

# Appunti di Analisi Matematica

Liam Ferretti

7 ottobre 2025

## Sommario

Per i ricevimenti bisogna prenotarsi via e-mail, e si svolgeranno nell'edificio 105 dell'edificio Castel Nuovo. Si potranno trovare note ed esercizi su e-learning.

Programma:

- Numeri reali
- Funzioni di variabili reali
- Successioni e serie
- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale ad una variabile
- Integrali
- Equazioni differenziali lineari
- Funzioni di più variabili (tutti i capitoli precedenti comprendono le funzioni a più variabili)

I libri di testo sono presenti su e-learning, ed è consigliato "Crasta Malusa", da cui assegnerà gli esercizi.

L'esame sarà composto da scritto più orale, non ci sarà probabilmente un esonero, e con l'orale si può incrementare o decrementare il voto di fino a 3 punti in positivo o 3 in negativo, tranne nel caso in cui si commettano errori su: limiti, continuità o divisione per 0, che comporta la bocciatura immediata.

# Indice

<b>1</b>	<b>Notazione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Le proposizioni</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Insiemi</b>	<b>4</b>
3.1	Notazione degli insiemi . . . . .	4
3.2	Relazione di ordine o inclusione . . . . .	4
3.3	Proprietà degli insiemi . . . . .	5
3.4	Operazioni tra insiemi . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Predicato</b>	<b>6</b>
4.1	Confronto simbologia logica e insiemistica . . . . .	6
4.2	Notazione . . . . .	7
4.3	Insieme parti di I . . . . .	7
4.4	Predicato con più variabili . . . . .	7
4.5	Negazione del predicato . . . . .	8
4.6	Regole della logica . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Insiemi numerici</b>	<b>9</b>
5.1	Numeri naturali . . . . .	9
5.1.1	Proprietà di $\mathbb{N}$ (relazione di ordine) . . . . .	9
5.1.2	Assiomi di Peano . . . . .	9
5.1.3	Metodo Induttivo . . . . .	9
5.1.4	Principio di buon ordinamento (P.B.O.) . . . . .	10
5.1.5	Fattoriale e coefficiente binomiale . . . . .	10
5.2	Numeri interi . . . . .	11
5.3	Numeri razionali . . . . .	11
5.3.1	Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$ . . . . .	12
5.3.2	Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali . . . . .	12
5.3.3	Caso interessante . . . . .	13
5.4	Numeri reali . . . . .	13
5.4.1	Teorema della caratterizzazione di $\mathbb{R}$ . . . . .	14
5.5	Intervalli, semirette ed estremi . . . . .	14
5.6	Proprietà di Archimede . . . . .	15
5.7	Funzione modulo . . . . .	15
5.8	Intervalli . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Cenni su <math>\mathbb{R}^n</math>, cardinalità e numeri complessi</b>	<b>16</b>
6.1	Intorno di un punto . . . . .	16
6.1.1	Distanza in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
6.1.2	Intorno in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	17
6.2	Coordinate polari . . . . .	17
6.3	Retta in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	18
6.4	Numeri complessi ( $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ ) . . . . .	18
6.5	Insiemi aperti e chiusi . . . . .	19

La matematica si costruisce su:

- elementi di base:
  - oggetti di base (enti primitivi)
  - proprietà di base (assiomi)
- regole di deduzione che sono fissate

## 1 Notazione

La notazione si divide in:

- Connettiva:
  - $\neg$  , non
  - $\vee$  , e
  - $\wedge$  , o
  - $\Rightarrow$  , implica
  - $\Leftrightarrow$  , equivale (se e solo se)
  - $:$  (t.c.) , tale che / tale per cui
- Quantificativa:
  - $\exists$  , esiste
  - $\nexists$  , non esiste
  - $\exists!$  , esiste ed è unico
  - $\forall$  , per ogni

## 2 Le proposizioni

Per proposizione Si intende una affermazione.

Es:

- $P$  = oggi è martedì
- $\neg P$  = oggi non è martedì
- $Q$  = c'è il sole
- $P \wedge Q$  = oggi è martedì e c'è il sole
- $P \vee Q$  = oggi è martedì oppure c'è il sole
- $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow P \vee Q$  può essere vera ( $P$  oppure  $Q$ ), ma  $P \wedge Q$  non può essere vera ( $P$  e  $Q$ ), quindi non possono essere vere allo stesso tempo

$A \Rightarrow B$ , vuol dire se  $A$  è vero allora  $B$  è vero.

$A \iff B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ , e vuol dire se e solo se  $A$  allora  $B$ .

Partendo dalla proposizione precedente, è vero che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$$

cioè è utile nelle dimostrazioni per assurdo. Nelle dimostrazioni si parte dagli assiomi e con le regole logiche si fanno ipotesi (affermazioni) che nel caso in cui fosse vera rende la tesi (la validità di una o più proprietà).

OSS: è **sbagliato** dire che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \Rightarrow \neg B$$

in quanto il non avvenire di  $A$  non implica che  $B$  non possa avvenire per altre motivazioni.

## 3 Insiemi

Un insieme è una collezione di elementi

### 3.1 Notazione degli insiemi

- definizione di insieme:  $G := \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ , è necessario l'uso di  $:=$  per definire un insieme, e vuol dire "definito come".
- quando due insiemi hanno gli stessi elementi si dichiara l'uguaglianza tra  $I_1$  e  $I_2$ , con il simbolo  $=$ , ad esempio

$$F := \{0, 1\}, H := \{1, 0\} \rightarrow F = H$$

- per definire l'appartenenza di un elemento in un insieme si scrive  $a \in I$ , se questo elemento non appartiene all'insieme si rappresenta  $a \notin I$  con  $a$  un elemento qualsiasi e  $I$  un insieme qualsiasi.

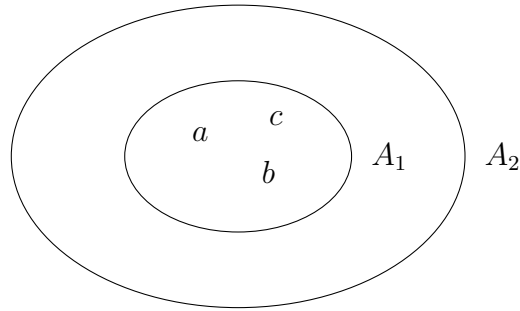
### 3.2 Relazione di ordine o inclusione

Se  $A_1 \subset A_2 \rightarrow A_1$  è contenuto in  $A_2$ , e  $A_1$  è al tal più grande quanto  $A_2$ , ovvero  $A_1$  è un sotto insieme di  $A_2$ .

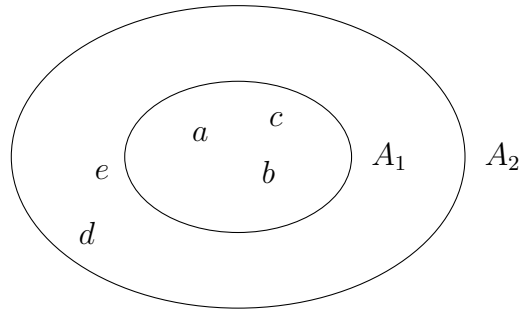
Se i due insiemi non sono uguali allora si segna  $A_1 \not\subseteq A_2$ , è quindi strettamente contenuto.

Se invece i due insiemi possono essere uguali, si scrive  $A_1 \subseteq A_2$ .

Es:



contengono gli stessi elementi quindi:  $A_1 = A_2$



in questo caso  $A_2$  contiene più elementi di  $A_1$ , quindi  $A_1 \subsetneq A_2$

### 3.3 Proprietà degli insiemi

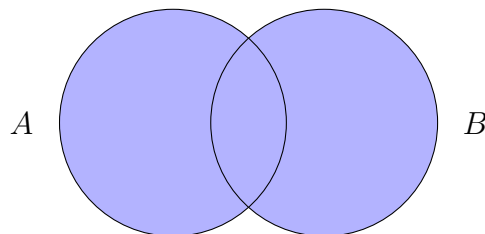
Gli insiemi hanno 3 proprietà principali:

- Riflessiva:  $A \subseteq A$ , per  $A$  insieme qualsiasi, quindi l'insieme contiene se stesso
- Antisimmetrica:  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ , per  $A, B$  insiemi qualsiasi
- Transitiva:  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ , per  $A, B, C$  insiemi qualsiasi

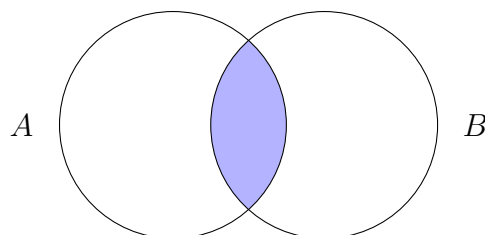
### 3.4 Operazioni tra insiemi

Presi due insiemi  $A, B$  allora esistono diverse proprietà:

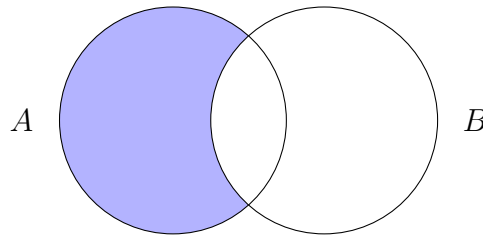
- Unione (o):  $A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$



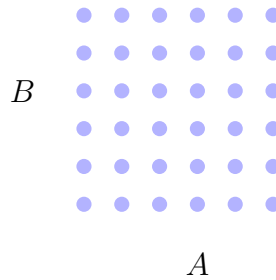
- Intersezione (e):  $A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$



- Differenza (-):  $A \setminus B := \{a : a \in A, a \notin B\}$



- Prodotto cartesiano:  $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$



## 4 Predicato

Una proposizione può dipendere da una o più variabili, ovvero un ente che varia in un gruppo, in quel caso prende il nome di predicato. Es:

$P$  = oggi è martedì

$P(x)$  =  $x$  è martedì

allora preso  $A := \{luned, martedì, ..., domenica\}, x \in A$

$B := \{x \in A : P(x)\} = \{martedì\}$ , con  $P(x)$  si intendono le  $x$  che rendono  $P(x)$  vera, quindi si cercano le  $x$  appartenenti ad  $A$  t.c.  $P(x)$  sia vera.

### 4.1 Confronto simbologia logica e insiemistica

La simbologia nella logica e nella insiemistica è diversa, ma i termini sono gli stessi:

### Logica

$A$ , ovvero  $A$  è vera  
 $\neg A$ , ovvero  $A$  non è vera  
 $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$   
 $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$   
 $\Rightarrow$ , ad esempio  $A \Rightarrow B$

### Insiemistica

$A := \{x \in I : A(x)\}$ , con  $A \subset I$   
 $A^c := \{x \in B : \neg A(x)\}$ , con  $A^c \not\subset B$   
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$   
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$   
 $A \subset B$ , perchè  $A$  è definito come gli elementi  $x$  appartenenti ad un insieme  $I$  t.c.  $A(x)$  sia vera, allo stesso tempo  $B$  è definito come gli elementi  $x$  appartenenti ad un insieme  $I$  t.c.  $B(x)$  sia vera, perciò dire che  $A$  implica  $B$ , vuol dire che gli elementi  $x$  che rendono veri  $A$  sono contenuti in  $B$   
 $A = B$ , riprendendo la stessa argomentazione in questo caso  $B$  è vera se  $A$  è vera, ma allo stesso tempo  $A$  è vera se  $B$  è vera, perciò i due insiemi coincidono

$\Leftrightarrow$ , ad esempio  $A \Leftrightarrow B$

## 4.2 Notazione

- $x \in A \xrightarrow{def} x$  è elemento di  $A$
- $x \notin A \xrightarrow{def} x$  non è elemento di  $A$ , quindi  $x \in A^c$
- $A \cap B := \{a : A(a) \wedge B(a)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B := \{a : A(a) \vee B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B := \{a : A(a) \vee \neg B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \notin B\} = \{x : x \in A \vee x \in B^c\}$
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B)^c$

## 4.3 Insieme parti di I

L'insieme parti di  $I$ , è definito come:

$$P(I) := \{X : X \subset I\}, \text{ con } X \text{ insieme}$$

Preso  $I := \{0, 1\} \Rightarrow P(I) = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ ,  $P(I)$  rappresenta l'insieme parti, ovvero l'insieme composto da tutti i possibili sottoinsiemi di  $I$ . Es:

$$A = \{0, 1\} \Rightarrow P(A) = \{0, 1, \{0, 1\}\}$$

## 4.4 Predicato con più variabili

$$L(x) = x \text{ segue la lezione}, \forall x \in I$$

$$P(x, y) = x \text{ segue la lezione il giorno } y, \forall x \in I, y \in G$$

preso  $x \in \{\text{studenti del canali 2 del corso Analisi}\} = \{\text{Luca, Liam, ...}\}$ , allora:

- $\forall x, L(x) \Rightarrow$  Luca segue la lezione  $\wedge$  Liam segue la lezione  $\wedge \dots$
- $\exists x$  t.c.  $L(x) \Rightarrow$  Luca segue la lezione  $\vee$  Liam segue la lezione  $\vee \dots$
- $x = Luca \rightarrow P(Luca, y) //$  Luca segue la lezione il giorno  $y$ , se  $y = oggi \rightarrow P(Luca, oggi)$  è vero

Come scrivo che ogni studenti segue la lezione almeno un giorno?

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

l'ordine nei quantificatori è importante in quanto dire:

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

è diverso da dire:

$$\exists y \in G, \forall x \in S \text{ t.c. } P(x, y)$$

che vuol dire "esiste almeno un giorno tale per cui tutti gli studenti vengano a lezione"

## 4.5 Negazione del predicato

Negare  $\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$  (ogni studenti segue la lezione almeno un giorno), vuol dire:

$$\neg(\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)) = \exists x \in S, \forall y \in G : \neg P(x, y)$$

quindi esiste almeno uno studente che non segue mai la lezione

## 4.6 Regole della logica

- se  $B \Rightarrow A$  allora A è condizione necessaria per B, quindi:

$$B \Rightarrow A \rightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$$

- se  $A \Rightarrow B$  allora A è condizione sufficiente di B, quindi basta che A sia vera affinché B avvenga.
- se  $A \iff B$  allora A è condizione necessaria e sufficiente di B.
- $\emptyset \in E, \forall E$  insieme
- Regola del terzo escluso:

$$\forall A \text{ insieme, } A \vee \neg A, \text{ quindi succede o non succede.}$$

- Principio di non contraddizione:

$$\forall A, \neg(A \wedge \neg A)$$

quindi per ogni insieme non è vero che esiste A e non A, in quanto non esisto elementi appartenenti ad A ed anche a non A, quindi non esistono elementi che verificano una proposizione ma allo stesso tempo non la verificano

- Transitività:

$$\forall A, B, C, [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$



## 5 Insiemi numerici

### 5.1 Numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, n\}, \text{ ed } \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

in  $\mathbb{N}$  è possibile ordinare gli elementi quindi per  $m, n \in \mathbb{N}$ :

$$n \leq m \iff \exists p \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m = n + p$$

#### 5.1.1 Proprietà di $\mathbb{N}$ (relazione di ordine)

- Riflessiva:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n$$

- Antisimmetrica:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq n) \Rightarrow n = m$$

- Transitiva:

$$\forall n, m, p \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq p) \Rightarrow n \leq p$$

- Ordinamento totale:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

#### 5.1.2 Assiomi di Peano

Esiste una operazione, **passaggio al successivo**,  $s(n) = n + 1$ , tale che:

- (P1) esiste un elemento  $0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $0 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$
- (P2) se  $n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m \rightarrow s(n) \neq s(m)$
- (P3) se  $E \subset \mathbb{N}$  è tale che:

$$(I1) \quad 0 \in E \quad e \quad (I2) \quad \text{se } n \in E \rightarrow s(n) \in E$$

allora  $E = \mathbb{N}$

#### 5.1.3 Metodo Induttivo

Il P3 è ciò che definisce il metodo induttivo (PI), ovvero:

$$P(n)$$

$$E := \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n)\} \subset \mathbb{N}$$

PI dice che:

$$\begin{cases} 0 \in E \\ \forall n \in E \Rightarrow s(n) \in E \end{cases} \Rightarrow E = \mathbb{N}$$

**Proposizione 1.**  $P(n) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

*Dimostrazione.* Dimostro per induzione

**Base induttiva:** per  $n = 0$ , la sommatoria equivale a  $\frac{0(1)}{2} = 0$

**Passo induttivo:**

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_0^{n+1} k = \sum_0^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P(n+1) \end{aligned}$$

□

Per applicare il metodo induttivo, non è valido partire dalla soluzione per arrivare alla dimostrazione, in quanto bisogna partire da  $P(n)$  ed arrivare a dimostrare  $P(n+1)$ .

#### 5.1.4 Principio di buon ordinamento (P.B.O.)

Teorema equivalente al principio di induzione, perciò se  $P1$  e  $P2$  sono valide allora  $PI \iff P.B.O.$ , e dice che:

$$\forall E \subset \mathbb{N} \text{ t.c. } E \neq \emptyset, \exists n_0 \in E \text{ t.c. } \exists n \geq n_0, \forall n \in E$$

Il minimo di un insieme  $E$ , se esiste è definito come:

$$a \in E \text{ t.c. } a \leq b, \forall b \in E$$

Il principio di buon ordinamento permette di dimostrare induttivamente anche quando la base induttiva è diversa da 0, e in quel caso:

$$P(b) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, b\}, b \neq 0$$

#### 5.1.5 Fattoriale e coefficiente binomiale

Due funzioni matematiche che si definiscono per induzione sono:

- Fattoriale:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1), \forall n \in \mathbb{N}$$

e per definizione il fattoriale di 0 è 1:

$$0! = 1$$

- Coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$$

partendo dal coefficiente binomiale, è possibile svolgere lo sviluppo di una potenza ennesima di un binomio, definito binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, n \in \mathbb{N}^+$$

in questo binomio il coefficiente binomiale da il coefficiente di  $a^{n-k}b^k$ , per quel indice specifico di  $k$ , che è ottenibile anche dal triangolo di tartaglia

- Triangolo di tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

e così via, costruito dalla somma dei due elementi alla righe precedente, in cui partendo dall'alto dalla riga 0, fino alla riga n si ha da sinistra a destra l'indice k della riga n.

## 5.2 Numeri interi

I numeri interi sono definiti come:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

è possibile osservare che:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}$  non ha un minimo, al contrario di  $\mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \exists! -n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n + (-n) = 0$

Quindi  $(\mathbb{Z}, +)$ , ovvero l'insieme dei numeri interi in cui è definita la somma, è detto un gruppo commutativo/abeliano. Si dice abeliano, quando:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Invece un insieme si definisce gruppo quando rispetta queste 3 proprietà:

$$\begin{cases}
 1 \text{ la somma è associativa : } (a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \\
 2 \exists! 0, \text{ detto elemento neutro della somma t.c. } 0 + z = z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{Z} \\
 3 \forall z \in \mathbb{Z} \exists! -z \in \mathbb{Z}, \text{ detto opposto di } z \text{ t.c. } z + (-z) = -z + z = 0
 \end{cases}$$

## 5.3 Numeri razionali

i numeri razionali sono definiti come:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Allora  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ , è un campo:

- $(\mathbb{Q}, +)$  è un gruppo commutativo.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$  è un gruppo commutativo.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a(b + c) = ab + ac$ , quindi è valida la proprietà distributiva rispetto alla somma.

- Esistenza dell'elemento neutro del prodotto:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- elemento inverso del prodotto:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{a}{a} = 1$$

Altre proprietà di  $\mathbb{Q}$ , dette di ordinamento:

- Ordinamento totale:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq a$$

- Riflessiva:

$$\forall a \in \mathbb{Q}, a \leq a$$

- Antisimmetrica:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \vee b \leq a \Rightarrow a = b$$

- Transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Q}$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Q}_0^+$

Oss:  $\mathbb{Q}$  ha dei buchi, infatti:

$$\exists q : q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

### 5.3.1 Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$

**Proposizione 2.**  $\nexists q \in \mathbb{Q}$  t.c.  $q^2 = 2 \rightarrow (\frac{p}{q})^2 = 2$ , con  $p$  e  $q$  coprimi, e  $q \neq 0$

*Dimostrazione.* Dimostro per assurdo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

dato che  $p^2$  è uguale a  $2q^2$ ,  $p$  è pari, perciò può essere scritto come  $(2k)^2$ , svolgendo i calcoli.

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

ora anche  $q^2$  è uguale a  $2k^2$ , quindi anche  $q$  è pari, perciò la nostra tesi non è più valida in quanto non è vero che  $p$  e  $q$  sono coprimi.  $\square$

### 5.3.2 Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali

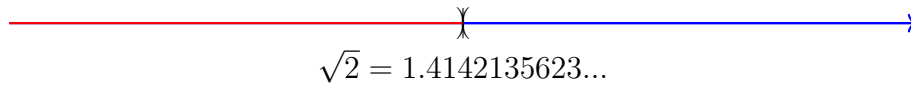
$\mathbb{Q}$  corrisponde all'insieme  $\{n, n_1n_2n_3...\}$ , cioè  $n \in \mathbb{Z}, n_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$  t.c. sono finite ( $n_i = 0, \forall i > i_0$ ) o periodiche (un gruppo di  $n$  cifre si ripete all'infinito):

$$\mathbb{Q} := \{n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k}\}, k \in \mathbb{N}$$

### 5.3.3 Caso interessante

Presi:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 < 2\} \quad B := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 > 2\}$$



osserviamo che:

- $a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b$
- A, B sono vicino quanto vogliamo:

$$\exists a \in A, b \in B \text{ t.c. } a, b \text{ siano vicini}$$

- $\nexists c \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$ , quindi  $\mathbb{Q}$  non soddisfa l'assioma di Dedekind o assioma della completezza.

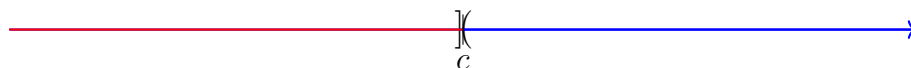
## 5.4 Numeri reali

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  è definito assiomaticamente tramite:

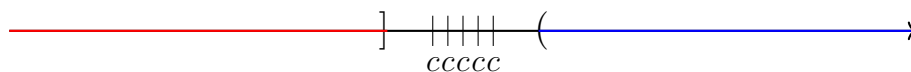
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  soddisfa le proprietà di  $\mathbb{Q}$
- soddisfa l'assioma di Dedekind, quindi  $\mathbb{R}$  non ha buchi, ovvero:

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{R} \wedge a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \leq b$$

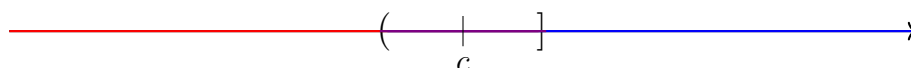
con c che può appartenere ad A o a B, ma non ad entrambi



Importante: se  $A \cup B \neq \mathbb{R}$ , allora non è detto che c sia unico:



Se invece l'unione tra i due insiemi non è nulla o unica, quindi  $A \cap B \neq \emptyset$



in questo caso  $\exists b \in B \text{ t.c. } b < c$

### 5.4.1 Teorema della caratterizzazione di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$  è l'unico campo ordinato che può essere rappresentato con l'insieme di tutti i possibili decimali allineati:

$$\mathbb{R} := \{m, d_1 d_2 d_3 \dots d_j \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ t.c. } j \in \mathbb{N}^+\}$$

$$\setminus \{m, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, \dots, 9\} \text{ t.c. } \exists j_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } d_j = 9, \forall j \geq j_0\}$$

devono quindi essere esclusi tutti gli allineamenti di decimali in cui dopo un certo indice  $j$  si susseguono solo 9, in quanto è lo stesso numero del successivo susseguito da tutti 0.

Si dice che  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ , quanto  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  può essere approssimato da numeri razionali.

## 5.5 Intervalli, semirette ed estremi

Definizione:

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , è detto che  $M_A$  è un **maggiorante** di  $A$ , se  $m \geq a, \forall a \in A$ .

$$\mathcal{M}_A := \{M_A \text{ t.c. } M_A \geq a, \forall a \in A\}$$

ovvero l'insieme dei maggioranti

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , è detto che  $m_A$  è un **minorante** di  $A$ , se  $m \leq a, \forall a \in A$ .

$$\mathcal{m}_A := \{m_A \text{ t.c. } m_A \leq a, \forall a \in A\}$$

ovvero l'insieme dei minoranti

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ,  $A$  è **limitato superiormente** se  $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ , quindi  $A$  ha almeno un maggiorante.

$\mathbb{N}$  non è limitato superiormente in quanto  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n \text{ t.c. } m \in \mathbb{N}$

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ,  $A$  è **limitato inferiormente** se  $\mathcal{m}_A \neq \emptyset$ , quindi  $A$  ha almeno un minorante

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , allora il numero  $M \in \mathbb{R}$ , si dice **massimo di  $A$** ,  $\max A$ , se  $M$  è un maggiorante di  $A$  e se  $M \in A$ .

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , allora il numero  $m \in \mathbb{R}$ , si dice **minimo di  $A$** ,  $\min A$ , se  $m$  è un minorante di  $A$  e se  $m \in A$ .

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , allora il minimo dei maggioranti di  $A$ , si dice **estremo superiore** di  $A$ ,  $\sup A$  o supremum  $A$ , nel caso in cui l'estremo superiore non esista, il  $\sup A = +\infty$

- sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , allora il massimo dei minoranti di  $A$ , si dice **estremo inferiore** di  $A$ ,  $\inf A$  o infimum  $A$ , nel caso in cui l'estremo inferiore non esista, il  $\inf A = -\infty$

**Proposizione 3.** *sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , allora  $\exists \sup A$*

*Dimostrazione.*  $A$  è limitato superiormente  $\Rightarrow \mathcal{M}_A \neq \emptyset$ , per definizione:  $\forall a \in A, \forall b \in \mathcal{M}_A$  si ha  $a \leq b$ .

L'assioma di Dedekind implica che:  $\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \leq b \Rightarrow c = \min \mathcal{M}_A = \sup A$   $\square$

Sia  $A$  limitato superiormente, quindi  $\exists \sup A \in \mathbb{R}$ , allora il  $\sup A$  è caratterizzato da:

$$\sup A = \min \mathcal{M}_A$$

$$\begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A \Rightarrow \lambda \in \mathcal{M}_A \end{cases} \iff \begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A, \exists a \in A \text{ t.c. } \lambda < a \end{cases}$$

Osservazione: sia  $A \subset \mathbb{R}$  t.c.  $\sup A \in \mathbb{R}$ :

- se  $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

Osservazione: sia  $A \subset \mathbb{R}$  t.c.  $\inf A \in \mathbb{R}$ :

- se  $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

Importante: sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A, \exists \inf A$ , ma non è detto che esistano il  $\max A, \min A$ .

Osservazione: ogni  $S \subset \mathbb{Z}, S \neq \emptyset$ , limitato superiormente ha un massimo, mentre se limitato inferiormente ha minimo.

## 5.6 Proprietà di Archimede

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } na > b$ .

Idea:

$$A := \{na \text{ t.c. } n \in \mathbb{N}^+\}$$

Supponendo che  $\nexists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } na > b \Rightarrow b \geq an, \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow b$  è un maggiorante  $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$   
Conseguenze:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , non sono limitati superiormente, in quanto tutti contengono il precedente.
- $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } \frac{1}{n} < x$ , che come corollario ha che negando la disuguaglianza, posso dire che:  $x \geq 0 \text{ t.c. } \forall a \in \mathbb{N}^+, x < \frac{1}{n} \Rightarrow x = 0$

## 5.7 Funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \equiv |x| = \max\{x, -x\} \in [0, +\infty)$$

## 5.8 Intervalli

$I \subset \mathbb{R}$ , dice intervallo se  $\forall x, y \in I, \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x < z < y, z \in I$

Un intervallo può essere descritto come uno di questi 4 tipi, avendo,  $a \leq b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b\}$
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x \leq b\}$
- $[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x < b\}$
- $]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$

se  $a$  o  $b$  sono uguale a più o meno infinito, allora l'estremo si dice aperto.

Definizione:  $A \subset \mathbb{R}$  si dice denso in  $\mathbb{R}$  se  $\forall I \subset \mathbb{R}, \exists a \in A \text{ t.c. } a \in I$

## 6 Cenni su $\mathbb{R}^n$ , cardinalità e numeri complessi

Definizione:

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ t.c. } x, y \in \mathbb{R}\} \equiv \text{piano cartesiano}$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^n$ , e le sue coordinate sono:  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

### 6.1 Intorno di un punto

Per intorni si intende:

$$J_{x_0} = J(x_0) = \{]a, b[ \text{ t.c. } x \in ]a, b[ \}$$

è definito come intorno particolare:

$$Ir_0(x_0) = (x_0 - r_0, x_0 + r_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |x - x_0| < r_0\}$$

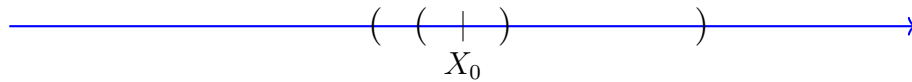
un intervallo di centro  $x_0$  e raggio  $r_0$ .

$| \quad |$  permette di definire una distanza su  $\mathbb{R}$ , detta distanza euclidea:

$$d(x, y) = |x - y|$$

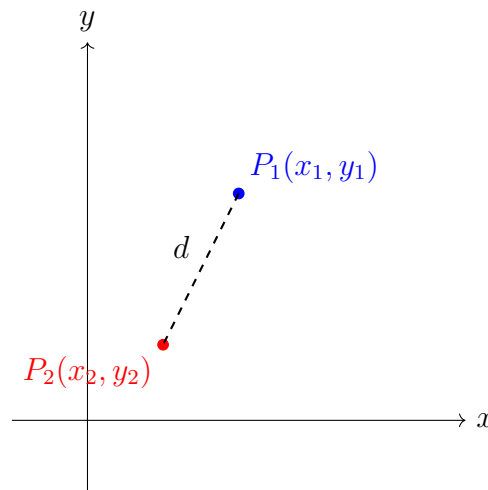
Osservazione:  $\forall I \in J(x_0), \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x_0) \subset J(x_0)$

Prendendo:  $r < \min\{d(x_0, a), d(x_0, b)\}$



#### 6.1.1 Distanza in $\mathbb{R}^n$

In  $\mathbb{R}^2$ :



$$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)| = \|P_2 - P_1\|.$$

Nel caso in cui  $x_1 = x_2$ , allora è come se ci trovassimo in  $\mathbb{R}$ , quindi si può usare la formula per la distanza euclidea.

In  $\mathbb{R}^3$ :



Presi due punti  $P_1, P_2$ :

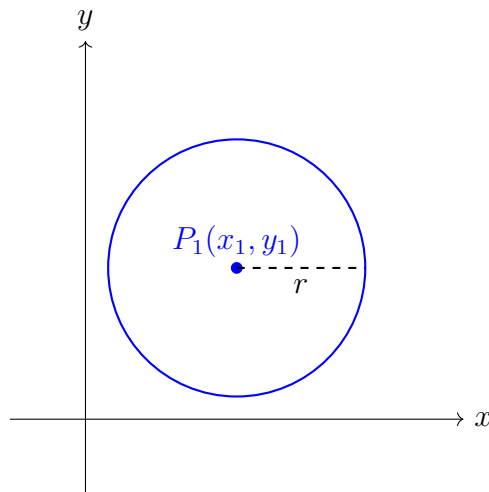
$$P_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, \dots, x_n^1), \in \mathbb{R}^n$$

$$P_2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, \dots, x_n^2), \in \mathbb{R}^n$$

$$d(P_1, P_2) := \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2 + \dots + (x_n^1 - x_n^2)^2}$$

### 6.1.2 Intorno in $\mathbb{R}^n$

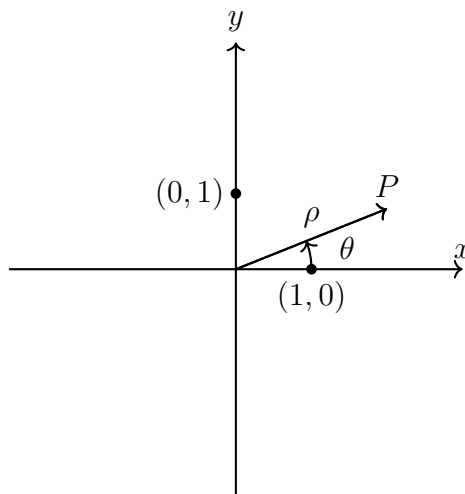
se  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  t.c.  $I_r(x_0) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \|x - x_0\| < r\}$



## 6.2 Coordinate polari

preso  $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , è possibile trovare  $\theta, \rho$  t.c. :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \rightarrow \rho := d(0, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$



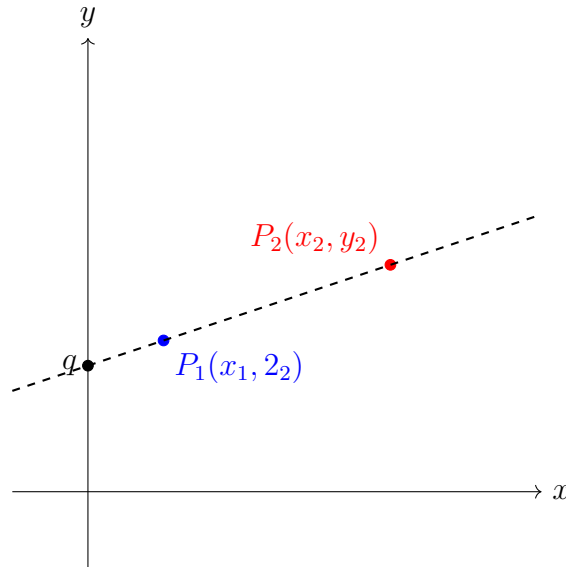
La somma tra le componenti al quadrato di un punto equivale a  $\rho$  al quadrato, secondo il teorema di Pitagora.

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2$$

### 6.3 Retta in $\mathbb{R}^2$

Una retta non verticale è definita da una coppia ordinata:

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y = mx + q\}$$



in una retta  $m$  è il coefficiente angolare della retta, definito dal rapporto incrementale:

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e per  $q$ , si intende la quota del punto di intersezione con l'asse delle  $y$ .

Le rette verticali non sono descrivibili con questa equazione, in quanto si dividerebbe per 0 nel rapporto incrementale, perciò si usa una insieme numerico:

$$r_v := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x = x_0\}$$

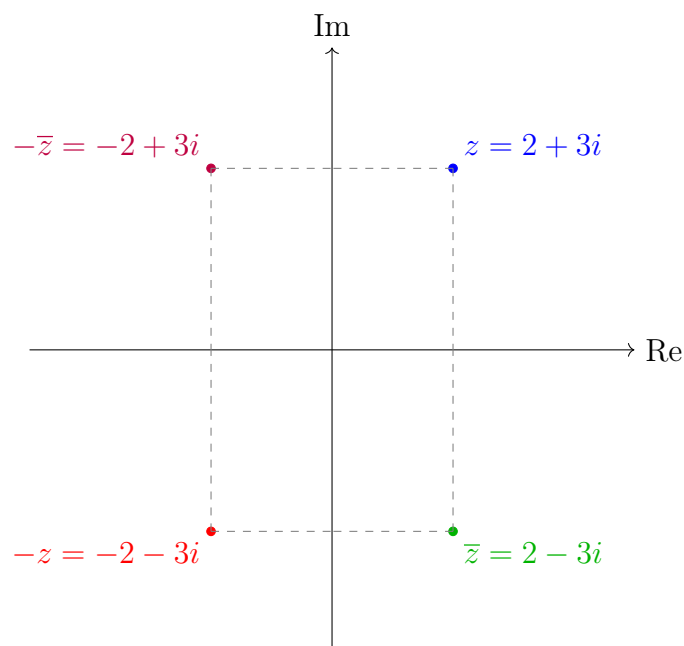
### 6.4 Numeri complessi ( $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ )

I numeri complessi sono definiti da una parte reale  $a$  e da una parte immaginaria  $b$ , che moltiplica l'unità immaginaria,  $i \in \mathbb{C}$  t.c.  $i^2 = -1$ .

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + bi = (a, b), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

Preso un numero complesso  $z = (a, b)$ , è possibile trovare:

- l'opposto:  $-z = (-a, -b)$
- il coniugato:  $\bar{z} = (a, -b)$
- l'opposto del coniugato:  $-\bar{z} = (-a, b)$



## 6.5 Insiemi aperti e chiusi

Un insieme si dice aperto:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \mathbf{aperto} \text{ se } \forall x \in A, \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

Un insieme si dice chiuso:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \mathbf{chiuso} \text{ se } A^c = \mathbb{R}^n \setminus A \text{ è aperto}$$

Un insieme può essere né aperto né chiuso, ad esempio  $(a, b]$

Per punto interno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice } \mathbf{punto interno} \text{ ad } A \text{ se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

l'insieme di tutti i punti interni è definito da:

$$\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x \text{ è interno ad } A\}$$

Osservazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } A \text{ è aperto } \mathring{A} = A \\ \mathring{A} \text{ è il più grande insieme aperto } B \text{ t.c. } B \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ è aperto} \iff \mathring{A} = A$$

Per punto esterno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \text{ è esterno ad } A \text{ se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap A \neq \emptyset$$

oppure dicendo che è interno all'insieme complementare di A:

$$Ir(x_0) \subset A^c \iff x \text{ è interno ad } A^c$$

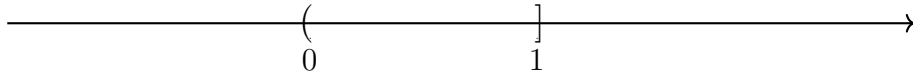
Per punto di bordo, o frontiera, si intende un punto che non è né interno né esterno, quindi che si trova sul bordo dell'insieme.

$$\delta A := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x \text{ sia un punto di bordo di } A\}$$

Osservazioni:

- $\delta A = \delta A^c$
- $\overline{A} := A \cup \delta A \equiv$  chiusura di A, è sempre un insieme chiuso
- $\overline{A}$  è il più piccolo insieme B chiuso t.c.  $A \subset B$

Esempio:



$$A = (0, 1], \overset{\circ}{A} = (0, 1), \delta A = \{0, 1\}, \overline{A} = A \cup \delta A = [0, 1]$$