Appunti di Analisi Matematica

Liam Ferretti

8 ottobre 2025

Sommario

Per i ricevimenti bisogna prenotarsi via e-mail, e si svolgeranno nell'edificio 105 dell'edificio Castel Nuovo Si potranno trovare note ed esercizi su e-learning

Programma:

- Numeri reali
- Funzioni di variabili reali
- Successioni e serie
- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale ad una variabile
- Integrali
- Equazioni differenze lineari
- Funzioni di più variabili (tutti i capitoli precedenti comprendono le funzioni a più variabili)

I libri di testo sono presenti su e-learning, ed è consigliato "Crasta Malusa", da cui assegnerà gli esercizi.

L'esame sarà composto da scritto più orale, non ci sarà probabilmente un esonero, e con l'orale si può incrementare o decrementare il voto di fino a 3 punti in positivo o 3 in negativo, tranne nel caso in cui si commettano errori su: limiti, continuità o divisione per 0, che comporta la bocciatura immediata.

Indice

La matematica si costruisce su:

- elementi di base:

  oggetti di base (enti primitivi)

  proprietà di basa (assiomi)

- regole di deduzione che sono fissate

1 Notazione

La notazione si divide in:

- Connettiva:

  $\neg$, non

  $\vee$, e

  $\wedge$, o

  $\Rightarrow$, implica

  $\iff$, equivale (se e solo se)

  : (t.c.) , tale che / tale per cui

- Quantificativa:

  $\exists$, esiste

  $\nexists$, non esiste

  $\exists!$, esiste ed è unico

  $\forall$, per ogni

2 Le proposizioni

Per proposizione Si intende una affermazione.
Es:

- P = oggi è martedì
- $\neg$P = oggi non è martedì
- Q = c'è il sole
- P $\wedge$ Q = oggi è martedì e c'è il sole
- P $\vee$ Q = oggi è martedì oppure c'è il sole
- $\neg$(P $\wedge$ Q) $\Rightarrow$ P $\vee$ Q può essere vera (P oppure Q), ma P $\wedge$ Q non può essere vera (P e Q), quindi non possono essere vere allo stesso tempo

A $\Rightarrow$ B, vuol dire se A è vero allora B è vero.
A $\iff$ B = (A $\Rightarrow$ B) $\land$ (B $\Rightarrow$ A), e vuol dire se e solo se A allora B.
Partendo dalla proposizione precedente, è vero che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$$

cioè è utile nelle dimostrazioni per assurdo. Nelle dimostrazioni si parte dagli assiomi e con le regole logiche si fanno ipotesi (affermazioni) che nel caso in cui fosse vera rende la tesi (la validità di una o più proprietà).

OSS: è **sbagliato** dire che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \Rightarrow \neg B$$

in quanto il non avvenire di A non implica che B non possa avvenire per altre motivazioni.

3 Insiemi

Un insieme è una collezioni di elementi

3.1 Notazione degli insiemi

- definizione di insieme: G := $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$, è necessario l'uso di := per definire un insieme, e vuol dire "definito come".
- quando due insiemi hanno gli stessi elementi si dichiara l'uguaglianza tra I_1 e I_2, con il simbolo =, ad esempio

$$F := \{0, 1\}, H := \{1, 0\} \rightarrow F = H$$

- per definire l'appartenenza di un elemento in un insieme si scrive $a \in I$, se questo elemento non appartiene all'insieme si rappresenta $a \notin I$ con a un elemento qualsiasi e I un insieme qualsiasi.

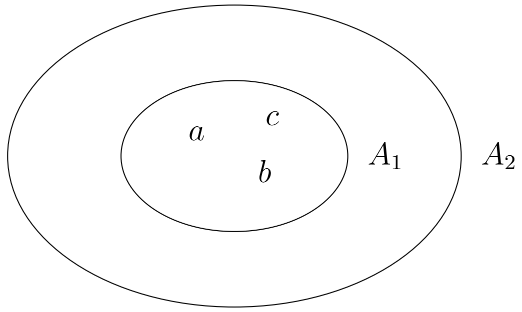
3.2 Relazione di ordine o inclusione

Se $A_1 \subset A_2 \rightarrow A_1$ è contenuto in A_2, e A_1 è al tal più grande quanto A_2, ovvero A_1 è un sotto insieme di A_2.

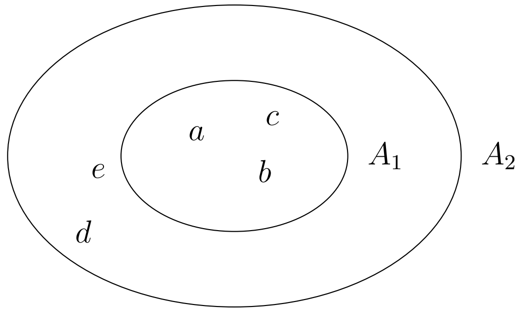
Se i due insiemi non sono uguali allora si segna $A_1 \not\subseteq A_2$, è quindi strettamente contenuto.

Se invece i due insiemi possono essere uguali, si scrive $A_1 \subseteq A_2$.

Es:



contengono gli stessi elementi quindi: $A_1 = A_2$



in questo caso A_2 contiene più elementi di A_1, quindi $A_1 \nsubseteq A_2$

3.3 Proprietà degli insiemi

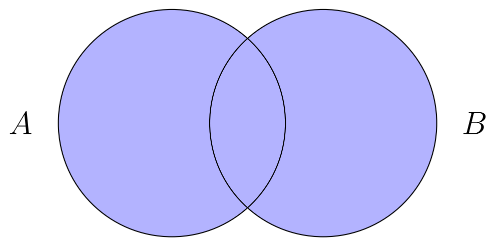
Gli insiemi hanno 3 proprietà principali:

- Riflessiva: $A \subseteq A$, per A insieme qualsiasi, quindi l'insieme contiene se stesso
- Antisimmetrica: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, per A, B insiemi qualsiasi
- Transitiva:$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$, per A, B, C insiemi qualsiasi

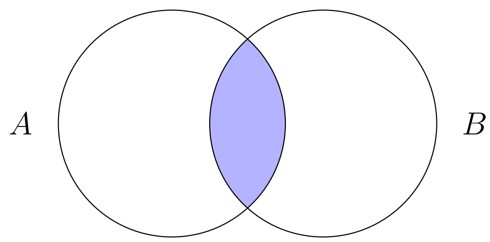
3.4 Operazioni tra insiemi

Presi due insiemi A, B allora esistono diverse proprietà:

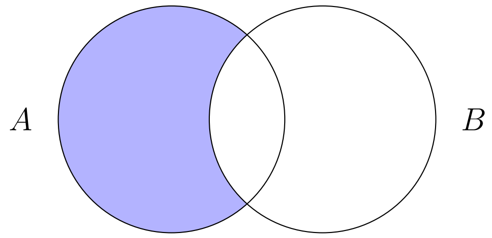
- Unione (o): $A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$



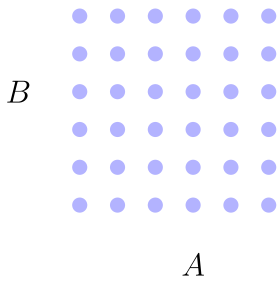
- Intersezione (e): $A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$



- Differenza (-): $A \setminus B := \{a : a \in A, a \notin B\}$



- Prodotto cartesiano: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$



4 Predicato

Una preposizione può dipendere da una o più variabili, ovvero un ente che varia in un gruppo, in quel caso prende il nome di predicato. Es:

$P =$ oggi è martedì

$P(x) = x$ è martedì

allora preso $A := \{luned, marted, ..., domenica\}, x \in A$

$B := \{x \in A : P(x)\} = \{marted\}$, con $P(x)$ si intendono le x che rendono $P(x)$ vera, quindi si cercano le x appartenenti ad A t.c. $P(x)$ sia vera.

4.1 Confronto simbologia logica e insiemistica

La simbologia nella logica e nella insiemistica è diversa, ma i termini sono gli stessi:

Logica	**Insiemistica**
A, ovvero A è vera	$A := \{x \in I : A(x)\}$, con $A \subset I$
$\neg A$, ovvero A non è vera	$A^c := \{x \in B : \neg A(x)\}$, con $A^c \not\subset B$
$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$\Rightarrow$, ad esempio $A \Rightarrow B$	$A \subset B$, perchè A è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $A(x)$ sia vera, allo stesso tempo B è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $B(x)$ sia vera, perciò dire che A implica B, vuol dire che gli elementi x che rendono veri A sono contenuti in B
$\iff$, ad esempio $A \iff B$	$A = B$, riprendendo la stessa argomentazione in questo caso B è vera se A è vera, ma allo stesso tempo A è vera se B è vera, perciò i due insiemi coincideranno

4.2 Notazione

- $x \in A \overset{def}{\Longrightarrow}$ x è elemento di A
- $x \notin A \overset{def}{\Longrightarrow}$ x non è elemento di A, quindi $x \in A^c$
- $A \cap B := \{a : A(a) \wedge B(a)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}\}$
- $A \cup B := \{a : A(a) \vee B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B := \{a : A(a) \vee \neg B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \notin B\} = \{x : x \in A \vee x \in B^c\}$
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B)^c$

4.3 Insieme parti di I

L'insieme parti di I, è definito come:

$$P(I) := \{X : X \subset I\}, \text{con } X \text{ insieme}$$

Preso $I := \{0,1\} \Rightarrow P(I) = \{0,1,\{0,1\}\}$, $P(I)$ rappresenta l'insieme parti, ovvero l'insieme composto da tutti i possibili sottoinsiemi di I. Es:

$$A = \{0,1\} \Rightarrow P(A) = \{0,1,\{0,1\}\}$$

4.4 Predicato con più variabili

$$L(x) = x \text{ segue la lezione}, \forall x \in I$$

$$P(x,y) = x \text{ segue la lezione il giorno } y, \forall x \in I, y \in G$$

preso $x \in \{$studenti del canali 2 del corso Analisi$\} = \{Luca, Liam, ...\}$, allora:

- $\forall x, L(x) \Rightarrow$ Luca segue la lezione $\wedge$ Liam segue la lezione $\wedge$ ...
- $\exists x$ t.c. $L(x) \Rightarrow$ Luca segue la lezione $\vee$ Liam segue la lezione $\vee$ ...
- $x = Luca \rightarrow P(Luca, y)$ // Luca segue la lezione il giorno y, se $y = oggi \rightarrow P(Luca, oggi)$ è vero

Come scrivo che ogni studenti segue la lezione almeno un giorno?

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

l'ordine nei quantificatori è importate in quanto dire:

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

è diverso da dire:

$$\exists y \in G, \forall x \in S \text{ t.c. } P(x, y)$$

che vuol dire "esiste almeno un giorno tale per cui tutti gli studenti vengano a lezione"

4.5 Negazione del predicato

Negare $\forall x \in S, \exists y \in G$ t.c. $P(x, y)$ (ogni studenti segue la lezione almeno un giorno), vuol dire:

$$\neg(\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)) = \exists x \in S, \forall y \in G : \neg P(x, y)$$

quindi esiste almeno uno studente che non segue mai la lezione

4.6 Regole della logica

- se $B \Rightarrow A$ allora A è condizione necessaria per B, quindi:

$$B \Rightarrow A \rightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$$

- se $A \Rightarrow B$ allora A è condizione sufficiente di B, quindi basta che A sia vera affinché B avvenga.
- se $A \iff B$ allora A è condizione necessaria e sufficente di B.
- $\emptyset \in E, \forall E$ insieme
- Regola del terzo escluso:

$$\forall A \text{ insieme}, A \vee \neg A, \text{ quindi succede o non succede.}$$

- Principio di non contraddizione:

$$\forall A, \neg(A \wedge \neg A)$$

  quindi per ogni insieme non è vero che esiste A e non A, in quanto non esisto elementi appartenenti ad A ed anche a non A, quindi non esistono elementi che verificano una proposizione ma allo stesso tempo non la verificano

- Transitività:

$$\forall A, B, C, [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

5 Insiemi numerici

5.1 Numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ..., n\}, \text{ ed } \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

in $\mathbb{N}$ è possibili ordinare gli elementi quindi per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq m \iff \exists p \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m = n + p$$

5.1.1 Proprietà di $\mathbb{N}$ (relazione di ordine)

- Riflessiva:
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n$$
- Antisimmetrica:
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq n) \Rightarrow n = m$$
- Transitiva:
$$\forall n, m, p \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq p) \Rightarrow n \leq p$$
- Ordinamento totale:
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

5.1.2 Assiomi di Peano

Esiste una operazione, **passaggio al successivo**, $s(n) = n + 1$, tale che:

- (P1) esiste un elemento $0 \in \mathbb{N}$ t.c. $0 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$
- (P2) se $n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m \rightarrow s(n) \neq s(m)$
- (P3) se $E \subset \mathbb{N}$ è tale che:
$$\text{(I1)} \quad 0 \in E \qquad e \qquad \text{(I2)} \quad \text{se } n \in E \rightarrow s(n) \in E$$
allora $E = \mathbb{N}$

5.1.3 Metodo Induttivo

Il P3 è ciò che definisce il metodo induttivo (PI), ovvero:

$$P(n)$$

$$E := \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n)\} \subset \mathbb{N}$$

PI dice che:

$$\begin{cases} 0 \in E \\ \forall n \in E \Rightarrow s(n) \in E \end{cases} \Rightarrow E = \mathbb{N}$$

Proposizione 1. $P(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. Dimostro per induzione

Base induttiva: per $n = 0$, la sommatoria equivale a $\frac{0(1)}{2} = 0$

Passo induttivo:

$$P(n+1) = \sum_{0}^{n+1} k = \sum_{0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P(n+1)$$

□

Per applicare il metodo induttivo, non è valido partire dalla soluzione per arrivare alla dimostrazione, in quanto bisogna partire da P(n) ed arrivare a dimostrare P(n + 1).

5.1.4 Principio di buon ordinamento (P.B.O.)

Teorema equivalente al principio di induzione, perciò se P1 e P2 sono valide allora PI $\iff P.B.O$, e dice che:

$$\forall E \subset \mathbb{N} \text{ t.c. } E \neq 0, \exists n_0 \in E \text{ t.c. } \exists n \geq n_0, \forall n \in E$$

Il minimo di un insieme E, se esiste è definito come:

$$a \in E \text{ t.c. } a \leq b, \forall b \in E$$

Il principio di buon ordinamento permette di dimostrare induttivamente anche quando la base induttiva è diversa da 0, e in quel caso:

$$P(b) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, ..., b\}, b \neq 0$$

5.1.5 Fattoriale e coefficiente binomiale

Due funzioni matematiche che si definiscono per induzione sono:

- Fattoriale:
$$n! = n(n-1)(n-2)(...)(1), \forall n \in \mathbb{N}$$
e per definizione il fattoriale di 0 è 1:
$$0! = 1$$

- Coefficiente binomiale:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$$
partendo dal coefficiente binomiale, è possibile svolgere lo sviluppo di una potenza ennesima di un binomio, definito binomio di Newton:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, n \in \mathbb{N}^+$$
in questo binomio il coefficiente binomiale da il coefficiente di $a^{n-k}b^k$, per quel indice specifico di k, che è ottenibile anche dal triangolo di tartaglia

- Triangolo di tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

e così via, costruito dalla somma dei due elementi alla righe precedente, in cui partendo dall'alto dalla riga 0, fino alla riga n si ha da sinistra a destra l'indice k della riga n.

5.2 Numeri interi

I numeri interi sono definiti come:

$$\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

è possibile osservare che:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}$ non da un minimo, al contrario di $\mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \exists! -n \in \mathbb{Z}$ t.c. $n + (-n) = 0$

Quindi $(\mathbb{Z}, +)$, ovvero l'insieme dei numeri interi in cui è definita la somma, è detto un gruppo commutativo/abeliano. Si dice abeliano, quando:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Invece un insieme si definisce gruppo quando rispetta queste 3 proprietà:

$$\begin{cases} 1 \text{ la somma è associativa } : (a+b)+c = a+(b+c), \forall a,b,c \in \mathbb{Z} \\ 2 \ \exists! 0, \text{ detto elemento neutro della somma } \text{ t.c. } 0+z = z+0 = z, \forall z \in \mathbb{Z} \\ 3 \ \forall z \in \mathbb{Z} \exists! -z \in \mathbb{Z}, \text{ detto opposto di z } \text{ t.c. } z+(-z) = -z+z = 0 \end{cases}$$

5.3 Numeri razionali

i numeri razionali sono definiti come:

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+\}$$

Allora $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, è un campo:

- $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo commutativo.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ è un gruppo commutativo.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a(b+c) = ab + ac$, quindi è valida la proprietà distributiva rispetto alla somma.

- Esistenza dell'elemento neutro del prodotto:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- elemento inverso del prodotto:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{a}{a} = 1$$

Altre proprietà di $\mathbb{Q}$, dette di ordinamento:

- Ordinamento totale:
$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq a$$

- Riflessiva:
$$\forall a \in \mathbb{Q}, a \leq a$$

- Antisimmetrica:
$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \vee b \leq a \Rightarrow a = b$$

- Transitiva:
$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Q}$
- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Q}_0^+$

Oss: $\mathbb{Q}$ ha dei buchi, infatti:

$$\exists q : q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

5.3.1 Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$

Proposizione 2. *$\nexists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2 \rightarrow (\frac{p}{q})^2 = 2$, con p e q coprimi, e $q \neq 0$*

Dimostrazione. Dimostro per assurdo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

dato che p^2 è uguale a $2q^2$, p è pari, perciò può essere scritto come $(2k)^2$, svolgendo i calcoli.

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

ora anche q^2 è uguale a $2k^2$, quindi anche q è pari, perciò la nostra tesi non è più valida in quanto non è vero che p e q sono coprimi. □

5.3.2 Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali

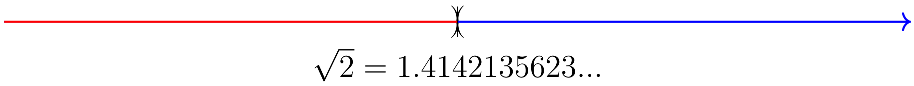
$\mathbb{Q}$ corrisponde all'insieme $\{n, n_1 n_2 n_3 ...\}$, cioè $n \in \mathbb{Z}, n_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$ t.c. sono finite ($n_i = 0, \forall i > i_0$) o periodiche (un gruppo di n cifre si ripete all'infinito):

$$\mathbb{Q} := \{n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + ... + \frac{n_k}{10^k}\}, k \in \mathbb{N}$$

5.3.3 Caso interessante

Presi:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 < 2\} \qquad B := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 > 2\}$$



osserviamo che:

- $a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b$
- A, B sono vicino quanto vogliamo:

$$\exists a \in A, b \in B \text{ t.c. } a, b \text{ siano vicini}$$

- $\nexists c \in \mathbb{Q}$ t.c. $a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$, quindi $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind o assioma della completezza.

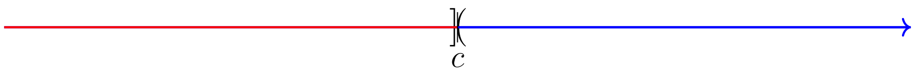
5.4 Numeri reali

$(R, +, \cdot)$ è definito assiomaticamente tramite:

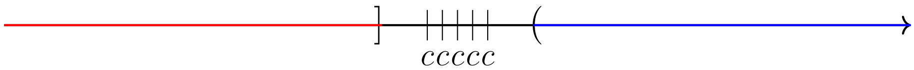
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $(R, +, \cdot)$ soddisfa le proprietà di $\mathbb{Q}$
- soddisfa l'assioma di Dedekind, quindi $\mathbb{R}$ non ha buchi, ovvero:

  $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ t.c. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{R} \wedge a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$

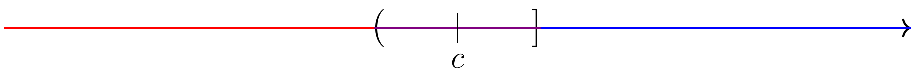
  con c che può appartenere ad A o a B, ma non ad entrambi



Importante: se $A \cup B \neq \mathbb{R}$, allora non è detto che c sia unico:



Se invece l'unione tra i due insiemi non è nulla o unica, quindi $A \cap B \neq \emptyset$



in questo caso $\exists b \in B$ t.c. $b < c$

5.4.1 Teorema della caratterizzazione di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato che può essere rappresentato con l'insieme di tutti i possibili decimali allineati:

$$\mathbb{R} := \{m, d_1 d_2 d_3 ... d_j \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, 1, ..., 9\} \text{ t.c. } j \in \mathbb{N}^+\}\}$$

$$\setminus \{m, d_1 d_2 d_3 ... d_n \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, ..., 9\} \text{ t.c. } \exists j_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } d_j = 9, \forall j \geq j_0\}$$

devono quindi essere esclusi tutti gli allineamenti di decimali in cui dopo un certo indice j si susseguo sono 9, in quanto è lo stesso numero del successivo susseguito da tutti 0.

Si dice che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, quanto $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può essere approssimato da numeri razionali.

5.5 Intervalli, semirette ed estremi

Definizione:

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che M_A è un **maggiorante** di A, se $m \geq a, \forall a \in A$.

  $$\mathcal{M}_A := \{M_A \text{ t.c. } M_A \geq a, \forall a \in A\}$$

  ovvero l'insieme dei maggioranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che m_A è un **minorante** di A, se $m \leq a, \forall a \in A$.

  $$m_A := \{m_A \text{ t.c. } m_A \leq a, \forall a \in A\}$$

  ovvero l'insieme dei minoranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato superiormente** se $\mathcal{M}_A \neq 0$, quindi A ha almeno un maggiorante.

  N non è limitato superiormente in quanto $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n$ t.c. $m \in \mathbb{N}$

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato inferiormente** se $m_A \neq 0$, quindi A ha almeno un minorante

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $M \in \mathbb{R}$, si dice **massimo di A**, $\max A$, se M è un maggiorante di A e se $M \in A$.

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $m \in \mathbb{R}$, si dice **minimo di A**, $\min A$, se m è un minorante di A e se $m \in A$.

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il minimo dei maggioranti di A, si dice **estremo superiore** di A, $\sup A$ o supremum A, nel caso in cui l'estremo superiore non esista, il $\sup A = +\infty$

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il massimo dei minoranti di A, si dice **estremo inferiore** di A, $\inf A$ o infumum A, nel caso in cui l'estremo inferiore non esista, il $\inf A = -\infty$

Proposizione 3. *sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora $\exists \sup A$*

Dimostrazione. A è limitato superiormente $\Rightarrow \mathcal{M}_A \neq \emptyset$, per definizione: $\forall a \in A, \forall b \in \mathcal{M}_A$ si ha $a \leq b$.

L'assioma di Dedekind implica che: $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b \Rightarrow c = min\mathcal{M}_A = \sup A$ ☐

Sia A limitato superiormente, quindi $\exists \sup A \in \mathbb{R}$, allora il $\sup A$ è caratterizzato da:

$$\sup A = \min \mathcal{M}_A$$

$$\begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A \Rightarrow \lambda \in \mathcal{M}_A \end{cases} \iff \begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A, \exists a \in A \text{ t.c. } \lambda < a \end{cases}$$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\sup A \in \mathbb{R}$:

- se $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\inf A \in \mathbb{R}$:

- se $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

Importante: sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A, \exists \inf A$, ma non è detto che esistano il $\max A, \min A$.

Osservazione: ogni $S \subset \mathbb{Z}, S \neq \emptyset$, limitato superiormente ha un massimo, mentre se limitato inferiormente ha minimo.

5.6 Proprietà di Archimede

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}^+$ t.c. $na > b$.

Idea:

$$A := \{na \text{ t.c. } n \in \mathbb{N}^+\}$$

Supponendo che $\nexists n \in \mathbb{N}^+$ t.c. $na > b \Rightarrow b \geq an, \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow b$ è un maggiorante $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$

Conseguenze:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, non sono limitati superiormente, in quanto tutti contengono il precedente.
- $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+$ t.c. $\frac{1}{n} < x$, che come corollario ha che negando la disuguaglianza, posso dire che: $x \geq 0$ t.c. $\forall a \in \mathbb{N}^+, x < \frac{1}{n} \Rightarrow x = 0$

5.7 Funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \equiv |x| = \max\{x, -x\} \in [0, +\infty)$$

5.8 Intervalli

$I \subset \mathbb{R}$, dice intervallo se $\forall x, y \in I, \exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $x < z < y, z \in I$

Un intervallo può essere descritto come uno di questi 4 tipi, avendo, $a \leq b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b\}$
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x \leq b\}$
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x < b\}$
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$

se a o b sono uguale a più o meno infinito, allora l'estremo si dice aperto.

Definizione: $A \subset \mathbb{R}$ si dice denso in $\mathbb{R}$ se $\forall I \subset \mathbb{R}, \exists a \in A$ t.c. $a \in I$

6 Cenni su $\mathbb{R}^n$, cardinalità e numeri complessi

Definizione:

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ t.c. } x, y \in \mathbb{R}\} \equiv$ piano cartesiano
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^n$, e le sue coordinate sono: $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

6.1 Intorno di un punto

Per intorni si intende:

$$J_{x_0} = J(x_0) = \{]a, b[\text{ t.c. } x \in]a, b[\}$$

è definito come intorno particolare:

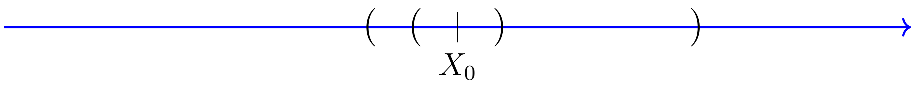
$$Ir_0(x_0) = (x_0 - r_0, x_0 + r_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |x - x_0| < r_0\}$$

un intervallo di centro x_0 e raggio r_0.

$|\quad|$ permette di definire una distanza su $\mathbb{R}$, detta distanza euclidea:

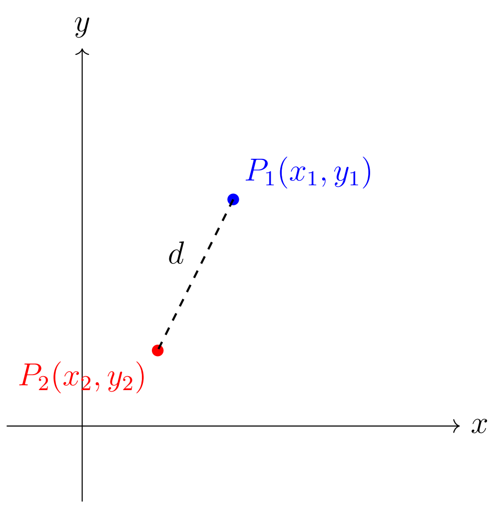
$$d(x, y) = |x - y|$$

Osservazione: $\forall I \in J(x_0), \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x_0) \subset J(x_0)$
Prendendo: $r < \min\{d(x_0, a), d(x_0, b)\}$



6.1.1 Distanza in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^2$:



$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_2)| = ||P_2 - P_1||$.

Nel caso in cui $x_1 = x_2$, allora è come si ci trovassimo in $\mathbb{R}$, quindi si può usare la formula per la distanza euclidea.

In $\mathbb{R}^3$:

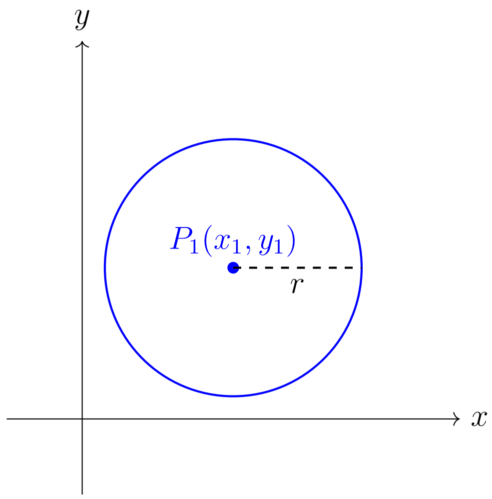
Presi due punti P_1, P_2:

$$P_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, ..., x_n^1), \in \mathbb{R}^n$$
$$P_1 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, ..., x_n^2), \in \mathbb{R}^n$$

$$d(P_1, P_1) := ||P_2 - P_1|| = \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2 + ... + (x_n^1 - x_n^2)^2}$$

6.1.2 Intorno in $\mathbb{R}^n$

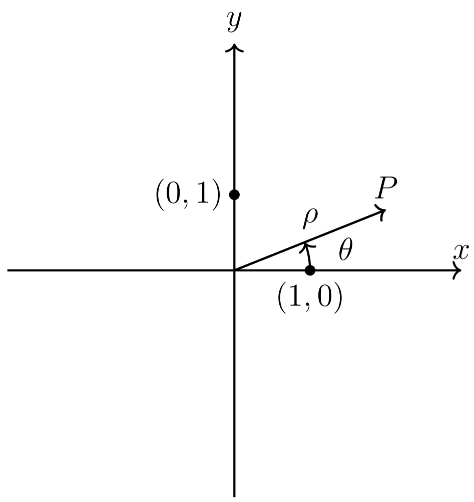
se $x_0 \in \mathbb{R}^2$ t.c. $I_r(x_0) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } ||x - x_0|| < r\}$



6.2 Coordinate polari

preso $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, è possibile trovare θ, ρ t.c. :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \rightarrow \rho := d(0, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$



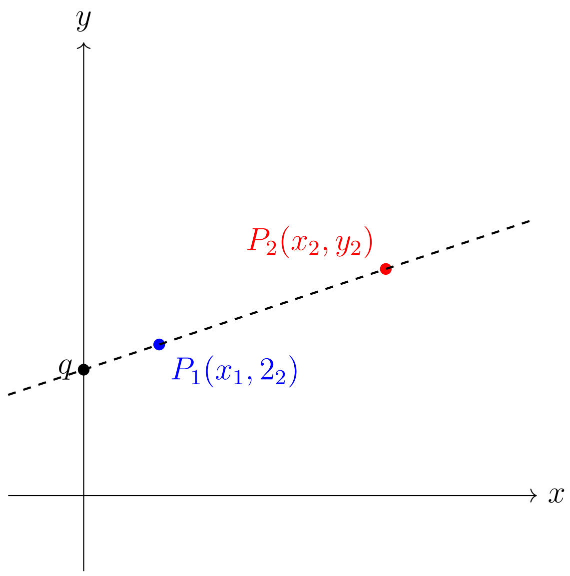
La somma tra le componenti al quadrato di un punto equivale a ρ al quadrato, secondo il teorema di Pitagora.

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2$$

6.3 Retta in $\mathbb{R}^2$

Una retta non verticale è definita da una coppia ordinata:

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y = mx + q\}$$



in una retta m è il coefficiente angolare della retta, definito dal rapporto incrementale:

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e per q, si intende la quota del punto di intersezione con l'asse delle y.

Le rette verticali non sono descrivibili con questa equazione, in quanto si dividerebbe per 0 nel rapporto incrementale, perciò si usa una insieme numerico:

$$r_v := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x = x_0\}$$

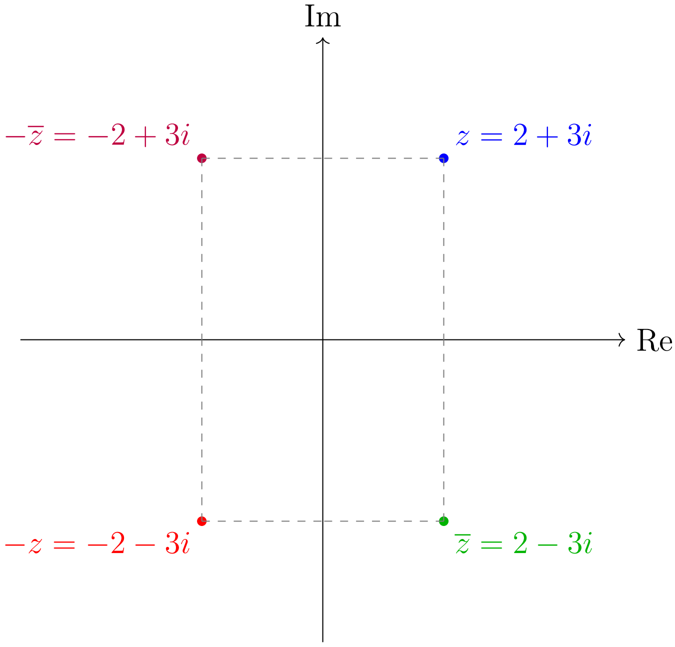
6.4 Numeri complessi ($\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$)

I numeri complessi sono definiti da una parte reale a e da una parte immaginaria b, che moltiplica l'unità immaginaria, $i \in \mathbb{C}$ t.c. $i^2 = -1$.

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + bi = (a, b), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

Preso un numero complesso $z = (a, b)$, è possibile trovare:

- l'opposto: $-z = (-a, -b)$
- il coniugato: $\overline{z} = (a, -b)$
- l'opposto del coniugato: $-\overline{z} = (-a, b)$



6.5 Insiemi aperti e chiusi

Un insieme si dice aperto:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \textbf{aperto} \text{ se } \forall x \in A, \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

Un insieme si dice chiuso:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \textbf{chiuso} \text{ se } A^c = \mathbb{R}^n \setminus A \text{ è aperto}$$

Un insieme può essere ne aperto ne chiuso , ad esempio $(a, b]$
Per punto interno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice } \textbf{punto interno} \text{ ad A se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

l'insieme di tutti i punti interni è definito da:

$$\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x \text{ è interno ad A}\}$$

Osservazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } A \text{ è aperto } \mathring{A} = A \\ \quad \mathring{A} \text{ è il più grande insieme aperto } B \text{ t.c. } B \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ è aperto } \iff \mathring{A} = A$$

Per punto esterno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \text{ è esterno ad A se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap A \neq \emptyset$$

oppure dicendo che è interno all'insieme complementare di A:

$$Ir(x_0) \subset A^c \iff x \text{ è interno ad } A^c$$

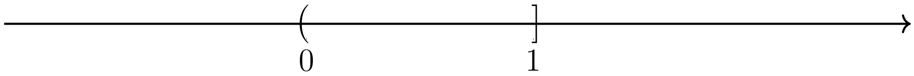
Per punto di bordo, o frontiera, si intende un punto che non è ne interno ne esterno, quindi che si trova sul bordo dell'insieme.

$$\delta A := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. x sia un punto di bordo di A}\}$$

Osservazioni:

- $\delta A = \delta A^c$
- $\overline{A} := A \cup \delta A \equiv$ chiusura di A, è sempre un insieme chiuso
- $\overline{A}$ è il più piccolo insieme B chiuso t.c. $A \subset B$

Esempio:



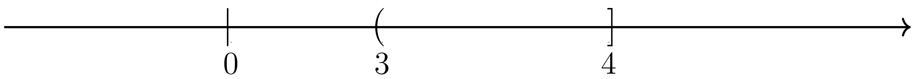
$$A = (0,1], \mathring{A} = (0,1), \delta A = \{0,1\}, \overline{A} = A \cup \delta A = [0,1]$$

Per punto isolato si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice isolato se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap A = \{x\}$$

Esempio:

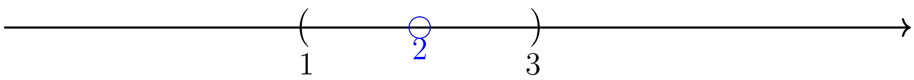
$$A = \{0\} \cup (3,4)$$



$\Rightarrow p = 0$ è punto isolato di A
in $\mathbb{N}$ ogni punto $n \in \mathbb{N}$ è isolato.
Un insieme tale che ogni punto è isolato si dice ISOLATO.

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice punto di accumulazione di A se } \forall Ir(x), (Ir(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

$$A = (1,3) \setminus \{2\}$$



Allora $x = 2$ è un punto di accumulazione, e non appartiene ad A, ma potrebbe anche appartenere.
In $\mathbb{R}$:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Allora un punto si dice di accumulazione, se $\forall u \subset J(x), (u \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
osservazione:

- se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow u = Ir(x)$, come per la definizione precedente
- $x = +\infty$, $+\infty$ è un punto accumulazione di A, se $\forall u \in J(+\infty)$, si ha che $(u \setminus \{+\infty\}) \cap A \neq 0 \to u = (M, +\infty)$, quindi A non è limitato superiormente.
- $x = -\infty$, $-\infty$ è un punto accumulazione di A, se $\forall u \in J(-\infty)$, si ha che $(u \setminus \{-\infty\}) \cap A \neq 0 \to u = (-\infty, m)$, quindi A non è limitato inferiormente.

Caratterizzazione di $\overline{A} = A \cup \delta A$:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \forall r > 0, (Ir(x) \cap A) \neq 0\}, \text{ l'insieme dei punti aderenti ad A}$$

Osservazione:

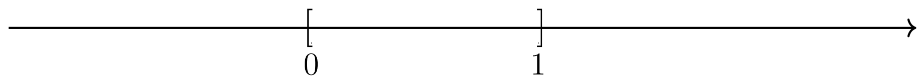
$$A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\mathbb{R}} = A \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$+\infty \in \overline{A} \iff +\infty \text{ è un punto di accumulazione per } A$$

$$\overline{A} := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \text{ t.c. } \forall U \subset J(x) \text{ t.c. } \}$$

Esercitazione:

$$A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$



$$\mathring{A} = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = \emptyset$$

$$\overline{A} = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = [0, 1]$$

$$x \in \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} \iff \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap (\mathbb{Q} \setminus [0, 1]) \neq 0, \text{ Q è denso in R}$$

$$\delta A = \delta(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = [0, 1] \rightarrow \delta A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = [0, 1] \setminus \emptyset$$

Dimostrazione che la cardinalità di $\mathbb{N} = \mathbb{Q} < \mathbb{R}$