

Отчёт по заданию 5.1

Соловьёва Лиана-Юлия, 21.Б07-мм

Приближенное вычисление интегралов при помощи квадратурных формул Наивысшей Алгебраической Степени Точности (КФ НАСТ)

1 Описание работы

Задача разбита на две подзадачи: спостроить ИКФ и КФ НАСТ.

Запрашивается интервал интегрирования $[a, b]$ и n – количество узлов (минимум 2) и сами узлы (различные) для построения ИКФ.

1.1 Построение ИКФ

- находим моменты по формуле $\mu_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx$
- находим коэффициенты A_i ,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \dots \\ \mu_{n-1} \end{pmatrix}$$
- получаем ответ по формуле $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$

1.2 Построение КФ НАСТ

- находим моменты по формуле $\mu_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx$
- находим коэффициенты a_i ,
$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_n \\ -\mu_{n+1} \\ \dots \\ -\mu_{2n-1} \end{pmatrix}$$
- методом бисекции решаем уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$,
- по алгоритму построения ИКФ строим КФ НАСТ

2 Тестирование

Функция: $\sin(x)$

Вес: $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

Отрезок: $[0, 1]$

"Точное" значение интеграла находилось с помощью библиотеки `scipy`

2.1 n=3

Input:

Узел 1: 1

Узел 2: 2

Узел 3: 3

Output: Рис.1

2.2 n=4

Узел 1: -1

Узел 2: 0

Узел 3: 1

Узел 4: 2

Output: Рис.2

2.3 n=5

Input:

Узел 1: 0

Узел 2: 0.1

Узел 3: 0.2

Узел 4: 0.3

Узел 5: 0.4

Output: Рис.3

≡≡≡ Вычисление ИКФ ≡≡≡

Момент 0: 1.5707963267949776

Момент 1: 1.1780972450396037

Момент 2: 0.9817477042459112

Коэффициент 0 ИКФ: 2.2580197199088796

Коэффициент 1 ИКФ: -0.9817477044724295

Коэффициент 2 ИКФ: 0.29452431135852775

"Точное" значение интеграла: 1.040710633418337

Значение интеграла, вычисленное с помощью ИКФ: 1.0489206891513179

Погрешность: 0.008210055732980948

≡≡≡ Проверка на полиноме степени 2 ≡≡≡

"Точное" значение интеграла: 1.8333333333333335

Значение интеграла, вычисленное с помощью ИКФ: 1.8333333333333334

Погрешность: 4.440892098500626e-16

≡≡≡ Вычисление КФ НАСТ ≡≡≡

Узлы, по которым строим КФ НАСТ

[0.18825509702198914, 0.611260465694184, 0.9504844337822296]

Момент 0: 1.5707963267949776

Момент 1: 1.1780972450396037

Момент 2: 0.9817477042459112

Момент 3: 0.8590292412160845

Момент 4: 0.7731263170945272

Момент 5: 0.708699124003381

Коэффициент 0 КФ НАСТ: -0.10937499856058096

Коэффициент 1 КФ НАСТ: 0.8749999952033963

Коэффициент 2 КФ НАСТ: -1.7499999964984496

"Точное" значение интеграла: 1.040710633418337

Значение интеграла, вычисленное с помощью КФ НАСТ: 1.0407109192999484

Погрешность: 2.858816114947871e-07

≡≡≡ Проверка на одночлене степени 5 ≡≡≡

"Точное" значение интеграла: 0.16666666666666669

Значение интеграла, вычисленное с помощью КФ НАСТ: 0.16666666666667343

Погрешность: 6.744604874597826e-15

Рис. 1:

```

=== Вычисление ИКФ ===
Момент 0: 1.5707963267949776
Момент 1: 1.1780972450396037
Момент 2: 0.9817477042459112
Момент 3: 0.8590292412160845
Коэффициент 0 ИКФ: -0.044996769759593214
Коэффициент 1 ИКФ: 0.42951462063730705
Коэффициент 2 ИКФ: 1.2394564765545169
Коэффициент 3 ИКФ: -0.05317800063725316
"Точное" значение интеграла: 1.040710633418337
Значение интеграла, вычисленное с помощью ИКФ: 1.032475518972445
Погрешность: 0.008235114445891867

=== Проверка на полиноме степени 3 ===
"Точное" значение интеграла: 2.083333333333335
Значение интеграла, вычисленное с помощью ИКФ: 2.083333333333335
Погрешность: 0.0

=== Вычисление КФ НАСТ ===
Узлы, по которым строим КФ НАСТ
[0.1169777724360466, 0.4131759039746251, 0.7499999957556724, 0.9698463097917274]
Момент 0: 1.5707963267949776
Момент 1: 1.1780972450396037
Момент 2: 0.9817477042459112
Момент 3: 0.8590292412160845
Момент 4: 0.7731263170945272
Момент 5: 0.708699124003381
Момент 6: 0.6580777580032723
Момент 7: 0.6169478981253999
Коэффициент 0 КФ НАСТ: 0.03515624736273747
Коэффициент 1 КФ НАСТ: -0.4687499820319286
Коэффициент 2 КФ НАСТ: 1.6874999668458923
Коэффициент 3 КФ НАСТ: -2.2499999819580623
"Точное" значение интеграла: 1.040710633418337
Значение интеграла, вычисленное с помощью КФ НАСТ: 1.0407106330571123
Погрешность: 3.612246057826951e-10

=== Проверка на одночлене степени 7 ===
"Точное" значение интеграла: 0.12500000000000003
Значение интеграла, вычисленное с помощью КФ НАСТ: 0.12499999999999549
Погрешность: 4.538036613155327e-15

```

Рис. 2:

```

=== Вычисление ИКФ ===
Момент 0: 1.5707963267949776
Момент 1: 1.1780972450396037
Момент 2: 0.9817477042459112
Момент 3: 0.8590292412160845
Момент 4: 0.7731263170945272
Коэффициент 0 ИКФ: 84.40575887368277
Коэффициент 1 ИКФ: -378.3001153717286
Коэффициент 2 ИКФ: 645.7445524697683
Коэффициент 3 ИКФ: -499.70958146229793
Коэффициент 4 ИКФ: 149.43018181737042
"Точное" значение интеграла: 1.040710633418337
Значение интеграла, вычисленное с помощью ИКФ: 1.0392199780871039
Погрешность: 0.0014906553312330484

=== Проверка на полиноме степени 4 ===
"Точное" значение интеграла: 2.283333333333337
Значение интеграла, вычисленное с помощью ИКФ: 2.2833333333333385
Погрешность: 4.884981308350689e-15

=== Вычисление КФ НАСТ ===
Узлы, по которым строим КФ НАСТ
[0.07937311556370702, 0.29229220739548356, 0.5711571292039594, 0.827430219153001, 0.9797464677713004]
Момент 0: 1.5707963267949776
Момент 1: 1.1780972450396037
Момент 2: 0.9817477042459112
Момент 3: 0.8590292412160845
Момент 4: 0.7731263170945272
Момент 5: 0.708699124003381
Момент 6: 0.6580777580032723
Момент 7: 0.6169478981253999
Момент 8: 0.5826730148965497
Момент 9: 0.5535393641518047
Коэффициент 0 КФ НАСТ: -0.010742153431879854
Коэффициент 1 КФ НАСТ: 0.21484331792471592
Коэффициент 2 КФ НАСТ: -1.2031234920133844
Коэффициент 3 КФ НАСТ: 2.7499980320427118
Коэффициент 4 КФ НАСТ: -2.7499991390875835
"Точное" значение интеграла: 1.040710633418337
Значение интеграла, вычисленное с помощью КФ НАСТ: 1.0407106333689546
Погрешность: 4.938227604611711e-11

=== Проверка на одночлене степени 9 ===
"Точное" значение интеграла: 0.10000000000000002
Значение интеграла, вычисленное с помощью КФ НАСТ: 0.09999999999999977
Погрешность: 2.248201624865942e-15

```

Рис. 3: