarrow " منطقی علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطی ترکیب دی چې د (p که او یوازې که q) دی.

د فصل پوښتني

1 - له لاندي څوابونو خخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟

الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرائي طریقې له ستونزو خخه یوه ستونزه ده.

ب- درياضي د استدلال له قوي طریقو خخه یوه هم استقرائي طریقه ده.

ج- درياضي په استقرائي طریقې کې یوه ستونزه د مشاهداتو کموالي دی.

د- د الف او ج څوابونه سم دی.

2 - له لاندي څوابونو خخه کوم یوې سه نه دی؟

استقرائي استدلال

الف- درياضي له مسأله خخه یوه قوي طریقه ده.

ب- د مسأله په برخه کې مورته د عمومي قوانينو لارښونه کوي.

ج- دمسالو د حل لپاره له رياضي پرته یوه طریقه ده.

د- دمسالو د حلولو لپاره د رياضي طریقه نه ده.

3 - د شهود په برخه کې له لاندي څوابونو خخه کوم یوې سه (صحیح) دی؟

الف- دDasپي نتيجه د اخیستنه لپاره چې سل په سلوکې سمه ده.

ب- له شهود خخه په ګهه اخیستنه پر ډاډ سره نه شووویلاي چې نتيجه سل په سلوکې سمه ده.

ج- شهود درياضي د بنه درک کولو لپاره دی.

د- له شهود خخه په ګهه اخیستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعی گمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 - له لاندي څوابونو خخه کوم یوې سه نه دی؟

الف: استقرائي استدلال له جز خخه کل ته رسيدل دي.

ب: استقرائي استدلال له کل خخه جز ته رسيدل دي.

ج: له استقرائي استدلال خخه نه شوکولاي چې درياضي دقیق ثبوت لپاره ګټه واخلو.

د: استقرائي استدلال ديو شمېر مشاهد و پر اساس یوه کلې نتيجه ده.

5 - د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندي څوابونو خخه کوم یوې سه نه دی؟

الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وریدلي ده.

ب: د یوه بنوونځي ټول فارغان له کمپیوټر سره بلد او په رياضي بنه پوهېږي، ضمير چې له هملي بنوونځي خخه فارغ شوي دي. نو له کمپیوټر سره بنه بلد او په رياضي بنه پوهېږي.

ج: که یوه خلور ضلعي مریع وي، نو قطرونه یې یو پریل عمود دي، که د خلور ضلعي قطرونه یو پر بل عمود وي، نو دا خلور ضلعي مریع ده.

د: که د یوه مثلث دوی ضلعی سره مساوی وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث دری ضلعی سره مساوی وي، متساوي الاصلع مثلث دی، نو هر متساوي الاصلع مثلث، متساوي الساقین مثلث دی.

6 - د قیاسي استدلال په واسطه وبنیاست د هرې زاوې لپاره $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

7 - د استقرایي استدلال په واسطه وبنیاست چې د n^2 مسلسلو تاقو طبیعی عددونو مجموعه له سره مساوی ده.

8 - له استقرایي استدلال سره وبنیاست چې د هر طبیعی عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

9 - د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتونو د جمعی حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 - له یوه مثال سره وبنیاست چې د $3^n + 2^n$ افاده د هر طبیعی عدد لپاره هر وخت لوړنې عدد نه دی.

11 - د غیر مستقيم ثبوت د استدلال په واسطه وبنیاست که n یو طبیعی اختياری عدد وي او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 - د (باران اوري او وريغ نشته دي، نو باران نه اوري) د ترکيبي بيانونو لپاره د صحت جدول جور کړئ، په داسې حال کې که

(باران اوري) او ((وریغ ده $\beta = \alpha$) سره وبنایو. (1) عدد د سم او (0) عدد د ناسم لپاره په کاريوسې.

∞	β	$-\infty$	$-\beta$	$\infty \wedge -\beta$	$\infty \wedge -\beta \Rightarrow -\infty$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				