

Appunti di Analisi Matematica

Liam Ferretti

6 ottobre 2025

Sommario

Per i ricevimenti bisogna prenotarsi via e-mail, e si svolgeranno nell'edificio 105 dell'edificio Castel Nuovo. Si potranno trovare note ed esercizi su e-learning.

Programma:

- Numeri reali
- Funzioni di variabili reali
- Successioni e serie
- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale ad una variabile
- Integrali
- Equazioni differenziali lineari
- Funzioni di più variabili (tutti i capitoli precedenti comprendono le funzioni a più variabili)

I libri di testo sono presenti su e-learning, ed è consigliato "Crasta Malusa", da cui assegnerà gli esercizi.

L'esame sarà composto da scritto più orale, non ci sarà probabilmente un esonero, e con l'orale si può incrementare o decrementare il voto di fino a 3 punti in positivo o 3 in negativo, tranne nel caso in cui si commettano errori su: limiti, continuità o divisione per 0, che comporta la bocciatura immediata.

Indice

1	Notazione	3
2	Le proposizioni	3
3	Insiemi	4
3.1	Notazione degli insiemi	4
3.2	Relazione di ordine o inclusione	4
3.3	Proprietà degli insiemi	5
3.4	Operazioni tra insiemi	5
4	Predicato	6
4.1	Confronto simbologia logica e insiemistica	6
4.2	Notazione	7
4.3	Insieme parti di I	7
4.4	Predicato con più variabili	7
4.5	Negazione del predicato	8
4.6	Regole della logica	8
5	Insiemi numerici	9
5.1	Numeri naturali	9
5.1.1	Proprietà di \mathbb{N} (relazione di ordine)	9
5.1.2	Assiomi di Peano	9
5.1.3	Metodo Induttivo	9
5.1.4	Principio di buon ordinamento (P.B.O.)	10
5.1.5	Fattoriale e coefficiente binomiale	10
5.2	Numeri interi	11
5.3	Numeri razionali	11
5.3.1	Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$	12
5.3.2	Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali	12
5.3.3	Caso interessante	13
5.4	Numeri reali	13
5.4.1	Teorema della caratterizzazione di \mathbb{R}	14
5.5	Intervalli, semirette ed estremi	14
5.6	Proprietà di Archimede	15
5.7	Funzione modulo	15
5.8	Intervalli	15
6	Cenni su \mathbb{R}^n, cardinalità e numeri complessi	16
6.1	Intorno di un punto	16

La matematica si costruisce su:

- elementi di base:
 - oggetti di base (enti primitivi)
 - proprietà di base (assiomi)
- regole di deduzione che sono fissate

1 Notazione

La notazione si divide in:

- Connettiva:
 - \neg , non
 - \vee , e
 - \wedge , o
 - \Rightarrow , implica
 - \Leftrightarrow , equivale (se e solo se)
 - $:$ (t.c.) , tale che / tale per cui
- Quantificativa:
 - \exists , esiste
 - \nexists , non esiste
 - $\exists!$, esiste ed è unico
 - \forall , per ogni

2 Le proposizioni

Per proposizione Si intende una affermazione.

Es:

- P = oggi è martedì
- $\neg P$ = oggi non è martedì
- Q = c'è il sole
- $P \wedge Q$ = oggi è martedì e c'è il sole
- $P \vee Q$ = oggi è martedì oppure c'è il sole
- $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow P \vee Q$ può essere vera (P oppure Q), ma $P \wedge Q$ non può essere vera (P e Q), quindi non possono essere vere allo stesso tempo

$A \Rightarrow B$, vuol dire se A è vero allora B è vero.

$A \iff B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, e vuol dire se e solo se A allora B .

Partendo dalla proposizione precedente, è vero che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$$

cioè è utile nelle dimostrazioni per assurdo. Nelle dimostrazioni si parte dagli assiomi e con le regole logiche si fanno ipotesi (affermazioni) che nel caso in cui fosse vera rende la tesi (la validità di una o più proprietà).

OSS: è **sbagliato** dire che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \Rightarrow \neg B$$

in quanto il non avvenire di A non implica che B non possa avvenire per altre motivazioni.

3 Insiemi

Un insieme è una collezione di elementi

3.1 Notazione degli insiemi

- definizione di insieme: $G := \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, è necessario l'uso di $:=$ per definire un insieme, e vuol dire "definito come".
- quando due insiemi hanno gli stessi elementi si dichiara l'uguaglianza tra I_1 e I_2 , con il simbolo $=$, ad esempio

$$F := \{0, 1\}, H := \{1, 0\} \rightarrow F = H$$

- per definire l'appartenenza di un elemento in un insieme si scrive $a \in I$, se questo elemento non appartiene all'insieme si rappresenta $a \notin I$ con a un elemento qualsiasi e I un insieme qualsiasi.

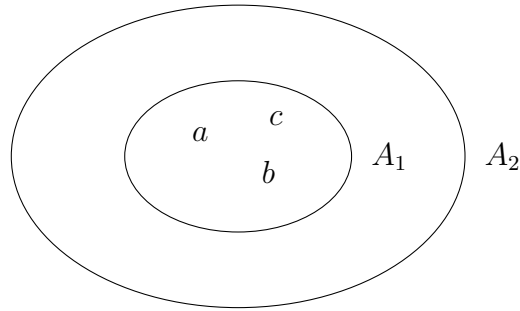
3.2 Relazione di ordine o inclusione

Se $A_1 \subset A_2 \rightarrow A_1$ è contenuto in A_2 , e A_1 è al tal più grande quanto A_2 , ovvero A_1 è un sotto insieme di A_2 .

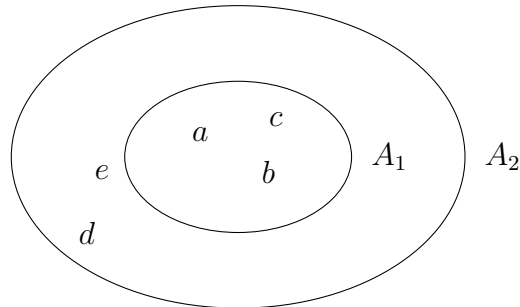
Se i due insiemi non sono uguali allora si segna $A_1 \not\subseteq A_2$, è quindi strettamente contenuto.

Se invece i due insiemi possono essere uguali, si scrive $A_1 \subseteq A_2$.

Es:



contengono gli stessi elementi quindi: $A_1 = A_2$



in questo caso A_2 contiene più elementi di A_1 , quindi $A_1 \subsetneq A_2$

3.3 Proprietà degli insiemi

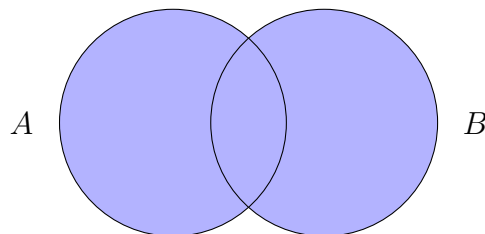
Gli insiemi hanno 3 proprietà principali:

- Riflessiva: $A \subseteq A$, per A insieme qualsiasi, quindi l'insieme contiene se stesso
- Antisimmetrica: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, per A, B insiemi qualsiasi
- Transitiva: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$, per A, B, C insiemi qualsiasi

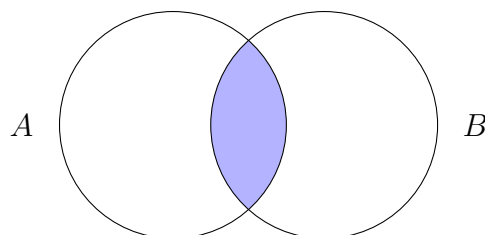
3.4 Operazioni tra insiemi

Presi due insiemi A, B allora esistono diverse proprietà:

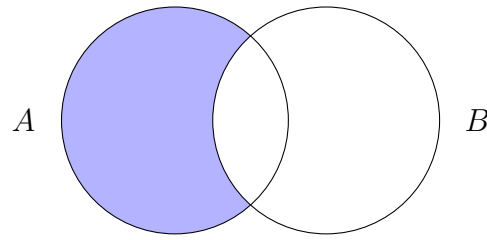
- Unione (o): $A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$



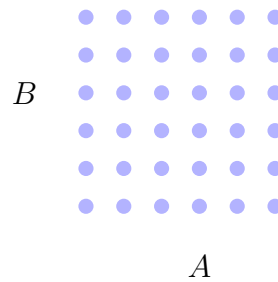
- Intersezione (e): $A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$



- Differenza (-): $A \setminus B := \{a : a \in A, a \notin B\}$



- Prodotto cartesiano: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$



4 Predicato

Una proposizione può dipendere da una o più variabili, ovvero un ente che varia in un gruppo, in quel caso prende il nome di predicato. Es:

P = oggi è martedì

$P(x)$ = x è martedì

allora preso $A := \{luned, martedì, ..., domenica\}, x \in A$

$B := \{x \in A : P(x)\} = \{martedì\}$, con $P(x)$ si intendono le x che rendono $P(x)$ vera, quindi si cercano le x appartenenti ad A t.c. $P(x)$ sia vera.

4.1 Confronto simbologia logica e insiemistica

La simbologia nella logica e nella insiemistica è diversa, ma i termini sono gli stessi:

Logica

A , ovvero A è vera
 $\neg A$, ovvero A non è vera
 $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
 $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
 \Rightarrow , ad esempio $A \Rightarrow B$

Insiemistica

$A := \{x \in I : A(x)\}$, con $A \subset I$
 $A^c := \{x \in B : \neg A(x)\}$, con $A^c \not\subset B$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $A \subset B$, perchè A è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $A(x)$ sia vera, allo stesso tempo B è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $B(x)$ sia vera, perciò dire che A implica B , vuol dire che gli elementi x che rendono veri A sono contenuti in B
 $A = B$, riprendendo la stessa argomentazione in questo caso B è vera se A è vera, ma allo stesso tempo A è vera se B è vera, perciò i due insiemi coincidono

\Longleftrightarrow , ad esempio $A \Longleftrightarrow B$

4.2 Notazione

- $x \in A \xrightarrow{def} x$ è elemento di A
- $x \notin A \xrightarrow{def} x$ non è elemento di A , quindi $x \in A^c$
- $A \cap B := \{a : A(a) \wedge B(a)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B := \{a : A(a) \vee B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B := \{a : A(a) \vee \neg B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \notin B\} = \{x : x \in A \vee x \in B^c\}$
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B)^c$

4.3 Insieme parti di I

L'insieme parti di I , è definito come:

$$P(I) := \{X : X \subset I\}, \text{ con } X \text{ insieme}$$

Preso $I := \{0, 1\} \Rightarrow P(I) = \{0, 1, \{0, 1\}\}$, $P(I)$ rappresenta l'insieme parti, ovvero l'insieme composto da tutti i possibili sottoinsiemi di I . Es:

$$A = \{0, 1\} \Rightarrow P(A) = \{0, 1, \{0, 1\}\}$$

4.4 Predicato con più variabili

$$L(x) = x \text{ segue la lezione, } \forall x \in I$$

$$P(x, y) = x \text{ segue la lezione il giorno } y, \forall x \in I, y \in G$$

preso $x \in \{\text{studenti del canali 2 del corso Analisi}\} = \{\text{Luca, Liam, ...}\}$, allora:

- $\forall x, L(x) \Rightarrow$ Luca segue la lezione \wedge Liam segue la lezione $\wedge \dots$
- $\exists x$ t.c. $L(x) \Rightarrow$ Luca segue la lezione \vee Liam segue la lezione $\vee \dots$
- $x = Luca \rightarrow P(Luca, y) //$ Luca segue la lezione il giorno y , se $y = oggi \rightarrow P(Luca, oggi)$ è vero

Come scrivo che ogni studenti segue la lezione almeno un giorno?

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

l'ordine nei quantificatori è importante in quanto dire:

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

è diverso da dire:

$$\exists y \in G, \forall x \in S \text{ t.c. } P(x, y)$$

che vuol dire "esiste almeno un giorno tale per cui tutti gli studenti vengano a lezione"

4.5 Negazione del predicato

Negare $\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$ (ogni studenti segue la lezione almeno un giorno), vuol dire:

$$\neg(\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)) = \exists x \in S, \forall y \in G : \neg P(x, y)$$

quindi esiste almeno uno studente che non segue mai la lezione

4.6 Regole della logica

- se $B \Rightarrow A$ allora A è condizione necessaria per B, quindi:

$$B \Rightarrow A \rightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$$

- se $A \Rightarrow B$ allora A è condizione sufficiente di B, quindi basta che A sia vera affinché B avvenga.
- se $A \iff B$ allora A è condizione necessaria e sufficiente di B.
- $\emptyset \in E, \forall E$ insieme
- Regola del terzo escluso:

$$\forall A \text{ insieme, } A \vee \neg A, \text{ quindi succede o non succede.}$$

- Principio di non contraddizione:

$$\forall A, \neg(A \wedge \neg A)$$

quindi per ogni insieme non è vero che esiste A e non A, in quanto non esisto elementi appartenenti ad A ed anche a non A, quindi non esistono elementi che verificano una proposizione ma allo stesso tempo non la verificano

- Transitività:

$$\forall A, B, C, [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

5 Insiemi numerici

5.1 Numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, n\}, \text{ ed } \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

in \mathbb{N} è possibile ordinare gli elementi quindi per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq m \iff \exists p \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m = n + p$$

5.1.1 Proprietà di \mathbb{N} (relazione di ordine)

- Riflessiva:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n$$

- Antisimmetrica:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq n) \Rightarrow n = m$$

- Transitiva:

$$\forall n, m, p \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq p) \Rightarrow n \leq p$$

- Ordinamento totale:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

5.1.2 Assiomi di Peano

Esiste una operazione, **passaggio al successivo**, $s(n) = n + 1$, tale che:

- (P1) esiste un elemento $0 \in \mathbb{N}$ t.c. $0 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$
- (P2) se $n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m \rightarrow s(n) \neq s(m)$
- (P3) se $E \subset \mathbb{N}$ è tale che:

$$(I1) \quad 0 \in E \quad e \quad (I2) \quad \text{se } n \in E \rightarrow s(n) \in E$$

allora $E = \mathbb{N}$

5.1.3 Metodo Induttivo

Il P3 è ciò che definisce il metodo induttivo (PI), ovvero:

$$P(n)$$

$$E := \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n)\} \subset \mathbb{N}$$

PI dice che:

$$\begin{cases} 0 \in E \\ \forall n \in E \Rightarrow s(n) \in E \end{cases} \Rightarrow E = \mathbb{N}$$

Proposizione 1. $P(n) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. Dimostro per induzione

Base induttiva: per $n = 0$, la sommatoria equivale a $\frac{0(1)}{2} = 0$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_0^{n+1} k = \sum_0^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P(n+1) \end{aligned}$$

□

Per applicare il metodo induttivo, non è valido partire dalla soluzione per arrivare alla dimostrazione, in quanto bisogna partire da $P(n)$ ed arrivare a dimostrare $P(n+1)$.

5.1.4 Principio di buon ordinamento (P.B.O.)

Teorema equivalente al principio di induzione, perciò se $P1$ e $P2$ sono valide allora $PI \iff P.B.O.$, e dice che:

$$\forall E \subset \mathbb{N} \text{ t.c. } E \neq \emptyset, \exists n_0 \in E \text{ t.c. } \exists n \geq n_0, \forall n \in E$$

Il minimo di un insieme E , se esiste è definito come:

$$a \in E \text{ t.c. } a \leq b, \forall b \in E$$

Il principio di buon ordinamento permette di dimostrare induttivamente anche quando la base induttiva è diversa da 0, e in quel caso:

$$P(b) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, b\}, b \neq 0$$

5.1.5 Fattoriale e coefficiente binomiale

Due funzioni matematiche che si definiscono per induzione sono:

- Fattoriale:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1), \forall n \in \mathbb{N}$$

e per definizione il fattoriale di 0 è 1:

$$0! = 1$$

- Coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$$

partendo dal coefficiente binomiale, è possibile svolgere lo sviluppo di una potenza ennesima di un binomio, definito binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, n \in \mathbb{N}^+$$

in questo binomio il coefficiente binomiale da il coefficiente di $a^{n-k}b^k$, per quel indice specifico di k , che è ottenibile anche dal triangolo di tartaglia

- Triangolo di tartaglia:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

e così via, costruito dalla somma dei due elementi alla righe precedente, in cui partendo dall'alto dalla riga 0, fino alla riga n si ha da sinistra a destra l'indice k della riga n.

5.2 Numeri interi

I numeri interi sono definiti come:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

è possibile osservare che:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- \mathbb{Z} non ha un minimo, al contrario di \mathbb{N}
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \exists! -n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n + (-n) = 0$

Quindi $(\mathbb{Z}, +)$, ovvero l'insieme dei numeri interi in cui è definita la somma, è detto un gruppo commutativo/abeliano. Si dice abeliano, quando:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Invece un insieme si definisce gruppo quando rispetta queste 3 proprietà:

$$\begin{cases}
 1 \text{ la somma è associativa : } (a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \\
 2 \exists! 0, \text{ detto elemento neutro della somma t.c. } 0 + z = z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{Z} \\
 3 \forall z \in \mathbb{Z} \exists! -z \in \mathbb{Z}, \text{ detto opposto di } z \text{ t.c. } z + (-z) = -z + z = 0
 \end{cases}$$

5.3 Numeri razionali

i numeri razionali sono definiti come:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Allora $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, è un campo:

- $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo commutativo.
- (\mathbb{Q}, \cdot) è un gruppo commutativo.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a(b + c) = ab + ac$, quindi è valida la proprietà distributiva rispetto alla somma.

- Esistenza dell'elemento neutro del prodotto:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- elemento inverso del prodotto:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{a}{a} = 1$$

Altre proprietà di \mathbb{Q} , dette di ordinamento:

- Ordinamento totale:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq a$$

- Riflessiva:

$$\forall a \in \mathbb{Q}, a \leq a$$

- Antisimmetrica:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \vee b \leq a \Rightarrow a = b$$

- Transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Q}$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Q}_0^+$

Oss: \mathbb{Q} ha dei buchi, infatti:

$$\exists q : q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

5.3.1 Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$

Proposizione 2. $\nexists q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 = 2 \rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, con p e q coprimi, e $q \neq 0$

Dimostrazione. Dimostro per assurdo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

dato che p^2 è uguale a $2q^2$, p è pari, perciò può essere scritto come $(2k)^2$, svolgendo i calcoli.

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

ora anche q^2 è uguale a $2k^2$, quindi anche q è pari, perciò la nostra tesi non è più valida in quanto non è vero che p e q sono coprimi. \square

5.3.2 Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali

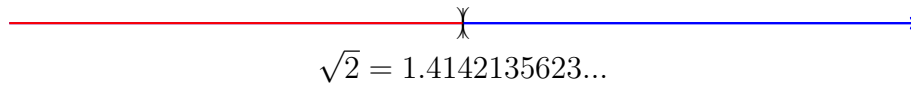
\mathbb{Q} corrisponde all'insieme $\{n, n_1 n_2 n_3 \dots\}$, cioè $n \in \mathbb{Z}, n_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ t.c. sono finite ($n_i = 0, \forall i > i_0$) o periodiche (un gruppo di n cifre si ripete all'infinito):

$$\mathbb{Q} := \left\{ n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \right\}, k \in \mathbb{N}$$

5.3.3 Caso interessante

Presi:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 < 2\} \quad B := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 > 2\}$$



osserviamo che:

- $a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b$
- A, B sono vicino quanto vogliamo:

$$\exists a \in A, b \in B \text{ t.c. } a, b \text{ siano vicini}$$

- $\nexists c \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$, quindi \mathbb{Q} non soddisfa l'assioma di Dedekind o assioma della completezza.

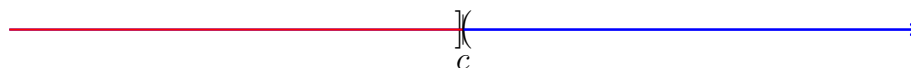
5.4 Numeri reali

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è definito assiomaticamente tramite:

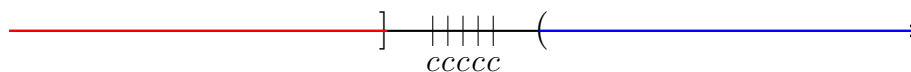
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ soddisfa le proprietà di \mathbb{Q}
- soddisfa l'assioma di Dedekind, quindi \mathbb{R} non ha buchi, ovvero:

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{R} \wedge a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \leq b$$

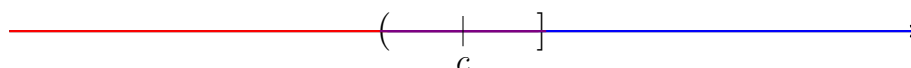
con c che può appartenere ad A o a B, ma non ad entrambi



Importante: se $A \cup B \neq \mathbb{R}$, allora non è detto che c sia unico:



Se invece l'unione tra i due insiemi non è nulla o unica, quindi $A \cap B \neq \emptyset$



in questo caso $\exists b \in B \text{ t.c. } b < c$

5.4.1 Teorema della caratterizzazione di \mathbb{R}

\mathbb{R} è l'unico campo ordinato che può essere rappresentato con l'insieme di tutti i possibili decimali allineati:

$$\mathbb{R} := \{m, d_1 d_2 d_3 \dots d_j \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ t.c. } j \in \mathbb{N}^+\}$$

$$\setminus \{m, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, \dots, 9\} \text{ t.c. } \exists j_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } d_j = 9, \forall j \geq j_0\}$$

devono quindi essere esclusi tutti gli allineamenti di decimali in cui dopo un certo indice j si susseguono solo 9, in quanto è lo stesso numero del successivo susseguito da tutti 0.

Si dice che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} , quanto $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può essere approssimato da numeri razionali.

5.5 Intervalli, semirette ed estremi

Definizione:

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che M_A è un **maggiorante** di A , se $m \geq a, \forall a \in A$.

$$\mathcal{M}_A := \{M_A \text{ t.c. } M_A \geq a, \forall a \in A\}$$

ovvero l'insieme dei maggioranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che m_A è un **minorante** di A , se $m \leq a, \forall a \in A$.

$$m_A := \{m_A \text{ t.c. } m_A \leq a, \forall a \in A\}$$

ovvero l'insieme dei minoranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato superiormente** se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$, quindi A ha almeno un maggiorante.

\mathbb{N} non è limitato superiormente in quanto $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n \text{ t.c. } m \in \mathbb{N}$

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato inferiormente** se $m_A \neq \emptyset$, quindi A ha almeno un minorante

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $M \in \mathbb{R}$, si dice **massimo di A** , $\max A$, se M è un maggiorante di A e se $M \in A$.

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $m \in \mathbb{R}$, si dice **minimo di A** , $\min A$, se m è un minorante di A e se $m \in A$.

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il massimo dei maggioranti di A , si dice **estremo superiore** di A , $\sup A$ o supremum A , nel caso in cui l'estremo superiore non esista, il $\sup A = +\infty$

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il massimo dei minoranti di A , si dice **estremo inferiore** di A , $\inf A$ o infimum A , nel caso in cui l'estremo inferiore non esista, il $\inf A = -\infty$

Proposizione 3. *sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora $\exists \sup A$*

Dimostrazione. A è limitato superiormente $\Rightarrow \mathcal{M}_A \neq \emptyset$, per definizione: $\forall a \in A, \forall b \in \mathcal{M}_A$ si ha $a \leq b$.

L'assioma di Dedekind implica che: $\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \leq b \Rightarrow c = \min \mathcal{M}_A = \sup A$ \square

Sia A limitato superiormente, quindi $\exists \sup A \in \mathbb{R}$, allora il $\sup A$ è caratterizzato da:

$$\sup A = \min \mathcal{M}_A$$

$$\begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A \Rightarrow \lambda \in \mathcal{M}_A \end{cases} \iff \begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A, \exists a \in A \text{ t.c. } \lambda < a \end{cases}$$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\sup A \in \mathbb{R}$:

- se $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\inf A \in \mathbb{R}$:

- se $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

Importante: sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A, \exists \inf A$, ma non è detto che esistano il $\max A, \min A$.

Osservazione: ogni $S \subset \mathbb{Z}, S \neq \emptyset$, limitato superiormente ha un massimo, mentre se limitato inferiormente ha minimo.

5.6 Proprietà di Archimede

$a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } na > b$.

Idea:

$$A := na \text{ t.c. } n \in \mathbb{N}^+$$

Supponendo che $\nexists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } na > b \Rightarrow b \geq an \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow b$ è un maggiorante $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$
Conseguenze:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, non sono limitati superiormente, in quanto tutti contengono il precedente.
- $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } \frac{1}{n} < x$, che come corollario ha che negando la disuguaglianza, posso dire che: $x \geq 0 \text{ t.c. } \forall a \in \mathbb{N}^+, x < \frac{1}{a} \Rightarrow x = 0$

5.7 Funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \equiv |x| = \max\{x, -x\} \in [0, +\infty)$$

5.8 Intervalli

$I \subset \mathbb{R}$, dice intervallo se $\forall x, y \in I, \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x < z < y, z \in I$

Un intervallo può essere descritto come uno di questi 4 tipi, avendo, $a \leq b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b\}$
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x \leq b\}$
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x < b\}$
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$

se a o b sono uguale a più o meno infinito, allora l'estremo si dice aperto.

Definizione: $A \subset \mathbb{R}$ si dice denso in \mathbb{R} se $\forall I \subset \mathbb{R}, \exists a \in A \text{ t.c. } a \in I$

6 Cenni su \mathbb{R}^n , cardinalità e numeri complessi

Definizione:

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ t.c. } x, y \in \mathbb{R}\} \equiv \text{piano cartesiano}$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^n$, e le sue coordinate sono: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

6.1 Intorno di un punto

Per intorni si intende:

$$J_{x_0} = J(x_0) = \{]a, b[\text{ t.c. } x \in]a, b[\}$$

è definito come intorno particolare:

$$Ir_0(x_0) = (x_0 - r_0, x_0 + r_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |x - x_0| < r_0\}$$

un intervallo di centro x_0 e raggio r_0 .

| | permette di definire una distanza su \mathbb{R} , detta distanza euclidea:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Osservazione: $\forall I \in J(x_0), \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x_0) \subset J(x_0)$

Prendendo: $r < \min\{d(x_0, a), d(x_0, b)\}$