Реферат по теме 8 Реконструкция 3D формы объекта (косоугольного гексаэдра – «Г») по параллаксу его движения.(Вариант 1)

Зингеренко Михаил

14 Декабря 2022

1 Постановка задачи

Моделируется равномерное и прямолинейное перемещение Г по своей (задаваемой интерфейсом программы) траектории относительно фиксированной позиции системы проецирования. Решение задачи включает: а) проективно-инвариантное описание Г (идентифицирующее ребра, вершины и грани); получение оценок б) 3D направления перемещения Г, в) скорости v перемещения Г (в единицах f/такт, а также демонстрацию равномерности v); г) оценку 3D формы Г (например, в виде позиций вершин Г в канонической системе 3D координат либо через форму контуров всех шести граней, сопоставляемых с «заданной» их формой).

2 Прямая задача

Для генерации косоугольного гексаэдра можно воспользоваться школьными формулами. Для начала генерируем три случайных точки $H(x_1, y_1, z_1)$, $I(x_2, y_2, z_2)$, $J(x_3, y_3, z_3)$ дальше получим уравнение плоскости, решая систему уравнений вида:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + 1 = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + 1 = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + 1 = 0$$

Полученные коэффициенты являются коэффициентами уравнения плоскости. Генерируя две случайные точки (x, y) и подставляя в полученное выражение, находим z координату последней точки одной грани гексаэдра. Таким образом повторяем для всех других граней, учитывая точки принадлежащие нескольким граням. Дальше задаются параметры фокусного расстояния камеры (f), расположения относительно объекта и тактовая частота.

Равномерное движение осуществляется посредством прибавления ко всем координатам гексаэдра вектора сдвига V(x, y, z). На каждый кадр так же получается проекция точек на плоский экран:

$$\bar{x_2} = -\frac{f\bar{x_3}}{\bar{z_3}}$$

$$\bar{y_2} = -\frac{f\bar{y_3}}{\bar{z_3}}$$

где $\bar{x_2}$ и $\bar{y_2}$ двухмерные координаты, а $\bar{x_3}$, $\bar{y_3}$ и $\bar{z_3}$ трехмерные координаты. Для проверки видимости точек нам достаточно сравнить полученные координаты: отсутствие наложения (совпадения двухмерных координат) означает, что полученные точки могут удовлетворить условию видимости 7 точек. Для удаления 8 вершины можно воспользоваться алгоритмом Z буфера. Для каждой точки будем хранить ее глубину, самую глубокую точку наблюдатель видеть не должен. Таким образом мы получили 7 точек на двумерной плоскости которые могут быть обработаны в блоке обратной задачи.

3 Обратная задача

Для решения обратной задачи нам понадобиться инструмент однородных координат. В однородных координатах процесс проекции из трехмерного пространства в трехмерное можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Так как мы проецируем на плоскость, то можно зафиксировать $z_1 = 0$ таким образом мы так же можем убрать одну строку из матрицы P, получая систему вида:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

эту систему можно переписать в блочном виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xy} \\ P_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \end{bmatrix}$$

$$P_w = \begin{bmatrix} p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

теперь можно перевести из однородных двумерных координат в канонические:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1}{w_1} \\ \frac{y_1}{w_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} P_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Получив формульные соотношения между двухмерными координатами и трехмерными, посмотрим на рисунок 1

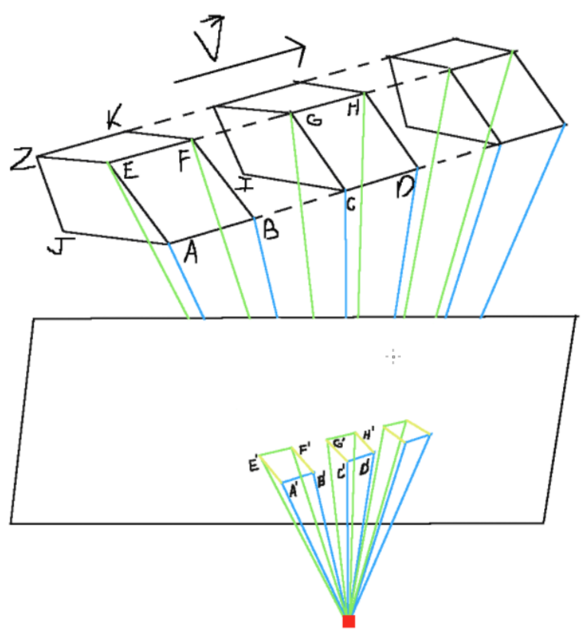

Рис. 1: Схематичный чертеж.

Что бы решить обратную задачу рассмотрим точку A. Предположим, что точка является началом трехмерных координат, то есть имеет координаты (0, 0, 0), таким образом мы можем записать первое уравнение в котором 12 неизвестных, используя формулу (1). Аналогично записываем уравнения для точки E и J, только их координаты нам не известны, получаем еще 6 неизвестных. Теперь запишем те же уравнения только для точек I, C, G, но выразив их пространственные координаты через координаты точек J, A, E и вектора сдвига V, таким образом мы добавили только 3 неизвестных. Итого имеем 6 уравнений и 21 неизвестную. Каждый следующий такт мы можем записывать 3 уравнения не добавляя новых неизвестных, следовательно еще 5 тактов дадут нам все нужные уравнения для решения системы. Решив такую систему, мы получим матрицу проективного преобразования, вектор сдвига и трёхмерные координаты точек J, E, A. Воспользовавшись формулой (1), можно вычислить координаты оставшихся видимых точек. Вычислить координаты последней 'невидимой' точки можно с помощью трех уравнений плоскостей (JZK) (KFB) (JAB). Пересеченьем всех трех плоскостей будет последняя точка. В итоге, чтобы восстановить форму фигуры, потребуется 6 тактов.