

Appunti di Analisi Matematica

Liam Ferretti

13 ottobre 2025

Sommario

Per i ricevimenti bisogna prenotarsi via e-mail, e si svolgeranno nell'edificio 105 dell'edificio Castel Nuovo. Si potranno trovare note ed esercizi su e-learning.

Programma:

- Numeri reali
- Funzioni di variabili reali
- Successioni e serie
- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale ad una variabile
- Integrali
- Equazioni differenziali lineari
- Funzioni di più variabili (tutti i capitoli precedenti comprendono le funzioni a più variabili)

I libri di testo sono presenti su e-learning, ed è consigliato "Crasta Malusa", da cui assegnerà gli esercizi.

L'esame sarà composto da scritto più orale, non ci sarà probabilmente un esonero, e con l'orale si può incrementare o decrementare il voto di fino a 3 punti in positivo o 3 in negativo, tranne nel caso in cui si commettano errori su: limiti, continuità o divisione per 0, che comporta la bocciatura immediata.

Indice

1	Notazione	4
2	Le proposizioni	4
3	Insiemi	5
3.1	Notazione degli insiemi	5
3.2	Relazione di ordine o inclusione	5
3.3	Proprietà degli insiemi	6
3.4	Operazioni tra insiemi	6
4	Predicato	7
4.1	Confronto simbologia logica e insiemistica	7
4.2	Notazione	8
4.3	Insieme parti di I	8
4.4	Predicato con più variabili	8
4.5	Negazione del predicato	9
4.6	Regole della logica	9
5	Insiemi numerici	10
5.1	Numeri naturali	10
5.1.1	Proprietà di \mathbb{N} (relazione di ordine)	10
5.1.2	Assiomi di Peano	10
5.1.3	Metodo Induttivo	10
5.1.4	Principio di buon ordinamento (P.B.O.)	11
5.1.5	Fattoriale e coefficiente binomiale	11
5.2	Numeri interi	12
5.3	Numeri razionali	12
5.3.1	Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$	13
5.3.2	Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali	13
5.3.3	Caso interessante	14
5.4	Numeri reali	14
5.4.1	Teorema della caratterizzazione di \mathbb{R}	15
5.5	Intervalli, semirette ed estremi	15
5.6	Proprietà di Archimede	16
5.7	Funzione modulo	16
5.8	Intervalli	16
6	Cenni su \mathbb{R}^n, cardinalità e numeri complessi	17
6.1	Intorno di un punto	17
6.1.1	Distanza in \mathbb{R}^n	17
6.1.2	Intorno in \mathbb{R}^n	18
6.2	Coordinate polari	18
6.3	Retta in \mathbb{R}^2	19
6.4	Numeri complessi ($\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$)	19
6.5	Insiemi aperti e chiusi	20

7	Funzioni	22
7.1	Esempi di definizione	23
7.2	Funzioni ristrette ad E	23
7.3	Grafico di una funzione reale di variabile reale	24
7.4	Caratteristiche di una funzione	24
7.5	Monotonia di una funzione	24
7.6	Funzione parte intera	25
7.7	Proprietà ed esempi	25

La matematica si costruisce su:

- elementi di base:
 - oggetti di base (enti primitivi)
 - proprietà di base (assiomi)
- regole di deduzione che sono fissate

1 Notazione

La notazione si divide in:

- Connettiva:
 - \neg , non
 - \vee , e
 - \wedge , o
 - \Rightarrow , implica
 - \Leftrightarrow , equivale (se e solo se)
 - $:$ (t.c.) , tale che / tale per cui
- Quantificativa:
 - \exists , esiste
 - \nexists , non esiste
 - $\exists!$, esiste ed è unico
 - \forall , per ogni

2 Le proposizioni

Per proposizione Si intende una affermazione.

Es:

- P = oggi è martedì
- $\neg P$ = oggi non è martedì
- Q = c'è il sole
- $P \wedge Q$ = oggi è martedì e c'è il sole
- $P \vee Q$ = oggi è martedì oppure c'è il sole
- $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow P \vee Q$ può essere vera (P oppure Q), ma $P \wedge Q$ non può essere vera (P e Q), quindi non possono essere vere allo stesso tempo

$A \Rightarrow B$, vuol dire se A è vero allora B è vero.

$A \iff B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, e vuol dire se e solo se A allora B .

Partendo dalla proposizione precedente, è vero che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$$

cioè è utile nelle dimostrazioni per assurdo. Nelle dimostrazioni si parte dagli assiomi e con le regole logiche si fanno ipotesi (affermazioni) che nel caso in cui fosse vera rende la tesi (la validità di una o più proprietà).

OSS: è **sbagliato** dire che:

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \Rightarrow \neg B$$

in quanto il non avvenire di A non implica che B non possa avvenire per altre motivazioni.

3 Insiemi

Un insieme è una collezione di elementi

3.1 Notazione degli insiemi

- definizione di insieme: $G := \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, è necessario l'uso di $:=$ per definire un insieme, e vuol dire "definito come".
- quando due insiemi hanno gli stessi elementi si dichiara l'uguaglianza tra I_1 e I_2 , con il simbolo $=$, ad esempio

$$F := \{0, 1\}, H := \{1, 0\} \rightarrow F = H$$

- per definire l'appartenenza di un elemento in un insieme si scrive $a \in I$, se questo elemento non appartiene all'insieme si rappresenta $a \notin I$ con a un elemento qualsiasi e I un insieme qualsiasi.

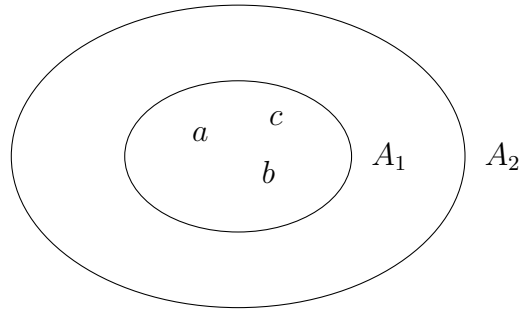
3.2 Relazione di ordine o inclusione

Se $A_1 \subset A_2 \rightarrow A_1$ è contenuto in A_2 , e A_1 è al tal più grande quanto A_2 , ovvero A_1 è un sotto insieme di A_2 .

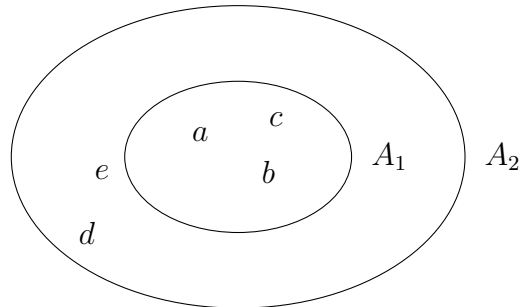
Se i due insiemi non sono uguali allora si segna $A_1 \subsetneq A_2$, è quindi strettamente contenuto.

Se invece i due insiemi possono essere uguali, si scrive $A_1 \subseteq A_2$.

Es:



contengono gli stessi elementi quindi: $A_1 = A_2$



in questo caso A_2 contiene più elementi di A_1 , quindi $A_1 \subsetneq A_2$

3.3 Proprietà degli insiemi

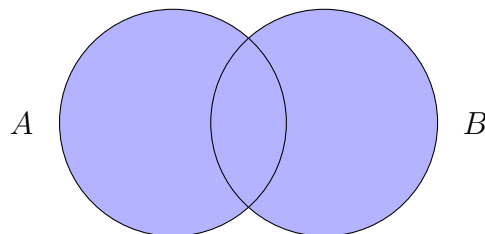
Gli insiemi hanno 3 proprietà principali:

- Riflessiva: $A \subseteq A$, per A insieme qualsiasi, quindi l'insieme contiene se stesso
- Antisimmetrica: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, per A, B insiemi qualsiasi
- Transitiva: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$, per A, B, C insiemi qualsiasi

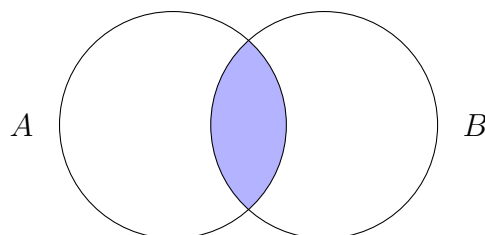
3.4 Operazioni tra insiemi

Presi due insiemi A, B allora esistono diverse proprietà:

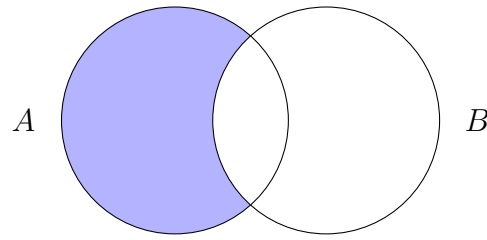
- Unione (o): $A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$



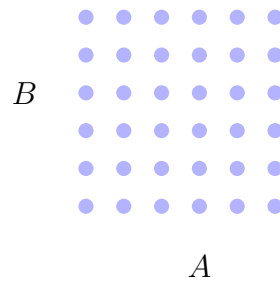
- Intersezione (e): $A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$



- Differenza (-): $A \setminus B := \{a : a \in A, a \notin B\}$



- Prodotto cartesiano: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$



4 Predicato

Una proposizione può dipendere da una o più variabili, ovvero un ente che varia in un gruppo, in quel caso prende il nome di predicato. Es:

P = oggi è martedì

$P(x)$ = x è martedì

allora preso $A := \{luned, martedì, ..., domenica\}, x \in A$

$B := \{x \in A : P(x)\} = \{martedì\}$, con $P(x)$ si intendono le x che rendono $P(x)$ vera, quindi si cercano le x appartenenti ad A t.c. $P(x)$ sia vera.

4.1 Confronto simbologia logica e insiemistica

La simbologia nella logica e nella insiemistica è diversa, ma i termini sono gli stessi:

Logica

A , ovvero A è vera
 $\neg A$, ovvero A non è vera
 $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
 $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
 \Rightarrow , ad esempio $A \Rightarrow B$

Insiemistica

$A := \{x \in I : A(x)\}$, con $A \subset I$
 $A^c := \{x \in B : \neg A(x)\}$, con $A^c \not\subset B$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $A \subset B$, perchè A è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $A(x)$ sia vera, allo stesso tempo B è definito come gli elementi x appartenenti ad un insieme I t.c. $B(x)$ sia vera, perciò dire che A implica B , vuol dire che gli elementi x che rendono veri A sono contenuti in B
 $A = B$, riprendendo la stessa argomentazione in questo caso B è vera se A è vera, ma allo stesso tempo A è vera se B è vera, perciò i due insiemi coincidono

\Longleftrightarrow , ad esempio $A \Longleftrightarrow B$

4.2 Notazione

- $x \in A \xrightarrow{def} x$ è elemento di A
- $x \notin A \xrightarrow{def} x$ non è elemento di A , quindi $x \in A^c$
- $A \cap B := \{a : A(a) \wedge B(a)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B := \{a : A(a) \vee B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B := \{a : A(a) \vee \neg B(a)\} = \{x : x \in A \vee x \notin B\} = \{x : x \in A \vee x \in B^c\}$
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B)^c$

4.3 Insieme parti di I

L'insieme parti di I , è definito come:

$$P(I) := \{X : X \subset I\}, \text{ con } X \text{ insieme}$$

Preso $I := \{0, 1\} \Rightarrow P(I) = \{0, 1, \{0, 1\}\}$, $P(I)$ rappresenta l'insieme parti, ovvero l'insieme composto da tutti i possibili sottoinsiemi di I . Es:

$$A = \{0, 1\} \Rightarrow P(A) = \{0, 1, \{0, 1\}\}$$

4.4 Predicato con più variabili

$$L(x) = x \text{ segue la lezione}, \forall x \in I$$

$$P(x, y) = x \text{ segue la lezione il giorno } y, \forall x \in I, y \in G$$

preso $x \in \{\text{studenti del canali 2 del corso Analisi}\} = \{\text{Luca, Liam, ...}\}$, allora:

- $\forall x, L(x) \Rightarrow \text{Luca segue la lezione} \wedge \text{Liam segue la lezione} \wedge \dots$
- $\exists x \text{ t.c. } L(x) \Rightarrow \text{Luca segue la lezione} \vee \text{Liam segue la lezione} \vee \dots$
- $x = \text{Luca} \rightarrow P(\text{Luca}, y) // \text{Luca segue la lezione il giorno } y, \text{ se } y = \text{oggi} \rightarrow P(\text{Luca}, \text{oggi}) \text{ è vero}$

Come scrivo che ogni studenti segue la lezione almeno un giorno?

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

l'ordine nei quantificatori è importante in quanto dire:

$$\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$$

è diverso da dire:

$$\exists y \in G, \forall x \in S \text{ t.c. } P(x, y)$$

che vuol dire "esiste almeno un giorno tale per cui tutti gli studenti vengano a lezione"

4.5 Negazione del predicato

Negare $\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)$ (ogni studenti segue la lezione almeno un giorno), vuol dire:

$$\neg(\forall x \in S, \exists y \in G \text{ t.c. } P(x, y)) = \exists x \in S, \forall y \in G : \neg P(x, y)$$

quindi esiste almeno uno studente che non segue mai la lezione

4.6 Regole della logica

- se $B \Rightarrow A$ allora A è condizione necessaria per B, quindi:

$$B \Rightarrow A \rightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$$

- se $A \Rightarrow B$ allora A è condizione sufficiente di B, quindi basta che A sia vera affinché B avvenga.
- se $A \iff B$ allora A è condizione necessaria e sufficiente di B.
- $\emptyset \in E, \forall E$ insieme
- Regola del terzo escluso:

$$\forall A \text{ insieme, } A \vee \neg A, \text{ quindi succede o non succede.}$$

- Principio di non contraddizione:

$$\forall A, \neg(A \wedge \neg A)$$

quindi per ogni insieme non è vero che esiste A e non A, in quanto non esisto elementi appartenenti ad A ed anche a non A, quindi non esistono elementi che verificano una proposizione ma allo stesso tempo non la verificano

- Transitività:

$$\forall A, B, C, [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

5 Insiemi numerici

5.1 Numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, n\}, \text{ ed } \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

in \mathbb{N} è possibile ordinare gli elementi quindi per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq m \iff \exists p \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m = n + p$$

5.1.1 Proprietà di \mathbb{N} (relazione di ordine)

- Riflessiva:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n$$

- Antisimmetrica:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq n) \Rightarrow n = m$$

- Transitiva:

$$\forall n, m, p \in \mathbb{N}, (n \leq m \wedge m \leq p) \Rightarrow n \leq p$$

- Ordinamento totale:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

5.1.2 Assiomi di Peano

Esiste una operazione, **passaggio al successivo**, $s(n) = n + 1$, tale che:

- (P1) esiste un elemento $0 \in \mathbb{N}$ t.c. $0 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$
- (P2) se $n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m \rightarrow s(n) \neq s(m)$
- (P3) se $E \subset \mathbb{N}$ è tale che:

$$(I1) \quad 0 \in E \quad e \quad (I2) \quad \text{se } n \in E \rightarrow s(n) \in E$$

allora $E = \mathbb{N}$

5.1.3 Metodo Induttivo

Il P3 è ciò che definisce il metodo induttivo (PI), ovvero:

$$P(n)$$

$$E := \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n)\} \subset \mathbb{N}$$

PI dice che:

$$\begin{cases} 0 \in E \\ \forall n \in E \Rightarrow s(n) \in E \end{cases} \Rightarrow E = \mathbb{N}$$

Proposizione 1. $P(n) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. Dimostro per induzione

Base induttiva: per $n = 0$, la sommatoria equivale a $\frac{0(1)}{2} = 0$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_0^{n+1} k = \sum_0^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P(n+1) \end{aligned}$$

□

Per applicare il metodo induttivo, non è valido partire dalla soluzione per arrivare alla dimostrazione, in quanto bisogna partire da $P(n)$ ed arrivare a dimostrare $P(n+1)$.

5.1.4 Principio di buon ordinamento (P.B.O.)

Teorema equivalente al principio di induzione, perciò se $P1$ e $P2$ sono valide allora $PI \iff P.B.O.$, e dice che:

$$\forall E \subset \mathbb{N} \text{ t.c. } E \neq \emptyset, \exists n_0 \in E \text{ t.c. } \exists n \geq n_0, \forall n \in E$$

Il minimo di un insieme E , se esiste è definito come:

$$a \in E \text{ t.c. } a \leq b, \forall b \in E$$

Il principio di buon ordinamento permette di dimostrare induttivamente anche quando la base induttiva è diversa da 0, e in quel caso:

$$P(b) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, b\}, b \neq 0$$

5.1.5 Fattoriale e coefficiente binomiale

Due funzioni matematiche che si definiscono per induzione sono:

- Fattoriale:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1), \forall n \in \mathbb{N}$$

e per definizione il fattoriale di 0 è 1:

$$0! = 1$$

- Coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$$

partendo dal coefficiente binomiale, è possibile svolgere lo sviluppo di una potenza ennesima di un binomio, definito binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, n \in \mathbb{N}^+$$

in questo binomio il coefficiente binomiale da il coefficiente di $a^{n-k}b^k$, per quel indice specifico di k , che è ottenibile anche dal triangolo di tartaglia

- Triangolo di tartaglia:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

e così via, costruito dalla somma dei due elementi alla righe precedente, in cui partendo dall'alto dalla riga 0, fino alla riga n si ha da sinistra a destra l'indice k della riga n.

5.2 Numeri interi

I numeri interi sono definiti come:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

è possibile osservare che:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- \mathbb{Z} non ha un minimo, al contrario di \mathbb{N}
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \exists! -n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n + (-n) = 0$

Quindi $(\mathbb{Z}, +)$, ovvero l'insieme dei numeri interi in cui è definita la somma, è detto un gruppo commutativo/abeliano. Si dice abeliano, quando:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Invece un insieme si definisce gruppo quando rispetta queste 3 proprietà:

$$\begin{cases}
 1 \text{ la somma è associativa : } (a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \\
 2 \exists! 0, \text{ detto elemento neutro della somma t.c. } 0 + z = z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{Z} \\
 3 \forall z \in \mathbb{Z} \exists! -z \in \mathbb{Z}, \text{ detto opposto di } z \text{ t.c. } z + (-z) = -z + z = 0
 \end{cases}$$

5.3 Numeri razionali

i numeri razionali sono definiti come:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Allora $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, è un campo:

- $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo commutativo.
- (\mathbb{Q}, \cdot) è un gruppo commutativo.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a(b + c) = ab + ac$, quindi è valida la proprietà distributiva rispetto alla somma.

- Esistenza dell'elemento neutro del prodotto:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- elemento inverso del prodotto:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{a}{a} = 1$$

Altre proprietà di \mathbb{Q} , dette di ordinamento:

- Ordinamento totale:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq a$$

- Riflessiva:

$$\forall a \in \mathbb{Q}, a \leq a$$

- Antisimmetrica:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \vee b \leq a \Rightarrow a = b$$

- Transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Q}$

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Q}_0^+$

Oss: \mathbb{Q} ha dei buchi, infatti:

$$\exists q : q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

5.3.1 Dimostrazione irrazionalità di $\sqrt{2}$

Proposizione 2. $\nexists q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 = 2 \rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, con p e q coprimi, e $q \neq 0$

Dimostrazione. Dimostro per assurdo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

dato che p^2 è uguale a $2q^2$, p è pari, perciò può essere scritto come $(2k)^2$, svolgendo i calcoli.

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

ora anche q^2 è uguale a $2k^2$, quindi anche q è pari, perciò la nostra tesi non è più valida in quanto non è vero che p e q sono coprimi. \square

5.3.2 Scrittura di $q \in \mathbb{Q}$ forme decimali

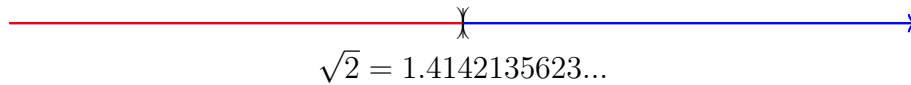
\mathbb{Q} corrisponde all'insieme $\{n, n_1n_2n_3...\}$, cioè $n \in \mathbb{Z}, n_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$ t.c. sono finite ($n_i = 0, \forall i > i_0$) o periodiche (un gruppo di n cifre si ripete all'infinito):

$$\mathbb{Q} := \left\{n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k}\right\}, k \in \mathbb{N}$$

5.3.3 Caso interessante

Presi:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 < 2\} \quad B := \{q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q^2 > 2\}$$



osserviamo che:

- $a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b$
- A, B sono vicino quanto vogliamo:

$$\exists a \in A, b \in B \text{ t.c. } a, b \text{ siano vicini}$$

- $\nexists c \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$, quindi \mathbb{Q} non soddisfa l'assioma di Dedekind o assioma della completezza.

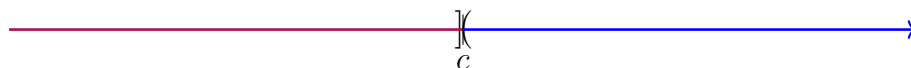
5.4 Numeri reali

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è definito assiomaticamente tramite:

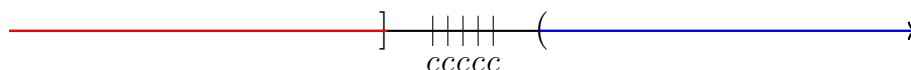
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ soddisfa le proprietà di \mathbb{Q}
- soddisfa l'assioma di Dedekind, quindi \mathbb{R} non ha buchi, ovvero:

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{R} \wedge a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \leq b$$

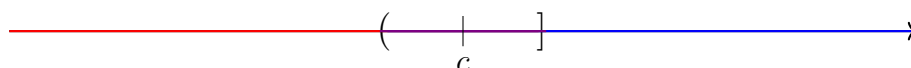
con c che può appartenere ad A o a B, ma non ad entrambi



Importante: se $A \cup B \neq \mathbb{R}$, allora non è detto che c sia unico:



Se invece l'unione tra i due insiemi non è nulla o unica, quindi $A \cap B \neq \emptyset$



in questo caso $\exists b \in B \text{ t.c. } b < c$

5.4.1 Teorema della caratterizzazione di \mathbb{R}

\mathbb{R} è l'unico campo ordinato che può essere rappresentato con l'insieme di tutti i possibili decimali allineati:

$$\mathbb{R} := \{m, d_1 d_2 d_3 \dots d_j \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ t.c. } j \in \mathbb{N}^+\}$$

$$\setminus \{m, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, d_j \in \{0, \dots, 9\} \text{ t.c. } \exists j_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } d_j = 9, \forall j \geq j_0\}$$

devono quindi essere esclusi tutti gli allineamenti di decimali in cui dopo un certo indice j si susseguono solo 9, in quanto è lo stesso numero del successivo susseguito da tutti 0.

Si dice che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} , quanto $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può essere approssimato da numeri razionali.

5.5 Intervalli, semirette ed estremi

Definizione:

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che M_A è un **maggiorante** di A , se $m \geq a, \forall a \in A$.

$$\mathcal{M}_A := \{M_A \text{ t.c. } M_A \geq a, \forall a \in A\}$$

ovvero l'insieme dei maggioranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, è detto che m_A è un **minorante** di A , se $m \leq a, \forall a \in A$.

$$\mathcal{m}_A := \{m_A \text{ t.c. } m_A \leq a, \forall a \in A\}$$

ovvero l'insieme dei minoranti

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato superiormente** se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$, quindi A ha almeno un maggiorante.

\mathbb{N} non è limitato superiormente in quanto $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n \text{ t.c. } m \in \mathbb{N}$

- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A è **limitato inferiormente** se $\mathcal{m}_A \neq \emptyset$, quindi A ha almeno un minorante
- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $M \in \mathbb{R}$, si dice **massimo di A** , $\max A$, se M è un maggiorante di A e se $M \in A$.
- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il numero $m \in \mathbb{R}$, si dice **minimo di A** , $\min A$, se m è un minorante di A e se $m \in A$.
- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il massimo dei maggioranti di A , si dice **estremo superiore** di A , $\sup A$ o supremum A , nel caso in cui l'estremo superiore non esista, il $\sup A = +\infty$
- sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora il massimo dei minoranti di A , si dice **estremo inferiore** di A , $\inf A$ o infimum A , nel caso in cui l'estremo inferiore non esista, il $\inf A = -\infty$

Proposizione 3. *sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, allora $\exists \sup A$*

Dimostrazione. A è limitato superiormente $\Rightarrow \mathcal{M}_A \neq \emptyset$, per definizione: $\forall a \in A, \forall b \in \mathcal{M}_A$ si ha $a \leq b$.

L'assioma di Dedekind implica che: $\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \leq b \Rightarrow c = \min \mathcal{M}_A = \sup A$ \square

Sia A limitato superiormente, quindi $\exists \sup A \in \mathbb{R}$, allora il $\sup A$ è caratterizzato da:

$$\sup A = \min \mathcal{M}_A$$

$$\begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A \Rightarrow \lambda \in \mathcal{M}_A \end{cases} \iff \begin{cases} \sup A \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \sup A, \exists a \in A \text{ t.c. } \lambda < a \end{cases}$$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\sup A \in \mathbb{R}$:

- se $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

Osservazione: sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\inf A \in \mathbb{R}$:

- se $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

Importante: sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A, \exists \inf A$, ma non è detto che esistano il $\max A, \min A$.

Osservazione: ogni $S \subset \mathbb{Z}, S \neq \emptyset$, limitato superiormente ha un massimo, mentre se limitato inferiormente ha minimo.

5.6 Proprietà di Archimede

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } na > b$.

Idea:

$$A := \{na \text{ t.c. } n \in \mathbb{N}^+\}$$

Supponendo che $\nexists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } na > b \Rightarrow b \geq an, \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow b$ è un maggiorante $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$
Conseguenze:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, non sono limitati superiormente, in quanto tutti contengono il precedente.
- $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ t.c. } \frac{1}{n} < x$, che come corollario ha che negando la disuguaglianza, posso dire che: $x \geq 0 \text{ t.c. } \forall a \in \mathbb{N}^+, x < \frac{1}{n} \Rightarrow x = 0$

5.7 Funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \equiv |x| = \max\{x, -x\} \in [0, +\infty)$$

5.8 Intervalli

$I \subset \mathbb{R}$, dice intervallo se $\forall x, y \in I, \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x < z < y, z \in I$

Un intervallo può essere descritto come uno di questi 4 tipi, avendo, $a \leq b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b\}$
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x \leq b\}$
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x < b\}$
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$

se a o b sono uguale a più o meno infinito, allora l'estremo si dice aperto.

Definizione: $A \subset \mathbb{R}$ si dice denso in \mathbb{R} se $\forall I \subset \mathbb{R}, \exists a \in A \text{ t.c. } a \in I$

6 Cenni su \mathbb{R}^n , cardinalità e numeri complessi

Definizione:

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ t.c. } x, y \in \mathbb{R}\} \equiv \text{piano cartesiano}$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^n$, e le sue coordinate sono: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

6.1 Intorno di un punto

Per intorni si intende:

$$J_{x_0} = J(x_0) = \{]a, b[\text{ t.c. } x \in]a, b[\}$$

è definito come intorno particolare:

$$Ir_0(x_0) = (x_0 - r_0, x_0 + r_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |x - x_0| < r_0\}$$

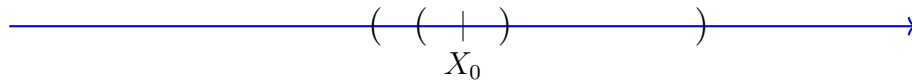
un intervallo di centro x_0 e raggio r_0 .

$| \quad |$ permette di definire una distanza su \mathbb{R} , detta distanza euclidea:

$$d(x, y) = |x - y|$$

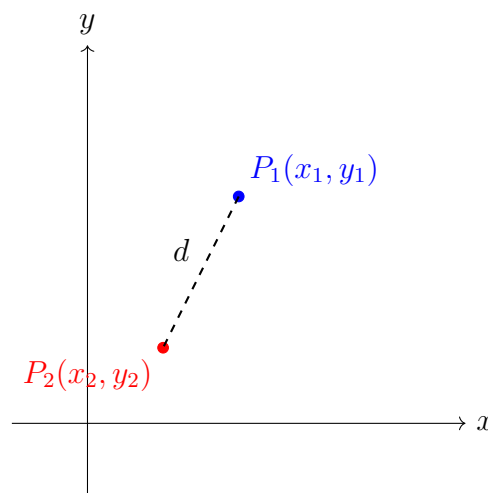
Osservazione: $\forall I \in J(x_0), \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x_0) \subset J(x_0)$

Prendendo: $r < \min\{d(x_0, a), d(x_0, b)\}$



6.1.1 Distanza in \mathbb{R}^n

In \mathbb{R}^2 :



$$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)| = \|P_2 - P_1\|.$$

Nel caso in cui $x_1 = x_2$, allora è come se ci trovassimo in \mathbb{R} , quindi si può usare la formula per la distanza euclidea.

In \mathbb{R}^3 :

Presi due punti P_1, P_2 :

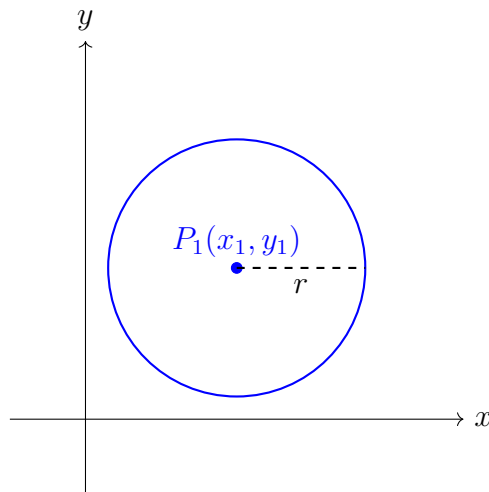
$$P_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, \dots, x_n^1), \in \mathbb{R}^n$$

$$P_2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, \dots, x_n^2), \in \mathbb{R}^n$$

$$d(P_1, P_2) := \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2 + \dots + (x_n^1 - x_n^2)^2}$$

6.1.2 Intorno in \mathbb{R}^n

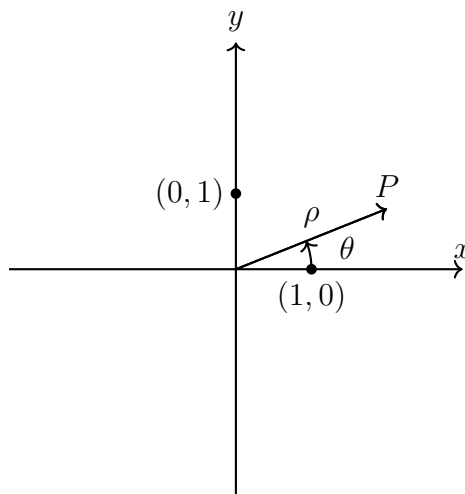
se $x_0 \in \mathbb{R}^2$ t.c. $I_r(x_0) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \|x - x_0\| < r\}$



6.2 Coordinate polari

preso $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, è possibile trovare θ, ρ t.c. :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \rightarrow \rho := d(0, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$



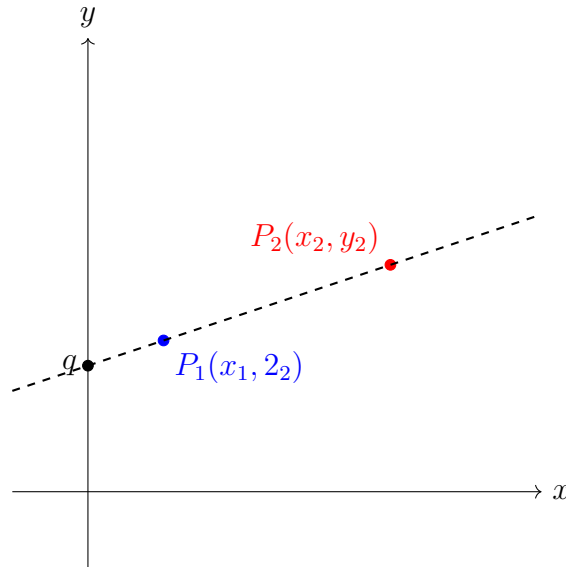
La somma tra le componenti al quadrato di un punto equivale a ρ al quadrato, secondo il teorema di Pitagora.

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2$$

6.3 Retta in \mathbb{R}^2

Una retta non verticale è definita da una coppia ordinata:

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y = mx + q\}$$



in una retta m è il coefficiente angolare della retta, definito dal rapporto incrementale:

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e per q , si intende la quota del punto di intersezione con l'asse delle y .

Le rette verticali non sono descrivibili con questa equazione, in quanto si dividerebbe per 0 nel rapporto incrementale, perciò si usa una insieme numerico:

$$r_v := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x = x_0\}$$

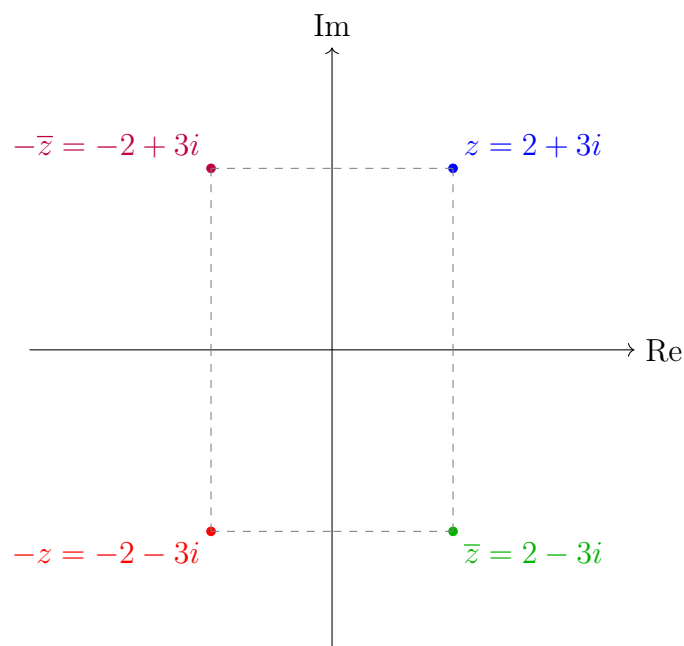
6.4 Numeri complessi ($\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$)

I numeri complessi sono definiti da una parte reale a e da una parte immaginaria b , che moltiplica l'unità immaginaria, $i \in \mathbb{C}$ t.c. $i^2 = -1$.

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + bi = (a, b), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

Preso un numero complesso $z = (a, b)$, è possibile trovare:

- l'opposto: $-z = (-a, -b)$
- il coniugato: $\bar{z} = (a, -b)$
- l'opposto del coniugato: $-\bar{z} = (-a, b)$



6.5 Insiemi aperti e chiusi

Un insieme si dice aperto:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \mathbf{aperto} \text{ se } \forall x \in A, \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

Un insieme si dice chiuso:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ si dice } \mathbf{chiuso} \text{ se } A^c = \mathbb{R}^n \setminus A \text{ è aperto}$$

Un insieme può essere né aperto né chiuso, ad esempio $(a, b]$

Per punto interno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice } \mathbf{punto interno} \text{ ad } A \text{ se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \subset A$$

l'insieme di tutti i punti interni è definito da:

$$\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x \text{ è interno ad } A\}$$

Osservazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } A \text{ è aperto } \mathring{A} = A \\ \mathring{A} \text{ è il più grande insieme aperto } B \text{ t.c. } B \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ è aperto} \iff \mathring{A} = A$$

Per punto esterno si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \text{ è esterno ad } A \text{ se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap A \neq \emptyset$$

oppure dicendo che è interno all'insieme complementare di A:

$$Ir(x_0) \subset A^c \iff x \text{ è interno ad } A^c$$

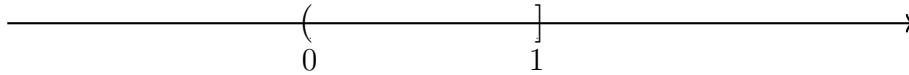
Per punto di bordo, o frontiera, si intende un punto che non è né interno né esterno, quindi che si trova sul bordo dell'insieme.

$$\delta A := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x \text{ sia un punto di bordo di } A\}$$

Osservazioni:

- $\delta A = \delta A^c$
- $\overline{A} := A \cup \delta A \equiv$ chiusura di A, è sempre un insieme chiuso
- \overline{A} è il più piccolo insieme B chiuso t.c. $A \subset B$

Esempio:



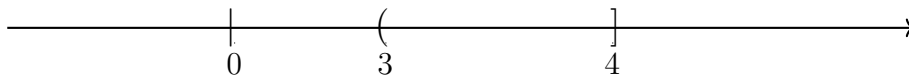
$$A = (0, 1], \overset{\circ}{A} = (0, 1), \delta A = \{0, 1\}, \overline{A} = A \cup \delta A = [0, 1]$$

Per punto isolato si intende:

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice isolato se } \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap A = \{x\}$$

Esempio:

$$A = \{0\} \cup (3, 4)$$

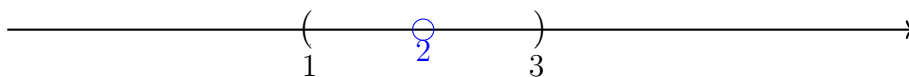


$\Rightarrow p = 0$ è punto isolato di A
in \mathbb{N} ogni punto $n \in \mathbb{N}$ è isolato.

Un insieme tale che ogni punto è isolato si dice ISOLATO.

$$A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \text{ si dice punto di accumulazione di A se } \forall Ir(x), (Ir(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

$$A = (1, 3) \setminus \{2\}$$



Allora $x = 2$ è un punto di accumulazione, e non appartiene ad A, ma potrebbe anche appartenere.

In \mathbb{R} :

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Allora un punto si dice di accumulazione, se $\forall u \subset J(x), (u \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
osservazione:

- se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow u = Ir(x)$, come per la definizione precedente
- $x = +\infty$, $+\infty$ è un punto accumulazione di A, se $\forall u \in J(+\infty)$, si ha che $(u \setminus \{+\infty\}) \cap A \neq \emptyset \rightarrow u = (M, +\infty)$, quindi A non è limitato superiormente.
- $x = -\infty$, $-\infty$ è un punto accumulazione di A, se $\forall u \in J(-\infty)$, si ha che $(u \setminus \{-\infty\}) \cap A \neq \emptyset \rightarrow u = (-\infty, m)$, quindi A non è limitato inferiormente.

Caratterizzazione di $\overline{A} = A \cup \delta A$:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \forall r > 0, (Ir(x) \cap A) \neq \emptyset\}, \text{ l'insieme dei punti aderenti ad } A$$

Osservazione:

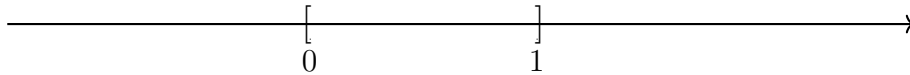
$$A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$+\infty \in \overline{A} \iff +\infty \text{ è un punto di accumulazione per } A$$

$$\overline{A} := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \text{ t.c. } \forall U \subset J(x) \text{ t.c. } \}$$

Esercitazione:

$$A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$



$$\overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = \emptyset$$

$$\overline{A} = \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = [0, 1]$$

$$x \in \overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} \iff \exists r > 0 \text{ t.c. } Ir(x) \cap (\mathbb{Q} \setminus [0, 1]) \neq \emptyset, \text{ } \mathbb{Q} \text{ è denso in } \mathbb{R}$$

$$\delta A = \delta(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = [0, 1] \rightarrow \delta A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = [0, 1] \setminus \emptyset$$

Dimostrazione che la cardinalità di $\mathbb{N} = \mathbb{Q} < \mathbb{R}$

7 Funzioni

Una funzione/applicazione è una terna di oggetti:

- A insieme, detto dominio
- B insieme, detto codominio
- f, la legge che associa ad ogni elemento uno ed un solo elemento di B

si scrive:

$$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$a \in \mathbb{A} \longmapsto f(a) \in \mathbb{B}$$

ed è definita da:

$$\forall a \in \mathbb{A}, \exists! b \in \mathbb{B} \text{ t.c. } f(a) = b$$

La notazione:

$$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B} \text{ è equivalente a } (A, B, f)$$

Una funzione si dice iniettiva se:

$$\forall a, b \in A \text{ t.c. } a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Una funzione si dice suriettiva se:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

a è detto pre immagine, e non deve per forza essere unico, è accettato che più elementi di A siano pre immagine di un elemento di B .

Una funzione si dice biettiva o biunivoca se:

$$\forall b \in B, \exists! a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Considerata la funzione f biunivoca allora ammette la sua funzione inversa:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\longrightarrow A \\ b &\longmapsto a \end{aligned}$$

Osservazione: f è una funzione biunivoca, allora $\forall b \in B \exists! a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$, quindi la funzione (B, A, f^{-1}) ha senso.

7.1 Esempi di definizione

- La funzione (A, A, Id) , è definita come la funzione identità, ovvero una funzione che per ogni valore di $a \in A$, restituisce lo stesso valore $a \in A$
- Prese due funzioni:

$$(A, B, f), (B, C, g)$$

Allora la funzione composta:

$$g \circ f = (A, C, g \circ f)$$

in cui l'immagine della funzione f , deve essere uguale al dominio della funzione g .
Se f è biunivoca e quindi f^{-1} è ben definita, allora:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$

- Sia (A, B, f) una funzione allora si definisce:

$$f : P(A) \longrightarrow P(B)$$

la funzione immagine tramite f , che associa ad ogni $E \in P(A)$, l'insieme $f(E) := \{b \in B \text{ t.c. } \exists a \in E, f(a) = b\}$, in cui $P(A), P(B)$ sono definiti come parti di A e parti di B , ovvero l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A o B .

In questo caso è possibile avere una funzione inversa, e si definisce come $(P(B), P(A), f^{-1})$ la funzione che associa ad ogni elemento $G \in P(B)$, l'insieme $f^{-1} := \{a \in A \text{ t.c. } f(a) \in G\}$, si usa la notazione f^{-1} anche se non è biunivoca, ma si intende una funzione che restituisce un certo insieme.

7.2 Funzioni ristrette ad E

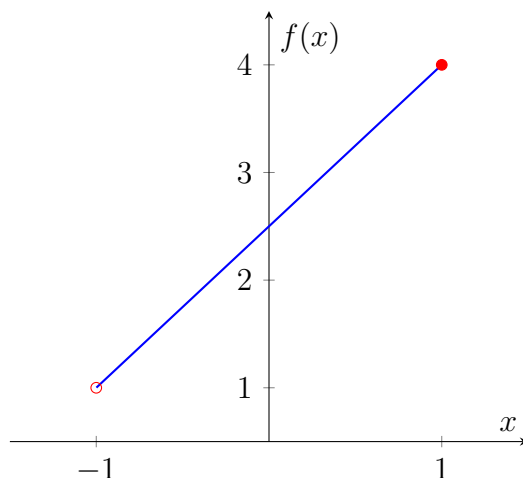
Presa $f : A \longrightarrow B, E \subset A$, allora $F|_E$, ovvero f ristretta ad E , è definita come:

$$F|_E : E \longrightarrow B$$

se il codominio è l'immagine di E , allora $F|_E$ è suriettiva, quindi $(E, f(E), f)$

7.3 Grafico di una funzione reale di variabile reale

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$:



i valori $y \in (1, 4]$ sono i valori dell'insieme immagine di A tramite f , e A , ovvero il dominio, assume i valori $x \in (-1, 1]$

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$$

7.4 Caratteristiche di una funzione

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- Si dice crescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- Si dice decrescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- Si dice strettamente crescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- Si dice strettamente decrescente se:

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

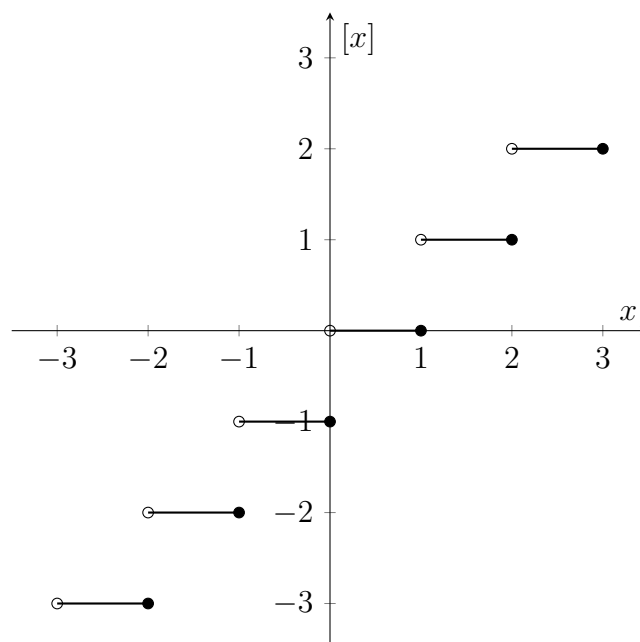
7.5 Monotonia di una funzione

Una funzione f si dice:

- monotona se è crescente/decrescente per tutto il dominio
- strettamente monotona se è strettamente crescente/decrescente per tutto il dominio

7.6 Funzione parte intera

La funzione $f(x) = [x]$ associa ad ogni numero reale x il più grande $n \in \mathbb{N} \leq x$, ed è una funzione monotona crescente.



7.7 Proprietà ed esempi

- f, g sono monotone, allora $f \circ g$ è monotona
- f, g sono entrambe crescenti/decrescenti, allora $f \circ g$ è crescente
- f, g sono una crescente e l'altra decrescente, allora $f \circ g$ è decrescente
- se f è crescente e $c > 0$, allora $c \circ f = c \cdot f(x)$ è crescente
- se f è crescente e $c < 0$, allora $c \circ f = c \cdot f(x)$ è decrescente
- se f è strettamente monotona allora è iniettiva
- se f è monotona ed invertibile, allora è strettamente monotona
- se f è monotona ed invertibile allora f^{-1} è monotona dello stesso tipo.