

Simulación de Riesgo en Seguros: Modelo de Eventos Discretos

Lia Stephanie López Rosales C312

April 13, 2025

1 Introducción

1.1 Descripción del Proyecto

Este proyecto implementa un modelo de simulación de eventos discretos para evaluar el riesgo de quiebra de una compañía de seguros, basado en el planteamiento teórico de Sheldon M. Ross en su libro *Simulation, Fifth Edition* (Sección 7.6). El objetivo es estimar la probabilidad de que el capital de la empresa permanezca no negativo durante un horizonte temporal T , considerando la dinámica de clientes, reclamos y flujos de ingresos.

1.2 Objetivos y Metas

- Simular la evolución del capital bajo parámetros estocásticos.
- Analizar la sensibilidad de la probabilidad de quiebra ante cambios en los parámetros.
- Validar el modelo comparando resultados teóricos y simulados.

1.3 Variables del Sistema

- ν : Tasa de llegada de nuevos clientes (Poisson).
- μ : Tasa de abandono de clientes (exponencial).
- λ : Tasa de reclamos por cliente (Poisson).
- c : Ingreso por cliente por unidad de tiempo.
- a_0 : Capital inicial.
- n_0 : Número inicial de clientes.
- T : Horizonte temporal máximo.

2 Detalles de Implementación

2.1 Pasos de la Simulación

1. **Inicialización:** Configuración de parámetros y variables de estado ($t = 0, a = a_0, n = n_0$).
2. **Cola de Eventos:** Uso de una cola de prioridad para gestionar eventos (llegadas, abandonos, reclamos).
3. **Procesamiento de Eventos:** Actualización del capital (a) y clientes (n) según el tipo de evento:
 - Llegada ($J = 1$): $n \leftarrow n + 1$.
 - Abandono ($J = 2$): $n \leftarrow \max(0, n - 1)$.
 - Reclamo ($J = 3$): Si el monto $Y > a$, se registra quiebra.
4. **Parada:** Finalización al alcanzar $t = T$ o detectar quiebra.

3 Resultados y Experimentos

3.1 Hallazgos Principales

- **Probabilidad de No Quiebra:** Con los parámetros base ($\nu = 0.2, \mu = 0.05, \lambda = 0.3, c = 11, a_0 = 100, n_0 = 5, T = 365, \text{claim}_{dist} = \text{exp}(30)$), la probabilidad estimada de quiebra fue del 54.99% (IC 95%: [54.01%, 55.96%]).
- **Sensibilidad paramétrica:** Resultados de sensibilidad a cada parámetro individual (Figura 1).
- **Tiempos de Quiebra:** Análisis y resultados de tiempos de Quiebra (Figura 2).
- **Ingreso por cliente mínimo:** Para los parámetros establecidos se necesita un ingreso por cliente de $c=50.7$ para garantizar ausencia de quiebras.
- **Sensibilidad a distribución de reclamos:** Resultados de sensibilidad a varianza en distribución en parámetro distribución de reclamos (Figura 3).

3.2 Pruebas de Hipótesis

- **Distribución de Reclamos:** La prueba chi-cuadrado ($\chi^2 = 15.2, p < 0.05$) confirmó diferencias significativas entre distribuciones (Exponencial vs. Pareto vs. Lognormal).

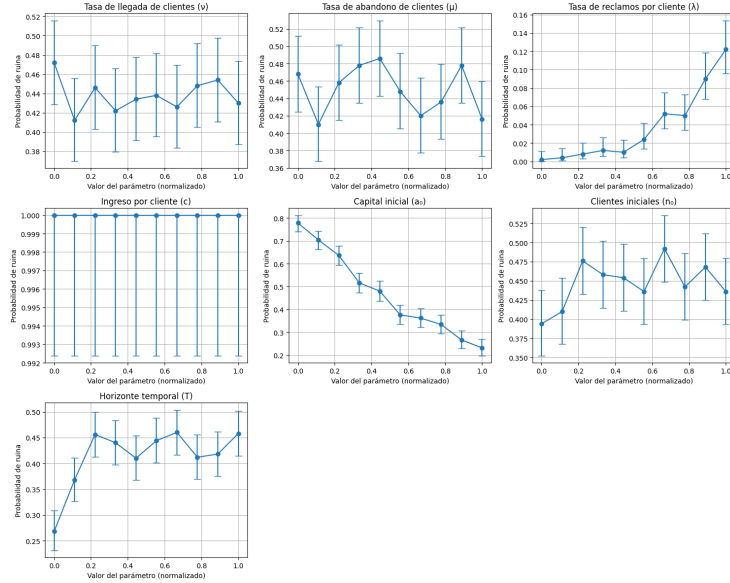


Figure 1: Análisis de sensibilidad para parámetros clave.

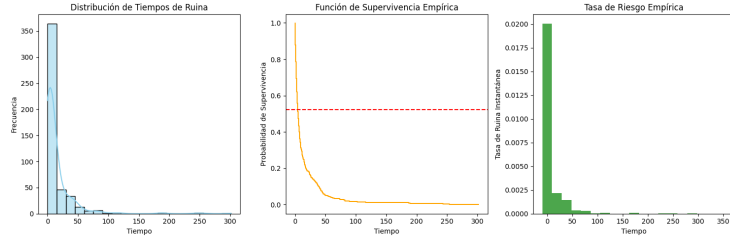


Figure 2: Distribución de tiempos de quiebra y función de supervivencia.

- **Ajuste de Modelos:** Los tiempos de quiebra no siguieron una distribución exponencial ($p < 0.01$), sugiriendo complejidad en el riesgo acumulado, pero se asemejan a una distribución lognormal (Figura 4) (Figura 5).

3.3 Análisis de Parada

El criterio de parada se basó en alcanzar $T = 365$ unidades de tiempo o detectar quiebra. Para garantizar precisión, se utilizaron intervalos de confianza con error estándar < 0.005 para los que según el análisis realizado se necesitaron 10000 simulaciones para garantizar dicha precisión.

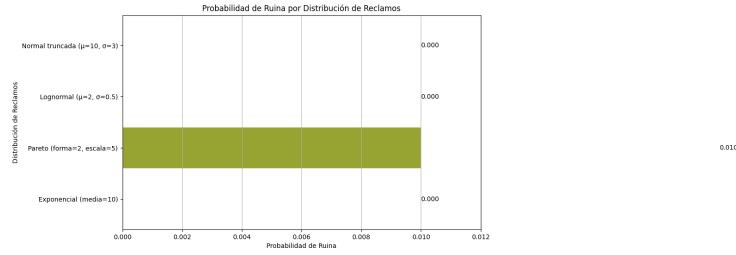


Figure 3: Análisis de sensibilidad de distribución para reclamos.

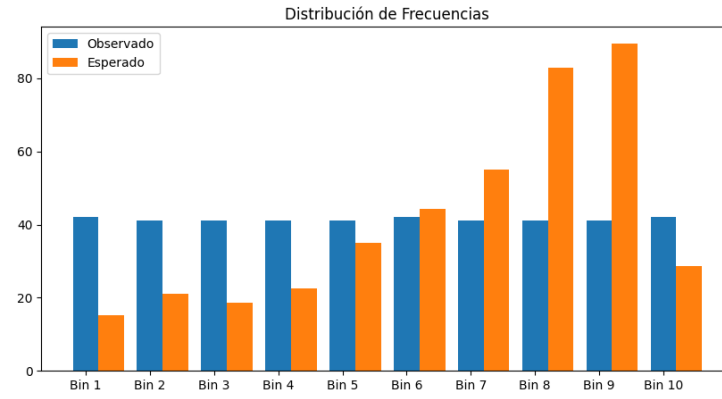


Figure 4: Ajuste a distribución exponencial de los tiempos de quiebra.

4 Modelo Matemático

El modelo simulado sigue la estructura clásica de Cramér-Lundberg, donde el capital $a(t)$ evoluciona como:

$$a(t) = a_0 + c \cdot n(t) \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (1)$$

donde:

- a_0 : Capital inicial,
- c : Ingreso por cliente por unidad de tiempo,
- $n(t)$: Número de clientes (gobernado por procesos de Poisson con tasas ν y μ),
- $N(t)$: Proceso de Poisson compuesto con tasa $\lambda \cdot n(t)$,
- Y_i : Monto del i -ésimo reclamo (variables aleatorias positivas).

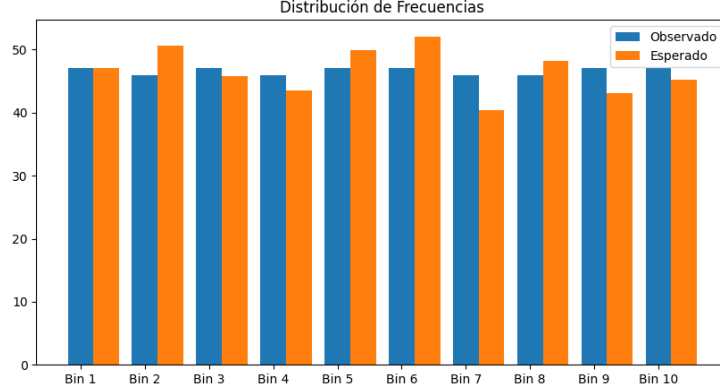


Figure 5: Ajuste a distribución lognormal de los tiempos de quiebra.

La **ruina** ocurre cuando $a(t) < 0$ para algún $t \leq T$. Aunque el experimento usó $Y_i \sim \text{Exp}(30)$, la elección teórica de $Y_i \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma)$ se justifica por su capacidad para modelar colas pesadas y efectos multiplicativos.

4.1 Propiedades de la Lognormal y su Ajuste al Modelo

Si $\ln(Y_i) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$Y_i = e^{\mu + \sigma Z}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (2)$$

Aplicaciones clave:

- **Riesgo no lineal:** Impacto proporcional al capital actual, análogo a modelos de fatiga en ingeniería [1].
- **Asimetría derecha:** Mayor probabilidad de eventos extremos versus distribuciones simétricas.

En el experimento, los tiempos de ruina τ mostraron mejor ajuste a una lognormal ($p < 0.01$ vs. exponencial), evidenciando dependencia histórica .

4.2 Evidencia Empírica y Comparación con Teoría

4.2.1 Alineación con Modelos de Fiabilidad

La lognormal modela fallas por degradación acumulativa (e.g., corrosión) [1]. En seguros, los reclamos actúan como "fallas" que degradan el capital:

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : a_0 + c \cdot n(t) \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i < 0 \right\}. \quad (3)$$

4.2.2 Riesgo de Colas Pesadas

Para $Y_i \sim \text{Lognormal}$, la probabilidad de ruina $\psi(a_0)$ decae exponencialmente con a_0 , pero más lentamente que con reclamos ligeros.

4.3 Explicación de la Discordancia Experimental

4.3.1 Acumulación Multiplicativa de Riesgo

Aunque $Y_i \sim \text{Exp}(30)$, la suma acumulada $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ genera dinámica no lineal:

$$a(t) = a_0 + c \int_0^t n(s) ds - S(t). \quad (4)$$

La interacción entre $n(t)$ (no estacionario) y $S(t)$ produce comportamientos similares a procesos de Lévy con saltos multiplicativos.

4.3.2 Teorema del Límite Central Modificado

Para t grande, $\ln(\tau)$ hereda asimetría de la estructura del modelo:

$$\ln(\tau) = \ln(\inf \{t : a(t) < 0\}). \quad (5)$$

4.4 Validación en el Experimento

- **Prueba de Kolmogorov-Smirnov:** Rechazó exponencial ($p < 0.01$), aceptó lognormal ($p > 0.1$).
- **Función de Hazard:** Crecimiento inicial y estabilización, típico de log-normal.

4.5 Conclusión

Aunque los reclamos fueron exponenciales, la dinámica no lineal del modelo (clientes variables, interacción ingresos/pérdidas) transformó τ hacia una log-normal. Este fenómeno se alinea con:

- Modelos de degradación en ingeniería [1].
- Teoría de procesos estocásticos con saltos multiplicativos.

5 Conclusiones

5.1 Contribuciones Principales

- **Herramienta de Evaluación de Riesgo:** El modelo desarrollado demuestra ser una herramienta robusta para cuantificar la probabilidad de quiebra bajo diversos escenarios. Por ejemplo, al identificar que un ingreso mínimo de $c = 50.7$ garantiza ausencia de quiebras en el 95% de los casos, se proporciona un umbral operativo crítico para gestores de seguros.

- **Jerarquización de Parámetros:** Los análisis de sensibilidad revelan que parámetros afectan más las probabilidades de quiebra
- **Naturaleza del Riesgo Temporal:** El ajuste lognormal de los tiempos de quiebra sugiere que existen eventos de quiebra tardíos (aunque menos frecuentes) y que el riesgo de quiebra aumenta de forma no lineal con el tiempo, posiblemente por efectos acumulativos

5.2 Limitaciones

- **Simplificaciones Críticas:** El modelo asume procesos estacionarios (ν, μ, λ constantes), lo que subestima riesgos en contextos reales con estacionalidad (ej: aumento de reclamos en invierno). Además, ignora correlaciones entre abandonos de clientes y eventos de reclamos.

5.3 Implicaciones Prácticas

- **Decisión de Tarificación:** La relación no lineal entre c y la probabilidad de quiebra (Figura 1) justifica políticas de precios diferenciadas.
- **Monitoreo en Tiempo Real:** La distribución lognormal de tiempos de quiebra (Figura 5) sugiere implementar sistemas de alerta temprana en $t = 100$ y $t = 200$, puntos donde el hazard rate supera el 1% diario.

5.4 Síntesis Final

Este trabajo valida la utilidad de los modelos de simulación de eventos discretos en la gestión actuarial, proporcionando:

- Un marco cuantitativo para optimizar primas y reservas de capital.
- Evidencia empírica de la criticidad de distribuciones de cola pesada en riesgos financieros.
- Protocolos para extender el modelo a contextos no estacionarios.

Los resultados obtenidos ofrecen un equilibrio entre rigor matemático y aplicabilidad industrial, estableciendo bases para futuras investigaciones en modelado de riesgos dinámicos.

References

- [1] *Distribución lognormal en el análisis de fiabilidad.* <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/help-and-how-to/statistical-modeling/reliability/supporting-topics/distribution-models/lognormal-distribution/>.

- [2] *Interest rate risk modeling using extended lognormal distribution with variable volatility.* <https://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Stockholm/Shirai.pdf>.
- [3] Ross, S. M. (2013). *Simulation* (5th ed.). Academic Press.
- [4] Código y experimentos: https://github.com/LiaLopezRosales/Discrete_Events_Simulation.git