Appunti di Analisi Matematica

Liam Ferretti

8 novembre 2025

Sommario del corso

Per i ricevimenti bisogna prenotarsi via e-mail, e si svolgeranno nell'edificio 105 dell'edificio Castel Nuovo Si potranno trovare note ed esercizi su e-learning

Programma:

- Numeri reali
- Funzioni di variabili reali
- Successioni e serie
- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale ad una variabile
- Integrali
- Equazioni differenze lineari
- Funzioni di più variabili (tutti i capitoli precedenti comprendono le funzioni a più variabili)

I libri di testo sono presenti su e-learning, ed è consigliato "Crasta Malusa", da cui assegnerà gli esercizi.

L'esame sarà composto da scritto più orale, non ci sarà probabilmente un esonero, e con l'orale si può incrementare o decrementare il voto di fino a 3 punti in positivo o 3 in negativo, tranne nel caso in cui si commettano errori su: limiti, continuità o divisione per 0, che comporta la bocciatura immediata.

Indice

Capitolo 1

Numeri reali

La matematica si costruisce su:

- elementi di base:

  oggetti di base (enti primitivi)

  proprietà di basa (assiomi)

- regole di deduzione che sono fissate

1.1 Notazione

La notazione si divide in:

- Connettiva:

  $\neg$, non

  $\vee$, e

  $\wedge$, o

  $\Rightarrow$, implica

  $\iff$, equivale (se e solo se)

  : (t.c.) , tale che / tale per cui

- Quantificativa:

  $\exists$, esiste

  $\nexists$, non esiste

  $\exists!$, esiste ed è unico

  $\forall$, per ogni

1.2 Le proposizioni

Per proposizione Si intende una affermazione.
Es:

- P = oggi è martedì

- ¬P = oggi non è martedì
- Q = c'è il sole
- P ∧ Q = oggi è martedì e c'è il sole
- P ∨ Q = oggi è martedì oppure c'è il sole
- ¬(P ∧ Q) ⇒ P ∨ Q può essere vera (P oppure Q), ma P ∧ Q non può essere vera (P e Q), quindi non possono essere vere allo stesso tempo

A ⇒ B, vuol dire se A è vero allora B è vero.
A ⟺ B = (A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A), e vuol dire se e solo se A allora B.
Partendo dalla proposizione precedente, è vero che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$$

cioè è utile nelle dimostrazioni per assurdo. Nelle dimostrazioni si parte dagli assiomi e con le regole logiche si fanno ipotesi (affermazioni) che nel caso in cui fosse vera rende la tesi (la validità di una o più proprietà).

OSS: è **sbagliato** dire che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \Rightarrow \neg B$$

in quanto il non avvenire di A non implica che B non possa avvenire per altre motivazioni.

1.3 Insiemi

Un insieme è una collezioni di elementi

1.3.1 Notazione degli insiemi

- definizione di insieme: G := $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$, è necessario l'uso di := per definire un insieme, e vuol dire "definito come".
- quando due insiemi hanno gli stessi elementi si dichiara l'uguaglianza tra I_1 e I_2, con il simbolo =, ad esempio

$$F := \{0, 1\}, H := \{1, 0\} \rightarrow F = H$$

- per definire l'appartenenza di un elemento in un insieme si scrive $a \in I$, se questo elemento non appartiene all'insieme si rappresenta $a \notin I$ con a un elemento qualsiasi e I un insieme qualsiasi.

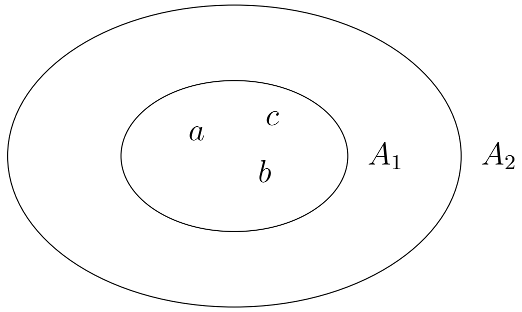
1.3.2 Relazione di ordine o inclusione

Se $A_1 \subset A_2 \rightarrow A_1$ è contenuto in A_2, e A_1 è al tal più grande quanto A_2, ovvero A_1 è un sotto insieme di A_2.

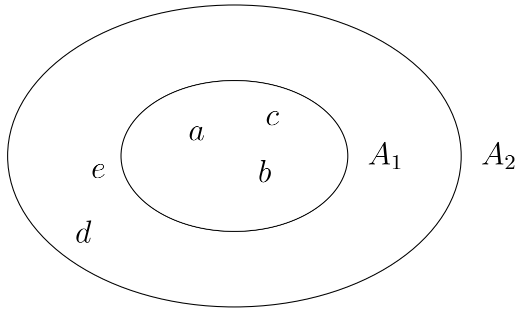
Se i due insiemi non sono uguali allora si segna $A_1 \nsubseteq A_2$, è quindi strettamente contenuto.

Se invece i due insiemi possono essere uguali, si scrive $A_1 \subseteq A_2$.

Es:



contengono gli stessi elementi quindi: $A_1 = A_2$



in questo caso A_2 contiene più elementi di A_1, quindi $A_1 \not\supseteq A_2$

1.3.3 Proprietà degli insiemi

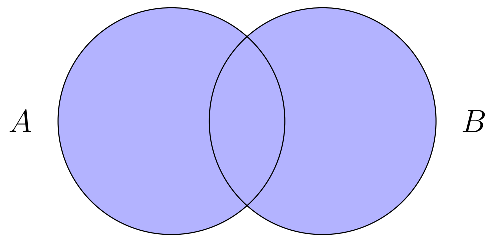
Gli insiemi hanno 3 proprietà principali:

- Riflessiva: $A \subseteq A$, per A insieme qualsiasi, quindi l'insieme contiene se stesso
- Antisimmetrica: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, per A, B insiemi qualsiasi
- Transitiva:$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$, per A, B, C insiemi qualsiasi

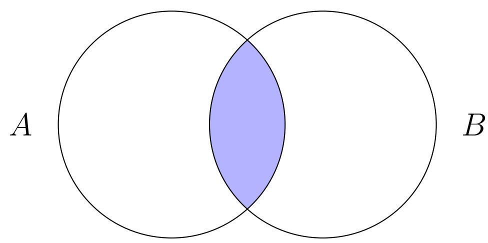
1.3.4 Operazioni tra insiemi

Presi due insiemi A, B allora esistono diverse proprietà:

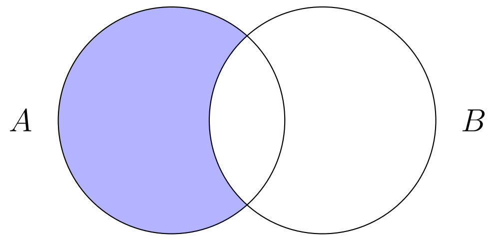
- Unione (o): $A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$



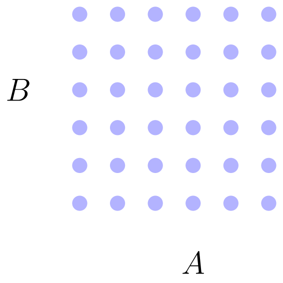
- Intersezione (e): $A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$



- Differenza (-): $A \setminus B := \{a : a \in A, a \notin B\}$



- Prodotto cartesiano: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$



1.4 Predicato

Una preposizione può dipendere da una o più variabili, ovvero un ente che varia in un gruppo, in quel caso prende il nome di predicato. Es:

$P =$ oggi è martedì

$P(x) = x$ è martedì

allora preso $A := \{lunedì, martedì, ..., domenica\}, x \in A$

$B := \{x \in A : P(x)\} = \{martedì\}$, con $P(x)$ si intendono le x che rendono $P(x)$ vera, quindi si cercano le x appartenenti ad A t.c. $P(x)$ sia vera.

1.4.1 Confronto simbologia logica e insiemistica

La simbologia nella logica e nella insiemistica è diversa, ma i termini sono gli stessi:

Logica	**Insiemistica**
A, ovvero A è vera	$A := \{x \in I : A(x)\}$, con $A \subset I$
$\neg A$, ovvero A non è vera	$A^c := \{x \in B : \neg A(x)\}$, con $A^c \not\subset B$
$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$\Rightarrow$, ad esempio $A \Rightarrow B$	$A \subset B$, perchè A è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $A(x)$ sia vera, allo stesso tempo B è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $B(x)$ sia vera, perciò dire che A implica B, vuol dire che gli elementi x che rendono veri A sono contenuti in B
$\iff$, ad esempio $A \iff B$	$A = B$, riprendendo la stessa argomentazione in questo caso B è vera se A è vera, ma allo stesso tempo A è vera se B è vera, perciò i due insiemi coincideranno

1.4.2 Notazione

- $x \in A \overset{def}{\Longrightarrow}$ x è elemento di A
- $x \notin A \overset{def}{\Longrightarrow}$ x non è elemento di A, quindi $x \in A^c$
- $A \cap B := \{a : A(a) \wedge B(a)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}\}$
- $A \cup B := \{a : A(a) \vee B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B := \{a : A(a) \vee \neg B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \notin B\} = \{x : x \in A \vee x \in B^c\}$
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B)^c$

1.4.3 Insieme parti di I

L'insieme parti di I, è definito come:

$$P(I) := \{X : X \subset I\}, \text{con } X \text{ insieme}$$

Preso $I := \{0,1\} \Rightarrow P(I) = \{0, 1, \{0,1\}\}$, $P(I)$ rappresenta l'insieme parti, ovvero l'insieme composto da tutti i possibili sottoinsiemi di I. Es:

$$A = \{0,1\} \Rightarrow P(A) = \{0, 1, \{0,1\}\}$$

1.4.4 Predicato con più variabili

$$L(x) = x \text{ segue la lezione}, \forall x \in I$$

$$P(x,y) = x \text{ segue la lezione il giorno } y, \forall x \in I, y \in G$$

preso $x \in \{\text{studenti del canali 2 del corso Analisi}\} = \{Luca, Liam, ...\}$, allora:

- $\forall x, L(x) \Rightarrow$ Luca segue la lezione $\wedge$ Liam segue la lezione $\wedge$ ...
- $\exists x$ t.c. $L(x) \Rightarrow$ Luca segue la lezione $\vee$ Liam segue la lezione $\vee$ ...
- $x = Luca \to P(Luca, y)$ // Luca segue la lezione il giorno y, se $y = oggi \to P(Luca, oggi)$ è vero

Come scrivo che ogni studenti segue la lezione almeno un giorno?

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

l'ordine nei quantificatori è importate in quanto dire:

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

è diverso da dire:

$$\exists y \in G, \forall x \in S \text{ t.c. } P(x, y)$$

che vuol dire "esiste almeno un giorno tale per cui tutti gli studenti vengano a lezione"

1.4.5 Negazione del predicato

Negare $\forall x \in S, \exists y \in G$ t.c. $P(x, y)$ (ogni studenti segue la lezione almeno un giorno), vuol dire:

$$\neg(\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)) = \exists x \in S, \forall y \in G : \neg P(x, y)$$

quindi esiste almeno uno studente che non segue mai la lezione

1.4.6 Regole della logica

- se $B \Rightarrow A$ allora A è condizione necessaria per B, quindi:

$$B \Rightarrow A \to \neg A \Rightarrow \neg B$$

- se $A \Rightarrow B$ allora A è condizione sufficiente di B, quindi basta che A sia vera affinché B avvenga.
- se $A \iff B$ allora A è condizione necessaria e sufficente di B.
- $\emptyset \in E, \forall E$ insieme
- Regola del terzo escluso:

$$\forall A \text{ insieme}, A \vee \neg A, \text{ quindi succede o non succede.}$$

- Principio di non contraddizione:

$$\forall A, \neg(A \wedge \neg A)$$

  quindi per ogni insieme non è vero che esiste A e non A, in quanto non esisto elementi appartenenti ad A ed anche a non A, quindi non esistono elementi che verificano una proposizione ma allo stesso tempo non la verificano

- Transitività:

$$\forall A, B, C, [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Capitolo 2

Insiemi numerici

2.1 Numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ..., n\}, \text{ ed } \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

in $\mathbb{N}$ è possibili ordinare gli elementi quindi per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq m \iff \exists p \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m = n + p$$

2.1.1 Proprietà di $\mathbb{N}$ (relazione di ordine)

- Riflessiva:
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n$$
- Antisimmetrica:
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \leq m \land m \leq n) \Rightarrow n = m$$
- Transitiva:
$$\forall n, m, p \in \mathbb{N}, (n \leq m \land m \leq p) \Rightarrow n \leq p$$
- Ordinamento totale:
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \lor m \leq n$$

2.1.2 Assiomi di Peano

Esiste una operazione, **passaggio al successivo**, $s(n) = n + 1$, tale che:

- (P1) esiste un elemento $0 \in \mathbb{N}$ t.c. $0 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$
- (P2) se $n, m \in \mathbb{N} \land n \neq m \to s(n) \neq s(m)$
- (P3) se $E \subset \mathbb{N}$ è tale che:
$$\text{(I1)} \quad 0 \in E \qquad e \qquad \text{(I2)} \quad \text{se } n \in E \to s(n) \in E$$
  allora $E = \mathbb{N}$

2.1.3 Metodo Induttivo

Il P3 è ciò che definisce il metodo induttivo (PI), ovvero:

$$P(n)$$

$$E := \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n)\} \subset \mathbb{N}$$

PI dice che:

$$\begin{cases} 0 \in E \\ \forall n \in E \Rightarrow s(n) \in E \end{cases} \Rightarrow E = \mathbb{N}$$

Proposizione 1. $P(n) = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. Dimostro per induzione

Base induttiva: per $n = 0$, la sommatoria equivale a $\frac{0(1)}{2} = 0$

Passo induttivo:

$$P(n+1) = \sum_{0}^{n+1} k = \sum_{0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P(n+1)$$

□

Per applicare il metodo induttivo, non è valido partire dalla soluzione per arrivare alla dimostrazione, in quanto bisogna partire da P(n) ed arrivare a dimostrare P(n + 1).

2.1.4 Principio di buon ordinamento (P.B.O.)

Teorema equivalente al principio di induzione, perciò se P1 e P2 sono valide allora PI $\iff$ *P.B.O*, e dice che:

$$\forall E \subset \mathbb{N} \text{ t.c. } E \neq 0, \exists n_0 \in E \text{ t.c. } \exists n \geq n_0, \forall n \in E$$

Il minimo di un insieme E, se esiste è definito come:

$$a \in E \text{ t.c. } a \leq b, \forall b \in E$$

Il principio di buon ordinamento permette di dimostrare induttivamente anche quando la base induttiva è diversa da 0, e in quel caso:

$$P(b) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, ..., b\}, b \neq 0$$

2.1.5 Fattoriale e coefficiente binomiale

Due funzioni matematiche che si definiscono per induzione sono:

- Fattoriale:

  $$n! = n(n-1)(n-2)(...)(1), \forall n \in \mathbb{N}$$

  e per definizione il fattoriale di 0 è 1:

  $$0! = 1$$

- Coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$$

partendo dal coefficiente binomiale, è possibile svolgere lo sviluppo di una potenza ennesima di un binomio, definito binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, n \in \mathbb{N}^+$$

in questo binomio il coefficiente binomiale da il coefficiente di $a^{n-k}b^k$, per quel indice specifico di k, che è ottenibile anche dal triangolo di tartaglia

- Triangolo di tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

e così via, costruito dalla somma dei due elementi alla righe precedente, in cui partendo dall'alto dalla riga 0, fino alla riga n si ha da sinistra a destra l'indice k della riga n.

2.2 Numeri interi

I numeri interi sono definiti come:

$$\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

è possibile osservare che:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}$ non da un minimo, al contrario di $\mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \exists! -n \in \mathbb{Z}$ t.c. $n + (-n) = 0$

Quindi $(\mathbb{Z}, +)$, ovvero l'insieme dei numeri interi in cui è definita la somma, è detto un gruppo commutativo/abeliano. Si dice abeliano, quando:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Invece un insieme si definisce gruppo quando rispetta queste 3 proprietà:

$$\begin{cases} 1 \text{ la somma è associativa } : (a+b)+c = a+(b+c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \\ 2 \ \exists! 0, \text{ detto elemento neutro della somma } \text{ t.c. } 0+z = z+0 = z, \forall z \in \mathbb{Z} \\ 3 \ \forall z \in \mathbb{Z} \exists! -z \in \mathbb{Z}, \text{ detto opposto di z } \text{ t.c. } z+(-z) = -z+z = 0 \end{cases}$$

2.3 Numeri razionali

i numeri razionali sono definiti come:

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+\}$$

Allora $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, è un campo:

- $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo commutativo.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a(b+c) = ab + ac$, quindi è valida la proprietà distributiva rispetto alla somma.
- Esistenza dell'elemento neutro del prodotto:
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
- elemento inverso del prodotto:
$$a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{a}{a} = 1$$

Altre proprietà di $\mathbb{Q}$, dette di ordinamento:

- Ordinamento totale:
$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq a$$
- Riflessiva:
$$\forall a \in \mathbb{Q}, a \leq a$$
- Antisimmetrica:
$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \vee b \leq a \Rightarrow a = b$$
- Transitiva:
$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$
- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Q}$
- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Q}_0^+$

Oss: $\mathbb{Q}$ ha dei buchi, infatti:

$$\exists q : q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

2.3.1 Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$

Proposizione 2. *$\nexists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2 \rightarrow (\frac{p}{q})^2 = 2$, con p e q coprimi, e $q \neq 0$*

Dimostrazione. Dimostro per assurdo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

dato che p^2 è uguale a $2q^2$, p è pari, perciò può essere scritto come $(2k)^2$, svolgendo i calcoli.

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

ora anche q^2 è uguale a $2k^2$, quindi anche q è pari, perciò la nostra tesi non è più valida in quanto non è vero che p e q sono coprimi. □

2.3.2 Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali

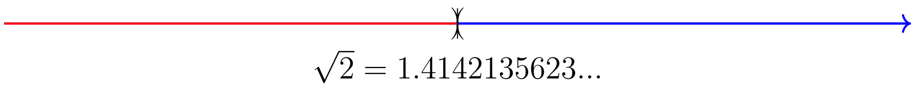
$\mathbb{Q}$ corrisponde all'insieme $\{n, n_1 n_2 n_3 ...\}$, cioè $n \in \mathbb{Z}, n_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$ t.c. sono finite $(n_i = 0, \forall i > i_0)$ o periodiche (un gruppo di n cifre si ripete all'infinito):

$$\mathbb{Q} := \{n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + ... + \frac{n_k}{10^k}\}, k \in \mathbb{N}$$

2.3.3 Caso interessante

Presi:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 < 2\} \qquad B := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 > 2\}$$



osserviamo che:

- $a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b$
- A, B sono vicino quanto vogliamo:

$$\exists a \in A, b \in B \text{ t.c. } a, b \text{ siano vicini}$$

- $\nexists c \in \mathbb{Q}$ t.c. $a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$, quindi $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind o assioma della completezza.

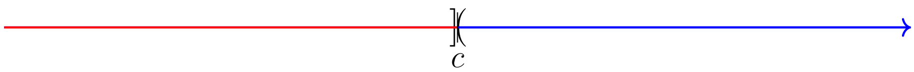
2.4 Numeri reali

$(R, +, \cdot)$ è definito assiomaticamente tramite:

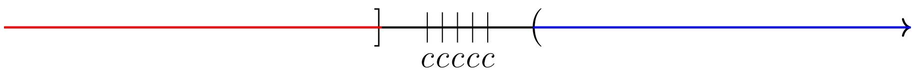
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $(R, +, \cdot)$ soddisfa le proprietà di $\mathbb{Q}$
- soddisfa l'assioma di Dedekind, quindi $\mathbb{R}$ non ha buchi, ovvero:

  $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ t.c. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{R} \wedge a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$

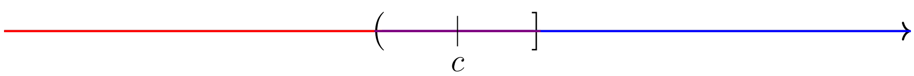
  con c che può appartenere ad A o a B, ma non ad entrambi



Importante: se $A \cup B \neq \mathbb{R}$, allora non è detto che c sia unico:



Se invece l'unione tra i due insiemi non è nulla o unica, quindi $A \cap B \neq \emptyset$



in questo caso $\exists b \in B$ t.c. $b < c$

2.4.1 Teorema della caratterizzazione di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato che può essere rappresentato con l'insieme di tutti i possibili decimali allineati:

$$\mathbb{R} := \{m, d_1 d_2 d_3 ... d_j \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, 1, ..., 9\} \text{ t.c. } j \in \mathbb{N}^+\}\}$$

$$\setminus \{m, d_1 d_2 d_3 ... d_n \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, ..., 9\} \text{ t.c. } \exists j_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } d_j = 9, \forall j \geq j_0\}$$

devono quindi essere esclusi tutti gli allineamenti di decimali in cui dopo un certo indice j si susseguo sono 9, in quanto è lo stesso numero del successivo susseguito da tutti 0.

Si dice che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, quanto $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può essere approssimato da numeri razionali.

2.5 Intervalli, semirette ed estremi

Definizione:

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che M_A è un **maggiorante** di A, se $m \geq a, \forall a \in A$.

  $$\mathcal{M}_A := \{M_A \text{ t.c. } M_A \geq a, \forall a \in A\}$$

  ovvero l'insieme dei maggioranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che m_A è un **minorante** di A, se $m \leq a, \forall a \in A$.

  $$m_A := \{m_A \text{ t.c. } m_A \leq a, \forall a \in A\}$$

  ovvero l'insieme dei minoranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato superiormente** se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$, quindi A ha almeno un maggiorante.

  N non è limitato superiormente in quanto $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n$ t.c. $m \in \mathbb{N}$

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato inferiormente** se $m_A \neq \emptyset$, quindi A ha almeno un minorante

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $M \in \mathbb{R}$, si dice **massimo di A**, $\max A$, se M è un maggiorante di A e se $M \in A$.

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $m \in \mathbb{R}$, si dice **minimo di A**, $\min A$, se m è un minorante di A e se $m \in A$.

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il minimo dei maggioranti di A, si dice **estremo superiore** di A, $\sup A$ o supremum A, nel caso in cui l'estremo superiore non esiste, il $\sup A = +\infty$

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il massimo dei minoranti di A, si dice **estremo inferiore** di A, $\inf A$ o infumum A, nel caso in cui l'estremo inferiore non esiste, l ' $\inf A = -\infty$

Proposizione 3. *sia* $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ *e limitato superiormente, allora* $\exists \sup A$

Dimostrazione. A è limitato superiormente $\Rightarrow \mathcal{M}_A \neq \emptyset$, per definizione: $\forall a \in A, \forall b \in \mathcal{M}_A$ si ha $a \leq b$.

L'assioma di Dedekind implica che: $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b \Rightarrow c = min\mathcal{M}_A = \sup A$ □

Sia A limitato superiormente, quindi $\exists \sup A \in \mathbb{R}$, allora il $\sup A$ è caratterizzato da:

$$\sup A = \min \mathcal{M}_A$$

$$\begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A \Rightarrow \lambda \in \mathcal{M}_A \end{cases} \iff \begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A, \exists a \in A \text{ t.c. } \lambda < a \end{cases}$$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\sup A \in \mathbb{R}$:

- se $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\inf A \in \mathbb{R}$:

- se $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

Importante: sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A, \exists \inf A$, ma non è detto che esistano il $\max A, \min A$.

Osservazione: ogni $S \subset \mathbb{Z}, S \neq \emptyset$, limitato superiormente ha un massimo, mentre se limitato inferiormente ha minimo.

2.6 Proprietà di Archimede

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}^+$ t.c. $na > b$.

Idea:

$$A := \{na \text{ t.c. } n \in \mathbb{N}^+\}$$

Supponendo che $\nexists n \in \mathbb{N}^+$ t.c. $na > b \Rightarrow b \geq an, \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow b$ è un maggiorante $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$

Conseguenze:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, non sono limitati superiormente, in quanto tutti contengono il precedente.

- $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+$ t.c. $\frac{1}{n} < x$, che come corollario ha che negando la disuguaglianza, posso dire che: $x \geq 0$ t.c. $\forall a \in \mathbb{N}^+, x < \frac{1}{n} \Rightarrow x = 0$

2.7 Funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \equiv |x| = \max\{x, -x\} \in [0, +\infty)$$

2.8 Intervalli

$I \subset \mathbb{R}$, dice intervallo se $\forall x, y \in I, \exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $x < z < y, z \in I$

Un intervallo può essere descritto come uno di questi 4 tipi, avendo, $a \leq b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq x \leq b\}$
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R}$ t.c. $a < x \leq b\}$
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq x < b\}$
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R}$ t.c. $a < x < b\}$

se a o b sono uguale a più o meno infinito, allora l'estremo è per forza aperto, in quanto a e b appartengono a $\mathbb{R}$.

Definizione: $A \subset \mathbb{R}$ si dice denso in $\mathbb{R}$ se $\forall I \subset \mathbb{R}, \exists a \in A$ t.c. $a \in I$

Capitolo 3

Cenni su $\mathbb{R}^n$, cardinalità e numeri complessi

Definizione:

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ t.c. } x, y \in \mathbb{R}\} \equiv$ piano cartesiano
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^n$, e le sue coordinate sono: $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

3.1 Intorno di un punto

Per intorni si intende:

$$J_{x_0} = J(x_0) = \{]a, b[\text{ t.c. } x \in]a, b[\}$$

è definito come intorno particolare:

$$Ir_0(x_0) = (x_0 - r_0, x_0 + r_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |x - x_0| < r_0\}$$

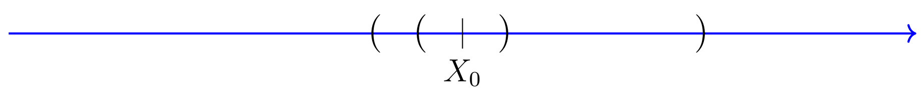
un intervallo di centro x_0 e raggio r_0.

$|\quad|$ permette di definire una distanza su $\mathbb{R}$, detta distanza euclidea:

$$d(x, y) = |x - y|$$

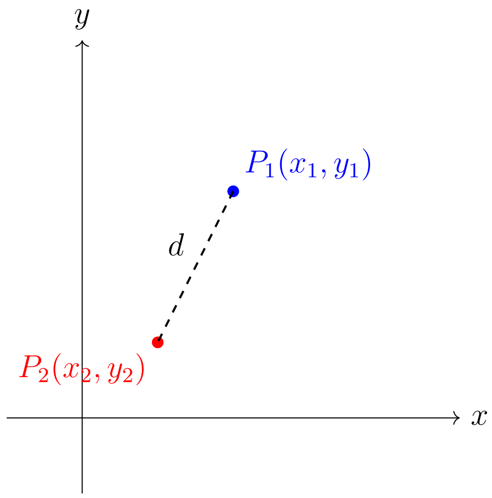
Osservazione: $\forall I \in J(x_0), \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x_0) \subset J(x_0)$

Prendendo: $r < \min\{d(x_0, a), d(x_0, b)\}$



3.1.1 Distanza in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^2$:



$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_2)| = ||P_2 - P_1||$.

Nel caso in cui $x_1 = x_2$, allora è come si ci trovassimo in $\mathbb{R}$, quindi si può usare la formula per la distanza euclidea.
In $\mathbb{R}^3$:

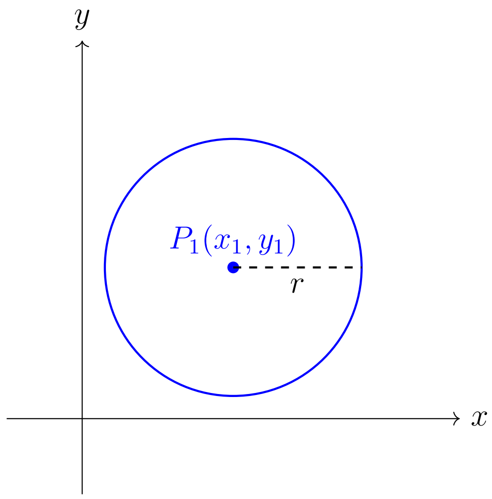
Presi due punti P_1, P_2:

$$P_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, ..., x_n^1), \in \mathbb{R}^n$$
$$P_1 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, ..., x_n^2), \in \mathbb{R}^n$$

$$d(P_1, P_1) := ||P_2 - P_1|| = \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2 + ... + (x_n^1 - x_n^2)^2}$$

3.1.2 Intorno in $\mathbb{R}^n$

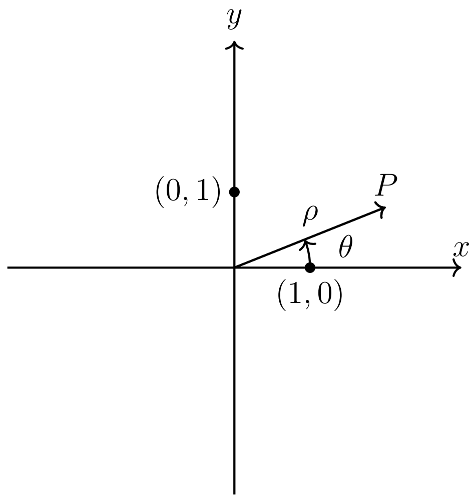
se $x_0 \in \mathbb{R}^2$ t.c. $I_r(x_0) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } ||x - x_0|| < r\}$



3.2 Coordinate polari

preso $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, è possibile trovare θ, ρ t.c. :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \rightarrow \rho := d(0, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$



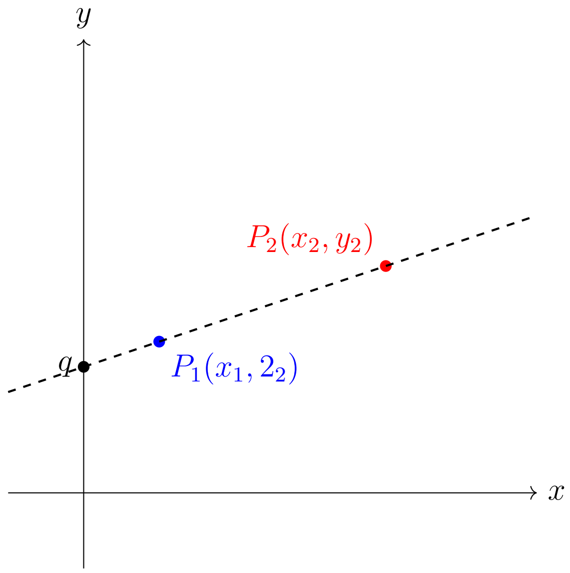
La somma tra le componenti al quadrato di un punto equivale a ρ al quadrato, secondo il teorema di Pitagora.

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2$$

3.3 Retta in $\mathbb{R}^2$

Una retta non verticale è definita da una coppia ordinata:

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y = mx + q\}$$



in una retta m è il coefficiente angolare della retta, definito dal rapporto incrementale:

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e per q, si intende la quota del punto di intersezione con l'asse delle y.

Le rette verticali non sono descrivibili con questa equazione, in quanto si dividerebbe per 0 nel rapporto incrementale, perciò si usa una insieme numerico:

$$r_v := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x = x_0\}$$

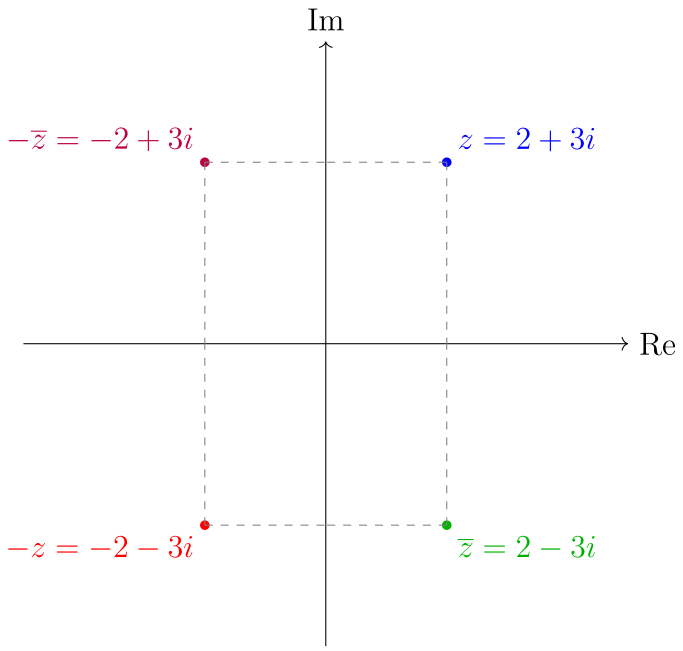
3.4 Numeri complessi ($\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$)

I numeri complessi sono definiti da una parte reale a e da una parte immaginaria b, che moltiplica l'unità immaginaria, $i \in \mathbb{C}$ t.c. $i^2 = -1$.

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + bi = (a, b), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

Preso un numero complesso $z = (a, b)$, è possibile trovare:

- l'opposto: $-z = (-a, -b)$
- il coniugato: $\overline{z} = (a, -b)$
- l'opposto del coniugato: $-\overline{z} = (-a, b)$



3.5 Insiemi aperti e chiusi

Un insieme si dice aperto:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \textbf{aperto} \text{ se } \forall x \in A, \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

Un insieme si dice chiuso:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \textbf{chiuso} \text{ se } A^c = \mathbb{R}^n \setminus A^c \text{ è aperto}$$

Un insieme può essere ne aperto ne chiuso , ad esempio $(a, b]$
Per punto interno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice } \textbf{punto interno} \text{ ad A se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

l'insieme di tutti i punti interni è definito da:

$$\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x \text{ è interno ad A}\}$$

Osservazione:

$$\left.\begin{cases} \text{se } A \text{ è aperto } \mathring{A} = A \\ \mathring{A} \text{ è il più grande insieme aperto } B \text{ t.c. } B \subset A \end{cases}\right\} \Rightarrow A \text{ è aperto } \iff \mathring{A} = A$$

Per punto esterno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \text{ è esterno ad A se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap A \neq \emptyset$$

oppure dicendo che è interno all'insieme complementare di A:

$$Ir(x_0) \subset A^c \iff x \text{ è interno ad } A^c$$

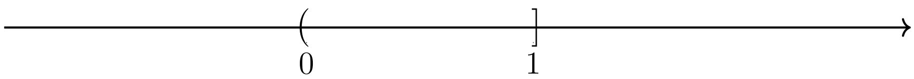
Per punto di bordo, o frontiera, si intende un punto che non è ne interno ne esterno, quindi che si trova sul bordo dell'insieme.

$$\delta A := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. x sia un punto di bordo di A}\}$$

Osservazioni:

- $\delta A = \delta A^c$
- $\overline{A} := A \cup \delta A \equiv$ chiusura di A, è sempre un insieme chiuso
- $\overline{A}$ è il più piccolo insieme B chiuso t.c. $A \subset B$

Esempio:



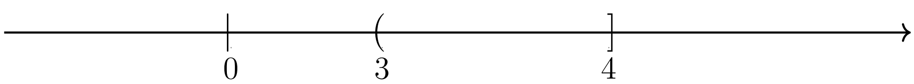
$$A = (0,1], \mathring{A} = (0,1), \delta A = \{0,1\}, \overline{A} = A \cup \delta A = [0,1]$$

Per punto isolato si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice isolato se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap A = \{x\}$$

Esempio:

$$A = \{0\} \cup (3,4)$$

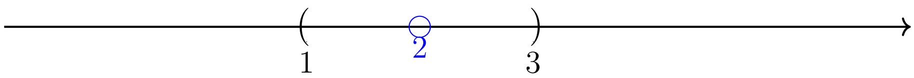


$\Rightarrow p = 0$ è punto isolato di A
in $\mathbb{N}$ ogni punto $n \in \mathbb{N}$ è isolato.
Un insieme tale che ogni punto è isolato si dice ISOLATO.

Per punto di accumulazione si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice punto di accumulazione di A se } \forall Ir(x), (Ir(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

$$A = (1,3) \setminus \{2\}$$



Allora $x = 2$ è un punto di accumulazione, e non appartiene ad A, ma potrebbe anche appartenere.

In $\mathbb{R}$:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Allora un punto si dice di accumulazione, se $\forall U \subset J(x), (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

osservazione:

- se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow U = Ir(x)$, come per la definizione precedente
- $x = +\infty$, $+\infty$ è un punto accumulazione di A, se $\forall U \in J(+\infty)$, si ha che $(U \setminus \{+\infty\}) \cap A \neq 0 \to U = (M, +\infty)$, quindi A non è limitato superiormente.
- $x = -\infty$, $-\infty$ è un punto accumulazione di A, se $\forall U \in J(-\infty)$, si ha che $(U \setminus \{-\infty\}) \cap A \neq 0 \to U = (-\infty, m)$, quindi A non è limitato inferiormente.

Caratterizzazione di $\overline{A} = A \cup \delta A$:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \forall r > 0, (Ir(x) \cap A) \neq \emptyset\}, \text{ l'insieme dei punti aderenti ad A}$$

Osservazione:

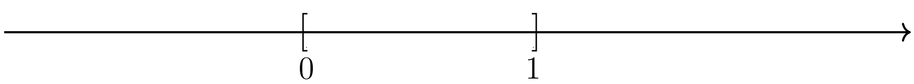
$$A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\mathbb{R}} = A \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$+\infty \in \overline{A} \iff +\infty \text{ è un punto di accumulazione per } A$$

$$\overline{A} := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \text{ t.c. } \forall U \subset J(x) \text{ t.c. } \}$$

Esercitazione:

$$A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$



$$\mathring{A} = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = \emptyset$$

$$\overline{A} = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = [0,1]$$

$$x \in \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \iff \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap (\mathbb{Q} \setminus [0,1]) \neq 0, \text{ Q è denso in R}$$

$$\delta A = \delta(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = [0,1] \to \delta A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = [0,1] \setminus \emptyset$$

Dimostrazione che la cardinalità di $\mathbb{N} = \mathbb{Q} < \mathbb{R}$

Capitolo 4

Funzioni

Una funzione/applicazione è una terna di oggetti:

- A insieme, detto dominio
- B insieme, detto codominio
- f, la legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

si scrive:

$$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$$
$$a \in \mathbb{A} \longmapsto f(a) \in \mathbb{B}$$

ed è definita da:

$$\forall a \in \mathbb{A}, \exists! b \in \mathbb{B} \text{ t.c. } f(a) = b$$

La notazione:

$$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B} \text{ è equivalente a } (A, B, f)$$

Una funzione si dice iniettiva se:

$$\forall a, b \in A \text{ t.c. } a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Una funzione si dice suriettiva se:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

a è detto pre-immagine, e non deve per forza essere unico, affinché sia suriettiva la pre-immagine di B possono essere più elementi di A.
Una funzione si dice biettiva o biunivoca se:

$$\forall b \in B, \exists! a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Considerata la funzione f biunivoca allora ammette la sua funzione inversa:

$$f^{-1} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$b \longmapsto a = f^{-1}(b)$$

Osservazione: f è una funzione biunivoca, allora $\forall b \in B, \exists! a \in A$ t.c. $f(a) = b$, quindi la funzione (B, A, f^{-1}) ha senso.

4.1 Esempi di definizione

- La funzione (A, A, Id), è definita come la funzione identià, ovvero una funzione che per ogni valore di $a \in A$, restituisce lo stesso valore $a \in A$
- Prese due funzioni:
$$(A, B, f), (B, C, g)$$
Allora la funzione composta:
$$g \circ f = (A, C, g \circ f)$$
in cui l'immagine della funzione f, deve essere uguale al dominio della funzione g. Se f è biunivoca e quindi f^{-1} è ben definita, allora:
$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$
- Sia (A, B, f) una funzione allora si definisce:
$$f : P(A) \longrightarrow P(B)$$
la funzione immagine tramite f, che associa ad ogni $E \in P(A)$, l'insieme $f(E) := \{b \in B \text{ t.c. } \exists a \in E, f(a) = b\}$, in cui $P(A), P(B)$ sono definiti come parti di A e parti di B, ovvero l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A o B.

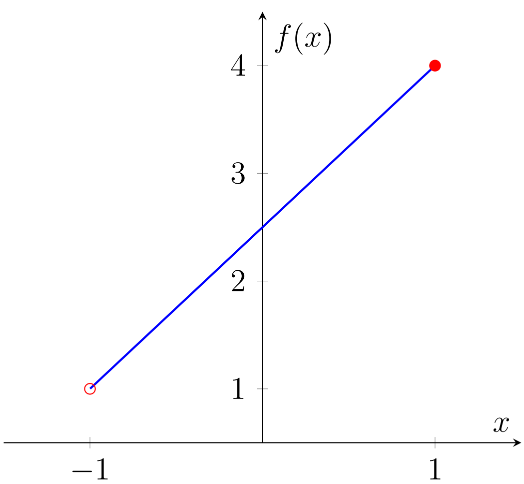
  In questo caso è possibile avere una funzione inversa, e si definisce come $(P(B), P(A), f^{-1})$ la funzione che associa ad ogni elemento $G \in P(B)$, l'insieme $f^{-1} := \{a \in A \text{ t.c. } f(a) \in G\}$, si usa la notazione f^{-1} anche se non è biunivoca, ma si intende un funzione che restituisce un certo insieme.

4.2 Funzioni ristrette ad E

Presa $f : A \longrightarrow B, E \subset A$, allora $F_{|E}$, ovvero f ristretta ad E, è definita come:
$$F_{|E} : E \longrightarrow B$$
se il codominio è l'immagine di E, allora $F_{|E}$ è suriettiva, quindi $(E, f(E), f)$

4.2.1 Grafico di una funzione reale di variabile reale

Sia $f : A \subseteq R \longrightarrow B \subseteq R$:



i valori $y \in (1,4]$ sono i valori dell'insieme immagine di A tramite f, e A, ovvero il dominio, assume i valori $x \in (-1,1]$

$$\Gamma(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$$

4.3 Caratteristiche di una funzione

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- Si dice crescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- Si dice decrescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- Si dice strettamente crescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- Si dice strettamente decrescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

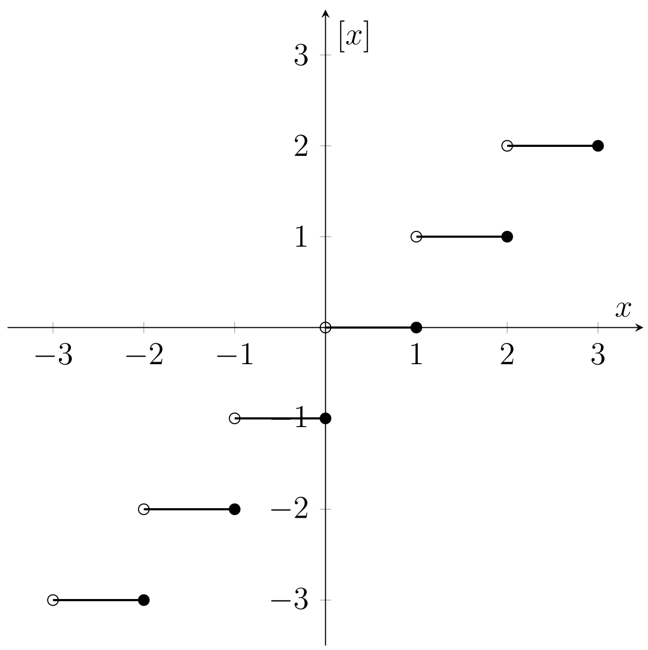
4.4 Monotonia di una funzione

Una funzione f si dice:

- monotona se è crescente/decrescente per tutto il dominio
- strettamente monotona se è strettamente crescente/decrescente per tutto il dominio

4.5 Funzione parte intera

La funzione $f(x) = [x]$ associa ad ogni numero reale x il più grande $n \in \mathbb{N} \leq x$, ed è una funzione monotona crescente.



4.6 Proprietà ed esempi

- f, g sono monotone, allora $f \circ g$ è monotona
- f, g sono entrambe crescenti/decrescenti, allora $f \circ g$ è crescente
- f, g sono una crescente e l'altra decrescente, allora $f \circ g$ è decrescente
- se f è crescente e $c > 0$, allora $c \circ f = c \cdot f(x)$ è crescente
- se f è crescente e $c < 0$, allora $c \circ f = c \cdot f(x)$ è decrescente
- se f è decrescente e $c > 0$, allora $c \circ f = c \cdot f(x)$ è decrescente
- se f è decrescente e $c < 0$, allora $c \circ f = c \cdot f(x)$ è crescente
- se f è strettamente monotona allora è iniettiva
- se f è monotona ed invertibile, allora è strettamente monotona
- se f è monotona ed invertibile allora f^{-1} è monotona dello stesso tipo.

Capitolo 5

Limiti

si dice che l è il limite di f per x che tende a x_0, se e solo se x_0 è un limite di accumulazione, la definizione generale è:

$$\forall U \in J_l, \exists V \in J_{x_0} : f(V \ \{x_0\} \cap Dom(f)) \in U$$

dove l è:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

e non è necessario che:

$$x_0 \in Dom(f()$$

in quanto può essere un punto di accumulazione anche se non è contenuto nel dominio, nei limiti:

$$x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$$

e la definizione di limite usato intorni simmetrici è valida anche in dimensioni superiori.

5.1 Definizioni di limite

5.1.1 Limite finito di una funzione in un punto finito

Ovvero:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

e la definizione formale è:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

5.1.2 Limite finito di una funzione per x che tende a ± infinito

Con $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

e la definizione formale è:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \text{ t.c. } x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Con $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

e la definizione formale è:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \text{ t.c. } x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

5.1.3 Limite infinito di una funzione in un punto finito

Con $l = +\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

e la definizione formale è:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Con $l = -\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

e la definizione formale è:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

5.1.4 Limite infinito di una funzione per x che tende a ± infinito

Con $x \to +\infty$:

- Con $l = +\infty$:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  e la definizione formale è:

  $$\forall M > 0, \exists R > 0 \text{ t.c. } x > R \Rightarrow f(x) > M$$

- Con $l = -\infty$:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

  e la definizione formale è:

  $$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } x > R \Rightarrow f(x) < -M$$

Con $x \to -\infty$:

- Con $l = +\infty$:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

  e la definizione formale è:

  $$\forall M > 0, \exists R > 0 \text{ t.c. } x < -R \Rightarrow f(x) > M$$

- Con $l = -\infty$:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

  e la definizione formale è:

  $$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } x < -R \Rightarrow f(x) < -M$$

5.1.5 Limite finito di una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$

Ovvero:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) = l \iff \forall U \in J_l, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \overline{n}, f(n) \in U$$

n deve per forza tendere a più infinito in quanto è l'unico punto di accumulazione.

La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è chiamata successione ed ha una notazione particolare.

5.1.6 Limite sinistro e destro

Limite sinistro

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $A \cap (-\infty, x_0)$, l è il limite sinistro di f per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \text{ se } \forall V_l, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f((x_0 - \delta, x_0) \cap A) \subset V_l$$

Limite destro

$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $A \cap (x_0, +\infty)$, l è il limite destro di f per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \text{ se } \forall V_l, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f((x_0, x_0 + \delta) \cap A) \subset V_l$$

5.2 Teorema dell'esistenza del limite

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di A, allora se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$$

Dimostrazione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \iff \forall U \in Jl_1, \exists V_1 \in J_{x_0} \text{ t.c. } f((V_1 \setminus \{x_0\}) \cap Dom(f)) \subset U$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \iff \forall W \in Jl_2, \exists V_2 \in J_{x_0} \text{ t.c. } f((V_2 \setminus \{x_0\}) \cap Dom(f)) \subset W$$

Supponendo che $l_1 \neq l_2$, si possono prendere U, W:

$$U \cap W = \emptyset$$

Prendiamo $A = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset, J_{x_0} = V_1 \cap V_2 \Rightarrow f((A \setminus \{x_0\}) \cap Dom(f)) \subset U, \subset W$ Si arriva quindi alla contraddizione in quanto l'intersezione di U e W è nulla, però abbiamo trovato un'immagine che appartiene a entrambe, quindi:

$$l_1 = l_2 \Rightarrow$$

se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow l \text{ è unico}$$

$f : A \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per $A \cap (-\infty, x_0) \wedge (x_0, +\infty) \cap A$, allora:

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \iff \begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \\ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

5.3 Teorema della permanenza del segno

Se $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l > 0 (\vee l < 0) \Rightarrow \exists V \in J(x_0)$ t.c. $f(x) > 0 (\vee f(x) < 0), \forall x \in (V \backslash \{x_0\}) \cap Dom(f)$

Dimostrazione: Secondo la definizione di limite:

$$\Rightarrow \forall U \in J_l, \exists V \in J_{x_o} \text{ t.c. } f(V \setminus \{x_0\} \cap Dom(f)) \subset U$$

$$\text{siccome } l > 0, \text{ allora: } \begin{cases} l \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow l/2 > 0 \Rightarrow U = (\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}) \in J_l \\ l = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(V \setminus \{x_0\} \cap Dom(f)) \subset U = \left(\frac{1}{2}, \frac{3l}{2}\right) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in (V \setminus \{x_0\} \cap Dom(f))$$

5.3.1 Teorema

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists V \in J_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in ((V \setminus \{x_0\}) \cap Dom(f)) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

equivalente con il maggiore.

Dimostrazione con teorema della permanenza del segno su:

$$h(x) := g(x) - f(x)$$

5.3.2 Corollario teorema della permanenza del segno

Se:

$$\exists V \in J(x_0) \text{ t.c. } f(x) \geq 0/f(x) \leq 0, \forall x \in ((V \backslash \{x_0\}) \cap Dom(f)) \wedge \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0/f(x) \leq 0$$

Dimostrazione, supponiamo che $l < 0$, allora:

$$l < 0 \xRightarrow{\text{teo permanenza del segno}} \exists U \in J(x_0) \text{ t.c. } f(x) < 0$$

Contraddizione, in quanto per ipotesi si ha che f(x) è maggiore di 0 per tutto l'intorno di x_0.

5.4 Operazioni sui limiti

Sia x_0 punto di accumulazione per f e g, se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \wedge \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l_g$$

allora:

$$\begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = l_f + l_g, \text{ tranne se è } \infty - \infty \\ \exists \lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = l_f \cdot l_g, \text{ tranne se è } 0 \cdot \infty \\ \exists \lim_{x \to x_0}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{l_f}{l_g}, \text{ tranne se è } \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \to \begin{cases} l_f \neq 0 \\ l_g = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x} = segnof \cdot \infty \end{cases}$$

Dimostrazione, supponendo che $l_g \wedge l_f \in \mathbb{R}$:
fisso $\epsilon > 0, \bar{\epsilon} = \epsilon/2$, allora:

$$\exists V_f \in J(x_0), \forall x \in (V_f \setminus \{x_0\} \cap Dom(f)) \text{ t.c. } |f(x) - l_f| < \bar{\epsilon}$$

$$\exists V_h \in J(x_0), \forall x \in (V_g \setminus \{x_0\} \cap Dom(f)) \text{ t.c. } |g(x) - l_g| < \bar{\epsilon}$$

Pongo $V := V_f \cap V_g \in J(x_0)$:

$$\Rightarrow \forall x \in (V \setminus \{x_0\} \cap Dom(f \cap g)) \text{ t.c. } |f(x) + g(x) - |l_f + l_g|| \leq |f(x) - l_f| + |g(x) - l_g| < \epsilon$$

5.5 Teorema dei carabinieri (del confronto)

Sia $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione, allora:

$$\begin{cases} \exists U \in J(x_0) \text{ t.c. } f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in (U\{x_0\} \cap A) \\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l_f, \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = l_h \\ l_f = l_h \end{cases} \quad \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l_g = l_f = l_h$$

Capitolo 6

Successioni

Una successione, è definita da:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a(n) := a_n \end{aligned}$$

dove, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indica l'insieme immagine di a, queste sono tutte notazioni equivalenti:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv \{a_n\} \equiv \{a_n\}_n \equiv a(\mathbb{N}) \equiv \{a(n) \text{ t.c. } n \in \mathbb{N}\}$$

Le successioni si usano anche per dimostrare proprietà sui limiti del continuo.

6.1 Teorema ponte

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = l \Rightarrow \forall\{a_n\} \text{ t.c. } \lim_{n\to+\infty} a_n = x_o$$

si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$$

si passa quindi da un limite sequenziale, ovvero: $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_o$ a un limite nel continuo, ovvero: $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$