Appunti di Geometria

Liam Ferretti

1 ottobre 2025

Sommario

Le informazioni sul corso si trovano sul sito del docente.

Di regola il lunedì verranno svolti esercizi o chiariti dubbi, e le lezioni saranno svolte da S. Molcho.

Ogni settimana (probabilmente il giovedì) verranno caricati degli esercizi su classroom da riconsegnare entro domenica sera.

Il ricevimento avrà luogo nello studio 137 nell'edificio CU006 il martedì dalle 11:15 alle 12:45.

Le dispense sono disponibili sul sito, il libro non è necessario.

Indice

1 Insiemi

Per insieme si intende una collezione di oggetti, detti elementi. Preso l'insieme X e a un elemento, allora:

$$a \in X : \text{ significa che "a è un elemento di X"}$$

$$a \notin X : \text{ significa che "a NON è un elemento di X"}$$

Per definire un insieme si usa questa notazione:

$$X := \{a | a \text{ ha la proprietà P}\}$$

Es:

$$X_a := \{a \in \mathbb{N} \mid 2|a\} = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$$

Con $2 \mid a$ si intende che 2 è un divisore di a, quindi che a è pari.

Esiste un insieme chiamato insieme vuoto che non contiene nessun elemento ed è rappresentato con: $\varnothing$

È possibile dichiarare una famiglia di insiemi numerati da un altro insieme in questo modo:

$$\{X_i\}_{i \in I}$$

Es:

$$X_a := \{m \in \mathbb{Z} \mid a|m\}$$

Allora:

$$X_0 := \{0\}$$
$$X_1 := \mathbb{Z}$$
$$X_2 := \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$$

Insiemi che è necessario conoscere:

$$\mathbb{N} = \{\text{numeri naturali}\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\text{numeri interi}\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\text{numeri razionali}\} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{R} = \{\text{numeri reali}\}$$

$$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\}$$

1.1 Sotto insieme

Presi due insiemi X, Y, X è sotto insieme di Y, se ogni elemento di X è elemento di Y, formalmente si esprime con:

$$X \subset Y \iff \forall x \in X, x \in Y$$

OSS: X è sotto insieme di se stessa in quanto contiene tutti i suoi elementi, quindi ha senso dire che:

$$X \subset X$$

1.2 Operazioni tra insiemi

Le operazioni che si possono effettuare tra insiemi sono diverse:

- Unione, rappresentata da $\cup$
- Intersezione, rappresentata da $\cap$
- Prodotto cartesiano, rappresentata da $\times$

1.2.1 Unione

Preso l'insieme:

$$X_i := \{m \in \mathbb{Z} \mid i|m\}$$

L'unione degli insiemi X_i è l'insieme $X \mid x \in X \iff \exists i \in I \mid x \in X_i$

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i$$

Se $I = \{1, 2\} \rightarrow X_1 \cup X_2$
Se $I = \{1, 2, 3\} \rightarrow X_1 \cup X_2 \cup X_3$
Se $I = \mathbb{Z} \rightarrow \displaystyle\bigcup_{i \in I} X_i = \mathbb{Z}$

1.2.2 Intersezione

Preso l'insieme:

$$X_i := \{m \in \mathbb{Z} \mid i|m\}$$

L'intersezione degli insiemi X_i è l'insieme $X \mid x \in X \iff \forall i \in I \exists x \in X_i$

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i$$

Se $I = \{1, 2\} \rightarrow X_1 \cap X_2$
Se $I = \{1, 2, 3\} \rightarrow X_1 \cap X_2 \cap X_3$
Se $I = \mathbb{Z} \rightarrow \displaystyle\bigcap_{i \in I} X_i = \{0\}$

1.2.3 Prodotto cartesiano

Il prodotto cartesiano di due insiemi X, Y, è definito come l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (x, y), con $x \in X, y \in Y$.

$$X = Y = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Se si hanno più insiemi:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_n := \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \mid x_n \in X_n\}$$

2 Applicazione tra insiemi

Presi gli insiemi X, Y, si definisce un'applicazione f da X (insieme di input o **dominio**) a Y (insieme di output o **codominio**) come una legge che associa a ogni elemento $x \in X$ un elemento $f(x) \in Y$. La notazione è:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

ovvero, l'applicazione manda l'insieme X nell'insieme Y. Se si considerano i singoli elementi degli insiemi, si scrive:

$$x \mapsto f(x)$$

Es:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{f} \mathbb{Z} \\ m &\longmapsto 3m \end{aligned}$$

Affinché 2 applicazioni sono uguali devono coincidere: **dominio**, **codominio** e **funzione**.

2.1 Composizione di applicazioni

Presi gli insiemi X, Y, Z e le applicazioni f e g allora:

$$X \xrightarrow{\quad g \quad} Y \xrightarrow{\quad f \quad} Z$$

$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$$

è possibile definire la composizione di g e f, ovvero una applicazione del tipo:

$$X \xrightarrow{f \circ g} Z$$

$f \circ g$, si legge f composto g, ed è definito come:

$$f \circ g := f(g(x)) \forall x \in X$$

Es: avendo tre insiemi $\mathbb{Z}$, e due applicazioni f e g, allora:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{f} & Z \\ n & \longmapsto & 3n+1 & & \\ & & n & \longmapsto & n^2 \end{array}$$

Allora le composizioni di applicazioni sono:

$$(f \circ g)(n) := f(3n+1) = 9m^2 + 6m + 1$$

$$(g \circ f)(n) := g(n^2) = 3n^2 + 1$$

Bisogna notare che in questo caso ha senso sia $f \circ g$ sia $g \circ f$, ma $(f \circ g) \neq (g \circ f)$

OSS:

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$

In questo caso e solo nel caso in cui l'insieme iniziale è lo stesso di quello finale, hanno senso sia $f \circ g$ sia $g \circ f$:

$$\text{Per } f \circ g : X \xrightarrow{f \circ g} X \text{ e per } g \circ f : Y \xrightarrow{g \circ f} Y$$

Se $f \circ g = g \circ f$, allora $X = Y$, ma se $X = Y$ non è certo che $f \circ g = g \circ f$

2.2 Proprietà associativa della composizione

Avendo 4 insiemi X, Y, W, Z e applicazioni f, g, h

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Z$$

allora vale

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Dimostrazione:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) \tag{1}$$
$$((h \circ g) \circ f))(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \tag{2}$$

Perciò $\forall x \in X : (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f))(x)$, quindi la composizione di applicazioni è una proprietà associativa, in cui il modo in cui si raggruppano le parentesi non cambia il risultato finale

2.3 Insieme identità di una applicazione

L'insieme identità di X è l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{Id_x} & X \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Può essere espressa sia come Id_x sia come 1_x

$$X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{f} Y \tag{1}$$
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{1_Y} Y \tag{2}$$

Nel caso (1) l'applicazione composta $(f \circ 1_x) = f$ e nel caso (2) l'applicazione $(1_x \circ f) = f$.

2.4 Iniettività

Presi due insiemi X, Y e una applicazione f:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$f \text{ è iniettiva } \iff \forall x_1, x_2 \in X \to f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Se presi due elementi $x_1, x_2 \in X$ allora gli elementi del codominio sono diversi se e solo se $x_1 \neq x_2$

Es:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$$

è iniettiva in quanto:

$$f(x_1) = f(x_2) \iff 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \iff 3(x_1 - x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$$

2.5 Suriettività

Presi due insiemi X, Y e una applicazione f:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$f \text{ è suriettiva } \iff \forall y \in Y \ \exists x \in X \mid f(x) = y.$$

L'immagine di f, ovvero, Im f è definito come:

$$\mathrm{Im} f := \{y \in Y \mid \exists x \in X \mid f(x) = y\}$$

OSS: f è suriettiva $\iff \mathrm{Im} f = Y$

2.6 Biettività

Presi due insiemi X, Y e una applicazione f:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$f \text{ è biunivoca } \iff \forall y \in Y \ \exists! x \in X \text{ tale che } f(x) = y$$

(con $\exists!$ si intende esiste ed è unico)

2.7 Applicazione inversa

Presi due insiemi X, Y e una applicazione f biunivoca:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

L'applicazione inversa di f è l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f^{-1}} & X \\ y & \longmapsto & x \in X \mid \exists! x \mid f^{-1}(x) = y \end{array}$$

Es: scelto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$$

è biunivoca in quanto è sia suriettiva sia iniettiva, perciò è possibile trovare f^{-1} risolvendo per x:

$$3x + 1 = y \Longrightarrow 3x = y - 1 \Longrightarrow x = \frac{y-1}{3}$$

Quindi l'applicazione inversa è:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y-1}{3} \end{array}$$

È quindi possibile vedere che l'applicazione composta tra f e f^{-1} in qualsiasi ordine rappresenta l'applicazione identità:

$$\begin{array}{ccccl} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f^{-1}} & X: \quad f^{-1} \circ f = Id_x \\ Y & \xrightarrow{f^{-1}} & X & \xrightarrow{f} & Y: \quad f \circ f^{-1} = Id_x \end{array}$$

Presi due insiemi X, Y e l'applicazione f:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

se $y \in Y \to f^{-1}(y) := \{x \in X | f(x) = y\}$, in questo caso ha senso anche se non si tratta di applicazioni biunivoche in quanto restituisce un insieme e non un singolo elemento, quindi nel caso esistano più $x|f(x) = y$ si otterrà come risultato l'insieme numerico che contiene tutte le x

3 Relazioni

Preso X un insieme, una relazione su X è un sottoinsieme $R \subset X^2 = X \times X$

Per xRy si intende che $(x, y) \in R$

Es 1:

$$X = \{\text{cittadini italiani}\}$$

$$R = \{(x, y) \mid \text{x e y sono coetanei}\}$$

$$xRy \to \text{x e y sono coetanei}$$

Es 2:

$X = \mathbb{Z}$, scelto $n \in \mathbb{Z}$

$R_n = \{(x, y) \mid n|(x-y), x, y \in X\} = x \equiv y \pmod{n}$, questa è la relazione di congruenza modulo n

3.1 Relazioni di equivalenza

Per relazione di equivalenza si intende una relazione R su X, con X un insieme qualsiasi, in cui valgono 3 proprietà:

- Riflessiva: $xRx,$ con $x \in X$
- Simmetrica: $xRy \to yRx,$ con $x, y \in X$
- Transitiva: $xRy \wedge yRz \to xRz,$ con $x, y, z \in X$

Controllo se l´esempio 2 è una relazione di equivalenza:

$$X = \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

$$xRy \text{ se } x \equiv y \pmod{n}$$

- Riflessiva: $x \equiv x \pmod{n}$ se $n|(x-x) \rightarrow n|0$, vera
- Simmetrica: $x \equiv y \pmod{n}$ se $n|(x-y) \rightarrow x-y = n*q \rightarrow -x+y = n*(-q)$, vera
- Transitiva: $x \equiv y \pmod{n} \wedge y \equiv z \pmod{n} \rightarrow x \equiv z \pmod{n}$, dimostrazione:

  $$n|(x-y) \wedge n|(y-x) = (x-y = q*n) \wedge (y-z = r*n)$$

  sommando due numeri multipli di n ottengo un multiplo di n

  $$(x-y)+(y-z) = q*n + r*n = n(q+r)$$

  quindi è verificata la proprietà transitiva

3.1.1 Classe di equivalenza

Sia $x \in X$, allora la classe di equivalenza di x è:

$$[x] := \{y \in X \mid xRy\}$$

fissato x, $[x]$ è l'insieme composta dagli elementi $y\ t.c.\ xRy$

3.1.2 Quoziente di X modulo R o insieme quoziente

Definiti X un insieme e R una relazione, il quoziente di X modulo R è l'insieme i cui elementi sono le classi R-equivalenza, ovvero le classi di equivalenza rispetto alla relazione R su X, quindi l'insieme quoziente è l'insieme composto dalle classi di equivalenza in X generate da R ed è rappresentato da: X/R

$$X/R := \{[x] \text{ t.c. } x \in X\}$$

In riferimento all'esempio 1:

$$C/R := \{[0], [1], [2], ..., \text{ [età massima] }\}$$

, e ogni elemento ad esempio [19], ha la proprio classe di equivalenza:

$$[19] = \{x \in C \mid eta(x) = 19\}$$

4 Anello e campo

A è un insieme i cui elementi sono coppie ordinate (x, y), ed ha 2 operazioni:

- somma:
$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{somma} & A \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

- prodotto:
$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{prodotto} & A \\ (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$$

Le proprietà che rendono un insieme un anello o un campo sono:

1. Esistenza ed unicità dell'elemento neutro della somma, quindi:
$$\exists ! 0 \in A \text{ t.c. } 0 + z = z + 0 = z \forall z \in A$$
dimostrazione: presi $a \in A, b, c \in A$ t.c. $a + b = 0 \wedge a + c = 0, b \neq c$
ipotesi: $b \stackrel{?}{=} c$
$$0 = 0 \rightarrow a + b = a + c \rightarrow b = c$$
$$Q.E.D$$

2. Proprietà commutativa della somma, quindi:
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in A$$

3. Proprietà associativa della somma, quindi:
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in A$$

4. Esistenza ed unicità dell'opposto di $z \in A$, quindi:
$$\forall z \in A \exists ! w \in A \text{ t.c. } z + w = 0$$

5. Proprietà associativa del prodotto, quindi:
$$(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in A$$

6. Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, quindi:
$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3 \wedge (z_1 + z_2) * z_3 = z_1 * z + 3 + z_2 * z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in A$$

7. Proprietà commutativa rispetto al prodotto, quindi:
$$w * z = z * w, \forall w, z \in A$$

8. L'esistenza ed unicità dell'unità neutra del prodotto $(u \in A)$ (unità moltiplicativa), diversa dall'unità neutra della somma, quindi $\neq 0$:
$$u * x = x * u = x, \forall x \in A$$

9. L'esistenza ed unicità dell'inverso moltiplicativo, quindi:
$$\forall x \neq 0 \in A, \exists ! w \in A \text{ t.c. } x * w = 1 \rightarrow w = x^{-1}$$

4.1 Anello

A (con le operazioni definite) è un anello se valgono le prime 6 proprietà (o assiomi).

D'ora in avanti per completezza e facilità in diverse situazioni, per anello si intende un anello commutativo rispetto al prodotto e che presenta l'unità moltiplicativa, quindi in cui valgono anche le proprietà 7 e 8.

4.2 Campo

A (con le operazioni definite) è un campo se valgono le prime 9 proprietà (o assiomi).