

Отчёт по заданию 5.2

Соловьёва Лиана-Юлия, 21.Б07-мм

Вычисление интегралов при помощи КФ Гаусса

1 Описание работы

Запрашивается интервал интегрирования $[a, b]$ и N_1, N_2, N_3 - три желаемых количества узлов для построения КФ Гаусса.

1.1 Построение КФ Гаусса

- строим полином Лежандра степени N по формуле $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_k(x) = \frac{2k-1}{k}P_{k-1}(x)x - \frac{k-1}{k}P_{k-2}(x), k = 2, 3, \dots, N$
- находим узлы для построения КФ Гаусса, являющиеся корнями $P_N(x)$,
- находим коэффициенты по формуле $A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{N^2(P_{N-1}(x_k))^2}$
- получаем ответ по формуле $\frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{b-a}{2}x_k + \frac{b+a}{2}\right)$

2 Тестирование

Функция: $\frac{\sin(x)}{x}$

Отрезок: $[0, 2]$

"Точное" значение интеграла находилось с помощью библиотеки `scipy`

"Точное" значение интеграла: 1.6054129768026946

Количество узлов: N_1 = 1

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

i	x _i	A _i
1	0.0	2.0

Значение интеграла, полученное с помощью КГ Гаусса: 1.682941969615793

Погрешность: 0.07752899281309844

Количество узлов: N_2 = 2

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

i	x _i	A _i
1	-0.5773502691896257	1.0000000000000002
2	0.5773502691896258	0.9999999999999996

Значение интеграла, полученное с помощью КГ Гаусса: 1.604453633636794

Погрешность: 0.0009593431659005169

Количество узлов: N_3 = 3

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

i	x _i	A _i
1	-0.7745966692414834	0.5555555555555552
2	-5.828709737264919e-21	0.8888888888888888
3	0.7745966692414833	0.5555555555555556

Значение интеграла, полученное с помощью КГ Гаусса: 1.6054186216044681

Погрешность: 5.644801773563302e-06

≡Проверка на полиномах≡

Количество узлов: 1

Степень полинома: 1

"Точное" значение интеграла: 2.0

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 2.0

Погрешность: 0.0

Количество узлов: 2

Степень полинома: 3

"Точное" значение интеграла: 4.0

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 3.9999999999999982

Погрешность: 1.7763568394002505e-15

Количество узлов: 3

Степень полинома: 5

"Точное" значение интеграла: 10.666666666666666

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 10.666666666666682

Погрешность: 1.5987211554602254e-14

"Точное" значение интеграла: 1.6054129768026946

Количество узлов: $N_1 = 4$

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

+---+-----+-----+-----+			
i	x_i		A_i
+---+-----+-----+-----+			
1	-0.8611363115940526		0.3478548451374538
2	-0.33998104358485626		0.6521451548625461
3	0.33998104358485626		0.6521451548625461
4	0.8611363115940526		0.3478548451374538
+---+-----+-----+-----+			

Значение интеграла, полученное с помощью КГ Гаусса: 1.6054129573886735

Погрешность: 1.9414021057428954e-08

Количество узлов: $N_2 = 5$

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

+---+-----+-----+-----+			
i	x_i		A_i
+---+-----+-----+-----+			
1	-0.906179845938664		0.23692688505618936
2	-0.5384693101056831		0.4786286704993664
3	-1.63205243577372e-20		0.5688888888888889
4	0.5384693101056831		0.4786286704993664
5	0.906179845938664		0.23692688505618936
+---+-----+-----+-----+			

Значение интеграла, полученное с помощью КГ Гаусса: 1.6054129768464875

Погрешность: 4.3792969250944225e-11

Количество узлов: $N_3 = 6$

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

+---+-----+-----+-----+			
i	x_i		A_i
+---+-----+-----+-----+			
1	-0.932469514203152		0.17132449237916933
2	-0.6612093864662645		0.360761573048139
3	-0.23861918608319693		0.46791393457269126
4	0.2386191860831969		0.46791393457269126
5	0.6612093864662645		0.360761573048139
6	0.9324695142031519		0.17132449237917133
+---+-----+-----+-----+			

Значение интеграла, полученное с помощью КГ Гаусса: 1.6054129768026253

Погрешность: 6.927791673660977e-14

===Проверка на полиномах===

Количество узлов: 4

Степень полинома: 7

"Точное" значение интеграла: 32.0

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 31.99999999999982

Погрешность: 1.7763568394002505e-14

Количество узлов: 5

Степень полинома: 9

"Точное" значение интеграла: 102.4

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 102.40000000000003

Погрешность: 2.842170943040401e-14

Количество узлов: 6

Степень полинома: 11

"Точное" значение интеграла: 341.3333333333333

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 341.33333333333456

Погрешность: 1.2505552149377763e-12

"Точное" значение интеграла: 1.6054129768026946

Количество узлов: N_1 = 7

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

+---+-----+		
i	x_i	A_i
+---+-----+		
1	-0.9491079123427585	0.12948496616886956
2	-0.7415311855993945	0.27970539148927687
3	-0.4058451513773972	0.3818300505051189
4	-3.1475678884774184e-20	0.4179591836734694
5	0.4058451513773972	0.3818300505051189
6	0.7415311855993945	0.27970539148927687
7	0.9491079123427585	0.12948496616886956
+---+-----+		

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 1.605412976802695

Погрешность: 4.440892098500626e-16

Количество узлов: N_2 = 8

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

+---+-----+		
i	x_i	A_i
+---+-----+		
1	-0.9602898564975363	0.101228536290374
2	-0.7966664774136267	0.22238103445337448
3	-0.525532409916329	0.31370664587788727
4	-0.1834346424956498	0.3626837833783618
5	0.1834346424956498	0.3626837833783618
6	0.525532409916329	0.31370664587788727
7	0.7966664774136267	0.22238103445337448
8	0.9602898564975363	0.101228536290374
+---+-----+		

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 1.6054129768026912

Погрешность: 3.3306690738754696e-15

Количество узлов: $N_3 = 9$

Таблица узел \leftrightarrow коэффициент

+---+-----+-----+				
i	x_i		A_i	
+---+-----+-----+				
1	-0.9681602395076261		0.08127438836157504	
2	-0.8360311073266358		0.18064816069485767	
3	-0.6133714327005904		0.26061069640293566	
4	-0.3242534234038089		0.31234707704000303	
5	-5.1294512813245293e-20		0.3302393550012598	
6	0.3242534234038089		0.31234707704000303	
7	0.6133714327005904		0.26061069640293566	
8	0.8360311073266358		0.18064816069485767	
9	0.9681602395076261		0.08127438836157504	
+---+-----+-----+				

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 1.6054129768026968

Погрешность: 2.220446049250313e-15

≡Проверка на полиномах≡

Количество узлов: 7

Степень полинома: 13

"Точное" значение интеграла: 1170.2857142857142

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 1170.285714285713

Погрешность: 1.1368683772161603e-12

Количество узлов: 8

Степень полинома: 15

"Точное" значение интеграла: 4096.0

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 4095.9999999999948

Погрешность: 5.184119800105691e-11

Количество узлов: 9

Степень полинома: 17

"Точное" значение интеграла: 14563.555555555555

Значение интеграла, полученное с помощью КФ Гаусса: 14563.555555555626

Погрешность: 7.09405867382884e-11