Appunti di Analisi Matematica

Liam Ferretti

1 ottobre 2025

Sommario

Per i ricevimenti bisogna prenotarsi via e-mail, e si svolgeranno nell'edificio 105 dell'edificio Castel Nuovo Si potranno trovare note ed esercizi su e-learning

Programma:

- Numeri reali
- Funzioni di variabili reali
- Successioni e serie
- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale ad una variabile
- Integrali
- Equazioni differenze lineari
- Funzioni di più variabili (tutti i capitoli precedenti comprendono le funzioni a più variabili)

I libri di testo sono presenti su e-learning, ed è consigliato "Crasta Malusa", da cui assegnerà gli esercizi.

L'esame sarà composto da scritto più orale, non ci sarà probabilmente un esonero, e con l'orale si può incrementare o decrementare il voto di fino a 3 punti in positivo o 3 in negativo, tranne nel caso in cui si commettano errori su: limiti, continuità o divisione per 0, che comporta la bocciatura immediata.

Indice

1 Cenni di logica ed insiemistica

La matematica si costruisce su:

- elementi di base:
  oggetti di base (enti primitivi)
  proprietà di basa (assiomi)
- regole di deduzione che sono fissate

1.1 Notazione

La notazione si divide in:

- Connettiva:
  $\neg$, non
  $\vee$, e
  $\wedge$, o
  $\Rightarrow$, implica
  $\iff$, equivale (se e solo se)
  : (t.c.) , tale che / tale per cui
- Quantificativa:
  $\exists$, esiste
  $\nexists$, non esiste
  $\exists!$, esiste ed è unico
  $\forall$, per ogni

1.2 Le proposizioni

Per proposizione Si intende una affermazione.
Es:

- P = oggi è martedì
- $\neg$P = oggi non è martedì
- Q = c'è il sole
- P $\wedge$ Q = oggi è martedì e c'è il sole
- P $\vee$ Q = oggi è martedì oppure c'è il sole
- $\neg$(P $\wedge$ Q) $\Rightarrow$ P $\vee$ Q può essere vera (P oppure Q), ma P $\wedge$ Q non può essere vera (P e Q), quindi non possono essere vere allo stesso tempo

A $\Rightarrow$ B, vuol dire se A è vero allora B è vero.
A $\iff$ B = (A $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ A), e vuol dire se e solo se A allora B.
Partendo dalla proposizione precedente, è vero che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$$

cioè è utile nelle dimostrazioni per assurdo. Nelle dimostrazioni si parte dagli assiomi e con le regole logiche si fanno ipotesi (affermazioni) che nel caso in cui fosse vera rende la tesi (la validità di una o più proprietà).

OSS: è **sbagliato** dire che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \Rightarrow \neg B$$

in quanto il non avvenire di A non implica che B non possa avvenire per altre motivazioni.

1.3 Insiemi

Un insieme è una collezioni di elementi

1.3.1 Notazione degli insiemi

- definizione di insieme: G := $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$, è necessario l'uso di := per definire un insieme, e vuol dire "definito come".
- quando due insiemi hanno gli stessi elementi si dichiara l'uguaglianza tra I_1 e I_2, con il simbolo =, ad esempio

$$F := \{0, 1\}, H := \{1, 0\} \rightarrow F = H$$

- per definire l'appartenenza di un elemento in un insieme si scrive $a \in I$, se questo elemento non appartiene all'insieme si rappresenta $a \notin I$ con a un elemento qualsiasi e I un insieme qualsiasi.

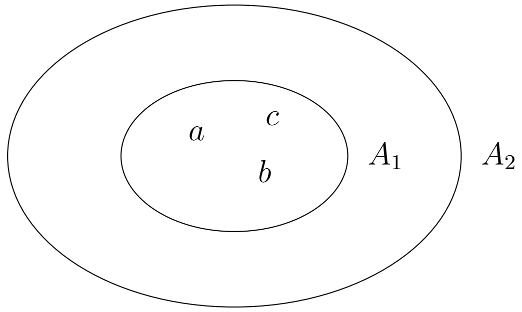
1.3.2 Relazione di ordine o inclusione

Se $A_1 \subset A_2 \rightarrow A_1$ è contenuto in A_2, e A_1 è al tal più grande quanto A_2, ovvero A_1 è un sotto insieme di A_2.

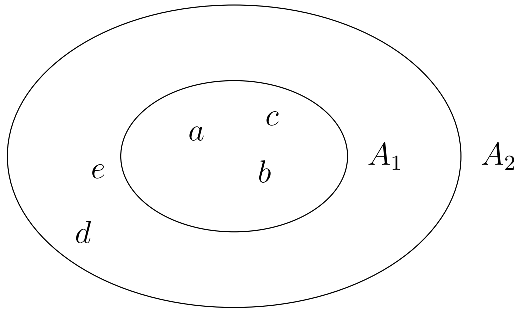
Se i due insiemi non sono uguali allora si segna $A_1 \not\subseteq A_2$, è quindi strettamente contenuto.

Se invece i due insiemi possono essere uguali, si scrive $A_1 \subseteq A_2$.

Es:



contengono gli stessi elementi quindi: $A_1 = A_2$



in questo caso A_2 contiene più elementi di A_1, quindi $A_1 \not\subseteq A_2$

1.3.3 Proprietà degli insiemi

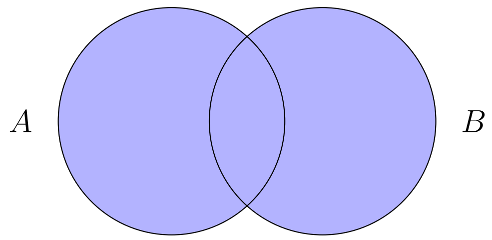
Gli insiemi hanno 3 proprietà principali:

- Riflessiva: $A \subseteq A$, per A insieme qualsiasi, quindi l'insieme contiene se stesso
- Antisimmetrica: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, per A, B insiemi qualsiasi
- Transitiva:$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$, per A, B, C insiemi qualsiasi

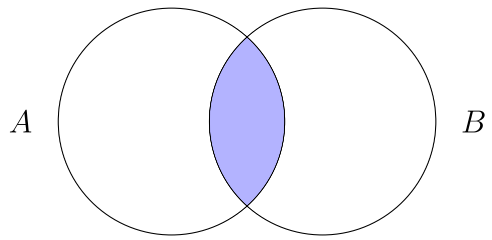
1.3.4 Operazioni tra insiemi

Presi due insiemi A, B allora esistono diverse proprietà:

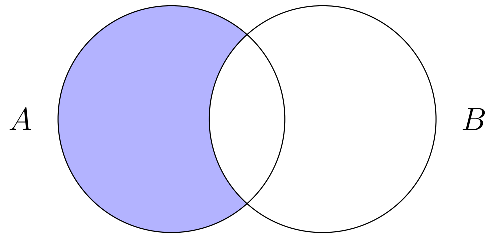
- Unione (o): $A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$



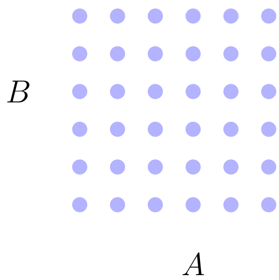
- Intersezione (e): $A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$



- Differenza (-): $A \setminus B := \{a : a \in A, a \notin B\}$



- Prodotto cartesiano: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$



1.4 Predicato

Una preposizione può dipendere da una o più variabili, ovvero un ente che varia in un gruppo, in quel caso prende il nome di predicato. Es:

$P =$ oggi è martedì

$P(x) = x$ è martedì

allora preso $A := \{luned, marted, ..., domenica\}, x \in A$

$B := \{x \in A : P(x)\} = \{marted\}$, con $P(x)$ si intendono le x che rendono $P(x)$ vera, quindi si cercano le x appartenenti ad A t.c. $P(x)$ sia vera.

1.4.1 Confronto simbologia logica e insiemistica

La simbologia nella logica e nella insiemistica è diversa, ma i termini sono gli stessi:

Logica	**Insiemistica**
A, ovvero A è vera	$A := \{x \in I : A(x)\}$, con $A \subset I$
$\neg A$, ovvero A non è vera	$A^c := \{x \in B : \neg A(x)\}$, con $A^c \not\subset B$
$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$\Rightarrow$, ad esempio $A \Rightarrow B$	$A \subset B$, perchè A è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $A(x)$ sia vera, allo stesso tempo B è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $B(x)$ sia vera, perciò dire che A implica B, vuol dire che gli elementi x che rendono veri A sono contenuti in B
$\iff$, ad esempio $A \iff B$	$A = B$, riprendendo la stessa argomentazione in questo caso B è vera se A è vera, ma allo stesso tempo A è vera se B è vera, perciò i due insiemi coincideranno

1.4.2 Notazione

- $x \in A \overset{def}{\Longrightarrow}$ x è elemento di A
- $x \notin A \overset{def}{\Longrightarrow}$ x non è elemento di A, quindi $x \in A^c$
- $A \cap B := \{a : A(a) \wedge B(a)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}\}$
- $A \cup B := \{a : A(a) \vee B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B := \{a : A(a) \vee \neg B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \notin B\} = \{x : x \in A \vee x \in B^c\}$
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B)^c$

1.4.3 Insieme parti di I

L'insieme parti di I, è definito come:

$$P(I) := \{X : X \subset I\}, \text{con } X \text{ insieme}$$

Preso $I := \{0, 1\} \Rightarrow P(I) = \{0, 1, \{0, 1\}\}$, $P(I)$ rappresenta l'insieme parti, ovvero l'insieme composto da tutti i possibili sottoinsiemi di I