CAPITOLO 1

Fondamenti

In questo primo capitolo introdurremo, in maniera piuttosto superficiale e incompleta, alcuni strumenti, riguardanti la logica, l'insiemistica e gli insiemi numerici, necessari per la trattazione degli argomenti di un primo corso di Analisi Matematica.

1.1 Cenni di insiemistica e logica

Detto in maniera tanto generica quanto imprecisa, la matematica usa i principi della logica deduttiva per fornire predizioni certe a partire da una modellizzazione iniziale. Le fondamenta di una teoria matematica sono

- gli **enti primitivi**: *oggetti* di base, definiti *a buon senso*;
- gli **assiomi**: *proprietà* di base, assunte per vere, che devono essere *indipendenti* (nessun assioma può essere dedotto dagli altri) e *coerenti* (non possono implicare sia una proprietà che la sua negazione).

A partire da questi, che fissano gli elementi fondanti (in maniera piuttosto libera e unicamente basata su un'idea intuitiva degli oggetti da considerare e di ciò che deve essere sicuramente vero per tali oggetti), tutto il resto deve seguire, secondo precise *regole di deduzione*, anche queste fissate una volta per tutte. Questo processo porta a introdurre

- le **definizioni**: enti complessi;
- i **teoremi**: nuove proprietà dedotte da quelle note.

Alcune regole base della logica che assumeremo valide in seguito sono le seguenti:

- **principio del tertium non datur**: ogni affermazione è vera o falsa;
- **principio di non contraddizione**: se un'affermazione è vera, la sua negazione è falsa.

Un **insieme** è un ente primitivo che penseremo come collezione di oggetti e che verrà descritto tramite i suoi stessi elementi:

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

Inseriamo nell'insieme degli insiemi anche l'**insieme vuoto** (indicato con $\emptyset$), definito come l'insieme privo di elementi.

Osservazione 1.1. Quando un insieme viene descritto elencando i suoi elementi, l'ordine con cui si presentano gli elementi è irrilevante. Ad esempio, $\{0, 1\}$ e $\{1, 0\}$ sono due modi equivalenti per indicare l'insieme contenente i due elementi 0 e 1. $\triangleleft$

Osservazione 1.2. L'approccio all'insiemistica qui proposto non è la cosa migliore che si possa fare. Chi volesse approfondire la questione può documentarsi sulla teoria assiomatica ZFC (Zermelo Fraenkel Choice) degli insiemi. $\triangleleft$

Osservazione 1.3. Cosa vuol dire "..." nell'espressione che abbiamo usato per descrivere l'insieme A? Si tratta di un modo, formalmente inaccettabile, ma che ogni tanto ci prenderemo la libertà di utilizzare, per indicare qualcosa che manca e su cui non è fondamentale avere informazioni precise oppure di cui siamo certi che tutti estrapolino il seguito in maniera corretta. $\triangleleft$

Osservazione 1.4. Attenzione all'uso improprio (che faremo sistematicamente) del simbolo "=" nelle definizioni!. Nella scrittura $A = \{a, b, c, \dots\}$ stiamo definendo A tramite l'elenco dei suoi elementi e, ad essere precisi, dovremmo usare una notazione del tipo $A := \{a, b, c, \dots\}$ oppure $A \overset{def}{=} \{a, b, c, \dots\}$ per distinguerlo dalla notazione $A = B$ che invece dice che due insiemi dati A e B hanno gli stessi elementi. $\triangleleft$

Altri simboli di base (oltra a "=") sono i seguenti.

Altri Simboli

$\in$ simbolo di appartenenza. La notazione '$a \in A$' si legge "l'elemento a appartiene all'insieme A".

$\notin$ negazione di $\in$. La notazione '$a \notin A$' si legge "l'elemento a non appartiene all'insieme A".

$\exists$, $\nexists$ esiste, non esiste

$\forall$ per ogni

$:$ tale che

Dati due insiemi A e B, abbiamo già definito cosa intendiamo con $A = B$: l'**uguaglianza** tra insiemi corrisponde alla proprietà di avere gli stessi elementi.

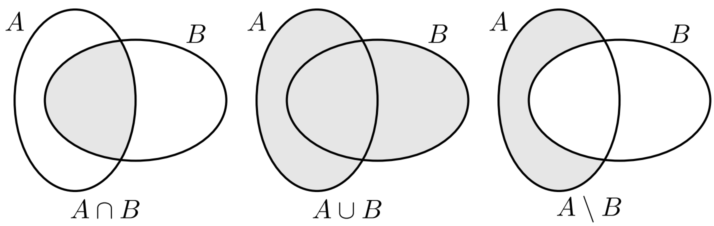
Introduciamo ora la relazione di **inclusione** tra insiemi: diremo che A è contenuto in B (o che A è un *sottoinsieme* di B), e scriveremo $A \subseteq B$, se ogni elemento dell'insieme A appartiene all'insieme B. L'inclusione possiede delle proprietà facilmente dimostrabili:
- (riflessiva) $A \subseteq A$;
- (antisimmetrica) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, allora $A = B$;
- (transitiva) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.

Queste proprietà si sintetizzano dicendo che l'inclusione è una **relazione d'ordine**.

Le principali operazioni tra insiemi sono le seguenti.

Operazioni tra insiemi

Unione: $A \cup B = \{a\colon a \in A$ **oppure** $a \in B\}$, è l'insieme che contiene sia gli elementi di A che gli elementi di B (esempio: $A = \{2, 5, 12, 21\}$, $B = \{1, 5, 7, 21\}$, $A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 12, 21\}$).
Intersezione: $A \cap B = \{a\colon a \in A$ **e** $a \in B\}$, è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono sia ad A che a B (esempio: $A = \{2, 5, 12, 21\}$, $B = \{1, 5, 7, 21\}$, $A \cap B = \{5, 21\}$).
Differenza: $A \setminus B = \{a\colon a \in A\,,\ a \notin B\}$, è l'insieme che contiene gli elementi di A che non appartengono a B (esempio: $A = \{2, 5, 12, 21\}$, $B = \{1, 5, 7, 21\}$, $A \setminus B = \{2, 12\}$).
Prodotto cartesiano: $A \times B = \{(a, b)\colon a \in A \text{ e } b \in B\}$, è l'insieme delle coppie ordinate che hanno come primo elemento un qualsiasi elemento di A e come secondo elemento un qualsiasi elemento di B (esempio: $A = \{2, 5\}$, $B = \{1, 5, 7\}$, $A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (2, 7), (5, 1), (5, 5), (5, 7)\}$).



Spesso, invece di elencare gli elementi di un insieme (cosa possibile solo in rari casi), tale insieme viene individuato attraverso una o più proprietà che *caratterizzano* i suoi elementi (*caratterizzare* vuol dire che *tutti e soli* gli elementi dell'insieme godono di tutte le proprietà richieste). Questo genera uno stretto rapporto tra le *operazioni insiemistiche* e la *logica dei predicati*.

Una **proposizione** P è una semplice affermazione, mentre un **predicato** $P(q)$ è una proposizione dipendente da una o più variabili. Ad esempio, P="Giulio è biondo" è una proposizione, mentre $P(q) =$"q è un uomo biondo" è un predicato.

Se $P(q)$ e $R(q)$ sono due predicati e $A = \{q\colon P(q)\}$, $B = \{q\colon R(q)\}$, allora
- l'inclusione insiemistica $A \subseteq B$ corrisponde all'**implicazione** $P(q) \Longrightarrow R(q)$, $\forall q$ (*P implica R*) .
- l'uguaglianza insiemistica $A = B$ corrisponde all'**equivalenza** $P(q) \Longleftrightarrow R(q)$, $\forall q$ (*P equivale* a R, oppure *P se e solo se R*).

Osservazione 1.5. Se P implica R, allora si dice che P è **condizione sufficiente** per R, oppure che R è **condizione necessaria** per P.

Se P equivale a R, allora si dice che P è **condizione necessaria e sufficiente** per R. $\lhd$

Inoltre abbiamo che
- $A \cap B = \{q\colon\ P(q)$ **e** $R(q)\}$
- $A \cup B = \{q\colon\ P(q)$ **oppure** $R(q)\}$
- $A \setminus B = \{q\colon\ P(q)$ **ma non** $R(q)\}$

Concludiamo questa sezione con una breve digressione sugli schemi di dimostrazione. Un teorema (o proposizione o lemma, a seconda del ruolo e della rilevanza che ha nella teoria) ha la seguente struttura: le **ipotesi**, che sono un "pacchetto" di affermazioni assunte come vere, **implicano**, sulla base di regole di deduzione logica, una **tesi**, cioè la validità di una nuova proprietà.

$$\boxed{\text{IPOTESI}} \Longrightarrow \boxed{\text{TESI}}$$

La **dimostrazione diretta** utilizza le ipotesi, gli enti primitivi, gli assiomi ed eventuali definizioni e proprietà precedentemente dimostrate per arrivare alla tesi.

Nella **dimostrazione per assurdo** si parte dall'assunto che *la tesi sia falsa* e si dimostra (tramite implicazioni della stessa natura del caso precedente) che si giunge a conclusioni contraddittorie o errate. Se ne conclude che la tesi non può essere falsa e quindi, per il principio del tertium non datur, deve essere vera.

1.2 I numeri naturali

Assumeremo noti l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

e le operazioni di addizione e moltiplicazione definite su $\mathbb{N}$ con le relative proprietà.

In realtà non si tratta di un ente primitivo, ma di un insieme che si può costruire a partire dalla teoria degli insiemi, essenzialmente formalizzando la possibilità di "contare" quanti elementi possiede un insieme (teoria della cardinalità di Cantor).

Spesso sarà utile considerare l'insieme $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dei numeri naturali positivi.

Sappiamo anche che su $\mathbb{N}$ è ben definita una *relazione d'ordine* $\leq$ nel modo seguente: per $n, m \in \mathbb{N}$

$$n \leq m \iff \exists\, p \in \mathbb{N} \text{ tale che } m = n + p.$$

Osservazione 1.6. Il numero naturale p che compare nella relazione d'ordine è unico, prende il nome di *differenza* tra m e n e si indica con $p = m - n$. $\triangleleft$

La relazione d'ordine introdotta soddisfa le stesse proprietà che abbiamo visto per l'inclusione tra insiemi

- (riflessiva) $n \leq n$;
- (antisimmetrica) se $n \leq m$ e $m \leq n$, allora $n = m$;
- (transitiva) se $n \leq m$ e $m \leq p$, allora $n \leq p$,

alle quali si aggiunge

- (ordinamento totale) per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha $n \leq m$ oppure $m \leq n$.

Osservazione 1.7. Si può dimostrare (ma noi non lo faremo) che $\mathbb{N}$ è *essenzialmente* l'unico insieme che soddisfa i seguenti assiomi (**assiomi di Peano**): esiste una operazione di **passaggio al successivo**, $s(n) = n + 1$, tale che

(P1) esiste un elemento $0 \in \mathbb{N}$ tale che $0 \neq s(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

(P2) se $n, m \in \mathbb{N}$ e se $n \neq m$, allora $s(n) \neq s(m)$;

(P3) se $E \subseteq \mathbb{N}$ è tale che

$$(I1) \quad 0 \in E \qquad \text{e} \qquad (I2) \quad \text{se } n \in E \text{ allora } s(n) \in E,$$

allora $E = \mathbb{N}$.

Il postulato $(P3)$ prende il nome di **Principio di Induzione** ed è, di fatto, la proprietà che caratterizza i numeri naturali (è facile pensare ad altri insiemi numerici, ad esempio i numeri razionali non negativi, che soddisfano le richieste $(P1)$ e $(P2)$). $\triangleleft$

Scrivendo il Principio di Induzione per un insieme $E \subseteq \mathbb{N}$ determinato da un predicato $P(n)$, ossia del tipo

$$E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tali che } P(n) \text{ è vera}\}$$

si ottiene il metodo di dimostrazione per induzione che permette di dimostrare che un predicato definito sui numeri naturali è sempre vero.

Metodo di dimostrazione per induzione

Sia $P(n)$ un predicato su $n \in \mathbb{N}$ tale che
- $P(0)$ è vera (**base dell'induzione**);
- per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ è vera (**passo induttivo**).

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1.8. Se abbiamo un predicato P definito solo per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, o se riteniamo che tale predicato sia vero solo oltre tale soglia, applicando il metodo di dimostrazione per induzione al nuovo predicato $P_0(n) = P(n_0 + n)$ otteniamo che se
- $P(n_0)$ è vera
- per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ fissato, se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ è vera,

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$. ◁

Per semplificare le notazioni successive, introduciamo il simbolo di **sommatoria**, che utilizzeremo spesso per scrivere in maniera compatta formule in cui si sommano molti termini che possono essere indicizzati tramite un numero finito di numeri naturali.

Definizione 1.9 ➭ Sommatoria

Se m ed n sono due numeri interi, con $m \leq n$, allora si definisce

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \ . \tag{1.1}$$

In altri termini, l'indice di sommatoria k si fa variare fra il valore minimo (indicato in basso) e il valore massimo (indicato in alto), e si sommano i termini corrispondenti. Ad esempio,

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6, \qquad \sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

Esercitiamoci sull'applicazione del metodo di dimostrazione per induzione.

Esempio 1.10 (Somma dei primi n numeri naturali – progressione aritmetica)**.** Dimostriamo per induzione che

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Il predicato $P(n)$ in questo caso è "vale l'uguaglianza per la somma di esattamente n termini". Verifichiamo la base dell'induzione:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \Longrightarrow \quad P(1) \text{ è vera.}$$

Per verificare il passo induttivo, dobbiamo scegliere arbitrariamente $n \geq 1$ (nota: tale valore n è arbitrario, ma fissato), assumere per vero che valga $P(n)$ e dimostrare che questo implica che valga anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{[P(n)]}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \overset{[conti]}{=} \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

A questo punto, utilizzando il Principio di Induzione, si conclude che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $\lhd$

Esempio 1.11 (Somma dei primi n numeri dispari)**.** Dimostriamo per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2. Innanzi tutto dobbiamo formalizzare a richiesta:

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2, \qquad n \geq 1.$$

Verifichiamo la base dell'induzione:

$$1 = 1^2 \quad \Longrightarrow \quad P(1) \text{ è vera.}$$

Verifichiamo il passo induttivo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 \overset{[P(n)]}{=} n^2 + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2.$$

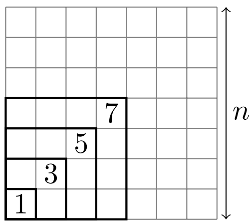
A questo punto, utilizzando il Principio di Induzione, si conclude che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $\lhd$

Osservazione 1.12. Gli esempi precedenti evidenziano un limite della dimostrazione per induzione: non è costruttiva, ossia si deve già conoscere la relazione di cui si vuole dimostrare la validità. Quindi, in generale, è necessario prima farsi un'idea di quale possa essere la relazione giusta e poi dimostrarla per induzione.

Ad esempio, la formula giusta per la somma dei primi n numeri naturali si può ottenere usando in maniera astuta la commutatività dell'addizione:

$$2 \sum_{k=1}^{n} k = (1+2+3+\cdots+n) + (n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1).$$

Invece, la formula giusta per la somma dei primi n numeri dispari si può intuire geometricamente, scomponendo l'area di un quadrato di lato n nella somma delle aree di "semicornici" inscatolate, come illustrato nella figura seguente.



Dimostriamo ora per induzione alcune relazione che utilizzeremo spesso nel seguito.

Esempio 1.13 (Progressione geometrica)**.** Dimostriamo che

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 1\,.$$

Fissato $x \neq 1$, indichiamo con $P(n)$ la proprietà

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

vale a dire, fissato un numero naturale n diciamo che $P(n)$ è vera se l'uguaglianza scritta sopra è valida.

Per $n = 0$ (con la convenzione $0^0 = 1$) abbiamo che

$$x^0 = \sum_{k=0}^{0} x^k = \frac{1-x}{1-x} = 1$$

quindi $P(0)$ è vera. Supponiamo adesso che $P(n)$ sia vera e facciamo vedere che da questo segue che anche $P(n+1)$ sia vera. Esplicitamente, dobbiamo dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

La strategia sarà la seguente: useremo l'ipotesi induttiva sulla somma dei primi n termini, isolando il termine aggiuntivo (passaggio (a)) e poi dovremo fare dei calcoli algebrici per verificare di aver ottenuto il valore richiesto (passaggio (b)):

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k \overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{[P(n)]}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \overset{(b)}{=} \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x}$$
$$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

Dunque $P(n+1)$ è vera. Questo permette di concludere, attraverso il Principio di Induzione, che $P(n)$ sia vera per ogni numero naturale n.

Osserviamo che la validità della relazione poteva essere dimostrata, senza fare uso del principio di induzione nel modo seguente:

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{j=1}^{n} x^j - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}. \ \triangleleft$$

Esempio 1.14 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** Dimostriamo che

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > -1.$$

Indichiamo con $P(n)$ la proprietà

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \forall x > -1\ ,$$

vale a dire, fissato un numero naturale n diciamo che $P(n)$ è vera se la disuguaglianza scritta sopra è valida per ogni $x > -1$, viceversa diciamo che è falsa.

Per $n = 0$ abbiamo che

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x, \qquad \forall x > -1,$$

quindi $P(0)$ è vera. Supponiamo adesso che $P(n)$ sia vera e facciamo vedere che da questo segue che anche $P(n+1)$ sia vera:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) &\overset{\left[\substack{P(n)\ \text{e} \\ x>-1}\right]}{\geq} (1+nx)(1+x) \\ = 1 + nx + x + nx^2 &\overset{[nx^2 \geq 0]}{\geq} 1 + (n+1)x,\end{aligned}$$

e questa disuguaglianza è valida per ogni $x > -1$, dunque $P(n+1)$ è vera. Questo permette di concludere, attraverso il Principio di Induzione, che $P(n)$ sia vera per ogni numero naturale n.

Osserviamo infine che la stessa dimostrazione permette di dimostrare che la disuguaglianza è stretta se $n \geq 2$ e $x \neq 0$:

$$(1+x)^n > 1 + nx, \qquad \forall n \geq 2,\ \forall x > -1,\ x \neq 0\,. \qquad \triangleleft$$

Concludiamo mostrando che il Principio di Induzione è, di fatto, equivalente al cosiddetto Principio del Buon Ordinamento, nel senso che sono sostituibili uno con l'altro come terzo assioma di Peano, una volta tenuti validi i primi due. Con l'occasione introduciamo anche il Principio di Induzione Debole.

Teorema 1.15 ➫ Induzione e buon ordinamento

Se assumiamo che valgano gli assiomi (P1) e (P2) di Peano, allora i seguenti enunciati sono equivalenti tra loro:

(I) Il Principio di Induzione

(ID) Il Principio di Induzione debole: sia $E \subseteq \mathbb{N}$ tale che

$$(I1) \quad 0 \in E \qquad e \qquad (I2d) \quad \textit{se } 0, 1, \ldots, n \in E \textit{ allora } n+1 \in E,$$

allora $E = \mathbb{N}$.

(BO) Il Principio del buon ordinamento: ogni sottoinsieme non vuoto E di $\mathbb{N}$ ammette minimo, cioè esiste $n_0 \in E$ tale che $n \geq n_0$ per ogni $n \in E$.

Dimostrazione. L'equivalenza tra i tre enunciati è garantita dalla catena di implicazioni

$$(I) \implies (ID) \implies (BO) \implies (I)$$

Per dimostrare che $(I) \implies (ID)$, basta osservare che se un insieme $E \subseteq \mathbb{N}$ verifica $(I1)$ e $(I2d)$, allora l'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tali che } 0, 1, 2, \ldots, n \in E\} \subseteq E$$

verifica le ipotesi del Principio di Induzione e quindi $\mathbb{N} = A \subseteq E \subseteq \mathbb{N}$, cioè $E = \mathbb{N}$.

Per dimostrare $(ID) \implies (BO)$ mostriamo che, supponendo valido (ID), se un insieme $E \subseteq \mathbb{N}$ non ha minimo, allora $E = \emptyset$ (antinominale dell'implicazione "$E \neq \emptyset \implies E$ ha minimo", e quindi enunciato equivalente al Principio del Buon Ordinamento).

Dato un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ che non ha minimo, introduciamo il predicato

$$P(n): \text{ “}n \in \mathbb{N} \setminus E''$$

e verifichiamo che soddisfi le ipotesi del Principio di Induzione debole.

Base induttiva: P(0) è vera. Infatti 0 non può appartenere ad E, altrimenti ne sarebbe il minimo (0 è il più piccolo naturale in assoluto).

Passo induttivo debole: se $P(m)$ è vera per ogni $m = 1, 2, \ldots, n$, allora deve essere vera anche $P(n+1)$, altrimenti si avrebbe che $n+1 \in E$ e $0, 1, 2, \ldots, n \notin E$, ossia $n+1$ sarebbe il minimo di E.

Per (ID) si conclude che $P(n)$ è vera per ogni n, cioè ogni $n \in \mathbb{N}$ appartiene al complementare di E, o, in altri termini, E è l'insieme vuoto.

Per dimostrare $(BO) \implies (I)$ procediamo per assurdo. Supponiamo che esista un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ che verifica (I1) e (I2) ma tale che $A = \mathbb{N} \setminus E$ sia non vuoto. Allora, per (BO) l'insieme A ha un minimo n_0. La proprietà (I1) garantisce che $0 \in E$, da cui segue che $n_0 \neq 0$ e quindi $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. D'altra parte $n_0 - 1 \notin A$, per la minimalità di n_0, quindi $n_0 - 1 \in E$ e, per la proprietà (I2), avremmo che $n_0 \in E$. Abbiamo ottenuto che n_0 dovrebbe appartenere sia a E che al suo complementare, affermazione incompatibile con il principio di non contraddizione. Quindi E deve essere l'insieme vuoto. $\square$

1.3 Coefficienti binomiali e binomio di Newton

In questo paragrafo introdurremo alcune notazioni che verranno poi usate nel resto del libro e che sono collegate al calcolo combinatorio. Cominciamo con la definizione di **fattoriale** di un numero naturale: se n è un numero naturale diverso da zero, indichiamo con $n!$ (si legge "enne fattoriale") il prodotto di tutti i fattori naturali che vanno da 1 a n, cioè

Fattoriale

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \qquad (n \in \mathbb{N}^+) .$$

Ad esempio

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24 .$$

Per definizione si pone anche $0! = 1$.

In termini pratici, e precisamente nel calcolo combinatorio, se $n \in \mathbb{N}^+$, $n!$ indica il numero di **permutazioni** di n oggetti distinti, ossia il numero di stringhe che si possono formare utilizzando n simboli distinti. Infatti, nella costruzione della stringa, si hanno n scelte possibili per il primo simbolo, $n-1$ per il secondo, e così via. Ad esempio, se consideriamo le prime tre lettere dell'alfabeto, 'a', 'b' e 'c', le possibili permutazioni di questi tre oggetti sono le 6 (= 3!) stringhe 'abc', 'acb', 'bac', 'bca', 'cab', 'cba'.

Utilizzando la nozione di fattoriale, si possono introdurre i **coefficienti binomiali.**: se n e k sono due numeri naturali, con $n \geq k$, si pone

Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad (n, k \in \mathbb{N},\ n \geq k) .$$

In calcolo combinatorio, il numero $\binom{n}{k}$ indica quanti sottoinsiemi di k elementi sono contenuti in un insieme di n elementi distinti. Infatti, il numero totale di stringhe di k elementi ottenibili dagli n elementi dati è $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, poiché il primo elemento della stringa può essere scelto in n modi distinti, il secondo in $n-1$, e così via. D'altra parte, fissato un qualsiasi sottoinsieme di k elementi, possiamo generare $k!$ stringhe distinte utilizzando questi k elementi; queste stringhe identificheranno tutte lo stesso insieme, dal momento che l'ordine degli elementi è irrilevante. Quindi, indicato con $C_{n,k}$ il numero dei sottoinsiemi di k elementi, abbiamo che

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!\, C_{n,k},$$

da cui si ricava $C_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Ad esempio, il numero di sottoinsiemi di due caratteri che si possono formare utilizzando le tre lettere 'a', 'b' e 'c' è dato da

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3;$$

tali sottoinsiemi sono $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$ (si noti che, ad esempio, $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ sono lo stesso sottoinsieme, che quindi va contato una sola volta).

Ricordandosi che $0! = 1$ per definizione, si ha in particolare che

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \ ,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$; inoltre valgono valgono le seguenti proprietà:

Proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \ , \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \ . \tag{1.2}$$

In particolare, l'ultima proprietà giustifica il calcolo dei coefficienti binomiali per mezzo del **triangolo di Tartaglia**:

Triangolo di Tartaglia

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1
$\cdots$						

Tale triangolo viene costruito scrivendo tutti 1 nella prima colonna (sono i coefficienti binomiali che corrispondono a $k = 0$) e sulla diagonale ($k = n$).

Dopo si calcolano gli elementi di ogni riga, partendo dall'alto e procedendo verso il basso, nel seguente modo: ogni elemento si ottiene come somma dei due elementi che stanno nella riga precedente e che si trovano sulla medesima colonna e su quella precedente.

I numeri $\binom{n}{k}$ sono detti coefficienti binomiali perché compaiono nello sviluppo della potenza di un binomio. Se a e b sono due numeri reali, è infatti immediato verificare che

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3.$$

Utilizzando il simbolo di sommatoria, le uguaglianze precedenti diventano

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k}b^k\,, \qquad (a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k}b^k\,.$$

Più in generale, se n è un numero naturale, vale la seguente identità, che dimostreremo per induzione.

Formula del binomio di Newton

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \qquad (n \in \mathbb{N}^+).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Osserviamo che la formula è banalmente verificata nel caso $n = 1$; supponiamo adesso che essa sia vera per un fissato $n \in \mathbb{N}^+$ e dimostriamo che essa vale anche per $n + 1$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n &\overset{[P_n]}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}b^k\,,\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo "traslato" di una unità l'indice di sommatoria nella seconda sommatoria. Adesso vorremmo rimettere insieme le due sommatorie, raccogliendo il termine comune $a^{n-k+1}b^k$. L'unico problema è rappresentato dal fatto che l'indice k varia fra 0 ed n nella prima sommatoria, mentre varia fra 1 ed $n+1$ nella seconda. Per ovviare a questo problema, isoliamo il termine relativo a $k=0$ nella prima sommatoria e quello relativo a $k=n+1$ nella seconda; tenendo conto dell'identità in (1.2) otteniamo

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}b^k \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1}b^k \\ &\overset{(1.2)}{=} a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}b^k \,,\end{aligned}$$

che è esattamente la formula (1.3) relativa all'esponente $n+1$.

1.4 I numeri interi relativi $\mathbb{Z}$ e i numeri razionali $\mathbb{Q}$

Abbiamo introdotto il concetto di differenza in $\mathbb{N}$ attraverso la relazione d'ordine: se $n, m \in \mathbb{N}$ verificano $n \le m$, la differenza $m-n$ è data dal(l'unico) numero naturale p tale che $m = n + p$. Per svincolare il concetto di differenza dalla relazione d'ordine, estendiamo l'insieme dei numeri naturali costruendo l'insieme $\mathbb{Z}$ (dei numeri **interi relativi**) tale che

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ esiste un unico elemento $-n \in \mathbb{Z}$ tale che $n + (-n) = 0$.

Con queste notazioni, i numeri interi relativi si rappresentano nel modo seguente:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\} .$$

Assumeremo per note le operazioni di addizione (e, conseguentemente, di sottrazione) e di prodotto in $\mathbb{Z}$, l'ordinamento e le loro proprietà.

L'operazione di divisione tra due qualsiasi numeri interi (con divisore non nullo) porta all'introduzione dell'insieme dei **numeri razionali**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,;\; m \in \mathbb{Z} \,,\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} .$$

Anche in questo caso diamo per scontato di sapere cosa sia una frazione, cosa non tanto ovvia: stiamo interpretando la frazione come una divisione (non svolta) tra numeri interi e dovremmo dimostrare (e non lo faremo) che questo sia sempre possibile.

Oppure potremmo procedere in maniera astratta (considerando le coppie ordinate in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, introducendo un'opportuna relazione di equivalenza, etc. . .), ma non faremo neanche questo...

Sappiamo che le operazioni definite su $\mathbb{Q}$ sono le seguenti:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}, \qquad\qquad \frac{p}{q}\frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}\,.$$

Osserviamo che la definizione, apparentemente macchinosa, dell'addizione in $\mathbb{Q}$ è dovuta al fatto che noi vogliamo garantirci che questo insieme numerico estenda $\mathbb{Z}$ mantenendo le operazioni coerenti con quelle precedentemente introdotte. Seguendo lo stesso principio, estendiamo anche l'ordinamento nel modo seguente:

$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Longleftrightarrow ps - rq \leq 0.$$

Riassumiamo rapidamente le proprietà di base delle operazioni e dell'ordinamento (nel seguito le lettere minuscole indicheranno sempre numeri razionali). Questo ci permetterà anche di fissare un po' di notazioni e di terminologia.

Proprietà dell'operazione di addizione

(A1) $a + b = b + a$ (commutatività);
(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatività);
(A3) $\exists\ 0$ tale che $a + 0 = a$ (0 elemento neutro);
(A4) $\forall a\ \exists! - a$ tale che $a + (-a) = 0$ ($-a$ opposto di a).

Ogni insieme (di qualsiasi natura) in cui si può definire un'operazione che gode delle quattro proprietà precedenti prende il nome di **gruppo commutativo**. Si può introdurre anche una seconda operazione, la **moltiplicazione**, rispetto alla quale l'insieme $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ risulta essere un gruppo commutativo.

Proprietà dell'operazione di moltiplicazione

(M1) $ab = ba$ (commutatività);
(M2) $(ab)c = a(bc)$ (associatività);
(M3) $\exists\ 1$ tale che $1a = a$ (1 elemento neutro);
(M4) $\forall a \neq 0$, $\exists!\ a^{-1}$ tale che $aa^{-1} = 1$ (a^{-1} reciproco di a);

Le due operazioni soddisfano la seguente condizione di compatibilità:

Proprietà distributiva

(D) $c(a+b) = ca + cb, \qquad \forall a, b, c.$

Le precedenti proprietà si possono sintetizzare dicendo che l'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni di addizione e moltiplicazione ha la struttura di **campo**.

Proprietà dell'ordinamento totale

(O1) $\forall a$, b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$ (ordinamento totale);
(O2) $\forall a$ si ha $a \leq a$ (riflessività);
(O3) $\forall a$, b, se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$ (antisimmetria);
(O4) $\forall a$, b, c, se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$ (transitività).

Useremo la notazione di disuguaglianza stretta $a < b$ quando $a \leq b$ e $a \neq b$. Scriveremo inoltre $a \geq b$ (rispettivamente $a > b$) se $b \leq a$ (rispettivamente $b < a$). La relazione d'ordine su $\mathbb{Q}$ risulta essere compatibile con le operazioni di addizione e moltiplicazione nel senso seguente.

Compatibilità tra ordinamento e le operazioni

(C1) se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$ per ogni c;
(C2) se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ allora $ab \geq 0$.

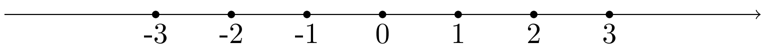
Se $a > 0$ (rispettivamente $a < 0$) diremo che a è un numero positivo (risp. negativo). Se $a \geq 0$ (rispettivamente $a \leq 0$) diremo che a è un numero non negativo (risp. non positivo).

Sulla base delle precedenti proprietà si possono ricavare le usuali regole di semplificazione (si veda l'Esercizio 1.14):

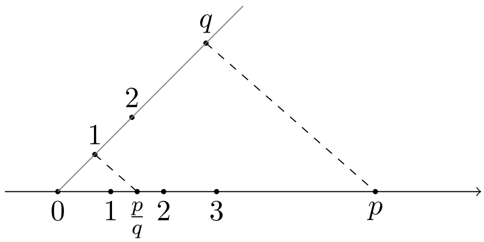
(i) $a + c \leq b + c$ se e solo se $a \leq b$;
(ii) $ab = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$;
(iii) se $a \neq 0$, allora $ab = ac$ se e solo se $b = c$;
(iv) se $a > 0$, allora $ab \leq ac$ se e solo se $b \leq c$;
(v) se $a < 0$, allora $ab \leq ac$ se e solo se $b \geq c$.

Ricordiamo che ogni numero razionale si può scrivere come allineamento decimale finito (ad esempio, $3/4 = 0,75$) o periodico (ad esempio: $10/99 = 0,101010\ldots$), con periodo diverso da 9.

Concludiamo questa sezione proponendo una rappresentazione geometrica degli insiemi numerici finora introdotti come punti di una retta. Fissata una retta, stabiliamo la posizione di 0 (punto da cui partiranno tutti i segmenti di cui vorremo calcolare le lunghezze), la posizione di 1 (fissando così l'unità di misura). Orientiamo la retta in maniera tale che se un punto si trova a destra di 0 il valore a lui assegnato coincida con la lunghezza del segmento che lo congiunge a 0, mentre ai punti che si trovano a sinistra di 0 si assegni l'opposto della lunghezza del segmento che li congiunge a 0. Questo individua facilmente la posizione di tutti i numeri interi relativi sulla retta:



La determinazione dei punti razionali è leggermente più macchinosa. Descriviamo come si determinano i razionali positivi (i negativi saranno i simmetrici a questi rispetto a 0). Fissata la retta su cui vogliamo individuare la posizione del punto corrispondente a un certo numero razionale positivo p/q, scegliamone un'altra, passante per 0. Su questa nuova retta fissiamo la posizione di 1 alla stessa distanza da 0. Fatto questo, siamo in grado di determinare le posizioni di tutti i numeri naturali sulle due rette. Colleghiamo con un segmento il punto corrispondente a p sulla prima retta al punto corrispondente a q sulla seconda. La retta passante per il punto corrispondente a 1 sulla seconda retta e parallela al segmento che abbiamo costruito interseca la prima retta nel punto corrispondente a p/q (basta osservare che abbiamo costruito due triangoli simili, che quindi hanno i lati proporzionali).



Con questa visualizzazione ci si accorge che i numeri razionali sono "tanti" (o, almeno, sembrano tanti rispetto a quelli di $\mathbb{Z}$...): basta prendere nel disegno $p = 1$ e far variare q in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, poi fare la stessa cosa con $p = 2$ e così via.

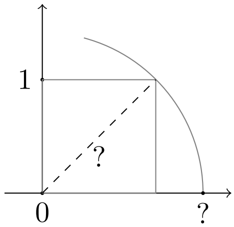
1.5 I numeri reali

Introducendo l'insieme numerico $\mathbb{Q}$ abbiamo risolto tutti i problemi relativi alle operazioni (addizione e moltiplicazione). Con questo, in linea di principio potremmo ritenerci soddisfatti. Tuttavia i numeri servono anche a misurare le lunghezze e non tutte le lunghezze sono razionali.

Proposizione 1.16 ➩ Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Non esiste alcun $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$ e rappresentiamo q come il rapporto $q = n/m$ tra due interi n ed $m \neq 0$ privi di fattori comuni. In questo modo, l'ipotesi per assurdo può essere riscritta come $n^2 = 2m^2$. Se questa relazione è vera, n deve essere un intero pari, visto che il suo quadrato è pari. Formalizziamo questa informazione dicendo che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2k$ (ogni numero intero pari è il doppio di un opportuno numero intero). A questo punto, sappiamo che deve essere $(2k)^2 = 2m^2$, ossia, fatte le dovute semplificazioni, $2k^2 = m^2$. Ma allora, ragionando come prima, concludiamo che anche m deve essere un numero pari, in contraddizione con il fatto che m ed n non avessero fattori in comune. □



Quindi nasce l'esigenza di colmare la lacuna della presenza di "buchi" nella retta su cui stiamo rappresentando gli insiemi numerici. A questo si può rispondere in maniera assiomatica: estendiamo $\mathbb{Q}$ in modo tale che il nuovo insieme numerico non si possa suddividere in due parti con un "buco" in mezzo.

Chiameremo **insieme dei numeri reali** $\mathbb{R}$ l'insieme che

- contiene $\mathbb{Q}$;
- su cui sono definite due operazioni di addizione e moltiplicazione e un ordinamento totale che soddisfino tutte le proprietà valide in $\mathbb{Q}$ (campo totalmente ordinato);
- in cui valga l'**assioma di completezza**:

Assioma di Completezza

se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ soddisfano

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R}, \quad a \leq b \ \ \forall a \in A,\ b \in B,$$

allora esiste un unico $s \in \mathbb{R}$, detto *elemento separatore*, tale che $a \leq s \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$.

Ad esempio $\sqrt{2}$ risulta essere l'elemento separatore $s \in \mathbb{R}$ tra gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x < 0 \text{ oppure } x^2 \leq 2\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}.$$

Gli stessi insiemi, pensati come sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$, soddisfano tutte le ipotesi dell'assioma di completezza ma, come visto nella Proposizione 1.16, non esiste alcun numero razionale che li separi.

Il risultato fondamentale (che non dimostreremo) riguardante l'insieme dei numeri reali è il seguente.

Teorema 1.17 ➩ Caratterizzazione di $\mathbb{R}$

Esiste essenzialmente un unico campo ordinato e completo che può essere rappresentato, ad esempio, con l'insieme di tutti i possibili allineamenti decimali

$$m, d_1 d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad d_j \in 0, \dots, 9, \ j \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

escludendo quelli con periodo 9 *(cioè quelli per cui esiste $j_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $d_j = 9$ per ogni $j \geq j_0$).*

In definitiva, nel seguito penseremo $\mathbb{R}$ come l'insieme numerico costituito da allineamenti decimali con un numero arbitrario di cifre, corredato di due operazioni (addizione "+" e moltiplicazione "$\cdot$") e di un ordinamento "$\leq$" che godono di tutte le proprietà che abbiamo elencato per i numeri razionali.

Approfondimento 1.18 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)**.** Ogni numero irrazionale $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può essere approssimato da numeri razionali con una precisione accurata quanto si vuole: una volta fissato il valore $\varepsilon > 0$ dell'errore che ci possiamo permettere, il numero razionale che si ottiene troncando l'allineamento decimale di x a un numero finito ma opportunamente grande di cifre, approssimerà x con una precisione almeno di ε.

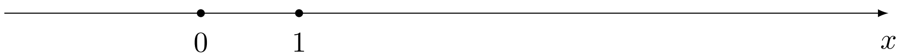
Ad esempio, se vogliamo approssimare $\sqrt{2} = 1,4142135623\ldots$ con un errore massimo $\varepsilon = 10^{-5}$, basta scegliere $q = 1,41421$ per ottenere

$$\sqrt{2} - q = 0,0000035623\ldots = 10^{-5} \cdot 0,35\ldots < 10^{-5}.$$

Questa proprietà si esprime dicendo che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è **denso** in $\mathbb{R}$. ◁

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, oltre a contenere tutti i numeri razionali, contiene ad esempio tutte le radici quadrate dei numeri naturali e (molti) altri numeri irrazionali come π (ossia il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro) e il numero di Nepero e (che sarà definito rigorosamente nel Paragrafo 5.3).

Sulla basa della caratterizzazione di $\mathbb{R}$ enunciata nel Teorema 1.17 è lecito rappresentare i numeri reali con l'insieme dei punti di una retta orientata che chiameremo *retta reale*. La retta reale è quindi una retta su cui viene introdotto un verso di percorrenza, viene fissato il punto d'origine (corrispondente al numero 0) e l'unità di misura (corrispondente al numero 1). Fissati questi dati, a ogni punto della retta reale corrisponde un solo numero reale.



Concludiamo questo paragrafo introducendo alcuni rilevanti sottoinsiemi della retta reale.

Dati due numeri reali $a < b$, si definiscono i seguenti **intervalli** con estremi a e b:

Intervalli limitati

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$, intervallo aperto;
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$, intervallo chiuso;
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$, che contiene l'estremo a, ma non b;
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$, che contiene l'estremo b, ma non a.

Geometricamente, questo corrisponde a considerare un segmento sulla retta reale, includendovi o meno gli estremi. Inoltre, fissato $a \in \mathbb{R}$, possiamo definire le seguenti **semirette**:

Semirette

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$, semiretta sinistra aperta;
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$, semiretta sinistra chiusa;
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$, semiretta destra aperta;
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$, semiretta destra chiusa.

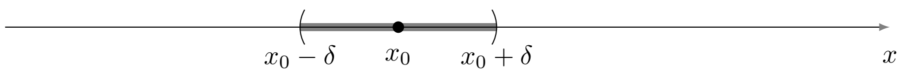
Nel seguito chiameremo genericamente intervallo qualsiasi insieme che possa essere o tutta la retta reale $\mathbb{R}$ o un intervallo limitato o una semiretta.

Facciamo notare sin d'ora che i simboli $+\infty$ e $-\infty$ (più infinito e meno infinito) non corrispondono a nessun numero. Ad esempio, la semiretta $(-\infty, a)$ è costituita da tutti i numeri più piccoli di a; scrivere $-\infty$ come estremo sinistro dell'intervallo vuol semplicemente dire che **non c'è** un estremo sinistro (intervallo illimitato).

Un intorno di un punto fissato è un particolare intervallo aperto, di cui viene fissato il centro e la distanza massima dal centro.

Definizione 1.19 ➾ Intorno

*L'**intorno** di $x_0 \in \mathbb{R}$ di ampiezza $\delta > 0$ è l'insieme dei valori $x \in \mathbb{R}$ che differiscono da x_0 meno di δ, ossia l'intervallo aperto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*



Analogamente si definiscono **intorno destro** e **intorno sinistro** di x_0 di ampiezza δ rispettivamente gli intervalli aperti $(x_0, x_0 + \delta)$ e $(x_0 - \delta, x_0)$.

1.6 Estremo superiore e inferiore

L'assioma di completezza è strettamente legato a un'altra importante proprietà dei numeri reali. Per illustrare la proprietà che ci interessa, introduciamo alcune definizioni basate sulla relazione d'ordine.

Definizione 1.20 ➯ Maggioranti e minoranti. Insiemi limitati

*Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che A è **limitato superiormente** se esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che*

$$a \leq \mu\,, \qquad \forall a \in A\,. \tag{1.4}$$

*Ogni μ che verifica (1.4) prende il nome di **maggiorante** di A.*
*Analogamente, diremo che A è **limitato inferiormente** se esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che*

$$a \geq \nu\,, \qquad \forall a \in A\,. \tag{1.5}$$

*Ogni ν che verifica (1.5) prende il nome di **minorante** di A.*
*Un insieme limitato sia superiormente che inferiormente si dice **limitato**.*

Esempio 1.21. Ogni intervallo limitato I di estremi $a < b$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Infatti, ogni numero $\mu \geq b$ è un maggiorante di I e ogni numero $\nu \leq a$ è un minorante di I. $\lhd$

Esempio 1.22. Consideriamo l'insieme $A = \{\frac{1}{x};\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Tale insieme non è limitato superiormente né inferiormente. Verifichiamo che non è limitato superiormente. Preso $M > 0$ si ha $1/x > M$ per ogni $x \in (0, 1/M)$, quindi esiste un elemento di A maggiore di M. Analogamente, per ogni $m < 0$ si ha $1/x < m$ per ogni $x \in (1/m, 0)$, quindi esiste un elemento di A minore di m.

Se invece si considera l'insieme $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^+\}$, si ha che $0 < 1/n \leq 1$, quindi A è limitato. $\lhd$

Osserviamo che, nell'ultimo esempio, il maggiorante 1 appartiene all'insieme A (infatti $1/n = 1$ per $n = 1$), mentre il minorante 0 (che si vede facilmente essere il più grande dei minoranti) non appartiene all'insieme. Diamo un nome ai maggioranti o minoranti che appartengono all'insieme.

Definizione 1.23 ➯ Minimo e massimo di un insieme

*Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Il numero $m \in \mathbb{R}$ si dice **minimo** di A se m è un minorante di A ed $m \in A$.*
*Analogamente, il numero $M \in \mathbb{R}$ si dice **massimo** di A se M è un maggiorante di A ed $M \in A$.*

Esempio 1.24. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R};\, 0 \le x \le 1\} = [0,1]$ ha chiaramente minimo $m = 0$ e massimo $M = 1$. Se invece si considera l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R};\, 0 < x \le 1\} = (0,1]$, B non ha minimo, perché $0 \notin B$. Analogamente, l'insieme $C = \{x \in \mathbb{R};\, 0 < x < 1\} = (0,1)$ non ha né massimo né minimo. $\triangleleft$

Osserviamo che i valori 0 e 1 hanno un ruolo speciale per l'intervallo $(0,1)$, pur non appartenendo all'insieme (0 è il più grande dei minoranti e 1 è il più piccolo dei maggioranti).

Definizione 1.25 ➫ Estremo superiore ed estremo inferiore

Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente. Il minimo dei maggioranti di A prende il nome di ***estremo superiore*** *di A e si indica con $\sup A$.*
Analogamente, se A è limitato inferiormente, il massimo dei minoranti prende il nome di ***estremo inferiore*** *di A e si indica con $\inf A$.*

Quindi $0 = \inf(0,1)$ e $1 = \sup(0,1)$. Per mostrare che un valore fissato $s \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme A è necessario "quantificare" la proprietà di essere il minimo dei maggioranti.

Caratterizzazione dell'estremo superiore

$$s = \sup A \quad \iff \quad \begin{cases} a \le s, \ \forall a \in A\,, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ a_\varepsilon \in A \text{ tale che } s - \varepsilon < a_\varepsilon\,. \end{cases}$$

Chiaramente, la prima condizione garantisce che s sia un maggiorante di A, mentre la seconda afferma che qualsiasi valore minore di s non è un maggiorante dell'insieme.

Analogamente si ottiene la seguente caratterizzazione.

Caratterizzazione dell'estremo inferiore

$$s = \inf A \quad \iff \quad \begin{cases} a \ge s, \ \forall a \in A\,, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ a_\varepsilon \in A \text{ tale che } s + \varepsilon > a_\varepsilon\,. \end{cases}$$

Per semplificare le notazioni, nel seguito scriveremo $\inf E = -\infty$ se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente e $\sup E = +\infty$ se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente.

L'importante proprietà che ci interessa evidenziare è che l'Assioma di Completezza è equivalente alla proprietà di esistenza dell'estremo superiore di insiemi non vuoti limitati superiormente. Noi faremo solo vedere come l'Assioma di Completezza garantisca l'esistenza dell'estremo superiore o inferiore.

Teorema 1.26 ➫ Esistenza dell'estremo superiore (inferiore)

Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente (risp. inferiormente) ammette estremo superiore (risp. inferiore).

Dimostrazione. Dimostriamo che se A è limitato superiormente allora ammette estremo superiore (la dimostrazione nell'altro caso è analoga). Il fatto che A sia superiormente limitato garantisce che l'insieme dei suoi maggioranti (che chiameremo $\mathcal{M}$) è non vuoto. Sia $\mathcal{N} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$. Il fatto che A sia non vuoto garantisce che $\mathcal{M}$ è limitato inferiormente (preso $a \in A$ si ha $a \leq q$ per ogni $q \in \mathcal{M}$) e quindi che $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Ovviamente $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{R}$ e $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Inoltre ogni $p \in \mathcal{N}$ non è un maggiorante di A (cioè esiste $a \in A$ tale che $p < a$), da cui si deduce che $p < q$ per ogni $p \in \mathcal{N}$ e per ogni $q \in \mathcal{M}$. Quindi $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ soddisfano le ipotesi dell'assioma di completezza. Ne deduciamo che esiste un unico $s \in \mathbb{R}$ tale che

$$p \leq s \leq q\,, \qquad \forall p \in \mathcal{N},\ \forall q \in \mathcal{M}\,. \tag{1.6}$$

Resta da far vedere che $s \in \mathcal{M}$. Se per assurdo s appartenesse a $\mathcal{N}$, esisterebbe $a \in A$ tale che $s < a$. In questo caso sarebbe possibile costruire il numero $\frac{s+a}{2}$ che verifica le stime

$$s < \frac{s+a}{2} < a\,,$$

ossia $\frac{s+a}{2}$ appartiene a $\mathcal{N}$ ed è più grande di s, in contraddizione con (1.6). □

Quest'ultimo risultato ha come conseguenza la seguente proprietà dei numeri reali.

Teorema 1.27 ➫ Proprietà archimedea dei numeri reali

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, allora esiste un numero naturale positivo $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $na > b$.

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, il numero b sarebbe un maggiorante dell'insieme $A = \{na \colon n \in \mathbb{N}^+\}$. Di conseguenza, per il Teorema 1.26, esisterebbe l'estremo superiore $s = \sup A$. D'altra parte, essendo $s - a < s$, per definizione di estremo superiore dell'insieme A, esisterebbe $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $s - a < Na$, ossia $s < (N+1)a \in A$, in contraddizione col fatto che s è un maggiorante di A. □

1.7 Il piano cartesiano

L'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ delle coppie ordinate di numeri reali (che in seguito sarà denotato con $\mathbb{R}^2$) può essere identificato con l'insieme dei punti del **piano**

cartesiano. Precisamente, si introduce nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico costituito da due rette perpendicolari a cui è assegnato un verso di percorrenza e su cui viene fissata la stessa unità di misura. L'asse orizzontale è una retta reale che viene in genere chiamata *asse delle ascisse*, la retta verticale prende il nome di *asse delle ordinate*. Il punto di intersezione tra le due rette prende il nome di origine degli assi e viene denotato con O.

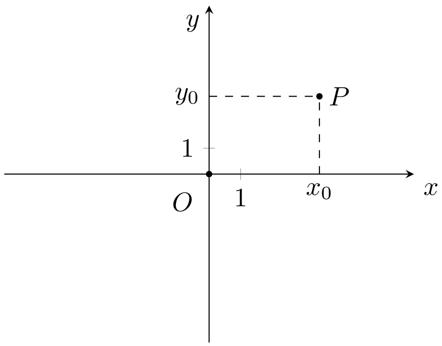


Figura 1.1: Il piano cartesiano

Una volta introdotto un riferimento cartesiano, a ogni punto P del piano vengono associate le sue **coordinate cartesiane**. Avremo che $P = (x_0, y_0)$ se e solo se la perpendicolare all'asse delle ascisse che passa per P taglia l'asse delle ascisse in x_0 e, analogamente, la perpendicolare all'asse delle ordinate passante per P taglia l'asse delle ordinate in y_0 (si veda la Figura 1.1).

Introdurre un sistema di riferimento cartesiano nel piano permette di descrivere gli enti geometrici come **luoghi geometrici di punti**, ossia in termini di relazioni (equazioni o disequazioni, in genere) soddisfatte esclusivamente dalle coordinate dei punti dell'ente geometrico che stiamo considerando.

A titolo di esempio, descriviamo in termini analitici alcuni semplici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

Supponiamo di voler considerare solo i punti $P = (x, y)$ del piano che hanno le due coordinate uguali tra di loro. La condizione da imporre è $y = x$ e l'insieme considerato è la retta **bisettrice** del primo e terzo quadrante (si veda la Figura 1.2 a sinistra).

Se invece i punti $P = (x, y)$ devono verificare la condizione $y = x^2$ (a parole: la seconda coordinata deve essere il quadrato della prima), l'insieme che viene descritto è una **parabola** con vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto (si veda la Figura 1.2 a destra).

L'insieme dei punti $P = (x, y)$ che verificano la condizione $y = 1/x$, $x \neq 0$ (a parole: la seconda coordinata è il reciproco della prima) è l'**iperbole**

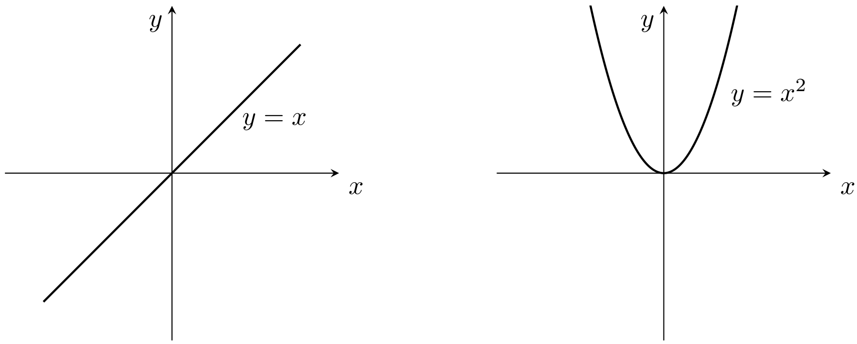


Figura 1.2: La bisettrice $y = x$ e la parabola $y = x^2$

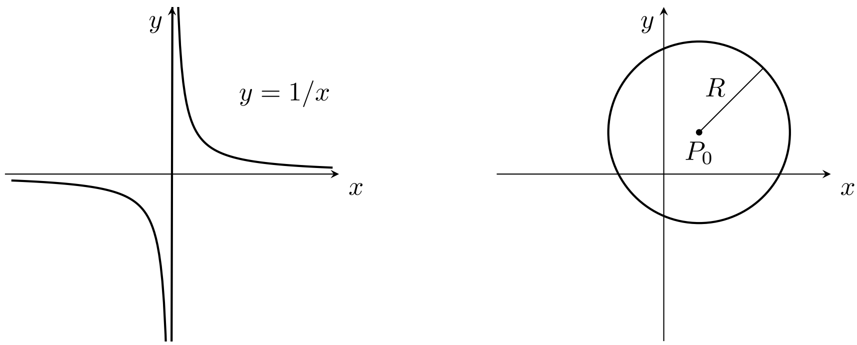


Figura 1.3: Iperbole e circonferenza

disegnata in Figura 1.3 a sinistra.

Fissato $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ed $R > 0$, la **circonferenza** di centro P_0 e raggio R è l'insieme dei punti del piano che distano R da P_0 (si veda la Figura 1.3 a destra). Quindi, per descrivere analiticamente una circonferenza, si deve saper calcolare esplicitamente la distanza tra due punti del piano assegnati.

A tale scopo, basta osservare che la **distanza** $d(P, Q)$ tra due punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ del piano è la lunghezza del segmento congiungente P e Q. Applicando opportunamente il Teorema di Pitagora (si veda la Figura 1.4) si ottiene

Distanza tra due punti del piano

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,, \qquad P = (x_1, y_1),\ Q = (x_2, y_2).$$

In conclusione $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza di centro $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $R > 0$ se e solo se le sue coordinate verificano l'identità

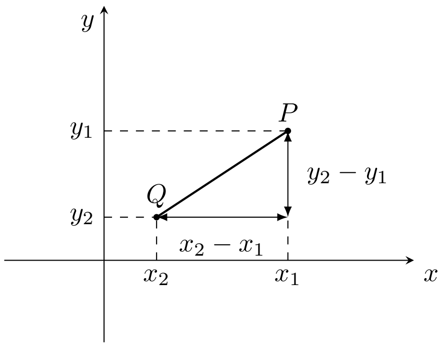


Figura 1.4: Distanza tra due punti del piano cartesiano

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Approfondimento 1.28 (Rette nel piano)**.** Vogliamo descrivere analiticamente una generica retta nel piano.

Se la retta è verticale, è facile vedere che può essere descritta come il luogo geometrico

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = x_0\}$$

per un opportuno valore di x_0 (l'ascissa comune a tutti i punti della retta).

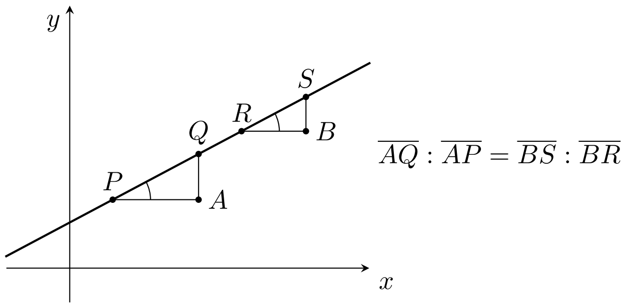


Figura 1.5: Retta non verticale

Supponiamo ora che la retta non sia verticale. Mostriamo che il **rapporto incrementale** relativo a due punti distinti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ sulla retta, cioè la quantità

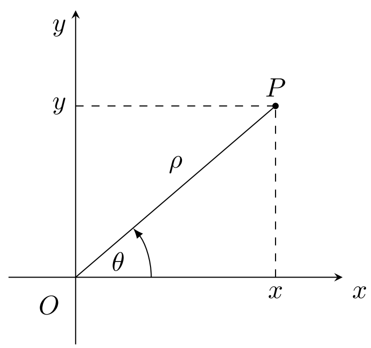
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \, ,$$

non dipende dalla scelta dei punti. Se infatti P e Q sono come sopra, mentre $R = (x_3, y_3)$ ed $S = (x_4, y_4)$ sono altri due punti distinti sulla retta, avremo

che
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\,.$$
Infatti, posto $A = (x_2, y_1)$, $B = (x_4, y_3)$, i triangoli rettangoli PAQ e RBS sono simili poiché hanno gli angoli congruenti, dunque il rapporto fra le lunghezze dei rispettivi cateti è uguale (si veda la Figura 1.5). Il valore comune dei rapporti incrementali è detto **coefficiente angolare** della retta (non verticale). Indichiamo con m tale coefficiente angolare; sia inoltre q l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle y, detta anche **ordinata all'origine** o intercetta. Per quanto appena detto, se $P = (x, y)$ è un punto della retta con $x \neq 0$, dal momento che anche il punto $Q = (0, q)$ appartiene alla retta si avrà
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - q}{x - 0} = m\,,$$
cioè $y = mx + q$. Di conseguenza una retta non verticale può essere sempre descritta come il luogo geometrico
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = mx + q\}$$
per opportuni valori di m e q. $\lhd$

Concludiamo questo paragrafo introducendo una diversa rappresentazione dei punti del piano, basata sull'uso delle **coordinate polari**.

Fissato un punto $P \in \mathbb{R}^2$ che non sia l'origine O degli assi, indichiamo con ρ la distanza di P dall'origine e con θ l'angolo formato, nel piano cartesiano, dalla semiretta uscente dall'origine e passante per P con il semiasse reale positivo. La coppia (ρ, θ), che individua univocamente P, è la *rappresentazione polare* del punto P.



Ricordiamo che, se (x, y) e (ρ, θ) sono le coordinate cartesiane e polari di un punto $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, valgono le relazioni

Legame tra coordinate cartesiane e polari

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta\,.$$

(Si veda il Paragrafo 2.8.7 per i richiami di trigonometria.)

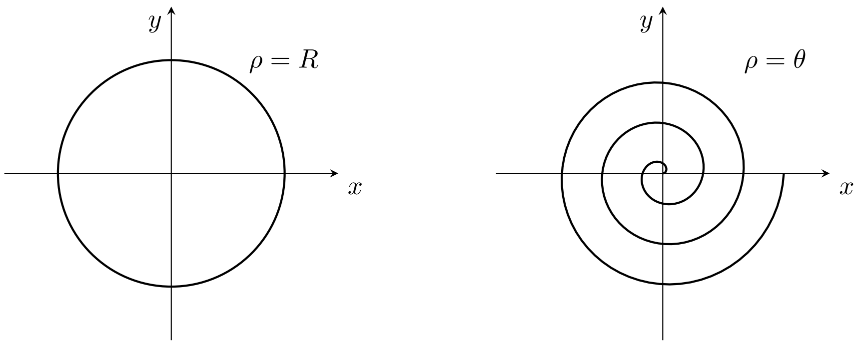


Figura 1.6: Circonferenza e spirale

Le coordinate polari spesso semplificano la rappresentazione analitica degli oggetti geometrici “circolari”. Ad esempio, i punti del piano le cui coordinate polari soddisfano l’equazione $\rho = R$ con $R > 0$ fissato descrivono la circonferenza di raggio R centrata nell’origine degli assi, mentre i punti del piano le cui coordinate polari soddisfano l’equazione $\rho = \theta$, con $\theta \geq 0$ descrivono una spirale (si veda la Figura 1.6).

1.8 Cenni sulla cardinalità degli insiemi numerici

Gli insiemi numerici sono stati costruiti incrementando progressivamente la quantità di elementi che li compongono. Noi siamo abituati a pensare che un sottoinsieme proprio abbia *meno* elementi dell’insieme che lo contiene. Questo è sempre vero quando si considerano insiemi con un numero finito di elementi, ma può non essere affatto vero nel caso di insiemi che hanno infiniti elementi.

La prima cosa da chiarire è cosa voglia dire *confrontare la numerosità di due insiemi* quando non se ne possono materialmente contare gli elementi.

Quello che si fa è *accoppiare* in maniera univoca ogni elemento di un insieme con un elemento dell’altro. Se questo accoppiamento è possibile per tutti gli elementi, diremo che i due insiemi sono **equipotenti** (oppure che hanno la stessa **cardinalità**).

Sulla base di questa ragionevolissima estensione dell’idea di avere lo stesso numero di elementi, scopriamo che $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ sono equipotenti. Infatti possiamo associare ad ogni $n \in \mathbb{N}$ pari il numero intero $n/2$ e ad ogni $n \in \mathbb{N}$ dispari il numero intero $-(n+1)/2$.

Chiameremo cardinalità **numerabile** quella di tutti gli insiemi equipotenti a $\mathbb{N}$. La conclusione a cui siamo arrivati è che anche $\mathbb{Z}$ ha cardinalità numerabile. Se non ci si fa sorprendere dal fatto che la metà (all'apparenza) di un insieme ha la stessa cardinalità di tutto l'insieme, questo risultato non stupisce più che tanto (si consiglia di cercare come funziona l'albergo di Hilbert...), o almeno non sorprende quanto il fatto di scoprire che anche $\mathbb{Q}$ ha cardinalità numerabile. Per dimostrarlo, basta riuscire a *enumerare* gli elementi di $\mathbb{Q}$, cosa possibile, ad esempio, utilizzando il cosiddetto (primo) **metodo diagonale di Cantor** descritto sinteticamente qui sotto:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\text{❶} & \frac{1}{1} & \text{❸} & \frac{2}{1} & \text{❻} & \frac{3}{1} & \text{❿} & \frac{4}{1} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
\text{❷} & \frac{1}{2} & \text{❺} & \frac{2}{2} & \text{❾} & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
\text{❹} & \frac{1}{3} & \text{❽} & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \cdots \\
 & \nearrow & & & & & & & \\
\text{❼} & \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \cdots
\end{array}
$$

Mostriamo che $\mathbb{R}$ non è numerabile. Iniziamo col dimostrare che l'intervallo $[0,1]$ non ha cardinalità numerabile. Procediamo per assurdo supponendo che, invece, gli elementi dell'intervallo $[0,1]$ siano numerabili, ossia che possano essere elencati nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\
r_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\
r_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Il numero reale $x = 0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ con

$$\beta_j \neq a_{jj}, \qquad \beta_j \neq 0, \qquad \beta_j \neq 9, \qquad \forall j$$

appartiene all'intervallo $[0,1]$ (è positivo e ha parte intera uguale a zero), ma è diverso da tutti i numeri reali r_j, in contraddizione col fatto di aver enumerato tutti i valori nell'intervallo.

Quindi sicuramente la cardinalità dell'intervallo $[0, 1]$ è diversa da quella del numerabile. Si può mostrare che tutti gli intervalli della retta reale sono equipotenti tra loro e sono equipotenti all'intera retta. (si veda l'Esercizio 1.26). La cardinalità della retta reale prende il nome di **cardinalità del continuo**.

In conclusione, i numeri reali sono molti di più dei numeri razionali (ma ricordiamoci anche che i numeri razionali sono densi in $\mathbb{R}$).

Si può essere più precisi sulle informazioni riguardanti la cardinalità dei numeri irrazionali (ma non andremo a fondo su questa questione). Precisamente, si può dimostrare che i numeri irrazionali algebrici, ossia le soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi, sono una quantità numerabile. Quindi i numeri irrazionali trascendenti sono veramente tanti.

1.9 I numeri complessi

Abbiamo visto che l'ampliamento di un insieme numerico è tipicamente legato alla necessità di guadagnare opportune proprietà che non sono verificate dall'ambiente che si sta considerando, mantenendo al contempo invariate le proprietà di campo delle operazioni di addizione e moltiplicazione. Ad esempio, l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è stato introdotto per avere un insieme numerico che, rispetto a $\mathbb{Q}$, avesse in più la proprietà di completezza. Tuttavia, anche lavorando in campo reale ci si imbatte in una ostruzione di base di natura algebrica: ci sono equazioni polinomiali che non ammettono soluzioni reali (si pensi ad esempio all'equazione $x^2 + 1 = 0$). D'altra parte, nelle applicazioni capita frequentemente che alcune quantità significative vengano identificate come zeri di un polinomio a coefficienti reali (ad esempio, le frequenze caratteristiche di un'onda).

Introdurremo adesso l'insieme dei **numeri complessi**, che è un'estensione di quello dei numeri reali e che ha la rilevante proprietà che ogni equazione polinomiale di grado n ha esattamente n soluzioni in questo insieme numerico (contate con la loro molteplicità; su questo torneremo in maniera più precisa nel Paragrafo 2.9.3).

Anche se a prima vista questo non sembrerà evidente, di fatto i numeri complessi si ottengono aggiungendo ai numeri reali un'opportuna nozione di radice quadrata di un numero reale negativo e imponendo che questo nuovo insieme numerico continui a essere un campo rispetto a una opportuna coppia di operazioni di addizione e di moltiplicazione.

Un numero complesso può essere pensato come un elemento di $\mathbb{R}^2$, cioè come una coppia ordinata di numeri reali (a, b); le due componenti a e b

vengono dette rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** del numero complesso.

Su tali coppie di numeri reali definiamo le seguenti operazioni:

Somma e prodotto di numeri complessi

1. addizione: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
2. moltiplicazione: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Esempio 1.29. La somma e il prodotto dei due numeri complessi $(1, 3)$ e $(-2, 4)$ sono rispettivamente $(-1, 7)$ e $(-14, -2)$. $\lhd$

Si verifica immediatamente che il numero complesso $(0, 0)$ è l'elemento neutro rispetto all'addizione, dal momento che

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b) \qquad \forall (a, b),$$

mentre il numero complesso $(1, 0)$ è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) \qquad \forall (a, b).$$

Inoltre

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0), \qquad \forall (a, b),$$

dunque $(-a, -b)$ è l'opposto del numero complesso (a, b). Per quanto riguarda l'inverso rispetto alla moltiplicazione, osserviamo che, se $(a, b) \neq (0, 0)$, cioè se il numero complesso (a, b) non coincide con l'elemento neutro per la somma, si ha che

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0), \qquad \forall (a, b) \neq (0, 0),$$

vale a dire $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ è l'inverso di $(a, b) \neq (0, 0)$.

In conclusione, si può dimostrare facilmente che le operazioni che abbiamo definito soddisfano le proprietà (A1)–(A4) dell'addizione, (M1)–(M4) della moltiplicazione e la distributività (D) elencate nel Paragrafo 1.4. Non è invece possibile definire un ordinamento che soddisfi contemporaneamente le proprietà (O1)–(O4) e (C1)–(C2), quindi l'insieme dei numeri complessi non ha una struttura ordinata come invece ha la retta reale. Il campo così ottenuto viene indicato con $\mathbb{C}$ e chiamato **campo dei numeri complessi**.

Se identifichiamo i numeri complessi del tipo $(a, 0)$ con la loro parte reale a, otteniamo che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è contenuto in quello dei numeri complessi e che, su questo sottoinsieme, le operazioni introdotte su $\mathbb{C}$ coincidono con quelle che abbiamo definito su $\mathbb{R}$.

Per semplificare le notazioni si indica il numero complesso $(0,1)$, detto **unità immaginaria**, col simbolo i:

Unità immaginaria

$$i = (0,1).$$

(Nella letteratura tecnica l'unità immaginaria è spesso indicata col simbolo j.) Osserviamo che, con l'identificazione fatta sopra, si ha

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$

In particolare, in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2+1=0$ ha due soluzioni: $z=i$ e $z=-i$. Inoltre, usando la definizione di somma e di prodotto si ha

$$(a,0)+(0,1)\cdot(b,0) = (a,b), \quad \text{ovvero} \quad a+ib = (a,b).$$

In genere, per indicare il numero complesso $z=(a,b)$ si preferisce la notazione $a+ib$, che prende il nome di notazione o **forma algebrica** del numero z. Infatti, usando questa notazione e ricordando che $i^2=-1$ le operazioni fra numeri complessi possono essere eseguite formalmente utilizzando le proprietà algebriche già note: ad esempio

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd \overset{[i^2=-1]}{=} ac-bd+i(ad+bc).$$

Nel seguito, quando scriveremo $z\in\mathbb{C}$ intenderemo sempre dire che $z = a+ib$, con a (anche indicato con $\Re z$) e b (anche indicato con $\Im z$) numeri reali che rappresentano rispettivamente la parte reale e quella immaginaria del numero complesso z. Per un numero complesso $z=a+ib$ si definiscono le seguenti quantità:

Coniugato e modulo di un numero complesso

coniugato di z: $\overline{z} = a-ib$;

modulo di z: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Osserviamo che il coniugato $\overline{z}$ di un numero complesso z è il numero complesso che ha la stessa parte reale e parte immaginaria opposta. Il modulo di un numero complesso z è invece un numero reale non negativo, che vale 0 se e solo se $z=0$, cioè se z ha parte reale e immaginaria entrambe nulle.

Dal momento che, di fatto, un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali $(\Re z, \Im z)$, risulta naturale rappresentare geometricamente l'insieme dei numeri complessi nel piano cartesiano, indicando la parte reale $\Re z$ in ascissa e la parte immaginaria $\Im z$ in ordinata. In questo caso si parla di piano complesso o di **piano di Gauss**.

Osserviamo che, geometricamente, il coniugato di un numero complesso si ottiene per simmetria rispetto all'asse reale (si veda la Figura 1.7 a sinistra), mentre il modulo di un numero complesso rappresenta la distanza del punto dall'origine del piano di Gauss (si veda la Figura 1.7 a destra).

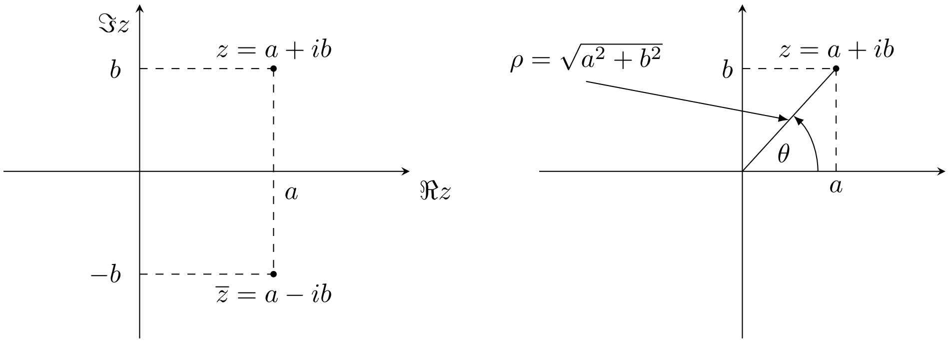


Figura 1.7: Il piano di Gauss

Elenchiamo alcune proprietà del modulo e del coniugato che possono essere facilmente dimostrate usando le definizioni.

Proprietà del modulo e del coniugato

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

(b) $z + \overline{z} = 2\,\Re z$, $z - \overline{z} = 2i\,\Im z$;

(c) $|\overline{z}| = |z|$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

(d) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Spesso per indicare un numero complesso è conveniente utilizzare la rappresentazione in **forma polare**, che si ottiene utilizzando le coordinate polari nel piano di Gauss: se $z = a + ib$ è un numero complesso diverso da zero, se indichiamo con $\rho = |z| > 0$ il suo modulo e con θ l'angolo formato, nel piano di Gauss, dalla semiretta uscente dall'origine e passante per z con il semiasse reale positivo, avremo

$$a = \rho \cos\theta, \quad b = \rho \sin\theta,$$

quindi z si scrive nel modo seguente:

Forma polare (o trigonometrica) di un numero complesso

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Come già sappiamo, ρ è il modulo di z, mentre θ è detto **argomento** di z. Osserviamo che l'argomento non è definito in maniera univoca, poiché se θ è un argomento di z anche i numeri $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono argomenti di z. Fra tutti i possibili argomenti, si definisce **argomento principale**, e si indica con $\arg(z)$, quello che cade nell'intervallo $(-\pi, \pi]$.

È evidente che i numeri reali (vale a dire, i numeri complessi con parte immaginaria nulla) hanno argomento principale $\theta = 0$ se sono positivi, mentre $\theta = \pi$ se sono negativi (al numero complesso nullo si può dare qualsiasi argomento). Quindi, ad esempio,

$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0), \qquad -7 = 7(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Viceversa, un numero immaginario puro (cioè un numero complesso con parte reale nulla) ha argomento principale che vale $\pm\pi/2$. Facciamo qualche altro esempio:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)\right).$$

1.10 Esercizi

Esercizio 1.1. Siano A, B e C degli insiemi. Verificare le seguenti proprietà, facendo attenzione all'uso dei quantificatori.
Distributività:
(a_1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(a_2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Assorbimento:
(b_1) $A \cap (A \cup B) = A$
(b_2) $A \cup (A \cap B) = A$

Esercizio 1.2. Sia Ω un insieme fissato. Per ogni $E \subseteq \Omega$ definiamo

$$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in E, \\ 0, & \text{se } \omega \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni A, $B \subseteq \Omega$

$$\chi_{A\cap B}(\omega) = \chi_A(\omega)\chi_B(\omega)\,, \quad \chi_{A\cup B}(\omega)+\chi_{A\cap B}(\omega) = \chi_A(\omega)+\chi_B(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Esercizio 1.3. Negare le seguenti affermazioni:

i) per ogni q la proprietà $P(q)$ è vera;
ii) esiste q tale che $P(q)$ è vera;
iii) in quel quartiere, per ogni palazzo esiste un'area riservata di parcheggio tale che ogni macchina parcheggiata in quell'area appartiene a un abitante del palazzo;
iv) ogni volta che sono andato in quel pub sono sempre stato servito dallo stesso ragazzo.

Esercizio 1.4. Calcolare le sommatorie

$$\sum_{k=0}^{7} (-1)^k (k+1)\ , \qquad \sum_{k=1}^{4} k!\ .$$

Esercizio 1.5. [Formula di somma per parti] Siano

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad \text{e} \qquad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

due n–uple di numeri reali. Verificare che

$$\sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) b_k + a_1 b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (b_k - b_{k+1}) + a_n b_n.$$

Esercizio 1.6. [Somma telescopica di Mengoli] Semplificare l'espressione

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Esercizio 1.7. Dimostrare per induzione l'identità:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ . \tag{1.7}$$

Esercizio 1.8. Facendo uso del Principio di induzione, dimostrare l'*identità di Catalan*:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\,.$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Esercizio 1.9. Sviluppare $(2-x)^4$.

Esercizio 1.10. Calcolare le somme

$$i)\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k, \qquad ii)\quad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

Esercizio 1.11. Calcolare la somma

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

e dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=n2^{n-1}.$$

Esercizio 1.12. Dimostrare, utilizzando il Principio di Induzione, che

$$i)\quad n! \geq 2^{n-1}, \qquad ii)\quad n^n \geq 2^{n-1}n!, \qquad iii)\quad n^n \leq 3^n n!$$

per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. (Suggerimento per *iii)*: tra gli ingredienti necessari per la dimostrazione, tenere presente la Formula del binomio di Newton, la stima *i)* e l'espressione della somma dei primi n elementi della progressione geometrica ottenuta nell'Esempio 1.13.)

Esercizio 1.13. [Numeri di Fibonacci e Sezione Aurea] Siano F_n, $n \in \mathbb{N}$, i numeri definiti per ricorrenza nel modo seguente

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

e sia $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dopo aver verificato che $\varphi^2 = \varphi + 1$, dimostrare utilizzando il Principio di Induzione Debole, che

$$F_n \geq \varphi^{n-2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 1.14. [Regole di semplificazione] Siano a, b, c numeri reali. Dimostrare, utilizzando le proprietà di base delle operazioni e dell'ordinamento, che valgono le seguenti proprietà

i) $a + c \leq b + c \Longleftrightarrow a \leq b$;
ii) $ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ oppure $b = 0$;
iii) se $a \neq 0$, allora $ab = ac \Longleftrightarrow b = c$;
iv) se $a > 0$, allora $ab \leq ac \Longleftrightarrow b \leq c$;
v) se $a < 0$, allora $ab \leq ac \Longleftrightarrow b \geq c$.

Esercizio 1.15. Dimostrare che, se A, B sono sottoinsiemi non vuoti e limitati di $\mathbb{R}$, e $A \subset B$, allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B\,.$$

Esercizio 1.16. Sia $A = \{\frac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq \mathbb{R}$. Verificare se A è limitato superiormente e inferiormente e se ammette massimo e minimo.

Esercizio 1.17. Sia $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 2\}$. Verificare se A è limitato superiormente e inferiormente e se ammette massimo e minimo.

Esercizio 1.18. Sia $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}$. Verificare se A è limitato superiormente e inferiormente e se ammette massimo e minimo.

Esercizio 1.19. Sia A l'insieme di tutte le città italiane con più di un milione di abitanti e sia B l'insieme di tutte le città italiane con almeno una università. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Esercizio 1.20. Siano $A = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 2\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Esercizio 1.21. Sia A l'intorno di $x_0 = 1$ di ampiezza $\delta = 2$ e sia B l'intorno destro di $x_0 = 0$ di ampiezza $\delta = 1$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Esercizio 1.22. Siano $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,1)$, $P_3 = (1,1)$. Calcolare la lunghezza dei lati del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3.

Esercizio 1.23. Disegnare sul piano cartesiano gli insiemi

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R};\ -1 \le x \le 1\} \times \Big(\{x \in \mathbb{R};\ x^2 = 4\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ -2 < x < 1\}\Big).$$

Esercizio 1.24. Determinare le coordinate cartesiane dei punti appartenenti alla bisettrice del primo e terzo quadrante che hanno distanza 1 dal punto $P_0 = (-1,0)$.

Esercizio 1.25. Si determinino estremo superiore ed estremo inferiore, specificando se siano massimo e minimo, dei seguenti insiemi.

1) $\displaystyle\bigcup_{n\ge 2} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$

2) $\displaystyle\bigcap_{n\ge 1} \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$

3) $\displaystyle\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

4) $\displaystyle\left\{\sum_{k=0}^{n} 2^k,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

5) $\displaystyle\left\{\frac{3n^2}{4n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

6) $\displaystyle\left\{\frac{(-1)^n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

Esercizio 1.26. Mostrare (anche in maniera non rigorosa) che due qualsiasi intervalli aperti e limitati della retta reale hanno la stessa cardinalità e che l'intervallo $(-1,1)$ ha la stessa cardinalità di tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.27. Mostrare che l'intervallo chiuso $[0,1]$ è equipotente all'intervallo aperto $(0,1)$, esibendo una possibile corrispondenza biunivoca.

Esercizio 1.28. Date le seguenti coppie z e w di numeri complessi, calcolare $z - 4w$, $zw - 2z^2$, $|zw|$, $\overline{3z - w}$:

1) $z = 1 - 2i$, $w = 2 + i$;

2) $z = 3 - i$, $w = -i$;

3) $z = 1 + i$, $w = -2$;

4) $z = -1 + i$, $w = 2 + 2i$.

Esercizio 1.29. Scrivere in forma algebrica $z = a + ib$ i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{1}{3 - 2i}, \qquad z_2 = \frac{4+1}{1-i}, \qquad z_3 = \frac{1}{i(2+i)^2}.$$

Esercizio 1.30. Scrivere in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = -2i, \qquad z_2 = -5, \qquad z_3 = 1 + i.$$

CAPITOLO 2

Funzioni

2.1 Definizioni e primi esempi

La nozione di funzione è uno dei concetti di base dell'Analisi Matematica.

Volendo avere un'idea "operativa" di cosa sia una funzione, la si può pensare come un meccanismo che, presa in input l'informazione a (appartenente a un insieme A), la elabora e la trasforma in output b (appartenente a un insieme B). La proprietà fondamentale che sarà richiesta è che il trasformato b sia univocamente determinato dall'input a.

Definizione 2.1 ➩ Funzione

Una ***funzione*** *è una terna (A, B, f), dove A e B sono due insiemi ed f è una legge che* ***a ogni*** *elemento di A associa* ***uno e un solo*** *elemento di B. Spesso si usa la notazione $f\colon A \to B$ che si legge "f da A a B".*

L'insieme A si chiama **dominio** della funzione f (che d'ora in poi sarà denotato con $\mathrm{Dom}(f)$) e l'insieme B si chiama **codominio** di f.

Fissato $a \in A$, l'elemento di B che viene associato ad a dalla legge f viene indicato con $f(a)$ e prende il nome di **immagine** di a tramite f. Il sottoinsieme di B costituito da tutte le immagini degli elementi di A tramite f prende il nome di immagine di f e sarà indicato con $\mathrm{Im}(f)$.

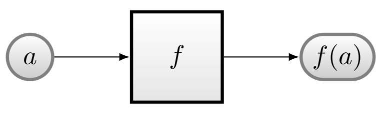


Figura 2.1: Funzione come "meccanismo di trasformazione"

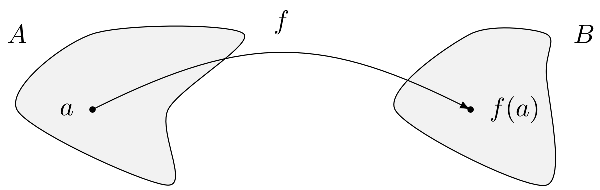


Figura 2.2: Terna che determina una funzione

Per fare un esempio, sia A l'insieme dei cittadini italiani e B l'insieme dei comuni italiani. L'applicazione che associa a ogni cittadino il suo comune di residenza è una funzione (associa a ogni cittadino un solo comune). Vogliamo sottolineare, all'inizio di questo corso, l'importanza dei quantificatori nelle definizioni e negli enunciati dei teoremi. La definizione di funzione richiede che **per ogni** elemento di A **esista un'unica** immagine.

Se avessimo considerato la legge che a ogni cittadino italiano associa i comuni in cui possiede una casa di proprietà, tale legge non avrebbe definito una funzione perché ci sarebbero stati degli elementi del dominio a cui corrispondeva più di un'immagine (i ricchi...) e altri elementi del dominio a cui non corrispondeva nessuna immagine (i poveri...).

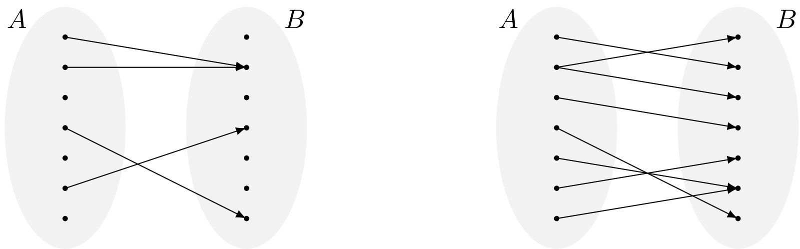


Figura 2.3: Relazioni che non sono funzioni

Osservazione 2.2. È possibile dare una definizione di funzione, basata solo sulla teoria degli insiemi, che chiarisca il concetto di "legge" che, di fatto, non abbiamo definito. Più precisamente, dati due insiemi A e B, diremo che un sottoinsieme Γ del prodotto cartesiano $A \times B$ è una funzione se vale la seguente proprietà: per ogni $a \in A$ esiste uno e un solo $b \in B$ tale che $(a, b) \in \Gamma$. Quindi la legge f introdotta nella Definizione 2.1 è caratterizzata da

$$b = f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \in \Gamma \qquad (a \in A,\ b \in B). \qquad \lhd$$

In questo testo tratteremo essenzialmente solo **funzioni reali di variabile reale**, ossia funzioni il cui dominio e codominio sono sottoinsiemi dei numeri reali ($f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$). Tipicamente, per queste funzioni $\mathrm{Dom}(f)$ viene rappresentato nel piano cartesiano come un sottoinsieme dell'asse delle ascisse e il suo generico elemento (variabile indipendente) si indica con x, mentre i valori di $\mathrm{Im}(f)$ determinano un sottoinsieme dell'asse delle ordinate il cui generico elemento (variabile dipendente) viene indicato con y. Con questa convenzione è possibile associare a ogni funzione reale di variabile reale un insieme di punti del piano che la rappresenti graficamente.

Grafico di una funzione reale di variabile reale

$$\Gamma(f) \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ e } y = f(x)\}\,.$$

L'insieme $\Gamma(f)$ prende il nome di **grafico** di f.

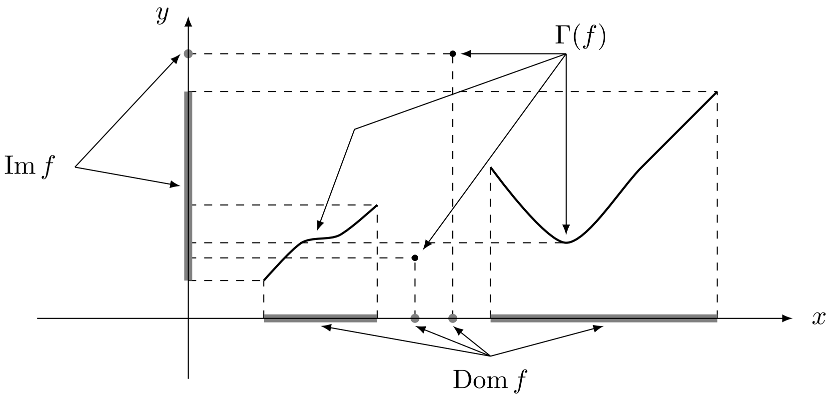


Figura 2.4: Dominio, immagine e grafico di una funzione

Quindi, noto il grafico $\Gamma(f)$ di una funzione reale di variabile reale, il dominio della funzione (rispettivamente l'immagine) è descritto visivamente dall'insieme dei punti dell'asse delle ascisse (rispettivamente delle ordinate) che corrispondono alla prima (rispettivamente alla seconda) coordinata dei punti di $\Gamma(f)$ (si veda la Figura 2.4).

Osserviamo che la traduzione grafica del fatto che per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ deve esistere un unico $y \in \mathrm{Im}(f)$ tale che $y = f(x)$ è la seguente: un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$ è il grafico di una funzione se e solo se per ogni $x \in \mathbb{R}$ la retta verticale che incide in x l'asse delle ascisse interseca S al più in un punto (e l'intersezione è non vuota solo per $x \in \mathrm{Dom}(f)$).

Spesso le funzioni reali di variabile reale sono definite attraverso leggi del tipo $f(x) = x^2$, $f(x) = \log x$, $f(x) = \sqrt{x+1}$, etc. L'insieme di tutti i valori di x per i quali tale legge risulta ben definita prende il nome di **insieme di definizione** (o dominio naturale) di f. D'ora in poi, se non verrà specificato

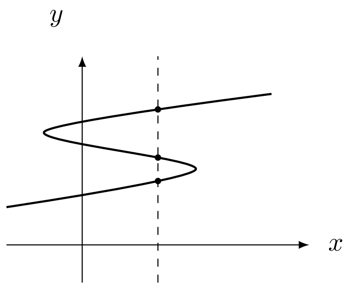


Figura 2.5: Questo non è un grafico!

diversamente, Dom(f) indicherà l'insieme di definizione di f e il codominio sarà tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia, può essere talvolta conveniente vedere come agisce la legge f su un insieme E più piccolo dell'insieme di definizione. In quel caso si sta considerando la **restrizione** della funzione f all'insieme E.

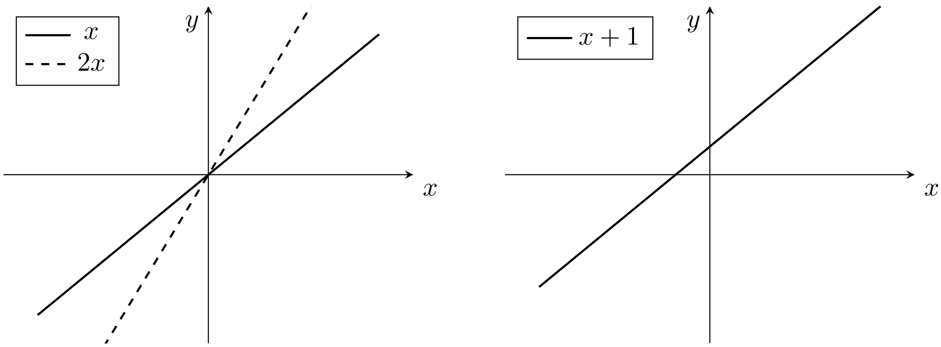


Figura 2.6: Grafici delle funzioni $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 1$

Proponiamo alcuni primi esempi molto semplici di funzioni reali di variabile reale.

Esempio 2.3. Sia c un numero reale fissato. La funzione $f(x) = c$ associa a ogni numero $x \in \mathbb{R}$ il numero c (**funzione costante**). Il grafico di questa funzione è la retta orizzontale $y = c$ (ad esempio, il grafico della funzione nulla $f(x) = 0$ è l'asse delle x) e $\mathrm{Im}(f) = \{c\}$.

La funzione $f(x) = x$ associa a ogni numero $x \in \mathbb{R}$ esso stesso (**funzione identità**). Il grafico di f è la bisettrice del primo e terzo quadrante e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

La funzione $f(x) = 2x$ associa a ogni numero reale x il suo doppio (ad esempio, l'immagine di 3 è 6, l'immagine di -1 è -2, l'immagine di $\sqrt{3}$ è

$2\sqrt{3}$). Il grafico di f è la retta per l'origine tratteggiata in Figura 2.6 a sinistra e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

La funzione $f(x) = x + 1$ associa a ogni numero reale x il numero che si ottiene aggiungendo 1 a x (ad esempio, l'immagine di 3 è 4, l'immagine di -1 è 0, l'immagine di $\sqrt{3}$ è $\sqrt{3}+1$). Il grafico di f è la retta in Figura 2.6 a destra e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

La funzione $f(x) = x^2$ associa a ogni numero reale x il suo quadrato (ad esempio, l'immagine di 3 è 9, l'immagine di -1 è 1, l'immagine di $\sqrt{3}$ è 3). Il grafico di f è la parabola in Figura 2.7 a sinistra e $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.

La funzione $f(x) = 1/x$ associa a ogni numero reale $x \neq 0$ il suo reciproco (ad esempio, l'immagine di 3 è $1/3$, l'immagine di -1 è -1, l'immagine di $\sqrt{3}$ è $1/\sqrt{3}$). L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, il grafico di f è l'iperbole in Figura 2.7 a destra e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\triangleleft$

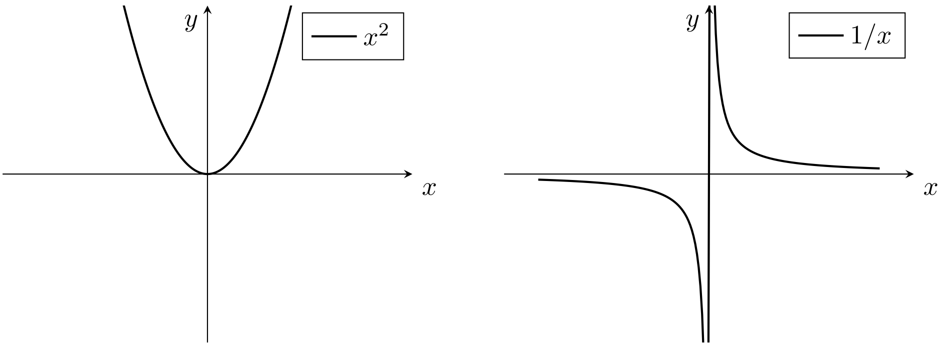


Figura 2.7: Grafici delle funzioni $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x$

Osservazione 2.4. Non è necessario che l'espressione che definisce la funzione sia la stessa su tutto il dominio. Ad esempio, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ x^2, & x \geq 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

agisce nel modo seguente: cambia segno a tutti i numeri più piccoli di -1, trasforma nella costante 1 tutti i numeri dell'intervallo $(-1, 1)$ e trasforma nel loro quadrato i numeri più grandi di 1 (si veda il grafico in Figura 2.8). $\triangleleft$

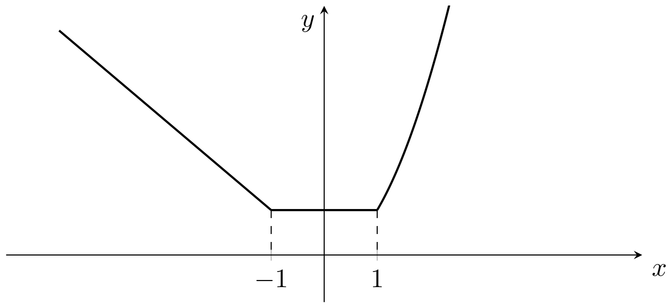


Figura 2.8: Funzione definita in (2.1)

Osservazione 2.5 (Funzione di Dirichlet)**.** Una funzione può essere definita in maniera arbitrariamente stravagante, come ad esempio nel caso $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

È istruttivo provare a farsi un'idea del grafico di questa funzione. ◁

Approfondimento 2.6 (Successioni)**.** Una classe speciale di funzioni reali di variabile reale è quella delle funzioni che hanno come dominio un sottoinsieme dei numeri naturali della forma $D_N = \{n \in \mathbb{N} : \; n \geq N\}$ con $N \in \mathbb{N}$ fissato. Tali funzioni prendono il nome di **successioni numeriche**.

Ad esempio, è una successione numerica la funzione definita su D_3 che a ogni numero naturale $n \geq 3$ associa l'area del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza unitaria.

Tali funzioni svolgono un ruolo importante nell'Analisi Matematica, tanto che dedicheremo loro un capitolo a parte (si veda il Capitolo 5).

Notiamo fin d'ora che per le successioni si adotta una notazione particolare: se $f\colon D_N \to \mathbb{R}$ è una successione e $a_n = f(n)$, denoteremo tale successione con $(a_n)_{n \geq N}$. Se $N = 0$, per cui il dominio è tutto $\mathbb{N}$, oppure se l'indice N di partenza è chiaro dal contesto o ininfluente, spesso scriveremo semplicemente $(a_n)_n$. Ad esempio, $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^+$, definisce la successione $1, 1/2, 1/3, \ldots$, mentre $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, definisce la successione che vale 1 se n è pari e -1 se n è dispari.

Inoltre la rappresentazione grafica di una successione non viene fatta nel piano cartesiano (come nelle Figure 2.9 e 2.10 a destra) ma semplicemente disegnando le immagini a_n sull'asse reale (come nelle Figure 2.9 e 2.10 a sinistra). ◁

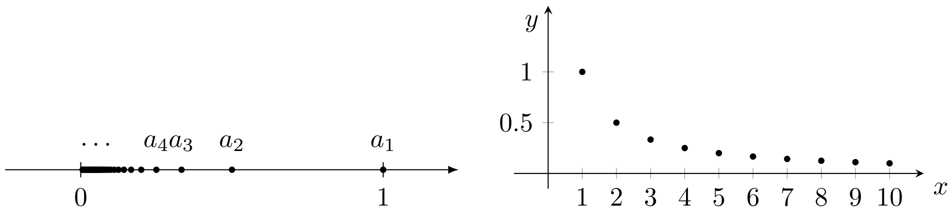


Figura 2.9: La successione $a_n = 1/n$

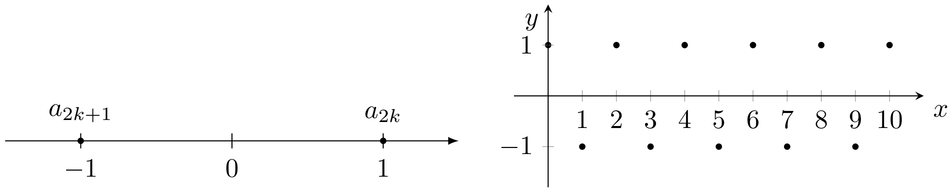


Figura 2.10: La successione $a_n = (-1)^n$

2.2 Operazioni tra funzioni e composizione

A partire dalle operazioni di addizione e moltiplicazione definite in $\mathbb{R}$ è possibile introdurre analoghe operazioni tra funzioni.

Operazioni tra funzioni

somma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$;

prodotto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
$\mathrm{Dom}(fg) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$;

rapporto: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$,
$\mathrm{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathrm{Dom}(f) \cap \{x \in \mathrm{Dom}(g);\ g(x) \neq 0\}$.

Un'altra operazione molto importante tra funzioni è la composizione.

Definizione 2.7 ➯ Funzione composta

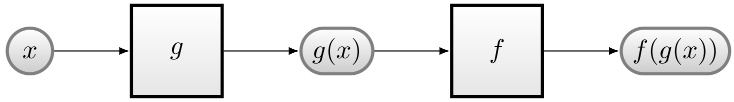
*Siano date due funzioni $f\colon Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La **funzione composta** $f \circ g$ è definita da $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ e ha dominio*

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) :\ g(x) \in Dom(f)\}.$$

Quindi la composizione trasforma attraverso la legge di f i valori $g(x)$ nell'immagine di g. Notiamo che questa operazione è possibile solo per quelle x che verificano simultaneamente le due condizioni

$x \in \mathrm{Dom}(g)$, affinché sia ben definita $g(x)$;
$g(x) \in \mathrm{Dom}(f)$, affinché sia ben definita $f(g(x))$.

La quantità su cui agisce una funzione prende il nome di **argomento** della funzione. Scrivere $f(x)$ vuol dire che f applica la sua legge al valore x (ad esempio $f(x) = x^2$ fa il quadrato di x); scrivere $f(g(x))$ vuol dire che l'azione di f si compie sulla quantità $g(x)$. Ad esempio, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$, allora $(f \circ g)(x)$ farà il quadrato di $2x + 1$, cioè $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$.



2.3 Funzioni limitate, funzioni monotone

In questo e nel prossimo paragrafo verranno introdotte alcune proprietà di interesse che possono essere soddisfatte dalle funzioni in modo da fissare un linguaggio sintetico che utilizzeremo nel seguito.

Iniziamo considerando le proprietà di limitatezza dell'immagine di una funzione.

Definizione 2.8 ➩ Funzione limitata

Una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice ***limitata*** *se esiste $M > 0$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$.*

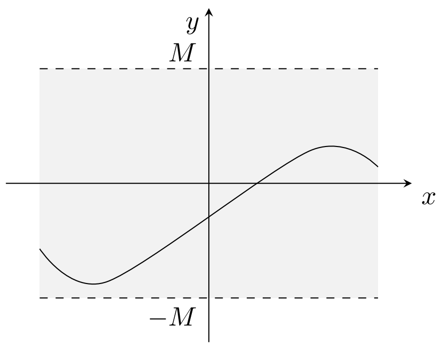


Figura 2.11: Funzione limitata

Quindi una funzione è limitata se la sua immagine $\mathrm{Im}(f)$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Graficamente, questo vuol dire che il grafico di una funzione limitata è contenuto in una striscia orizzontale del piano (si veda la Figura 2.11).

Esempio 2.9. La funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ è limitata in $\mathbb{R}$ (si veda il grafico in Figura 2.12). Infatti è un rapporto, con numeratore non negativo strettamente più piccolo del denominatore, quindi $0 \le f(x) < 1$ e si può scegliere $M = 1$ nella definizione di limitatezza. $\triangleleft$

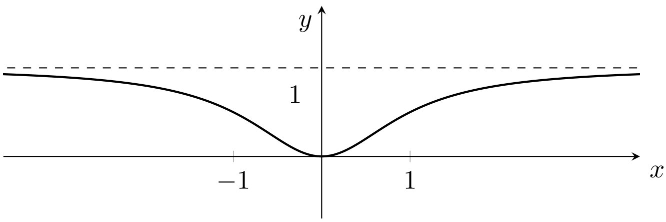


Figura 2.12: Grafico di $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Può succedere che $\mathrm{Im}(f)$ sia limitata solo superiormente o inferiormente.

Definizione 2.10 ➩ Funzione limitata superiormente

*Una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **limitata superiormente** se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \le M$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$.*
*Analogamente f si dice **limitata inferiormente** se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \le f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$.*

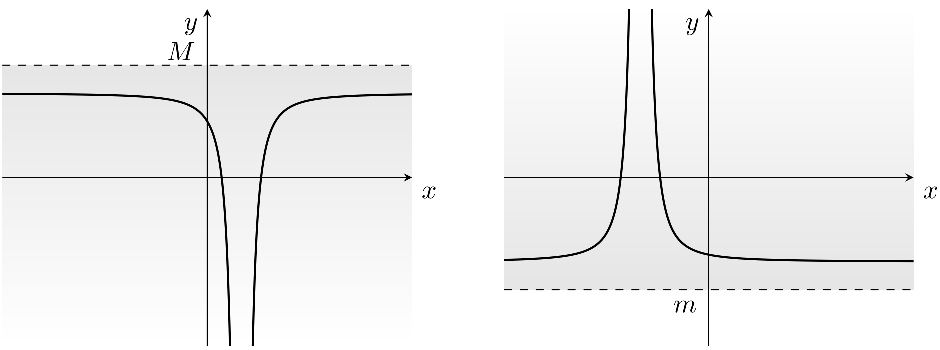


Figura 2.13: Funzione limitata superiormente o inferiormente

Il grafico di una funzione limitata superiormente è contenuto nel semipiano al di sotto della retta $y = M$ e, analogamente, il grafico di una funzione limitata inferiormente è contenuto nel semipiano al di sopra della retta $y = m$.

Osservazione 2.11. Una funzione non è limitata superiormente (e, in tal caso, diremo anche che è *illimitata superiormente*), se

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x_M \in \mathrm{Dom}(f)\colon\ f(x_M) > M.$$

Analogamente, una funzione non è limitata inferiormente (e, in tal caso, diremo anche che è *illimitata inferiormente*), se

$$\forall m \in \mathbb{R}\ \exists x_m \in \mathrm{Dom}(f)\colon\ f(x_m) < m.$$

Se una funzione non è limitata, diremo che è illimitata. ◁

Esempio 2.12. La funzione $f(x) = x^2$, definita in $\mathbb{R}$, è limitata inferiormente da $m = 0$ (o da qualsiasi altro $m \leq 0$), ma non è limitata superiormente. La funzione $f(x) = -1/x^2$, definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, è limitata superiormente da $M = 0$ (o da qualsiasi altro $M \geq 0$), ma non è limitata inferiormente. ◁

Un'altra proprietà di base, fondamentale per la descrizione qualitativa di una funzione, è la proprietà di monotonia.

Definizione 2.13 ➫ Funzioni monotone

Sia $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $E \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Diremo che f è:

- ***crescente*** *in E se $f(x_1) \leq f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$;*
- ***strettamente crescente*** *in E se $f(x_1) < f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$;*
- ***decrescente*** *in E se $f(x_1) \geq f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$;*
- ***strettamente decrescente*** *in E se $f(x_1) > f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$.*

*Si dirà che una funzione è **monotona** (risp. **strettamente monotona**) se è crescente o decrescente (risp. strettamente crescente o strettamente decrescente).*

Esempio 2.14. Le funzioni x, $x + 1$, $2x$ sono strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$, mentre la funzione x^2 è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty)$. La funzione $1/x$ è strettamente decrescente sia sulla semiretta $(-\infty, 0)$ che sulla semiretta $(0, +\infty)$, ma non è decrescente su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. La funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 2 - x, & x \geq 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

e rappresentata in Figura 2.14 a sinistra, è decrescente in $\mathbb{R}$, ma non strettamente decrescente (perché resta costante nell'intervallo $[-1, 1]$). ◁

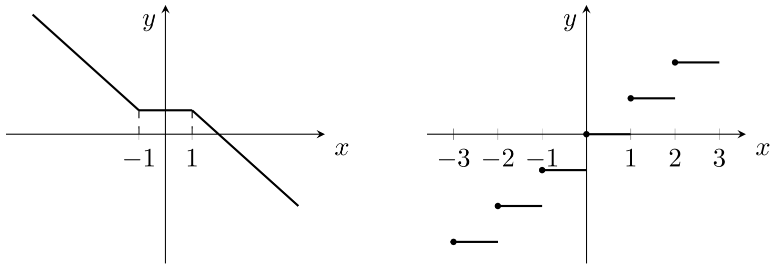


Figura 2.14: La funzione definita in (2.2) e la funzione parte intera

Esempio 2.15 (Parte intera)**.** Definiamo la funzione $[x]$ (**parte intera** di x) come quella funzione che associa a ogni numero reale x il più grande numero intero minore o uguale a x (per capire, se si scrive $x > 0$ come allineamento decimale, la parte intera di x è il numero che compare prima della virgola). Il grafico di $f(x) = [x]$ è disegnato in Figura 2.14 a destra. Questa funzione è crescente, ma non strettamente crescente. ◁

Utilizzando direttamente le definizioni si può verificare il seguente risultato sulla composizione delle funzioni monotone.

Teorema 2.16 ➫ Composizione di funzioni monotone

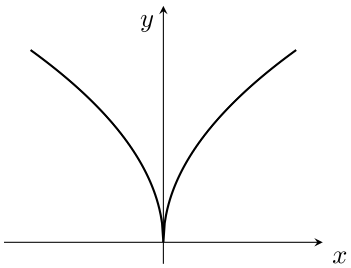
Date due funzioni monotone f e g, allora la loro composizione $f \circ g$ è monotona. Più precisamente, se f e g sono entrambe crescenti o entrambe decrescenti, allora $f \circ g$ è crescente, mentre in tutti gli altri casi $f \circ g$ è decrescente.

2.4 Funzioni pari, dispari, periodiche

Nella descrizione di una funzione reale, la presenza di simmetrie può semplificare molto il lavoro. Le due principali simmetrie sono le seguenti.

Definizione 2.17 ➫ Funzione pari o dispari

Una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice ***pari*** *se per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ anche $-x$ appartiene a $\mathrm{Dom}(f)$ e $f(-x) = f(x)$.*
Analogamente, f si dice ***dispari*** *se per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ anche $-x$ appartiene a $\mathrm{Dom}(f)$ e $f(-x) = -f(x)$.*



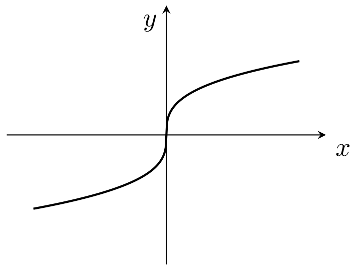


Figura 2.15: Funzione pari (sinistra) e funzione dispari (destra)

Il dominio di una funzione pari o dispari deve essere un sottoinsieme dell'asse delle x simmetrico rispetto all'origine. Inoltre, il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle y, mentre il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine degli assi (si veda la Figura 2.15). Quindi il comportamento di una funzione pari o dispari è completamente determinato una volta che lo si è descritto nella parte del dominio contenuta nel semiasse delle ascisse positive.

Chiaramente $f(x) = x$ è una funzione dispari, mentre $f(x) = x^2$ è una funzione pari.

Alcune funzioni reali definite in tutto $\mathbb{R}$ sono completamente descritte dal loro comportamento su un intervallo limitato.

Definizione 2.18 ➩ Funzione periodica

*Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **periodica** se esiste $t > 0$ tale che*

$$f(x) = f(x+t) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.3}$$

*Ogni $t > 0$ che verifica (2.3) prende il nome di **periodo** di f.*
Se l'insieme di tutti i periodi ammette un elemento minimo T, allora f si dice periodica di periodo T.

Osservazione 2.19. Non è detto che l'insieme di tutti i periodi ammetta un elemento minimo. Un esempio elementare è dato dalle funzioni costanti, per le quali ogni $t > 0$ è un periodo. Un esempio meno ovvio è dato dalla funzione di Dirichlet introdotta nell'Osservazione 2.5, che ammette come periodo ogni $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$ (la verifica di questa affermazione è lasciata al lettore). ◁

Esempio 2.20 (Mantissa)**.** La funzione $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$, dove $[x]$ è la parte intera di x definita nell'Esempio 2.15, prende il nome di *mantissa*. Questa funzione è periodica e ogni $n \in \mathbb{N}^+$ è un periodo per f. Quindi $f(x)$ è periodica di periodo $T = 1$ e il suo grafico è disegnato in Figura 2.16. ◁

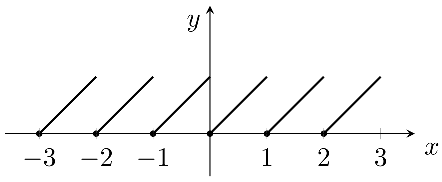


Figura 2.16: Mantissa di x

Altri esempi di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche che verranno richiamate nel Paragrafo 2.8.7.

Il grafico delle funzioni periodiche si può ottenere a partire dal grafico su un intervallo di lunghezza pari al periodo, replicato infinite volte a destra e a sinistra.

2.5 Iniettività, suriettività, funzioni invertibili

Data una funzione $f\colon A \to B$, per definizione ogni elemento dell'insieme A individua univocamente un elemento dell'insieme B. Ci domandiamo ora quando l'azione della funzione sia reversibile: **per ogni** $b \in B$ vogliamo poter individuare **un unico** $a \in A$ di cui b è l'immagine tramite la funzione f. Innanzi tutto introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione 2.21 ➫ Iniettività e suriettività

Una funzione $f\colon A \to B$ si dice:

- ***iniettiva***, *se elementi diversi di A hanno immagini diverse, cioè se $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, implica $f(a_1) \neq f(a_2)$ (o, equivalentemente, se $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$);*
- ***suriettiva***, *se $\mathrm{Im}(f) = B$;*
- ***biiettiva*** *(o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.*

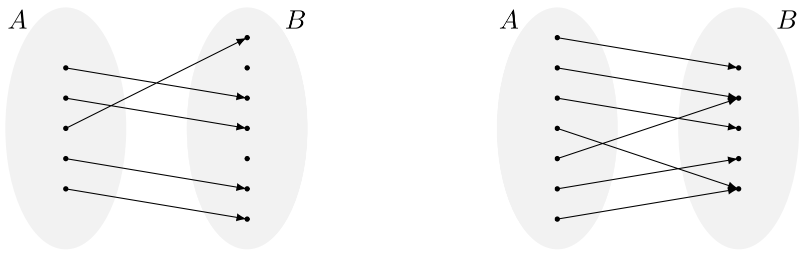


Figura 2.17: Funzione solo iniettiva e funzione solo suriettiva

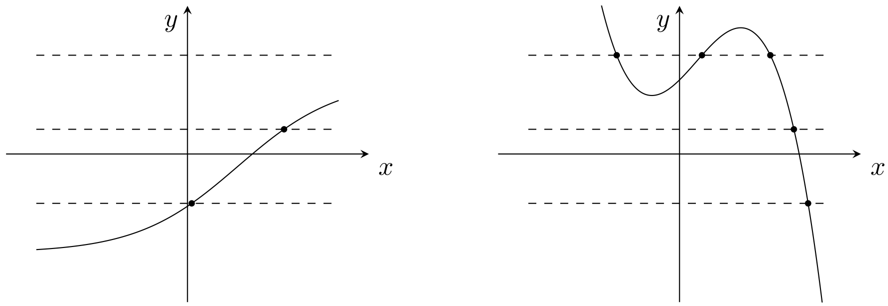


Figura 2.18: Funzione iniettiva (a sinistra) e funzione suriettiva (a destra)

Graficamente, una funzione reale di variabile reale è iniettiva se ogni retta parallela all'asse delle x interseca il grafico al più in un punto (ed esattamente in un punto se $y = y_0 \in \operatorname{Im}(f)$), mentre è suriettiva se ogni retta parallela all'asse delle x di equazione $y = y_0 \in B$ interseca il grafico almeno in un punto (si veda la Figura 2.18). Ovviamente una funzione reale di variabile reale limitata (anche solo superiormente o inferiormente) non può essere suriettiva su tutto $\mathbb{R}$ (ad esempio, se f è limitata, si ha che $\operatorname{Im}(f) \subseteq [-M, M]$ per un opportuno $M > 0$).

Osservazione 2.22. Sottolineiamo esplicitamente che l'iniettività e la suriettività dipendono, a parità di legge f, dal dominio e dal codominio della funzione: la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, non è iniettiva (è pari) e non è suriettiva (mostreremo nell'Approfondimento 4.27 che l'immagine è la semiretta chiusa $[0, +\infty)$), la funzione $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$, è suriettiva ma non iniettiva, la funzione $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, è iniettiva (in quanto strettamente crescente: se $0 \le x_1 < x_2$, allora $x_1^2 = x_1 x_1 < x_1 x_2 < x_2^2$) ma non è suriettiva, mentre la funzione $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$, è biiettiva. $\triangleleft$

Operativamente, la verifica dell'iniettività può essere fatta nel modo seguente: si impone che $f(x_1) = f(x_2)$ e si vede se questa condizione implica o meno che debba necessariamente essere $x_1 = x_2$.

Esempio 2.23. La funzione $f(x) = x + 1$ è iniettiva in $\mathbb{R}$. Infatti, se $x_1 + 1 = x_2 + 1$, semplificando si ottiene che deve essere $x_1 = x_2$.

La funzione $f(x) = x/(x^2 + 1)$ non è iniettiva in $\mathbb{R}$. Infatti, se $f(x_1) = f(x_2)$, eseguendo le seguenti semplificazioni algebriche,

$$x_1(x_2^2 + 1) = x_2(x_1^2 + 1) \iff x_1 x_2^2 + x_1 - x_2 x_1^2 - x_2 = 0 \iff$$
$$\iff (x_1 x_2 - 1)x_2 - x_1(x_1 x_2 - 1) = 0 \iff (x_1 x_2 - 1)(x_1 - x_2) = 0\,,$$

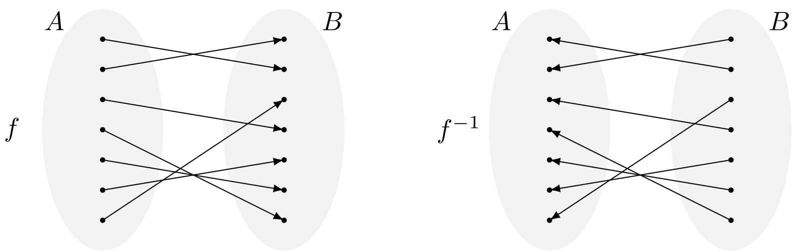
si ottiene che $f(x_1)$ è uguale a $f(x_2)$ in due casi: quando $x_1 = x_2$ oppure quando $x_1 x_2 = 1$ (ad esempio $f(2) = f(1/2) = 2/5$). Quindi la funzione considerata non è iniettiva. $\lhd$

Se una funzione è biiettiva, è possibile invertirne l'azione nel senso seguente.

Definizione 2.24 ➾ Funzione invertibile e funzione inversa

*Una funzione $f\colon A \to B$ biiettiva è **invertibile**, ossia è ben definita la **funzione inversa** di f, indicata con $f^{-1}\colon B \to A$, data dalla relazione*

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y\,, \qquad \forall x \in A,\ y \in B$$



Osservazione 2.25. A ogni funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ iniettiva si può naturalmente associare, semplicemente cambiando il codominio, la funzione biiettiva $\tilde{f}\colon \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Per questo, con un abuso di linguaggio, nel seguito chiameremo invertibili le funzioni iniettive nel loro dominio e la loro funzione inversa sarà definita su $\mathrm{Im}(f)$ a valori in $\mathrm{Dom}(f)$. $\lhd$

La definizione stessa di funzione inversa equivale alle seguenti identità (si veda la Figura 2.19):

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)\,, \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in \mathrm{Im}(f) \tag{2.4}$$

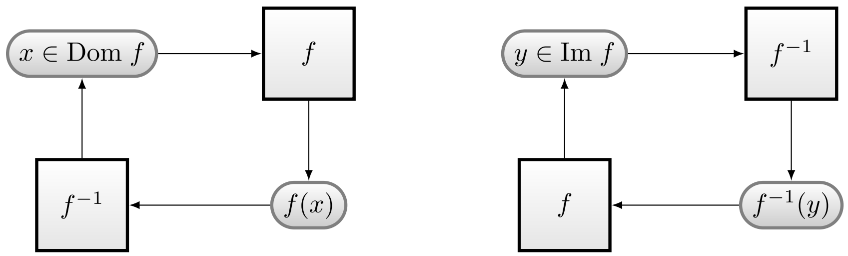


Figura 2.19: Composizione tra f ed f^{-1}

La (2.4) può essere interpretata graficamente nel modo seguente: la coppia (x, y) appartiene al grafico di f se e solo se la coppia (y, x) appartiene al grafico di f^{-1}. Quindi il grafico della funzione inversa $\Gamma(f^{-1})$ è il simmetrico di $\Gamma(f)$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (si veda Figura 2.20).

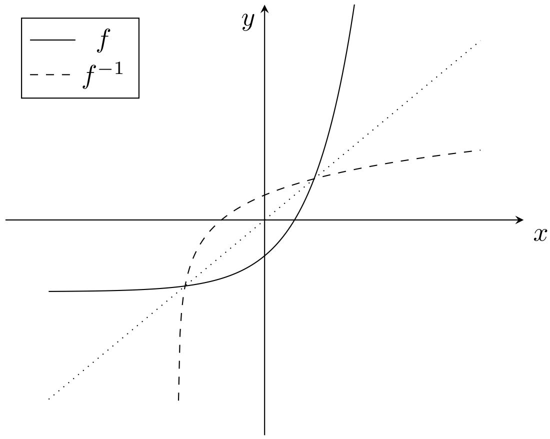


Figura 2.20: Grafico della funzione inversa

Osservazione 2.26. La caratterizzazione del grafico di f^{-1} a partire da quello della funzione f mostra, in particolare, che se f è monotona anche la sua inversa gode della stessa proprietà di monotonia, ossia se f è crescente (rispettivamente decrescente), anche f^{-1} è crescente (rispettivamente decrescente). $\triangleleft$

Esempio 2.27. Sia $f(x) = 2x - 7$. Tale funzione è iniettiva su $\mathbb{R}$ (verificare!) e ha come immagine tutto $\mathbb{R}$. Quindi è invertibile su $\mathbb{R}$ e la sua inversa si ottiene nel modo seguente: imponiamo che $y = 2x - 7$ (y è l'immagine di x tramite f) ed esplicitiamo x; otteniamo che $x = \frac{y+7}{2}$. Da questo deduciamo che $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2}$.

Facciamo notare che l'espressione ottenuta direbbe che $f^{-1}(y) = \frac{y+7}{2}$, ossia che f^{-1} trasforma y in $\frac{y+7}{2}$. Dire che f^{-1} trasforma x in $\frac{x+7}{2}$ è esattamente la stessa cosa (cambia solo il nome dell'argomento), con il vantaggio di usare x come variabile indipendente, come si è soliti fare.

Per verificare che l'espressione ottenuta sia effettivamente la legge dell'inversa, basta verificare che valgano le identità (2.4). Infatti si ha

$$f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{x+7}{2}\right) - 7 = x\,, \qquad f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x-7)+7}{2} = x\,.$$

Concludiamo l'esempio sottolineando che, in generale, $f^{-1}(x)$ non ha niente a che fare con $\frac{1}{f(x)}$ (errore tipico dovuto alla notazione f^{-1}). $\triangleleft$

Approfondimento 2.28 (Radici quadrate e cubiche)**.** Abbiamo già notato che la funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$, ma lo diventa se si restringe il dominio a $[0, +\infty)$. Quindi si può introdurre la funzione inversa della restrizione di x^2 a $[0, +\infty)$, che prende il nome di **radice quadrata** di x (e si denota con $\sqrt{x}$ oppure con $x^{1/2}$). Se assumiamo per vero che l'immagine di f è la semiretta chiusa $[0, +\infty)$ (cosa che sarà dimostrata rigorosamente nell'Approfondimento 4.27), abbiamo che la radice quadrata ha come insieme di definizione $[0, +\infty)$ (immagine di f) e come immagine sempre $[0, +\infty)$ (dominio di f).

Facciamo notare che, per definizione di funzione inversa, si ha $\sqrt{x^2} = x$ solo per $x \geq 0$. In generale si ha

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Il grafico di $\sqrt{x}$ si ottiene a partire dal grafico di x^2, $x \geq 0$, disegnando la curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (si veda la Figura 2.21 a sinistra). Guardando il grafico si deduce che $\sqrt{x}$ è limitata inferiormente, ma non superiormente, ed è strettamente monotona crescente in tutto il suo dominio.

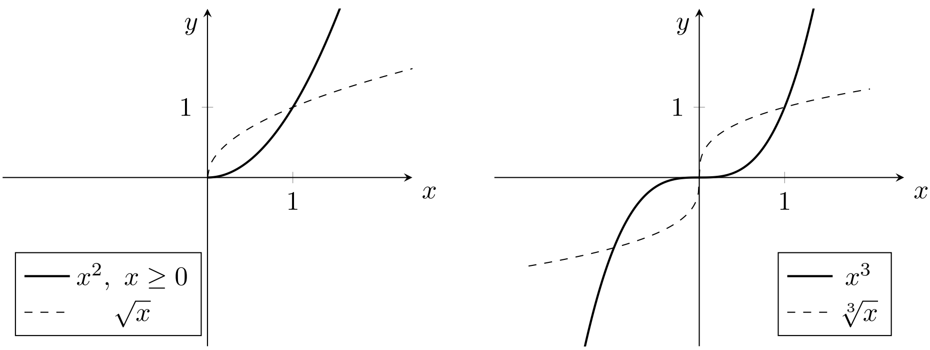


Figura 2.21: Radice quadrata e radice cubica

Consideriamo ora la funzione $f(x) = x^3$. Tale funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è dispari ($(-x)^3 = -x^3$). Mostriamo che $f(x) = x^3$ è una funzione strettamente crescente, dunque iniettiva, su tutto $\mathbb{R}$. Distinguiamo tre casi:
1) $0 \leq x_1 < x_2$: allora $x_1^3 = x_1^2 x_1 < x_2^2 x_2$ perché x^2 è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e $x_1 < x_2$ per ipotesi;
2) $x_1 < x_2 \leq 0$: poiché x^2 è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$, si ha $x_1^2 > x_2^2$. Moltiplicando ambo i membri per $x_1 < 0$ cambia il verso della disequazione e si ha $x_1^3 < x_2^2 x_1 < x_2^3$;

3) $x_1 < 0 < x_2$: in questo caso la disuguaglianza $x_1^3 < x_2^3$ è sicuramente verificata perché il termine di sinistra è negativo mentre quello a destra è positivo.

La funzione $f(x) = x^3$ è quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$ e ha $\mathrm{Im}(x^3) = \mathbb{R}$ (per la dimostrazione si veda l'Approfondimento 4.27). La sua funzione inversa, la **radice cubica** di x, denotata con $\sqrt[3]{x}$ o con $x^{1/3}$, è definita su tutto $\mathbb{R}$ (ossia si può calcolare la radice cubica di ogni numero reale). Guardando il grafico di $\sqrt[3]{x}$, ottenuto come sempre a partire dal grafico di x^3 disegnando la curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si deduce che $\sqrt[3]{x}$ non è limitata né superiormente né inferiormente ed è strettamente monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$ (si veda la Figura 2.21 a destra). $\triangleleft$

2.6 Equazioni e disequazioni

Una delle più rilevanti difficoltà tecniche nello studio di una funzione reale di variabile reale è quella di risolvere equazioni o disequazioni in una variabile. Proponiamo in questo paragrafo una panoramica generale del problema, mentre le tecniche di risoluzione di specifiche equazioni e disequazioni saranno descritte nel Paragrafo 2.8.

Definizione 2.29 ➯ Insieme di livello

*Data una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un numero $c \in \mathbb{R}$, l'**insieme di livello** $\{f = c\}$ è definito come*

$$\{f = c\} := \{x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tali che } f(x) = c\}\,.$$

Gli elementi di $\{f = c\}$ sono le **soluzioni dell'equazione** $f(x) = c$. L'insieme di livello corrispondente a $c = 0$ prende il nome di **insieme degli zeri** della funzione f.

Ad esempio, se $f(x) = x+1$ e $c = 2$, $\{f = 2\} = \{1\}$, se $f(x) = x^2$ e $c = 16$, $\{f = 16\} = \{-4, 4\}$, se $f(x) = x^2$ e $c = -1$, $\{f = -1\} = \emptyset$.

Definizione 2.30 ➯ Sottolivello (sopralivello)

*Data una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un numero $c \in \mathbb{R}$, il **sottolivello** di f corrispondente a c è definito come*

$$\{f < c\} := \{x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tali che } f(x) < c\}\,.$$

*Analogamente, il **sopralivello** di f corrispondente a c è definito da*

$$\{f > c\} := \{x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tali che } f(x) > c\}\,.$$

Gli elementi di $\{f < c\}$ prendono il nome di **soluzioni della disequazione** $f(x) < c$, mentre gli elementi di $\{f > c\}$ sono le soluzioni della disequazione $f(x) > c$. Il sottolivello $\{f < 0\}$ prende il nome di **insieme di negatività**, mentre $\{f > 0\}$ è l'**insieme di positività** di f.

Ad esempio, se $f(x) = x + 1$ e $c = 2$, $\{f < 2\} = (-\infty, 1)$, se $f(x) = x^2$ e $c = 16$, $\{f < 16\} = (-4, 4)$, se $f(x) = x^2$ e $c = -1$, $\{f < -1\} = \emptyset$. Analogamente, se f è la funzione di Dirichlet definita nell'Osservazione 2.5, avremo che $\{f < 1/2\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{f > -1\} = \mathbb{R}$, $\{f = 1\} = \mathbb{Q}$.

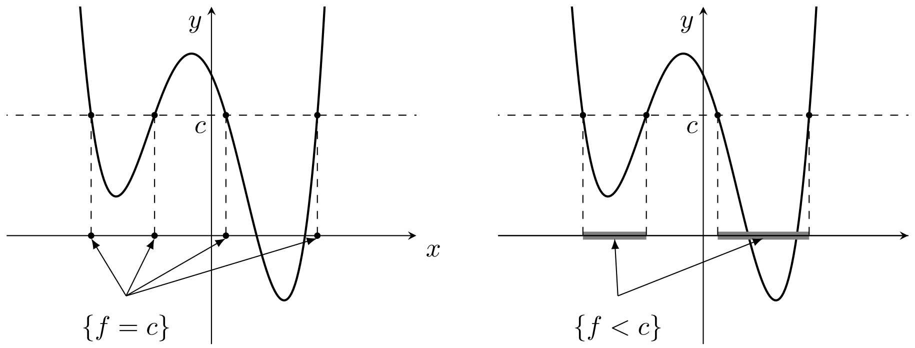


Figura 2.22: Insieme di livello e sottolivello

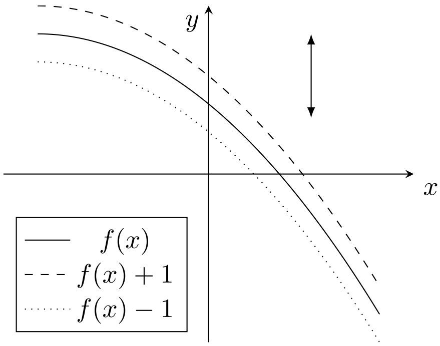
Graficamente l'insieme di livello $\{f = c\}$ è il sottoinsieme dell'asse delle x costituito dalle ascisse dei punti di intersezione tra il grafico di f e la retta $y = c$ (si veda la Figura 2.22 a sinistra). L'insieme degli zeri di f corrisponde alle ascisse dei punti in cui il grafico di f interseca l'asse delle x.

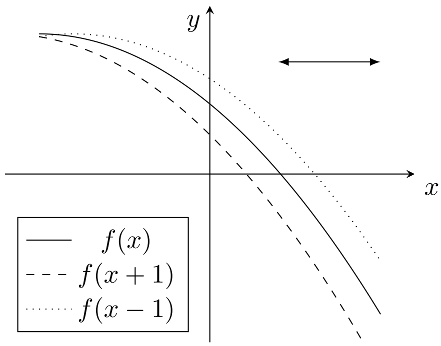
Analogamente, il sottolivello $\{f < c\}$ è il sottoinsieme dell'asse delle x costituito dalle ascisse dei punti del grafico di f che si trovano al di sotto della retta $y = c$ (si veda la Figura 2.22 a destra). L'insieme di negatività di f corrisponde alle ascisse dei punti del grafico di f che si trovano al di sotto dell'asse delle x.

2.7 Traslazioni e dilatazioni

Abbiamo visto come, a partire dal grafico di una funzione invertibile, sia possibile disegnare il grafico della funzione inversa con un semplice argomento di simmetria. Sempre argomenti di simmetria permettono di disegnare il grafico su tutto $\mathbb{R}$ di una funzione pari o dispari conoscendolo solo su $[0, +\infty)$. Vediamo altri casi in cui il grafico di una funzione si ottiene direttamente a partire dal grafico di un'altra funzione nota.

Traslazioni: Assegnata una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un numero $h \neq 0$, la funzione





Traslazione rispetto a y di f

$$g(x) = f(x) + h, \qquad \mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(f),$$

ha come grafico la traslazione del grafico di f lungo l'asse y della quantità h, quindi verso l'alto se $h > 0$ o verso il basso se $h < 0$.
Se invece si considera la funzione

Traslazione rispetto a x di f

$$g(x) = f(x + h), \qquad \mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R};\ x + h \in \mathrm{Dom}(f)\},$$

il suo grafico si ottiene a partire dal grafico di f traslandolo lungo l'asse x della quantità $-h$, ovvero verso sinistra se $h > 0$ o verso destra se $h < 0$.

Dilatazioni: Assegnata una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un numero $\alpha \neq 0$, la funzione

Dilatazione rispetto a y di f

$$g(x) = \alpha f(x), \qquad \mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(f),$$

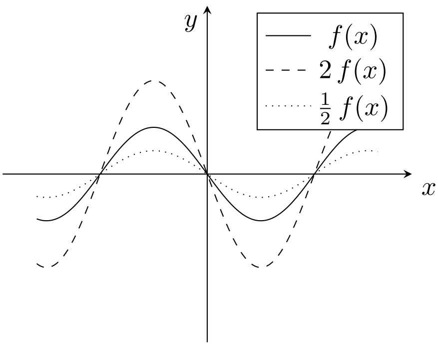
ha gli stessi zeri di $f(x)$. Se $\alpha > 0$, in tutti gli altri punti il grafico si alza (se $\alpha > 1$) o si schiaccia (se $0 < \alpha < 1$). Se $\alpha = -1$, si ottiene la funzione $-f(x)$ che ha il grafico simmetrico a quello di f rispetto all'asse delle x.

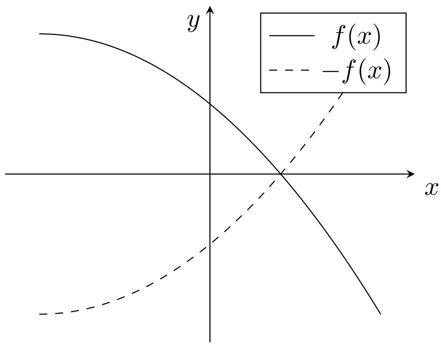
Per disegnare il grafico di $\alpha f(x)$ quando $\alpha < 0$ basta disegnare il grafico di $-\alpha f(x)$ (in questo caso $-\alpha > 0$) e poi passare al simmetrico rispetto all'asse delle x.

Assegnata una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un numero $\alpha > 0$, la funzione

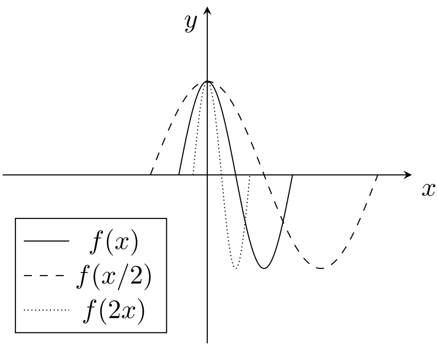
Dilatazione rispetto a x di f

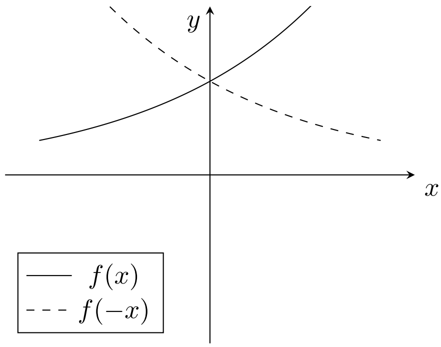
$$g(x) = f(\alpha x), \qquad \mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R};\ \alpha x \in \mathrm{Dom}(f)\},$$





ha gli stessi valori massimi e minimi di f, ma il suo grafico è dilatato (se $0 < \alpha < 1$) oppure compresso (se $\alpha > 1$) lungo l'asse x rispetto a quello di f (con dilatazione o compressione anche del dominio). Se $\alpha = -1$ si ottiene la funzione $f(-x)$ il cui grafico è il simmetrico di quello di f rispetto all'asse delle y.





Per disegnare il grafico di $f(\alpha x)$ quando $\alpha < 0$ basta disegnare il grafico di $f(-\alpha x)$ (in questo caso $-\alpha > 0$) e poi passare al simmetrico rispetto all'asse delle y.

2.8 Le funzioni elementari

In questo paragrafo verranno descritte in dettaglio le proprietà delle cosiddette **funzioni di base**, cioè quelle funzioni che dovrebbero già essere note allo studente e di cui si assumerà in seguito una conoscenza disinvolta. In realtà la dimostrazione di molte delle proprietà che enunceremo richiede strumenti più avanzati, che verranno esposti nei capitoli successivi. Verranno anche rapidamente richiamati i metodi di risoluzione delle principali equazioni o disequazioni associate a funzioni di base.

Nel seguito chiameremo **funzioni elementari** quelle ottenute attraverso varie operazioni (somma, prodotto, rapporto, composizione) a partire dalle funzioni di base.

2.8.1 Funzioni affini

Le funzioni affini sono polinomi di primo grado nella variabile x, ossia hanno la forma

Funzione affine

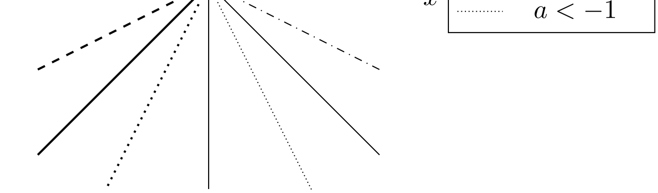
$$f(x) = ax + b, \qquad x \in \mathbb{R} \quad (a,\ b \in \mathbb{R}).$$

Abbiamo già visto, nell'Approfondimento 1.28 a pag. 26, che il grafico di una funzione affine è una retta; in particolare, il parametro a rappresenta il coefficiente angolare della retta, mentre il parametro b è la sua ordinata all'origine. Vogliamo arrivare alla medesima descrizione qualitativa utilizzando gli strumenti presentati nel paragrafo precedente (traslazioni, dilatazioni, etc.).

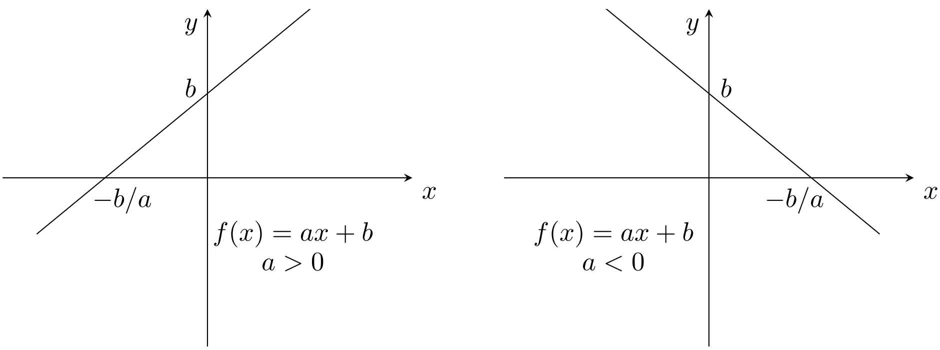
Se $a = 0$, otteniamo la funzione costante $f(x) = b$ che ha come grafico la retta parallela all'asse delle x che interseca l'asse delle y a quota $y = b$. Ovviamente la funzione costante non è né iniettiva né suriettiva.

Se $a \neq 0$, la funzione diventa sia iniettiva (se $ax_1 + b = ax_2 + b$ e $a \neq 0$, semplificando si ottiene $x_1 = x_2$) che suriettiva su $\mathbb{R}$ (per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = ax_0 + b$ dove $x_0 = \frac{y_0 - b}{a}$; questo ci dice anche che la funzione inversa della funzione affine $f(x) = ax + b$ è la funzione affine $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$).

Per disegnare il grafico di una funzione affine, partiamo dal grafico della funzione $f(x) = x$ che, come sappiamo, è la retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Come primo passo, consideriamo la funzione $f(x) = ax$, $a \neq 0$.



Per quello che abbiamo detto nel paragrafo precedente sulle dilatazioni di una funzione, il grafico di questa funzione è sempre una retta passante per l'origine. Se $0 < a < 1$ la retta avrà una pendenza minore rispetto a quella della bisettrice, se $a > 1$ la retta avrà una pendenza maggiore di quella della bisettrice. In ogni caso, se $a > 0$ la funzione è strettamente crescente. Quando $a < 0$, il grafico della funzione $f(x) = ax$ è la retta simmetrica rispetto all'asse delle x della retta grafico di $f(x) = -ax$ (che ha coefficiente positivo). In questo caso la funzione affine è strettamente decrescente. In particolare la funzione $f(x) = -x$ ha come grafico la bisettrice del secondo e quarto quadrante. Sottolineiamo che la funzione $f(x) = ax$, $a \neq 0$, ha un solo zero $x = 0$, e ha insieme di positività $(0, +\infty)$ se $a > 0$ e $(-\infty, 0)$ se $a < 0$. Più in generale il sopralivello a quota c è dato da $\{ax > c\} = (c/a, +\infty)$ se $a > 0$ e $(-\infty, c/a)$ se $a < 0$.



Il secondo passo è osservare che il grafico della funzione $f(x) = ax + b$ non è altro che una traslazione di b sull'asse delle y della funzione $f(x) = ax$. La funzione $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, ha un solo zero $x = -b/a$, e ha insieme di positività $(-b/a, +\infty)$ se $a > 0$ e $(-\infty, -b/a)$ se $a < 0$. Detto in termini di disequazioni, vale la seguente proprietà.

Disequazioni di primo grado

La disequazione $ax + b > 0$ ha soluzione

$$\begin{cases} (-b/a, +\infty) & \text{se } a > 0, \\ (-\infty, -b/a) & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Più in generale il sopralivello a quota c è dato da $\{ax + b > c\} = (\frac{c-b}{a}, +\infty)$ se $a > 0$ e $(-\infty, \frac{c-b}{a})$ se $a < 0$.

Esempio 2.31. Risolviamo la disequazione

$$2 - 3x \leq 0\,,$$

cioè troviamo le $x \in \mathbb{R}$ che rendono negativa o nulla la quantità $2 - 3x$. Partiamo dalla disequazione assegnata

$$2 - 3x \leq 0\,,$$

sottraiamo 2 a entrambi i membri, ottenendo

$$-3x \leq -2\,,$$

e dividiamo entrambi i membri per -3:

$$x \geq 2/3$$

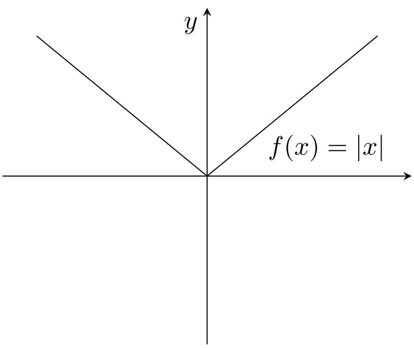
(ricordiamo che se si moltiplica o divide per un numero negativo le disuguaglianze cambiano di verso). L'ultima condizione individua l'insieme $[2/3, +\infty)$ delle soluzioni della disequazione. $\triangleleft$

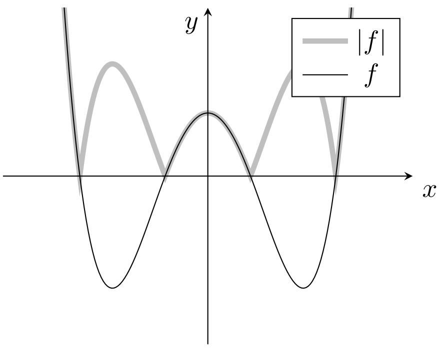
2.8.2 La funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto è definita in $\mathbb{R}$ come

Funzione valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0\,, \\ -x & \text{se } x \leq 0\,. \end{cases}$$





Quindi la funzione $|x|$ lascia invariati tutti i numeri reali positivi e cambia di segno tutti i numeri negativi. Il dominio di $|x|$ è tutto $\mathbb{R}$, la sua immagine è $[0, +\infty)$ e la funzione è pari. Chiaramente, il grafico della funzione $|x|$ coincide con la bisettrice del secondo e quarto quadrante per $x \leq 0$ e con la bisettrice del primo e terzo quadrante per $x > 0$. La funzione risulta quindi strettamente decrescente per $x \leq 0$ e strettamente crescente per $x \geq 0$ e non è né inettiva né suriettiva su $\mathbb{R}$. Inoltre, dalla definizione segue immediatamente che

$$-|x| \leq x \leq |x|, \qquad -|y| \leq y \leq |y|,$$

che sommate danno $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$, cioè vale la seguente

Disuguaglianza triangolare

$$|x+y| \leq |x|+|y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Approfondimento 2.32 (Distanza in $\mathbb{R}$)**.** La funzione $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $d(x,y) = |x-y|$ è una *distanza* in $\mathbb{R}$, in quanto soddisfa le proprietà

(i) [positività e annullamento] $d(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;

(ii) [simmetria] $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) [disuguaglianza triangolare] $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Un insieme su cui è definita una distanza è detto *spazio metrico*. $\triangleleft$

Facciamo notare esplicitamente che il valore assoluto di una funzione $f(x)$ sarà la funzione $|f(x)|$ data da

Valore assoluto di $f(x)$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{per le } x \text{ tali che } f(x) > 0\,, \\ -f(x) & \text{per le } x \text{ tali che } f(x) \leq 0\,, \end{cases}$$

ossia la funzione che coincide con f nell'insieme di positività di f e vale $-f$ sull'insieme di negatività di f. Il grafico di $|f(x)|$ coincide quindi con il grafico di f nell'insieme di positività di f ed è il simmetrico del grafico di f rispetto all'asse delle x sull'insieme di negatività di f.

Ad esempio

$$|2-3x| = \begin{cases} 2-3x & \text{se } x < 2/3\,, \\ 3x-2 & \text{se } x \geq 2/3\,. \end{cases}$$

Esempio 2.33. Per risolvere una disequazione in cui compare un valore assoluto può essere opportuno esplicitare la richiesta ("togliendo" il valore assoluto). Così, la disequazione $2 - |x-1| \leq 0$ si trasforma nella coppia di sistemi

$$\begin{cases} 2-(x-1) \leq 0\,, \\ x-1 > 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2-(-x+1) \leq 0\,, \\ x-1 \leq 0\,, \end{cases}$$

ossia le soluzioni della disequazione di partenza sono l'unione delle soluzioni dei due sistemi (ricordiamo che, invece, le soluzioni di un sistema di disequazioni si ottengono facendo l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna disequazione). Nel nostro caso, i due sistemi semplificati diventano

$$\begin{cases} 3 \leq x\,, \\ x > 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -1\,, \\ x \leq 1\,, \end{cases}$$

che hanno soluzioni $[3, +\infty)$ e $(-\infty, -1]$ rispettivamente. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

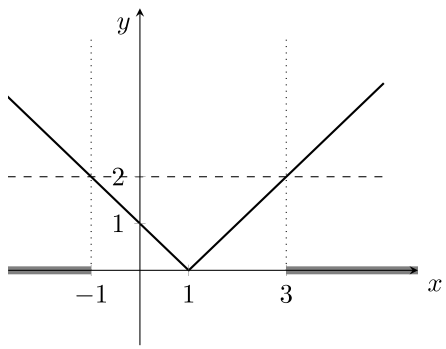


Figura 2.23: Risoluzione grafica della disequazione $|x - 1| \geq 2$

Volendo determinare graficamente le soluzioni della disequazione, basta disegnare nel piano cartesiano il grafico di $f(x) = |x - 1|$, traslazione in x della funzione $|x|$, e determinare sull'asse delle x il sopralivello di $f(x)$ corrispondente al valore $c = 2$ (si veda la Figura 2.23). $\triangleleft$

2.8.3 Polinomi di secondo grado

Il più semplice polinomio di secondo grado è $f(x) = x^2$, che è una funzione pari ($f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$), strettamente crescente per $x \geq 0$ e, in conseguenza della simmetria, strettamente decrescente per $x \leq 0$ (si veda l'Osservazione 2.22).

Il generico polinomio di secondo grado ha la forma

Polinomio di secondo grado

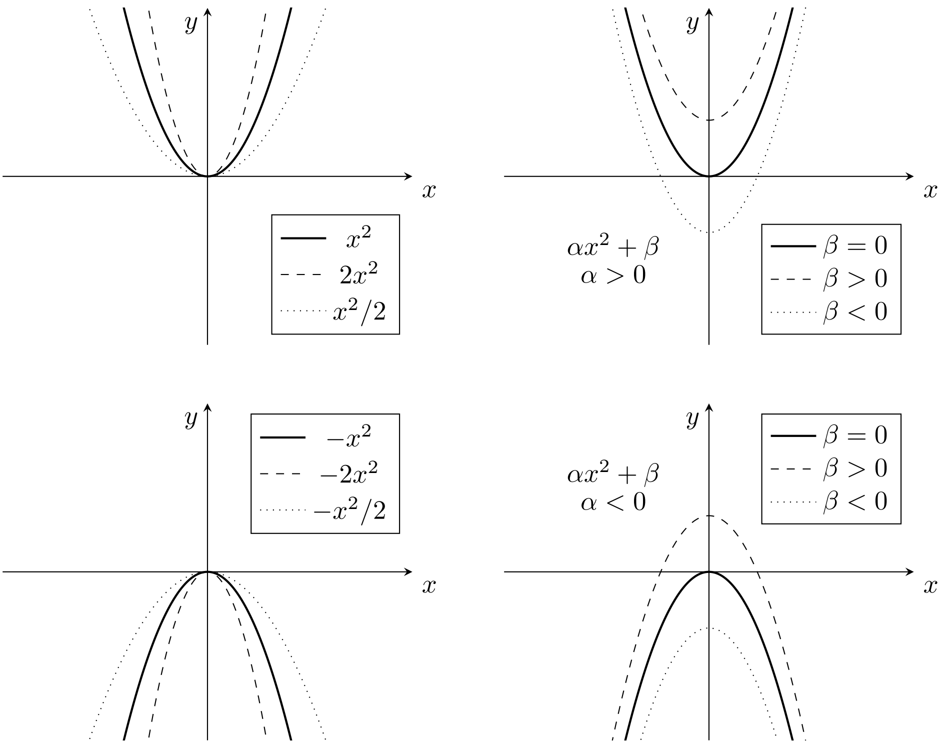
$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0).$$

Per conoscerne il grafico, partiamo dalla funzione $f(x) = x^2$, di cui si assume noto il grafico (si veda la Figura 2.7 a pag. 57). Operando una dilatazione di questa funzione otteniamo la funzione αx^2, $\alpha \neq 0$. Se $\alpha > 0$ tale funzione ha come grafico una parabola con la concavità verso l'alto, più stretta di quella di x^2 se $\alpha > 1$, più larga di quella di x^2 se $0 < \alpha < 1$. Se $\alpha < 0$ il grafico di αx^2 è una parabola con la concavità verso il basso, con grafico simmetrico a quello di $-\alpha x^2$ rispetto all'asse delle x. In ogni caso, αx^2 ha un solo zero $x = 0$ ed è sempre non negativa se $\alpha > 0$, mentre è sempre non positiva se $\alpha < 0$.

Operiamo ora una traslazione in y della funzione αx^2, ottenendo la funzione $\alpha x^2 + \beta$. Otteniamo la seguente situazione:

$$\text{se } \alpha > 0 \quad \begin{cases} \alpha x^2 + \beta \text{ non ha zeri se } \beta > 0, \\ \alpha x^2 + \beta \text{ ha due zeri se } \beta < 0, \end{cases}$$

$$\text{se } \alpha < 0 \quad \begin{cases} \alpha x^2 + \beta \text{ non ha zeri se } \beta < 0, \\ \alpha x^2 + \beta \text{ ha due zeri se } \beta > 0. \end{cases}$$



Inoltre se $\alpha > 0$ l'intervallo che ha come estremi gli zeri è l'insieme di negatività della funzione, mentre se $\alpha < 0$ lo stesso intervallo è l'insieme di positività della funzione.

Infine operiamo una traslazione in x di $\alpha x^2 + \beta$; consideriamo cioè la funzione $\alpha(x+\gamma)^2 + \beta$. Il grafico di questa nuova funzione sarà ottenuto a partire da quello di $\alpha x^2 + \beta$, spostandolo verso destra o sinistra (dipende dal segno di γ). Chiaramente il numero di zeri di $\alpha(x+\gamma)^2 + \beta$ è uguale a quello di $\alpha x^2 + \beta$, e l'insieme di positività resta interno agli zeri (che traslano) per $\alpha < 0$ ed esterno agli zeri per $\alpha > 0$.

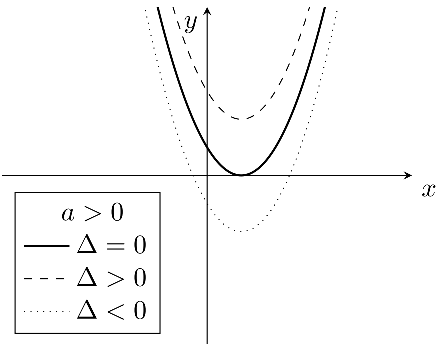
Abbiamo così ottenuto, al variare di α, β e γ, tutte le funzioni che hanno come grafico una parabola con asse parallelo all'asse delle y. Sviluppando il quadrato otteniamo $f(x) = \alpha x^2 + 2\alpha\gamma x + \alpha\gamma^2 + \beta$; se chiamiamo $a = \alpha$, $b = 2\alpha\gamma$ e $c = \alpha\gamma^2 + \beta$, ci accorgiamo di avere considerato tutti i polinomi di secondo grado della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

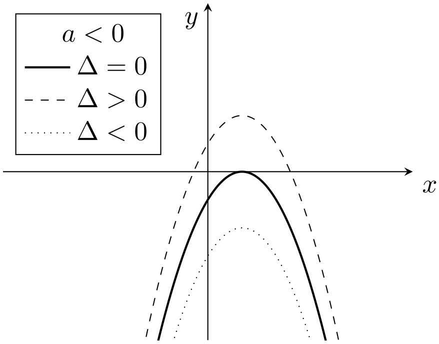
Ricordiamo che $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha due zeri reali e distinti se e solo se il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ è maggiore di 0. Tali zeri si determinano con la seguente formula:

Formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e il polinomio si fattorizza come $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Se $\Delta = 0$, l'unico zero del polinomio è $x_1 = -\frac{b}{2a}$ e $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$. Infine se $\Delta < 0$, il polinomio non ha zeri reali (diremo che il polinomio è irriducibile in campo reale). Per i dettagli su questo argomento si veda il Paragrafo 2.9.3 e, in particolare, l'Approfondimento 2.46.





Alla luce di tutte le considerazioni precedenti, possiamo sintetizzare il metodo di risoluzione delle disequazioni di secondo grado nel modo seguente.

Disequazioni di secondo grado

$$\text{se } a>0 \quad \begin{cases} \Delta<0 \Longrightarrow & ax^2+bx+c>0 & \forall x\in\mathbb{R} \\ \Delta=0 \Longrightarrow & ax^2+bx+c>0 & \forall x\neq -\frac{b}{2a} \\ \Delta>0 \Longrightarrow & ax^2+bx+c>0 & \forall x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty) \end{cases}$$

$$\text{se } a<0 \quad \begin{cases} \Delta<0 \Longrightarrow & ax^2+bx+c<0 & \forall x\in\mathbb{R} \\ \Delta=0 \Longrightarrow & ax^2+bx+c<0 & \forall x\neq -\frac{b}{2a} \\ \Delta>0 \Longrightarrow & ax^2+bx+c<0 & \forall x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty) \end{cases}$$

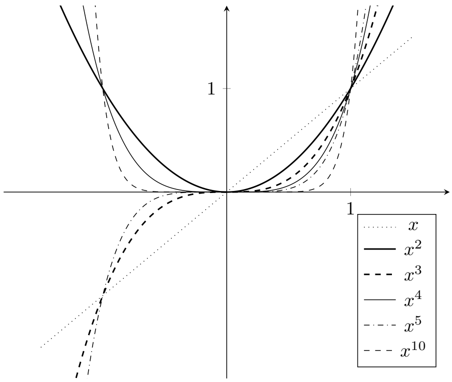
Esempio 2.34. Risolviamo qualche disequazione di secondo grado.
1) $x^2+1\leq 0$: la funzione $f(x)=x^2+1$ è sempre strettamente positiva (anzi, è sempre maggiore o uguale a 1), quindi la disequazione non ha soluzioni.
2) $x(x+1)>0$: il polinomio di secondo grado ha zeri $x_1=-1$, $x_2=0$ (si vede senza conti, essendo già fattorizzato come $a(x-x_1)(x-x_2)$). Inoltre $a=1$ e quindi le soluzioni sono tutte le x in $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.
3) $-(x+4)^2\geq 0$: si tratta dell'opposto di un quadrato, quindi è sempre negativo o nullo e si annulla solo per $x=-4$. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è composto dal solo numero -4. $\triangleleft$

2.8.4 Potenze e radici ennesime

Consideriamo la funzione $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^+$ (cioè il prodotto di n termini uguali a x). Nel paragrafi precedenti abbiamo considerato i casi $n=1,2,3$. In generale, $f(x)=x^n$ con n pari ha lo stesso comportamento qualitativo di x^2, mentre $f(x)=x^n$ con $n\geq 3$ dispari ha lo stesso comportamento qualitativo di x^3. In particolare, $f(x)=x^n$ è una funzione pari se n è pari mentre è una funzione dispari se n è dispari.

Il dominio di x^n è tutto $\mathbb{R}$ per ogni $n\in\mathbb{N}^+$. Con argomenti analoghi a quelli usati per studiare x^2 e x^3 si vede che, per ogni $n\in\mathbb{N}^+$, $f(x)=x^n$ è una funzione strettamente crescente e illimitata superiormente su $[0,+\infty)$. Nella semiretta $(-\infty,0]$ invece x^n è strettamente decrescente e illimitata superiormente per n pari e strettamente crescente e illimitata inferiormente per n dispari. Se ne conclude che $\mathrm{Im}(x^n)=[0,+\infty)$ se n è pari, mentre $\mathrm{Im}(x^n)=\mathbb{R}$ se n è dispari. Quindi, $f(x)=x^n$ con n pari ha un grafico qualitativamente simile a quello di x^2, mentre $f(x)=x^n$ con n dispari ha un grafico qualitativamente simile a quello di x^3.

Le potenze di esponente pari sono invertibili in $[0,+\infty)$ e la loro funzione inversa, definita in $[0,+\infty)$, è indicata con $x^{1/n}$ o $\sqrt[n]{x}$. Se invece l'esponente n è dispari, la funzione x^n è biiettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e la sua funzione inversa, denotata sempre con $x^{1/n}$ o $\sqrt[n]{x}$, è definita su tutto $\mathbb{R}$.



Facciamo qualche breve richiamo sulle disequazioni con le radici cubiche e quadrate. Se si vuole risolvere una disequazione del tipo $\sqrt[3]{f(x)} \geq g(x)$, basta osservare che x^3 è una funzione strettamente crescente, per cui si ha

Disequazioni con le radici cubiche

$$\sqrt[3]{f(x)} \geq g(x) \iff \left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^3 \geq g(x)^3 \iff f(x) \geq g(x)^3 .$$

Quindi le soluzioni della disequazione $\sqrt[3]{f(x)} \geq g(x)$ coincidono con quelle della disequazione $f(x) \geq g(x)^3$, in genere più semplice di quella di partenza.

Esempio 2.35. Risolviamo la disequazione

$$\sqrt[3]{x^3 + x} \geq x .$$

Le soluzioni di questa disequazione coincidono con le soluzioni della disequazione che si ottiene elevando entrambi i membri al cubo, ossia $x^3 + x \geq x^3$. Semplificando si ottiene la condizione $x \geq 0$, quindi le soluzioni sono tutte le x in $[0, +\infty)$. $\lhd$

Le disequazioni del tipo $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ sono un po' più delicate da trattare. Innanzitutto la disequazione ha senso solo se $f(x) \geq 0$, quindi la disequazione di partenza va scritta come sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)} \geq g(x). \end{cases}$$

Inoltre, per tutti i valori di x tali che $g(x) < 0$ la disequazione è sicuramente verificata. Per i valori di x tali che $g(x) \geq 0$, poiché la funzione x^2 è strettamente crescente in $[0, +\infty)$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri della disequazione ottenendo una disequazione equivalente.

Quindi, alla fine, le soluzioni della disequazione di partenza sono l'unione delle soluzioni di due sistemi:

Disequazioni con le radici quadrate

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geq g(x)^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 2.36. Risolviamo la disequazione

$$\sqrt{x-2} \geq x-3\,.$$

1) La disequazione ha senso solo per $x \geq 2$.
2) La disequazione è sicuramente verificata se $2 \leq x < 3$ (in questo caso $\sqrt{x-2} \geq 0$ e $x-3 < 0$).
3) Se $x \geq 3$, possiamo elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo il sistema

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x-2 \geq (x-3)^2\,. \end{cases}$$

Semplificando, il sistema diventa

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 11 \leq 0\,. \end{cases}$$

Il polinomio $x^2 - 7x + 11$ si annulla in $x_1 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$, quindi $x^2 - 7x + 11 \leq 0$ nell'intervallo $\left[\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right]$. Notiamo che $\frac{7-\sqrt{5}}{2} < 3 < \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ (perché $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$). Ne segue che le soluzioni del sistema sono tutti e soli i valori nell'intervallo $\left[3, \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Osserviamo che sarebbe stato sbagliato elevare subito al quadrato i due membri della disequazione senza tener conto del loro segno. Commettendo questo errore, avremmo ottenuto come insieme delle soluzioni l'intervallo $\left[\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right]$.
4) In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione è $\left[2, \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right]$. $\triangleleft$

2.8.5 Potenze con esponente reale

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, vogliamo definire la funzione potenza $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$. Abbiamo dato una definizione rigorosa di potenza nel caso $\alpha = n$ (potenza n–esima) e nel caso $\alpha = \frac{1}{n}$ (radice n–esima), $n \in \mathbb{N}^+$. Poniamo, per definizione, $x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \qquad (x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^+)$$

e
$$x^{n/m} := \sqrt[m]{x^n} \qquad (x > 0,\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^+). \tag{2.5}$$
La funzione x^α, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, si costruisce approssimando α con numeri razionali che gli sono arbitrariamente vicini, usando la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (si veda l'Approfondimento 1.18).

Il nostro punto di partenza saranno le proprietà elementari delle potenze a esponente intero: per ogni n, $m \in \mathbb{Z}$ si ha che

(I1) $x_1^n x_2^n = (x_1 x_2)^n$,
(I2) $x^n x^m = x^{n+m}$,
(I3) $(x^n)^m = x^{nm}$.

Da tali proprietà, di facile verifica, possiamo dedurre le analoghe proprietà per le radici: per ogni n, $m \in \mathbb{N}^+$

(R1) $(x_1 x_2)^{1/n} = x_1^{1/n} x_2^{1/n}$,
(R2) $(x^{1/n})^{1/m} = x^{1/(nm)}$,
(R3) $x^{1/m} = x^{n/(nm)}$.

Più precisamente, la dimostrazione di (R1), (R2) e (R3) si basa su (I1), (I2), (I3) e sul fatto che la radice n–esima sia la funzione inversa della potenza naturale. A scopo esemplificativo dimostriamo la proprietà (R1): dati x_1, $x_2 > 0$, siano $y_1 = x_1^{1/n}$ e $y_2 = x_2^{1/n}$. Per definizione di funzione inversa, questo equivale a dire che $y_1^n = x_1$ e $y_2^n = x_2$, per cui, dalla (I1) si ha
$$x_1 x_2 = y_1^n y_2^n = (y_1 y_2)^n \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 y_2 = (x_1 x_2)^{1/n}\,.$$
Osserviamo che, in particolare, la proprietà (R3) garantisce che la potenza a esponente razionale non dipende dalla frazione che lo rappresenta.

Utilizzando le proprietà (I1), (I2), (I3), (R1), (R2) ed (R3) possiamo ora mostrare che le potenze a esponente razionale, definite in (2.5), soddisfano alcune notevoli proprietà. Nel seguito n e p apparterranno a $\mathbb{Z}$, e $m, q \in \mathbb{N}^+$.

(i) $x^{n/m} > 0$;
(ii) $x^{n/m} x^{p/q} = x^{m/n+p/q}$;
(iii) $(x^{n/m})^{p/q} = x^{(np)/(mq)}$;
(iv) se $0 < x_1 < x_2$, allora $\begin{cases} x_1^{n/m} < x_2^{n/m} & \text{se } n/m > 0, \\ x_1^{n/m} > x_2^{n/m} & \text{se } n/m < 0. \end{cases}$
(v) se $n/m > p/q$, allora $\begin{cases} x^{n/m} > x^{p/q} & \text{se } x > 1, \\ x^{n/m} < x^{p/q} & \text{se } 0 < x < 1; \end{cases}$

La proprietà (i) è evidente dalla definizione (ricordiamo che $x > 0$). La dimostrazione di (ii) può essere sintetizzata come segue:
$$x^{n/m} x^{p/q} \overset{(R3)}{=} x^{\frac{nq}{mq}} x^{\frac{pm}{mq}} \overset{(R1)}{=} (x^{nq} x^{mp})^{\frac{1}{mq}} \overset{(I2)}{=} (x^{nq+mp})^{\frac{1}{mq}} \overset{(R2),(R3)}{=} x^{n/m+p/q}.$$

La proprietà (iii) segue da (I3) e (R2). Per quanto riguarda la proprietà (iv), se n, $m > 0$, la funzione $(x^n)^{1/m}$ è la composizione di due funzioni crescenti, per cui è una funzione crescente. D'altra parte, se $n/m < 0$, possiamo supporre $n < 0$ e $m > 0$, per cui la potenza n–esima risulta decrescente, mentre la radice m–esima è crescente, per cui la composizione risulta essere una funzione decrescente (si ricordi il Teorema 2.16 a pag. 63).

Infine, la validità della proprietà (v) nel caso $x > 1$ segue dalla monotonia dimostrata in (iv):

$$x^{n/m} \overset{(ii)}{=} x^{p/q} x^{n/m-p/q} > x^{p/q},$$

mentre, se $0 < x < 1$, basta osservare che

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{n/m} > \left(\frac{1}{x}\right)^{p/q} \quad \Longrightarrow \quad x^{n/m} < x^{p/q}\,.$$

Siano ora fissati $x \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $q_0 \in \mathbb{Q}$ tale che $q_0 \geq \alpha$ (osserviamo che tale valore esiste per la proprietà Archimedea). La monotonia mostrata in (iv) garantisce che $x^q \leq x^{q_0}$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$, $q \leq \alpha$. Risultano quindi ben poste le seguenti definizioni:

Potenze con esponente reale

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ la potenza α di x è definita da

$$x^\alpha = \sup\{x^q;\;\; q \in \mathbb{Q},\; q \leq \alpha\}, \qquad \text{se } x \geq 1\,,$$

$$x^\alpha = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} \qquad \text{se } 0 < x < 1\,.$$

Inoltre, con un po' di pazienza è possibile verificare che la funzione così definita soddisfa le proprietà che abbiamo mostrato per le potenze razionali, che riepiloghiamo.

Proprietà delle potenze

(i) $x^\alpha > 0$, per ogni $x > 0$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;

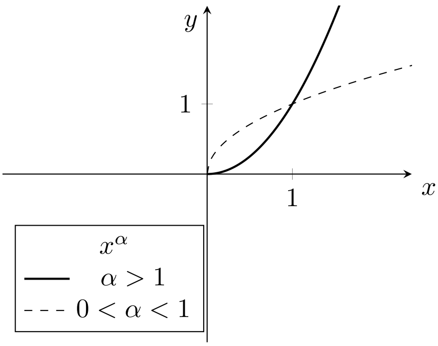
(ii) $x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} = x^{\alpha_1+\alpha_2}$, per ogni α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$;

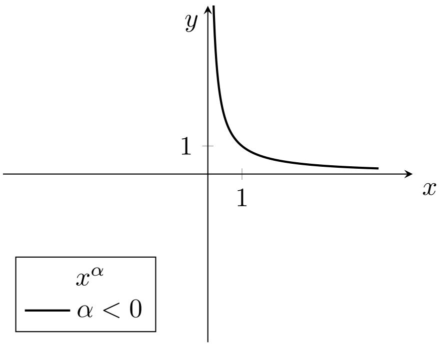
(iii) $(x^{\alpha_1})^{\alpha_2} = x^{\alpha_1\alpha_2}$, per ogni α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$;

(iv) se $0 < x_1 < x_2$, allora $\begin{cases} x_1^\alpha < x_2^\alpha & \text{se } \alpha > 0, \\ x_1^\alpha > x_2^\alpha & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$

(v) se $\alpha_1 > \alpha_2$, allora $\begin{cases} x^{\alpha_1} > x^{\alpha_2} & \text{se } x > 1, \\ x^{\alpha_1} < x^{\alpha_2} & \text{se } 0 < x < 1; \end{cases}$

Il grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$ è disegnato nella figura seguente.





2.8.6 Esponenziali e logaritmi

Fissato $a > 0$, definiamo la **funzione esponenziale**

Funzione esponenziale

$$f(x) = a^x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mentre nella funzione x^α viene fissato l'esponente α e la base è variabile, la funzione esponenziale ha base fissata ed esponente variabile. Le principali proprietà di a^x si ottengono facilmente rileggendo le proprietà delle potenze.

Proprietà degli esponenziali

(i) $\mathrm{Dom}(a^x) = \mathbb{R}$;
(ii) $a^0 = 1$ e $a^1 = a$;
(iii) $\mathrm{Im}(a^x) = (0, +\infty)$ (sottolineiamo che a^x non si annulla mai);
(iv) se $a > 1$, allora a^x è strettamente crescente;
(v) se $a = 1$, allora $1^x = 1$ è costante;
(vi) se $0 < a < 1$, allora a^x è strettamente decrescente.

Se la base a è diversa da 1, la funzione a^x è invertibile in $\mathbb{R}$ e si può dimostrare che il dominio della funzione inversa è $(0, +\infty) = \mathrm{Im}(a^x)$ (si veda Approfondimento 4.27. Tale funzione inversa prende il nome di **logaritmo** in base a di x e si denota con $\log_a x$. Dalla definizione stessa di funzione inversa otteniamo che

Logaritmi

$$y = \log_a x \iff a^y = x\,, \qquad x \in (0, +\infty),\ y \in \mathbb{R} \quad (a \neq 1)\,.$$

Inoltre si ricavano abbastanza facilmente le seguenti proprietà dei logaritmi.

Proprietà dei logaritmi

(i) $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a(a^x) = x$ per ogni $x > 0$;
(ii) $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$;
(iii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ per ogni x, $y > 0$;
(iv) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$ per ogni x, $y > 0$;
(v) $\log_a(x^p) = p \log_a x$ per ogni $x > 0$ e $p \in \mathbb{R}$;
(vi) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

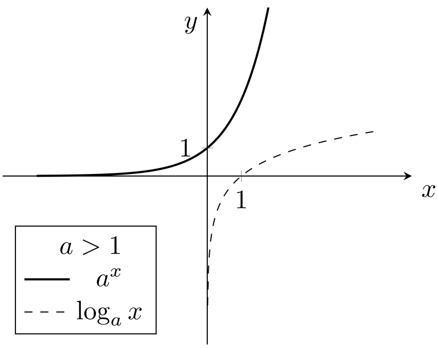
La proprietà (i) è la trascrizione nel caso specifico di logaritmi ed esponenziali della proprietà (2.4) a pag. 67 della funzione inversa. La proprietà (ii) corrisponde alla proprietà (ii) degli esponenziali. Le proprietà (iii)–(vi) si ottengono utilizzando le proprietà delle potenze. Mostriamo, a titolo di esempio, come ricavare la (vi): utilizzando la (i) due volte si ottiene

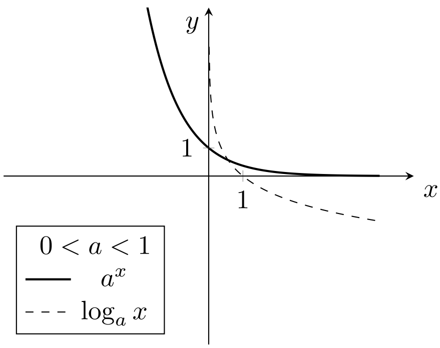
$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}\,; \tag{2.6}$$

d'altra parte, nuovamente utilizzando la (i) si ha che $b = a^{\log_a b}$ e quindi la (2.6) diventa

$$a^{\log_a x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = a^{(\log_a b)(\log_b x)}\,.$$

Leggiamo solo il primo e il terzo termine della catena di uguaglianze: abbiamo due esponenziali di base a uguali. Ma a^x è una funzione iniettiva, quindi l'uguaglianza degli esponenziali implica l'uguaglianza degli argomenti, ossia $\log_a x = \log_a b \log_b x$ (che è esattamente l'uguaglianza in (vi)).





Per conoscere l'andamento della funzione $\log_a x$ basta disegnarne il grafico per simmetria rispetto alla bisettrice a partire dal grafico di a^x.

Osserviamo che $\log_a x$, avendo come immagine tutto $\mathbb{R}$, non è limitata né inferiormente né superiormente. Se $a > 1$ la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente, è positiva in $(1, +\infty)$ e negativa in $(0, 1)$. Se $a < 1$ la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente, è negativa in $(1, +\infty)$ e positiva in $(0, 1)$.

Nel seguito la base per gli esponenziali e i logaritmi sarà sempre il **numero di Nepero** $e = 2,71828\ldots$ Il motivo per cui questa base viene privilegiata nell'Analisi Matematica diventerà chiaro quando si parlerà di derivate (si veda l'Esempio 6.17 a pag. 282). Una più approfondita discussione sul numero e verrà fatta in seguito (Teorema 5.34 e Paragrafo 5.3). La funzione $\log_e x$ prende il nome di **logaritmo naturale** e si indica solo con $\log x$ (o $\ln x$).

Ricordiamo brevemente come si risolvono equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Sappiamo già risolvere le equazioni del tipo

$$e^{f(x)} = k\,.$$

Infatti, se $k \leq 0$ l'equazione non ha soluzioni (i valori dell'esponenziale sono sempre strettamente positivi), mentre, per $k > 0$, x è soluzione dell'equazione se e solo se $f(x) = \log k$. Quindi

Equazioni esponenziali

$$e^{f(x)} = k \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \log k \qquad (k > 0)\,.$$

Analogamente, le soluzioni di

$$e^{f(x)} > k\,, \qquad k > 0$$

coincidono con le soluzioni di $f(x) > \log k$, ossia

Disequazioni esponenziali

$$e^{f(x)} > k \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > \log k \qquad (k > 0).$$

Ricordiamo che la funzione e^x è sempre strettamente crescente quindi si ha

$$e^{f(x)} = e^{g(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x)\,,$$
$$e^{f(x)} > e^{g(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > g(x).$$

Esempio 2.37. Risolviamo alcune equazioni e disequazioni esponenziali.
1) $e^{x^2-1} = 2$. Applicando il logaritmo ad ambo i membri otteniamo

$$x^2 - 1 = \log 2$$

e quindi le soluzioni dell'equazione di partenza coincidono con le soluzioni di $x^2 = 1 + \log 2$ che sono $x = \pm\sqrt{1 + \log 2}$.

2) $e^{7x^5+3\sqrt[3]{x}+5} \leq 0$. Questa disequazione non ha soluzioni, perché l'esponenziale è sempre strettamente positivo.
3) $e^{\sqrt[5]{1-x}} \geq 1$. Osserviamo che $1 = e^0$, quindi, per la monotonia dell'esponenziale, la disequazione ha le stesse soluzioni di $\sqrt[5]{1-x} \geq 0$, ossia tutte le x in $(-\infty, 1]$. $\triangleleft$

In maniera del tutto analoga, grazie al fatto che anche la funzione logaritmo è strettamente monotona crescente in $(0, +\infty)$, si ha che

$$\log(f(x)) = \log(g(x)) \Longleftrightarrow f(x) = g(x)\,,$$
$$\log(f(x)) > \log(g(x)) \Longleftrightarrow f(x) > g(x)$$

(ovviamente stiamo supponendo che $f(x)$ e $g(x)$ siano positive). Inoltre, poiché $k = \log(e^k)$ per $k \in \mathbb{R}$, si ha che

Equazioni e disequazioni logaritmiche

$$\log(f(x)) = k \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = e^k\,,$$
$$\log(f(x)) > k \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > e^k\,.$$

Esempio 2.38. Risolviamo alcune equazioni e disequazioni logaritmiche.
1) $\log(2x + 1) > 7$ (definita per $x > -1/2$). Applicando l'esponenziale ad ambo i membri, grazie alla monotonia dell'esponenziale otteniamo

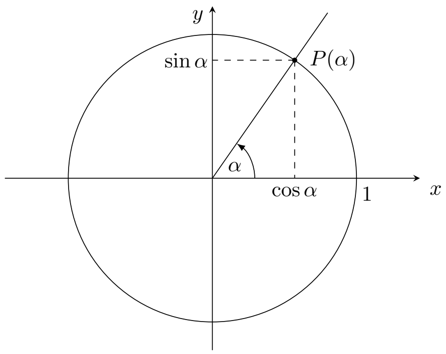
$$2x + 1 = e^{\log(2x+1)} > e^7$$

e quindi le soluzioni dell'equazione di partenza coincidono con le soluzioni in $(-1/2, +\infty)$ di $2x + 1 > e^7$ che sono tutte le x in $\left(\frac{1}{2}(e^7 - 1), +\infty\right)$.
2) $\log(2x - x^2) \leq 0$. Questa disequazione è ben definita solo dove $2x - x^2 > 0$, ossia nell'intervallo $(0, 2)$. Applicando l'esponenziale ad ambo i membri si ottiene che le soluzioni della disequazione di partenza coincidono con le soluzioni in $(0, 2)$ della disequazione $2x - x^2 \leq 1$. Quest'ultima può essere riscritta nella forma $-(x-1)^2 \leq 0$, disequazione verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi le soluzioni della disequazione di partenza sono tutte le x in $(0, 2)$ (dominio del logaritmo intersecato con l'insieme delle soluzioni della disequazione ottenuta passando agli esponenziali).
3) $\log(x - 1) = \log(1 - x)$. Questa equazione non ha soluzioni. Infatti la funzione $\log(x - 1)$ è definita in $(1, +\infty)$, mentre $\log(1 - x)$ è definita in $(-\infty, 1)$, quindi si sono uguagliate due funzioni che hanno domini a intersezione vuota. (Cosa sarebbe successo se non avessimo considerato i domini e avessimo direttamente applicato l'esponenziale ad ambo i membri?) $\triangleleft$

2.8.7 Funzioni trigonometriche

Geometricamente, un **angolo** formato da due semirette incidenti è l'insieme dei punti del piano ottenuto ruotando una delle due semirette fino a farla sovrapporre all'altra con la convenzione che la coppia di semirette sia ordinata e la prima semiretta ruoti in senso antiorario verso la seconda.

Gli angoli verranno misurati in **radianti** secondo la seguente definizione: si assumerà sempre che la prima semiretta (quella che ruota) coincida col semiasse delle x positive. La misura in radianti di un angolo α è la lunghezza dell'arco di circonferenza unitaria sotteso da α. In particolare, l'angolo giro misura 2π radianti (lunghezza della circonferenza unitaria). Useremo la convenzione che $-\alpha$ è l'angolo di ampiezza α ottenuto ruotando la prima semiretta in senso orario.



Con questa convenzione, ogni angolo α individua un unico punto $P(\alpha)$ sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine (l'intersezione tra la seconda semiretta e la circonferenza). Per definizione le coordinate cartesiane di tale punto sono il **coseno** di α e il **seno** di α (denotate rispettivamente con $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$), ossia $P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Con le notazioni usate per le funzioni, vengono definite due funzioni $\cos x$ e $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, i cui grafici sono disegnati in Figura 2.8.7 e le cui principali proprietà sono le seguenti.

Proprietà di base delle funzioni trigonometriche

(i) $-1 \le \sin x \le 1$ e $-1 \le \cos x \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (evidente dalla definizione);

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (per il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo con cateti $\cos x$ e $\sin x$ e ipotenusa 1);

(iii) $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π;

(iv) $\sin x$ è una funzione dispari ($\sin(-x) = -\sin x$) (verifica grafica);

(v) $\cos x$ è una funzione pari ($\cos(-x) = \cos x$) (verifica grafica).

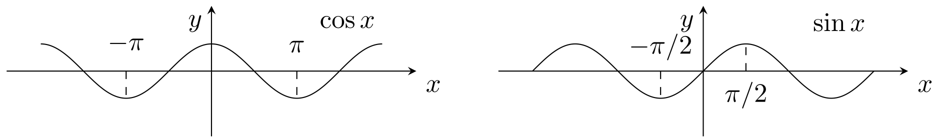


Figura 2.24: Le funzioni $\cos x$ e $\sin x$

A partire dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si definiscono le funzioni **tangente** e **cotangente** trigonometrica:

Tangente e cotangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

In questo testo richiameremo solo le nozioni relative a $\tan x$. Ovviamente, $\mathrm{Dom}(\tan x) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, ossia $\tan x$ non è definita solo nei punti in cui annulla $\cos x$. Le proprietà fondamentali di $\tan x$, che si deducono dalle proprietà di $\sin x$ e $\cos x$ sono le seguenti.

Proprietà della tangente trigonometrica

(i) $\tan x$ è periodica di periodo π;
(ii) $\tan x$ è una funzione dispari.

La prima proprietà ci permette di studiare la funzione solo in un intervallo di ampiezza π (ad esempio in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), la seconda ci dice che è sufficiente lavorare su $[0, \frac{\pi}{2})$, perché il comportamento in $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ si ottiene per simmetria rispetto all'origine. Per disegnare qualitativamente il grafico di $\tan x$ su $[0, \frac{\pi}{2})$, è utile determinarne il significato geometrico. Sia x un angolo fissato, sia P il punto individuato da x sulla circonferenza unitaria e sia T il punto di intersezione tra retta passante per l'origine e per P e la retta di equazione $x = 1$ (si veda la Figura 2.25 a sinistra).

I triangoli rettangoli OBT e OAP sono simili, quindi

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}\,. \tag{2.7}$$

Ma $\overline{OB} = 1$, $\overline{AP} = \sin x$ e $\overline{OA} = \cos x$, dunque la (2.7) diventa $\overline{BT} = \tan x$. Quindi la tangente trigonometrica misura la lunghezza del segmento BT (e, di conseguenza, il coefficiente angolare della retta che passa per i punti O, P e T). A questo punto è chiaro che $\tan x$ è positiva, strettamente crescente e illimitata superiormente in $(0, \frac{\pi}{2})$. Inoltre, le aree del triangolo OBP (pari a $(\sin x)/2$), del settore circolare OBP (pari a $x/2$) e del triangolo OBT (pari

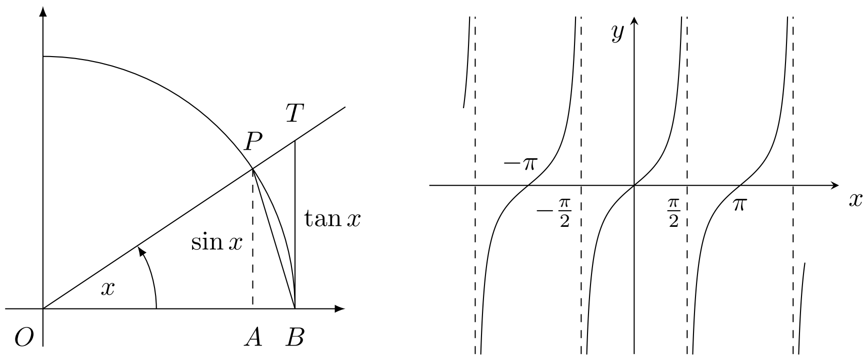


Figura 2.25: Significato geometrico e grafico della tangente trigonometrica

a $(\tan x)/2$) sono ordinate in maniera crescente, ossia

$$0 < \sin x < x < \tan x\,, \qquad \text{per ogni } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{2.8}$$

La terza disuguaglianza dice che il grafico di $\tan x$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ è sempre al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante.

Ovviamente una funzione periodica non può essere invertibile su tutto $\mathbb{R}$ (perché sicuramente non è iniettiva su tutto $\mathbb{R}$). Tuttavia possiamo definire l'inversa delle funzioni trigonometriche ristrette a un opportuno intervallo di monotonia (che avrà ampiezza non superiore al periodo).

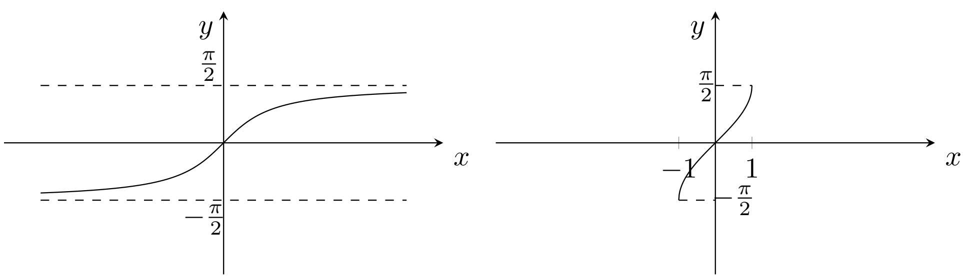


Figura 2.26: Grafici di $\arctan x$ (a sinistra) e $\arcsin x$ (a destra)

Così, ad esempio, se consideriamo la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, allora otteniamo una funzione invertibile la cui inversa prende il nome di **arcoseno** di x ($\arcsin x$). Allo stesso modo, se consideriamo la restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$, allora otteniamo una funzione invertibile la cui inversa prende il nome di **arcocoseno** di x ($\arccos x$). Infine, se consideriamo la restrizione di $\tan x$ all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, allora otteniamo una funzione invertibile la cui inversa prende il nome di **arcotangente** di x ($\arctan x$).

I metodi di risoluzione di equazioni e disequazioni trigonometriche sono molti e non verranno richiamati in questo testo. Il più delle volte, nel seguito, le equazioni trigonometriche proposte saranno elementari e le disequazioni trigonometriche abbastanza semplici da poter essere risolte graficamente. Proponiamo qui solo qualche esempio.

Esempio 2.39. Risolviamo l'equazione

$$\sin x = \cos x \, .$$

Basta osservare che quando $\cos x = 0$ l'equazione non è soddisfatta, quindi si possono considerare solo le $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e si può dividere per $\cos x$, trasformando l'equazione in $\tan x = 1$, che ha soluzioni $x = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ◁

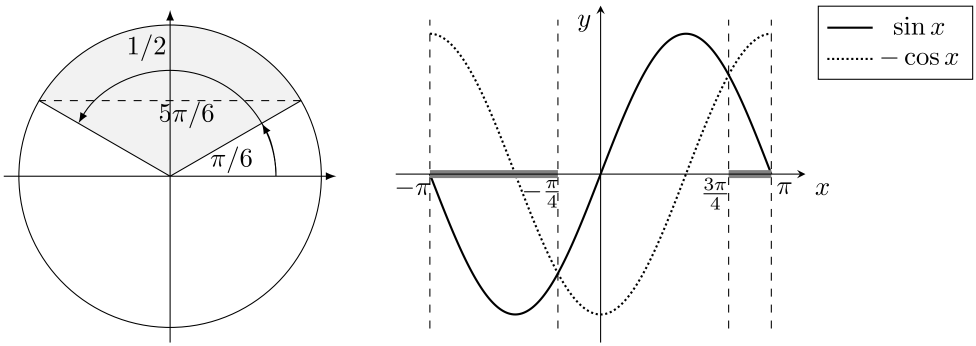


Figura 2.27: Risoluzione grafica di $\sin x > 1/2$ e studio di $\sin x < -\cos x$

Esempio 2.40. Risolviamo la disequazione

$$\sin x > \frac{1}{2} \, .$$

Osservando la circonferenza trigonometrica (si veda Figura 2.27 a sinistra) si vede che la disuguaglianza è verificata per x in $(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi)$. Per motivi di periodicità, l'insieme di tutte le soluzioni della disequazione è dato da

$$\left\{ x \in \mathbb{R};\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \, , \ k \in \mathbb{Z} \right\} \, .$$

Risolviamo ora la disequazione

$$\sin x + \cos x < 0.$$

Si tratta di vedere quando $\sin x < -\cos x$. Per fare questo basta conoscere i valori per cui $\sin x = -\cos x$, che sono dati da $x = -\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, poi disegnare i grafici di $\sin x$ e $-\cos x$ (si veda Figura 2.27 a destra) e infine confrontarli.

Sinteticamente otteniamo il seguente risultato:

$$\begin{array}{ccccccccccccc|l}
 & - - - & & + + + & & - - - & & + + + & & - - - & & + + + & & \sin x + \cos x \\
-\frac{5}{4}\pi & & -\frac{\pi}{4} & & 0 & & \frac{3}{4}\pi & & \frac{7}{4}\pi & & \frac{11}{4}\pi & & \frac{15}{4}\pi &
\end{array}$$

dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sin x + \cos x < 0$ è dato da

$$\left\{ x \in \mathbb{R};\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}. \qquad \lhd$$

2.9 Complementi

2.9.1 La regola di Ruffini

La regola di Ruffini è un semplice algoritmo per effettuare la divisione fra un polinomio $P(x)$ di grado qualsiasi e un polinomio di primo grado del tipo $x - x_0$. Vedremo più avanti, nel Paragrafo 10.3 a pagina 474, un metodo generale per effettuare la divisione fra due polinomi di qualsiasi grado.

Descriviamo brevemente l'algoritmo di Ruffini. Si voglia dividere il polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

per il polinomio $x - x_0$. In generale avremo che

$$\frac{P(x)}{x - x_0} = P_1(x) + \frac{P(x_0)}{x - x_0},$$

dove $P_1(x)$ è un polinomio di grado $n-1$ (il quoziente della divisione; $P(x_0)$ è invece il resto della divisione). Per determinare i coefficienti del polinomio $P_1(x)$ si procede in questo modo:

1. Si scrivono i coefficienti del polinomio $P(x)$, ricordandosi di scrivere anche quelli eventualmente nulli:

$$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \ldots \quad a_1 \quad a_0$$

2. Si traccia una tabella come in figura, mettendo a sinistra x_0:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ x_0 & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

3. Si "abbassa" a_n sull'ultima riga, si moltiplica per x_0 e si riporta il risultato sotto a_{n-1}:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ x_0 & \downarrow & x_0\, a_n & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

4. Si sommano i termini della colonna di a_{n-1} e si riporta il risultato $a_{n-1}+x_0a_n$ nella riga in basso. Indichiamo questo risultato con b_{n-2}. Il termine b_{n-2} si moltiplica per x_0 e si riporta il risultato sotto a_{n-2}:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ x_0 & & x_0\, a_n & x_0\, b_{n-2} & & & \\ \hline & a_n & b_{n-2} & & & & \end{array}$$

5. Si procede in questo modo, sommando i termini della colonna appena completata, moltiplicando il risultato per x_0 e riportando il prodotto sotto il coefficiente successivo. Alla fine si arriva a scrivere l'ultimo prodotto sotto il coefficiente a_0 e a calcolare l'ultima somma:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ x_0 & & x_0\, a_n & x_0\, b_{n-2} & \dots & x_0\, b_1 & x_0\, b_0 \\ \hline & a_n & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & P(x_0) \end{array}$$

   Se l'ultima somma non vale $P(x_0)$ significa che è stato fatto qualche errore nei calcoli.

6. Gli n numeri $a_n, b_{n-2}, b_{n-3}, \dots, b_0$ ottenuti nell'ultima riga sono i coefficienti del polinomio $P_1(x)$; possiamo quindi scrivere

$$P(x) = (x - x_0) \cdot (a_n x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + P(x_0) \ .$$

Se $P(x_0) = 0$ questo algoritmo permette quindi di fattorizzare il polinomio $P(x)$ come prodotto fra il fattore $(x - x_0)$ e un altro polinomio $P_1(x)$ di grado $n - 1$.

Esempio 2.41. Vogliamo dimostrare che il polinomio

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - x + 22$$

è divisibile per $x - 2$ e vogliamo calcolare il quoziente della divisione.
$P(x)$ è divisibile per $x - 2$ se e solo se $P(2) = 0$; in questo caso $P(2) = 32 - 64 + 12 - 2 + 22 = 0$, quindi $P(x)$ è effettivamente divisibile per $x - 2$. Calcoliamo il quoziente della divisione con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 1 & -4 & 0 & 3 & -1 & 22 \\ 2 & & 2 & -4 & -8 & -10 & -22 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & -5 & -11 & 0 \end{array}$$

Il quoziente della divisione è quindi $P_1(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x - 11$. Osserviamo esplicitamente che, fra i coefficienti del polinomio $P(x)$ che abbiamo scritto nella tabella, compare uno 0 relativo al termine x^3; infatti tale termine non compare esplicitamente nella scrittura di $P(x)$, quindi deve necessariamente avere coefficiente nullo. ◁

2.9.2 Ulteriori formule trigonometriche

Ricordiamo quali sono gli **angoli notevoli** e i valori di $\sin x$ e $\cos x$ per tali angoli.

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	0	1
π (180°)	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	0	-1

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$, oltre a essere rispettivamente dispari e pari, godono di molte altre simmetrie che elenchiamo.

Simmetrie delle funzioni trigonometriche

$\cos(x + \pi) = -\cos x$ e $\sin(x + \pi) = -\sin x$;
$\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ e $\sin(x + \pi/2) = \cos x$;
$\cos(\pi - x) = -\cos x$ e $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Ovviamente non è vero che $\sin(x_1+x_2) = \sin(x_1)+\sin(x_2)$ (basta guardare le formule precedenti). Esistono tuttavia delle **formule di addizione**.

Formule di addizione

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2;$$
$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2;$$
$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1;$$
$$\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \sin x_2 \cos x_1.$$

Dalle formule di addizione si ottengono immediatamente le **formule di duplicazione**.

Formule di duplicazione

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$$

Le somme di funzioni trigonometriche si possono trasformare in prodotti usando le **formule di prostaferesi**.

Formule di prostaferesi

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right);$$
$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right);$$
$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right);$$
$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right).$$

Infine, usando le formule per $\sin x$ e $\cos x$ si ricavano le seguenti **formule per la tangente**.

Formule per la tangente

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}, \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

In particolare le funzioni trigonometriche si possono esprimere come funzione razionale di $\tan(x/2)$ nel modo seguente.

Formule parametriche

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}, \qquad \sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}.$$

Sarà utilizzata in seguito la **regola del coseno**, una generalizzazione del teorema di Pitagora di cui forniamo una rapida dimostrazione.

Teorema 2.42 ➩ Regola del coseno

Sia dato un triangolo di lati di lunghezza a, b e c e sia θ l'angolo compreso fra i lati di lunghezza a e b. Allora

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\,.$$

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 2.28 a sinistra, sia CH l'altezza relativa al lato AB e sia d la distanza di A dal piede H dell'altezza.

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli AHC e HBC, che hanno uno stesso cateto, si ottiene $a^2 - d^2 = c^2 - (b-d)^2$. Sviluppando il quadrato $(b-d)^2$ e facendo le semplificazioni si arriva a $a^2 = c^2 - b^2 + 2bd$. A questo punto basta osservare che $d = a\cos\theta$ per ottenere la formula richiesta. □

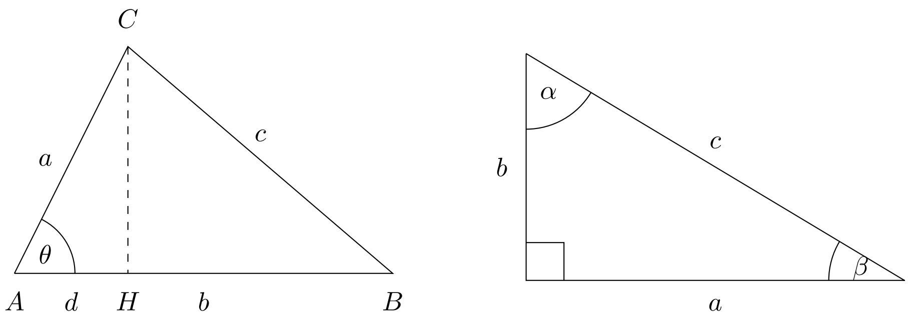


Figura 2.28: La regola del coseno e lati di un triangolo rettangolo

Infine ricordiamo brevemente le relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo (si veda la Figura 2.28 a destra).

Lati di un triangolo rettangolo

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta\,, \qquad b = c\cos\alpha = c\sin\beta\,.$$

2.9.3 Alcune funzioni di variabile complessa

In questo paragrafo introdurremo alcune basilari funzioni di variabile complessa; in particolare, vedremo come calcolare potenze e radici in campo complesso e definiremo le funzioni esponenziale e logaritmo, sempre in campo complesso.

Consideriamo due numeri complessi $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ dati in forma polare. Utilizzando le formule di addizione per seno e coseno (si veda il Paragrafo 2.9.2) si ha che

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= \rho r[\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha + i(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)] \\ &= \rho r[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)]; \end{aligned}$$

di conseguenza, il numero $z \cdot w$ ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare si ha

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

e, più in generale, se $n \in \mathbb{N}$,

Potenza n-esima di un numero complesso

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \qquad \rho = |z|, \ \theta = \arg(z). \tag{2.9}$$

Quest'ultima formula (detta **formula di de Moivre**) permette di calcolare rapidamente la potenza n-esima di qualsiasi numero complesso dato in forma trigonometrica.

Vediamo ora come, a partire dalla formula (2.9), possiamo anche determinare le radici n-esime di un numero complesso. Sia z un numero complesso. Determinare le radici n-esime di z equivale a determinare quei numeri complessi w la cui potenza n-esima coincide con z, cioè tali che

$$w^n = z\ . \tag{2.10}$$

Osserviamo che se $z = 0$ allora l'unico numero complesso soddisfacente questa condizione è $w = 0$. Supponiamo ora $z \neq 0$ e sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ la sua rappresentazione trigonometrica. Cerchiamo i numeri $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ tali che valga (2.10); utilizzando la formula (2.9) questo equivale a cercare dei numeri α ed r, con $r > 0$, tali che

$$r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

con $\rho > 0$ e θ assegnati. Quest'ultima uguaglianza è soddisfatta se e solo se

$$\begin{cases} r^n = \rho, \\ n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, \\ \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Quindi, tutte le soluzioni del problema hanno lo stesso modulo $r = \sqrt[n]{\rho}$ (osserviamo che questa è l'usuale radice n-esima aritmetica di un numero positivo, definita nel Paragrafo 2.8.4, vale a dire l'unico numero reale positivo $r > 0$ la cui potenza n-esima coincida con ρ); questo significa che, nel piano di Gauss, giacciono tutte su una circonferenza di tale raggio centrata nell'origine. Osserviamo adesso che abbiamo ottenuto infiniti valori dell'argomento α; ricordando tuttavia che, a parità di modulo, l'argomento individua numeri complessi distinti a meno di multipli interi di 2π, è facile verificare che solo n di questi valori di α individuano numeri distinti. Ad esempio, i valori di α corrispondenti a $k = 0, 1, \ldots, n-1$ individuano tutti numeri distinti; per altri valori di k si ottiene un valore di α che differisce da uno di questi n valori per un multiplo intero di 2π. In conclusione, otteniamo n radici n-esime di z:

Teorema 2.43 ➫ Radici di un numero complesso

Sia dato un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ diverso da 0. Allora z ha esattamente n radici n-esime, date da

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Come abbiamo già detto sopra, questi n numeri complessi w_0, w_1, ..., w_{n-1} si dispongono tutti, nel piano di Gauss, sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ centrata nell'origine (si veda la Figura 2.29). Osserviamo inoltre che la differenza fra gli argomenti di due radici consecutive è costante (vale $2\pi/n$), quindi le n radici si dispongono ai vertici di un poligono regolare di n lati; graficamente, se è nota una di esse, è dunque facile disegnare le altre.

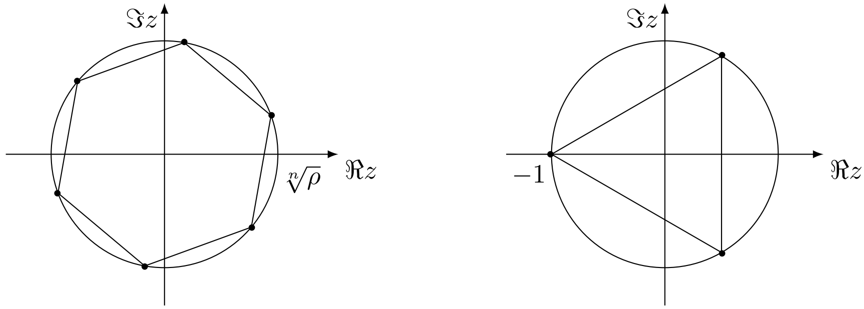


Figura 2.29: Radici seste di un numero complesso e radici terze di -1

Esempio 2.44. Vogliamo calcolare e rappresentare graficamente le radici cubiche del numero $z = -1$. Tale numero ha modulo $\rho = 1$ e argomento $\theta = \pi$;

abbiamo quindi che le tre radici cubiche in questione sono

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_1 &= \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3} = -1,\\
w_2 &= \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}
$$

che nel piano di Gauss sono i vertici di un triangolo equilatero. Dal punto di vista geometrico queste tre radici possono essere disegnate anche senza il calcolo esplicito; sappiamo infatti che una delle tre radici è -1 (le radici che si ottengono in campo reale sono anche radici in campo complesso), e sappiamo che le tre radici sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine (si veda la Figura 2.29 a destra). $\triangleleft$

Il Teorema 2.43 implica in particolare che, in campo complesso, un polinomio del tipo $P(z) = z^n - (a+ib)$ ha esattamente n radici. Più in generale vale un altro teorema, la cui dimostrazione richiederebbe strumenti matematici più avanzati.

Teorema 2.45 ➾ Teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio a coefficienti complessi $P(z)$ di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici complesse, contate con la loro molteplicità.

Per chiarire il significato del teorema, supponiamo che sia dato un polinomio di grado n

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ ,$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Il teorema fondamentale dell'algebra asserisce che esistono n numeri complessi z_0, z_1, ..., z_{n-1}, non necessariamente tutti distinti, tali che

$$P(z) = a_n (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) \ . \tag{2.11}$$

Inoltre, tale decomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori. Detto in altri termini, l'equazione polinomiale di n-esimo grado $P(z) = 0$ ammette esattamente n soluzioni $z_0, \ldots, z_{n-1}$ in campo complesso (contate con la loro molteplicità). In generale, tali soluzioni possono essere scritte attraverso una formula esplicita solo nel caso $n \leq 4$; per le equazioni di grado $n \geq 5$ non esistono formule risolutive esplicite (salvo casi particolari).

Approfondimento 2.46 (Equazioni di secondo grado)**.** Consideriamo il caso delle equazioni del tipo

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0. \tag{2.12}$$

La formula risolutiva per questa equazione può essere facilmente ottenuta con il cosiddetto **metodo di completamento del quadrato**, che consiste nel ridurre, attraverso opportune manipolazioni algebriche, la ricerca delle soluzioni dell'equazione a quella di radici quadrate in campo complesso.

Poiché $a \neq 0$, possiamo moltiplicare ambo i membri dell'equazione per $4a$ ottenendo l'equazione equivalente

$$4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0. \tag{2.13}$$

Il termine $4abz$ può essere "assorbito" pensandolo come il doppio prodotto che compare nello sviluppo del quadrato di un binomio; infatti

$$4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 4a^2z^2 + 4abz + b^2 - b^2 + 4ac = (2az + b)^2 - b^2 + 4ac.$$

Di conseguenza, l'equazione (2.13) può essere riscritta equivalentemente nel seguente modo:

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Vediamo dunque che, posto $w = 2az+b$, i valori di w che soddisfano l'equazione sono le due radici quadrate in campo complesso di $b^2 - 4ac$. Osservando che $z = (-b + w)/(2a)$, otteniamo infine la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado in campo complesso

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \tag{2.14}$$

Ribadiamo che la radice quadrata che compare a secondo membro è intesa in campo complesso, dunque la formula (2.14) fornisce esattamente due soluzioni (che sono coincidenti se $b^2 - 4ac = 0$). Dal Teorema 2.43 vediamo subito che le radici quadrate sono due numeri complessi con lo stesso modulo e argomento che differisce di π, cioè sono numeri complessi opposti.

Se i coefficienti dell'equazione sono reali, si introduce la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$, detta discriminante dell'equazione. Se $\Delta \geq 0$, le sue radici quadrate in campo complesso sono due numeri reali opposti (entrambi nulli nel caso particolare $b^2 - 4ac = 0$); tali numeri vengono spesso denotati con $\pm\sqrt{\Delta}$ dove però, in questo caso, $\sqrt{\Delta}$ indica la radice quadrata aritmetica di un numero reale non negativo definita nell'Esempio 2.28 a pag. 69. (Purtroppo in letteratura viene utilizzato lo stesso simbolo sia per le radici complesse che per le radici aritmetiche; di norma il significato del simbolo risulta chiaro dal contesto.) Nel caso $\Delta < 0$, le sue radici quadrate in campo complesso sono due numeri immaginari opposti, del tipo $\pm i\sqrt{-\Delta}$, con $\sqrt{-\Delta}$ che indica ancora la radice quadrata aritmetica del numero reale positivo $-\Delta$. In conclusione, per quanto appena detto, se $\Delta \geq 0$ le due soluzioni dell'equazione di secondo grado sono reali (coincidenti se $\Delta = 0$), mentre se $\Delta < 0$ le due soluzioni sono coniugate complesse. $\triangleleft$

Supponiamo ora che i coefficienti del polinomio P siano reali. Allora vale la seguente proprietà: se $w \in \mathbb{C}$ è uno zero di P (cioè se $P(w) = 0$), allora anche $\overline{w}$ è uno zero di P. Questo si verifica facilmente utilizzando le proprietà del coniugato e il fatto che i coefficienti a_k sono reali (quindi $\overline{a}_k = a_k$); infatti

$$P(\overline{w}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{w}^k \overset{[\overline{a}_k = a_k]}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k w^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k w^k} = \overline{P(w)} = 0 \ .$$

Riassumendo, se i coefficienti del polinomio sono reali e se $w = a + ib$ è uno zero del polinomio, anche $\overline{w} = a - ib$ è uno zero del polinomio. Di conseguenza, nella fattorizzazione (2.11) del polinomio compaiono i due fattori $z - (a + ib)$ e $z - (a - ib)$. Se $z = x$ è reale, il prodotto di questi due fattori è

$$[x - (a + ib)] \cdot [x - (a - ib)] = [(x - a) - ib] \cdot [(x - a) + ib] = (x - a)^2 + b^2 \ .$$

Osserviamo che, se $b \neq 0$ (cioè se $w = a + ib$ non giace sull'asse reale) l'ultima espressione è un polinomio di secondo grado nella variabile reale x che non ammette zeri in campo reale. Inoltre, nella fattorizzazione (2.11) possono comparire o zeri che stanno sull'asse reale (quindi con parte immaginaria nulla), oppure coppie di zeri complessi coniugati con parte immaginaria diversa da zero. Di conseguenza, se restringiamo z al solo asse reale e moltiplichiamo i fattori in (2.11) relativi a zeri complessi coniugati distinti (quindi con parte immaginaria non nulla), otteniamo il seguente risultato.

Teorema 2.47 ➪ Fattorizzazione di polinomi a coefficienti reali

*Ogni polinomio in campo reale può essere fattorizzato come prodotto di polinomi di primo grado o polinomi di secondo grado **irriducibili** (cioè senza zeri in campo reale).*

Esempio 2.48. Vogliamo fattorizzare, in campo reale, il polinomio di quarto grado $P(x) = x^4+1$. Usando lo schema descritto sopra, dobbiamo innanzitutto determinare gli zeri di P, che in questo caso sono le quattro radici quarte di $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$:

$$z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \ , \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

vale a dire

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

La prima coppia di radici coniugate complesse fornisce il polinomio reale di secondo grado irriducibile

$$\left[x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \cdot \left[x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = x^2 - \sqrt{2}\,x + 1$$

e, in maniera analoga, la seconda coppia fornisce il polinomio irriducibile

$$\left[x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \cdot \left[x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = x^2 + \sqrt{2}\,x + 1.$$

La fattorizzazione di P in campo reale è dunque

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1).$$

Osserviamo che, in questo semplice caso, si poteva arrivare allo stesso risultato senza fare uso dei numeri complessi:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 \\ &= (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1). \end{aligned} \qquad \triangleleft$$

Concludiamo questo paragrafo con la definizione delle funzioni **esponenziale e logaritmo in campo complesso**. Se $z = a + ib$ è un numero complesso, si definisce la

Funzione esponenziale in campo complesso

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b) \qquad (z = a + ib).$$

Osserviamo che l'esponenziale che compare a secondo membro è l'esponenziale reale. Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

Proprietà dell'esponenziale complesso

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad |e^z| = e^{\Re z}, \quad e^{z+2\pi i} = e^z, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

In particolare, dalla seconda di queste relazioni deduciamo che $e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Inoltre, osservando che, se $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta,$$

un numero complesso z di modulo ρ e argomento θ si può scrivere anche in **rappresentazione esponenziale**

Rappresentazione esponenziale di un numero complesso

$$z = \rho\, e^{i\theta}, \qquad \rho = |z|,\ \theta = \arg(z)\,.$$

Vogliamo ora definire il **logaritmo in campo complesso**, che indicheremo con $\log_{\mathbb{C}}$ per distinguerlo dal logaritmo in campo reale, indicato con log, che abbiamo definito nel Paragrafo 2.8.6. Abbiamo già osservato che, se $z \in \mathbb{C}$, allora $e^z \neq 0$. Assegnato dunque un numero complesso $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, diremo che $z \in \mathbb{C}$ è un logaritmo complesso di w se $e^z = w$, vale a dire

$$e^z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \log_{\mathbb{C}} w \qquad\qquad (z \in \mathbb{C},\ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Consideriamo dunque un numero complesso $w \neq 0$ e rappresentiamolo in forma trigonometrica come $w = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, $\rho > 0$. Cerchiamo i numeri complessi $z = x + iy$ tali che $e^z = w$; utilizzando la definizione di esponenziale in campo complesso tale relazione può essere scritta come

$$e^x(\cos y + i\,\sin y) = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta).$$

Affinché sussista l'uguaglianza si deve avere

$$\begin{cases} e^x = \rho,\ \text{ovvero } x = \log\rho, \\ y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

dunque la relazione $e^z = w$ è soddisfatta da tutti i numeri complessi z della forma $z = \log\rho + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Di conseguenza, fissato $w \neq 0$ esistono infiniti numeri complessi z soddisfacenti la relazione $e^z = w$ o, detto in altri termini, esistono infiniti logaritmi complessi di w. Il logaritmo in campo complesso non è dunque una funzione ma una relazione che associa a ogni numero complesso non nullo un sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

Logaritmo in campo complesso

Se $w = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, con $\rho > 0$,

$$\log_{\mathbb{C}} w = \{\log\rho + i(\theta + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Usando la nozione di modulo e argomento principale di un numero complesso, definiti nel Paragrafo 1.9 a pag. 30, abbiamo che

$$\log_{\mathbb{C}} w = \{\log|w| + i(\arg(w) + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\} \qquad (w \neq 0).$$

Per poter definire una funzione, effettuiamo una scelta fra le infinite determinazioni del logaritmo complesso. Si definisce **logaritmo principale** (denotato con Log) la determinazione del logaritmo complesso che ha parte immaginaria in $(-\pi, \pi]$, cioè

Logaritmo principale

$$\operatorname{Log} w = \log |w| + i \arg(w) \qquad (w \neq 0).$$

Osserviamo, in particolare, che se w è un numero reale positivo, allora si ha $\operatorname{Log} w = \log w$, dal momento che $|w| = w$ e $\arg(w) = 0$.

Esempio 2.49. Si ha che

$$\begin{aligned} \log_{\mathbb{C}} i &= \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right);\ k \in \mathbb{Z} \right\}, &\qquad \operatorname{Log} i &= i\,\frac{\pi}{2}, \\ \log_{\mathbb{C}}(-1) &= \{ i(\pi + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z} \}, &\qquad \operatorname{Log}(-1) &= i\pi, \\ \log_{\mathbb{C}} 7 &= \{ \log 7 + i\,2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \}, &\qquad \operatorname{Log} 7 &= \log 7. \end{aligned}$$

◁

2.10 Esercizi

Esercizio 2.1. Stabilire quali delle seguenti terne (A, B, f) definiscono una funzione. Si tenga presente che con *rettangoli* (risp. *quadrati*) *centrati* si intendono i rettangoli (risp. quadrati) del piano con lati paralleli agli assi e centro nell'origine.

1) $A = \{\text{rette del piano}\}$, $B = \mathbb{R}$, f associa a ogni retta l'ordinata del punto d'intersezione con l'asse delle y;

2) $A = \{\text{rette del piano passanti per O}\} \setminus \{\text{asse delle } y\}$, $B = \mathbb{R}$, f associa a ogni retta non verticale per l'origine il suo coefficiente angolare;

3) $A = (0, +\infty)$, $B = \{\text{circonferenze con centro l'origine}\}$, f associa a ogni $r > 0$ la circonferenza centrata nell'origine di raggio r;

4) $A = (0, +\infty)$, $B = \{\text{rettangoli centrati}\}$, f associa a $x > 0$ un rettangolo di area pari a x;

5) $A = \{\text{rettangoli centrati}\}$, $B = \mathbb{R}$, f associa a un rettangolo il valore della sua area;

6) $A = (0, +\infty)$, $B = \{\text{quadrati centrati}\}$, f associa a $x > 0$ un quadrato di area pari a x.

Esercizio 2.2. Posto $f(x) = x^3 - 2x + 1$, calcolare $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

Esercizio 2.3. Posto $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, calcolare $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$. Cosa succede in $x = 3$?

Esercizio 2.4. Dati f e y_0, dire se $y_0 \in \mathrm{Im}(f)$:

1) $f(x) = x^2$, $y_0 = 3$, $y_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = -1$, $y_0 = 0$;

2) $f(x) = 1 + x^2$, $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = 1/2$, $y_0 = 5$;

3) $f(x) = \log x$, $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = -1/2$, $y_0 = 1/2$;

4) $f(x) = 1 + \cos x$, $y_0 = -1$, $y_0 = 2$, $y_0 = 1/2$, $y_0 = 0$.

Esercizio 2.5. Dato $x \in \mathbb{R}$, si dimostri l'equivalenza tra le seguenti affermazioni:

(i) $x = 0$;
(ii) $|x| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Esercizio 2.6. Dire sotto quali condizioni su $x, y \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza $|x + y| = |x| + |y|$.

Esercizio 2.7. Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $2x - 1 \geq 0$

2) $5 - 3x > 0$

✍ 3) $x + 6 - 2x \geq 2 - x$

✍ 4) $-x + 5 + 2x \geq 9 + x$

5) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

✍ 6) $x^2 - 4x + 4 > 0$

7) $-x^2 - 6x - 19 \geq 0$

✍ 8) $(x+3)^2 + (x-7)^2 \geq 0$

✍ 9) $x + \dfrac{1-x}{x+3} - 1 > 0$

✍ 10) $|x-1| + |2x-3| \geq 1$

11) $\dfrac{|x-2|}{x+2} + x - 1 \geq 0$

✍ 12) $\cos^2 x - 2\cos x - 3 < 0$

✍ 13) $\log(4x-5) \geq 0$

✍ 14) $\sqrt{-x(x+2)} < x + 1$

✍ 15) $e^{|x|} < e^{x+1}$

✍ 16) $\tan^2 x - 3 \geq 0$

Esercizio 2.8. Per ogni coppia di insiemi A e B, determinare $A \cap B$.
✍ 1. $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x+3| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 2\}$;
2. $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x-3| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ |x| > 5\}$;
3. $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x+2| \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \geq 2\}$;
✍ 4. $A = \{x \in \mathbb{R};\ \log(2-x^2) \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ |x-1| < \sqrt{3}\}$;
✍ 5. $A = \{x \in \mathbb{R};\ e^{\arctan(x-1)} < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ \log x > 2\}$;
6. $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + 4x - 5 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ \log x \geq -7\}$.

Esercizio 2.9. Si risolvano le seguenti disequazioni. Successivamente, si determinino estremo superiore e inferiore dell'insieme delle soluzioni, specificando se siano massimo e minimo.

1) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| > x - 1$

2) $|x+1| > \sqrt{x+1}$

3) $|x+2| + |x+1| > 2\,|x-3|$

4) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < \sqrt{x} + 1$

5) $2^{2x} \geq 4^{x^2-2}$

6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+3} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x}$

Esercizio 2.10. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni.

1) $\sqrt{-x}$

2) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

3) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$

4) $\dfrac{1}{x+2}$

5) $\log(x^2-1)$

6) $\dfrac{1}{\log x}$

7) $e^{1/x}$

8) $\sqrt{(x-1)(x+2)}$

9) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x\log(x-3)}$

10) $(\sin x)^{\tan x}$

11) $\log(1+\sin x)$

12) $\log(\log x)$

13) $\dfrac{1}{1-|x|}+\dfrac{1}{1+|x|}$

14) $\log(|x|)$

15) $\sqrt{1-\sqrt{x}}$

16) $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

17) $\log\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$

18) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$

Esercizio 2.11. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni, utilizzando solo i grafici delle funzioni elementari e traslazioni o dilatazioni.

1) $f(x)=|x-2|+1$

2) $f(x)=e^x-1$

3) $f(x)=e^{x-1}$

4) $f(x)=\cos(2x)$

5) $f(x)=\log(x+2)$

6) $f(x)=\log x+2$

Esercizio 2.12. Conoscendo le definizioni, le proprietà e i grafici delle funzioni di base, disegnarne nel piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni:

$$[x^2], \qquad [2+\sin x], \qquad |x(x+2)(x-2)|, \qquad |\sin^2(2x)-\cos^2(2x)|.$$

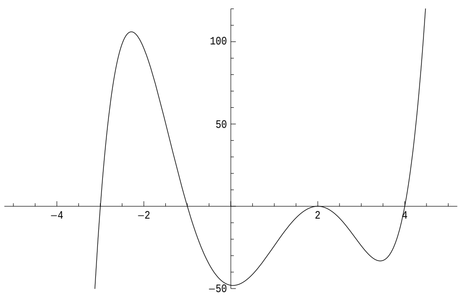
(Notazione: $[x]$ è la parte intera di $x\in\mathbb{R}$).

Esercizio 2.13. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni definite a pezzi.

1) $f(x)=\begin{cases}1 & x\le -1\\ x^2 & -1<x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}e^x+1 & x\le 0\\ 2+x & 0<x\le 1\\ 4-x^2 & x>1\end{cases}$

Esercizio 2.14. Data la funzione f il cui grafico è il seguente



disegnare il grafico di $|f(x)|$, $f(x+2)$, $f(x)-2$, $f(3x)$, $f(x/4)$, $3f(x)$, $f(x)/4$.

Esercizio 2.15. Per ciascuna coppia di funzioni f e g, calcolare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$:
1) $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$;
2) $f(x) = \log x$, $g(x) = 1 + 7x^2$;
3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 3$;
4) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{x - 8}$ e $g(x) = x^3$;
6) $f(x) = \arctan x$ e $g(x) = \log(1 + x^2)$.

Esercizio 2.16. Data la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)$$

a) determinarne il dominio; b) mostrare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Esercizio 2.17. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

a) mostrare che f è dispari; b) mostrare che f è limitata; c) mostrare che f è strettamente decrescente per $x > 1$; d) determinarne l'inversa in $[1, +\infty)$.

Esercizio 2.18. Data la funzione

$$f(x) = -\frac{2|x - 1|}{1 + x}$$

a) determinarne il dominio; b) mostrare che f non è limitata né superiormente né inferiormente; c) mostrare che f è decrescente per $x > 1$.

Esercizio 2.19. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

a) mostrare che f è pari; b) mostrare che f è limitata; c) mostrare che f è strettamente crescente per $x \geq 0$; d) determinarne l'inversa in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2.20. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni.

1) $\log\left(\dfrac{1 - \sin(2x)}{\sqrt{\pi^2 - 9\arctan^2\left(\left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|\right)}}\right)$

2) $\sqrt{\dfrac{|x^2-2|+1}{x^2-1}}$

3) $\left(\dfrac{\sin x}{x^2-1}\right)^{\log(6x^2+x-1)}$

4) $\sqrt{\log 3 - \log\left(\dfrac{|x|-3}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{x}\right)}$

Esercizio 2.21. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ determinare la soluzioni della disequazione

$$\log\left(\frac{x-1}{x-c}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.22. Dimostreremo nel Capitolo 7 che il logaritmo è una funzione *concava* in $(0,+\infty)$, cioè per ogni $x_1, x_2 > 0$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$, è soddisfatta la disuguaglianza

$$\log(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda \log(x_1) + (1-\lambda)\log(x_2).$$

Utilizzando questa proprietà, dimostrare per induzione che vale

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log x_k \leq \log\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se si ha $x_i > 0$, $\alpha_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Esercizio 2.23. [Medie] Utilizzando il risultato dell'Esercizio 2.22 dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, dati n numeri reali $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, vale

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Le tre quantità nella stima sono rispettivamente la media armonica, la media geometrica e la media aritmetica dei valori a_i, $i = 1, \ldots, n$.

Esercizio 2.24. Dati p e $q \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $q > 0$ e tali che $1/p + 1/q = 1$, dimostrare che

(a) per ogni $a, b \geq 0$ si ha

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{(Disuguaglianza di Young);}$$

(b) per ogni coppia di n–uple $(a_1, \dots, a_n)$,$(b_1, \dots, b_n)$ con $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \qquad \text{(Disuguaglianza di Hölder).}$$

Esercizio 2.25. Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z - i| \leq 1\}, \qquad \left\{z \in \mathbb{C} : \ \Im\left(\frac{z+1}{1+i}\right) < 0\right\}.$$

Esercizio 2.26. Calcolare le seguenti potenze utilizzando la formula di de Moivre (2.9):

$$(1+i)^{12}, \qquad (\sqrt{3} - i)^4, \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}.$$

Esercizio 2.27. Utilizzando il Teorema 2.43, calcolare le seguenti radici in campo complesso e rappresentarle nel piano di Gauss:

$$\sqrt{4}, \qquad \sqrt{-9}, \qquad \sqrt{i}, \qquad \sqrt[3]{8}, \qquad \sqrt[4]{-4}.$$

Esercizio 2.28. Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

1) $z^2 - (2+i) + \dfrac{3+2i}{4} = 0$,

2) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$,

3) $i\,z^2 = \overline{z}$,

4) $z^4 = |z|$.

CAPITOLO 3

Limiti

3.1 Definizioni e prime proprietà

Come sarà chiaro nei capitoli successivi, il calcolo differenziale e il calcolo integrale, che sono i principali strumenti dell'Analisi Matematica, sono basati sul concetto di limite, che descriveremo in questo capitolo.

Nella sua versione più elementare, il limite è lo strumento giusto per determinare esplicitamente (o addirittura definire) delle quantità non note (come aree di superfici, lunghezze di curve, etc.) che possono essere approssimate da quantità note con un livello di precisione arbitrariamente elevato.

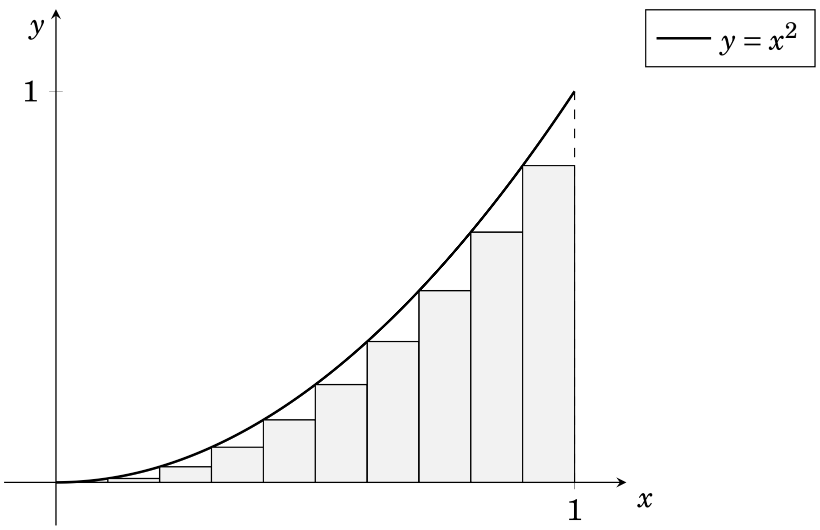


Figura 3.1: Approssimazione dell'area tra $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ e l'asse delle x

Ad esempio, poniamoci il problema di conoscere il valore dell'area della regione di piano compresa tra l'arco di parabola, grafico della funzione $f(x) =$

x^2 per $x \in [0,1]$, e l'asse delle x. Approssimiamo per difetto la regione che ci interessa mediante n rettangoli, i cui vertici di base saranno disposti sui punti di ascissa

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n}\ ,\ x_2 = \frac{2}{n}\ , \dots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n}\ ,\ x_n = 1\ .$$

È naturale cercare di fare la migliore approssimazione per difetto con rettangoli aventi le basi specificate; questo significa che, in ciascun sottointervallo, sceglieremo il più alto rettangolo che stia sotto al grafico della funzione. Poiché la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente monotona crescente nell'intervallo $[0,1]$, questo significa prendere, in ogni sottointervallo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, l'altezza del rettangolo pari a $f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2$. Tenendo conto che tutti i rettangoli hanno base di lunghezza $1/n$, la somma delle aree di questi rettangoli è quindi

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2\ .$$

La sommatoria può essere calcolata esplicitamente (si veda l'Esercizio 1.7 a pag. 36), ottenendo

$$s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\ .$$

È chiaro che l'approssimazione risulterà tanto più precisa quanto più sarà grande il numero n di rettangoli. Ma è altrettanto chiaro che, per quanto n sia grande, il valore di s_n non coinciderà mai con l'area che ci interessa. L'unico modo per ottenere l'area "giusta" è prendere n "arbitrariamente grande". Al crescere di n, l'errore $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ diventa sempre più piccolo e le aree approssimanti si avvicinano al valore $1/3$; la nozione di limite renderà rigorosa questa idea e scriveremo che

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

ossia che il limite per n che tende a $+\infty$ dei valori s_n è $1/3$.

Analogamente, la migliore approssimazione per eccesso con rettangoli di base $1/n$ si ottiene scegliendo l'altezza del k-esimo rettangolo pari a $f(x_k) = k^2/n^2$. La somma delle aree di questi rettangoli è

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

e, come prima, concludiamo che il limite per n che tende a $+\infty$ di S_n è $1/3$, valore che coincide con il limite di s_n.

A questo punto, siamo "autorizzati" a dire che l'area della regione di piano sottostante l'arco di parabola in questione vale $1/3$. Infatti, per ogni numero $A < 1/3$ troviamo un'approssimazione per difetto s_n tale che $A < s_n$, dunque A non può essere l'area della regione. Analogamente, per ogni $A > 1/3$ troviamo un'approssimazione per eccesso S_n tale che $A > S_n$, dunque neanche i numeri maggiori di $1/3$ possono misurare l'area della regione considerata. Concludiamo quindi che l'unico valore possibile è proprio $1/3$.

Il metodo per calcolare le aree che abbiamo descritto è il cosiddetto *Metodo di esaustione* la cui idea risale a Eudosso e Archimede. Nella sua formulazione moderna, esso si basa sull'Assioma di completezza dei numeri reali (si veda il Paragrafo 1.5) e porta alla definizione di integrale che vedremo nel Capitolo 8.

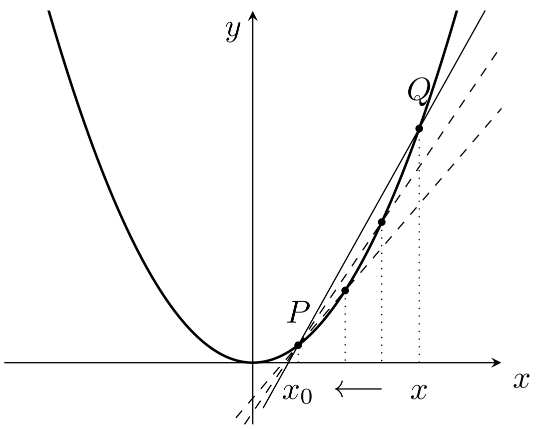


Figura 3.2: Approssimazione della retta tangente

Un altro caso tipico di applicazione del concetto di limite è la determinazione della direzione tangente a una curva in un suo punto fissato. La retta tangente a una curva in un punto P è, per definizione, la retta che passa per P e che meglio approssima la curva vicino a P. Questa definizione geometrica ha un puro carattere qualitativo (cosa vuol dire "approssimare meglio" di tutte le altre rette?) e risulta quindi poco gestibile nel momento in cui si vuole conoscere esplicitamente la retta tangente. Per vedere come si può affrontare il problema con un esempio concreto, consideriamo la parabola di equazione $y = x^2$ e supponiamo di voler calcolare l'equazione della retta tangente a questa parabola nel punto $P = (x_0, x_0^2)$. Ovviamente l'unica incognita è la pendenza della retta, ossia, in termini analitici, il suo coefficiente angolare. Un approccio ragionevole, che sarà reso rigoroso nel Capitolo 5, è il seguente. Consideriamo, sull'asse delle ascisse, un punto x vicino a x_0, ma distinto da x_0 stesso. Il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P = (x_0, x_0^2)$

e $Q = (x, x^2)$ vale

$$m(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \tag{3.1}$$

(si veda la Figura 3.2).

È chiaro che la retta in questione non è tangente alla parabola, ma secante. Tuttavia, se "avviciniamo" x a x_0, il punto Q si muove sulla parabola avvicinandosi al punto P, e la retta passante per i punti P e Q "tende" ad assumere la posizione tangente alla parabola nel punto P. In altri termini, quello che possiamo aspettarci è che il coefficiente angolare m della retta tangente sia quel valore a cui "tende" $m(x)$ quando x "tende" a x_0. In simboli questa affermazione si esprime nel seguente modo:

$$m = \lim_{x \to x_0} m(x)\,,$$

e si legge "m è il limite di $m(x)$ per x che tende a x_0". Nel nostro caso, dopo una semplificazione si ha $m(x) = x + x_0$, quindi è facile intuire che tale limite deve valere $m = 2x_0$; infatti x_0 è fissato, e la somma $x + x_0$ si avvicina a $2x_0$ quando x si avvicina a x_0.

Osserviamo che non è possibile prendere direttamente $x = x_0$ nella costruzione della retta secante, in quanto ciò non avrebbe senso (la funzione $m(x)$ introdotta in (3.1) non è nemmeno definita per $x = x_0$). Attraverso questa procedura di avvicinamento è però stato possibile dare un senso al coefficiente angolare della retta tangente.

Nei due esempi precedenti possiamo riscontrare le seguenti caratteristiche comuni:

- è data una funzione definita nel suo dominio A (nel primo esempio abbiamo le due successioni $(s_n)_n$ ed $(S_n)_n$, che sono entrambe funzioni definite in $A = \mathbb{N}^+$, mentre nel secondo esempio abbiamo la funzione $m(x)$ definita in $A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$);
- è dato un "target" ("$+\infty$" nel primo esempio, x_0 nel secondo) che può non appartenere al dominio della funzione, ma che ha elementi di A arbitrariamente vicini (se pensiamo $n \in \mathbb{N}$ grande come "vicino" a $+\infty$);
- l'obiettivo è capire se, per valori della variabile indipendente vicini al target, l'immagine della funzione si stabilizza intorno a un preciso valore l ($l = 1/3$ nel primo esempio, $l = 2x_0$ nel secondo).

Cerchiamo ora di rendere rigorosa e generale l'idea di limite descritta sopra, cominciando dal caso in cui il target è un numero $x_0 \in \mathbb{R}$. Innanzitutto, precisiamo che tipo di richiesta è necessario fare su x_0. Per quanto abbiamo appena detto, deve essere possibile trovare punti nel dominio della funzione che siano arbitrariamente vicini al target x_0.

Definizione 3.1 ➫ Punto di accumulazione in $\mathbb{R}$

*Sia A un sottoinsieme dei numeri reali. Diremo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di A se **ogni** intorno di x_0 contiene punti di A distinti da x_0 stesso, cioè se per ogni $\delta > 0$ si ha $[(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$.*

Ad esempio, se $A = (a, b) \setminus \{x_0\}$ con $x_0 \in [a, b]$, allora tutti i punti dell'intervallo chiuso $[a, b]$ sono di accumulazione per A.

Formalizziamo ora il concetto di limite, ossia la possibilità di determinare un comportamento coerente per i valori di una funzione quando la variabile indipendente varia vicino a un punto di accumulazione del dominio.

Definizione 3.2 ➫ Limite finito in $x_0 \in \mathbb{R}$

Sia data $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A. Diremo che il numero reale l è il limite di f per x che tende a x_0, e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

*se **per ogni** $\varepsilon > 0$ **esiste** un numero $\delta > 0$ tale che*

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \quad \forall x \in [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \cap A\ . \tag{3.2}$$

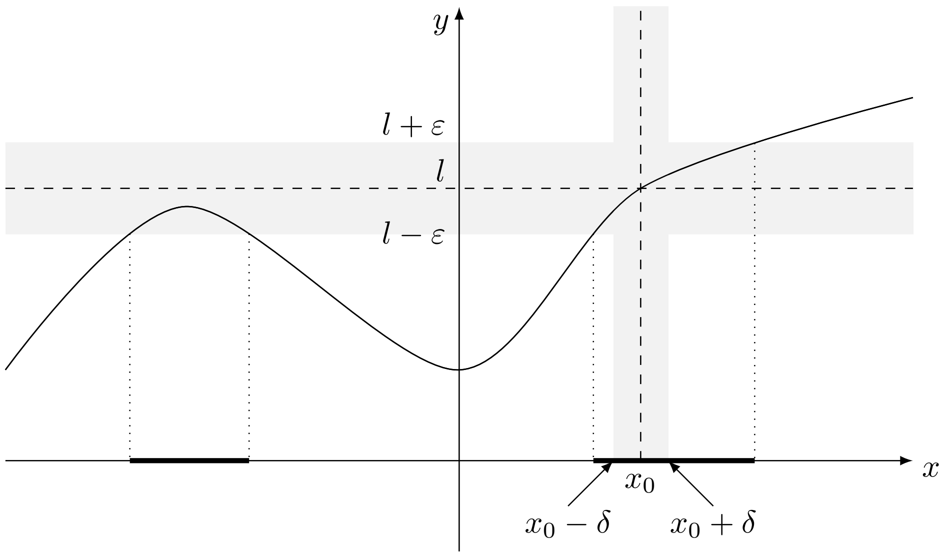


Figura 3.3: Definizione di limite

Abbiamo già osservato che la funzione f può anche non essere definita nel punto x_0. Aggiungiamo ora che, anche se la funzione è definita in x_0, il valore $f(x_0)$ non gioca alcun ruolo nella definizione di limite. Inoltre, essendo x_0 un punto di accumulazione di A, l'insieme $\{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A,\ x \neq x_0\}$ che compare nella Definizione 3.2 è non vuoto per ogni $\delta > 0$.

Nella Figura 3.3 abbiamo mostrato graficamente il significato della definizione di limite. Fissato $\varepsilon > 0$ si considera la striscia orizzontale nel piano xy definita da $|y - l| < \varepsilon$. Si identificano poi, sull'asse x, i valori delle ascisse tali che i corrispondenti punti sul grafico della funzione siano contenuti in questa striscia orizzontale, vale a dire le soluzioni della disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$. (Nella figura queste regioni sull'asse x sono indicate con un tratto più spesso.) Infine, si deve verificare che un intorno del punto x_0, eventualmente privato del punto x_0 stesso e intersecato col dominio della funzione, sia tutto contenuto in questa regione dell'asse x.

Esempio 3.3. Sia $f(x) = 3x + 7$, $x \in \mathbb{R}$; dimostriamo che $\lim_{x\to 2} f(x) = 13$. Dobbiamo mostrare che è verificata la definizione di limite con $x_0 = 2$ e $l = 13$.

Fissato $\varepsilon > 0$ dobbiamo determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $|3x + 7 - 13| < \varepsilon$, che è equivalente a $-\varepsilon < 3x - 6 < \varepsilon$. A conti fatti, si verifica che queste due disequazioni sono contemporaneamente soddisfatte se e solo se $x \in (2 - \varepsilon/3, 2 + \varepsilon/3)$, che è un intorno del punto $x_0 = 2$ di raggio $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/3$. Quindi, quale che sia $\varepsilon > 0$, si ha che la disequazione $|f(x) - 13| < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni $x \in (2 - \delta(\varepsilon), 2 + \delta(\varepsilon))$, e questo completa la verifica richiesta. $\triangleleft$

Esempio 3.4. Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1 \ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza $|(1 - x^2/2) - 1| < \varepsilon$ è soddisfatta quando $x^2 < 2\varepsilon$, cioè quando $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$. Basta quindi scegliere $\delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$ nella definizione di limite. $\triangleleft$

Esempio 3.5. Mostriamo che per ogni $a > 0$ si ha che

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Tratteremo solo il caso $a > 1$, poiché il caso $0 < a < 1$ segue dal fatto che $a^x = (1/a)^{-x}$ e il caso $a = 1$ è banale.

Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo mostrare che $|a^x - 1| < \varepsilon$ quando x appartiene a un opportuno intorno dell'origine. Non vogliamo fare uso della funzione logaritmo, dal momento che la sua definizione come funzione inversa dell'esponenziale è subordinata ad alcune proprietà dell'esponenziale stesso che ancora non abbiamo dimostrato. Non saremo quindi in grado di esibire tutte le soluzioni della disequazione $|a^x - 1| < \varepsilon$, ma ci limiteremo a mostrare che esiste un'opportuno intorno $(-\delta, \delta)$ in cui la disequazione è soddisfatta. Per fare questo, iniziamo considerando i valori della funzione del tipo $a^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}^+$, che possono essere stimati con la disuguaglianza di Bernoulli. Infatti, poiché $a^{1/n} > 1$, posto $c_n = a^{1/n} - 1 > 0$, avremo che $a = (1 + c_n)^n \geq 1 + n\, c_n$, cioè $c_n \leq (a-1)/n$.

Scegliamo $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $N > (a-1)/\varepsilon$, per garantirci che $c_N \leq (a-1)/N < \varepsilon$, e sia $\delta = 1/N$. Se $|x| < \delta$, sfruttando il fatto che la funzione a^x è monotona crescente avremo $a^x \in \left(a^{-1/N}, a^{1/N}\right)$ e quindi

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{1}{1+c_N} = a^{-1/N} < a^x < a^{1/N} = 1 + c_N < 1 + \varepsilon.$$

Di conseguenza, se $x \in (-\delta, \delta)$, si ha $-\varepsilon < a^x - 1 < \varepsilon$, che è quanto volevamo dimostrare. $\lhd$

Osservazione 3.6. Nelle verifiche di limite talvolta può essere utile limitarsi a considerare solo valori di ε più piccoli di un fissato numero positivo ε_0. Facciamo vedere che questo non è restrittivo. Supponiamo che per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ esista un numero $\delta(\varepsilon)$ tale che (3.2) sia soddisfatta. Sia ora $\varepsilon > \varepsilon_0$ e scegliamo $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon_0)$. Poiché (3.2) è soddisfatta quando $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\delta = \delta(\varepsilon_0)$, a maggior ragione sarà soddisfatta quando $\varepsilon > \varepsilon_0$ e per lo stesso valore di δ.
Mettiamo in pratica quanto detto per mostrare che

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, la disequazione $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$ è equivalente alla coppia di disequazioni $2 - \varepsilon < \sqrt{x} < 2 + \varepsilon$. Per quando detto prima, non è restrittivo supporre che $\varepsilon < 2$, in modo tale che tutti i membri della disequazione siano positivi. Elevando al quadrato otteniamo che $-(4\varepsilon - \varepsilon^2) < x - 4 < 4\varepsilon + \varepsilon^2$; scegliendo quindi $\delta = 4\varepsilon - \varepsilon^2$ (che è positivo dal momento che $\varepsilon < 2$), concludiamo che $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$. $\lhd$

Esempio 3.7. Sia $f(x) = |x|/x$, $x \neq 0$; vogliamo dimostrare che non esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a 0. Dobbiamo dunque far vedere che, comunque si scelga un numero reale $l \in \mathbb{R}$ come "candidato" limite, non è possibile fare in modo che siano verificate le proprietà richieste nella Definizione 3.2 di limite. In altri termini, dobbiamo mostrare che per ogni scelta di l, esiste un numero $\varepsilon > 0$ con la seguente proprietà: comunque si scelga $\delta > 0$, esistono dei punti $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$, tali che $|f(x) - l| \geq \varepsilon$ (in questo modo la proprietà (3.2) non è verificata).
Nel nostro caso basta scegliere $\varepsilon = 1/2$ e procedere a una verifica grafica di questo fatto: è infatti chiaro che, quale che sia il valore di l, o i punti x a sinistra

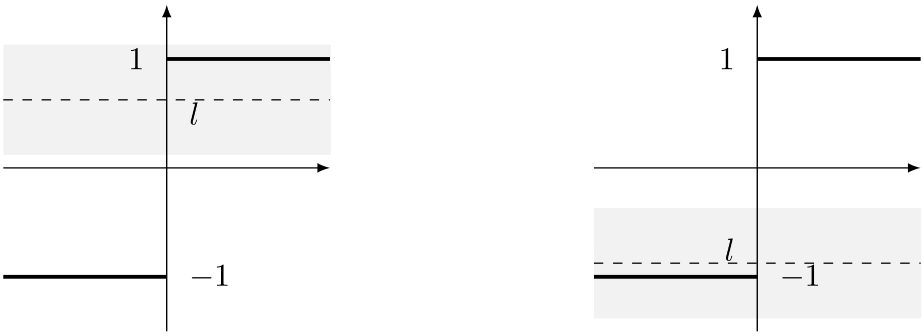


Figura 3.4: Grafico della funzione $|x|/x$

dell'origine o quelli a destra (o entrambi) sono tali che $|(|x|/x) - l| \geq 1/2$ (si veda la Figura 3.4). Ad esempio, se $l = 1$ la disequazione $|(|x|/x) - 1| \geq 1/2$ è verificata da tutti i punti $x > 0$, ma non è verificata dai punti $x < 0$. $\lhd$

Osservazione 3.8. Sia $f \colon A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A. Dalla definizione di limite segue subito che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \ .$$

Osserviamo che, in generale, per limiti non nulli vale l'implicazione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\alpha| \ ,$$

ma l'implicazione opposta è falsa (per la funzione $f(x) = |x|/x$ considerata nell'Esempio 3.7 si ha infatti che esiste $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 1$, mentre $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste). $\lhd$

Finora abbiamo considerato solo limiti per x che tende a un dato punto $x_0 \in \mathbb{R}$. In molte situazioni si vuole però studiare il comportamento di una funzione quando x "tende a $+\infty$" (diventa cioè arbitrariamente grande), oppure a $-\infty$. Analogamente, è d'interesse considerare anche il caso in cui la funzione diventa arbitrariamente grande anziché tendere a un valore finito.

Per descrivere in maniera unitaria questi differenti casi di interesse conviene introdurre il concetto di numero reale esteso.

Numeri reali estesi

L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ dei numeri reali estesi comprende tutti i numeri reali più i **simboli** $+\infty$ e $-\infty$, cioè $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Sottolineiamo nuovamente che $-\infty$ e $+\infty$ sono simboli, utili nelle notazioni, e non numeri reali.

Estendiamo ora la nozione di intorno e di punto di accumulazione ai numeri reali estesi. Ricordiamo che le analoghe nozioni in $\mathbb{R}$ sono già state date rispettivamente nelle Definizioni 1.19 e 3.1.

Definizione 3.9 ➾ Intorni e punti di accumulazione in $\overline{\mathbb{R}}$

Un intorno di $+\infty$ (risp. $-\infty$) è una semiretta del tipo $(a, +\infty)$ (risp. $(-\infty, a)$), $a \in \mathbb{R}$. Diremo che $x_0 = +\infty$ è un punto di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se per ogni intorno $(a, +\infty)$ di $+\infty$ l'intersezione $A \cap (a, +\infty)$ è non vuota (analoga definizione varrà per $x_0 = -\infty$).

Utilizzando queste nozioni possiamo formalizzare una definizione di limite che comprenderà tutti i casi di nostro interesse.

Definizione 3.10 ➾ Limite

Sia $f \colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Diremo che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di $f(x)$ quando x tende a x_0 se ***per ogni*** *intorno V di l* ***esiste*** *un intorno U di x_0 tale che*

$$f(x) \in V \qquad \forall x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A.$$

Osserviamo che, se $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$, allora $U \setminus \{x_0\} = U$. Lasciamo inoltre al lettore la dimostrazione del fatto che se U_1 e U_2 sono due intorni di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $U_1 \cap U_2$ e $U_1 \cup U_2$ sono intorni di x_0.

È evidente che, nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$, la Definizione 3.2 coincide con la Definizione 3.10. A titolo esemplificativo riscriviamo la Definizione 3.10 esplicitando gli intorni anche nei casi $x_0 = \pm\infty$ o $l = \pm\infty$.

Definizione 3.11 ➾ Limite finito all'infinito

Sia $f \colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Diremo che il numero reale l è il limite di f per x che tende a $+\infty$, e scriveremo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $K = K(\varepsilon) > a$ tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \quad \forall x > K \ .$$

Analogamente, se $f \colon (-\infty, a) \to \mathbb{R}$, diremo che il numero reale l è il limite di f per x che tende a $-\infty$, e scriveremo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $K < a$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x < K$.

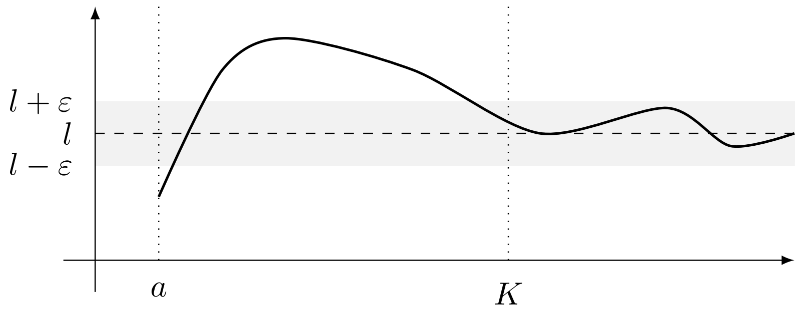


Figura 3.5: Definizione di limite a $+\infty$

Esempio 3.12. Riprendiamo la funzione $f(x) = 1/x$, $x > 0$, e mostriamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$ (con $l = 0$) è soddisfatta per quei valori positivi di x tali che $1/x < \varepsilon$, cioè tali che $x > 1/\varepsilon$. Basterà quindi scegliere $K(\varepsilon) = 1/\varepsilon$. ◁

Definizione 3.13 ➫ Limiti infiniti in $x_0 \in \mathbb{R}$

Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A. Diremo che f diverge a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per x che tende a x_0, e scriveremo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \qquad (\textit{risp.}\ -\infty)$$

se per ogni $M > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(M) > 0$ tale che $f(x) > M$ (risp. $f(x) < -M$) per ogni $x \in [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \cap A$.

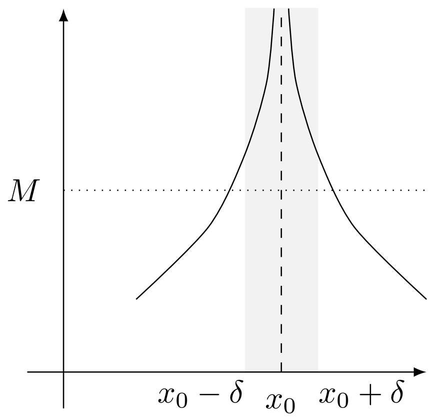


Figura 3.6: Definizione di limite infinito

Analoghe definizioni possino essere ricavate dalla definizione generale per $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$. Per esempio, se $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, diremo che

f tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, e scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se per ogni $M > 0$ esiste $K = K(M) > a$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x > K$.

Esempio 3.14. Facciamo vedere che $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$. Fissato $M > 0$, la disequazione $1/x^2 > M$, con $x \neq 0$, è soddisfatta se $x^2 < 1/M$ e $x \neq 0$, cioè se $x \in (-1/\sqrt{M}, 1/\sqrt{M})$, $x \neq 0$. Basterà quindi scegliere $\delta(M) = 1/\sqrt{M}$. $\lhd$

Esempio 3.15. Mostriamo che per ogni $a > 1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

Come prima cosa, osserviamo che, scrivendo $a = b + 1$, con $b > 0$, la disuguaglianza di Bernoulli ci garantisce che $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Fissiamo ora $M > 0$ e individuiamo, grazie alla proprietà archimedea, $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $1 + Nb > M$. Dal momento che la funzione esponenziale è strettamente crescente, per ogni $x > N$ otteniamo

$$a^x > a^N \geq 1 + Nb > M$$

che ci permette di concludere quanto volevamo dimostrare.

Da questo segue anche che

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \qquad (a > 1).$$

Osserviamo infatti che $+\infty$ è di accumulazione per il dominio di $\log_a$ (dal momento che contiene tutti i punti del tipo a^x). Inoltre, fissato $M > 0$, se x appartiene al dominio di $\log_a$ e se $x > a^M$, ricordando che $\log_a$ è una funzione monotona crescente si ha che $\log_a x > \log_a a^M = M$. $\lhd$

Verifichiamo che l'operazione di limite è ben posta, ossia che se il limite di una funzione esiste, allora è unico.

Teorema 3.16 ➩ Unicità del limite

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di A. Supponiamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2\ .$$

Allora $l_1 = l_2$.

Dimostrazione. Per semplicità illustreremo solo il caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che si abbia $l_1 \neq l_2$. Scegliamo la quantità positiva $\varepsilon = |l_1 - l_2|/2$ in maniera tale che gli intorni $(l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ ed $(l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ siano disgiunti. Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, per definizione di limite deve esistere un numero $\delta_1 > 0$ tale che

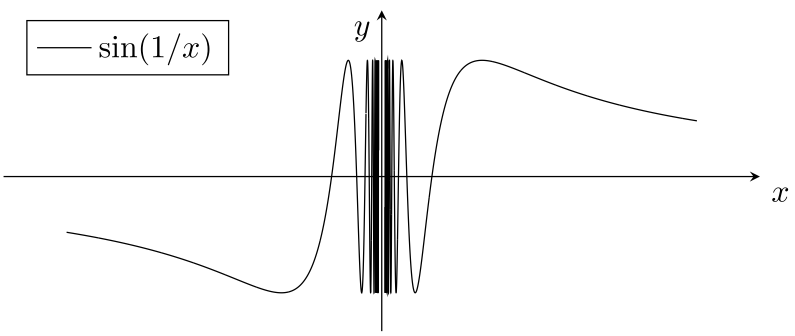
$$f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A,\ x \neq x_0 \ .$$

Analogamente, poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$, deve esistere un numero $\delta_2 > 0$ tale che

$$f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \cap A,\ x \neq x_0 \ .$$

Preso quindi δ il più piccolo fra δ_1 e δ_2, si deve avere contemporaneamente che $f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ e $f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$. Questo è chiaramente impossibile in quanto gli intorni $(l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ ed $(l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ sono disgiunti. $\square$

Esempio 3.17. In termini intuitivi, l'esistenza del limite l di una funzione f in un punto x_0 corrisponde al fatto che per i punti x arbitrariamente vicini a x_0 i valori della funzione tendano a "stabilizzarsi" su un'unica quota l. Quando questo non succede, il limite non esiste, come nel caso dell'Esempio 3.7. Un altro esempio tipico di non esistenza del limite è il caso in cui la funzione "oscilli selvaggiamente" intorno al punto x_0 in cui si vorrebbe determinare il limite. Ad esempio, la funzione $f(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, non ammette limite per $x \to 0$, come si può dimostrare facendo vedere che, fissato un qualsiasi $\lambda \in [-1, 1]$, in ogni intorno di $x_0 = 0$ esiste almeno un punto (in realtà infiniti) in cui la funzione vale λ. Questa tecnica per mostrare che un limite non esiste sarà ulteriormente descritta nel Paragrafo 3.4. $\triangleleft$



Nell'Esempio 3.7 abbiamo mostrato che la funzione $f(x) = |x|/x$, $x \neq 0$, non ammette limite per x che tende a 0. Tuttavia è chiaro che, se x si avvicina a zero da destra (ossia per valori di x positivi), la funzione tende a 1 (è costantemente uguale a 1 per $x > 0$), mentre se x si avvicina a zero da sinistra la funzione tende a -1. È evidente che questo tipo di informazione è più precisa della semplice non esistenza del limite. Questa osservazione motiva l'introduzione dei concetti di limite destro e sinistro.

Definizione 3.18 ➩ Limite destro e sinistro

Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di $A \cap (x_0, +\infty)$ (risp. $A \cap (-\infty, x_0)$). Diremo che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite destro (risp. sinistro) di f per x che tende a x_0, e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l, \qquad \left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \right)$$

se per ogni intorno V di l esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \in V, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A \qquad (\text{risp. } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A) .$$

L'unica differenza rispetto alla Definizione 3.2 di limite è che nel limite destro si tiene conto solo dei valori della funzione per x appartenente a un intorno destro di x_0, vale a dire in un intervallo del tipo $(x_0, x_0+\delta)$, anziché in un intorno completo del tipo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Analoghe considerazioni valgono per il limite sinistro.

Esempio 3.19. Riprendendo l'esempio della funzione $f(x) = |x|/x$, $x \neq 0$, si ha quindi che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. ◁

Osserviamo a questo punto che tutti i teoremi enunciati in questo capitolo valgono anche quando i limiti vengono sostituiti con i corrispondenti limiti destri o sinistri. Quando si possono considerare entrambi i limiti sinistro e destro, vale inoltre il seguente risultato, del quale lasciamo la dimostrazione al lettore.

Teorema 3.20 ➩ Criterio di esistenza del limite

Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per $A \cap (x_0, +\infty)$ e $A \cap (-\infty, x_0)$. Allora il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste se e solo se esistono i limiti destro e sinistro in x_0 e sono uguali.

Concludiamo il paragrafo con un teorema che lega il segno del limite di una funzione f in x_0 col segno della funzione vicino al punto x_0.

Teorema 3.21 ➩ Permanenza del segno

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A.

(a) *Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 0$ (risp. < 0), allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ (risp. < 0) per ogni $x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A$.*

(b) *Se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \geq 0$ (risp. ≤ 0) per ogni $x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A$, e se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora $l \geq 0$ (risp. ≤ 0).*

Dimostrazione. Consideriamo il caso (a) con $l > 0$. Sia V un intorno di l tale che $V \subset (0, +\infty)$. Per definizione di limite, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \in V$, e dunque $f(x) > 0$, per ogni $x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A$.

Per quanto riguarda il caso (b), se per assurdo fosse $l < 0$ si otterrebbe una contraddizione utilizzando il risultato appena dimostrato nel caso (a). □

Approfondimento 3.22 (Locale limitatezza)**.** Osserviamo esplicitamente che se esiste il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora fissando, ad esempio, $\varepsilon = 1$ nella definizione, sappiamo che esiste un intorno U di x_0 tale che

$$l - 1 < f(x) < l + 1, \qquad \forall x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A$$

cioè la funzione è limitata in $U \cap A$. ◁

3.2 Calcolo dei limiti

Decidere se un limite esiste o meno e, se esiste, determinarlo esplicitamente facendo uso della Definizione 3.2 è un'operazione chiaramente complicata. In questo paragrafo verranno presentati dei risultati che permetteranno, a partire dalla conoscenza del comportamento di poche ma fondamentali funzioni, di determinare molti limiti in apparenza ben più complicati.

Iniziamo con il cosiddetto teorema del confronto (o dei due carabinieri) che, in sostanza, dice che se una funzione viene controllata, da sotto e da sopra, da due funzioni che hanno lo stesso limite in un punto x_0, allora tale funzione è costretta ad avere limite che coincide con quello delle sue "funzioni di controllo" in x_0 (si veda la Figura 3.7).

Teorema 3.23 ➫ del confronto

Siano date tre funzioni $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che esista un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \quad \forall x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A\,.$$

Se esistono i limiti $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} h(x)$ e hanno il medesimo valore $l \in \mathbb{R}$, allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} g(x)$ e vale l.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, per definizione di limite esiste un intorno U_1 di x_0 tale che

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad \forall x \in [U_1 \setminus \{x_0\}] \cap A\,.$$

Analogamente, poiché $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$, esiste un intorno U_2 di x_0 tale che

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon \qquad \forall x \in [U_2 \setminus \{x_0\}] \cap A\,.$$

Poiché $U_3 = U_1 \cap U_2 \cap U$ è anch'esso un intorno di x_0, si avrà che

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon \qquad \forall x \in [U_3 \setminus \{x_0\}] \cap A\,.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

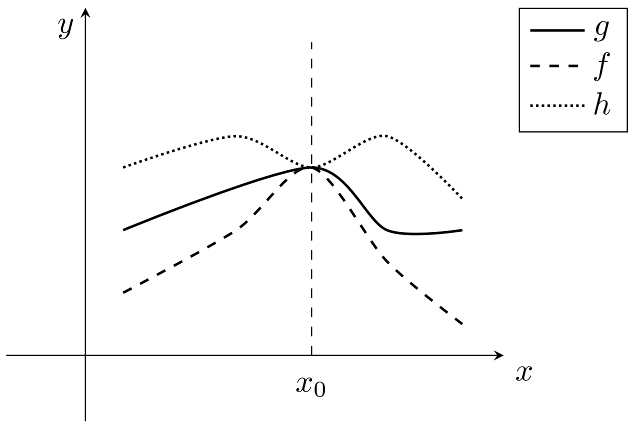


Figura 3.7: Il teorema del confronto

Esempio 3.24. Vogliamo utilizzare il Teorema 3.23 del confronto per dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0\ .$$

Nel Paragrafo 2.8.7 abbiamo dimostrato, con un argomento geometrico (si veda la Figura 2.25 a pag. 92), che $0 < \sin x < x$ per $0 < x < \pi/2$. Osserviamo ora che le funzioni $\sin x$ e x sono entrambe dispari, quindi per simmetria si ha che $|\sin x| \leq |x|$ se $|x| < \pi/2$. Naturalmente tale disuguaglianza continua a valere anche se $|x| \geq \pi/2$ (> 1), dal momento che $|\sin x| \leq 1$ per ogni valore di x. In conclusione

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|\ , \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ . \tag{3.3}$$

Poiché $\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x \to 0}(-|x|) = 0$, applicando il Teorema 3.23 del confronto si conclude che $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. ◁

Esempio 3.25. Vogliamo utilizzare il Teorema 3.23 del confronto per dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1\,.$$

Dalle formule di bisezione (cfr. Paragrafo 2.9.2) sappiamo che $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$. Inoltre, per la stima (3.3), si ha che $\sin^2 \alpha \leq \alpha^2$. Scegliendo $\alpha = x/2$, da queste due relazioni si ottiene

$$\cos x = 1 - 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 \geq 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}\ , \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

per cui si ha

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 \ , \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

A questo punto la conclusione segue dall'Esempio 3.4 e dal Teorema 3.23 del confronto. ◁

Esempio 3.26. Vogliamo utilizzare il Teorema 3.23 del confronto per dimostrare che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .}$$

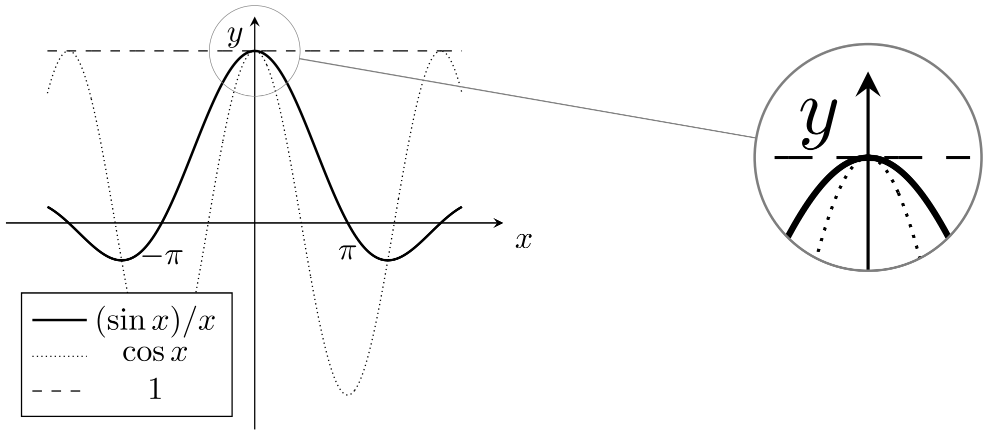


Figura 3.8: Grafico della funzione $(\sin x)/x$

Osserviamo che, per x che tende a 0, sia il numeratore che il denominatore della frazione tendono a 0 (cfr. Esempio 3.24). Nel Paragrafo 2.8.7 è stata dimostrata la formula

$$\sin x < x < \tan x \ , \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(cfr. formula (2.8) a pag. 92). Dividendo tutto per $\sin x$ (che è positivo per i valori di x considerati) e prendendo i reciproci si ottengono le disuguaglianze

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \ , \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \ .$$

Osserviamo ora che le funzioni $\cos x$ e $(\sin x)/x$ sono pari, quindi queste disuguaglianze sono valide anche per $-\pi/2 < x < 0$ (si veda la Figura 3.8). Poiché $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ (cfr. Esempio 3.25), usando il Teorema 3.23 del confronto si ottiene il risultato. ◁

Esempio 3.27. Vogliamo utilizzare il Teorema 3.23 del confronto per dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\,.$$

Poiché $|\sin x| \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, avremo che

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}\,, \qquad \forall x > 0,$$

per cui il primo limite segue dall'Esempio 3.12. In maniera del tutto analoga si dimostra il secondo limite. $\triangleleft$

Nel caso di limiti infiniti, il Teorema 3.23 sul confronto dei limiti può essere enunciato utilizzando solo due funzioni anziché tre. Questo dipende dal fatto che, per dimostrare che una funzione g diverge a $+\infty$, è sufficiente trovare una funzione f che le stia sotto (cioè che sia più piccola) e che diverga a $+\infty$, "spingendo" in questo modo la funzione g a divergere anch'essa a $+\infty$. Un ragionamento analogo vale per il caso $-\infty$.

Teorema 3.28 ➫ Confronto per limiti infiniti

Siano date due funzioni $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che esista un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \le g(x), \quad \forall x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A\,.$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, allora anche $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. Analogamente, se $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora anche $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Un'altra proprietà estremamente utile nel calcolo dei limiti è il fatto che essi si comportino molto bene rispetto alle operazioni di somma, prodotto e quoziente tra funzioni. Nel corso della dimostrazione utilizzeremo la seguente osservazione, che è di interesse generale.

Osservazione 3.29. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che esista una funzione $\omega\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ soddisfacente $\lim_{\varepsilon\to 0} \omega(\varepsilon) = 0$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U_ε di x_0 tale che $|f(x) - l| < \omega(\varepsilon)$ per ogni $x \in [U_\varepsilon \setminus \{x_0\}] \cap A$. Allora ne segue che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Infatti, fissato $\eta > 0$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\omega(\varepsilon) \le \eta$, e dunque

$$|f(x) - l| < \eta, \qquad \forall x \in [U_\varepsilon \setminus \{x_0\}] \cap A.$$

Se ad esempio si dimostra che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U_ε di x_0 tale che $|f(x) - l| < 77\,\pi\,\varepsilon$ per ogni $x \in [U_\varepsilon \setminus \{x_0\}] \cap A$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. $\triangleleft$

Teorema 3.30 ➫ Operazioni sui limiti finiti

Siano $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che esistano i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}\ .$$

Allora esistono in x_0 anche i limiti di $f+g$ ed $f\cdot g$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \alpha+\beta, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \alpha\cdot\beta\ .$$

Se inoltre $\beta \neq 0$, allora esiste anche il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ e vale α/β.

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà relativa al limite della somma. Fissato $\varepsilon > 0$, per definizione di limite esistono due intorni U_1 e U_2 di x_0 tali che

$$\begin{aligned} |f(x)-\alpha| &< \varepsilon\,, \quad \forall x \in [U_1 \setminus \{x_0\}] \cap A, \\ |g(x)-\beta| &< \varepsilon\,, \quad \forall x \in [U_2 \setminus \{x_0\}] \cap A. \end{aligned}$$

Considerando l'intorno $U = U_1 \cap U_2$ e utilizzando la disuguaglianza triangolare abbiamo che

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)-(\alpha+\beta)| &\le |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta| \\ &< \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon, \qquad \forall x \in [U\setminus\{x_0\}]\cap A. \end{aligned}$$

da cui, utilizzando l'Osservazioe 3.29, segue la tesi.

Per quanto riguarda il limite del prodotto, basta osservare che, per la disuguaglianza triangolare,

$$|f(x)g(x)-\alpha\,\beta| \le |f(x)|\,|g(x)-\beta| + |\beta|\,|f(x)-\alpha| \le (|\alpha|+\varepsilon)\varepsilon + |\beta|\,\varepsilon,$$

da cui segue la tesi.

La dimostrazione dell'analoga proprietà per il rapporto di due funzioni, che si basa su simili argomenti, è lasciata al lettore. □

Osservazione 3.31. Come casi particolari del Teorema 3.30 abbiamo che, se esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e se $c \in \mathbb{R}$ è una costante, allora

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right), \qquad \lim_{x\to x_0} [c+f(x)] = c + \lim_{x\to x_0} f(x)\ .$$

Esempio 3.32 (Limiti di polinomi)**.** Utilizzando il Teorema 3.30 e il fatto elementare che $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, è immediato verificare che se $P(x)$ è un polinomio allora $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. $\triangleleft$

Esempio 3.33. Vogliamo dimostrare che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,.}$$

Moltiplicando e dividendo per $1 + \cos x$, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

dove, nei passaggi intermedi, sono stati utilizzati l'Esempio 3.26 e il Teorema 3.30. $\triangleleft$

Non sempre il teorema precedente è applicabile per il calcolo di limiti di somme, prodotti o quozienti. Ad esempio, nel calcolo del limite della funzione $(\sin x)/x$ per x che tende a 0 questo teorema non è utilizzabile, in quanto il denominatore tende a zero. Ritorneremo più avanti su questo argomento quando tratteremo le *forme di indeterminazione* (si veda pag. 154).

Un corollario del Teorema 3.23 del confronto spesso molto utile per il calcolo dei limiti in situazioni in cui non è applicabile il Teorema 3.30 è il seguente.

Teorema 3.34 ➾ Prodotto di funzione limitata per infinitesima

Siano date due funzioni $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e se g è una funzione limitata, allora esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ e vale 0.

Dimostrazione. Poiché g è una funzione limitata, esiste una costante $M > 0$ tale che $|g(x)| \le M$ per ogni $x \in A$, per cui si ha

$$-M|f(x)| \le f(x)\cdot g(x) \le M|f(x)| \qquad \forall x \in A\,.$$

Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ si ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ (si veda l'Osservazione 3.8) e, per l'Osservazione 3.31, anche le funzioni $-M|f(x)|$ e $M|f(x)|$ tendono a zero quando x tende a x_0. A questo punto la tesi segue dal Teorema 3.23 del confronto. $\square$

Sottolineiamo il fatto che, per poter applicare il Teorema 3.34, non sia necessario che esista il limite della funzione g (nel qual caso il risultato sarebbe conseguenza del Teorema 3.30), ma si richiede solo che questa sia limitata in un intorno del punto x_0.

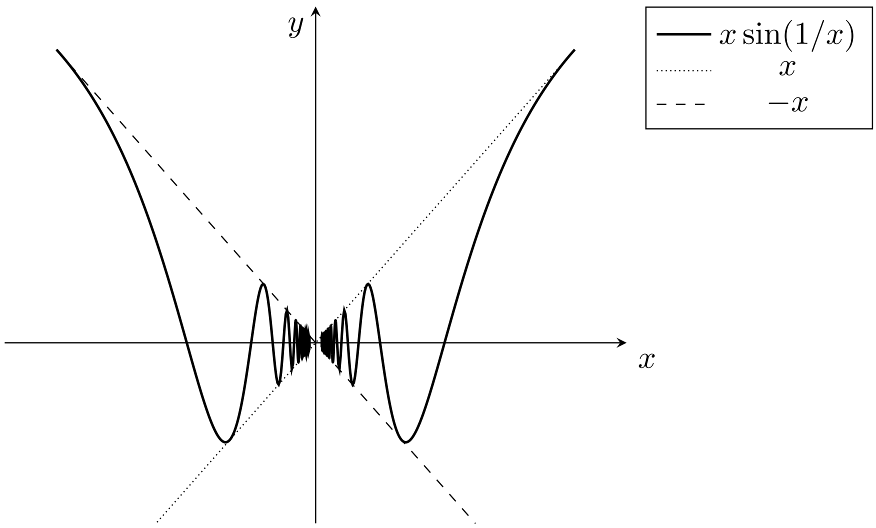


Figura 3.9: Grafico della funzione $x\sin(1/x)$

Esempio 3.35. Si voglia calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} \ .$$

(Il grafico della funzione $x\sin(1/x)$ è tracciato in Figura 3.9.) Posto $f(x) = x$ e $g(x) = \sin(1/x)$, abbiamo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq 1$ per ogni $x \neq 0$. Di conseguenza, applicando il Teorema 3.34, concludiamo che il limite in questione esiste e vale 0. Osserviamo che non esiste il limite della funzione $g(x)$ per $x \to 0$ (cfr. Esempio 3.17). $\lhd$

Vediamo ora come si comportano i limiti rispetto alla composizione di funzioni.

Teorema 3.36 ➫ Cambiamento di variabili nei limiti

Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ due funzioni, con Im$(f) \subset B$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

e che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$. Allora y_0 è un punto di accumulazione per Im(f) (e quindi per B). Se inoltre esiste il limite

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ e vale l. In altri termini

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) \ .$$

Dimostrazione. Cominciamo a dimostrare che y_0 è un punto di accumulazione per $\mathrm{Im}(f)$ e dunque per B. Infatti, se V è un qualsiasi intorno di y_0, poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ e $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$, esiste $x \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $f(x) \in V \setminus \{y_0\}$.

Possiamo ora procedere con la dimostrazione della seconda parte del teorema. Fissato un intorno V di l, esiste un intorno W di y_0 tale che

$$g(y) \in V \qquad \forall y \in [W \setminus \{y_0\}] \cap B. \tag{3.4}$$

In corrispondenza dell'intorno W, sempre per ipotesi, è possibile individuare un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \in W, \qquad \forall x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A.$$

Poiché $f(x) \in B$ ed $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$, possiamo scegliere $y = f(x)$, con $x \in [U \setminus \{x_0\}] \cap A$ in (3.4), ottenendo la tesi. □

Esempio 3.37. Si voglia calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^3 + 3x - 4)}{x^3 + 3x - 4} .$$

Poniamo $f(x) = x^3 + 3x - 4$ e $g(y) = (\sin y)/y$; poiché $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 1$, applicando il Teorema 3.36 di cambiamento di variabili nei limiti e ricordando l'Esempio 3.26 si ha che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^3 + 3x - 4)}{x^3 + 3x - 4} \overset{[y=x^3+3x-4]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1. \qquad \triangleleft$$

Esempio 3.38. Si voglia calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x} .$$

Poniamo $f(x) = 1/x$ e $g(y) = (\sin y)/y$; poiché $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$, applicando il Teorema 3.36 di cambiamento di variabili nei limiti e ricordando l'Esempio 3.26 si ha che

$$\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x} \overset{[y=1/x]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1. \qquad \triangleleft$$

Il Teorema 3.30, riguardante il limite di somma, prodotto e quoziente di funzioni che ammettono limite finito, può essere esteso, in alcune situazioni, anche al caso di limiti infiniti.

Ad esempio, se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \qquad (x_0 \in \overline{\mathbb{R}}),$$

è facile dimostrare che $\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = +\infty$; sintetizzeremo questa proprietà scrivendo "$\alpha + (+\infty) = +\infty$".

Analogamente, si può dimostrare che in tal caso si ha anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

che scriveremo sinteticamente come $\dfrac{\alpha}{+\infty} = 0$.

Tutti i risultati di questo tipo si sintetizzano con la cosiddetta **aritmetizzazione parziale di** ∞, ossia introducendo in $\overline{\mathbb{R}}$, oltre alle normali operazioni sui numeri reali, le seguenti convenzioni.

Aritmetizzazione parziale di ∞

$$\begin{aligned}
\alpha + (+\infty) &= +\infty, & \alpha + (-\infty) &= -\infty,\\
\alpha - (+\infty) &= -\infty, & \alpha - (-\infty) &= +\infty,\\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty, & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty,\\
\frac{\alpha}{+\infty} &= 0, & \frac{\alpha}{-\infty} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\textbf{se } \alpha > 0 \textbf{ o } \alpha = +\infty\textbf{:} & \alpha \cdot (+\infty) = +\infty, & \alpha \cdot (-\infty) = -\infty,\\
\textbf{se } \alpha < 0 \textbf{ o } \alpha = -\infty\textbf{:} & \alpha \cdot (+\infty) = -\infty, & \alpha \cdot (-\infty) = +\infty\,.
\end{array}$$

Osserviamo esplicitamente che **sono esclusi** i seguenti casi:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot (\pm\infty)\ .$$

(In realtà non abbiamo considerato neanche il caso $\alpha/0$ con $\alpha \neq 0$ che discuteremo nell'Approfondimento 3.41 .) In questi casi si parla di **forme indeterminate**. Abbiamo già incontrato alcuni limiti in "forma indeterminata" negli Esempi 3.26 e 3.33.

Osservazione 3.39. Vale la pena ribadire che un limite **esiste** (finito o $\pm\infty$) oppure **non esiste**. La presenza di una forma indeterminata sta solo a significare che non è possibile stabilire l'esistenza o il valore del limite in maniera elementare usando l'algebra dei limiti e l'aritmetizzazione parziale di ∞. $\triangleleft$

Esempio 3.40. Mostriamo che, se $a > 1$, si ha

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

Il risultato segue dal cambiamento di variabili $y = -x$ nel limite e dall'aritemetizzazione parziale di ∞. Infatti abbiamo che

$$\lim_{x \to -\infty} a^x \overset{[y=-x]}{=} \lim_{y \to +\infty} a^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{a^y} = 0,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. ◁

Approfondimento 3.41. Mostriamo con alcuni esempi cosa può avvenire nel caso $\alpha/0$, con $\alpha \neq 0$. Trattiamo cioè limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ , \text{ con } \lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = 0, \ g(x) \neq 0 \ \forall x \neq x_0 \ . \quad (3.5)$$

Si verifica direttamente che, in tal caso, si ha sempre

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty \ .$$

Infatti, fissato $M > 0$, esiste un intorno U di x_0 tale che $|f(x)| < |a| + 1$ e $|g(x)| < 1/M$ per ogni $x \in U$, $x \neq x_0$.

Tuttavia, il limite del rapporto f/g può valere $\pm\infty$ oppure non esistere. Questo dipende dal segno che il rapporto $f(x)/g(x)$ assume in un intorno del punto x_0. Vediamo questi diversi tipi di comportamento studiando i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ , \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{-x^2} \ , \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ .$$

In tutti e tre i casi il denominatore tende a 0, mentre il numeratore è la funzione costante $f(x) \equiv 1$. Nel primo caso il rapporto è sempre positivo per ogni $x \neq 0$; di conseguenza il limite in questione vale $+\infty$. Nel secondo caso il rapporto è sempre negativo per ogni $x \neq 0$, dunque il limite vale $-\infty$. Nel terzo caso, il denominatore è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$; di conseguenza, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \ , \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \ ,$$

quindi, per il Teorema 3.20, il limite per $x \to 0$ non esiste. ◁

Approfondimento 3.42 (Limite di funzioni razionali)**.** In alcuni limiti l'eventuale forma di indeterminazione può essere facilmente eliminata. Questo è il caso, ad esempio, dei limiti di funzioni razionali (cioè rapporto di due polinomi) che si presentino nella forma indeterminata 0/0, cioè limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

con P e Q polinomi tali che $P(x_0) = Q(x_0) = 0$. Ricordiamo che, in una situazione del genere, P e Q ammettono una fattorizzazione del tipo

$$P(x) = (x - x_0)P_1(x), \quad Q(x) = (x - x_0)Q_1(x),$$

dove P_1 e Q_1 sono polinomi che possono essere determinati utilizzando la regola di Ruffini, descritta nel Paragrafo 2.9.1. In questo modo, semplificando i fattori $(x - x_0)$, si ha che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \; .$$

Osserviamo che questa semplificazione si può fare in quanto, nella definizione di limite, non ha importanza quello che succede nel punto x_0; d'altra parte, quando $x \neq x_0$, si ha che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \; , \qquad x \neq x_0 \; .$$

Se P_1 e Q_1 si annullano anch'essi in x_0, si può fattorizzare e semplificare un altro fattore $(x - x_0)$. Si procede in questo modo fino a quando almeno uno dei due polinomi che si ottengono è non nullo in x_0; a questo punto la forma di indeterminazione è stata eliminata.

Applichiamo questo procedimento al calcolo del limite

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x - 18}{x^4 - 5x^2 - 36} \; .$$

Sia numeratore che denominatore si annullano per $x = 3$, quindi possiamo procedere a fattorizzarli con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -3 & -18 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & / \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6),$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & -5 & 0 & -36 \\ 3 & & 3 & 9 & 12 & 36 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 12 & / \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x^4 - 5x^2 - 36 = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 4x + 12) \; .$$

Otteniamo quindi

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x-18}{x^4-5x^2-36} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+6}{x^3+3x^2+4x+12} = \frac{24}{78} = \frac{4}{13}\ .$$

Osserviamo che, dopo la semplificazione del fattore $(x-3)$, il calcolo del limite è immediato: numeratore e denominatore hanno limite finito in $x_0 = 3$ (cfr. Esempio 3.32) e quindi il limite del rapporto è il rapporto dei limiti per il Teorema 3.30. $\triangleleft$

Concludiamo il paragrafo con un risultato di esistenza del limite di funzioni monotone.

Teorema 3.43 ➾ Limiti di funzioni monotone

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ (con eventualmente $a = -\infty$ o $b = +\infty$) una funzione monotona. Allora esistono i limiti

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha\ , \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \beta\ .$$

Più precisamente, se f è monotona crescente, allora $\alpha = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$ e $\beta = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$, mentre se f è monotona decrescente, allora $\alpha = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ e $\beta = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$.

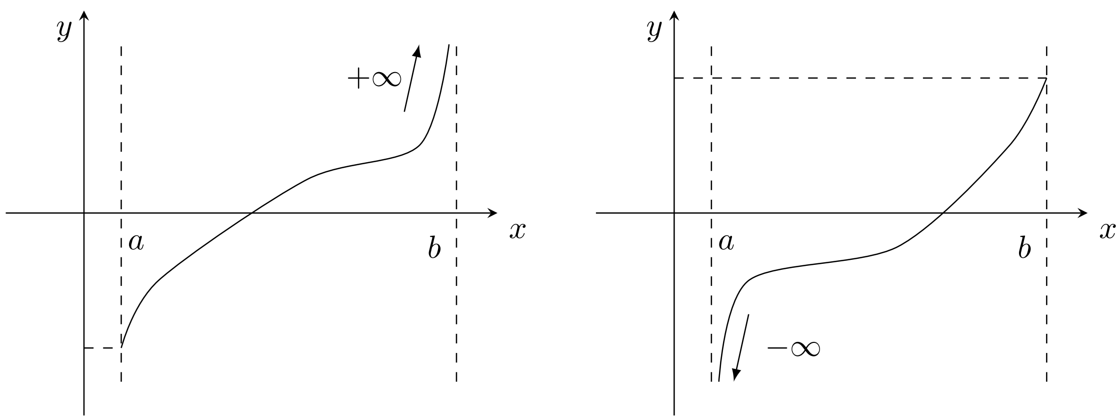


Figura 3.10: Limite di una funzione monotona crescente

Dimostrazione. Supponiamo che la funzione f sia monotona crescente nell'intervallo (a,b) e sia $\beta = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$. Consideriamo, per semplicità, solo il caso $\beta \in \mathbb{R}$, osservando comunque che il caso $\beta = +\infty$ può essere trattato in maniera analoga. Per definizione di estremo superiore sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato esiste $x_\varepsilon \in (a,b)$ tale che $\beta - \varepsilon \le f(x_\varepsilon)$. Inoltre la proprietà di monotonia garantisce che $f(x_\varepsilon) \le f(x)$ per ogni $x \in (x_\varepsilon, b)$. Quindi, scelto

$\delta = b - x_\varepsilon$ si ottiene che

$$-\varepsilon < f(x_\varepsilon) - \beta \leq f(x) - \beta \leq 0 < \varepsilon \qquad \forall x \in (b-\delta, b)\,,$$

ossia $|f(x) - \beta| < \varepsilon$ per ogni x nell'intervallo $(b - \delta, b)$. Quindi abbiamo ottenuto che, se f è una funzione crescente in (a, b), allora

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x).$$

In maniera del tutto analoga si mostra anche che

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$$

e che, se f è una funzione monotona decrescente invece si ha

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)\,. \qquad \square$$

3.3 Infinitesimi, infiniti, confronto

Nell'Esempio 3.26 abbiamo mostrato che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Il fatto che il limite del rapporto valga 1 ci fornisce una chiara informazione quantitativa: quando x tende a zero, le due funzioni a numeratore e denominatore non solo tendono a zero ma sono anche "molto simili tra loro". Questo tipo di informazione, ottenuta in termini del limite del rapporto tra due funzioni che presenta una forma indeterminata, prende il nome di determinazione del comportamento asintotico. In altri termini, il fatto che il limite precedente valga 1 si può esprimere dicendo che la funzione $\sin x$ ha lo stesso comportamento asintotico di x per $x \to 0$.

Un altro caso semplice di studio asintotico è quello del comportamento all'infinito di funzioni razionali (si veda l'Esempio 3.54 per una trattazione completa). Ad esempio, consideriamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^3+x+3}$$

che si presenta nella forma indeterminata del rapporto tra due funzioni che divergono a $+\infty$. Intuitivamente, quando x diventa molto grande i termini rilevanti a numeratore e denominatore sono rispettivamente $2x^3$ e x^3 e quindi il numeratore è, asintoticamente, il doppio del denominatore. Effettivamente questo è quello che succede e la verifica rigorosa di questo fatto è la seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^3+x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(2+1/x^3)}{x^3(1+1/x^2+3/x^3)} = 2\,,$$

dal momento che le quantità tra parentesi tonde a numeratore e denominatore tendono rispettivamente a 2 e a 1.

In questo paragrafo introdurremo alcuni strumenti utili per lo studio dell'andamento asintotico delle funzioni. I concetti esposti saranno utili anche per il calcolo di limiti nei casi in cui si presenti una forma di indeterminazione.

Definizione 3.44 ➫ Infiniti e infinitesimi

*Diremo che una funzione $f(x)$ è un **infinitesimo** per $x \to x_0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$) se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Analogamente, diremo che $f(x)$ è un **infinito** per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.*

Nella pratica, è utile stabilire una "gerarchia" degli infinitesimi e degli infiniti. Iniziamo considerando gli infinitesimi.

Definizione 3.45 ➫ Confronto fra infinitesimi

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f e g due infinitesimi per $x \to x_0$, con $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 (escluso il punto x_0 stesso).

1) *Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$, diremo che f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g; in tal caso, diremo anche che $f(x)$ è **trascurabile** rispetto a $g(x)$ o che $f(x) = o(g(x))$ (che si legge: $f(x)$ è **o piccolo** di $g(x)$).*
2) *Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ è finito e diverso da 0, diremo che f e g sono infinitesimi dello stesso ordine; se inoltre tale limite vale 1, scriveremo anche che $f(x) \sim g(x)$ (che si legge: $f(x)$ è **asintotico a** $g(x)$).*
3) *Se $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)/g(x)| = +\infty$ diremo che f è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g.*

In tutti gli altri casi, diremo che f e g non sono confrontabili.

In altri termini, diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, per $x \to x_0$, se $f(x)$ tende a zero "più rapidamente" di $g(x)$ quando $x \to x_0$ (in modo tale che il rapporto fra $f(x)$ e $g(x)$ tenda a 0). Analoghe considerazioni valgono per le altre definizioni.

Esempio 3.46. Per $x \to 0$, si ha che:

1) $\sin x$ e x sono infinitesimi dello stesso ordine; più precisamente, $\sin x$ è asintotico a x (cfr. Esempio 3.26);
2) $1-\cos x$ e x^2 sono infinitesimi dello stesso ordine; in questo caso $1-\cos x$ non è asintotico a x^2, ma a $x^2/2$ (cfr. Esempio 3.33);
3) x è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a x^2 o, equivalentemente, x^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a x;
4) se $0 < \alpha < \beta$, allora $|x|^\alpha$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $|x|^\beta$, cioè $|x|^\beta = o(|x|^\alpha)$.

5) $f(x) = x\sin(1/x)$ e $g(x) = x$ sono infinitesimi non confrontabili; infatti la funzione $f(x)/g(x) = \sin(1/x)$ è limitata ma non ammette limite per $x \to 0$. $\lhd$

Saper confrontare gli infinitesimi è uno strumento molto utile per il calcolo di alcuni limiti che si presentano in forma indeterminata del tipo "0/0".

Teorema 3.47 ➪ Principio di sostituzione degli infinitesimi

Siano f, f_1, g, g_1 infinitesimi per $x \to x_0$; supponiamo che f_1 sia un infinitesimo di ordine superiore a f e che g_1 sia un infinitesimo di ordine superiore a g. Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{3.6}$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste, allora esiste anche l'altro e sono uguali; se uno dei due non esiste, allora non esiste nemmeno l'altro.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 + f_1(x)/f(x)}{1 + g_1(x)/g(x)}$$

e che, per ipotesi, $f_1(x)/f(x)$ e $g_1(x)/g(x)$ tendono a zero per $x \to x_0$. $\square$

Osservazione 3.48. Il Teorema 3.47 giustifica il fatto che gli infinitesimi di ordine superiore si chiamino anche trascurabili: infatti, nella formula (3.6), gli infinitesimi trascurabili vengono trascurati, cioè buttati via! Usando il simbolo di "o piccolo", la tesi del Teorema 3.47 può essere scritta in questo modo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} . \qquad \lhd$$

Esempio 3.49. Si voglia calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 2x^2}{x^4 - x} .$$

Se scegliamo $f(x) = \sin x$, $f_1(x) = -2x^2$, $g(x) = -x$ e $g_1(x) = x^4$ ci troviamo nella situazione illustrata nel Teorema 3.47. Infatti queste quattro funzioni sono infinitesimi per $x \to 0$, e

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{\sin x} = 0 , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{-x} = 0 ,$$

da cui si deduce che f_1 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a f e g_1 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g. Usando il simbolo di "o piccolo" tutto ciò si traduce scrivendo che $f_1(x) = o(f(x))$ e $g_1(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$. Applicando il Teorema 3.47 abbiamo dunque che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 2x^2}{x^4 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-x} = -1 \ . \qquad \triangleleft$$

Gli infiniti possono essere trattati in maniera analoga agli infinitesimi.

Definizione 3.50 ➾ Confronto fra infiniti

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f e g due infiniti per $x \to x_0$.

1) *Se $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$, diremo che f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g; in tal caso, diremo anche che $f(x)$ è **trascurabile** rispetto a $g(x)$.*
2) *Se $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ è finito e diverso da 0, diremo che f e g sono infiniti dello stesso ordine.*
3) *Se $\lim_{x\to x_0} |f(x)/g(x)| = +\infty$ diremo che f è un infinito di ordine superiore rispetto a g.*

In tutti gli altri casi, diremo che f e g non sono confrontabili.

Esempio 3.51. È facile verificare che, se $0 < \alpha < \beta$, allora x^α è un infinito trascurabile rispetto a x^β per $x \to +\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} = 0 \ , \qquad 0 < \alpha < \beta \ ,$$

dal momento che $\beta - \alpha > 0$. ◁

Esempio 3.52 (Limite all'infinito di un polinomio)**.** Sia

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

un polinomio con $a_n \neq 0$. Osserviamo che, per $x \to +\infty$, il polinomio

$$\tilde{P}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

è un infinito trascurabile rispetto ad $a_n x^n$, poiché, per quanto visto nell'Esempio 3.51, ciascun addendo è trascurabile rispetto all'infinito citato. Di conseguenza avremo che

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{\tilde{P}(x)}{a_n x^n}\right) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_n > 0, \\ -\infty, & \text{se } a_n < 0. \end{cases}$$

Analoghe considerazioni valgono anche quando $x \to -\infty$, tenendo opportunamente conto del segno di $a_n x^n$ per $x < 0$. ◁

Il seguente risultato, analogo del Teorema 3.47 nel caso degli infiniti, ha sostanzialmente la stessa dimostrazione che quindi verrà omessa.

Teorema 3.53 ➫ Principio di sostituzione degli infiniti

Siano f, f_1, g, g_1 infiniti per $x \to x_0$; supponiamo che f_1 sia un infinito di ordine inferiore a f e che g_1 sia un infinito di ordine inferiore a g. Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Esempio 3.54 (Limite all'infinito di funzioni razionali)**.** Siano

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ Q_m(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

due polinomi di grado rispettivamente n ed m (quindi stiamo assumendo $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$). Tenendo conto di quanto detto nell'Esempio 3.52, per il principio di sostituzione degli infiniti, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}\ , & \text{se } n = m, \\ +\infty\ , & \text{se } n > m \text{ e } \frac{a_n}{b_m} > 0, \\ -\infty\ , & \text{se } n > m \text{ e } \frac{a_n}{b_m} < 0, \\ 0\ , & \text{se } n < m\ . \end{cases}$$

Quanto esposto vale anche quando si vuole calcolare il limite per $x \to -\infty$, facendo attenzione al segno del risultato nel caso in cui il rapporto non abbia limite finito. ◁

3.4 Limiti di successioni

Come abbiamo già premesso, le successioni sono particolari funzioni reali di variabile reale che meritano uno studio a parte, vista la loro importanza culturale e applicativa. Iniziamo con alcune definizioni ed esempi.

Definizione 3.55 ➫ Successione numerica

Una successione numerica è una funzione reale $f\colon D_N \to \mathbb{R}$ definita solo su un sottoinsieme dei numeri naturali della forma $D_N = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq N\}$, per un fissato $N \in \mathbb{N}$.

Ricordiamo che, in genere, una successione numerica viene indicata con $(a_n)_{n\geq N}$, o anche solo con $(a_n)_n$ se non è importante specificare l'indice iniziale, dove si è posto $a_n := f(n)$, $n \in D_N$. Lo studio del limite per $n \to +\infty$ di successioni numeriche merita un approfondimento specifico. Per completezza riscriviamo esplicitamente le definizioni di limite (finito e infinito) in questo caso particolare.

Definizione 3.56 ➫ Successione convergente

Diremo che $l \in \mathbb{R}$ è il limite della successione $(a_n)_n$, e scriveremo $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice naturale $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. In tal caso diremo che la successione ***converge*** *a l o, senza fare riferimento al valore del limite, che è convergente (o regolare).*

Osservazione 3.57. Se P_n è una proprietà che dipende da un indice naturale n, diremo che P_n **vale definitivamente** se esiste un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che P_n è vera per ogni $n \geq n_0$, ossia se P_n vale da un certo indice in poi.

Usando questa terminologia, la Definizione 3.56 diventa: $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $|a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente. ◁

Esempio 3.58. Per mostrare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, basta osservare che, una volta fissato $\varepsilon > 0$, si può prendere un qualunque $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che $n_0 \geq \varepsilon^{-2}$ per garantirsi che $1/\sqrt{n} < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Per determinare n_0 abbiamo risolto la disequazione $1/\sqrt{n} < \varepsilon$ e abbiamo constatato che è sempre verificata per valori di n abbastanza grandi. ◁

Esempio 3.59. La successione $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, non è convergente. Infatti i termini della successione corrispondenti a indici pari valgono sempre 1, mentre quelli corrispondenti a indici dispari valgono sempre -1, quindi non è possibile individuare un valore l che soddisfi la definizione di limite. ◁

Definizione 3.60 ➫ Successione divergente

Diremo che la successione $(a_n)_n$ diverge a $+\infty$ (risp. a $-\infty$), e scriveremo $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (risp. $-\infty$), se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un indice naturale $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ (risp. $a_n < M$) per ogni $n \geq n_0$.

Esempio 3.61. Per mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

basta osservare che, una volta fissato $M > 0$, si può prendere un qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > M^2$ per garantirsi che $\sqrt{n} > M$ per ogni $n \geq n_0$. Nuovamente, per determinare n_0 abbiamo risolto la disequazione $\sqrt{n} > M$ e abbiamo constatato che essa è sempre verificata per valori di n abbastanza grandi. ◁

Il seguente teorema che fornisce il legame fra i limiti di funzioni di variabile reale e i limiti delle successioni; per tale motivo è spesso conosciuto come *teorema ponte*.

Teorema 3.62 ➭ Caratterizzazione sequenziale dei limiti

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, *e sia* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione di* A. *Sia* $(y_n)_n$ *una successione tale che*

$$y_n \in A, \quad y_n \neq x_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = x_0 \, . \tag{3.7}$$

Allora, se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *esiste anche* $\lim_{n\to+\infty} f(y_n)$ *e vale* l. *Viceversa, se per ogni successione* $(y_n)_n$ *soddisfacente* (3.7) *esiste il limite* $\lim_{n\to+\infty} f(y_n)$ *e assume sempre lo stesso valore* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *(indipendente dalla successione* $(y_n)_n$*), allora esiste anche* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *e vale* l.

Dimostrazione. Consideriamo, per semplicità, il solo caso $l \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che esista $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e sia $(y_n)_n$ una successione soddisfacente (3.7). Per definizione di limite, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$. D'altra parte, poiché (y_n) soddisfa (3.7), esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $y_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $y_n \neq x_0$, per ogni $n \geq N$. Di conseguenza si avrà $|f(y_n) - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$, da cui segue che $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = l$ per l'arbitrarietà di ε.

Viceversa, supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = l$ per ogni successione (y_n) soddisfacente (3.7). Supponiamo per assurdo che la funzione f non tenda a l per $x \to x_0$. Di conseguenza, esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste un punto $x_\delta \in A$ con $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ e $|f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$. Scegliendo $\delta = 1/n$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ possiamo dunque individuare un punto $y_n \in A$, con $0 < |y_n - x_0| < 1/n$, tale che $|f(y_n) - l| \geq \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Poiché la successione (y_n) soddisfa (3.7), ciò contraddice le ipotesi. □

Approfondimento 3.63 (Confronto tra infiniti)**.** Dal momento che $n! \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, come conseguenza del Teorema 3.28 del confronto si ha che $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$. Analogamente si dimostra che $\lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$.

Anche le successioni $(a^n)_n$ e $(\log_a n)_n$, con $a > 1$, divergono a $+\infty$, fatto che si dimostra immediatamente utilizzando l'Esempio 3.15 e il Teorema 3.62.

Infine, osserviamo che anche la successione $(n^\alpha)_n$, con $\alpha > 0$, diverge a $+\infty$, poiché $n^\alpha = e^{\alpha \log n}$.

Queste successioni divergenti sono infiniti confrontabili fra loro e spesso vengono utilizzate come infiniti campione. Usando la notazione $a_n \prec b_n$ per indicare che $(a_n)_n$ è un infinito di ordine inferiore a $(b_n)_n$, abbiamo che

Gerarchia degli infiniti

$$\log_a n \prec n^\alpha \prec b^n \prec n! \prec n^n \qquad (a, b > 1, \ \alpha > 0).$$

Iniziamo a dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty .$$

Infatti,

$$\frac{n^n}{n!} = \left[\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{2}\right] \cdot n \geq n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

per cui la tesi segue dal Teorema 3.28 del confronto osservando che tutti i fattori fra parentesi quadre sono maggiori o uguali a 1.

Mostriamo ora che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{b^n} = +\infty \qquad (b > 1).$$

Infatti, per ogni $n > [b]$, si ha che

$$\frac{n!}{b^n} = \frac{n}{b} \cdot \left[\frac{n-1}{b} \cdots \frac{[b]+1}{b}\right] \cdot \frac{[b]}{b} \cdot \frac{[b]-1}{b} \cdots \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{b} \geq \frac{n}{b} \cdot \frac{[b]!}{b^{[b]}} ,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che tutti i fattori fra parentesi quadre sono maggiori di 1.

Dimostriamo ora che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty \qquad (b > 1,\ \alpha > 0).$$

Abbiamo che

$$\frac{b^n}{n^\alpha} = \left[\frac{(b^{1/(2\alpha)})^n}{n^{1/2}}\right]^{2\alpha} .$$

Posto $c = b^{1/(2\alpha)} > 1$, utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli abbiamo che

$$\frac{c^n}{n^{1/2}} = \frac{[1+(c-1)]^n}{n^{1/2}} \geq \frac{1+(c-1)n}{n^{1/2}} > (c-1)n^{1/2} ,$$

da cui segue il limite richiesto per il Teorema 3.28 del confronto. Osserviamo, per inciso, che se $(p_n)_n$ è una qualsiasi successione di numeri positivi che diverge a $+\infty$, con lo stesso argomento si dimostra che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{p_n}}{(p_n)^\alpha} = +\infty \qquad (b > 1,\ \alpha > 0,\ p_n \to +\infty). \tag{3.8}$$

Infatti, considerando come sopra solo il caso $\alpha = 1/2$, abbiamo che

$$\frac{b^{p_n}}{(p_n)^{1/2}} \geq \frac{b^{[p_n]}}{([p_n]+1)^{1/2}} \geq \frac{1}{b} \cdot (b-1)([p_n]+1)^{1/2} .$$

Di conseguenza, per il Teorema 3.62,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad (b > 1,\ \alpha > 0).}$$

Infine, dimostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\log_a n} = +\infty \qquad (a > 1,\ \alpha > 0).$$

Posto $p_n = \log_a n$, abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$, e

$$\frac{n^\alpha}{\log_a n} = \frac{(a^\alpha)^{p_n}}{p_n},$$

quindi il risultato segue dal limite (3.8). Più in generale, scegliendo $p_n = \log_a q_n$ con $q_n \to +\infty$ in (3.8), si ottiene che $\lim_{n\to+\infty} q_n^\alpha / \log_a(q_n) = +\infty$ e quindi, per il Teorema 3.62, si ha che

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty \qquad (a > 1,\ \alpha > 0).}$$

Osservazione 3.64 (Formula di Stirling)**.** Abbiamo dimostrato che $n!$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a n^n. È possibile dimostrare, ma la dimostrazione non è elementare, che vale la seguente formula di Stirling

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1. \qquad \triangleleft$$

Ovviamente, essendo le successioni numeriche delle particolari funzioni reali di variabile reale, molte loro proprietà (come, ad esempio, unicità del limite, algebra dei limiti, teoremi di confronto) si ottengono come casi particolari della teoria generale, come illustrato nei seguenti esempi.

Esempio 3.65. Come conseguenza del Teorema 3.34 si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, poiché la successione $(\sin n)_n$ è limitata mentre la successione $(1/n)_n$ tende a 0. $\triangleleft$

Esempio 3.66. Il limite $\lim_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n}$ può essere calcolato usando il Teorema 3.36 sul cambiamento di variabili nei limiti applicato a $f(n) = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_0 = +\infty$, $g(y) = (\sin y)/y$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y_0 = 0$, ottenendo che il limite esiste e vale 1. $\triangleleft$

Mostreremo che le successioni hanno delle loro peculiarità estremamente interessanti. Tutti i risultati saranno scritti per successioni della forma $(a_n)_n$

(ossia con dominio pari a tutto $\mathbb{N}$), ma risulteranno ovviamente validi per successioni definite su $D_N = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq N\}$, $N \in \mathbb{N}$.

Iniziamo riscrivendo per le successioni il Teorema 3.43 riguardante il limite di funzioni monotone. È facile verificare che una successione $(a_n)_n$, vista come funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, è monotona crescente (risp. decrescente) se e solo se $a_{n+1} \geq a_n$ (risp. $a_{n+1} \leq a_n$) per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.67 ➩ Limite delle successioni monotone

Sia $(a_n)_n$ una successione monotona crescente (risp. decrescente). Allora esiste, finito o $+\infty$ (risp. $-\infty$), il limite di $(a_n)_n$. In particolare, tale limite è finito se e solo se la successione è limitata.

Il seguente risultato fornisce una condizione necessaria affinché una successione sia convergente.

Teorema 3.68 ➩ Limitatezza delle successioni convergenti

Se $(a_n)_n$ è una successione convergente, allora $(a_n)_n$ è limitata, cioè esiste $M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Per definizione di limite, fissato $\varepsilon = 1$ esiste un indice $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - l| < 1$ per ogni $n \geq N$. In particolare si avrà che

$$|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l| \qquad \forall n \geq N,$$

dunque tutti i termini della coda della successione (dall'indice N in poi) sono minori di $1 + |l|$. A questo punto rimane solo un numero finito di termini da controllare; basterà quindi scegliere $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1+|l|\}$ per fare in modo che $|a_n| \leq M$ per ogni indice $n \in \mathbb{N}$. □

Non possiamo aspettarci, in generale, che il viceversa sia vero, cioè che una successione limitata sia anche convergente: ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non è convergente. Tuttavia in questo caso è evidente che se selezioniamo solo i termini della successione corrispondenti a indici pari, otteniamo una nuova successione con tutti termini uguali a 1, quindi sicuramente convergente.

Vogliamo mostrare che una proprietà di questo tipo è sempre valida per le successioni limitate: se $(a_n)_n$ è una successione limitata, è possibile selezionare, in maniera ordinata, un numero infinito di elementi in modo tale che essi formino una nuova successione convergente. Innanzitutto introduciamo la nozione di *sottosuccessione*.

Definizione 3.69 ➾ Sottosuccessione

Sia $(a_n)_n$ una successione. Chiameremo sottosuccessione (o successione estratta) di $(a_n)_n$ una successione del tipo $(a_{n_k})_k$, dove $(n_k)_k$ è una successione strettamente crescente di numeri naturali.

Ad esempio, se $(a_n)_n$ è una qualsiasi successione, $(a_{2k})_k$ sarà la sottosuccessione formata dai soli elementi di posto pari, mentre $(a_{2k+1})_k$ sarà la sottosuccessione formata dai soli elementi di posto dispari.

Come abbiamo già anticipato, vale il seguente importante risultato.

Teorema 3.70 ➾ di Bolzano–Weierstrass

Sia $(c_n)_n$ una successione limitata. Allora $(c_n)_n$ ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Per ipotesi $(c_n)_n$ è una successione limitata, quindi esistono $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tali che $c_n \in [a_0, b_0]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. A questo punto si utilizza il metodo di dicotomia già illustrato nell'Osservazione 4.23. Sia $c = (a_0 + b_0)/2$ il punto medio dell'intervallo $[a_0, b_0]$. Poiché $[a_0, b_0]$ contiene tutti gli elementi della successione, almeno uno dei due sottointervalli $[a_0, c]$, $[c, b_0]$ conterrà termini della successione $(c_n)_n$ per infiniti indici n. In altri termini, almeno uno dei due insiemi

$$I_1 = \{n \in \mathbb{N};\ a_0 \le c_n \le c\}, \qquad I_2 = \{n \in \mathbb{N};\ c \le c_n \le b_0\},$$

contiene infiniti numeri naturali. Se I_1 contiene infiniti indici naturali, poniamo $a_1 = a_0$, $b_1 = c$; viceversa, poniamo $a_1 = c$, $b_1 = b_0$. In questo modo abbiamo ottenuto un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$, tale che $c_n \in [a_1, b_1]$ per infiniti indici naturali n, e la cui lunghezza è la metà di quella dell'intervallo $[a_0, b_0]$. Ripetiamo ora il procedimento. Sia $c = (a_1 + b_1)/2$ il punto medio dell'intervallo $[a_1, b_1]$. Come prima, almeno uno dei due sottointervalli $[a_1, c]$, $[c, b_1]$ conterrà termini c_n per infiniti indici n. Se $[a_1, c]$ ha questa proprietà, poniamo $a_2 = a_1$, $b_2 = c$; viceversa, poniamo $a_2 = c$, $b_2 = b_1$. Anche in questo caso abbiamo ottenuto un nuovo intervallo $[a_2, b_2]$, contenente termini c_n per infiniti indici n, e la cui lunghezza è la metà di quella dell'intervallo precedente $[a_1, b_1]$, quindi un quarto della lunghezza dell'intervallo iniziale $[a_0, b_0]$. Procedendo per induzione, siamo quindi in grado di costruire una successione di intervalli

$$[a_0, b_0],\ [a_1, b_1],\ \dots,\ [a_k, b_k],\ \dots$$

con le seguenti proprietà:

(a) $a_0 \le a_k \le a_{k+1} < b_{k+1} \le b_k \le b_0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$;

(b) $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$;

(c) per ogni $k \in \mathbb{N}$, l'intervallo $[a_k, b_k]$ contiene termini c_n per infiniti indici $n \in \mathbb{N}$.

Queste proprietà ci permettono di estrarre una sottosuccessione convergente ragionando come segue. Scegliamo come primo termine c_0, cioè scegliamo $n_0 = 0$. Cerchiamo il termine successivo nell'intervallo $[a_1, b_1]$, che sappiamo contenere termini c_n per infiniti indici n; di conseguenza, esiste un indice $n_1 > n_0$ tale che $c_{n_1} \in [a_1, b_1]$. A questo punto il meccanismo di selezione degli indici dovrebbe essere chiaro: sapendo che $[a_2, b_2]$ contiene termini c_n per infiniti indici n e, quindi, anche per infiniti indici $n > n_1$, esiste un indice $n_2 > n_1$ tale che $c_{n_2} \in [a_2, b_2]$. Procedendo per induzione, siamo in grado di determinare indici $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tali che $c_{n_k} \in [a_k, b_k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Osserviamo che, dalla proprietà (a), la successione $(a_k)_k$ è monotona crescente e limitata, mentre $(b_k)_k$ è monotona decrescente e limitata. Dal Teorema 3.67 segue quindi che entrambe le successioni ammettono limite finito. Inoltre, dalla proprietà (b) e usando l'algebra dei limiti, si ha che $\lim_k (b_k - a_k) = 0$, quindi le due successioni hanno lo stesso limite l. Osserviamo infine che $a_k \leq c_{n_k} \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dal Teorema 3.23 del confronto segue dunque che anche $(c_{n_k})_k$ è convergente allo stesso limite l. □

Osservazione 3.71. Sia $(c_n)_n$ una successione contenuta nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Il Teorema 3.70 di Bolzano–Weierstrass garantisce l'esistenza di una sottosuccessione $(c_{n_k})_k$ convergente a un certo limite c. Poiché $a \leq c_{n_k} \leq b$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, dal Teorema 3.21 della permanenza del segno segue che $c \in [a, b]$. ◁

Osservazione 3.72. Spesso il teorema di Bolzano–Weierstrass è enunciato nel seguente modo: ogni sottoinsieme limitato e infinito E di $\mathbb{R}$ ammette almeno un punto di accumulazione. Una dimostrazione diretta di questo enunciato può essere ottenuta sulla falsariga di quella del Teorema 3.70. Osserviamo che questo punto di accumulazione potrebbe non appartenere a E, come nel caso $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$ che ha come unico punto di accumulazione 0. ◁

Siamo ora interessati a capire sotto quali condizioni sia garantita la convergenza di una successione (e non solo quella di una sua estratta). Dimostreremo che la condizione giusta è la cosiddetta *condizione di Cauchy*.

Definizione 3.73 ➫ Successione di Cauchy

Una successione $(a_n)_n$ si dice di Cauchy (o fondamentale) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m > \bar{n}$.

Faremo vedere che, per successioni a valori reali, la nozione di successione di Cauchy equivale a quella di successione convergente, vale a dire, una successione è di Cauchy se e solo se è convergente. Il vantaggio di utilizzare la condizione di Cauchy risiede nel fatto che essa permette di stabilire la convergenza della successione senza fare esplicito riferimento al valore del limite. Cominciamo col dimostrare un risultato preliminare.

Lemma 3.74 ➾ Limitatezza delle successioni di Cauchy

Ogni successione di Cauchy è limitata.

Dimostrazione. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy. In corrispondenza di $\varepsilon = 1$, esiste un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < 1$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. Di conseguenza, se scegliamo $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|, |a_{\bar{n}}| + 1\}$ avremo banalmente che $|a_n| \leq M$ per ogni $n < \bar{n}$, mentre per gli indici $n \geq \bar{n}$ si avrà

$$|a_n| \leq |a_n - a_{\bar{n}}| + |a_{\bar{n}}| < 1 + |a_{\bar{n}}| \leq M. \qquad \square$$

Teorema 3.75 ➾ Criterio di convergenza di Cauchy

Una successione $(a_n)_n$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Dimostrazione. Cominciamo a dimostrare l'implicazione più semplice, cioè che ogni successione convergente è di Cauchy. Sia dunque $(a_n)_n$ una successione convergente a un certo limite $l \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per definizione di limite esiste un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Di conseguenza si avrà

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \bar{n}\,,$$

quindi (a_n) è di Cauchy.

Passiamo ora a dimostrare l'implicazione inversa, cioè che ogni successione di Cauchy è convergente. Sia dunque $(a_n)_n$ una successione di Cauchy. Per il Lemma 3.74 tale successione è limitata quindi, per il Teorema 3.70, essa ammetterà una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ convergente a un limite $l \in \mathbb{R}$.

Facciamo ora vedere che tutta la successione $(a_n)_n$ converge a questo limite l. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $(a_n)_n$ è di Cauchy, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. D'altra parte, poiché $(a_{n_k})_k$ converge a l, esiste un indice $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_k} - l| < \varepsilon/2$ per ogni $k \geq \bar{k}$. Osserviamo che, poiché $(n_k)_k$ è una successione strettamente monotona crescente di numeri naturali, si deve necessariamente avere $n_k \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. In particolare, $n_n \geq n$, quindi se $n \geq \bar{n}$ si avrà

$$|a_n - a_{n_n}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq \bar{n}\,.$$

Se scegliamo $N = \max\{\bar{n}, \bar{k}\}$ si avrà

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_n}| + |a_{n_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall n \geq N,$$

dunque la successione $(a_n)_n$ converge a l. □

3.5 Il numero di Nepero

In questo paragrafo definiremo il numero di Nepero e come limite di una opportuna successione. Questa caratterizzazione avrà delle importanti conseguenza sulle proprietà della funzione esponenziale e^x.

Proposizione 3.76

Si considerino le successioni

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \;, \qquad n \in \mathbb{N}^+ \;. \tag{3.9}$$

Allora $(a_n)_n$ è monotona crescente, mentre $(b_n)_n$ è monotona decrescente. Inoltre entrambe le successioni sono limitate e dunque convergenti.

Dimostrazione. Osserviamo che $a_n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \;. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli (si veda l'Esempio (1.14)) si ha che

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \;.$$

Dalla formula (3.10) si ottiene dunque

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1 \;, \qquad \forall n \geq 2 \;,$$

cioè $a_n > a_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$. Questo mostra che la successione $(a_n)_n$ è strettamente monotona crescente.

In maniera analoga si dimostra che la successione $(b_n)_n$ è strettamente monotona decrescente: per $n \geq 2$ si ha infatti

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} \,. \tag{3.11}$$

Ancora dalla disuguaglianza di Bernoulli si ha che, per ogni $n \geq 2$,

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + n\cdot\frac{1}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \,.$$

Dalla formula (3.11) si ottiene dunque che $b_n/b_{n-1} < 1$ per ogni $n \geq 2$, da cui segue la stretta monotonia decrescente della successione $(b_n)_n$.
Osserviamo infine che $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$, per ogni $n \geq 2$, quindi le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sono limitate. Dal Teorema 3.67 segue dunque che le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ ammettono limite finito. □

Dalla Proposizione 3.76 e dal Teorema 3.67 segue che le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ ammettono limite finito. Ha quindi senso la seguente definizione.

Definizione 3.77 ⇨ Numero di Nepero e

Il numero di Nepero e è definito dal seguente limite:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7\,1828\,1828\,45\,90\,45\,\ldots. \tag{3.12}$$

Inoltre, anche la successione $(b_n)_n$ converge al numero e; infatti

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e \,.$$

Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, a_n approssima e per difetto mentre b_n lo approssima per eccesso.

3.6 Limite inferiore e limite superiore

Sia $(a_n)_n$ una successione limitata. Il Teorema 3.70 garantisce che esista una sottosuccessione convergente. In generale, possiamo avere sottosuccessioni che convergono a limiti diversi; ad esempio, si può dimostrare che, per ogni $\ell \in [-1,1]$, la successione $(\sin n)_n$ ammette una sottosuccessione che converge a ℓ (si veda l'Esercizio 3.22).

Vogliamo definire il concetto di minimo e massimo limite sottosuccessionale. Data una successione $(a_n)_n$ limitata inferiormente, possiamo associarle una nuova successione

$$b_n := \inf_{m \geq n} a_m, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

che risulta essere monotona crescente, dal momento che b_{n+1} è l'estremo inferiore su un insieme di indici più piccolo rispetto a quello utilizzato per definire b_n. Di conseguenza, per il Teorema 3.67 sul limite delle successioni monotone, esiste finito o $+\infty$ il limite della successione $(b_n)_n$. Il valore di tale limite verrà chiamato *limite inferiore* e indicato con $\liminf_{n\to+\infty} a_n$. Analogamente, se $(a_n)_n$ è limitata superiormente, la successione

$$c_n := \sup_{m \geq n} a_m, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

è monotona decrescente e il suo limite (finito o $-\infty$) verrà chiamato *limite superiore* e indicato con $\limsup_{n\to+\infty} a_n$.

Definizione 3.78 ➪ Limite inferiore

Sia $(a_n) \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali.
(i) Se (a_n) non è limitata inferiormente, definiamo $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n := -\infty$.
(ii) Se (a_n) è limitata inferiormente, definiamo

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{m\geq n} a_m \right).$$

Definizione 3.79 ➪ Limite superiore

Sia $(a_n) \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali.
(i) Se (a_n) non è limitata superiormente, definiamo $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n := +\infty$.
(ii) Se (a_n) è limitata superiormente, definiamo

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{m\geq n} a_m \right).$$

Esempio 3.80. Sia $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. È facile verificare che $b_n = -1$, $c_n = +1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $\liminf_n a_n = -1$, $\limsup_n a_n = +1$. ◁

Esempio 3.81. Sia $a_n := 2^n[1 + (-1)^n]$, $n \in \mathbb{N}$. È facile verificare che $b_n = 0$, $c_n = 2^{n+1}$ per ogni $n \geq 2$, quindi $\liminf_n a_n = 0$, $\limsup_n a_n = +\infty$. ◁

Esempio 3.82. Se $(a_n)_n$ è una successione monotona crescente, allora $b_n = a_n$ e $c_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $\liminf a_n = \limsup a_n = \sup a_n$. Analogamente, se $(a_n)_n$ è una successione monotona decrescente, allora $b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $c_n = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui $\liminf a_n = \limsup a_n = \inf a_n$. $\lhd$

In quanto segue, $(a_n)_n$ sarà una successione a valori in $\mathbb{R}$, mentre $(b_n)_n$ e $(c_n)_n$ saranno le successioni definite rispettivamente in (3.13) e (3.14).

Proposizione 3.83 ➾ Stime con $\liminf$ e $\limsup$

Se $\liminf_n a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n > \alpha - \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Analogamente, se $\limsup_n a_n = \beta \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n < \beta + \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione solo per il $\liminf$, essendo la dimostrazione per il $\limsup$ del tutto analoga. Poiché, nel caso in questione, $\alpha = \lim_{n\to+\infty} b_n$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $b_N > \alpha - \varepsilon$. D'altra parte, $b_N := \inf_{m\geq N} a_m$, dunque $a_m > \alpha - \varepsilon$ per ogni $m \geq N$. $\square$

È del tutto evidente che, se una successione ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$, allora ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite. In generale, però, una successione può avere sottosuccessioni che hanno limiti diversi.

Definizione 3.84 ➾ Classe limite

La classe limite $CL(a_n)$ di una successione $(a_n) \subset \mathbb{R}$ è il sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ di tutti i suoi limiti sottosuccessionali, cioè

$$CL(a_n) = \left\{ \ell \in \overline{\mathbb{R}} \colon \textit{esiste una sottosuccessione } (a_{n_k}) \textit{ con } \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \ell \right\}.$$

Dimostreremo che $\liminf_n a_n$ e $\limsup_n a_n$ sono rispettivamente il più piccolo e il più grande limite sottosuccessionale di (a_n).

Teorema 3.85 ➾ Massimo e minimo limite

Sia $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ una successione. Allora $\liminf_n a_n$ e $\limsup_n a_n$ sono rispettivamente il più piccolo e il più grande limite sottosuccessionale di (a_n), *cioè*

$$\liminf_n a_n \leq \ell \leq \limsup_n a_n, \qquad \forall \ell \in CL(a_n)\,, \tag{3.15}$$

$$\liminf_n a_n,\ \limsup_n a_n \in CL(a_n)\,. \tag{3.16}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima disuguaglianza in (3.15). Tale disuguaglianza è banalmente verificata se (a_n) non è limitata inferiormente, poiché in tal caso $\liminf_n a_n = -\infty$.

Supponiamo quindi che (a_n) sia limitata inferiormente. Sia $\ell \in \mathrm{CL}(a_n)$ e (a_{n_j}) una sottosuccessione tale che $\lim_j a_{n_j} = \ell$. Poiché la sottosuccessione (b_{n_j}) ha lo stesso limite della successione monotona (b_n), abbiamo che

$$\lim_j b_{n_j} = \lim_{n\to+\infty} b_n = \liminf_n a_n,$$

D'altra parte, per definizione di b_{n_j},

$$b_{n_j} = \inf_{m \geq n_j} a_m \leq a_{n_j} \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

da cui segue la disuguaglianza $\liminf_n a_n \leq \lim_j a_{n_j}$.

In maniera analoga si dimostra la seconda disuguaglianza in (3.15).

Dimostriamo ora che $\liminf a_n \in \mathrm{CL}(a_n)$, cioè che esiste una sottosuccessione (a_{n_j}) di (a_n) che ammette limite (finito o $-\infty$) e tale che

$$\lim_j a_{n_j} = \liminf_n a_n.$$

Supponiamo che (a_n) sia limitata inferiormente e sia

$$\alpha := \liminf_n a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Se $\alpha = +\infty$, allora la successione crescente $(b_n)_n$ diverge a $+\infty$. Poiché $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per il Teorema del confronto anche la successione $(a_n)_n$ diverge a $+\infty$.

Se invece $\alpha \in \mathbb{R}$, poiché la successione (b_n) è monotona crescente e converge ad α, sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \alpha - \varepsilon < b_n \leq \alpha, \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Procediamo per induzione nel seguente modo.

Fissato $\varepsilon = 1$, esiste un indice $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\alpha - 1 < b_{N_1} \leq \alpha.$$

Poiché $b_{N_1} := \inf_{m \geq N_1} a_m$, per definizione di estremo inferiore esiste un indice $n_1 \geq N_1$ tale che $a_{n_1} < b_{N_1} + 1 \leq \alpha + 1$, dunque

$$\alpha - 1 < b_{n_1} \leq a_{n_1} < \alpha + 1.$$

Al secondo passo, fissato $\varepsilon = 1/2$, esiste un indice $N_2 > n_1$ tale che

$$\alpha - \frac{1}{2} < b_{N_2} \leq \alpha.$$

Ragionando come sopra, esiste un indice $n_2 \geq N_2 > n_1$ tale che

$$\alpha - \frac{1}{2} < b_{n_2} \leq a_{n_2} < \alpha + \frac{1}{2}.$$

Se supponiamo di avere individuato, al passo j, un indice n_j tale che valga

$$\alpha - \frac{1}{j} < a_{n_j} < \alpha + \frac{1}{j}, \tag{P_j}$$

con la procedura descritta sopra possiamo individuare un indice $n_{j+1} > n_j$ per il quale valga (P_{j+1}). In questo modo abbiamo costruito una sottosuccessione (a_{n_j}) che converge ad α.

Se (a_n) non è limitata inferiormente, allora è possibile costruire in maniera analoga una sua sottosuccessione divergente a $-\infty$.

Analogamente si può dimostrare che $\limsup a_n \in \mathrm{CL}(a_n)$. □

Per definizione, abbiamo che $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$. Il seguente teorema caratterizza il caso di uguaglianza in questa relazione.

Teorema 3.86 ➪ Criterio di convergenza

La successione (a_n) ammette limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = l$.

Dimostrazione. Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora qualsiasi sottosuccessione ha lo stesso limite; la tesi segue quindi dal Teorema 3.85.

Viceversa, supponiamo che $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = l$. Se $l = -\infty$, per definizione avremo che (a_n) è limitata superiormente e $\lim_{n\to+\infty} c_n = -\infty$. Poiché $a_n \leq c_n$ per ogni n, per il teorema del confronto avremo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. Analoga dimostrazione si può fare nel caso $l = +\infty$.

Il caso $l \in \mathbb{R}$ è una conseguenza diretta della Proposizione 3.83. □

3.7 Esercizi

Esercizio 3.1. Dimostrare che l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme $A = (0,1) \cup (1,2)$ è l'intervallo chiuso $[0,2]$.

Esercizio 3.2. Utilizzando la definizione di limite, verificare che

1) $\lim_{x\to -1}(9-2x) = 11$ 2) $\lim_{x\to 2}(x^2+4) = 8$

Esercizio 3.3. Utilizzando i limiti notevoli discussi negli Esempi 3.26 e 3.33 e il Teorema 3.36 di cambiamento di variabili nei limiti, calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi x)}{x-1}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\sin x}{(x-\pi/2)^2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

Esercizio 3.4. Usando il Teorema 3.34, calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x-3)\cdot\sin\left(\frac{e^x+7}{x^2-9}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\arctan\left(\frac{e^{-x}+7\log(x^2+9)}{x^5}\right)$

Esercizio 3.5. Utilizzando, quando possibile, i risultati su somma, prodotto e quoziente di limiti in $\overline{\mathbb{R}}$, calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(e^x+\frac{x}{x+1}\right)$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(-x^2-e^{\sqrt{x}})$

Esercizio 3.6. Utilizzando il Teorema 3.28, calcolare i limiti

1) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(x+\sin x)$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{3+\cos(1/x)}{x}$

Esercizio 3.7. Calcolare i seguenti limiti.

1) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+\cos(x)}}{x^2+1}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos(x)}{\sqrt{x}-1}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2}$

9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$

Esercizio 3.8. Calcolare i seguenti limiti utilizzando i criteri del confronto. ($m(x)$ è la funzione mantissa, $[x]$ è la funzione parte intera.)

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+m(x)}{x+\sqrt{x}}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{[3x+1]}{\sqrt{x^2+1}}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+\sin(x))}{x^3}$

Esercizio 3.9. Calcolare i seguenti limiti.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1}}-1\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\sin^2(\pi-2\arctan(x))}{x^2+3}$

Esercizio 3.10. Stabilire, vedendo se è verificata o no la definizione, se le successioni seguenti hanno limite o no.

1) $a_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$

2) $a_n = \dfrac{an+b}{cn+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

3) $a_n = \cos n$

4) $a_n = (-1)^n \log n$

5) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{n-1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

6) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Esercizio 3.11. Dimostrare che

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Esercizio 3.12. Calcolare i seguenti limiti.

1) $\lim_{n\to+\infty} \sin(n!\pi)$

2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)! - n!}{(n+1)!(2n+1)}$

4) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_k^n}, \qquad k \geq 1,\ \alpha_i > 0\ \forall i = 1, \ldots, k.$

5) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 2k} - n \right)$

6) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (2k+1) - n \right)$

Esercizio 3.13. Calcolare i seguenti limiti.

1) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + \log^7(n)}{2^n - n}$

2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + n!}{1000^n + n^{50000}}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

4) $\lim_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n} \right)^n$

5) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n + \sqrt{n} + 3}{n} \right)^n$

6) $\lim_{n\to+\infty} 3^n \left(2^{1/n!} - 1 \right)$

Esercizio 3.14. Mostrare che non esistono i seguenti limiti.

1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 5x}{x+1} (e - e^{\sin(x)})$

2) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \cos(x)$

Esercizio 3.15. Mostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ è ben definita la funzione

$$f(x) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(n!\pi x)}{\sin^2(n!\pi x) + t^2} \right)$$

e determinarla esplicitamente.

Esercizio 3.16. Sia $(a_n)_n$ una successione a termini positivi, tale che esista

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dimostrare che:
(a) se $\ell > 1$, allora la successione è definitivamente strettamente crescente e diverge a $+\infty$;
(b) se $\ell < 1$, allora la successione è definitivamente strettamente decrescente e converge a 0.

Esercizio 3.17. [Successione minimizzante] Sia E in sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $I = \inf E$. Dimostrare che esiste una successione (x_n) decrescente di elementi di E tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = I$.

Esercizio 3.18. Sia a_n una successione con la proprietà seguente: da ogni sottosuccessione di a_n si può estrarre una sottosuccessione convergente. Dimostrare che la successione a_n è limitata.

Esercizio 3.19. Calcolare lim inf e lim sup della successione

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Esercizio 3.20. Sia (x_n) una successione a termini positivi. Dimostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}\,.$$

Concludere che, se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$, allora esiste anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

Esercizio 3.21. Utilizzando il risultato dell'Esercizio 3.20, dimostrare che

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e\,.$$

Esercizio 3.22. Sia $a_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\liminf_n a_n = -1$, $\limsup_n a_n = +1$. Dimostrare inoltre che, per ogni $t \in [-1, 1]$, esiste una sottosuccessione (a_{n_j}) che converge a t.

CAPITOLO 4

Continuità

4.1 Funzioni continue

La nozione di continuità per una funzione f formalizza la richiesta che piccole variazioni della variabile indipendente x producano piccole variazioni dell'output $f(x)$. Questa proprietà è particolarmente interessante nelle applicazioni in cui, ad esempio, le misurazioni sono sempre soggette a un certo margine d'errore che però ci si augura produca solo un errore controllabile nelle previsioni.

Definizione 4.1 ➯ Continuità

Diremo che una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A\ .$$

Diremo che f è continua in A se è continua in ogni punto $x_0 \in A$.

Osservazione 4.2. Se, oltre ad appartenere ad A, x_0 è anche un punto di accumulazione di A, la definizione di continuità corrisponde alla richiesta che esista finito il limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e che valga $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{(continuità in } x_0 \text{ punto di accumulazione di } A\text{).}$$

Questa è la situazione in cui ci troveremo nella maggior parte dei casi, perché tipicamente avremo a che fare con funzioni definite su un intervallo (o un'unione di intervalli) dell'asse reale. Sottolineiamo però che la Definizione 4.1

ha perfettamente senso anche in quei punti di A che non sono di accumulazione (punti isolati del dominio) e in tali punti la funzione risulta essere sempre continua. Infatti, se x_0 è un punto isolato di A, allora esiste $\delta_0 > 0$ tale che l'intorno $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ non contiene punti di A diversi da x_0; quindi la richiesta espressa nella Definizione 4.1 è sempre verificata, poiché quale che sia il valore di ε sarà sufficiente scegliere $\delta = \delta_0$ in modo che l'insieme $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap A$ contenga il solo punto x_0. $\triangleleft$

Prima di procedere oltre con esempi e proprietà delle funzioni continue, vediamo cosa può succedere quando una funzione non è continua. Supponiamo per semplicità di avere una funzione f definita su un certo intervallo $I = (a, b)$ e consideriamo un punto $x_0 \in I$. La funzione f **non** è continua nel punto x_0, e in tal caso diremo che è discontinua in x_0, se e solo se si verifica una delle seguenti condizioni:

Classificazione delle discontinuità

1) Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste finito ma non vale $f(x_0)$; questo è equivalente a dire che i limiti destro e sinistro

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\ , \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{4.1}$$

esistono finiti, sono uguali, ma il loro valore è diverso da $f(x_0)$ (cfr. Teorema 3.20).
2) Entrambi i limiti (4.1) esistono e sono finiti, ma sono diversi.
3) Almeno uno dei due limiti (4.1) non esiste, oppure esistono entrambi e almeno uno dei due vale $\pm\infty$.

In corrispondenza del verificarsi di uno di questi casi, diremo rispettivamente che la funzione f ha in x_0:
1) un punto di discontinuità eliminabile;
2) un punto di discontinuità di tipo salto (o di prima specie);
3) un punto di discontinuità di seconda specie.

Esempi dei diversi tipi di discontinuità sono mostrati in Figura 4.1: $x = a$ è un punto di discontinuità eliminabile, $x = b$ è un punto di discontinuità di tipo salto, mentre $x = c$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

Esempio 4.3 (Discontinuità eliminabile)**.** Consideriamo la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Abbiamo già visto, nell'Esempio 3.26, che $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (a tale proposito, ricordiamo che il fatto che la funzione sia definita nel punto $x = 0$ e il suo

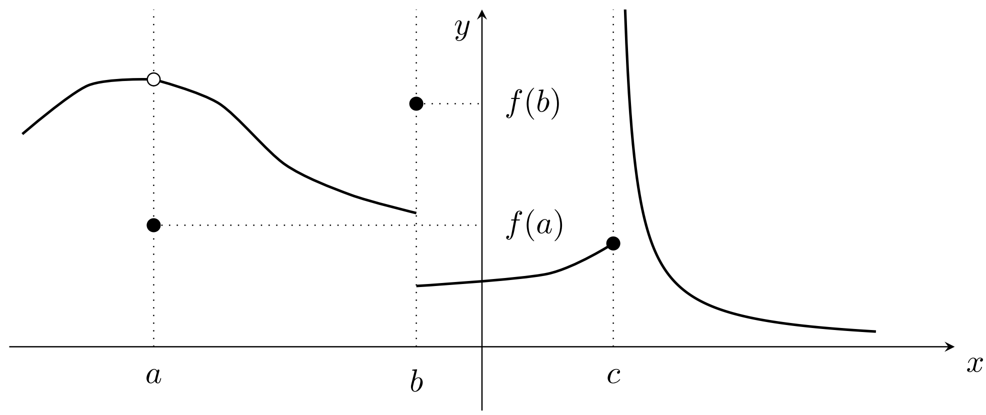


Figura 4.1: Tipi di discontinuità

valore nel punto non incidono sul calcolo del limite). È chiaro quindi che f non è continua in $x = 0$, visto che il limite esiste finito ma il suo valore, che è 1, è diverso da $f(0) = 0$. In base alla classificazione fatta sopra, il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. L'aggettivo "eliminabile" deriva dal fatto che, se noi cambiamo opportunamente il valore della funzione solo nel punto in questione, assegnando in tal punto il valore del limite, otteniamo una funzione continua. Nel nostro caso, la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

coincide con $f(x)$ in tutti i punti $x \neq 0$ ma, a differenza di f, è una funzione continua anche in $x = 0$. ◁

Esempio 4.4 (Discontinuità di prima specie)**.** Consideriamo la funzione

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ +1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che, per $x \neq 0$, si ha $\operatorname{sign} x = x/|x|$. Abbiamo che $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign} x = 1$. Di conseguenza, la funzione ammette nell'origine limite destro e sinistro finiti ma diversi. Il punto $x = 0$ è dunque un punto di discontinuità di tipo salto. ◁

Esempio 4.5 (Discontinuità di seconda specie)**.** Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Abbiamo già dimostrato nell'Esempio 3.17 che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to 0$. Di conseguenza $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie. $\triangleleft$

Esempio 4.6. La funzione di Dirichlet, definita nell'Osservazione 2.5, ha una discontinuità di seconda specie in ogni punto. Infatti, ogni intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ contiene infiniti punti razionali (nei quali la funzione vale 1) e infiniti punti irrazionali (nei quali la funzione vale 0). $\triangleleft$

Osservazione 4.7. Vale la pena sottolineare che si può parlare di continuità o meno di una funzione **solamente** nei punti del suo dominio. Quindi, per esempio, non ha nessun senso chiedersi se la funzione $f(x) = (\sin x)/x$, definita per $x \neq 0$, sia continua o meno in $x_0 = 0$. $\triangleleft$

Facciamo ora alcuni esempi di funzioni continue.

Esempio 4.8 (Continuità di seno e coseno)**.** Negli Esempi 3.24 e 3.25 abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0\,, \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0\,, \tag{4.2}$$

ossia che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue in $x = 0$. Usando le formule di somma è facile dimostrare che queste due funzioni sono continue su tutta la retta reale. Dimostriamo per esempio che la funzione $\sin x$ è continua in qualsiasi punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, col cambiamento di variabili $y = x - x_0$ e usando i limiti (4.2) si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \lim_{y\to 0} \sin(x_0 + y) = \lim_{y\to 0}(\sin x_0 \cos y + \cos x_0 \sin y) = \sin x_0\,.$$

Analogamente si dimostra la continuità di $\cos x$ su tutta la retta reale. $\triangleleft$

Esempio 4.9 (Continuità degli esponenziali)**.** Sia $a > 0$ e mostriamo che la funzione $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, è continua su tutto $\mathbb{R}$. Nell'Esempio 3.5 abbiamo dimostrato che $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = a^0$, ossia la continuità di a^x nel punto $x = 0$. Per dimostrare la continuità in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$, basta usare il cambiamento di variabile $y = x - x_0$ come già fatto nell'Esempio 4.8:

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{y\to 0} a^{x_0+y} = \lim_{y\to 0} \left(a^{x_0} \cdot a^y\right) = a^{x_0}\,. \qquad \triangleleft$$

Approfondimento 4.10. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona, per il Teorema 3.43 sull'esistenza dei limiti delle funzioni monotone, per ogni $x_0 \in (a,b)$ esistono finiti i limiti sinistro e destro di f in x_0, cioè una funzione monotona può avere solo discontinuità di tipo salto. Inoltre, l'insieme S dei punti di discontinuità di f è al più numerabile. Mostriamolo nel caso in cui f sia crescente. Per ogni $x \in (a,b)$ definiamo il salto di f in x

$$\sigma(x) = \lim_{y \to x^+} f(y) - \lim_{y \to x^-} f(y).$$

Chiaramente $\sigma(x) = 0$ se e solo se f è continua in x e, per la monotonia, $\sigma(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, sia

$$S_n = \left\{ x \in (a,b) \colon \sigma(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

l'insieme dei punti di discontinuità dove il salto vale almeno $1/n$. Se consideriamo un qualsiasi sottoinsieme finito $\{x_1, \dots, x_k\} \subset S_n$ di S_n, abbiamo che

$$\frac{k}{n} \leq \sum_{j=1}^{k} \sigma(x_j) \leq f(b) - f(a),$$

che implica che S_n può contenere al più $[n\,(f(b) - f(a))]$ elementi, cioè è finito. Di conseguenza, $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} S_n$ è al più numerabile. $\lhd$

Esporremo ora una serie di risultati che ci consentiranno di stabilire la continuità di un gran numero di funzioni senza dover fare uso della definizione. In particolare mostreremo che tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale.

Teorema 4.11 ➾ Continuità di somma, prodotto e quoziente

Siano f, g due funzioni continue in un punto x_0. Allora le funzioni $f + g$ e $f \cdot g$ sono continue nel punto x_0; se inoltre $g(x_0) \neq 0$, anche la funzione f/g è continua in x_0.

Dimostrazione. È una conseguenza diretta dell'analogo Teorema 3.30 sulle operazioni sui limiti finiti. $\square$

Esempio 4.12 (Continuità delle funzioni razionali)**.** Nell'Esempio 3.32 abbiamo dimostrato che i polinomi sono funzioni continue in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, anche le funzioni razionali del tipo $f(x) = P(x)/Q(x)$, con P e Q polinomi, risultano continue nei punti dove non si annulla il denominatore. $\lhd$

Teorema 4.13 ➾ Continuità della funzione composta

Siano date due funzioni $f \colon A \to \mathbb{R}$ e $g \colon B \to \mathbb{R}$, con $f(A) \subseteq B$. Se f è continua in un punto $x_0 \in A$ e g è continua nel punto $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $h(x) = g(f(x))$ è continua nel punto x_0.

Dimostrazione. È una conseguenza diretta dell'analogo Teorema 3.36 sul cambiamento di variabili nei limiti. □

Esempio 4.14. La funzione $h(x) = \sin(x^2 + 4)$ è continua essendo composizione delle funzioni $g(y) = \sin y$ e $f(x) = x^2 + 4$, entrambe continue su tutta la retta reale. ◁

Concludiamo con una semplice conseguenza del Teorema 3.21 e del fatto che, se f è una funzione continua in un punto di accumulazione x_0, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Teorema 4.15 ➫ Permanenza del segno

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un punto $x_0 \in A$. Se $f(x_0) > 0$ (risp. $f(x_0) < 0$), allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ (risp. $f(x) < 0$) per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.

4.2 Proprietà delle funzioni continue

Nel paragrafo precedente abbiamo studiano alcune proprietà puntuali delle funzioni continue che si deducono direttamente dalle proprietà dei limiti. In questo paragrafo, invece, analizzeremo alcune proprietà globali delle funzioni continue, nel senso di proprietà che sono soddisfatte quando una funzione è continua su tutto un intervallo. Una prima proprietà rilevante riguarda la loro limitatezza sugli intervalli chiusi e limitati. Per essere più precisi dobbiamo introdurre la nozione di punti di estremo per una funzione.

Definizione 4.16 ➫ Punti di estremo assoluto

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Diremo che $x_0 \in A$ è un ***punto di massimo assoluto*** *di f in A se*

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \forall x \in A\,.$$

In tal caso, il valore $M = f(x_0)$ si dice massimo (assoluto) della funzione f in A. Analogamente, diremo che $x_1 \in A$ è un ***punto di minimo assoluto*** *di f in A se*

$$f(x) \ge f(x_1) \qquad \forall x \in A\,.$$

In tal caso, il valore $m = f(x_1)$ si dice minimo (assoluto) della funzione f in A.

I punti di massimo e minimo si chiamano anche **punti di estremo**. Quello che segue è uno dei teoremi fondamentali dell'Analisi Matematica, a causa delle sue evidenti conseguenze nelle applicazioni.

Teorema 4.17 ➾ di Weierstrass

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume in $[a,b]$ sia massimo che minimo assoluto.

Dimostrazione. Mostriamo che la funzione f ammette un punto di massimo assoluto; in maniera analoga si potrà poi dimostrare che f ammette anche un punto di minimo assoluto. Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Passo 1. Mostriamo che la funzione f è limitata superiormente in $[a,b]$.

Supponiamo per assurdo che f non sia limitata superiormente in $[a,b]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterà quindi un punto $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) \geq n$. Poiché la successione $(x_n)_n$ è limitata, per il Teorema 3.70 di Bolzano–Weierstrass essa ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a un limite y. Inoltre, poiché $x_{n_k} \in [a,b]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si avrà anche che $y \in [a,b]$ (si veda l'Osservazione 3.71). D'altra parte, poiché f è continua in y, si ha $\lim_k f(x_{n_k}) = f(y) \in \mathbb{R}$, in contraddizione con $f(x_{n_k}) \geq n_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$.

Passo 2. Mostriamo che la funzione f ammette massimo assoluto in $[a,b]$.

Per il passo precedente sappiamo che $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ è finito. Dobbiamo dimostrare che esiste un punto $y \in [a,b]$ di massimo assoluto per f, cioè tale che $f(y) = M$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un punto $x_n \in [a,b]$ tale che

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M < M + \frac{1}{n}\,,$$

cioè tale che $|f(x_n) - M| < 1/n$. Ragionando come per il passo precedente, per il Teorema 3.70 di Bolzano–Weierstrass la successione $(x_n)_n$ ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a un limite $y \in [a,b]$. Per quanto appena detto, avremo che $|f(x_{n_k}) - M| < 1/n_k \to 0$ per $k \to +\infty$, cioè $\lim_k f(x_{n_k}) = M$. Poiché f è continua in y, si avrà che

$$f(y) = \lim_k f(x_{n_k}) = M,$$

dunque y è un punto di massimo assoluto per f in $[a,b]$. □

Approfondimento 4.18. Le ipotesi fondamentali del teorema di Weierstrass sono due: la prima è che l'intervallo $[a,b]$ sia chiuso e limitato, la seconda è che la funzione f sia continua. Mostriamo con degli esempi che, se viene a mancare una di queste ipotesi, in generale la tesi non è vera.

a) Dominio non limitato: si consideri la funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. La funzione è continua e il suo dominio è chiuso ma non limitato. È evidente che f non è limitata superiormente, quindi non ammette massimo.

b) Dominio non chiuso: si consideri la funzione $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. La funzione è continua e il suo dominio è limitato ma non chiuso. In questo caso f è limitata sia superiormente che inferiormente in $(0,1)$: l'estremo inferiore vale 0 e l'estremo superiore vale 1. Tuttavia sia il valore $y = 0$ che il valore $y = 1$ non vengono assunti da f, quindi f non ammette punti né di massimo né di minimo assoluto.
Osserviamo che, quando il dominio non è chiuso, f anche se è continua può non essere limitata: si consideri ad esempio la funzione $f(x) = 1/x$ per $x \in (0,1)$.

c) Funzione non continua: si consideri la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 1, \\ x, & \text{se } x \in (0,1). \end{cases}$$

Questa funzione è chiaramente discontinua nei punti $x = 0$ e $x = 1$ ed è limitata. Tuttavia, il suo estremo inferiore (che è 0) non viene mai assunto, così come quello superiore (che è 1). $\triangleleft$

I prossimi due teoremi esprimono in maniera rigorosa l'idea intuitiva che il grafico di una funzione continua in un intervallo si possa disegnare "senza staccare la matita dal foglio".

Teorema 4.19 ➾ degli zeri

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua che cambia segno agli estremi dell'intervallo $[a,b]$, cioè tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora f ammette almeno uno zero in (a,b), cioè esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Iniziamo ponendo $a_0 = a$, $b_0 = b$. Sia $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ il punto medio dell'intervallo $[a_0, b_0]$. Se $f(c_0) = 0$, allora c_0 è uno zero di f e abbiamo concluso. In caso contrario, costruiamo un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ nel seguente modo: se $f(c_0) > 0$, poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$, mentre se $f(c_0) < 0$ poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$. In tal modo avremo che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$, cioè f cambia segno anche nell'intervallo $[a_1, b_1]$.

Procediamo come prima considerando l'intervallo $[a_1, b_1]$. Indichiamo con $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ il suo punto medio; se $f(c_1) = 0$ allora c_1 è uno zero di f e abbiamo concluso, altrimenti costruiamo l'intervallo $[a_2, b_2]$ avente un estremo in a_1 o b_1 e l'altro estremo in c_1 in modo tale da avere $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$.

Procedendo in questo modo per induzione, abbiamo due possibilità: o la procedura si interrompe dopo un numero finito di passi (perché la funzione f si annulla nel punto medio c_k del k-esimo intervallo), oppure la procedura non si arresta mai. Nel primo caso si arriva a determinare, in un numero finito di passi, uno zero di f, dunque la dimostrazione è conclusa. Nel secondo caso, avremo invece costruito una successione di intervalli $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$, con le seguenti proprietà:

(a) $a_0 \leq a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k \leq b_0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$;

(b) $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$;

(c) $f(a_k) < 0$ e $f(b_k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dalla proprietà (a) deduciamo che la successione $(a_k)_k$ è monotona crescente e limitata, mentre $(b_k)_k$ è monotona decrescente e limitata. Dal Teorema 3.67 segue quindi che entrambe le successioni ammettono limite finito. Inoltre, dalla proprietà (b), si ha che $\lim_k (b_k - a_k) = 0$, quindi le due successioni hanno lo stesso limite c. Dal momento che f è continua in c, avremo che $f(c) = \lim_n f(a_n)$. Poiché $f(a_n) < 0$ per ogni n, per il Teorema 3.21 della permanenza del segno avremo che $\lim_n f(a_n) \leq 0$, cioè $f(c) \leq 0$. Analogamente, poiché $f(c) = \lim_n f(b_n)$ e $f(b_n) > 0$ per ogni n, avremo che $f(c) \geq 0$. In conclusione, abbiamo che $f(c) \leq 0$ ed $f(c) \geq 0$, per cui possiamo concludere che $f(c) = 0$, cioè c è uno zero di f. □

Osservazione 4.20. Se f non è continua, in generale la tesi del teorema non è vera. Ad esempio, la funzione $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [0,1), \\ 1, & \text{se } x \in [1,2], \end{cases}$$

non ha alcuno zero, cioè non esiste alcun punto $c \in [0,2]$ tale che $f(c) = 0$. ◁

Osservazione 4.21. Il teorema degli zeri garantisce l'esistenza di **almeno** uno zero della funzione. Naturalmente la funzione può avere più zeri nell'intervallo in questione. Ad esempio, la funzione $f(x) = \cos x$, $x \in [0, 3\pi]$, ha tre zeri. L'unicità dello zero può essere garantita se, ad esempio, la funzione è strettamente monotona. ◁

Osservazione 4.22. Il teorema degli zeri può essere utile in situazioni in cui si voglia dimostrare che una certa equazione ammette soluzioni. Ad esempio, supponiamo di voler dimostrare che l'equazione $x^3 + 2x - 4 = 0$ ammette almeno una soluzione positiva (cfr. Figura 4.2).

Osserviamo che, posto $f(x)$ il primo membro dell'equazione, la funzione f è continua su tutta la retta reale; inoltre si ha che $f(0) = -4$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Queste informazioni suggeriscono che la funzione f debba intersecare l'asse delle ascisse in almeno un punto. La dimostrazione rigorosa di questo fatto può essere fatta nel modo seguente. Cerchiamo un punto $b > 0$ tale che $f(b) > 0$. Nel nostro caso basta scegliere, ad esempio, $b = 2$, in quanto

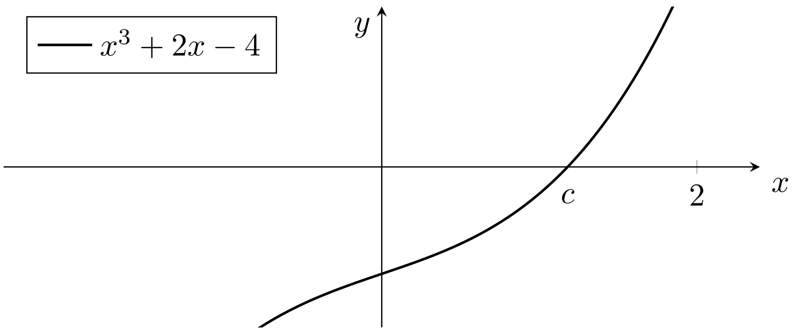


Figura 4.2: Grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x - 4$

$f(2) = 8 > 0$. Dal momento che $f(0) < 0$, per il teorema degli zeri segue che esiste almeno un punto $c \in (0, 2)$ tale che $f(c) = 0$. Inoltre, f è una funzione strettamente monotona crescente, essendo somma delle funzioni $g(x) = x^3$ e $h(x) = 2x - 4$ entrambe strettamente monotone crescenti. Di conseguenza, il punto c individuato sopra è l'unico zero della funzione f. $\triangleleft$

Osservazione 4.23. La dimostrazione del Teorema 4.19 degli zeri utilizza il cosiddetto **metodo di dicotomia** che non solo garantisce l'esistenza di uno zero, ma fornisce anche un algoritmo per stimarne il valore. Vediamolo nel caso della funzione $f(x) = x^3 + 2x - 4$ dell'esempio precedente. Abbiamo già visto che ammette un unico zero c, che si trova nell'intervallo $[0, 2]$. Supponiamo di voler stimare c con un errore minore di $1/10$. Cominciamo col determinare il punto medio dell'intervallo di partenza $[a_0, b_0] = [0, 2]$; esso è $c_0 = (a_0 + b_0)/2 = 1$. Poiché $f(c_0) = -1 < 0$, necessariamente dovrà essere $c \in [a_1, b_1] = [1, 2]$. Prendiamo nuovamente il punto medio $c_1 = (a_1 + b_1)/2 = 3/2$ di questo intervallo; poiché $f(3/2) = 19/8 > 0$, dovrà essere $c \in [a_2, b_2] = [1, 3/2]$. Si procede in questo modo suddividendo a ogni passo l'intervallo dato in due sottointervalli di uguale lunghezza, scegliendo fra questi due quello dove la funzione cambia di segno (se in uno degli estremi la funzione si annulla, abbiamo trovato lo zero e non c'è bisogno di procedere oltre).

n	$[a_n, b_n]$	$c_n = (a_n + b_n)/2$	$f(c_n)$
0	$[0, 2]$	1	-1
1	$[1, 2]$	$3/2$	$19/8$
2	$[1, 3/2]$	$5/4$	$29/64$
3	$[1, 5/4]$	$9/8$	$-167/512$
4	$[9/8, 5/4]$	$19/16$	$203/4096$

Al passo $n = 4$ siamo arrivati all'intervallo $[9/8, 5/4]$, che ha ampiezza $1/8$. Poiché sappiamo che lo zero c deve appartenere a questo intervallo, possiamo approssimarlo col punto medio $c_4 = 19/16 = 1.125$, commettendo un errore inferiore a $1/16$ e quindi anche a $1/10$. (Il valore effettivo dello zero è $c = 1.17951\ldots$) Il metodo di dicotomia qui descritto, pur non essendo particolarmente efficiente dal punto di vista numerico, ha una notevole importanza teorica in quanto è alla base della dimostrazione del teorema degli zeri e del teorema di Weierstrass. ◁

Teorema 4.24 ➭ dei valori intermedi

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ ed $f(b)$. In altri termini, per ogni y appartenente all'intervallo di estremi $f(a)$ ed $f(b)$ esiste (almeno) un punto $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = y$.

Dimostrazione. Se $y = f(a)$ oppure $y = f(b)$ basta scegliere rispettivamente $c = a$ oppure $c = b$. Supponiamo ora, per semplicità, $f(a) < f(b)$ e $y \in (f(a), f(b))$. Consideriamo la funzione $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - y$. Allora g è una funzione continua; inoltre $g(a) < 0$ (essendo $f(a) < y$) e $g(b) > 0$ (essendo $y < f(b)$). Applicando il Teorema 4.19 degli zeri alla funzione g si ha che esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $g(c) = 0$, ovvero $f(c) = y$. □

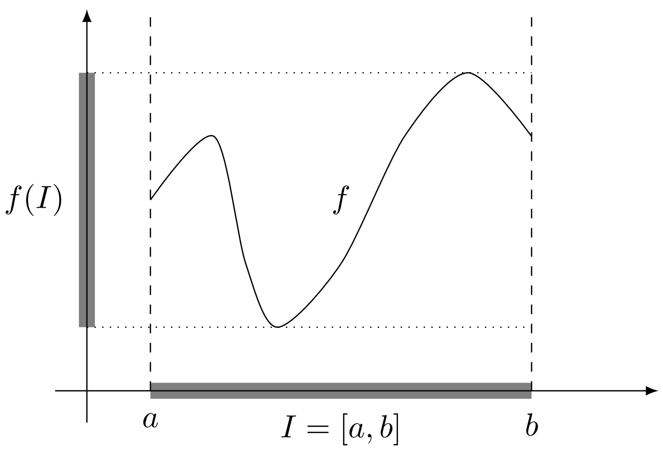


Figura 4.3: Teorema dei valori intermedi

Una conseguenza immediata del teorema dei valori intermedi è la seguente:

Teorema 4.25 ➭ Immagine di intervalli tramite funzioni continue

Sia I un intervallo ed $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo. In particolare, se $I = [a,b]$, allora f assume tutti i valori compresi fra il suo minimo assoluto e il suo massimo assoluto.

Dimostrazione. Per dimostrare che $f(I)$ è un intervallo dobbiamo dimostrare che, se $y_1, y_2 \in f(I)$ e $y_1 < y_2$, allora per ogni $y \in (y_1, y_2)$ si ha $y \in f(I)$. Poiché $y_1 \in f(I)$, esiste $a \in I$ tale che $f(a) = y_1$. Analogamente esiste $b \in I$ tale che $f(b) = y_2$. Chiaramente $a \neq b$, poiché $y_1 \neq y_2$. Applicando ora il Teorema 4.24 dei valori intermedi nell'intervallo di estremi a e b si conclude quindi che esiste un punto c di tale intervallo tale che $f(c) = y$. La seconda parte del teorema segue subito dalla prima parte e dal Teorema 4.17 di Weierstrass. □

Osservazione 4.26. L'ipotesi che I sia un intervallo è fondamentale nel teorema precedente. Sia infatti $A = [0,1] \cup [2,3]$ e si consideri la funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. Si ha che f è continua in A, ma $f(A) = A$ non è un intervallo. ◁

Approfondimento 4.27 (Definizione di logaritmo e radici)**.** Abbiamo ora tutti gli strumenti per definire rigorosamente la funzione logaritmo come funzione inversa dell'esponenziale. Abbiamo già dimostrato che la funzione e^x è strettamente positiva, è continua (si veda l'Esempio 4.9) ed è strettamente monotona crescente. Inoltre è illimitata superiormente: infatti, utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli, si ha che

$$e^n = [1 + (e-1)]^n \geq 1 + (e-1)n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, per il Teorema 3.43, avremo che

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^x = +\infty, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} e^x = \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

Per il Teorema 4.25 concludiamo quindi che l'immagine della funzione esponenziale è la semiretta aperta $(0, +\infty)$.

In conclusione, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x) = e^x$, è biiettiva ed è di conseguenza ben definita la sua funzione inversa $\log\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, che è strettamente monotona crescente in $(0,+\infty)$ e ha immagine tutto $\mathbb{R}$.

Con analoghi argomenti si definisce rigorosamente la funzione $\sqrt[n]{x}$. ◁

4.3 Continuità della funzione inversa

Questo paragrafo è dedicato a mostrare sotto quali ipotesi sia garantita la continuità della funzione inversa di una funzione continua e biiettiva. Iniziamo dimostrando due risultati preliminari.

Lemma 4.28

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Se f non è monotona, allora esistono $z_1 < z_2 < z_3$ in I tali che

$$f(z_2) < \min\{f(z_1), f(z_3)\} \quad \textit{oppure} \quad f(z_2) > \max\{f(z_1), f(z_3)\}\,. \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Poiché per ipotesi f non è monotona, esistono quattro punti $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ tali che

$$(a) \quad x_1 < x_2, \quad f(x_1) < f(x_2), \qquad (b) \quad x_3 < x_4, \quad f(x_3) > f(x_4). \tag{4.4}$$

(Ricordiamo che, poiché f è iniettiva, le immagini di due punti distinti non possono essere uguali.)

La verifica di (4.3) è ovvia se due dei quattro punti sono coincidenti (ad esempio, se $x_1 = x_4$, si ha $z_1 = x_3$, $z_2 = x_1$, $z_3 = x_2$, e varrà la prima disuguaglianza in (4.3)). Se invece i quattro punti sono distinti, indichiamoli con $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ e procediamo come segue.

Supponiamo, per fissare le idee, che $f(y_1) < f(y_2)$. Se $f(y_2) > f(y_3)$, allora possiamo scegliere $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$ $z_3 = y_3$ e vale la seconda disuguaglianza in (4.3). Se invece $f(y_2) < f(y_3)$, allora necessariamente $f(y_3) > f(y_4)$, altrimenti sarebbe violata la condizione (b) in (4.4). Quindi, scegliendo $z_1 = y_1$, $z_2 = y_3$, $z_3 = y_4$, vale ancora la seconda disuguaglianza in (4.3).

Analogamente, se $f(y_1) > f(y_2)$, è possibile selezionare la terna z_1, z_2, z_3 in modo che valga la prima disuguaglianza in (4.3). □

Proposizione 4.29 ➫ Iniettività e monotonia

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è iniettiva in I se e solo se f è strettamente monotona in I.

Dimostrazione. Se f è strettamente monotona allora è anche iniettiva (questa implicazione è vera indipendentemente dalla continuità e dal fatto che I sia un intervallo).

Viceversa, sia f iniettiva e supponiamo per assurdo che non sia strettamente monotona. Per il Lemma 4.28 esistono $z_1 < z_2 < z_3$ in I tali che valga (4.3). Supponiamo che valga la prima disuguaglianza in (4.3), e definiamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \min\{f(z_1), f(z_3)\}, \qquad x \in [z_1, z_3],$$

che soddisfa

$$g(z_1) \geq 0, \quad g(z_2) < 0, \quad g(z_3) \geq 0.$$

Per il Teorema 4.19 degli zeri, ciascuno dei due intervalli $[z_1, z_2)$ e $(z_2, z_3]$ contiene uno zero di g, cioè esistono $c_1 \in [z_1, z_2)$ e $c_2 \in (z_2, z_3]$ tali che $g(c_1) = g(c_2) = 0$. Abbiamo così determinato due punti $c_1 \neq c_2$ tali che $f(c_1) = f(c_2)$, che contraddice il fatto che f sia iniettiva. □

Possiamo ora dimostrare il risultato principale di questo paragrafo.

Teorema 4.30 ➾ Continuità della funzione inversa

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \colon I \to J$ una funzione continua e biiettiva. Allora la sua funzione inversa $f^{-1} \colon J \to I$ è continua.

Dimostrazione. Per semplicità dimostreremo il teorema nel caso in cui I sia un intervallo aperto. Sia $y_0 \in J$. Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo determinare $\delta > 0$ tale che

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon, \qquad \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap J. \tag{4.5}$$

Per la Proposizione 4.29 sappiamo che f è strettamente monotona. Supponiamo che sia strettamente crescente (nell'altro caso la dimostrazione è analoga). Per l'Osservazione 2.26, anche f^{-1} è strettamente crescente. Sia $x_0 = f^{-1}(y_0)$ e limitiamoci a considerare solo i valori di ε tali che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$. Poiché f è strettamente crescente, si ha

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon).$$

Scegliendo $\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon),\ f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$, se $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ si ha che

$$f(x_0 - \varepsilon) \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq f(x_0 + \varepsilon),$$

e, applicando la funzione inversa,

$$x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta) \leq x_0 + \varepsilon,$$

ossia vale (4.5). □

Esempio 4.31. Per il Teorema 4.30, le funzioni $\log_a x$ $(x > 0)$, $\sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$, $\arcsin x$ $(-1 \leq x \leq 1)$, $\arccos x$ $(-1 \leq x \leq 1)$, $\arctan x$ $(x \in \mathbb{R})$ sono tutte continue nei rispettivi domini. ◁

Esempio 4.32. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La potenza con esponente reale $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, è una funzione continua. Infatti f si può scrivere come composizione di funzioni continue nel seguente modo:

$$\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \log x}}$$

e la continuità segue quindi dal Teorema 4.13. ◁

Osservazione 4.33 (Continuità delle funzioni elementari)**.** Avendo dimostrato la continuità di tutte le funzioni di base, per i Teoremi 4.11, 4.13 e 4.30 concludiamo che tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio, dal momento che si ottengono come somme, prodotti, quozienti, composizioni di funzioni di base a loro volta continue. ◁

4.4 Limiti con esponenziali e logaritmi

A partire dalla Definizione 3.77 del numero di Nepero, è possibile calcolare alcuni limiti notevoli che riguardano le funzioni esponenziali e logaritmiche. Il primo passo sarà la seguente caratterizzazione del numero e.

Teorema 4.34 ➯ Caratterizzazione del numero di Nepero

Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,. \tag{4.6}$$

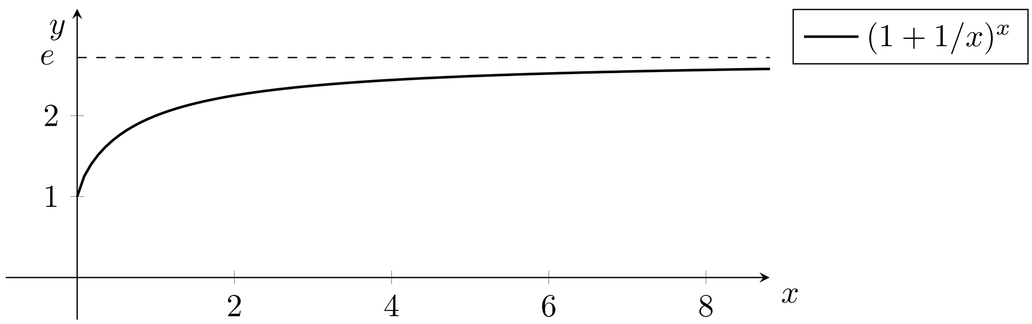


Figura 4.4: Andamento della funzione $f(x) = (1+1/x)^x$

Dimostrazione. Consideriamo le successioni

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \qquad n\in\mathbb{N}^+\,.$$

Abbiamo già dimostrato nella Proposizione 3.76 che la successione $(b_n)_n$ è monotona decrescente e converge a e. Per quanto riguarda la successione $(c_n)_n$, abbiamo che

$$c_n = \frac{a_{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}\,,$$

dove $(a_n)_n$ è la successione definita in (3.9). Quindi c_n è il rapporto fra il termine generale di una successione monotona crescente che converge a e e il termine generale di una successione monotona decrescente che converge a 1. Di conseguenza, la successione $(c_n)_n$ sarà monotona crescente e convergerà a e. Da queste proprietà delle successioni $(b_n)_n$ e $(c_n)_n$ deduciamo quindi che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$e - \varepsilon < c_{\bar{n}} \leq c_n \leq e \leq b_n \leq b_{\bar{n}} < e + \varepsilon, \qquad \forall n \geq \bar{n}. \tag{4.7}$$

Sia ora $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \bar{n}$, e indichiamo con $n = [x] \in \mathbb{N}$ la parte intera di x (cfr. pag. 63); in particolare si avrà che $n \geq \bar{n}$. Poiché $n \leq x < n+1$, si ha che

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \ .$$

Essendo inoltre $n \geq \bar{n}$, da (4.7) deduciamo che

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon\,, \qquad \forall x \geq \bar{n}(\varepsilon)\,,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Col cambiamento di variabili $s = -x - 1$ e utilizzando il Teorema 3.30 si ottiene anche

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{s \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{s+1}\right)^{-s-1} = \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{s+1}{s}\right)^{s+1} \\ &= \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{s+1}{s}\right)^s \cdot \left(\frac{s+1}{s}\right) = e \cdot 1 = e \ .\end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ . \tag{4.8}$$

Infatti, per $t = 0$ il risultato è ovvio, mentre, se $t \neq 0$, basta usare il cambiamento di variabili $s = x/t$ e tenere conto della continuità delle potenze. Inoltre, vale anche la formula

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \ ,$$

che si può ottenere da (4.8) con $t = 1$ utilizzando il cambiamento di variabile $y = 1/x$. Da quest'ultimo limite si ricavano anche i seguenti limiti notevoli:

Alcuni limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\ ,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\ ,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\ . \tag{4.9}$$

Per quanto riguarda il primo limite, utilizzando le proprietà del logaritmo e la sua continuità si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log\left[(1+x)^{1/x}\right]=\log e=1\ .$$

Per calcolare il secondo limite, facciamo il cambiamento di variabile $t=e^x-1$, cioè $x=\log(1+t)$, e utilizziamo il limite precedente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=1\ .$$

Passiamo ora al terzo limite. Il caso $\alpha=0$ è banale. Nel caso $\alpha\neq 0$, facciamo il cambiamento di variabile $t=\alpha\log(1+x)$. Osservando che $(1+x)^\alpha=e^t$ e $x=e^{t/\alpha}-1$ si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{e^{t/\alpha}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{t/\alpha}{e^{t/\alpha}-1}\cdot\alpha=\alpha\ .$$

(Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\lim_{t\to 0}\frac{t/\alpha}{e^{t/\alpha}-1}=1$, come si deduce facilmente dal secondo limite notevole in (4.9) con il cambiamento di variabile $s=t/\alpha$.)

4.5 Uniforme continuità

Introduciamo ora il concetto di continuità uniforme.

Definizione 4.35 ➩ Continuità uniforme

Una funzione $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice uniformemente continua in un insieme $E\subseteq A$ se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ per ogni coppia di punti $x,y\in E$ aventi distanza $|x-y|<\delta$. La funzione f si dirà uniformemente continua se è uniformemente continua in tutto il suo dominio.

Vediamo subito che una funzione uniformemente continua è anche continua in ogni punto del suo dominio; se infatti fissiamo $x\in A$, come conseguenza dell'uniforme continuità abbiamo che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ per ogni $y\in(x-\delta,x+\delta)\cap A$, cioè f è continua in x.

D'altra parte, mentre la continuità è una proprietà puntuale della funzione, l'uniforme continuità è una proprietà globale, cioè che tiene conto del comportamento della funzione su tutto l'insieme. Per capire meglio la differenza fra continuità uniforme e continuità (semplice), riscriviamo la definizione di continuità di f in un generico punto $x \in A$: fissato $x \in A$ ed $\varepsilon > 0$, esiste un numero positivo δ, che in generale dipenderà sia da x che da ε, tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap A$.

Vediamo dunque che ciò che contraddistingue la continuità uniforme dalla continuità è il fatto che nella definizione di continuità uniforme il numero δ dipende solo da ε (e non da un particolare punto del dominio), mentre nella definizione di continuità il numero δ dipende anche dal punto considerato, oltre che da ε. Questo numero $\delta(x, \varepsilon)$, pur essendo strettamente positivo, potrebbe avere estremo inferiore nullo al variare di $x \in A$, impedendo dunque di poter individuare un unico valore positivo che vada bene per tutti i punti $x \in A$ contemporaneamente.

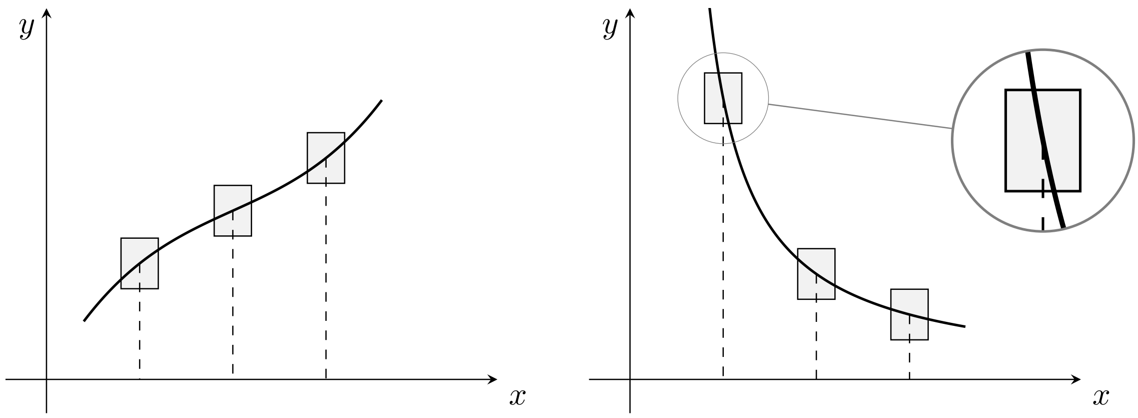


Figura 4.5: Funzione uniformemente continua (sinistra) e non uniformemente continua (destra)

Da un punto di vista grafico la situazione è illustrata nella Figura 4.5. Fissiamo un valore positivo di ε. Se la funzione è uniformemente continua, siamo in grado di individuare un valore positivo di δ con la seguente proprietà: se il rettangolo di base 2δ e altezza 2ε viene fatto "scorrere" tenendo il suo centro sul grafico di f, in ogni posizione il grafico di f non attraversa le due basi del rettangolo (si veda la Figura 4.5 a sinistra). Viceversa, se la funzione non è uniformemente continua, per quanto piccola si scelga la base del rettangolo avverrà che, facendolo "scorrere" come prima, si arriverà a posizioni nelle quali il grafico della funzione attraversa una base del rettangolo (si veda la Figura 4.5 a destra).

Esempio 4.36. La funzione $f(x) = x^2$ è uniformemente continua nell'intervallo $[0,1]$. Si ha infatti che

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2|x - y| \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ sarà sufficiente scegliere $\delta = \varepsilon/2$ per avere $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$, $x, y \in [0,1]$. $\triangleleft$

Approfondimento 4.37 (Funzioni Lipschitziane)**.** Nell'esempio precedente abbiamo sfruttato la disuguaglianza $|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$ per dimostrare che la funzione è uniformemente continua. Più in generale, diremo che una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ (detta costante di Lipschitz) tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in A.$$

Si vede immediatamente che una funzione Lipschitziana è anche uniformemente continua, dal momento che per ogni $\varepsilon > 0$ è sufficiente prendere $\delta = \varepsilon/L$ nella definizione di uniforme continuità. In particolare, le funzioni affini della forma $f(x) = ax + b$, o anche quelle ottenute prendendone il valore assoluto (cioè della forma $f(x) = |ax + b|$) sono Lipschitziane e dunque uniformemente continue su tutto $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Osservazione 4.38 (Funzioni non uniformemente continue)**.** Se si vuole dimostrare, attraverso l'uso della definizione, che una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ **non** è uniformemente continua, sarà sufficiente individuare un valore positivo $\varepsilon_0 > 0$ e due successioni $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ a valori in A tali che

$$\lim_n |x_n - y_n| = 0, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad \triangleleft$$

Esempio 4.39. La funzione $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua in $(0,1]$. L'interpretazione grafica dell'uniforme continuità che abbiamo illustrato nella Figura 4.5 suggerisce che si può perdere l'uniforme continuità in un intorno destro dell'origine. Consideriamo infatti le successioni a valori in $(0,1]$ $x_n = 1/n$, $y_n = 1/(2n)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Abbiamo che entrambe le successioni convergono a 0, dunque anche la loro differenza converge a 0. Tuttavia la differenza delle immagini

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - 2n| = n$$

è ≥ 1 per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ (in particolare, diverge a $+\infty$), dunque per quanto detto nell'Osservazione 4.38 la funzione non è uniformemente continua. $\triangleleft$

Esempio 4.40. La funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua in $\mathbb{R}$. In questo caso l'interpretazione grafica dell'uniforme continuità suggerisce che la perdita di uniforme continuità sia dovuta al fatto che la funzione ha una pendenza sempre maggiore per $x \to \pm\infty$ (si veda a questo proposito anche il Teorema 4.43). Infatti, se consideriamo le successioni $x_n = n + 1/n$, $y_n = n$, $n \in \mathbb{N}^+$, abbiamo che $\lim_n |x_n - y_n| = \lim_n 1/n = 0$, mentre

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

dunque per quanto detto nell'Osservazione 4.38 la funzione non è uniformemente continua. $\triangleleft$

Come abbiamo detto sin dall'inizio, una funzione uniformemente continua in un insieme E è anche continua in E. D'altra parte, come abbiamo visto negli Esempi 4.39 e 4.40, non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue. Se però l'insieme E è un intervallo chiuso e limitato, allora è possibile dimostrare che una funzione continua in E è anche uniformemente continua.

Teorema 4.41 ➭ di Heine–Cantor

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Di conseguenza (si veda anche l'Osservazione 4.38) esistono un valore $\varepsilon_0 > 0$ e due successioni $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$, a valori in $[a,b]$, tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Poiché $(x_n)_n$ è una successione a valori nell'intervallo limitato $[a,b]$, per il Teorema 3.70 di Bolzano–Weierstrass esiste una sua sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a un valore $x \in [a,b]$. D'altra parte

$$|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x|,$$

dunque anche la sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ converge al medesimo valore x. Infine, dalla disuguaglianza triangolare si ha che

$$0 < \varepsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(y_{n_k}) - f(x)|$$

ma questo è assurdo, dal momento che f è una funzione continua in x e quindi l'ultimo membro di queste disuguaglianze tende a 0 per $k \to +\infty$. $\square$

Un'altra condizione sufficiente affinché una funzione sia uniformemente continua, della quale non riportiamo la dimostrazione, è la seguente.

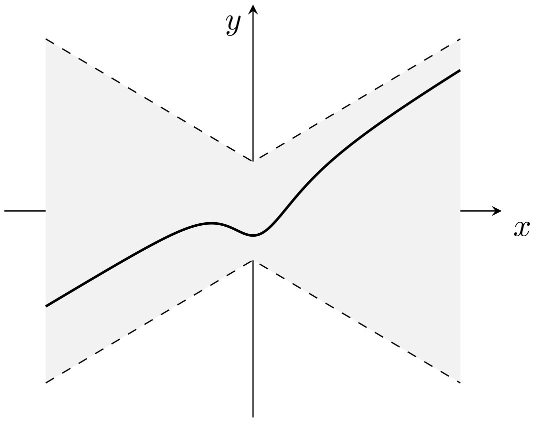


Figura 4.6: Il teorema della farfalla

Teorema 4.42 ➾ dell'asintoto

Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua nella semiretta chiusa $[a,+\infty)$. Supponiamo che f ammetta asintoto orizzontale od obliquo per $x \to +\infty$. Allora f è uniformemente continua. (Analogo enunciato vale per funzioni definite su una semiretta sinistra chiusa o su tutto $\mathbb{R}$.)

Riportiamo infine, sempre senza dimostrazione, anche una utile condizione necessaria per l'uniforme continuità su intervalli illimitati.

Teorema 4.43 ➾ della farfalla

Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora esistono due costanti positive α, β tali che

$$|f(x)| \le \alpha|x| + \beta, \qquad \forall x \in [a,+\infty). \tag{4.10}$$

(Analogo enunciato vale per funzioni definite su una semiretta sinistra o su tutto $\mathbb{R}$.)

Da un punto di vista grafico il significato del Teorema 4.43 è illustrato nella Figura 4.6: se la funzione è uniformemente continua, allora il suo grafico è tutto contenuto in una regione "a farfalla" come quella ombreggiata in figura.

Da un punto di vista analitico, la condizione (4.10) richiede che la funzione cresca all'infinito al più linearmente. In particolare, se ad esempio $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \pm\infty$, allora certamente la condizione (4.10) è violata e la funzione non è uniformemente continua. Di conseguenza qualsiasi funzione polinomiale di grado maggiore di 1 non è uniformemente continua su una semiretta o su tutto $\mathbb{R}$.

4.6 Successioni definite per ricorrenza

Alcune particolari successioni possono essere definite in maniera ricorrente; questo significa che un generico termine della successione può essere calcolato a partire dal valore del termine precedente.

Ad esempio, consideriamo la successione $(a_n)_n$ definita in questo modo:

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4.11}$$

I primi termini di questa successione sono

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
2	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\frac{17}{12} = 1.41\overline{6}$	$\frac{577}{408} \simeq 1.414215$	$\frac{665857}{470832} \simeq 1.414213562374$

Dimostreremo che la successione definita per ricorrenza da (4.11) converge a $\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots$; in effetti, già il termine a_4 fornisce un'approssimazione con un errore di circa $1.6 \cdot 10^{-12}$ (undici cifre decimali corrette). Questo algoritmo numerico, noto come **algoritmo di Erone**, può essere utilizzato per il calcolo della radice quadrata di un qualsiasi numero reale $\alpha > 0$ tramite la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{\alpha}{2\,a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Lo studio del limite di una successione definita per ricorrenza avviene in due passi:

1) dimostrare che la successione è convergente;
2) calcolare il limite,

tutto questo ammesso che il limite della successione effettivamente esista finito.

Il primo punto è in genere il più difficile; tipicamente, nei casi più semplici, si cerca di dimostrare che la successione è monotona e limitata. Esistono anche dei risultati più generali che noi però non tratteremo in questa sede.

Esempio 4.44 (Convergenza dell'algoritmo di Erone)**.** Dimostriamo che la successione definita per ricorrenza dalle relazioni (4.11) è monotona decrescente e limitata inferiormente da $\sqrt{2}$; di conseguenza, per il Teorema 3.67 essa sarà convergente.

Cominciamo a dimostrare, per induzione, che $a_n \geq \sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo che $a_0 = 2 > \sqrt{2}$; assumiamo ora $a_n \geq \sqrt{2}$ e dimostriamo che $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$. Usando la definizione (4.11) si ha che

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} = \frac{a_n^2 + 2}{2\sqrt{2}a_n} \cdot \sqrt{2} \geq \sqrt{2}\,.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza

$$\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1 \qquad \forall a, b > 0,$$

con $a = a_n$, $b = \sqrt{2}$, che segue immediatamente dalla disuguaglianza elementare $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Dimostriamo ora che $(a_n)_n$ è monotona decrescente. Tenendo conto del fatto che $a_n \geq \sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo che

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{1}{a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{2-a_n^2}{2a_n} \leq 0\,,$$

dunque la successione è monotona decrescente. ◁

Il secondo punto, vale a dire il calcolo effettivo del limite, è invece in genere più semplice. Osserviamo infatti che una successione definita per ricorrenza può essere scritta in questo modo:

$$a_0 = \text{valore dato}, \qquad a_{n+1} = f(a_n)\ , \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Nel caso della successione definita in (4.11) basta prendere $f(x) = x/2 + 1/x$; ci basta chiaramente considerare questa funzione per $x > 0$, dal momento che $a_0 = 2 > 0$ e che, se $a_n > 0$, allora anche $a_{n+1} = f(a_n) > 0$ (ricordiamo che, per dimostrare rigorosamente proposizioni di questo tipo, è sempre necessario utilizzare il Principio di Induzione). Se abbiamo già dimostrato che la successione ammette limite finito $l \in \mathbb{R}$, e se f è una funzione continua, allora passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione $a_{n+1} = f(a_n)$ si ottiene che $l = f(l)$. Infatti, $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = l$, mentre dalla continuità di f segue che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l)$. Quindi, se la successione è convergente, il valore del suo limite è da cercarsi fra le soluzioni dell'equazione $x = f(x)$; tali soluzioni si chiamano **punti fissi** della funzione f.

Esempio 4.45 (Calcolo del limite di (4.11))**.** Dimostriamo che la successione definita per ricorrenza dalle relazioni (4.11) converge a $\sqrt{2}$.

Nell'Esempio 4.44 abbiamo dimostrato che la successione converge a un limite $l \geq \sqrt{2}$. Per quanto detto sopra, il valore l del limite è una soluzione dell'equazione

$$l = \frac{l}{2} + \frac{1}{l}\ ,$$

vale a dire $l^2 = 2$. L'equazione ammette le due soluzioni $l = \pm\sqrt{2}$; poiché abbiamo già osservato che deve essere $l > 0$, concludiamo che il limite vale $\sqrt{2}$. ◁

Più in generale, si possono avere successioni definite per ricorrenza nelle quali il generico termine può essere calcolato a partire dai precedenti (e non solo dal precedente). Un esempio è dato dalla così detta **successione di Fibonacci**, definita nel seguente modo:

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N} .$$

I primi termini di questa successione sono

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \ldots$$

La successione diverge a $+\infty$, poiché è crescente e non limitata. Tuttavia, si può dimostrare che il rapporto fra due termini consecutivi è convergente. Più precisamente, definiamo la nuova successione

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} , \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Per questa successione abbiamo che $a_0 = 1$, mentre

$$a_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n} , \quad n \in \mathbb{N} . \tag{4.12}$$

Di conseguenza, la successione $(a_n)_n$ è definita per ricorrenza dalla legge $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(x) = 1 + 1/x$. In questo caso basta considerare f definita sulla semiretta $[1, +\infty)$; infatti $a_0 = 1$ e, se $a_n \geq 1$, anche $f(a_n) \geq 1$. Si può dimostrare, anche in questo caso, che la successione $(a_n)_n$ è convergente a un certo limite $l \geq 1$ (si veda l'Esempio 4.46). Calcoliamo il valore di l: la relazione $l = f(l)$ fornisce $l = 1 + 1/l$, cioè $l^2 - l - 1 = 0$. L'unica soluzione positiva di tale equazione viene indicata con

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989484820\ldots;$$

tale numero è detto **sezione aurea**.
La sezione aurea ha una proprietà geometrica particolare: se si considera un rettangolo di lati a e b in proporzione aurea (rettangolo aureo), cioè tali che $a/b = \phi$, e se ne taglia un quadrato di lato b, il restante rettangolo, di lati b e $a - b$, è ancora un rettangolo aureo (si veda la Figura 4.7). Infatti

$$\frac{b}{a-b} = \left(\frac{a-b}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^{-1} = (\phi - 1)^{-1} = \left(\frac{1}{\phi}\right)^{-1} = \phi .$$

Questa proprietà geometrica è nota sin dai tempi antichi e, in architettura, ha sempre avuto una valenza estetica. Ad esempio, il Partenone ha sia la pianta che il colonnato in sezione aurea.

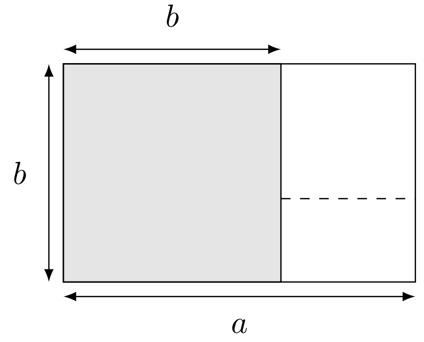


Figura 4.7: Rettangolo aureo

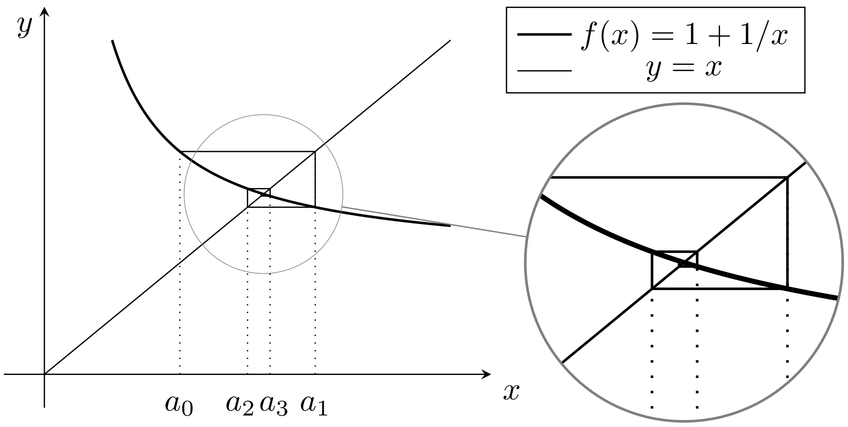


Figura 4.8: Successione definita in (4.12)

Esempio 4.46 (Convergenza della successione (4.12))**.** Dimostriamo che la successione $(a_n)_n$ definita per ricorrenza da (4.12) converge alla sezione aurea ϕ; a tale scopo è sufficiente dimostrare che le due sottosuccessioni $(a_{2k})_k$ e $(a_{2k+1})_k$ convergono entrambe a ϕ.

L'utilità di considerare queste due sottosuccessioni discende dal fatto che, in questo caso, l'intera successione $(a_n)_n$ non è monotona (quindi non si può dimostrare la convergenza come abbiamo fatto nel caso dell'algoritmo di Erone). Tuttavia, le sottosuccessioni $(a_{2k})_k$ e $(a_{2k+1})_k$ sono limitate e, rispettivamente, monotona crescente e decrescente; di conseguenza sono convergenti e risulta poi facile dimostrare che convergono entrambe a ϕ. Dimostreremo in dettaglio queste affermazioni solo per la sottosuccessione $(a_{2k})_k$, dal momento i calcoli relativi all'altra sottosuccessione sono del tutto analoghi.

Iniziamo a dimostrare per induzione che $a_{2k} < \phi$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Abbiamo che $a_0 = 1 < \phi$; assumiamo adesso che $a_{2k} < \phi$ e facciamo vedere che $a_{2k+2} <$

ϕ. Per definizione abbiamo che

$$a_{2k+2} = 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a_{2k}}} = 2 - \frac{1}{1 + a_{2k}}\,.$$

Poiché la funzione $g(x) = 2 - 1/(1 + x)$ è strettamente monotona crescente per $x > 0$, per l'ipotesi induttiva $a_{2k} < \phi$ avremo che

$$a_{2k+2} = g(a_{2k}) < g(\phi) = 2 - \frac{1}{1+\phi} = 2 \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 2 \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \phi\,.$$

Mostriamo ora che $(a_{2k})_k$ è monotona crescente. Abbiamo che

$$a_{2k+2} - a_{2k} = \frac{1 + 2a_{2k}}{1 + a_{2k}} - a_{2k} = -\frac{a_{2k}^2 - a_{2k} - 1}{1 + a_{2k}}\,.$$

Il trinomio di secondo grado $x^2 - x - 1$ ha zeri $(1 \pm \sqrt{5})/2$ e risulta dunque negativo nell'intervallo compreso fra i due zeri; in particolare, è negativo per $0 < x < \phi$. Di conseguenza $a_{2k+2} - a_{2k} > 0$; possiamo dunque concludere che la sottosuccessione $(a_{2k})_k$ è monotona crescente.

Infine, detto l il limite di $(a_{2k})_k$, dalla relazione $a_{2k+2} = g(a_{2k})$ e dalla continuità di g deduciamo che $l = g(l)$, cioè $l^2 - l - 1 = 0$; dovendo essere $l \geq 1$ avremo dunque $l = \phi$. $\lhd$

4.7 Esercizi

Esercizio 4.1. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} a, & x > 1, \\ x^3, & x \le 1, \end{cases} \qquad 2)\ f(x) = \begin{cases} ax, & x \le 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$$

Esercizio 4.2. Verificare la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \dfrac{\log|x| + 3}{2\log|x| + 7x - 12}, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.3. Determinare per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue in $\mathbb{R}$.

$$1) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + a & x > 0 \\ b & x = 0 \\ c + \dfrac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$2) \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1} + b & x > 1 \\ c & x = 1 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} \sin\left(\dfrac{(x-1)^3}{x^2 - 3x + 2}\right) & x < 1 \end{cases}$$

$$3) \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2x} & \text{se } x > 0, \\ c & \text{se } x = 0, \\ a + b \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.4. [Funzione Popcorn di Thomae] Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \in (0,1],\ p, q \in \mathbb{N}^+ \text{ e } \operatorname{mcd}\{p, q\} = 1, \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \text{ oppure } x = 0., \end{cases}$$

dove mcd$\{p, q\}$ indica il minimo comune divisore fra p e q. Mostrare che f è discontinua su $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ed è continua su $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ e in $x = 0$.

Esercizio 4.5. Utilizzando il Teorema 4.19 degli zeri, dimostrare che l'equazione $x^4 - 5x + \sin x - 4 = 0$ ammette almeno una soluzione positiva e almeno una soluzione negativa.

Esercizio 4.6. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Dimostrare che, se $f(a) = f(b)$, allora la funzione

$$g\colon [a, (a + b)/2] \to \mathbb{R} \qquad g(x) = f\left(x + \frac{b - a}{2}\right) - f(x)$$

si annulla almeno in un punto $c \in [a, (a + b)/2]$.

Esercizio 4.7. Dimostrare, utilizzando l'Esercizio 4.6, che se una persona compie in 1 ora un percorso di 4 km, allora esiste almeno un intervallo di 30 minuti in cui la persona ha percorso esattamente 2 km.

Esercizio 4.8. Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Mostrare quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Se $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $g(a) = 1$ e $g(b) = 0$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = g(c)$.
(b) Se $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $g(a) = 2$ e $g(b) = 4$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = g(c)$.
(c) Se $f(a) = 1$, $f(b) = 1$, $g(a) = 1$ e $g(b) = -2$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c)g(c) = 0$.
(d) Se $f(a) = 1$, $f(b) = -1$, $g(a) = -1$ e $g(b) = -1$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c)g(c) = f(c) + g(c)$.

Esercizio 4.9. Mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, 1), \\ x - 1, & \text{se } x \in [2, 3], \end{cases}$$

è invertibile e continua nel suo dominio. Determinarne la funzione inversa e discuterne la continuità.

Esercizio 4.10. [Funzioni Hölderiane e Lipschitziane] Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice Hölderiana di esponente α se esistono un numero $\alpha \in (0, 1]$ e una costante $C > 0$ tali che

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \qquad \forall\, x, y \in A.$$

Una funzione che soddisfa la condizione $(*)$ con $\alpha = 1$ si dice anche Lipschitziana.

1) Dimostrare che ogni funzione Hölderiana è continua in A.
2) Dimostrare che $f(x) = \sqrt{x}$ è Hölderiana di esponente $1/2$.
3) Dimostrare che una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ che soddisfa $(*)$ per $\alpha > 1$ è costante.

Esercizio 4.11. [Punti fissi] Sia $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ una funzione continua nell'intervallo $[-1,1]$ a valori nell'intervallo stesso. Si dimostri che esiste almeno un $x_0 \in [-1,1]$ tale che $f(x_0) = x_0$ (punto fisso per f). Si dimostri poi che se f è Lipschitziana con costante $C \in (0,1)$, ossia

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \qquad \forall\, x, y \in [-1,1],$$

allora il punto fisso è unico.

Esercizio 4.12. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri che per ogni successione limitata $(x_n)_n$, dalla successione $(f(x_n))_n$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Esercizio 4.13. Calcolare i seguenti limiti (se esistono):

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sin x}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x \sin x$

3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^x \cos^2 x$

4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(\log x^7 + \cos x)}{\log x}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin 2^x}{2^x}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} e^{-x} \cos x$

Esercizio 4.14. Siano $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ due intervalli, con $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, e sia $I = I_1 \cup I_2$ la loro unione. Dimostrare che, se la funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua sia in I_1 che in I_2, allora f è uniformemente continua in tutto I.

Esercizio 4.15. Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue negli intervalli indicati:

1) $f(x) = x^3$, $x \in [0, +\infty)$;

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$;

3) $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.16. Calcolare i seguenti limiti.

1) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^3}$

2) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)^{n^2}$

3) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n}$

4) $\lim_{n\to+\infty} n\log\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}\right)$

Esercizio 4.17. Utilizzando i limiti notevoli (4.8) e (4.9), calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

2) $\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{1+x}}-e}{x}$

4) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{e^x}-1}{x}$

Esercizio 4.18. Data la successione (a_n) definita per ricorrenza da

$$a_0=0, \qquad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

(i) dimostrare per induzione che $a_n\le 2$ per ogni $n\in\mathbb{N}$;
(ii) dimostrare che la successione è monotona crescente;
(iii) calcolarne il limite.

Esercizio 4.19. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+e^x}-e^x\right)$

2) $\lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{1}{x}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x+x^2}$

4) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^7-3x+2}$

5) $\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{\log x}$

6) $\lim_{x\to7}\frac{\sin 2\pi x}{x-7}$

7) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

9) $\lim_{x\to0} xe^x$

10) $\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{\log^2 x}$

11) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

12) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\log x\right)$

Esercizio 4.20. Studiare la continuità in $x_0=0$ delle seguenti funzioni.

1) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(x)\cos(1/x)}{e^x-1} & x<0\\ \log(1+x) & x\ge0\end{cases}$$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\sin^2(x/2)}{\log(1+x^2)+3x^2} & x < 0 \\ 1/4 + \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan^3(x)\sin(1/x)}{1-\cos(x)} & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \cos(x) & x \geq 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x})^{1/x} & 0 < x < \frac{\pi^2}{4} \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Esercizio 4.21. Calcolare i seguenti limiti.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log^2(x+1) - \log^2(\sin(x)+1)}{x(x-\sin(x))}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2(x)+1}{1-x}\right)^{\cot(x)}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\arctan(1-e^x))^2\log(x\sin(x)+1)}{\sqrt[4]{3x^4+1}-1}$

CAPITOLO 5

Derivate

5.1 Derivabilità e differenziabilità

Avendo a disposizione la nozione di limite, possiamo affrontare il problema delle tangenti introdotto all'inizio del Capitolo 3. Più precisamente, vogliamo fornire il concetto di retta tangente al grafico di una funzione e verificare che, quando una tale retta esiste, il suo coefficiente angolare può essere ottenuto passando al limite sui coefficienti angolare di opportune rette secanti.

Iniziamo formalizzando la nozione di retta tangente. La proprietà di esistenza della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ prende il nome di **differenziabilità**.

Definizione 5.1 ➫ Differenziabilità e retta tangente

Sia data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Diremo che f è ***differenziabile*** *nel punto x_0 se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0 \ . \tag{5.1}$$

In tal caso, la retta di equazione $y = f(x_0) + m\,(x - x_0)$ è detta ***retta tangente*** *al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.*

Usando la terminologia degli infinitesimi, la richiesta (5.1) equivale a dire che la differenza $f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$ quando $x \to x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \ , \qquad x \to x_0 \ .$$

A questo punto, il significato geometrico di tangenza è evidente: preso x vicino a x_0, la distanza fra il punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e il suo corrispondente

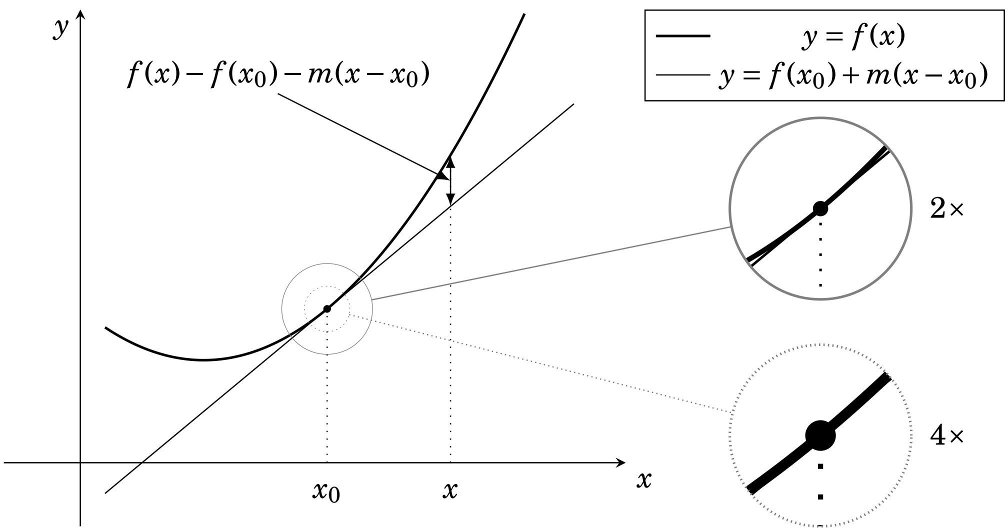


Figura 5.1: Differenziabilità

sul grafico della retta tangente a f nel punto x_0, tende a 0 più rapidamente della distanza fra x e x_0 (si veda la Figura 5.1).

Vediamo ora come caratterizzare il coefficiente angolare m. Usando l'algebra dei limiti possiamo scrivere il limite (5.1) come

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m\,.$$

Come già detto nel Paragrafo 3.1, per $x\neq x_0$ la quantità

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad (x\neq x_0),$$

chiamata **rapporto incrementale** della funzione f nel punto x_0, è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_0,f(x_0))$ e $(x,f(x))$,

Di conseguenza, la nozione di differenziabilità data nella Definizione 5.1 equivale a richiedere che esista finito il limite del rapporto incrementale per $x\to x_0$.

Definizione 5.2 ➪ Derivata

*Sia data una funzione $f\colon I\to\mathbb{R}$ definita su un intervallo $I\subset\mathbb{R}$ e sia $x_0\in I$. Diremo che f è **derivabile** nel punto x_0 se **esiste finito** il limite del rapporto incrementale*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,. \tag{5.2}$$

In tal caso, il valore di questo limite verrà indicato con $f'(x_0)$ e si chiamerà

derivata *di f nel punto x_0.*
Se la funzione f è derivabile in ogni $x_0 \in I$, diremo che f è derivabile in I.

In conclusione, f è differenziabile in x_0 se e solo se è derivabile in x_0, e in tal caso la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

Retta tangente al grafico

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \ . \tag{5.3}$$

In particolare, se f è derivabile in x_0, si ha quindi che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \ , \qquad x \to x_0 \ . \tag{5.4}$$

Osservazione 5.3 (Interpretazione cinematica della derivata)**.** La derivata ha anche un'importante interpretazione dal punto di vista cinematico. Supponiamo di avere un punto materiale vincolato a muoversi su una retta; indichiamo con $x(t)$ la sua posizione relativa all'origine al tempo t. Fissiamo un tempo t_0 e sia $t \neq t_0$. Il rapporto incrementale

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \ , \qquad t \neq t_0 \ ,$$

è la **velocità media** del punto materiale misurata fra i tempi t_0 e t, cioè è il rapporto fra lo spazio percorso nell'intervallo temporale di estremi t_0 e t e il tempo impiegato a percorrerlo. Di conseguenza, la derivata della posizione $x(t)$ rispetto al tempo t calcolata per $t = t_0$ non è altro che la **velocità (istantanea)** $v(t_0)$ del punto materiale al tempo t_0; in altri termini $v(t_0) = x'(t_0)$. ◁

Osservazione 5.4. La derivata viene indicata anche con molti altri simboli; nell'ambito dell'Analisi Matematica sono di uso comune i seguenti:

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0), \quad \left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{x=x_0} \ .$$

Nelle notazioni con dx a denominatore, la x dopo la d sta a indicare la variabile indipendente, rispetto alla quale si stanno considerando gli incrementi. Nel caso di una funzione $x(t)$ dipendente dal tempo, la derivata al tempo t_0 verrà dunque indicata ad esempio con la notazione $\frac{dx}{dt}(t_0)$. Nei testi di Fisica è di uso comune anche la notazione $\dot{x}(t_0)$ (che si legge "x punto di t_0"). ◁

Osservazione 5.5. Usando il cambiamento di variabile $h = x - x_0$, il limite (5.2) può essere scritto anche in questo modo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ . \qquad ◁$$

Esempio 5.6. Vogliamo calcolare la derivata della funzione $f(x) = 3x + 7$ in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Geometricamente, il grafico della funzione f è una retta di coefficiente angolare 3; ovviamente la retta tangente al grafico di f in un qualsiasi punto x_0 esiste e coincide con la retta stessa. Ci dobbiamo dunque aspettare che f sia derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e che la sua derivata valga $f'(x_0) = 3$. Verifichiamo quanto detto calcolando il limite del rapporto incrementale (5.2):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(3x + 7) - (3x_0 + 7)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3(x - x_0)}{x - x_0} = 3 \, .$$

Osserviamo che queste considerazioni valgono per il calcolo della derivata di una qualsiasi funzione del tipo $f(x) = mx + q$; in questo caso la derivata varrà $f'(x_0) = m$ in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. In particolare, se f è una funzione costante, cioè è del tipo $f(x) = q$, allora la sua derivata è nulla in ogni punto. ◁

La derivabilità è una proprietà di regolarità di una funzione più forte della continuità, come mostrato nel seguente risultato.

Teorema 5.7 ➾ Continuità delle funzioni derivabili

Se f è derivabile in un punto x_0, allora f è anche continua in x_0.

Dimostrazione. È una conseguenza immediata di (5.4). □

Esempio 5.8 (Funzione continua ma non derivabile)**.** Il Teorema 5.7 asserisce che, se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto. Non è vera l'implicazione opposta: esistono funzioni continue che non sono derivabili. Un esempio molto semplice è il seguente: si consideri la funzione valore assoluto, $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, che è continua su tutto $\mathbb{R}$. In particolare essa è continua nel punto $x_0 = 0$; facciamo vedere che, però, f non è derivabile nell'origine. Infatti il rapporto incrementale nell'origine vale

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} \, , \qquad x \neq 0 \, ,$$

e il suo limite per $x \to 0$ non esiste, in quanto il limite destro vale $+1$ mentre quello sinistro vale -1 (cfr. Esempio 3.19). In effetti, osservando il grafico della funzione valore assoluto (cfr. Paragrafo 2.8.2), è chiaro che in $x_0 = 0$ non è definita la retta tangente al grafico. ◁

Esempio 5.9. Un altro esempio di funzione continua ma non derivabile in ogni punto del suo dominio è la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, che è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ (si veda la Figura 5.2).

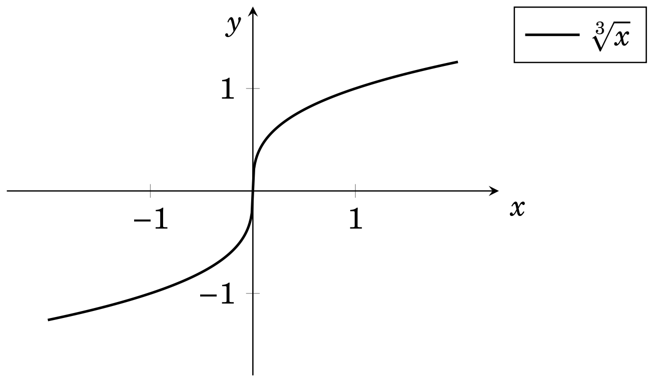


Figura 5.2: Grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x}$

Mostriamo che non è derivabile nell'origine. A tale proposito, analizziamo il limite del rapporto incrementale nel punto $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty\ .$$

Poiché tale limite esiste ma non è finito, la funzione f non è derivabile in $x_0 = 0$. Facciamo un'altra osservazione: se $x \neq 0$, la retta passante per l'origine e per il punto $(x, \sqrt[3]{x})$ ha coefficiente angolare $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Quando $x \to 0$, questa retta tende a disporsi verticalmente. $\triangleleft$

Osservazione 5.10. Nell'esempio precedente il limite del rapporto incrementale esiste ma non è finito, quindi la funzione non è derivabile. Per comodità di notazione si scrive spesso $f'(x_0) = +\infty$ (risp. $f'(x_0) = -\infty$) quando la funzione è continua in x_0 e il limite del rapporto incrementale in x_0 esiste e vale $+\infty$ (risp. $-\infty$). Ribadiamo però il fatto che, in tal caso, la funzione **non** è derivabile nel punto x_0. Per quanto detto nell'Esempio 5.9, se $f'(x_0) = \pm\infty$ allora esiste ancora la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ed è verticale. Per questo motivo, i punti x_0 in cui f è continua e $f'(x_0) = +\infty$ (oppure $-\infty$) si chiamano **punti a tangente verticale**. $\triangleleft$

Nell'Esempio 5.8 abbiamo visto che la funzione valore assoluto non ammette tangente al grafico nell'origine. Tuttavia, geometricamente si vede che le rette $y = -x$ e $y = x$ sono tangenti al grafico della funzione $|x|$ nell'origine quando questa viene ristretta rispettivamente alle semirette $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$. Questa osservazione giustifica la seguente definizione (cfr. Figura 5.3).

Definizione 5.11 ➯ Derivate sinistra e destra

Sia data una funzione $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Diremo che f è derivabile a destra (risp. a sinistra) in x_0 se esiste ***finito*** *il limite destro* *(risp. sinistro) del rapporto incrementale*

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad\left(\textit{risp.}\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right). \tag{5.5}$$

In tal caso, il valore di questo limite viene detto ***derivata destra*** *(risp.* ***derivata sinistra****) di f in x_0 e viene indicato con $f'_+(x_0)$ (risp. $f'_-(x_0)$).*

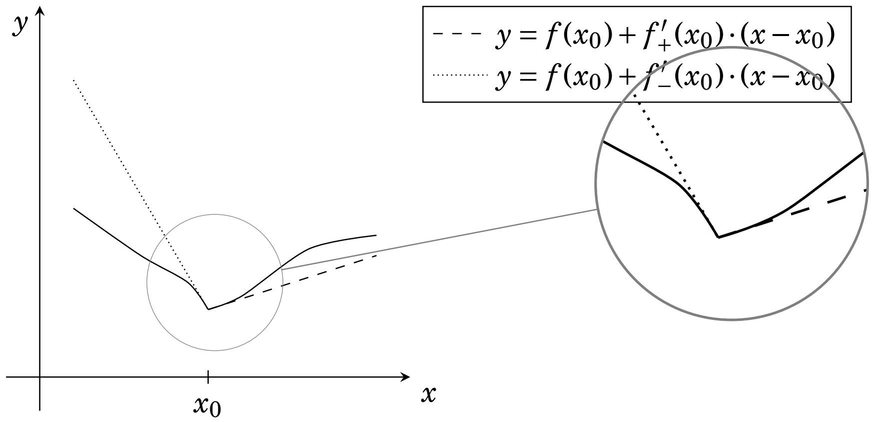


Figura 5.3: Derivata sinistra e destra

Osserviamo che, col cambiamento di variabili $h = x - x_0$, i limiti in (5.5) sono equivalenti a

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad\left(\text{risp.}\ \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right).$$

Come nel caso delle derivate, se f è continua in x_0 (in realtà basta che si abbia $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$) e il limite destro del rapporto incrementale in x_0 esiste ma vale $+\infty$ (risp. $-\infty$) scriveremo che $f'_+(x_0) = +\infty$ (risp. $-\infty$), anche se in questo caso f **non** è derivabile a destra in x_0. Analogamente si procede con la derivata sinistra.

Osservazione 5.12. Come conseguenza del Teorema 3.20 sui limiti destro e sinistro, abbiamo che f è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$ se e solo se in tale punto è derivabile sia a sinistra che a destra e le derivate sinistra e destra coincidono, cioè $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. (Ricordiamo che, per definizione di derivabilità destra e sinistra, $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ devono essere valori finiti.) $\triangleleft$

Osservazione 5.13. Se f è definita in un intervallo del tipo $[a, b]$, allora in $x_0 = a$ la nozione di derivata introdotta nella Definizione 5.2 coincide con la nozione di derivata destra. Infatti, in questo caso, il limite del rapporto incrementale per x che tende ad a coincide col limite destro del rapporto incrementale in a. Analogamente, in $x_0 = b$ la nozione di derivata coincide con quella di derivata sinistra. ◁

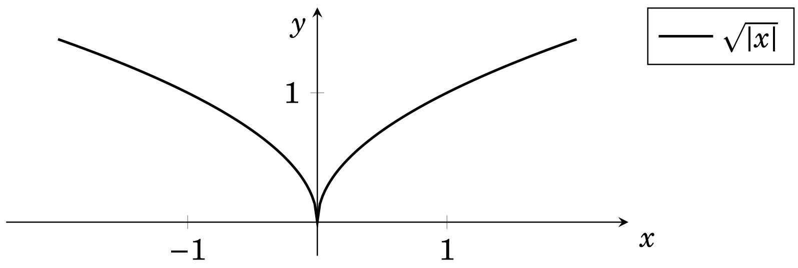


Figura 5.4: Punto di cuspide

Esempio 5.14. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ (si veda la Figura 5.4). Come si intuisce dalla figura, il grafico di f non ammette retta tangente nell'origine. Si ha infatti

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{|h|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|h|}} = +\infty \ ,$$

cioè $f'_+(x_0) = +\infty$, e già questo basta a escludere che la funzione sia derivabile (anche solo a destra) in $x_0 = 0$. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{-|h|} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{|h|}} = -\infty \ ,$$

cioè $f'_-(x_0) = -\infty$. (Nel primo passaggio abbiamo usato il fatto che $h = -|h|$ quando $h < 0$.) ◁

Nell'Esempio 5.14 abbiamo mostrato una funzione che, nel punto $x_0 = 0$, è continua, non è derivabile, e $f'_+(x_0) = +\infty$, $f'_-(x_0) = -\infty$. In tal caso, o anche nel caso in cui $f'_+(x_0) = -\infty$, $f'_-(x_0) = +\infty$, diremo che il punto $(x_0, f(x_0))$ è un **punto di cuspide**. Se invece f è continua in x_0, ma $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ (con al più una delle due derivate eventualmente infinita) diremo che il punto $(x_0, f(x_0))$ è un **punto angoloso** (cfr. Figura 5.3). Ricordiamo infine che, se $f'_+(x_0)$ ed $f'_-(x_0)$ valgono entrambe $+\infty$ oppure entrambe $-\infty$, allora il punto $(x_0, f(x_0))$ è detto **punto a tangente verticale** (cfr. Esempio 5.9).

Concludiamo questo paragrafo introducendo la nozione di derivate di ordine superiore al primo. Supponiamo di avere una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile su tutto (a,b). In questo modo, la derivata di f è a sua volta una funzione definita in (a,b): $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Se la funzione f' è derivabile in un punto x_0, chiamiamo la derivata in x_0 di f' **derivata seconda** di f in x_0, e la indichiamo con $f''(x_0)$. Le notazioni più usate per indicare la derivata seconda sono

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), \quad D^2 f(x_0).$$

Nei testi di Fisica, se $x(t)$ è una funzione del tempo, la sua derivata seconda è spesso indicata con $\ddot{x}(t)$.

Naturalmente questo procedimento può essere ulteriormente iterato: se f è derivabile due volte in (a, b), possiamo vedere se f'' è a sua volta derivabile in qualche punto. La derivata della derivata seconda è chiamata derivata terza, etc. Le derivate successive alla seconda nel punto x_0 vengono generalmente indicate con

$$f^{(3)}(x_0), \quad f^{(4)}(x_0), \quad f^{(5)}(x_0), \quad \ldots$$

Bisogna stare attenti al fatto che il numero "a esponente", tra parentesi tonde, indica l'ordine di derivazione e **non** una potenza. Spesso, per uniformità di notazione, si indica con $f^{(0)}$ la funzione stessa, cioè $f^{(0)} = f$, e con $f^{(1)}$ la sua derivata prima, cioè $f^{(1)} = f'$.

5.2 Calcolo delle derivate

Per calcolare la derivata di una funzione elementare non sarà sempre necessario calcolare il limite del rapporto incrementale (5.2). Infatti sarà sufficiente conoscere le derivate delle funzioni di base (che calcoleremo fra breve) e le regole per derivare somme, prodotti, quozienti, composizioni di funzioni derivabili (si vedano i Teoremi 5.21, 5.24 e 5.31).

Esempio 5.15 (Derivata di seno e coseno)**.** Facciamo vedere che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono derivabili in ogni punto $x \in \mathbb{R}$, e che

Derivata di $\sin x$ e $\cos x$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Cominciamo a calcolare la derivata di $f(x) = \sin x$ in un generico punto $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che, per le formule di addizione del seno, si ha

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x = (\cos h - 1) \sin x + \sin h \cos x$$

(si veda il Paragrafo 2.9.2), quindi il limite del rapporto incrementale è

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \right] = \cos x\ . \end{aligned}$$

Per l'ultimo passaggio abbiamo utilizzato i seguenti limiti noti:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0\ ,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\ .$$

Il calcolo della derivata del coseno si effettua in modo analogo osservando che

$$\begin{aligned}\cos(x+h)-\cos x &= \cos x\cos h-\sin h\sin x-\cos x\\ &= (\cos h-1)\cos x-\sin h\sin x\ .\end{aligned}$$

◁

Osservazione 5.16. Il fatto che la derivata di $\sin x$ sia $\cos x$ giustifica l'uso dei radianti al posto dei gradi sessagesimali. Supponiamo infatti di definire le funzioni seno e coseno utilizzando i gradi; se indichiamo con 'SIN' e 'COS' queste nuove funzioni, valgono le relazioni

$$\mathrm{SIN}\ x=\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)\ ,\qquad \mathrm{COS}\ x=\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)\ ,$$

dove x misura l'angolo in gradi. Procedendo come nell'Esempio 5.15 (oppure utilizzando il Teorema 5.24 che vedremo più avanti) si ottiene che

$$\frac{d}{dx}\mathrm{SIN}\ x=\frac{\pi}{180}\mathrm{COS}\ x\,,$$

e un'analoga costante moltiplicativa compare anche nella derivata del coseno. L'uso dei radianti evita quindi la comparsa di queste costanti moltiplicative nelle derivate. ◁

Esempio 5.17 (Derivata dell'esponenziale)**.** Vogliamo dimostrare che la funzione $f(x)=e^x$ è derivabile in ogni punto e

Derivata di e^x

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x\ ,\qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Infatti abbiamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\,\frac{e^h-1}{h}=e^x\ ,$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il secondo limite notevole elencato in (4.9). In maniera analoga, se $a>0$, usando la relazione $a^x=e^{x\log a}$ abbiamo che

$$\frac{d}{dx}a^x=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\log a\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\log a}-1}{h\log a}=a^x\log a\,.$$

Quest'ultima formula mostra che la derivata della funzione esponenziale in base a coincide con la funzione stessa solo se $a=e$; questa invarianza per derivazione motiva la scelta di e come base naturale per l'esponenziale. ◁

Esempio 5.18 (Derivata del logaritmo)**.** Vogliamo mostrare che la funzione $f(x) = \log x$ è derivabile in ogni punto $x > 0$ e

Derivata di $\log x$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \,, \qquad \forall x > 0\,.$$

Sia infatti $x > 0$; abbiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + h/x)}{(h/x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \,,$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il cambiamento di variabile $k = h/x$ e il primo limite notevole elencato in (4.9). $\lhd$

Esempio 5.19 (Derivata di x^n)**.** Sia $n \in \mathbb{N}^+$; vogliamo mostrare che la funzione $f(x) = x^n$ è derivabile in ogni punto e

Derivata di x^n

$$\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1} \,, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^+\,.$$

Se $n = 1$, allora $f(x) = x$ e $f'(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vediamo cosa succede per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, andando a calcolare il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \,. \tag{5.6}$$

Osserviamo che, se $x = 0$, il limite diviene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^n}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1} = 0 \qquad (n \geq 2) \,,$$

quindi $f'(0) = 0$. Se $x \neq 0$, raccogliendo x^n nel limite (5.6) si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} x^n \frac{(1 + \frac{h}{x})^n - 1}{h} = \lim_{h\to 0} x^{n-1} \frac{(1 + \frac{h}{x})^n - 1}{\frac{h}{x}} = nx^{n-1} \,.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1 + h/x)^n - 1}{(h/x)} \overset{[k=h/x]}{=} \lim_{k\to 0} \frac{(1+k)^n - 1}{k} = n$$

che è stato calcolato col cambiamento di variabili $k = h/x$ e facendo uso dell'ultimo limite notevole elencato in (4.9). $\lhd$

Esempio 5.20 (Derivata di x^α)**.** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; vogliamo mostrare che la funzione $f(x) = x^\alpha$, definita per $x > 0$, è derivabile e

Derivata di x^α

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}\ , \qquad \forall x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}\ .$$

Fissato $x > 0$, si può procedere come nell'Esempio 5.19 ottenendo

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} &= \lim_{h\to 0} x^\alpha \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} x^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}\,. \end{aligned}$$ ◁

Vediamo ora come si comporta l'operazione di derivazione rispetto alle operazioni algebriche tra funzioni.

Teorema 5.21 ➾ Operazioni con le derivate

Siano f e g due funzioni derivabili in uno stesso punto x_0. Allora le funzioni $f+g$ ed $f \cdot g$ sono derivabili in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \qquad (f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\ .$$

Se inoltre $g(x_0) \neq 0$, allora anche f/g è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\ .$$

Dimostrazione. La regola di derivazione della somma è conseguenza diretta del Teorema 3.30 sulle operazioni fra limiti finiti, applicato alla somma dei rapporti incrementali di f e g.

Analogamente, la regola di derivazione del prodotto è conseguenza del Teorema 3.30, una volta osservato che, per il Teorema 5.7, la funzione g è continua in x_0, e

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\ .$$

Per quanto riguarda la derivata del rapporto, osserviamo preliminarmente che, per il Teorema 3.21 della permanenza del segno, $g(x) \neq 0$ in un intorno I di x_0. Per $x \in I$, $x \neq x_0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right] &= \frac{1}{x-x_0}\left[\frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\right] \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x_0) - f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\ .\end{aligned}$$

A questo punto basta usare nuovamente la continuità di g in x_0 e il Teorema 3.30 per effettuare il passaggio al limite nell'ultima espressione. □

Come casi particolari del Teorema 5.21 abbiamo che:

1) Se c è una costante reale, allora $(c+f)'(x_0) = f'(x_0)$, cioè le costanti additive *vengono eliminate* in derivazione.
2) Se c è una costante reale, allora $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$; in altri termini, le costanti moltiplicative *escono* dal segno di derivata.
3) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $(1/g)'(x_0) = -g'(x_0)/g(x_0)^2$; questo è un caso particolare della regola di derivazione del quoziente con $f(x) = 1$.

Esempio 5.22. Sapendo che $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ (cfr. Esempio 5.19) e usando le regole di derivazione della somma e del prodotto per una costante, è possibile dimostrare che i polinomi sono funzioni derivabili su tutta la retta reale. È inoltre semplice calcolarne la derivata. Ad esempio

$$\frac{d}{dx}(3x^7 - 2x^5 + 4x - 2) = 3\frac{dx^7}{dx} - 2\frac{dx^5}{dx} + 4\frac{dx}{dx} = 21x^6 - 10x^4 + 4$$

(si ricordi che la derivata di una costante è nulla). ◁

Esempio 5.23 (Derivata della tangente)**.** Vogliamo calcolare la derivata della funzione $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Abbiamo già calcolato le derivate di seno e coseno nell'Esempio 5.15. Dalla regola di derivazione del quoziente otteniamo che $\tan x$ è derivabile in tutti i punti in cui è definita, cioè nei punti $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e inoltre in tali punti si ha

Derivata di $\tan x$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Talvolta risulta più comoda l'espressione equivalente

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\ .$$

Allo stesso modo si può calcolare anche la derivata della cotangente:

Derivata di $\cot x$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x\ , \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Mostriamo ora come derivare la composizione di funzioni.

Teorema 5.24 ➫ Derivata della funzione composta

Sia f una funzione derivabile nel punto x_0 e sia g una funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ (se è definita) è derivabile nel punto x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \ . \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Poiché f è derivabile in x_0, la formula (5.4) implica che $f(x) - f(x_0)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $x - x_0$ (se $f'(x_0) \neq 0$) oppure di ordine superiore (se $f'(x_0) = 0$). In particolare

$$o(f(x) - f(x_0)) \quad \text{è} \quad o(x - x_0), \qquad x \to x_0, \tag{5.8}$$

dal momento che una quantità che tende a 0, per $x \to x_0$, più rapidamente di $f(x) - f(x_0)$, tenderà a 0 più rapidamente anche di $x - x_0$.

Riscriviamo la formula (5.4) per la funzione g nel punto $y_0 = f(x_0)$:

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)\,(y - y_0) + o(y - y_0), \qquad y \to y_0.$$

Sostituendo $y = f(x)$ e tenendo conto di (**??**) e (5.8) si ha

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= g'(f(x_0))\,[f(x) - f(x_0)] + o(f(x) - f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))\,[f'(x_0)\,(x - x_0) + o(x - x_0)] + o(x - x_0) \\ &= g'(f(x_0))\,f'(x_0)\,(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

da cui segue (5.7). □

Quando si deriva una funziona composta bisogna prestare molta attenzione agli argomenti delle funzioni. Un errore comune è quello di valutare la funzione g in x_0 anziché in $f(x_0)$, come ad esempio

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = (\cos x) \cdot (2x) \qquad \textbf{(errato!!!)}.$$

Qui la funzione coseno che compare a destra deve essere valutata nell'argomento della funzione seno che compare a sinistra, cioè in x^2, e non in x:

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot (2x) \qquad \text{(corretto)}.$$

Un altro errore consiste nel "dimenticarsi" della derivata della funzione più interna:

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2) \qquad \textbf{(errato!!!)}.$$

Ultima raccomandazione: evitare di confondere una composizione di due funzioni col prodotto di due funzioni!

Esempio 5.25. Calcoliamo la derivata della funzione $\sin^5 x$. Questa funzione può essere vista come composizione delle funzioni $g(y) = y^5$ e $f(x) = \sin x$. Poiché $f'(x) = \cos x$ e $g'(y) = 5y^4$ si ha che

$$\frac{d}{dx} \sin^5 x = 5 \sin^4 x \cos x \ .$$

Può essere comodo visualizzare questa derivata nel seguente modo:

$$\frac{d}{dx}(\cdots)^5 = 5(\cdots)^4 \frac{d}{dx}(\cdots)$$

e applicare poi questa formula al caso $(\cdots) = (\sin x)$. Allo stesso modo si ha anche, ad esempio,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3x^2 + 5x - 2)^5 &= 5(3x^2 + 5x - 2)^4 \frac{d}{dx}(3x^2 + 5x - 2) \\ &= 5(3x^2 + 5x - 2)^4 (6x + 5) \ . \end{aligned}$$ ◁

Osservazione 5.26. La formula (5.7) che esprime la derivata della funzione composta può anche essere scritta in un altro modo. Consideriamo le funzioni $y = f(x)$ e $z = g(y)$; vediamo z come funzione composta di g e f. In altri termini, se z è una funzione della variabile y e y, a sua volta, è una funzione della variabile x, abbiamo che

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \ . \tag{5.9}$$

Osserviamo che, per passare dal secondo al primo membro, è come se dy si semplificasse; ovviamente la "semplificazione" di dy non ha senso dal punto di vista matematico, ma è un modo utile per ricordarsi la formula di derivazione della funzione composta. In particolare, la formula (5.9) dice che il tasso di variazione di z rispetto a x è uguale al prodotto dei tassi di variazione di z rispetto a y e di y rispetto a x. Riprendendo l'Esempio 5.25, abbiamo $z = y^5$ e $y = \sin x$ e otteniamo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^5)}{dy} \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = 5y^4 \cos x = 5(\sin x)^4 \cos x \ .$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito $y = \sin x$. ◁

Esempio 5.27. La formula (5.9) viene spesso utilizzata nei problemi di Fisica, Chimica, etc. Supponiamo ad esempio di avere un contenitore a forma di cono, con raggio di base e altezza uguali a un metro, e disposto col vertice rivolto verso il basso. Questo contenitore, inizialmente vuoto, viene riempito d'acqua

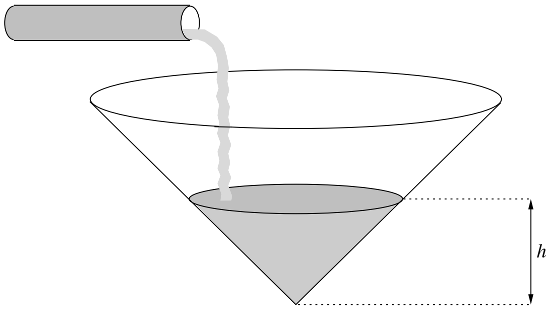


Figura 5.5: Contenitore conico dell'Esempio 5.27

attraverso una condotta che versa 60 litri di acqua al minuto. Vogliamo sapere con quale velocità l'altezza dell'acqua cresce quando l'altezza stessa è pari a 50 centimetri.

Indichiamo con h l'altezza del livello dell'acqua nel contenitore e con V il volume occupato dall'acqua stessa (si veda la Figura 5.5). Chiaramente V è pari al volume di un cono avente raggio di base h e altezza h, in quanto il cono di partenza ha raggio di base e altezza uguali. Si ha quindi $V = \pi h^3/3$ (si ricordi che il volume di un cono è $1/3$ del volume del cilindro avente stessa altezza e stesso raggio di base). Utilizzando la formula (5.9) si ha quindi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt} \ ,$$

da cui si ricava

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt} \ .$$

Osserviamo adesso che $\frac{dV}{dt}$ non è altro che la quantità di acqua introdotta nel contenitore per unità di tempo, cioè

$$\frac{dV}{dt} = 60 \ \frac{\text{litri}}{\text{min}} = 10^{-3} \ \frac{m^3}{s} \ .$$

Quando $h = 0.5 \ m$ si ottiene quindi

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi \cdot 0.5^2 \ m^2} \cdot 10^{-3} \ \frac{m^3}{s} \simeq 1.27 \cdot 10^{-3} \ \frac{m}{s} \ .$$

Questo significa che, quando $h = 0.5 \ m$, la velocità di salita del livello dell'acqua è circa 1.27 millimetri al secondo. ◁

Esempio 5.28. Talvolta può essere necessario applicare più volte la regola di derivazione della funzione composta. Ad esempio

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sin(x^2-x)]^5 &= 5[\sin(x^2-x)]^4\frac{d}{dx}[\sin(x^2-x)]\\ &= 5[\sin(x^2-x)]^4\cdot\cos(x^2-x)\frac{d}{dx}(x^2-x)\\ &= 5[\sin(x^2-x)]^4\cdot\cos(x^2-x)\cdot(2x-1)\ .\end{aligned} \qquad \lhd$$

Approfondimento 5.29 (Derivata logaritmica)**.** Sia f una funzione derivabile in un certo punto x, con $f(x) > 0$. Vogliamo calcolare la derivata logaritmica di f, cioè la derivata di $\log f$. Cominciamo a osservare che f è positiva in un intorno del punto x, quindi la funzione $\log f$ è definita almeno in tale intorno. Infatti $f(x) > 0$ ed f è continua in x (essendo derivabile in x); di conseguenza, per il Teorema 4.15 della permanenza del segno, f è positiva in un intorno del punto x. Poiché $\frac{d}{dy}\log y = \frac{1}{y}$ (cfr. Esempio 5.18), la derivata logaritmica di f vale

$$\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\ .$$

Più in generale, se f è derivabile in x ed $f(x) \neq 0$, si ha che

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}\ .$$

Basta infatti distinguere i casi $f(x) > 0$ ed $f(x) < 0$; il primo caso è stato appena trattato, mentre per il secondo basta tener conto del fatto che $|f(t)| = -f(t)$ quando $f(t) < 0$. $\lhd$

Approfondimento 5.30 (Derivata di $f(x)^{g(x)}$)**.** Siano f e g due funzioni derivabili in un certo punto x, con $f(x) > 0$. Vogliamo calcolare la derivata di $f(x)^{g(x)}$. Osserviamo che

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}\ .$$

Poiché $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ e $\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (cfr. l'Esempio 5.17 e l'Approfondimento 5.29), usando la regola di derivazione della funzione composta si ha che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left[e^{g(x)\log(f(x))}\right] &= e^{g(x)\log(f(x))}\frac{d}{dx}[g(x)\log(f(x))]\\ &= f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\log(f(x)) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\ .\end{aligned}$$

Ad esempio, si voglia calcolare la derivata della funzione x^x, definita per $x > 0$. Utilizzando il procedimento appena descritto abbiamo che

$$\frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{x\log x} = x^x\left(\log x + x\,\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1)\ . \qquad \triangleleft$$

L'ultimo teorema del paragrafo riguarda la derivabilità della funzione inversa. Ometteremo la dimostrazione rigorosa, limitandoci a dare una giustificazione geometrica del risultato nell'Osservazione 5.32.

Teorema 5.31 ➫ Derivata della funzione inversa

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora la sua funzione inversa $f^{-1}\colon Im(f) \to (a,b)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\ . \tag{5.10}$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.29 sappiamo che f è strettamente monotona (e continua); di conseguenza, la sua immagine sarà un intervallo aperto $J \subset \mathbb{R}$.

Sia $y \in J$, $y \neq y_0$, e sia $x = f^{-1}(y)$. Poiché f^{-1} è iniettiva in J, avremo che $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$, cioè $x \neq x_0$, e il rapporto incrementale di f^{-1} nel punto y_0 si può scrivere come

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1}.$$

Poiché f^{-1} è continua (si veda il Teorema 4.30), abbiamo che $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ quando y tende a y_0, quindi

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \qquad \square$$

Osservazione 5.32. La formula (5.10) di derivazione della funzione inversa ha una evidente interpretazione geometrica (si veda la Figura 5.6). Sia (x_1, y_1) un punto sulla retta tangente r al grafico di f in (x_0, y_0), con $x_1 \neq x_0$. Il coefficiente angolare della retta r, che coincide con la derivata di f in x_0, vale dunque

$$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,.$$

Poiché nelle ipotesi del Teorema 5.31 stiamo assumendo $f'(x_0) \neq 0$, avremo in particolare che $y_1 \neq y_0$.

Come abbiamo già detto nel Paragrafo 2.5, il grafico di f^{-1} si ottiene a partire da quello di f per simmetria rispetto alla bisettrice. Di conseguenza i punti (y_0, x_0) e (y_1, x_1) apparterranno alla retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto (y_0, x_0), che dunque avrà coefficiente angolare pari a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}\,,$$

cioè uguale al reciproco di quello della retta tangente a f nel punto (x_0, y_0). ◁

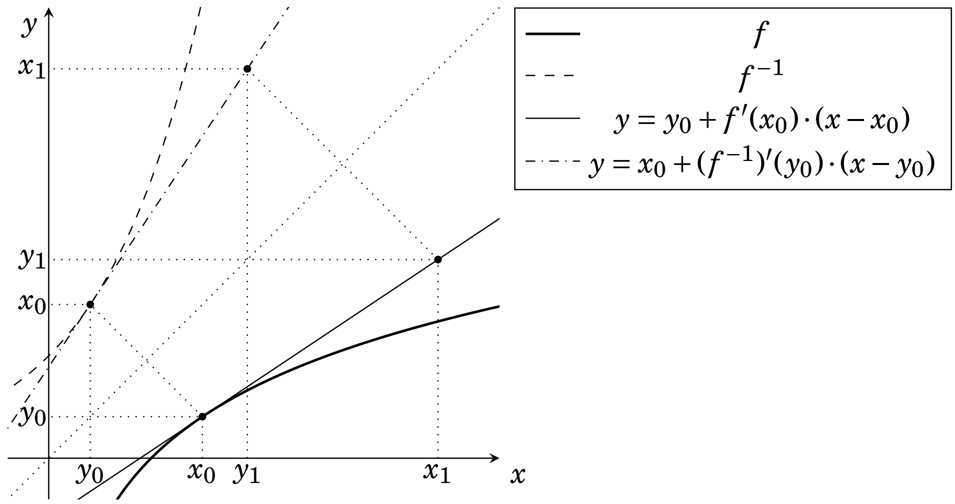


Figura 5.6: Derivata della funzione inversa

Esempio 5.33. Sia $f(x) = e^x + 2x$. Poiché f è la somma di due funzioni derivabili e strettamente monotone crescenti, sarà anch'essa derivabile e strettamente monotona crescente (quindi invertibile). Vogliamo calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = 1$. Osserviamo che $x_0 = f^{-1}(y_0) = 0$, in quanto $f(0) = 1$. Inoltre $f'(x) = e^x + 2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi si può applicare il Teorema 5.31 di derivazione della funzione inversa. In particolare, f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = 1$, e si ha

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}\,.$$

Un errore frequente nell'applicazione del Teorema 5.31 consiste nel valutare sia $(f^{-1})'$ che f' nello stesso punto (sia esso x_0 o y_0). Ad esempio, è sbagliato scrivere

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(\mathbf{1})} = \frac{1}{e+2} \qquad \textbf{(errato!!!)}.$$ ◁

Esempio 5.34. Vogliamo calcolare la derivata del logaritmo (già calcolata nell'Esempio 5.18) utilizzando il Teorema 5.31 di derivazione della funzione inversa. Per fare questo, consideriamo la funzione $f(x) = e^x$, in maniera tale che $f^{-1}(y) = \log y$, $y > 0$. Abbiamo quindi che

$$\frac{d}{dy} \log y = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} \qquad (y > 0). \qquad \triangleleft$$

Esempio 5.35 (Derivata dell'arcotangente)**.** Vogliamo calcolare la derivata dell'arcotangente, che è la funzione inversa della restrizione della tangente all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Consideriamo quindi la funzione

$$f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x,$$

e la sua inversa $f^{-1}(y) = \arctan y$, $y \in \mathbb{R}$. Ricordando che $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ (si veda l'Esempio 5.23), abbiamo che

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2} \ .$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità $\tan(\arctan y) = y$ che discende direttamente dalla definizione di funzione inversa.

Derivata di $\arctan x$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2} \ , \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 5.36 (Derivata dell'arcoseno)**.** Consideriamo la funzione

$$f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin x,$$

e la sua inversa $f^{-1}(y) = \arcsin y$, $y \in [-1, 1]$. Poiché $f'(x) = \cos x$, il Teorema 5.31 di derivazione della funzione inversa si può applicare per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, vale a dire per $y \in (-1, 1)$, in quanto nei punti $x = \pm\pi/2$ la derivata di f si annulla. Osserviamo inoltre che, se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, si ha che $f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (dal momento che $\cos x > 0$), quindi

$$\frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \ , \quad y \in (-1, 1) \ .$$

(Nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità $\sin(\arcsin y) = y$.)

Derivata di $\arcsin x$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ , \quad x \in (-1, 1) \ .$$

Analogamente si dimostra che

Derivata di $\arccos x$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad x \in (-1,1)\ .$$

5.3 Esercizi

Esercizio 5.1. Usando la definizione di derivata, stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili nel punto $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}\,, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\,, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5.2. Utilizzando le derivate delle funzioni di base e le regole di derivazione illustrate nel Paragrafo 5.2, calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \pi^5$

2) $f(x) = e^{-3x^2}$

3) $f(x) = \sqrt{\cos x + 2}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\log 2 + x^2}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x)^2}$

6) $f(x) = (3x^2 - 2)(x^5 + 4x^3 - 3)$

7) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + 1}$

8) $f(x) = [\sin(4x - 1)^3]^2$

9) $f(x) = x^3 \cos(1/x^2)$

10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{3x} + x^2}$

11) $f(x) = \sin(\log(\cos x))$

12) $f(x) = \dfrac{\tan^2 x}{\sin x}$

13) $f(x) = f(x) = e^x \sin x$

14) $f(x) = \arctan(e^{\sin(x^2)})$

15) $f(x) = (7x^2 + x^5) \log(2 + e^x)$

16) $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\sin x}$

17) $f(x) = e^{\arctan(x^2 + 3x - 2)}$

18) $f(x) = \arctan(e^{x^2} + x^2)$

19) $f(x) = \arcsin(3 + \tan x)$

20) $f(x) = \cos^2(1 + x^2) \sin^3 x$

21) $f(x) = e^{x \sin x} + \cos(3\,x)$

22) $f(x) = \sqrt[3]{\tan(7 + 3\,x^2)}$

23) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

24) $f(x) = -x^2 + 2\,x^2 \log(x)$

25) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3x - \arctan(x) - 4 \log(1 + x^2)$

26) $f(x) = x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})$

Esercizio 5.3. Determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue e per quali valori sono derivabili su $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1 & \text{se } x > 0\,, \\ a + bx & \text{se } x \leq 0\,, \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} ax - bx^2 & \text{se } x > 0\,, \\ a & \text{se } x = 0\,, \\ 1 - \cos x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$

Esercizio 5.4. Determinare per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue e per quali valori sono derivabili su $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \cos x}{x^a} & \text{se } x > 0, \\ b & \text{se } x = 0, \\ c \sin x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - (1+x)^a}{x} & \text{se } x > 0, \\ b & \text{se } x = 0, \\ cx + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Esercizio 5.5. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto di ascissa x_0 indicato:

✍ 1) $f(x) = x\,e^x$, $x_0 = 1$

✍ 2) $f(x) = x^2 \sin x$, $x_0 = -2$

3) $f(x) = \log x\, \tan x$, $x_0 = 1$

4) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$

5) $f(x) = \sin(x^2+3x+2)$, $x_0 = -1$

6) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x_0 = 1/2$

Esercizio 5.6. Sia $f(x) = x^3 + \arctan x$. Dopo aver dimostrato che f è invertibile, calcolare $(f^{-1})'(1 + \pi/4)$.

CAPITOLO 6

Calcolo differenziale e studio di funzioni

6.1 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

In questo paragrafo presenteremo gli strumenti principali del calcolo differenziale per lo studio delle funzioni reali di variabile reale.

Nella Definizione 4.16 abbiamo introdotto la nozione di punto di estremo assoluto. Per studiare l'andamento di una funzione è però importante stabilire anche la presenza di eventuali punti di estremo relativo.

Definizione 6.1 ➪ Punti di estremo relativo

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Diremo che $x_0 \in A$ è un ***punto di massimo relativo*** *di f in A se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A\ . \tag{6.1}$$

Inoltre, x_0 si dice ***punto di massimo relativo forte*** *se in (6.1) vale la disuguaglianza stretta (cioè col $<$ anziché $\leq$) quando $x \neq x_0$.*
Analogamente, diremo che $x_1 \in A$ è un ***punto di minimo relativo*** *di f in A se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \geq f(x_1) \qquad \forall x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \cap A\ . \tag{6.2}$$

Inoltre, x_1 si dice ***punto di minimo relativo forte*** *se in (6.2) vale la disuguaglianza stretta (cioè col $>$ anziché $\geq$) quando $x \neq x_1$.*

Come si evince facilmente dalla definizione, un punto $x_0 \in A$ è di minimo (risp. massimo) relativo per f se esiste un intorno $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0

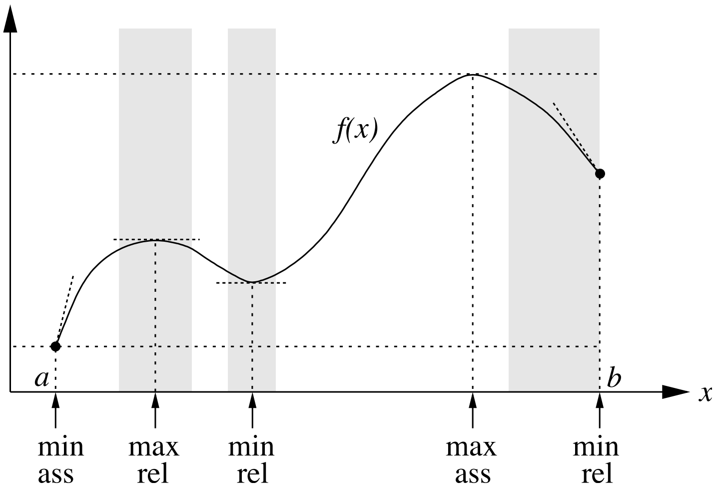


Figura 6.1: Punti di estremo di una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

tale che la restrizione di f a I abbia in x_0 un punto di minimo (risp. massimo) assoluto.

È evidente che, se x_0 è un punto di massimo (risp. minimo) assoluto di f in A, allora è anche punto di massimo (risp. minimo) relativo di f in A. È altrettanto chiaro che, in generale, non è vera l'implicazione opposta (si veda la Figura 6.1).

Il primo risultato che riguarda la ricerca dei punti di estremo relativo di una funzione derivabile è il seguente.

Teorema 6.2 ➾ di Fermat

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che:

(i) f sia derivabile nel punto x_0;

(ii) x_0 sia un punto di estremo relativo di f in (a,b).

Allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo. Poiché x_0 appartiene all'intervallo aperto (a,b), dalla definizione di massimo relativo deduciamo che esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b), \qquad f(x) - f(x_0) \le 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ . \tag{6.3}$$

Di conseguenza, il segno del rapporto incrementale di f in x_0 è

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \ge 0, & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0, \\ \le 0, & \text{se } x_0 < x < x_0 + \delta. \end{cases} \tag{6.4}$$

Per ipotesi, f è derivabile in x_0, quindi esiste il limite del rapporto incrementale per $x \to x_0$. In particolare, esistono i limiti sinistro e destro (cioè le derivate sinistra e destra) e sono uguali. Da (6.4) e dal Teorema 3.21 della permanenza del segno otteniamo che

$$f'_-(x_0) \geq 0, \qquad f'_+(x_0) \leq 0 \,. \tag{6.5}$$

D'altra parte, per quanto detto sopra deve essere $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$, quindi necessariamente $f'(x_0) = 0$.

Se x_0 è invece un punto di minimo relativo, si ragiona in maniera analoga ottenendo

$$f'_-(x_0) \leq 0, \qquad f'_+(x_0) \geq 0 \tag{6.6}$$

e concludendo ancora che $f'(x_0) = 0$. □

Osservazione 6.3. Il Teorema 6.2 di Fermat esprime una condizione geometrica intuitivamente molto semplice: se f è una funzione derivabile in un punto di estremo x_0 interno all'intervallo (a, b), allora la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ deve essere orizzontale. ◁

Osservazione 6.4. Ovviamente non è detto che una funzione sia derivabile in un punto di estremo relativo: ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$ ha un minimo assoluto (quindi anche relativo) in $x_0 = 0$, ma in tale punto non è derivabile. ◁

Approfondimento 6.5 (Punti di estremo interni)**.** Il Teorema 6.2 di Fermat può essere enunciato anche per funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ definite in un generico sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ anziché in un intervallo aperto. In tal caso, però, è necessario richiedere esplicitamente che

(iii) esista $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \subseteq A$.

(Un punto x_0 soddisfacente tale ipotesi è anche detto **punto interno** dell'insieme A.) Se A è un intervallo aperto, è immediato verificare che tale ipotesi è soddisfatta da ogni punto di A (si veda (6.3)), dunque non è necessario richiederla esplicitamente.

La necessità del fatto che x_0 sia un punto interno ad A si può evincere considerando una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ avente un punto di estremo relativo x_0 in a o in b (si veda la Figura 6.1).

Si consideri ad esempio la funzione $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Chiaramente $x_0 = 0$ è punto di minimo assoluto (quindi anche di minimo relativo), ma $f'_+(0) = 1$. Analogamente, $x_1 = 1$ è punto di massimo assoluto, ma $f'_-(1) = 1$.

Ciò che è sempre vero è che, se x_0 è un punto di massimo relativo ed f ammette derivata destra (risp. sinistra) in x_0, allora $f'_+(x_0) \leq 0$ (risp. $f'_-(x_0) \geq 0$). Per i punti di minimo relativo vale un risultato analogo, con i segni delle disuguaglianze invertiti. Infatti i ragionamenti che portano alle formule (6.5) e (6.6) continuano a essere validi anche se $x_0 \in [a, b]$ è un estremo dell'intervallo. ◁

Approfondimento 6.6 (Punti stazionari)**.** I punti in cui la derivata di una funzione f si annulla sono detti **punti stazionari** o **punti critici** della funzione. Il Teorema 6.2 di Fermat afferma quindi che, se x_0 è un punto di estremo relativo interno al dominio in cui la funzione è derivabile, allora x_0 è un punto critico della funzione.

Un errore molto frequente consiste nell'affermare che è vera l'implicazione opposta, cioè che se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o minimo relativo. Questa affermazione è falsa.

Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = x^3$. Abbiamo che $f'(x) = 3x^2$, quindi $f'(0) = 0$. Tuttavia $x_0 = 0$ non è un punto di estremo relativo di f, in quanto f è strettamente monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$. La condizione $f'(x_0) = 0$ corrisponde solamente al fatto che la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ sia orizzontale. $\triangleleft$

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti per l'esistenza di almeno un punto stazionario.

Teorema 6.7 ➾ di Rolle

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

(i) f sia continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;

(ii) f sia derivabile nell'intervallo aperto (a, b);

(iii) $f(a) = f(b)$.

Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Poiché f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, per il Teorema 4.17 di Weierstrass f ammette in $[a, b]$ un punto x_0 di massimo assoluto e un punto x_1 di minimo assoluto.

Se entrambi i punti cadono agli estremi dell'intervallo $[a, b]$, allora per l'ipotesi (iii) si ha che $f(x_0) = f(x_1)$, quindi il valore massimo e il valore minimo di f in $[a, b]$ sono coincidenti. Questo implica che f è una funzione costante in $[a, b]$, quindi la sua derivata è nulla in ogni punto dell'intervallo. Basta dunque scegliere qualsiasi $c \in (a, b)$.

Supponiamo ora che almeno uno dei due punti x_0, x_1 non cada agli estremi dell'intervallo $[a, b]$. Ad esempio, supponiamo che $a < x_0 < b$. Per l'ipotesi (ii) e per il fatto che $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo assoluto (quindi anche relativo) di f, dal Teorema 6.2 di Fermat concludiamo che $f'(x_0) = 0$, quindi basta prendere $c = x_0$. Analogo ragionamento vale se $a < x_1 < b$, nel qual caso basta scegliere $c = x_1$. $\square$

Osservazione 6.8. L'interpretazione geometrica del Teorema di Rolle è molto semplice (ed è di fatto la strategia della dimostrazione del risultato): se la

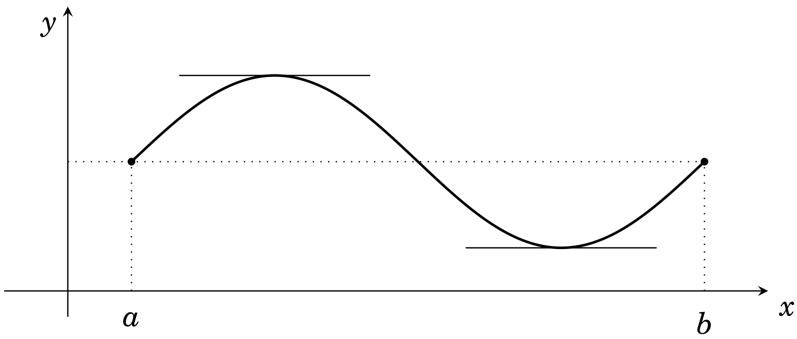


Figura 6.2: Teorema di Rolle

funzione f non è costante, allora la condizione $f(a) = f(b)$ impone che ci debba essere un punto di estremo assoluto (massimo o minimo) interno all'intervallo (a, b). In tale punto, la tangente al grafico di f risulta essere orizzontale (cfr. Figura 6.2). Chiaramente possono esserci più punti in cui la derivata di f si annulla. ◁

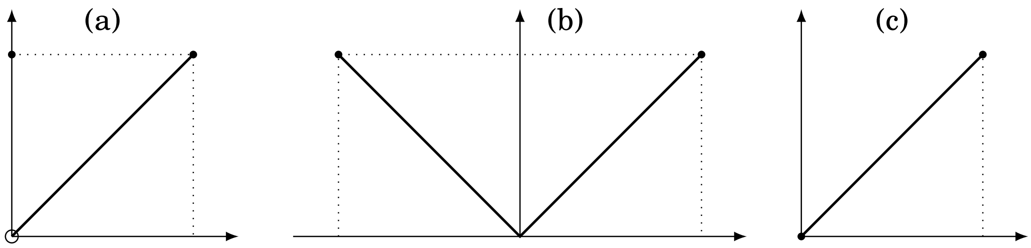


Figura 6.3: Controesempi al Teorema di Rolle

Esempio 6.9. Naturalmente tutte e tre le ipotesi del teorema sono essenziali, come mostrano i seguenti esempi (si veda la Figura 6.3).

(a) f non continua in $[a, b]$: consideriamo la funzione definita in $[0, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ x, & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allora f è discontinua in $x = 0$, mentre le ipotesi (ii) e (iii) del teorema sono verificate. Tuttavia $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1)$, quindi f' non si annulla mai in $(0, 1)$.

(b) f non derivabile in (a, b): consideriamo la funzione

$$f(x) = |x|, \qquad x \in [-1, 1].$$

Allora le ipotesi (i) e (iii) sono verificate, mentre la (ii) non è verificata in quanto la funzione non è derivabile in $x = 0$. Osserviamo che, nei punti in cui f è derivabile, si ha $f'(x) = \pm 1$, quindi anche in questo caso non esistono punti in cui f' si annulla.

(c) f non assume lo stesso valore agli estremi di $[a, b]$: consideriamo la funzione

$$f(x) = x, \qquad x \in [0, 1].$$

Allora le ipotesi (i) e (ii) sono soddisfatte, mentre $f(0) \neq f(1)$. Abbiamo che $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1)$, quindi anche in questo caso non esistono punti in cui f' si annulla. ◁

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato centrale di questo paragrafo che, come vedremo, ha numerose conseguenze.

Teorema 6.10 ➾ di Lagrange

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
(i) f sia continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;
(ii) f sia derivabile nell'intervallo aperto (a, b).
Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] , \qquad x \in [a, b] .$$

La funzione g soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 6.7 di Rolle: (i) è continua in $[a, b]$ in quanto differenza di due funzioni entrambe continue in $[a, b]$; (ii) è derivabile in (a, b) in quanto differenza di due funzioni entrambe derivabili in (a, b); (iii) abbiamo che

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0,$$
$$g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) \right] = f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] = 0,$$

quindi $g(a) = g(b)$. Di conseguenza esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$. Ma

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} ,$$

quindi $g'(c) = 0$ equivale alla tesi. □

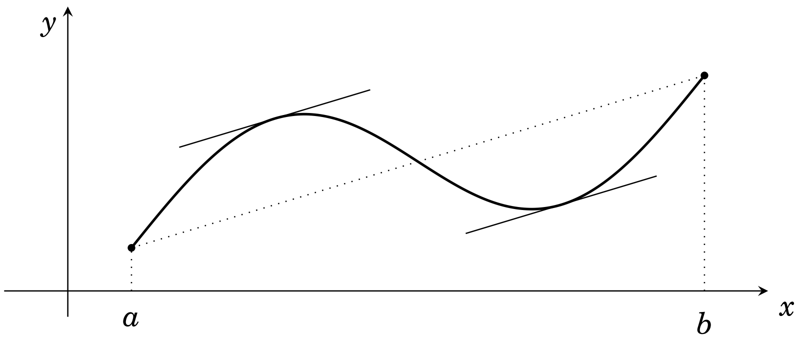


Figura 6.4: Teorema di Lagrange

Osservazione 6.11. L'interpretazione geometrica del Teorema 6.10 di Lagrange è la seguente (si veda la Figura 6.4). Poiché $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ è l'equazione della retta r passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, la tesi garantisce l'esistenza di (almeno) un punto $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ sia parallela alla retta r. Anche in questo caso, l'idea geometrica è alla base della dimostrazione: sottraendo alla funzione f la funzione che ha come grafico la retta r, geometricamente si "raddrizza" il grafico di f e ci si trova nelle ipotesi del teorema di Rolle. $\lhd$

Osservazione 6.12. Supponiamo che f sia una funzione derivabile su un certo intervallo I. Siano $x \in I$ e $h > 0$ tali che $[x, x + h] \subset I$. Possiamo applicare il Teorema 6.10 di Lagrange a f nell'intervallo $[x, x + h]$, ottenendo che esiste un punto $c \in (x, x + h)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Osservando che c può essere scritto anche nella forma $x + \theta h$, con $\theta = (c - x)/h \in (0, 1)$, la formula precedente può essere riscritta come

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x + \theta h) , \tag{6.7}$$

che si chiama anche **formula dell'incremento finito**. $\lhd$

Dovrebbe risultare chiara l'utilità del Teorema 6.10 di Lagrange, che permette di trasferire informazioni sulla derivata di una funzione (ad esempio, il suo segno o i suoi zeri) in informazioni sulle variazioni della funzione stessa. La versione rigorosa di questa affermazione è data dai prossimi risultati, tutte conseguenze del Teorema 6.10 di Lagrange.

Teorema 6.13 ➭ Caratterizzazione delle funzioni costanti

*Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora f è costante **se e solo se** $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione. Se f è costante abbiamo già visto che, come conseguenza diretta della definizione di derivata, $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Passiamo all'implicazione opposta. Supponiamo che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$ e dimostriamo che f è costante in I. Fissiamo un punto qualsiasi $a \in I$; per dimostrare che f è costante in I basterà far vedere che $f(x) = f(a)$ per ogni $x \in I$. Sia $x \in I$. Supponiamo per semplicità che $x > a$ (il caso $x < a$ si tratta in maniera analoga mentre il caso $x = a$ è banale). Poiché I è un intervallo, abbiamo che $[a, x] \subseteq I$. Possiamo dunque applicare il Teorema 6.10 di Lagrange alla funzione f nell'intervallo $[a, x]$: esiste un punto $c \in (a, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \ .$$

Ma $f'(c) = 0$, in quanto stiamo supponendo che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Di conseguenza si deve avere $f(x) - f(a) = 0$, cioè $f(x) = f(a)$, che è quanto volevamo dimostrare. □

Esempio 6.14. Vogliamo dimostrare che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x > 0. \tag{6.8}$$

Sia $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$, $x \neq 0$. Chiaramente f è una funzione derivabile in ogni punto $x \neq 0$. Cominciamo a dimostrare che è una funzione costante sulla semiretta $(0, +\infty)$; a tale proposito, utilizzando il Teorema 6.13, basta dimostrare che $f'(x) = 0$ per ogni $x > 0$. Ricordando che $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ (cfr. Esempio 5.35) abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0, \qquad \forall x \neq 0 \ .$$

Possiamo quindi concludere che f è costante sulla semiretta $(0, +\infty)$. Poiché

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \ ,$$

abbiamo inoltre che $f(x) = \pi/2$ per ogni $x > 0$, quindi (6.8) è dimostrata. Osserviamo ora che, allo stesso modo, segue anche che f è costante sulla semiretta $(-\infty, 0)$; inoltre, essendo

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \ ,$$

si ha l'identità

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \forall x < 0.$$

Facciamo un'ultima osservazione. La funzione f è derivabile in tutti i punti del suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e inoltre $f'(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$. Questo **non** significa che f è costante in tutto il suo dominio, ma solo che è costante su ogni intervallo contenuto nel suo dominio. Dovrebbe ora essere chiara l'importanza dell'ipotesi che il dominio di f sia un intervallo nel Teorema 6.13. $\triangleleft$

Un altro importante risultato, conseguenza del Teorema 6.10 di Lagrange, riguarda lo studio della monotonia di una funzione.

Teorema 6.15 ➾ Test di monotonia

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora f è monotona crescente (risp. decrescente) in I se e solo se $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) per ogni $x \in I$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia derivabile e monotona crescente nell'intervallo I e dimostriamo che $f'(x_0) \geq 0$ per ogni $x_0 \in I$. Sia dunque $x_0 \in I$. Poiché f è monotona crescente in I, abbiamo che

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} \geq 0, & \text{se } x \in I,\ x > x_0, \\ \leq 0, & \text{se } x \in I,\ x < x_0. \end{cases}$$

Di conseguenza la differenza $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno della differenza $x - x_0$, per cui

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \qquad \forall x \in I,\ x \neq x_0. \tag{6.9}$$

Per ipotesi f è derivabile in x_0, cioè esiste finito il limite del rapporto incrementale che compare in (6.9). Dal Teorema 3.21 della permanenza del segno e dalla disuguaglianza (6.9) si conclude quindi che $f'(x_0) \geq 0$.

Passiamo ora all'implicazione opposta. Supponiamo dunque che f sia derivabile in I e che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Vogliamo dimostrare che f è monotona crescente in I, cioè che, presi due punti qualsiasi x_1, $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$. Per fare questo applichiamo il Teorema 6.10 di Lagrange alla funzione f nell'intervallo chiuso $[x_1, x_2]$ (che è contenuto in I): esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)\ .$$

Ma $f'(c) \geq 0$ per ipotesi, e $x_2 - x_1 > 0$; di conseguenza si ha che $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, cioè $f(x_1) \leq f(x_2)$, che è quanto volevamo dimostrare. $\square$

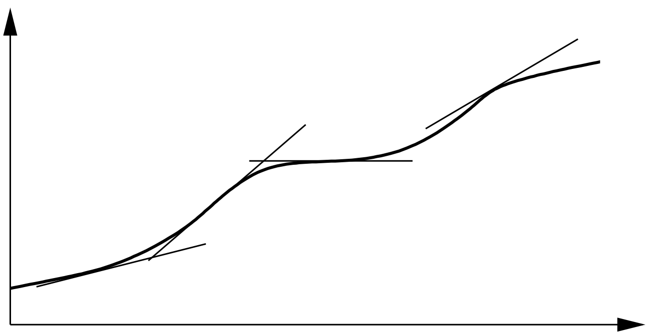


Figura 6.5: Test di monotonia

Osservazione 6.16. Il fatto che f sia monotona crescente negli intervalli in cui $f' \geq 0$ ammette un'interpretazione grafica abbastanza semplice: infatti, se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora la retta tangente al grafico di f in ogni punto è diretta "verso l'alto" o è orizzontale (si veda la Figura 6.5). Analoghe considerazioni valgono se $f' \leq 0$ in un intervallo: le rette tangenti puntano sempre verso il basso (o sono orizzontali). $\lhd$

Approfondimento 6.17 (Stretta monotonia e derivate)**.** Con una dimostrazione praticamente identica a quella del Teorema 6.15 si può far vedere che, se $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) per ogni $x \in I$, allora f è strettamente monotona crescente (risp. decrescente) in I. Non è però vero il viceversa: ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$, ma la sua derivata $f'(x) = 3x^2$ non è sempre strettamente positiva, in quanto si annulla nell'origine. $\lhd$

Abbiamo ora a disposizione gli strumenti che ci servono per individuare e classificare i punti di estremo relativo di una funzione tramite lo studio del segno della derivata in un loro intorno.

Teorema 6.18 ➫ Determinazione dei punti di estremo relativo

Sia $f\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in x_0 e derivabile per ogni $x \neq x_0$. Se

$$f'(x) > 0 \text{ se } x_0 - \delta < x < x_0, \qquad f'(x) < 0 \text{ se } x_0 < x < x_0 + \delta, \tag{6.10}$$

allora x_0 è un punto di massimo relativo forte. Se invece

$$f'(x) < 0 \text{ se } x_0 - \delta < x < x_0, \qquad f'(x) > 0 \text{ se } x_0 < x < x_0 + \delta,$$

allora x_0 è un punto di minimo relativo forte.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima parte, dal momento che la seconda è simile. Supponiamo che valga (6.10). Per il Teorema 6.15 (si veda anche l'Approfondimento 6.17) abbiamo che f è strettamente monotona crescente nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0)$ ed è strettamente monotona decrescente nell'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$. Essendo continua in x_0, segue subito che x_0 è un punto di massimo relativo forte. □

Un'altra importante proprietà delle derivate, di cui faremo uso nel Capitolo 9, è la così detta proprietà di Darboux o proprietà dei valori intermedi. Osserviamo innanzitutto che una funzione, anche se è derivabile in ogni punto, non è detto che abbia derivata continua. Ad esempio, la funzione definita da $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$, è derivabile in ogni punto con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(si veda l'Esercizio 5.1). Si verifica immediatamente che f' ha una discontinuità di seconda specie nell'origine, dal momento che $\lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$ (cfr. Esempio 3.35) mentre la funzione $\cos(1/x)$ non ammette limite per $x \to 0$ (cfr. Esempio 3.17), dunque anche f' non ammette limite per $x \to 0$. Tuttavia si può dimostrare che f' soddisfa la proprietà dei valori intermedi dimostrata nel Teorema 4.24 per le funzioni continue; in particolare, f' non può avere discontinuità di tipo salto o eliminabili.

Teorema 6.19 ➫ Proprietà di Darboux delle derivate

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo I, e siano $a, b \in I$. Allora f' assume tutti i valori compresi fra $f'(a)$ e $f'(b)$.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $a < b$; supponiamo inoltre, per fissare le idee, $f'(a) < f'(b)$. Dobbiamo dimostrare che, se $f'(a) < \lambda < f'(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \lambda$. A tale proposito, consideriamo la funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - \lambda x$, $x \in [a, b]$. Chiaramente, g è una funzione derivabile e $g'(x) = f'(x) - \lambda$. In particolare, avremo che $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$, mentre $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$. Poiché $g'(a) < 0$, per definizione di derivata e per il Teorema 3.21 della permanenza del segno esiste $\delta \in (0, b - a)$ tale che

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0 \qquad \forall x \in (a, a + \delta).$$

In particolare ciò implica che $g(x) < g(a)$ per ogni $x \in (a, a + \delta)$, dunque il punto a non può essere di minimo per g. Con analogo ragionamento, poiché

$g'(b) > 0$ si dimostra che nemmeno b può essere punto di minimo per g. D'altra parte, g è una funzione derivabile, quindi anche continua, in $[a, b]$ (cfr. Teorema 5.7), dunque per il Teorema 4.17 di Weierstrass ammette un punto di minimo assoluto c in $[a, b]$; per quanto appena detto, tale punto di minimo non può essere né a né b, dunque $c \in (a, b)$. Per il Teorema 6.2 di Fermat avremo che in tale punto di minimo interno la derivata di g si annulla, cioè $g'(c) = f'(c) - \lambda = 0$, da cui la tesi. □

6.2 Convessità e concavità

In questo paragrafo ci proponiamo di introdurre le nozioni di convessità e concavità, concetti puramente geometrici riguardanti il grafico delle funzioni. Più precisamente, si richiede che i punti del segmento che congiunge due punti del grafico non si trovino mai al di sotto del grafico stesso. Per formalizzare questa richiesta, innanzitutto osserviamo che i punti dell'intervallo avente per estremi due punti fissati $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ possono essere descritti nel modo seguente:

$$\{x \in \mathbb{R}\colon\ x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, \lambda \in [0, 1]\}, \tag{6.11}$$

nel senso che al variare di $\lambda \in [0, 1]$ la **combinazione convessa** $(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$ descrive tutti e soli i punti dell'intervallo chiuso di estremi x_0 e x_1.

D'altra parte, data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo I e dati $x_0, x_1 \in I$, con $x_0 \neq x_1$, la retta passante per i due punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ del grafico di f, è il grafico della funzione affine

$$r(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

e, sui punti $x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ del segmento (6.11) che congiunge x_0 e x_1, tale funzione vale

$$r(x_\lambda) = f(x_0) + \lambda(f(x_1) - f(x_0)) = (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1),$$

dal momento che, in questo caso, si ha $(x_\lambda - x_0)/(x_1 - x_0) = \lambda$.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per definire la convessità, corrispondente alla richiesta $f(x_\lambda) \leq r(x_\lambda)$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$.

Definizione 6.20 ➫ Convessità e concavità (generale)

Diremo che una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo I, è ***convessa*** *in I se è soddisfatta la condizione*

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \tag{6.12}$$

per ogni x_0, $x_1 \in I$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$.
Diremo che f è ***strettamente convessa*** *se la disuguaglianza (6.12) è verificata in senso stretto per ogni $x_0 \neq x_1$ e per ogni $\lambda \in (0,1)$.*
Diremo che f è ***concava*** *(risp.* ***strettamente concava****) se $-f$ è una funzione convessa (risp. strettamente convessa).*

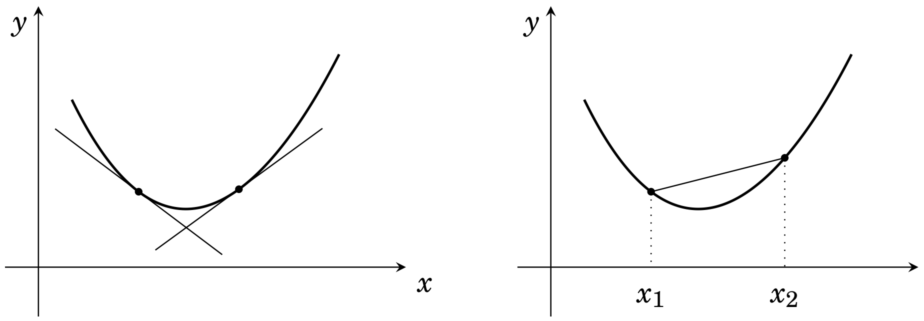


Figura 6.6: Funzione convessa

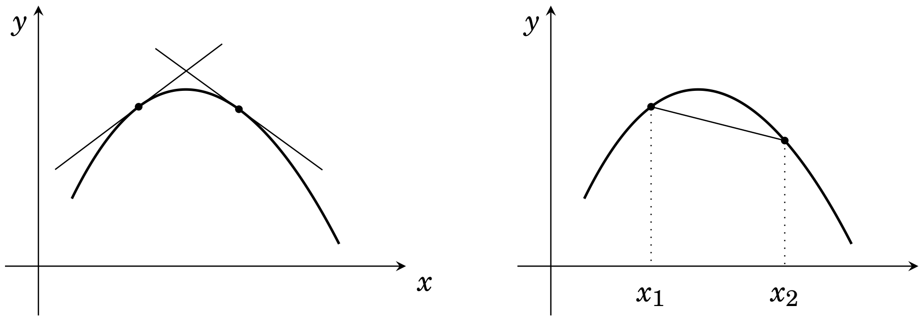


Figura 6.7: Funzione concava

Esempio 6.21. La funzione $f(x) = |x|$ è convessa in $\mathbb{R}$. Infatti, presi x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0,1]$, la disuguaglianza triangolare ci garantisce che

$$|(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1| \leq (1-\lambda)|x_0| + \lambda|x_1|.$$

Tuttavia non è strettamente convessa, visto che la disuguaglianza diventa un'uguaglianza se si considerano x_0 e x_1 dello stesso segno. $\triangleleft$

Esempio 6.22. Si verifica con facilità che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0,1), \\ 1, & \text{se } x = 0,\ x = 1, \end{cases}$$

è convessa nell'intervallo $[0,1]$. Osserviamo che la funzione non è continua agli estremi di tale intervallo. $\triangleleft$

Gli esempi evidenziano il fatto che, in generale, una funzione convessa può non essere derivabile (ed eventualmente neanche continua) in tutto il suo insieme di definizione. In realtà, la convessità garantisce buone proprietà di regolarità (nel senso che non possono succedere cose troppo patologiche). Il risultato di base da cui discendono molte delle proprietà delle funzioni convesse è il seguente.

Lemma 6.23 ➫ delle tre corde

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora, se $x_1, x_2, x_3 \in I$ sono tali che $x_1 < x_2 < x_3$, valgono le disuguaglianze

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{6.13}$$

Dimostrazione. Scriviamo x_2 come combinazione convessa di x_1 e x_3, vale a dire

$$x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3, \qquad \text{con } \lambda := \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} \in (0,1).$$

Poiché f è convessa avremo che

$$f(x_2) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \le (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)\,,$$

che possiamo riscrivere nella forma seguente:

$$f(x_2) - f(x_1) \le \lambda[f(x_3)-f(x_1)] = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}[f(x_3)-f(x_1)]\,,$$

dalla quale segue la prima delle due disuguaglianze in (6.13). L'altra disuguaglianza segue in maniera del tutto analoga scrivendo $x_2 = \mu x_1 + (1-\mu)x_3$ con $\mu := (x_3-x_2)/(x_3-x_1)$. □

Osservazione 6.24 (Interpretazione geometrica del Lemma 6.23 delle tre corde)**.** Nelle ipotesi del Lemma 6.23, sia $P_j = (x_j, f(x_j))$, $j = 1,2,3$. Se indichiamo con $m_{j,k}$, per $j \neq k$, il coefficiente angolare della retta passante per P_j e P_k, le condizioni (6.13) divengono $m_{1,2} \le m_{1,3} \le m_{2,3}$ (si veda la Figura 6.8). ◁

Approfondimento 6.25. Come conseguenza del Lemma 6.23, si ha che, fissati $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, per $x \in I \setminus [x_1, x_2]$ il grafico di f non giace mai al di sotto della retta passante per i punti $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$. Per fissare le idee supponiamo che $x_1 < x_2$ e mostriamo che questa affermazione è vera se $x > x_2$ (il caso $x < x_1$ si dimostra in maniera del tutto analoga). Detta r la retta passante per i punti P_1 e P_2, supponiamo per assurdo che

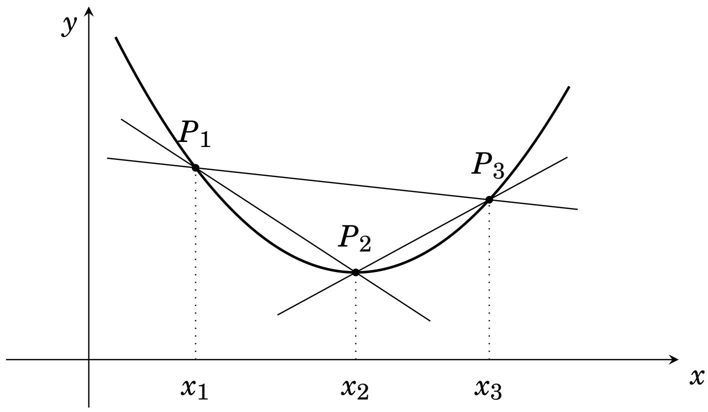


Figura 6.8: Lemma delle tre corde

il punto $P = (x, f(x))$ giaccia al di sotto di r. Ma allora la retta s passante per P_2 e P avrà coefficiente angolare strettamente minore di quello di s, in contraddizione con quanto dimostrato nel Lemma 6.23 delle tre corde. ◁

Siamo ora in grado di dimostrare che una funzione convessa è derivabile a destra e a sinistra in ogni punto interno al suo intervallo di definizione (quindi, essenzialmente, l'unico motivo per cui può non esistere la derivata è la presenza di un punto angoloso, come nel caso della funzione $|x|$ nell'origine).

Teorema 6.26 ➯ Derivate di funzioni convesse

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa nell'intervallo aperto $I = (a, b)$. Allora

(i) f ammette in ogni punto derivata destra e sinistra e, per ogni coppia di punti $x, y \in I$, con $x < y$, si ha

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)\,; \tag{6.14}$$

(ii) per ogni $x \in I$ e $p \in [f'_-(x), f'_+(x)]$, si ha $f(y) \geq f(x) + p(y - x)$ per ogni $y \in I$.

Dimostrazione. (i) Sia $x \in I$. Osserviamo che, se $w, z \in I$ con $w < z < x$, per il Teorema 6.23 delle tre corde abbiamo che

$$\frac{f(w) - f(x)}{w - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\,;$$

di conseguenza, la funzione

$$g(z) := \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

è monotona crescente per $z < x$. Allo stesso modo si può dimostrare che g è monotona crescente anche per $z > x$. (Sempre utilizzando il Lemma 6.23, si può in realtà dimostrare che g è monotona crescente in $I \setminus \{x\}$.)

Siano ora $x, y \in I$ con $x < y$; per il Lemma 6.23 abbiamo che

$$g(z) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \qquad \forall z < x,\ z \in I;$$

poiché g è monotona crescente e limitata superiormente, per il Teorema 3.43 concludiamo che esiste

$$f'_-(x) = \lim_{z \to x-} g(z) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Facendo ora il limite per $y \to x^+$ si ottiene in maniera analoga che esiste $f'_+(x)$ e che $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

In particolare, se $x < y$ sono due punti assegnati di I, per ogni $z \in (x, y)$ sempre per il Lemma 6.23 avremo che

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

da cui seguono immediatamente le due disuguaglianze centrali di (6.14).

(ii) Sia ora $x \in I$ e $p \in [f'_-(x), f'_+(x)]$. Se $y \in I$, $y > x$, allora

$$p \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

da cui $f(y) - f(x) \geq p(y - x)$ se $y > x$. Analogamente, se $y \in I$, $y < x$, allora

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(x) \leq p,$$

da cui $f(y) - f(x) \geq p(y - x)$ anche nel caso $y < x$. □

Osservazione 6.27 (Rette supporto)**.** Nelle notazioni del Teorema 6.26(ii), ogni retta passante per il punto $P = (x, f(x))$ e con coefficiente angolare $p \in [f'_-(x), f'_+(x)]$ è detta **retta supporto** al grafico di f in P, dal momento che tutto il grafico di f sta al di sopra (o meglio, non sta mai al di sotto) di tale retta (si veda la Figura 6.9). ◁

Nell'Esempio 6.22 abbiamo esibito una funzione convessa e discontinua, con delle discontinuità di salto agli estremi dell'intervallo di definizione. Come conseguenza del seguente risultato, questa è l'unica possibile perdita di regolarità che può avere una funzione convessa.

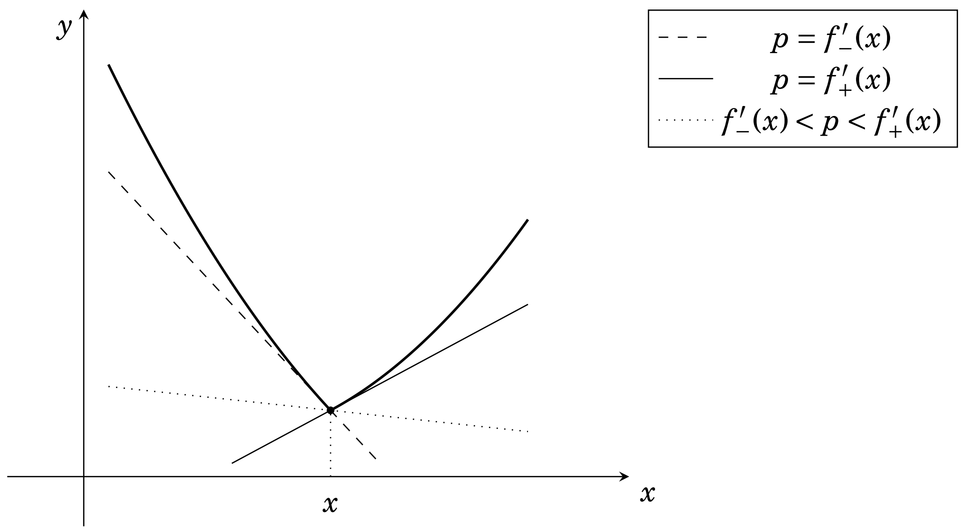


Figura 6.9: Alcune rette supporto al grafico di f

Corollario 6.28 ➾ Continuità delle funzioni convesse

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa nell'intervallo I di estremi a e b. Allora f è continua nell'intervallo (a,b).

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0^+}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = 0, \tag{6.15}$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0\ ,$$

e il Teorema 6.26. Analogamente otteniamo

$$\lim_{x\to x_0^-}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = 0. \tag{6.16}$$

Da (6.15) e (6.16) segue la tesi. □

Teorema 6.29 ➾ Funzioni convesse derivabili

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora f è convessa in (a,b) se e solo se per ogni $x \in (a,b)$ si ha

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)\cdot(y-x), \qquad \forall y \in (a,b). \tag{6.17}$$

Dimostrazione. Se f è convessa e derivabile, la disuguaglianza (6.17) segue direttamente dal Teorema 6.26 e dal fatto che, essendo f derivabile in (a, b), $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $x \in (a, b)$ valga (6.17). Siano $x_0, x_1 \in (a, b)$ e $\lambda \in [0, 1]$; dobbiamo mostrare che vale (6.12). Se indichiamo con x_λ la combinazione convessa $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$, per la (6.17) abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq f(x_\lambda) + f'(x_\lambda)(x_0 - x_\lambda), \\ f(x_1) &\geq f(x_\lambda) + f'(x_\lambda)(x_1 - x_\lambda). \end{aligned}$$

Moltiplichiamo ora la prima disuguaglianza per $1 - \lambda$, la seconda per λ e sommiamo membro a membro; tenendo conto del fatto che

$$(1 - \lambda)(x_0 - x_\lambda) + \lambda(x_1 - x_\lambda) = (1 - \lambda)\lambda(x_0 - x_1) + \lambda(1 - \lambda)(x_1 - x_0) = 0$$

otteniamo infine $(1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \geq f(x_\lambda)$, cioè la (6.12). □

Nei casi pratici risulta utile la seguente caratterizzazione della convessità e della concavità, valida per funzioni derivabili due volte.

Teorema 6.30 ➾ Funzioni convesse derivabili due volte

Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in (a, b). Allora f è convessa (risp. concava) in (a, b) se e solo se $f''(x) \geq 0$ (risp. ≤ 0) per ogni $x \in (a, b)$.

Dimostrazione. Se f è convessa, allora per il Teorema 6.26(i) la sua derivata prima è una funzione crescente e, per il Test di monotonia, $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Viceversa, supponiamo che f sia derivabile due volte in (a, b) e che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Fissiamo $x_1 < x_2 \in (a, b)$ e indichiamo con $x_\lambda \in [x_1, x_2]$ una loro combinazione convessa $x_\lambda = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$. La funzione f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nei due intervalli $[x_1, x_\lambda]$ e $[x_\lambda, x_2]$, quindi esistono $c_1 \in (x_1, x_\lambda)$ e $c_2 \in (x_\lambda, x_2)$ tali che

$$f'(c_1) = \frac{f(x_\lambda) - f(x_1)}{x_\lambda - x_1}, \qquad f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x_\lambda)}{x_2 - x_\lambda}.$$

Per ipotesi, grazie al Test di monotonia, f' è una funzione crescente in (a, b), quindi, essendo $c_1 < c_2$ si avrà $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. Osservando che $x_\lambda - x_1 = \lambda(x_2 - x_1)$ e $x_2 - x_\lambda = (1 - \lambda)(x_2 - x_1)$, si ottine la relazione

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_\lambda)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)}$$

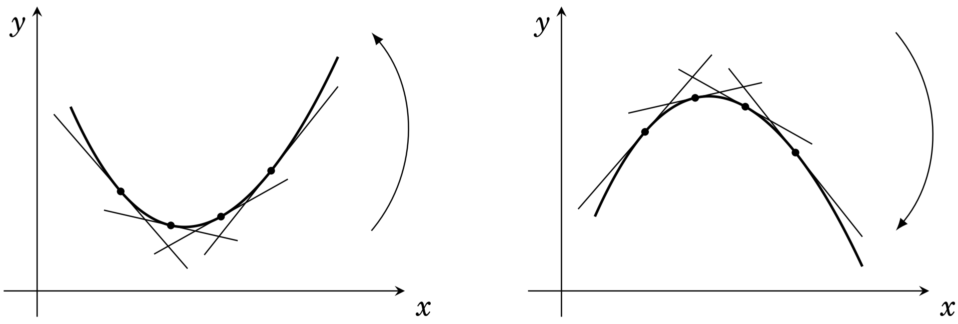


Figura 6.10: Rotazione delle rette tangenti

che, attraverso manipolazioni algebriche elementari, implica

$$f(x_\lambda) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Vista l'arbitrarietà di x_1, x_2 e λ, abbiamo dimostrato che la funzione è convessa.

La caratterizzazione delle funzioni concave segue dal fatto che f è concava se e solo se $-f$ è convessa. □

Lo studio del segno della derivata seconda di una funzione permette quindi di stabilire in quali intervalli essa è concava o convessa. Si chiamano **punti di flesso** quei punti in cui la funzione passa da concava a convessa o viceversa.

Definizione 6.31 ➫ Punti di flesso

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $x_0 \in (a,b)$. Se f è strettamente convessa in un intorno sinistro di x_0 e strettamente concava in un intorno destro di x_0, diremo che x_0 è un ***punto di flesso discendente****; analogamente, se f è strettamente concava in un intorno sinistro di x_0 e strettamente convessa in un intorno destro di x_0, diremo che x_0 è un* ***punto di flesso ascendente****.*

Osservazione 6.32. Gli aggettivi "ascendente" e "discendente" derivano dal fatto che, se x_0 è un punto di flesso ascendente, il grafico della funzione passa da sotto la retta tangente (a sinistra di x_0) a sopra la retta tangente; il contrario vale per i punti di flesso discendente (si veda la Figura 6.11). ◁

Se f è derivabile due volte in (a,b) e se x_0 è un punto di flesso, allora per la proprietà di Darboux delle derivate (Teorema 6.19) si ha che $f''(x_0) = 0$. Infatti, se ad esempio f è convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro, allora per il Teorema 6.30 si deve avere $f''(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f''(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0.

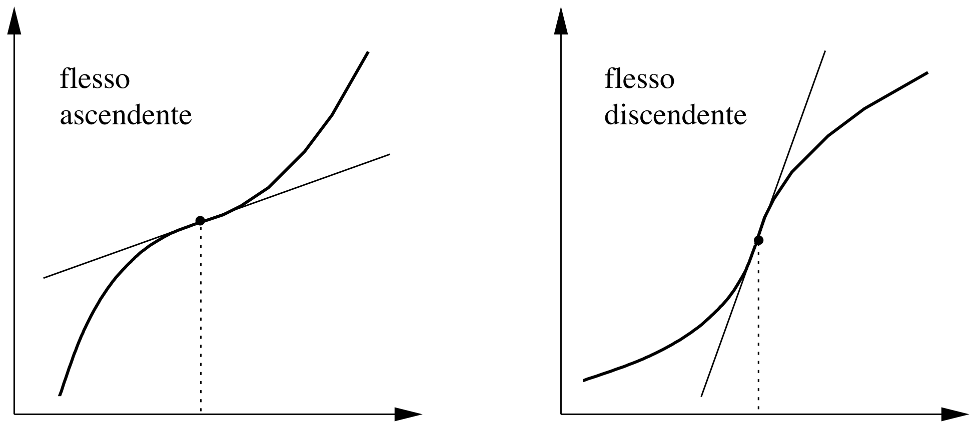


Figura 6.11: Punti di flesso ascendente e discendente

Naturalmente il fatto che $f''(x_0) = 0$ è solo una condizione necessaria ma non sufficiente affinché x_0 sia un punto di flesso: ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha derivata seconda nulla nell'origine, ma l'origine è un punto di minimo assoluto.

6.3 Asintoti

In termini poco rigorosi, un asintoto per una funzione f è una retta del piano a cui il grafico di f tende ad avvicinarsi indefinitamente. La formalizzazione di questa proprietà fa uso della nozione di limite. Si possono definire tre tipi di asintoti: verticale, orizzontale e obliquo.

Asintoto verticale

Sia f una funzione reale di variabile reale, sia $x_0 \in \mathbb{R}$, e supponiamo che almeno uno dei due limiti per $x \to x_0^+$ o per $x \to x_0^-$ di $f(x)$ valga $\pm\infty$. Diremo allora che la retta verticale $x = x_0$ è un asintoto verticale per f.

Ad esempio, la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x) = 1/x$, definita per $x \neq 0$.

Asintoto orizzontale e asintoto obliquo

Supponiamo che f sia definita su una semiretta destra e che esista il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \,.$$

Se $l \in \mathbb{R}$ (cioè se il limite esiste finito), allora la retta orizzontale $y = l$ è detta asintoto orizzontale per f quando $x \to +\infty$.

Se $l = \pm\infty$ ed esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R} \ ,$$

diremo che la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$. Analoghe definizioni possono essere date anche per $x \to -\infty$ quando f è definita su una semiretta sinistra.

In Figura 6.12 sono mostrati i tipi di asintoto descritti qui sopra: un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, un asintoto verticale e un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

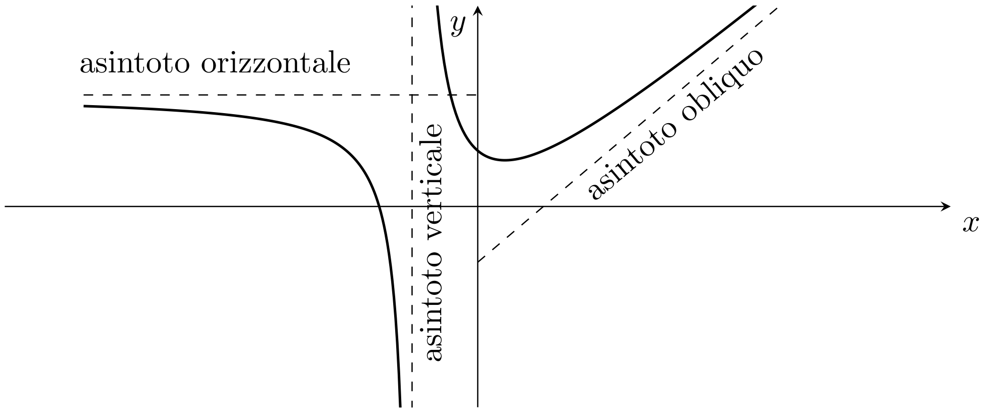


Figura 6.12: I vari tipi di asintoto

Osserviamo che la retta $y = mx+q$ è asintoto obliquo per f se la differenza $f(x) - (mx + q)$ tende a zero per $x \to +\infty$, cioè se il grafico della funzione si avvicina asintoticamente a quello della retta quando $x \to +\infty$. Operativamente, per vedere se esiste un asintoto obliquo e, in tal caso, per determinarlo, si procede come segue (si veda anche lo schema in Figura 6.13 a pag. 298). Supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ e studiamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ . \tag{6.18}$$

Se tale limite non esiste finito, allora f non ammette asintoto obliquo. Se invece il limite (6.18) esiste finito, indichiamo con $m \in \mathbb{R}$ il suo valore e studiamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \ . \tag{6.19}$$

Se questo limite non esiste finito, allora f non ammette asintoto obliquo. Viceversa, se anche il limite (6.19) esiste finito, e indichiamo con $q \in \mathbb{R}$ il suo valore, la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$.

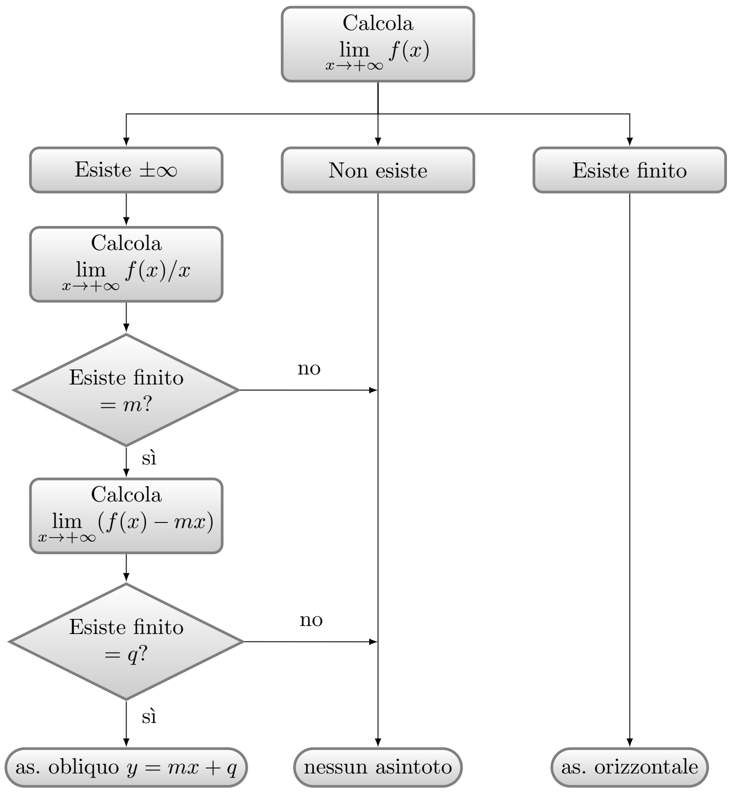


Figura 6.13: Schema per la ricerca degli asintoti per $x \to +\infty$

Esempio 6.33. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (si veda la Figura 6.14 a sinistra). Abbiamo che $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, quindi, per $x \to +\infty$, la funzione non ha asintoto orizzontale ma potrebbe avere un asintoto obliquo.

Studiamo il limite (6.18). Per poter applicare i risultati sull'algebra dei limiti è conveniente usare le proprietà della radice quadrata:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1\ .$$

Poiché questo limite esiste finito, si può passare a studiare il limite (6.19) corrispondente a $m = 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - x).$$

Ci troviamo di fronte a una forma indeterminata del tipo "$+\infty - \infty$". In questi casi si può tentare di sciogliere la forma indeterminata sfruttando il fatto che

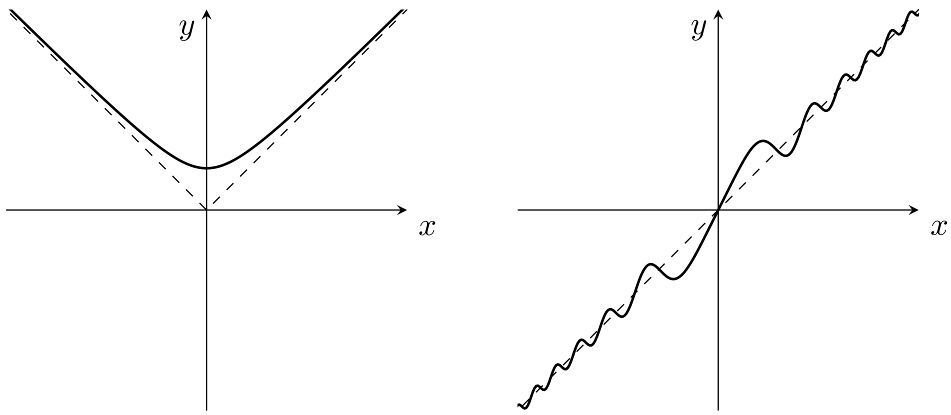


Figura 6.14: Grafico delle funzioni $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ e $f(x) = x + \dfrac{\sin x^2}{x}$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ per ogni a, $b \in \mathbb{R}$, nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0\ .\end{aligned}$$

Quindi anche il limite (6.19) esiste finito e vale $q = 0$. Di conseguenza, la retta $y = x$ è asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$. Per quanto riguarda lo studio degli asintoti obliqui per $x \to -\infty$, basta osservare che f è una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni x); per tali funzioni è facile verificare che, se $y = mx+q$ è asintoto obliquo quando $x \to +\infty$, allora $y = -mx+q$ è asintoto obliquo quando $x \to -\infty$. Di conseguenza, la retta $y = -x$ è asintoto obliquo per f quando $x \to -\infty$. $\lhd$

Esempio 6.34. Consideriamo la funzione

$$f(x) = x + \frac{\sin x^2}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Per il Teorema 3.34 abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{x} = 0$$

(dal momento che $\sin x^2$ è una funzione limitata mentre $1/x$ è infinitesima per $x \to +\infty$), quindi la bisettrice di equazione $y = x$ è asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$ (e, in realtà, anche per $x \to -\infty$). Osserviamo che in questo esempio la funzione oscilla attorno all'asintoto (si veda la Figura 6.14 a destra). Quindi, in generale, non è detto che il grafico di f si avvicini all'asintoto da sopra o da sotto. $\lhd$

6.4 Studio del grafico di una funzione

Abbiamo a questo punto tutti gli strumenti necessari per lo studio del grafico di una funzione, vale a dire per tracciarne un grafico qualitativo, determinando eventuali punti di estremo relativo e assoluto, concavità e convessità, etc.

Riportiamo uno schema di massima che riassume i punti principali per raccogliere le informazioni necessarie a tale proposito, supponendo che la funzione sia data come un'espressione del tipo $y = f(x)$, con f funzione elementare.

1. Determinare il dominio $\mathrm{Dom}(f)$ della funzione.

2. Stabilire se la funzione ha eventuali simmetrie (cioè se è pari o dispari) o è periodica (cfr. Paragrafo 2.4).

3. Determinare il segno della funzione e le eventuali intersezioni con gli assi; si ricordi però che non sempre è possibile calcolare esplicitamente questi punti di intersezione.

4. Studiare il comportamento di f per $x \to \pm\infty$, posto che f sia definita almeno su una semiretta. A questo punto bisogna determinare, oltre ai limiti di f per $x \to \pm\infty$, anche eventuali asintoti orizzontali od obliqui come descritto nel Paragrafo 6.3.

5. Studiare il comportamento di f in prossimità dei punti di frontiera di $\mathrm{Dom}(f)$. (Se $\mathrm{Dom}(f)$ è un'unione di intervalli disgiunti, come accade nella maggioranza dei casi, i punti di frontiera sono gli estremi di ciascun intervallo.) Ad esempio, se f è definita in un intorno del punto x_0 escluso x_0 stesso, allora bisogna determinare i limiti sinistro e destro di f in x_0.

6. Determinare gli intervalli in cui f è crescente o decrescente, e di conseguenza gli eventuali punti di estremi relativo o assoluto. Supponendo che f sia derivabile, si tratta di determinare il segno e gli zeri di f' e di utilizzare il test di monotonia (Teorema 6.15) e il Teorema 6.18 per l'identificazione dei punti di estremo. Per classificare i punti stazionari può essere utile anche il Teorema 7.12, una volta calcolata la derivata seconda di f.

7. Determinare gli intervalli in cui f è convessa o concava e gli eventuali punti di flesso. Supponendo che f sia derivabile due volte, si tratta di determinare il segno e gli zeri di f'', e di utilizzare il Teorema 6.30.

Utilizziamo ora questo schema per lo studio di una semplice funzione; altri esempi sono svolti negli esercizi.

Esempio 6.35. Si voglia tracciare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

1. La funzione è definita per quei valori di x tali che $x^2 - 1 \geq 0$, cioè se $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$. Ne segue che $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2. f è una funzione pari: infatti il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} = f(x), \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \ .$$

   Di conseguenza, sarà sufficiente studiare la funzione solo per $x \geq 1$ e riportare per simmetria rispetto all'asse y l'andamento nella regione $x \leq -1$.

3. La funzione "radice quadrata" è sempre ≥ 0 e si annulla se e solo se il suo argomento è nullo. Di conseguenza, si ha $f(\pm 1) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $x \neq \pm 1$.

4. Determiniamo l'andamento di f per $x \to +\infty$ (per quanto detto non abbiamo bisogno di studiare l'andamento di f per $x \leq -1$ grazie alla simmetria). Si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. È dunque possibile che f abbia un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Seguiamo lo schema descritto nel Paragrafo 6.3 per la determinazione degli asintoti obliqui. Iniziamo a calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \ .$$

   Poiché questo limite esiste finito, si tratta ora di stabilire se esiste finito anche il limite di $f(x) - x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0 \ . \end{aligned}$$

   In conclusione la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Per simmetria, la retta $y = -x$ sarà asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

5. f è continua su tutto il suo dominio; in particolare, nei punti di frontiera del dominio, si ha $f(\pm 1) = 0$.

6. Poiché la funzione $g(y) = \sqrt{y}$ è derivabile solo per $y > 0$, dal Teorema 5.24 di derivazione della funzione composta abbiamo che f è certamente derivabile quando $x < -1$ oppure $x > 1$ (cioè se $|x| > 1$), e la sua derivata è data da

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1 \ .$$

Osserviamo che $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$; di conseguenza $f'_+(1) = +\infty$ (cfr. Osservazione 7.4). Questo significa che il grafico di f ha tangente verticale nel punto $(1, 0)$. Sempre per simmetria, si avrà anche $f'_-(-1) = -\infty$. Per $x > 1$ si ha anche che $f'(x) > 0$, quindi f è strettamente monotona crescente nella semiretta $(1, +\infty)$ (si vedano il Teorema 6.15 e l'Approfondimento 6.17). Per simmetria f sarà invece strettamente monotona decrescente in $(-\infty, -1)$. In particolare, i punti $x = \pm 1$ sono punti di minimo assoluto di f (questo poteva essere stabilito già dallo studio del segno e degli zeri di f); non ci sono altri punti di estremo assoluto o relativo.

7. Sempre per il Teorema 5.24 di derivazione della funzione composta abbiamo che f' è certamente derivabile quando $|x| > 1$, dunque f è derivabile due volte per tali valori di x. Calcoliamo f''. A tale proposito possiamo utilizzare o la formula di derivazione del quoziente oppure la formula di derivazione del prodotto, scrivendo f' nella forma $f'(x) = x(x^2 - 1)^{-1/2}$. Utilizzando il secondo metodo si ha

$$f''(x) = (x^2-1)^{-1/2} - \frac{1}{2}\, x(x^2-1)^{-3/2}(2x) = -\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}} \ .$$

Di conseguenza abbiamo che $f''(x) < 0$ se $|x| > 1$, quindi per il Teorema 6.30 f è concava sia in $(-\infty, -1)$ che in $(1, +\infty)$. Il grafico della funzione è mostrato in Figura 6.15. ◁

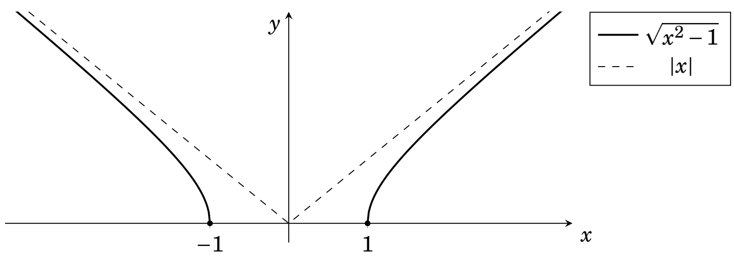


Figura 6.15: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

6.5 Esercizi

Esercizio 6.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile due volte nell'intervallo aperto (a,b). Dimostrare che, se esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(a) = f(b) = f(c)$, allora esiste $d \in (a,b)$ tale che $f''(d) = 0$.

Esercizio 6.2. [Teorema dell'asintoto] Sia $f\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile. Supponiamo che esistano finiti i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = M.$$

Dimostrare che allora deve essere $M = 0$.

Esercizio 6.3. Si vuole costruire una lattina cilindrica di alluminio di volume prefissato $V = 0.33$ litri.

1. Supponendo che la lattina abbia spessore uniforme, calcolare le dimensioni che minimizzano la quantità di alluminio da utilizzare.

2. Supponendo che lo spessore delle due basi sia doppio rispetto a quello della superficie laterale, calcolare le dimensioni che minimizzano la quantità di alluminio da utilizzare.

Esercizio 6.4. [Funzioni iperboliche] Siano date le seguenti funzioni:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(seno iperbolico di } x\text{)},$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(coseno iperbolico di } x\text{)},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(tangente iperbolica di } x\text{)}.$$

(i) Verificare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e dedurne una proprietà geometrica dei punti del piano di coordinate $(\cosh x, \sinh x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Verificare che

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x,$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

(iii) Studiare le tre funzioni e disegnarne il grafico.

(iv) Dopo aver osservato che le funzioni $\sinh x$ e $\tanh x$ sono invertibili su tutto $\mathbb{R}$, mentre la funzione $\cosh x$ è invertibile solo sulla semiretta $[0, +\infty)$, determinare l'espressione analitica delle funzioni inverse

$$(\sinh x)^{-1} = \operatorname{settSh} x \quad \text{settore seno iperbolico di } x,$$

$$(\cosh x)^{-1} = \operatorname{settCh} x \quad \text{settore coseno iperbolico di } x,$$

$$(\tanh x)^{-1} = \operatorname{settTh} x \quad \text{settore tangente iperbolica di } x.$$

(v) Mostrare che

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{settSh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{settCh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{settTh} x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Esercizio 6.5. Per ciacuna delle seguenti funzioni, determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione si estende con continuità in $x = 0$. Fissati tali valori di a, si studi la funzione ottenuta (omettendo lo studio della derivata seconda) e se ne disegni il grafico qualitativo.

1) $f(x) = \begin{cases} x^{1-x} & \text{se } x > 0 \\ ax & \text{se } x < 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \arctan(x \log x) & \text{se } x > 0 \\ e^x - a & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Esercizio 6.6. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Dimostrare che f è strettamente crescente in I se e solo se valgono le seguenti condizioni:

(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$;

(ii) f' non è identicamente nulla in alcun intervallo $[a, b] \subset I$, $a < b$.

(Si confronti questo risultato con quanto osservato nell'Approfondimento 6.17.)

Esercizio 6.7. Determinare gli eventuali asintoti obliqui della funzioni

1) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$ 2) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$

6.5.1 Studi di funzione

Studiare le seguenti funzioni, determinandone il dominio, l'insieme di positività e gli zeri, i limiti negli estremi del dominio, zone di crescenza e decrescenza, punti di massimo e di minimo, concavità e convessità, e disegnandone il grafico.

✍ **Es. 6.8.** $f(x) = \dfrac{1}{\log(x-3)}$

✍ **Es. 6.9.** $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

✍ **Es. 6.10.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}$

Es. 6.11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

✍ **Es. 6.12.** $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$

Es. 6.13. $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$

✍ **Es. 6.14.** $f(x) = \log(x^2+2x-3)$

Es. 6.15. $f(x) = \log(x^2-1/4)$

✍ **Es. 6.16.** $f(x) = x(x+3)e^{-x}$

Es. 6.17. $f(x) = x(x-2)e^{x}$

✍ **Es. 6.18.** $f(x) = \dfrac{1}{3}(x-2)^3(x+1)$

Es. 6.19. $f(x) = \dfrac{1}{3}(x-4)^3x$

✍ **Es. 6.20.** $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

Es. 6.21. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x-3}$

✍ **Es. 6.22.** $f(x) = \sqrt{3x-x^2-2}$

Es. 6.23. $f(x) = \sqrt{x^2+x}$

✍ **Es. 6.24.** $f(x) = (x+1)e^{2x}$

Es. 6.25. $f(x) = 3xe^{-x-2}$

Es. 6.26. $f(x) = \dfrac{x-2}{2x}$

Es. 6.27. $f(x) = \sqrt{x}\log x$

✍ **Es. 6.28.** $f(x) = \arctan(x^2-1)$

Es. 6.29. $f(x) = \arctan(3-2x^2)$

✍ **Es. 6.30.** $f(x) = e^{-|x|}\cos x$

Es. 6.31. $f(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$

Es. 6.32. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2}{|x-1|}\right)$

Es. 6.33. $f(x) = \log(|\arctan x|)$

Es. 6.34. $f(x) = \log(|\cos x|)$

Es. 6.35. $f(x) = e^{-e^{-x}}$

Es. 6.36. $f(x) = \sqrt[3]{|x|(1-x^2)}$

Es. 6.37. $f(x) = x\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$

Es. 6.38. $f(x) = 2^{\cos x}$

Es. 6.39. $f(x) = \arctan(\sqrt{|x|})$

(Nello svolgimento di questi esercizi verrà seguito lo schema descritto nel Paragrafo 6.4. Gli esercizi preceduti dal simbolo ✍ sono svolti in maniera completa, mentre degli altri sono dati solo i calcoli principali e il disegno del grafico della funzione.)

CAPITOLO 7

Formula di Taylor

Nel capitolo precedente abbiamo sviluppato la teoria del calcolo differenziale necessaria per descrivere qualitativamente le funzioni reali di variabile reale. In questo capitolo, invece, mostreremo come il calcolo differenziale può essere utilizzato per l'approssimazione locale delle funzioni e, in particolare, per il calcolo dei limiti.

7.1 Teoremi di Cauchy e di L'Hôpital

Il nostro punto di partenza sarà il seguente risultato, che generalizza il Teorema 6.10 di Lagrange e si ottiene anch'esso come conseguenza del Teorema 6.7 di Rolle.

Teorema 7.1 ➩ di Cauchy

Date $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che

(i) f e g siano continue nell'intervallo chiuso $[a, b]$;

(ii) f e g siano derivabili nell'intervallo aperto (a, b);

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Allora $g(a) \neq g(b)$ ed esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \,. \tag{7.1}$$

Dimostrazione. Cominciamo a dimostrare che $g(a) \neq g(b)$. Se per assurdo fosse $g(a) = g(b)$, allora applicando il Teorema 6.7 di Rolle alla funzione g nell'intervallo $[a, b]$ dovrebbe esistere un punto $c_1 \in (a, b)$ tale che $g'(c_1) = 0$, che è assurdo per l'ipotesi (iii).

Passiamo ora a dimostrare la formula (7.1). Introduciamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x), \qquad x \in [a, b].$$

Osserviamo che h è continua in $[a, b]$ ed è derivabile in (a, b), in quanto differenza di funzioni che hanno queste proprietà. Inoltre

$$h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$
$$h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b),$$

quindi $h(a) = h(b)$. Possiamo dunque applicare il Teorema 6.7 di Rolle alla funzione h, ottenendo che esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. Ma

$$h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0,$$

che equivale alla formula (7.1). □

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per dimostrare un risultato molto utile per il calcolo di limiti che si presentano in forma indeterminata.

Teorema 7.2 ➫ di L'Hôpital

Siano date $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Supponiamo che

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$;

(ii) f *e* g *siano derivabili per ogni* $x \in (a, b)$;

(iii) $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$;

(iv) esista il limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora esiste anche il limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale a* l.

La medesima conclusione vale anche se l'ipotesi (i) è sostituita da

(i') $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Prima di passare alla dimostrazione, facciamo qualche osservazione.

1. Il teorema rimane valido anche se i limiti per $x \to a$ sono sostituiti con i limiti per $x \to b$.

2. Il teorema fornisce solo una condizione **sufficiente** per l'esistenza del limite $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$. In altri termini, quest'ultimo limite può esistere anche se non esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$. Si considerino ad esempio le funzioni $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(x) = x$, con $x_0 = 0$. Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

(cfr. Esempio 3.35). D'altra parte, se $x \neq 0$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \ ,$$

e questa funzione non ammette limite per $x \to 0$ (il primo termine tende a zero, mentre non esiste il limite del secondo).

3. Il teorema può essere usato anche per trattare forme di indeterminazione del tipo $0 \cdot \infty$. Si voglia dimostrare, ad esempio, che

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0 \ . \tag{7.2}$$

Qui si presenta una forma di indeterminazione del tipo $0 \cdot (-\infty)$. Tuttavia, se questo limite viene riscritto come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{(1/x)} \ ,$$

adesso la forma di indeterminazione è del tipo ∞/∞. È facile verificare che le ipotesi (i'), (ii), (iii) sono verificate nella semiretta $(0, +\infty)$ con $x_0 = 0$. Rimane da vedere se è valida anche l'ipotesi (iv), cioè se esiste il limite del rapporto delle derivate delle funzioni $\log x$ e $1/x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \ .$$

Poiché questo limite esiste e vale 0, possiamo concludere che anche il limite (7.2) esiste e vale 0.

4. Possono essere trattate anche altre forme di indeterminazione. Ad esempio, si voglia dimostrare che

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1 \ .$$

In questo caso, la forma di indeterminazione è del tipo 0^0. Tuttavia, passando in forma esponenziale e utilizzando il limite già calcolato in (7.2), si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \log x} = e^0 = 1 \ .$$

5. Un errore assai frequente consiste nell'utilizzare il Teorema 7.2 di L'Hôpital anche quando non si è in presenza di una forma di indeterminazione. Ad esempio, si ha banalmente

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2 + \sin x} = 0 \ ,$$

in quanto il numeratore tende a 0 mentre il denominatore tende a 2; tuttavia, se si "applica" il Teorema 7.2 di L'Hôpital, il limite del rapporto delle derivate vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \ ,$$

che non coincide col limite precedente!

6. Non è detto che utilizzare il Teorema 7.2 di L'Hôpital sia il mezzo più veloce per calcolare un limite. Si consideri ad esempio il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^7} \cos(x^2 - 2x)\ \sin x}{x \log(e + \sqrt{3x \cos x})} \ .$$

Si può verificare facilmente che questo limite si presenta in forma indeterminata del tipo $0/0$. È però evidente che cercare di calcolare il limite delle derivate (o anche solo *calcolare* le derivate) è un'operazione molto laboriosa. D'altra parte questo limite si calcola facilmente osservando che, quando $x \to 0$,

$$e^{x^7} \to 1,\ \cos(x^2 - 2x) \to 1,\ \log(e + \sqrt{3x \cos x}) \to \log e = 1,\ \frac{\sin x}{x} \to 1,$$

quindi, per il Teorema 3.30, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^7} \cos(x^2 - 2x)\ \sin x}{x \log(e + \sqrt{3x \cos x})} = 1 \ .$$

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema 7.2 di L'Hôpital nel caso valgano le ipotesi (i), (ii), (iii), (iv); la dimostrazione nel caso valga (i') anziché (i) è omessa.

Dimostrazione del Teorema 7.2. Nella dimostrazione distingueremo vari casi, a seconda che a e l siano finiti o meno.

Caso 1: Se $a \in \mathbb{R}$, grazie all'ipotesi (i) le funzioni f e g possono essere estese con continuità anche nel punto a ponendo

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0 \ .$$

Caso 1.1: se il limite che compare in (iv) è finito, cioè $l \in \mathbb{R}$, allora dalla definizione di limite si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - l \right| < \varepsilon, \qquad \forall t \in (a, a + \delta)\,. \tag{7.3}$$

Inoltre, fissato $x \in (a, a+\delta)$, si può applicare il Teorema 7.1 di Cauchy alle funzioni f e g nell'intervallo $[a, x]$, ottenendo che esiste $c \in (a, x)$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} \ .$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $f(a) = g(a) = 0$; si osservi inoltre che, come conseguenza del Teorema 7.1 di Cauchy, si ha che $g(x) \neq 0$ quando $x \neq a$. Poiché $c \in (a, x) \subset (a, a+\delta)$, da (7.3) con $t = c$ otteniamo che

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| < \varepsilon \ .$$

Poiché questa relazione vale per ogni $x \in (a, a+\delta)$, dall'arbitrarietà di ε segue la tesi.
Caso 1.2: se invece $l = +\infty$, avremo che, fissato ad arbitrio $M > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} > M, \qquad \forall t \in (a, a+\delta) \, .$$

Ragionando come nel caso 1.1, per ogni $x \in (a, a+\delta)$ siamo in grado di determinare un punto $c \in (a, x)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} > M \ .$$

Per l'arbitrarietà di M possiamo concludere che $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = +\infty$. Il caso $l = -\infty$ si tratta in maniera analoga.

Caso 2: se $a = -\infty$, risulta chiaramente non restrittivo supporre che $b < 0$ in modo tale che le funzioni $\widetilde{f}(x) := f(-1/x)$, $\widetilde{g}(x) := g(-1/x)$ siano definite nell'intervallo $(0, d)$, con $d := -1/b > 0$. Chiaramente

$$\lim_{x \to 0^+} \widetilde{f}(x) = \lim_{y \to -\infty} f(y) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} \widetilde{g}(x) = \lim_{y \to -\infty} g(y) = 0,$$

quindi $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ soddisfano l'ipotesi (i). Inoltre esse soddisfano anche l'ipotesi (ii) nell'intervallo $(0, d)$ e, dal momento che

$$\widetilde{f}'(x) = \frac{1}{x^2} f' \left(-\frac{1}{x} \right), \quad \widetilde{g}'(x) = \frac{1}{x^2} g' \left(-\frac{1}{x} \right),$$

anche l'ipotesi (iii) è soddisfatta e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\widetilde{f}'(x)}{\widetilde{g}'(x)} = \lim_{y \to -\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l.$$

La conclusione segue dunque dal caso 1. □

Una conseguenza del Teorema 7.2 di L'Hôpital è la seguente condizione sufficiente per la derivabilità di una funzione.

Teorema 7.3 ➾ Limite delle derivate e derivabilità

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua in a e derivabile per ogni $x \in (a,b)$, Se esiste il limite $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esiste $f'_+(a) = l$.
Analogamente, se f continua in b e derivabile per ogni $x \in (a,b)$, l'esistenza del limite $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ implica l'esistenza di $f'_-(b) = \ell$.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital al calcolo del limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che si presenta in forma indeterminata $0/0$ grazie all'ipotesi di continuità di f nel punto a. □

Osservazione 7.4. Più in generale, se siamo nella situazione del Teorema 7.3 e se esiste finito o $\pm\infty$ il limite $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $f'_+(x_0) = l$. Analogo discorso vale per $f'_-(x_0)$. ◁

Osservazione 7.5 (Gerarchia degli infiniti)**.** Utilizzando il Teorema 7.2 di L'Hôpital si possono ottenere facilmente i risultati relativi alla gerarchia degli infiniti dimostrati nell'Approfondimento 3.63.

Cominciamo a dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty\ , \qquad \forall \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}\ .$$

Se $\beta \leq 0$ il limite è banale, in quanto per $\beta < 0$ abbiamo il prodotto di due termini che divergono a $+\infty$, mentre per $\beta = 0$ rimane solo l'esponenziale; consideriamo quindi il caso $\beta > 0$. Abbiamo che

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \left(\frac{e^{\gamma x}}{x}\right)^\beta$$

con $\gamma = \alpha/\beta > 0$. Poiché $\beta > 0$, basterà quindi dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x} = +\infty\ , \qquad \forall \gamma > 0. \tag{7.4}$$

Utilizziamo il Teorema 7.2 di L'Hôpital per calcolare quest'ultimo limite, che si presenta in forma indeterminata $+\infty/+\infty$. Il limite del rapporto delle derivate diviene

$$\lim_{x\to+\infty} \gamma\ e^{\gamma x} = +\infty\ ,$$

quindi segue (7.4).
Dimostriamo ora che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\log x)^\beta} = +\infty \ , \qquad \forall \alpha > 0, \ \beta \in \mathbb{R} \ .$$

Anche per questo limite il caso $\beta \leq 0$ è banale. Quando $\beta > 0$, ragionando come per il limite precedente, è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\gamma}{\log x} = +\infty \ , \qquad \forall \gamma > 0. \tag{7.5}$$

Questo limite si presenta in forma indeterminata $+\infty/+\infty$. Il limite del rapporto delle derivate vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\gamma \ x^{\gamma-1}}{(1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \gamma \ x^\gamma = +\infty \ ,$$

quindi per il Teorema 7.2 di L'Hôpital segue (7.5). ◁

Esempio 7.6. Si voglia calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+(\log x)^{107}}{7x+x^2}$. Sappiamo che $(\log x)^{107}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $2x^2$. A denominatore, per confronto diretto si ha che $7x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a x^2. Di conseguenza a numeratore possiamo trascurare $(\log x)^{107}$, mentre a denominatore possiamo trascurare $7x$, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+(\log x)^{107}}{7x+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \ . \qquad ◁$$

7.2 La formula di Taylor

In questo paragrafo esporremo il problema dell'approssimazione locale di una funzione mediante polinomi. Sappiamo che una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$ se e solo se è differenziabile, cioè

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0) \ , \qquad x \to x_0$$

(cfr. formula (6.7)). In altri termini, la funzione f è approssimabile con un polinomio di primo grado $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ a meno di un resto $R_1(x) = f(x) - T_1(x)$, infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$.

La domanda che ci poniamo adesso è la seguente: è possibile determinare un polinomio di secondo grado $T_2(x)$ tale che

$$f(x) = T_2(x) + o((x-x_0)^2) \ , \qquad x \to x_0 \ ,$$

cioè tale che l'errore dell'approssimazione $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$, per $x \to x_0$ tenda a 0 più rapidamente di $(x-x_0)^2$? O, più in generale, è possibile ottenere una analoga approssimazione con un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}^+$, con un errore che tenda a 0 più rapidamente di $(x - x_0)^n$?

Vediamo cosa si può dedurre se la funzione f è un polinomio P di grado n, caso in cui è evidente che la migliore approssimazione polinomiale con un polinomio di grado $n \geq N$, in qualsiasi punto $x_0 \in \mathbb{R}$, è P stesso. Se scriviamo il polinomio P nella forma $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$, le sue prime n derivate in x_0 sono

$$P(x_0) = a_0,\ P'(x_0) = a_1,\ P''(x_0) = \frac{a_2}{2}\,,\ \cdots\,,\ P^{(n)}(x_0) = \frac{a_n}{n!}\,,$$

mentre le derivate di ordine superiore a n sono identicamente nulle. Di conseguenza

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n\,,$$

o equivalentemente,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \tag{7.6}$$

dove, per convenzione, useremo la notazione $f^{(0)} = f$ per qualsiasi funzione f.

Mostriamo ora che qualsiasi funzione f abbastanza regolare può essere approssimata localmente (in un intorno di un punto x_0) con un polinomio i cui coefficienti sono determinati dalle derivate di f in x_0, esattamente come in (7.6). Ovviamente, se la funzione non è un polinomio, la differenza tra la funzione e la sua approssimazione polinomiale è non nulla, ma infinitesima.

Teorema 7.7 ➾ Formula di Taylor di ordine n

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte nel punto $x_0 \in (a,b)$. Allora esiste un unico polinomio $T_n(x)$, di grado minore o uguale a n, tale che

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)\ , \qquad x \to x_0\ . \tag{7.7}$$

*Il polinomio T_n è detto **polinomio di Taylor di ordine n generato da f con centro** x_0, ed è dato dalla formula*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Dimostrazione del Teorema 7.7. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \ . \tag{7.9}$$

Questo limite si presenta come forma indeterminata del tipo 0/0. Vorremmo utilizzare il Teorema 7.2 di L'Hôpital, riconducendoci quindi allo studio del limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \ . \tag{7.10}$$

Anche questo limite si presenta in forma indeterminata 0/0; infatti la derivata del polinomio di Taylor T_n definito in (7.8) è data da

$$T_n'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)\cdot(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x-x_0)^{n-1}$$

(si osservi che questo è il polinomio di Taylor di ordine $n-1$ generato da f'). Cerchiamo di applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital anche per calcolare il limite (7.10), ottenendo il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \ ,$$

con

$$T_n''(x) = f''(x_0) + f^{(3)}(x_0)\cdot(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}\,(x-x_0)^{n-2} \ .$$

Di nuovo il limite si presenta in forma indeterminata del tipo 0/0. Iteriamo questo procedimento per un totale di $n-1$ volte, arrivando al limite del rapporto delle derivate di ordine $n-1$. Osservando che

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0) \ ,$$

si ottiene dunque il limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)]}{n!\ (x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n!}\left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right] = 0 \ ,
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio discende direttamente dalla definizione di $f^{(n)}(x_0)$. Questo ci permette di concludere che tutti i limiti considerati esistono e valgono 0, quindi (7.9) è dimostrata.

Da quanto fatto finora segue anche che l'unico polinomio di grado non superiore a n che verifica la relazione (7.7) è il polinomio di Taylor definito in (7.8). Per mostrarlo, supponiamo che ci sia un altro polinomio P_n di grado n tale che $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$. Ma allora avremmo che l il polinomio di grado n dato da $Q_n(x) := P_n(x) - T_n(x)$ godrebbe della proprietà

$$Q_n(x) := P_n(x) - T_n(x) = o((x-x_0)^n), \qquad x \to x_0. \tag{7.11}$$

Dimostriamo che questo implicherebbe che $Q_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè $P_n = T_n$. Infatti, se scriviamo $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$, la continuità del polinomio e l'ipotesi (7.11) ci garantisce che $Q_n(x_0) = 0$, cioè $a_0 = 0$. Quindi abbiamo $Q_n(x) = (x-x_0) \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1}$ che, ragionando come sopra, implica che

$$a_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{Q_n(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{Q_n(x)}{(x-x_0)^n} (x-x_0)^{n-1} = 0.$$

Iterando questo procedimento otteniamo che

$$a_k = \lim_{x \to x_0} \frac{Q_n(x)}{(x-x_0)^k} = 0, \qquad \forall k = 0, \ldots, n. \qquad \square$$

Osservazione 7.8 (Polinomio di Mac Laurin)**.** Quando $x_0 = 0$, T_n è anche detto **polinomio di Mac Laurin** di ordine n generato da f. ◁

Osservazione 7.9 (Ordine di contatto)**.** Dalla definizione (7.8) di T_n è facile verificare che

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'(x_0) = f'(x_0), \; \ldots, \; T_n^{(n)}(x_0) = f^n(x_0) \; .$$

Quando due funzioni coincidono in x_0 assieme alle prime n derivate si dice anche che i loro grafici hanno un contatto di ordine n in x_0. ◁

Esempio 7.10 (Polinomio di Mac Laurin di e^x)**.** Vogliamo determinare il polinomio di Mac Laurin di ordine n della funzione $f(x) = e^x$. Poiché, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = e^x$, abbiamo che $f^{(k)}(0) = 1$, da cui

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \;, \qquad x \to 0 \; .}$$

I polinomi T_1 e T_2 sono rappresentati in Figura 7.1. ◁

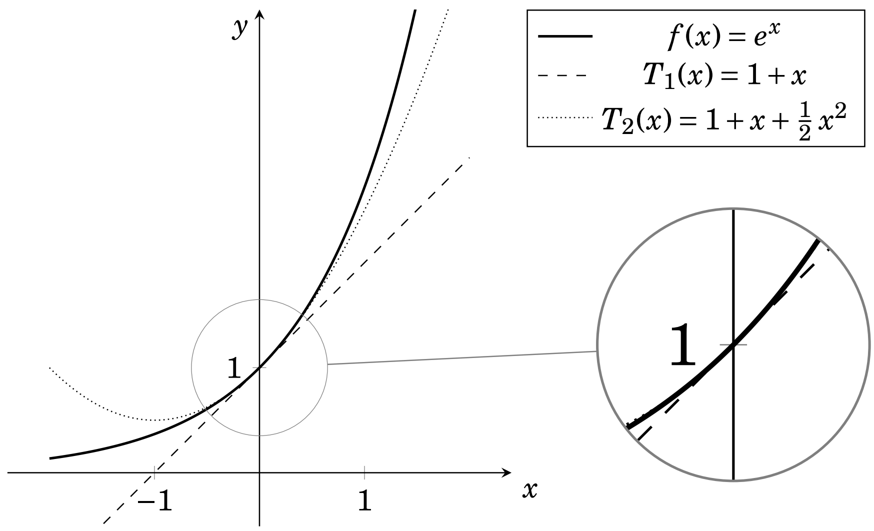


Figura 7.1: Polinomi di Mac Laurin di $f(x) = e^x$

Esempio 7.11 (Polinomio di Mac Laurin di $\sin x$ e $\cos x$)**.** Vogliamo determinare il polinomio di Mac Laurin di ordine n della funzione $f(x) = \sin x$. Calcoliamo alcune derivate della funzione:

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = \sin x, \quad f^{(1)}(x) = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x,\\
&f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \quad f^{(6)}(x) = -\sin x, \quad f^{(7)}(x) = -\cos x, \ \dots
\end{aligned}$$

Osserviamo che la seconda riga è identica alla prima; in altre parole, le derivate di $\sin x$ si ripetono ciclicamente ogni quattro ordini di derivazione. Inoltre, nell'origine si ha

$$f^{(0)}(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1,$$

e le altre derivate nell'origine si ottengono ripetendo ciclicamente questi quattro valori. In particolare, si ha che

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

e quindi la formula di Mac Laurin di ordine $2n+1$ per $\sin x$ è

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \qquad x \to 0.}$$

La formula di Mac Laurin per la funzione $f(x) = \cos x$ si può ricavare in modo analogo, ottenendo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \qquad x \to 0\,.$$

Esempio 7.12 (Polinomio di Mac Laurin di $\log(1+x)$)**.** Vogliamo determinare il polinomio di Mac Laurin di ordine n della funzione $f(x) = \log(1+x)$, definita per $x > -1$. Calcoliamo alcune derivate della funzione:

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2},$$
$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(1+x)^{-4}.$$

È facile intuire che, in generale, si avrà

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,\ x > -1\,.$$

(Questa formula può essere dimostrata rigorosamente utilizzando il Principio di Induzione.) In particolare $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$; osservando che $f(0) = 0$ otteniamo dunque

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \qquad x \to 0.$$

Esempio 7.13 (Polinomio di Mac Laurin di $1/(1-x)$)**.** Vogliamo determinare il polinomio di Mac Laurin di ordine n della funzione $f(x) = 1/(1-x)$, definita per $x \neq 1$. Ragionando come nell'Esempio 7.12 non è difficile verificare che

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ x \neq 1\,.$$

In particolare $f^{(k)}(0) = k!$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui si ottiene

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n), \qquad x \to 0.$$

Esempio 7.14 (Polinomio di Mac Laurin di $(1+x)^\alpha$)**.** Vogliamo determinare il polinomio di Mac Laurin di ordine n della funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, definita per $x > -1$. Non è difficile dimostrare che

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\cdot(1+x)^{\alpha-k}\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,\ x > -1,$$

e, in particolare, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Per scrivere in maniera compatta la formula di Mac Laurin per f, definiamo i **coefficienti binomiali generalizzati**

Coefficienti binomiali generalizzati

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+ , \qquad \binom{\alpha}{0} = 1 .$$

Osserviamo che, se α è un numero naturale, allora questi coefficienti binomiali generalizzati coincidono per $k \leq \alpha$ con quelli già definiti nel Paragrafo 1.3, mentre sono tutti nulli per $k > \alpha$. La formula di Mac Laurin per f è dunque

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n), \qquad x \to 0.$$

Come caso particolare, se $\alpha = 1/2$ si ottiene

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8}\, x^2 + \cdots \\ + (-1)^{n-1}\, \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots 3}{n!\, 2^n}\, x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

A partire dai polinomi di Taylor appena calcolati si può determinare l'approssimazione polinomiale di altre funzioni utilizzando i seguenti risultati.

Per non appesantire le notazioni, supporremo sempre che le funzioni considerate siano derivabili un numero sufficiente di volte nel punto considerato. Indicheremo inoltre con $T_n^{x_0}[f]$ il polinomio di Taylor di ordine n della funzione f relativo al punto x_0.

Teorema 7.15 ➫ Proprietà dei polinomi di Taylor

Valgono le seguenti proprietà:

(i) $T_n^{x_0}[\alpha f + \beta g] = \alpha\, T_n^{x_0}[f] + \beta\, T_n^{x_0}[g]$, *per ogni* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(ii) $T_n^{x_0}[f'] = T_{n+1}^{x_0}[f]'$.

Dimostrazione. La proprietà (i) è conseguenza diretta della linearità della derivata, mentre (ii) segue dalla definizione di derivate di ordine superiore. □

Approfondimento 7.16 (Polinomio di Taylor della funzione composta)**.**
Il risultato di unicità del polinomio di Taylor garantisce che se f è una funzione definita e abbastanza regolare in un intorno di x_0 e se P è un polinomio di grado n tale che $f(x) - P(x) = o((x-x_0)^n$ per $x \to x_0$, allora $P = T_n^{x_0}[f]$. Questa osservazione è utile quando si tratta di calcolare il polinomio di Taylor

di una funzione composta. Se, ad esempio, volessimo calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 5 della funzione $f(x) = \log(\cos x)$, potremmo procedere per composizione dei polinomi di Mac Laurin noti delle funzioni logaritmo e coseno. Innanzi tutto dobbiamo decidere a quale ordine di approssimazione vanno sviluppate due funzioni per arrivare ad un'approssimazione di ordine 5 della funzione composta. A tal scopo osserviamo preliminarmente che $\cos(0) = 1$ e che $\log(1+y) = y+o(y)$. Di conseguenza, la funzione $\cos x$ andrà sviluppata fino all'ordine 5, ottenendo

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Ricordando il polinomio di Mac Laurin di $\log(1+x)$ e osservando che

$$\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5),$$
$$\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^k = o(x^5), \quad \forall k \geq 3$$

(dove abbiamo utilizzato il fatto che $x^m = o(x^5)$ per ogni $m \geq 5$) si capisce che il logaritmo andrà sviluppato all'ordine 2, ottenendo

$$\begin{aligned}\log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)\\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)\\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo che $T_5^0[f](x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$.

Inoltre, osservando che $[\log(\cos(x))]' = -\tan(x)$, dal Teorema 7.15(ii) deduciamo che

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4), \qquad x \to 0.}$$

◁

Approfondimento 7.17 (Polinomio di Taylor della derivata)**.** Se conosciamo il polinomio di Taylor di ordine n della derivata f' di una funzione f

$$T_n^{x_0}\left[f'\right](x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k\,,$$

possiamo determinare il polinomio di Taylor di ordine $(n-1)$ della funzione f. Infatti, sappiamo che

$$a_k = \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}, \qquad \forall k = 0, \ldots n$$

ossia $f^{(j)}(x_0) = (j-1)!\,a_{j-1}$ per ogni $j = 1, \ldots n+1$. Di conseguenza

$$T_{n+1}^{x_0}\left[f\right](x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{j}(x - x_0)^j\,. \qquad \triangleleft$$

Esempio 7.18. Utilizzando quanto detto nell'Approfondimento 7.16, il polinomio di Mac Laurin di ordine $2n$ della funzione $1/(1+x^2)$ può essere ottenuto a partire da quello di ordine n della funzione $1/(1-y)$ calcolato nell'Esempio 7.13 con la sostituzione $y = -x^2$:

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}). \qquad x \to 0.}$$

Dal momento che $1/(1+x^2)$ è la derivata della funzione $f(x) = \arctan x$, da quanto osservato nell'Approfondimento 7.17 deduciamo che

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}), \qquad x \to 0.}$$

La (7.7) prende il nome di formula di Taylor con **resto di Peano**. In alcuni casi può essere utile avere delle informazioni più dettagliate sul resto della formula di Taylor. Il seguente risultato, noto come formula di Taylor con resto di Lagrange, fornisce informazioni quantitative sul resto.

Teorema 7.19 ➾ Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in (a,b), $n \in \mathbb{N}^+$, e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora, per ogni $x \in (a,b)$ esiste un punto c, compreso fra x

e x_0, tale che

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) \cdot (x - x_0)^n \qquad (7.12)$$

dove T_{n-1} è il polinomio di Taylor di ordine $(n-1)$ della funzione f con centro x_0.

Dimostrazione. Introduciamo le funzioni ausiliarie

$$g(x) = f(x) - T_{n-1}(x), \qquad h(x) = (x - x_0)^n \ .$$

È immediato verificare che

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \ g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x),$$
$$h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(n-1)}(x_0) = 0, \ h^{(n)}(x) = n! \ .$$

Se $x = x_0$ la formula (7.12) è chiaramente vera. Consideriamo ora un punto $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$; supponiamo, per fissare le idee, $x_0 < x < b$. Nell'intervallo $[x_0, x]$ le funzioni g e h soddisfano le ipotesi del Teorema 7.1 di Cauchy; esiste quindi un punto $c_1 \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} \qquad (7.13)$$

(nel primo passaggio abbiamo usato il fatto che $g(x_0) = h(x_0) = 0$). Osserviamo ora che anche le funzioni g' e h' soddisfano le ipotesi del Teorema 7.1 di Cauchy nell'intervallo $[x_0, c_1]$; esiste quindi un punto $c_2 \in (x_0, c_1)$ tale che

$$\frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \frac{g'(c_1) - g'(x_0)}{h'(c_1) - h'(x_0)} = \frac{g''(c_2)}{h''(c_2)} \ .$$

Iterando questo procedimento n volte, si determinano n punti $c_1, \ldots, c_n$, tali che $x_0 < c_n < c_{n-1} < \cdots < c_1$ e

$$\frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \cdots = \frac{g^{(n)}(c_n)}{h^{(n)}(c_n)} = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!} \ ,$$

da cui segue la tesi scegliendo $c = c_n$. □

Concludiamo il paragrafo con un'applicazione della formula di Taylor di ordine 2 che riguarda la classificazione dei punti stazionari di una funzione. Più precisamente, supponiamo di avere una funzione $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in (a, b). Sappiamo già, per il Teorema 6.2 di Fermat, che se $x_0 \in (a, b)$

è un punto di estremo relativo, allora $f'(x_0) = 0$. Come abbiamo già spiegato nell'Approfondimento 6.6, in generale non è vera l'implicazione opposta. Vale però una condizione sufficiente, basata sullo studio del segno della derivata seconda, che in alcune situazioni ci permette di dire se un punto stazionario è un punto di estremo relativo.

Teorema 7.20 ➯ Classificazione dei punti stazionari

Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte nel punto $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che

(i) x_0 sia un punto stazionario di f, cioè $f'(x_0) = 0$;

(ii) $f''(x_0) > 0$ (risp. $f''(x_0) < 0$).

Allora x_0 è un punto di minimo (risp. massimo) relativo forte per f.

Dimostrazione. Osserviamo che la formula di Taylor (7.7) di ordine 2 può essere scritta nella forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0)^2 \ ,$$

con $\varepsilon(x_0) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Inoltre, per l'ipotesi (i), il termine in cui compare $f'(x_0)$ è nullo; raccogliendo $(x - x_0)^2$ fra i termini successivi si ha

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x) \right] \ . \tag{7.14}$$

Dal momento che $f''(x_0) > 0$ e che $\varepsilon(x) \to 0$ quando $x \to x_0$, esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b), \qquad |\varepsilon(x)| < \frac{f''(x_0)}{4} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ .$$

In particolare, questo implica che

$$\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x) > \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{4} = \frac{f''(x_0)}{4} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ .$$

Utilizzando questa disuguaglianza in (7.14) e ricordando che $(x - x_0)^2 > 0$ per ogni $x \neq x_0$, si ottiene che

$$f(x) > f(x_0), \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x \neq x_0 \ ,$$

da cui si conclude che x_0 è un punto di minimo relativo stretto per f. Il caso $f''(x_0) < 0$ si tratta in maniera analoga. □

Esempio 7.21. Consideriamo la funzione $f(x) = x(e^x - 1)$, che ha derivate di ogni ordine definite su tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo che $f'(x) = e^x - 1 + xe^x$; in particolare, si ha $f'(0) = 0$, quindi l'origine è un punto stazionario. Vediamo se si può utilizzare il Teorema 7.20; per fare questo, calcoliamo la derivata seconda di f che è $f''(x) = e^x(2 + x)$, da cui ricaviamo $f''(0) = 2 > 0$. Di conseguenza, possiamo concludere che $x = 0$ è un punto di minimo locale forte per f. In questo caso si poteva giungere alla medesima conclusione osservando che $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ se $x \neq 0$, da cui si deduce che $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f. $\triangleleft$

Osservazione 7.22. Nel caso in cui $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) = 0$, nulla si può dire a priori sulla natura del punto x_0. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ si annulla insieme alle sue prime due derivate nel punto $x = 0$, e tale punto non è di estremo relativo poiché la funzione è strettamente monotona crescente. D'altra parte, anche la funzione $f(x) = x^4$ si annulla insieme alle sue prime due derivate nel punto $x = 0$, e tale punto in questo caso è di minimo relativo (anzi assoluto) forte. $\triangleleft$

7.3 Calcolo dei limiti mediante la formula di Taylor

Utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin ricavati nel paragrafo precedente e il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) è possibile effettuare il calcolo di alcuni limiti apparentemente difficili. Illustriamo inizialmente il metodo con un esempio abbastanza semplice.

Esempio 7.23. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x - x^2}{x^3} .$$

Utilizziamo le formule di Mac Laurin per esponenziale, seno e coseno che abbiamo ricavato negli Esempi 7.10 e 7.11; tali formule, scritte all'ordine 3, forniscono:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

La scelta di utilizzare gli sviluppi fino al terzo ordine dipende dal fatto che, a denominatore, compare x^3. Tenendo conto del fatto che $o(x^3) \pm o(x^3) = o(x^3)$

otteniamo che

$$\begin{aligned} e^x - \sin x - \cos x - x^2 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} - 1 + \frac{x^2}{2} - x^2 \\ &= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \ . \end{aligned}$$

Per il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) si ha infine

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \overset{\text{[sost. inf.]}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3}{x^3} = \frac{1}{3} \ . \quad \triangleleft$$

Chiaramente questo metodo è efficace solo in presenza di funzioni abbastanza regolari da permettere di utilizzare i loro sviluppi di Taylor. Quando questo è possibile, il limite viene trasformato in un semplice calcolo algebrico.

Le principali difficoltà, soprattutto all'inizio, risiedono nella scelta dell'ordine a cui fermarsi nello sviluppo (spesso occorre procedere per tentativi successivi) e nella gestione dei resti (cioè degli "o–piccolo"). Riguardo a quest'ultima questione, dimostriamo alcune relazioni che riguardano il simbolo di "o–piccolo". Per semplicità, scriveremo queste relazioni per $x \to 0$.

Date due funzioni f e g infinitesime per $x \to 0$, la notazione $o(f(x)) = o(g(x))$, $x \to 0$, descrive la seguente proprietà:

$$\text{se } h \text{ è una funzione tale che } \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0.$$

Osserviamo esplicitamente che $o(f(x)) = o(g(x))$ non esprime un'uguaglianza fra due quantità assegnate; in particolare, questa scrittura non è equivalente a $o(g(x)) = o(f(x))$. Ad esempio, $o(x^2) = o(x)$, ma non è vero che $o(x) = o(x^2)$.

Teorema 7.24 ➫ Algebra degli infinitesimi

Siano $\alpha, \beta \geq 0$. Allora, per $x \to 0$,

(i) *se $\alpha > \beta$, allora $x^\alpha + o(x^\beta) = o(x^\beta)$;*
(ii) *se $\alpha \geq \beta$, allora $o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^\beta)$;*
(iii) *$o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$;*
(iv) *$x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$;*
(v) *se $\lim_{x\to 0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora $f(x) \cdot o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$. In particolare, se $c \in \mathbb{R}$ è una costante, $c \cdot o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$.*
(vi) *$\frac{1}{1+o(x^\alpha)} = 1 + o(x^\alpha)$.*

Dimostrazione. (i) sia $\alpha > \beta$ e sia f un infinitesimo per $x \to 0$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\beta} = 0.$$

Allora
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha + f(x)}{x^\beta} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-\beta} + \frac{f(x)}{x^\beta} = 0.$$
(ii) Sia $\alpha \geq \beta$ e siano f e g infinitesimi per $x \to 0$ tali che
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^\beta} = 0.$$
Allora
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\pm g(x)}{x^\beta} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-\beta}\frac{f(x)}{x^\alpha} \pm \frac{g(x)}{x^\beta} = 0.$$
(iii) Siano $\alpha, \beta > 0$, e siano f e g infinitesimi per $x \to x_0$ tali che
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^\beta} = 0.$$
Allora
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}\frac{g(x)}{x^\beta} = 0.$$
(iv) Siano $\alpha, \beta > 0$, e sia f un infinitesimo per $x \to 0$ tale che
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$
Allora
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha f(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\beta} = 0.$$
(v) Sia $\alpha > 0$, sia g un infinitesimo per $x \to 0$ tale che
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^\alpha} = 0.$$
Se $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^\alpha} = \ell \cdot 0 = 0.$$
(vi) si ha
$$\frac{1}{1+o(x^\alpha)} - 1 = \frac{o(x^\alpha)}{1+o(x^\alpha)}$$
per cui
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{1}{1+o(x^\alpha)} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}\frac{1}{1+o(x^\alpha)} = 0. \qquad \square$$

Esempio 7.25. Come esempio d'uso delle relazioni appena scritte, vogliamo determinare lo sviluppo di Mac Laurin al quarto ordine della funzione $\sin^2 x$ a partire da quello di $\sin x$ (senza dunque calcolare alcuna derivata). Sviluppando il quadrato, abbiamo che

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + [o(x^3)]^2 - \frac{x^4}{3} - 2x \cdot o(x^3) - \frac{x^3}{3} \cdot o(x^3).$$

Osserviamo che

$$[o(x^3)]^2 = o(x^6), \quad 2x \cdot o(x^3) = o(x^4), \quad \frac{x^3}{3} \cdot o(x^3) = o(x^6),$$

quindi, per la proprietà (ii), la somma dei termini contenenti "o-piccolo" è $o(x^4)$. Per la proprietà (i), questo resto ingloba tutte le potenze di x strettamente maggiori di 4 (in questo caso c'è solo il termine $x^6/36$). In conclusione si ottiene

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4). \tag{7.15}$$

Nello sviluppo iniziale del quadrato abbiamo calcolato, per maggior chiarezza, tutti i termini (quadrati e doppi prodotti); è chiaro che, con un po' di esercizio, il calcolo può essere semplificato. Un modo pratico di procedere è il seguente: si individua dapprima l'o–piccolo di ordine inferiore (in questo caso $o(x^4)$, che viene generato dal doppio prodotto fra x e $o(x^3)$) e lo si scrive per primo, dopodiché, nello sviluppo del quadrato, si evita di scrivere qualsiasi termine contenente o–piccolo (visto che abbiamo già individuato e scritto quello di ordine inferiore) e qualsiasi potenza di x di ordine strettamente superiore all'ordine dell'o-piccolo. ◁

Esempio 7.26. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - \sin x - \sqrt[6]{1 - x^3}}{x^2 - \sin^2 x}.$$

Per capire fino a che ordine è opportuno sviluppare numeratore e denominatore, conviene partire dal denominatore che è più semplice. Dall'uguaglianza asintotica (7.15) abbiamo che

$$x^2 - \sin^2 x = x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{3} + o(x^4)\,, \tag{7.16}$$

quindi sarà opportuno sviluppare anche il numeratore fino al quarto ordine. Osserviamo che la funzione $\sqrt[6]{1 - x^3}$ può essere sviluppata a partire dallo sviluppo di $(1 + t)^\alpha$ con $\alpha = 1/6$ e $t = -x^3$; si ha che

$$\sqrt[6]{1 - x^3} = 1 + \frac{1}{6}(-x^3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} - 1\right)(-x^3)^2 + o(x^6) = 1 - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{72}x^6 + o(x^6).$$

Già qui ci accorgiamo di aver fatto fin troppi calcoli; infatti, avendo deciso di fermarci al quarto ordine, vediamo subito che possiamo buttare il termine in x^6 e il relativo o–piccolo, sostituendo tutto con un $o(x^4)$. Di questo potevamo accorgerci subito: una volta scritti i primi due termini (1 e $-x^3/6$), vediamo subito che i successivi sono tutti di ordine maggiore o uguale a 6, dunque possiamo mettere subito un $o(x^4)$ senza scrivere ulteriori termini e fare ulteriori calcoli. In definitiva, al quarto ordine abbiamo che

$$\sqrt[6]{1-x^3} = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^4). \tag{7.17}$$

Analogamente, abbiamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\,, \tag{7.18}$$

dal momento che nello sviluppo di Mac Laurin di $\sin x$ non compare alcun termine di ordine 4. Rimane da calcolare lo sviluppo di Mac Laurin al quarto ordine della funzione $e^x \cos x$:

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\,.$$

Per evitare di scrivere tutti i 24 termini che comparirebbero da questo prodotto, come abbiamo già detto è opportuno individuare in prima istanza l'ordine più basso dei termini con o–piccolo. Vediamo subito che tale termine è $o(x^4)$, che compare sia dal prodotto del termine 1 nel primo fattore per il termine $o(x^4)$ nel secondo che nel prodotto simmetrico di $o(x^4)$ per 1. Tutti gli altri termini di resto sono prodotti di potenze positive di x per $o(x^4)$ oppure $o(x^4)\cdot o(x^4)$, e sono dunque tutti inglobati in $o(x^4)$. Di conseguenza, nello scrivere il risultato finale del prodotto, scriviamo subito $o(x^4)$ e buttiamo, man mano che li incontriamo, tutti gli altri termini contenenti o–piccolo e tutte le potenze di ordine strettamente maggiore di 4 (nel calcolo procediamo moltiplicando il primo termine del primo fattore per tutti quelli del secondo, poi il secondo termine del primo fattore per tutti quelli del secondo, etc.):

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\,. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Vediamo che, al primo passo, abbiamo dovuto calcolare solo 10 dei 24 termini previsti. Ora non resta che mettere insieme le informazioni ottenute in (7.17), (7.18), (7.19) per ottenere lo sviluppo di Mac Laurin al quarto ordine del numeratore

$$\begin{aligned}&e^x \cos x - \sin x - \sqrt[6]{1-x^3}\\&= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \Big(x - \frac{x^3}{6}\Big) - \Big(1 - \frac{x^3}{6}\Big) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

Da quest'ultima uguaglianza asintotica, da (7.16) e dal Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) otteniamo infine

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - \sin x - \sqrt[6]{1-x^3}}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = -\frac{1}{2}\,. \qquad \triangleleft$$

7.4 Esercizi

Esercizio 7.1. Calcolare i seguenti limiti usando (quando possibile) il Teorema 7.2 di L'Hôpital:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x+1}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{e^x\sin x}{\tan x}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{e^x-2}{x^2-4}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}\,e^{1/x}}{x+2}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x+1}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1-x/3}{x^2}$

Esercizio 7.2. Calcolare i seguenti limiti usando, quando è utile, il Teorema 7.2 di L'Hôpital.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin(x^2)}{x^6},$

2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{1/x}-1-\frac{1}{x}}{(\pi/2-\arctan x)^2}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x-\log(x+1))\sin x}{(e^{x^2}-1)\log(x+1)}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e^{x+1}}{e^x-1-\sin x}$

Esercizio 7.3. Confrontare i seguenti infinitesimi per $x\to 0$:

1) $f(x)=\sin x + x^2$ e $g(x)=\cos x - 1$;

2) $f(x)=\tan x$ e $g(x)=\sqrt[3]{x}-x^3$;

3) $f(x)=e^{x^2}-1$ e $g(x)=3x^2$;

4) $f(x)=\sqrt[5]{1+x^2}-1$ e $g(x)=x^2$.

Esercizio 7.4. Utilizzando il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}-1+4x-x^5}{3\sqrt{x}+\log(1+x^2)}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\cos x}{2x-5x^4}$

Esercizio 7.5. Calcolare i seguenti limiti utilizzando la gerarchia degli infiniti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, e^{1/x} \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, |\log x|^\beta \qquad (\alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R})$

3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$

Esercizio 7.6. Calcolare gli sviluppi di Taylor al secondo ordine delle seguenti funzioni relativamente al punto x_0 indicato:

1) $f(x) = x\,e^x$, $x_0 = 0$

2) $f(x) = x\,e^x$, $x_0 = 1$

3) $f(x) = \log(1 + x + x^2)$, $x_0 = 2$

4) $f(x) = x^3 \sin x$, $x_0 = \pi$

Esercizio 7.7. Calcolare i seguenti limiti usando gli sviluppi di Mac Laurin:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{x^3}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \log(1-x) - e^{-x^2}}{x^3}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\cos x} - 2}{x \sin x}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(\frac{x^2}{1-x} - \sin^2 x - x^3\right)$

Esercizio 7.8. Determinare la parte principale (cioè il primo termine non nullo del polinomio di Taylor) e l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni.

1) $3\arctan x - 2x\cos x - x$

2) $\frac{\pi - 2\arctan(1/x^2)}{\sin(4x)}$

3) $\log\left(x + e^{-x}\right) - x\log(1+2x)$

4) $\left(e^x - e^{\sqrt{1+2x}-1}\right)^2.$

Esercizio 7.9. Calcolare i seguenti limiti usando gli sviluppi di Taylor.

1) $\lim_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \log\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{12\log\left(1 + \sin(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x}\right) + 2x - \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[10]{1+x} - 1\right)}{\log^2(1+\sqrt{x}) + x\sqrt{x} - \sin x}$

CAPITOLO 8

Integrali

8.1 L'integrale di Riemann

Il calcolo integrale è stato sviluppato nel XVII secolo, principalmente per opera di Newton e Leibniz, per risolvere il cosiddetto *problema delle aree*. Abbiamo già visto, all'inizio del Capitolo 3, come l'area del settore parabolico compreso fra l'asse delle x e il grafico della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, possa essere approssimata sia per difetto, utilizzando rettangoli inscritti, che per eccesso, utilizzando rettangoli circoscritti, in modo tale che la differenza dei valori di queste due approssimazioni sia piccola a piacere. Siamo dunque stati in grado di definire l'area di questa regione di piano come valore comune del limite dell'area di queste approssimazioni.

Più in generale, il problema delle aree è il seguente: data una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ non negativa, si vuole calcolare l'area della porzione del piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e le rette verticali $x = a$ e $x = b$ (si veda la Figura 8.1).

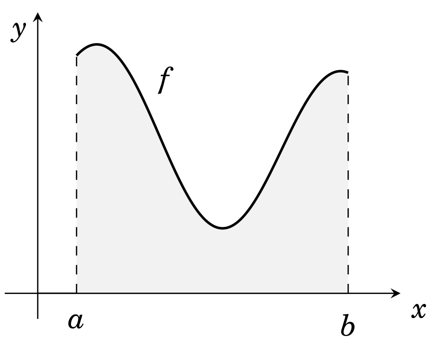


Figura 8.1: Regione fra il grafico di f e l'asse x

L'idea sarà sempre quella di ottenere l'area con un procedimento di approssimazione attraverso aree facilmente calcolabili, come quelle di unioni di rettangoli con base sull'asse delle ascisse e altezza opportuna.

La classe delle funzioni che si prende in considerazione è quella delle funzioni **limitate** definite su un intervallo limitato.

Consideriamo dunque una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e fissiamo, in maniera arbitraria, le basi dei rettangoli approssimanti.

Definizione 8.1 ➫ Partizione di un intervallo

*Si chiama **partizione** dell'intervallo $[a,b]$ un insieme ordinato di punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tali che*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\ .$$

In altri termini, abbiamo un numero finito di punti disposti in ordine crescente lungo l'asse x; inoltre il primo punto coincide con l'estremo sinistro dell'intervallo, mentre l'ultimo punto coincide con l'estremo destro dell'intervallo. Chiaramente, una partizione di questo tipo individua gli n sottointervalli

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \dots,\ [x_{n-1}, x_n],$$

che sono tutti disgiunti (a meno degli estremi) e che ricoprono tutto l'intervallo di partenza $[a,b]$. Indicheremo con P una generica partizione dell'intervallo $[a,b]$.

Mentre la scelta delle basi è totalmente libera, per avere una buona approssimazione dell'insieme considerato è opportuno scegliere adeguatamente le altezze. Più precisamente, fissata una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[a,b]$, definiamo, per $k = 1, \dots, n$, le quantità

$$m_k = \inf\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = \sup\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,. \tag{8.1}$$

Se indichiamo con

$$m = \inf\{f(x);\ x \in [a,b]\}, \qquad M = \sup\{f(x);\ x \in [a,b]\},$$

abbiamo ovviamente che

$$m \le m_k \le M_k \le M, \qquad \forall k = 1, \dots, n\ . \tag{8.2}$$

Possiamo ora definire le **somme integrali inferiori e superiori della funzione f relative alla partizione P**.

Definizione 8.2 ➫ Somme integrali inferiori e superiori

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e sia* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una partizione dell'intervallo* $[a,b]$. *Le somme integrali inferiori e superiori della funzione* f *relative alla partizione* P *sono definite rispettivamente da*

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

dove m_k *ed* M_k, $k = 1, \ldots, n$, *sono definiti in* (8.1).

Dalle maggiorazioni (8.2) segue subito che

$$m(b-a) \le s(f,P) \le S(f,P) \le M(b-a) \tag{8.3}$$

per ogni partizione P dell'intervallo $[a,b]$.

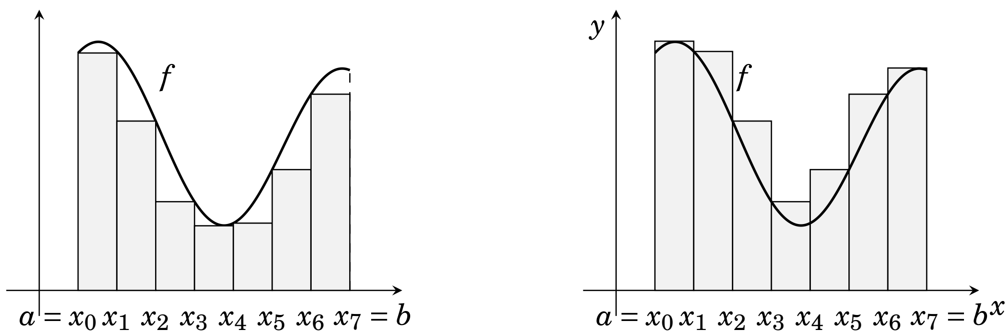


Figura 8.2: Costruzione delle somme integrali inferiori e superiori

Adesso manca l'ultimo passo, cioè passare al limite al tendere dell'ampiezza della partizione a zero (per ampiezza di una partizione si intende la lunghezza massima dei suoi sottointervalli). Risulta però più comodo procedere in un altro modo, che si può dimostrare essere equivalente. Riferiamoci all'interpretazione geometrica, supponendo per comodità la funzione f non negativa. Le somme inferiori $s(f,P)$ rappresentano un'approssimazione dal basso dell'area A della regione che sta sotto il grafico di f, utilizzando rettangoli che abbiano per base i sottointervalli della partizione. Quindi, se consideriamo tutte le partizioni possibili, otteniamo tutte le possibili approssimazioni dal basso:

$$\mathcal{A}_* = \{s(f,P);\ P \text{ partizione di } [a,b]\}\,.$$

Grazie alle stime (8.3) il numero $M(b-a)$ è un maggiorante dell'insieme $\mathcal{A}_*$, che quindi è limitato superiormente. Se l'insieme $\mathcal{A}_*$ avesse un massimo assoluto, cioè se esistesse una partizione P_* tale che $s(f,P_*) \ge s(f,P)$ per ogni partizione P, allora $s(f, P_*)$ fornirebbe la migliore approssimazione dal basso dell'area A. In generale, l'insieme $\mathcal{A}_*$ non ammette massimo assoluto. Per quanto detto, però, essendo limitato superiormente, risulterà finito il suo estremo superiore.

Definizione 8.3 ➫ Integrale inferiore

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. L'integrale inferiore di f nell'intervallo $[a, b]$ è definito da

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup \mathcal{A}_* = \sup\{s(f, P);\ P \text{ partizione di } [a, b]\}\ .$$

(Vale la pena osservare che l'integrale inferiore è definito attraverso un estremo superiore!) Analogamente, possiamo considerare tutte le possibili approssimazioni dall'alto utilizzando le somme superiori:

$$\mathcal{A}^* = \{S(f, P);\ P \text{ partizione di } [a, b]\}\ .$$

Sempre grazie a (8.3), l'insieme $\mathcal{A}^*$ è limitato inferiormente da $m(b - a)$, per cui risulta finito il suo estremo inferiore.

Definizione 8.4 ➫ Integrale superiore

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. L'integrale superiore di f nell'intervallo $[a, b]$ è definito da

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf \mathcal{A}^* = \inf\{S(f, P);\ P \text{ partizione di } [a, b]\}\ .$$

Da un punto di vista geometrico, se f è una funzione non negativa, e se con A indichiamo la regione piana compresa fra il grafico di f e l'asse delle x, l'integrale inferiore rappresenta il valore al quale si possono avvicinare, con precisione arbitraria, le approssimazioni $s(f, P)$ per difetto dell'area di A; analogamente, l'integrale superiore rappresenta il valore al quale si possono avvicinare, sempre con precisione arbitraria, le approssimazioni $S(f, P)$ per eccesso dell'area di A. Risulta chiaro che una definizione consistente dell'area della regione A potrà essere data solo quando questi due valori (integrale inferiore e superiore) sono uguali.

Nel caso generale, questo porta alla seguente definizione.

Definizione 8.5 ➾ Funzione integrabile secondo Riemann

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diremo che f è ***integrabile (secondo Riemann)*** *nell'intervallo $[a,b]$ se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ .$$

In tal caso, il valore comune di queste due quantità viene detto integrale (di Riemann) di f nell'intervallo $[a,b]$ e viene indicato col simbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Esempio 8.6. Calcoliamo l'integrale di una funzione costante. Sia $f(x) = c$ per ogni $x \in [a,b]$. I rettangoli che compaiono nella costruzione delle somme inferiori e superiori hanno tutti altezza uguale a c, quindi per ogni partizione P dell'intervallo $[a,b]$ si ha

$$s(f,P) = S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a) \ .$$

Di conseguenza $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$. ◁

Prima di procedere oltre, vediamo subito un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

Esempio 8.7 (Funzione di Dirichlet)**.** Consideriamo la funzione, già introdotta nell'Osservazione 2.5,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funzione f è definita nell'intervallo $[0,1]$ ed è limitata. D'altra parte, sappiamo che un qualsiasi intervallo $[c,d]$ con $c < d$ contiene infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali. Di conseguenza, presa una qualsiasi partizione P dell'intervallo $[0,1]$, si avrà sempre $m_k = 0$ ed $M_k = 1$ per ogni indice k, per cui si ha $s(f,P) = 0$, $S(f,P) = 1$ e, in conclusione,

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0\,, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1\,.$$

Dunque la funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann. ◁

In generale, può essere piuttosto complicato stabilire se una funzione è integrabile utilizzando direttamente la Definizione 8.5. È dunque importante avere risultati che garantiscano l'integrabilità di classi abbastanza ampie di funzioni. A questo scopo premettiamo alcuni risultati preliminari che verranno utilizzati nelle dimostrazioni dei teoremi seguenti.

Lemma 8.8 ➩ Monotonia delle somme integrali

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano P_1, P_2 due partizioni di $[a,b]$ tali che $P_1 \subseteq P_2$ (cioè P_2 contiene tutti i punti di P_1). Allora

$$s(f,P_1) \le s(f,P_2), \qquad S(f,P_1) \ge S(f,P_2).$$

Dimostrazione. Dimostreremo solo la disuguaglianza per le somme inferiori, dal momento che quella per le somme superiori si dimostra in maniera del tutto analoga. Sia $P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ e supponiamo che P_2 contenga esattamente un punto in più di P_1, diciamo $y \in (x_{i-1}, x_i)$ per un opportuno indice $i \in \{1, \dots, n\}$. Avremo che

$$s(f,P_1) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}),$$

dove i valori m_k sono definiti in (8.1). Per quanto riguarda $s(f,P_2)$, abbiamo che

$$s(f,P_2) = \sum_{k \ne i} m_k (x_k - x_{k-1}) + \mu_s (y - x_{i-1}) + \mu_d (x_i - y),$$

con

$$\mu_s = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, y]\}, \qquad \mu_d = \inf\{f(x) : \ x \in [y, x_i]\}\,.$$

Poiché μ_s e μ_d sono entrambi maggiori o uguali a m_i, avremo che

$$\begin{aligned} s(f,P_2) - s(f,P_1) &= \mu_s (y - x_{i-1}) + \mu_d (x_i - y) - m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &\ge m_i (y - x_{i-1}) + m_i (x_i - y) - m_i (x_i - x_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Il caso generale, cioè quello in cui P_2 contenga un qualsiasi numero di punti in più di P_1, può essere ottenuto iterando più volte questo ragionamento. □

Teorema 8.9 ➩ Confronto fra integrale inferiore e superiore

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Siano P_1, P_2 due generiche partizioni di $[a,b]$; indichiamo con $P = P_1 \cup P_2$ la partizione composta da tutti i punti di P_1 e P_2. Dal Lemma 8.8 e dal fatto che $s(f,P) \leq S(f,P)$ abbiamo che

$$s(f,P_1) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_2)\,,$$

cioè $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$. Se teniamo fissata P_2 e prendiamo l'estremo superiore al variare di P_1 fra tutte le possibili partizioni, otteniamo che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,P_1):\ P_1 \text{ partizione di } [a,b]\} \leq S(f,P_2).$$

A questo punto la tesi segue prendendo l'estremo inferiore al variare di P_2 fra tutte le partizioni di $[a,b]$. □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente criterio di integrabilità.

Teorema 8.10 ➫ Criterio di integrabilità

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P_ε dell'intervallo $[a,b]$ tale che

$$S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile secondo Riemann. Per definizione, l'integrale superiore e quello inferiore sono uguali e coincidono col valore $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Poiché l'integrale inferiore è l'estremo superiore delle somme inferiori al variare di tutte le partizioni di $[a,b]$, per la caratterizzazione dell'estremo superiore (si veda pag. 22) esiste una partizione P_1 tale che

$$I - s(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Con analogo ragionamento, esiste una partizione P_2 di $[a,b]$ tale che

$$S(f,P_2) - I < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

dunque $S(f,P_2) - s(f,P_1) < \varepsilon$. Sia ora P_ε la partizione che contiene tutti i punti di P_1 e di P_2. Per il Lemma 8.8 avremo che $s(f,P_\varepsilon) \geq s(f,P_1)$ e $S(f,P_\varepsilon) \leq S(f,P_2)$, per cui

$$S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) \leq S(f,P_2) - s(f,P_1) < \varepsilon.$$

Viceversa, supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una partizione P_ε di $[a,b]$ soddisfacente (8.4). Dal Teorema 8.9 e dalla definizione di integrale inferiore e superiore abbiamo che

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

quindi, per l'arbitrarietà di ε, concludiamo che l'integrale inferiore e quello superiore sono uguali, cioè f è integrabile secondo Riemann. $\square$

La prima classe di funzioni per le quali dimostriamo l'integrabilità è quella delle funzioni monotone.

Teorema 8.11 ➯ Integrabilità delle funzioni monotone

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f è integrabile secondo Riemann.

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo ad esempio che f sia monotona crescente. Supponiamo, inoltre, che f non sia costante (caso trattato nell'Esempio 8.6), per cui si avrà $f(b) > f(a)$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $P_\varepsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partizione tale che

$$\delta := \max\{x_k - x_{k-1} : \ k = 1, \dots, n\} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \, .$$

Osserviamo che, poiché f è monotona crescente, $m_k = f(x_{k-1})$ e $M_k = f(x_k)$, per cui

$$\begin{aligned} S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})](x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \delta \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \delta[f(b) - f(a)] < \varepsilon, \end{aligned}$$

dunque la tesi segue dall'arbitrarietà di ε e dal Teorema 8.10. $\square$

Mostriamo ora che tutte le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann.

Teorema 8.12 ➯ Integrabilità delle funzioni continue

Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile secondo Riemann.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.41 di Heine–Cantor, la funzione f è uniformemente continua in $[a, b]$. Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta. \tag{8.5}$$

Sia ora $P_\varepsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partizione tale che

$$\max\{x_k - x_{k-1} :\ k = 1, \ldots, n\} < \delta\,. \tag{8.6}$$

Poiché f è continua, per il Teorema 4.17 di Weierstrass essa ammetterà massimo e minimo assoluto in ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. In altre parole, per ogni $k = 1, \ldots, n$ esistono due punti $y_k, z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tali che

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) :\ x \in [x_{k-1}, x_k] = f(y_k), \\ M_k &= \sup\{f(x) :\ x \in [x_{k-1}, x_k] = f(z_k). \end{aligned}$$

Poiché $y_k, z_k \in [x_{k-1}, x_k]$, da (8.6) deduciamo che $|z_k - y_k| < \delta$, dunque per (8.5) si ha che

$$|f(z_k) - f(y_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

In conclusione, abbiamo che

$$\begin{aligned} S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [f(z_k) - f(y_k)](x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon, \end{aligned}$$

dunque la tesi segue dall'arbitrarietà di ε e dal Teorema 8.10. □

Approfondimento 8.13 (Somme di Cauchy–Riemann)**.** Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Nel corso della dimostrazione del Teorema 8.12 abbiamo mostrato che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ è una *qualsiasi* partizione di $[a, b]$ la cui ampiezza

$$\Delta(P) := \max\{x_k - x_{k-1} :\ k = 1, \ldots, n\}$$

soddisfa $\Delta(P) < \delta$, allora $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Poiché f è integrabile e $s(f, P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f, P)$, abbiamo che

$$0 \leq S(f, P) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon, \qquad 0 \leq \int_a^b f(x)\,dx - s(f, P) < \varepsilon.$$

Ciò significa che, se $(P_j)_j$ è una successione di partizioni di $[a, b]$ tale che $\lim_{j\to+\infty} \Delta(P_j) = 0$, allora

$$\lim_{j\to+\infty} S(f, P_j) = \lim_{j\to+\infty} s(f, P_j) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

In particolare, se indichiamo con $P_j = \{x_0^j, \ldots, x_{n_j}^j\}$ la j-esima partizione, e scegliamo arbitrariamente dei punti $y_k^j \in [x_{k-1}^j, x_k^j]$, $k = 1, \ldots, n_j$, abbiamo che

$$s(f, P_j) \le \sigma_j := \sum_{k=1}^{n_j} f(y_k^j)\,(x_k^j - x_{k-1}^j) \le S(f, P_j).$$

Quindi, per il Teorema 3.23 del confronto, la successione $(\sigma_j)_j$ converge anch'essa all'integrale di f. Le approssimazioni σ_j prendono il nome di **somme di Cauchy–Riemann**. $\triangleleft$

Dimostriamo ora le proprietà di base dell'integrale di Riemann.

Teorema 8.14 ➾ Proprietà dell'integrale di Riemann

Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann. Valgono le seguenti proprietà:

(i) Linearità: le funzioni $c \cdot f$, con c costante reale, ed $f + g$ sono integrabili secondo Riemann, e si ha

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx,$$
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

(ii) Additività rispetto all'intervallo di integrazione: se $c \in (a, b)$, allora f è integrabile secondo Riemann sia in $[a, c]$ che in $[c, b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\ .$$

(iii) Monotonia: se $f(x) \ge g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \ge \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

(iv) Assoluta integrabilità: $|f|$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx\,. \tag{8.7}$$

Dimostrazione. (i) Nel seguito $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ denoterà una generica partizione di $[a, b]$. La prima uguaglianza in (i) segue immediatamente dalle relazioni

$$s(c \cdot f, P) = \begin{cases} c \cdot s(f, P), & \text{se } c \geq 0, \\ c \cdot S(f, P), & \text{se } c < 0, \end{cases} \qquad S(c \cdot f, P) = \begin{cases} c \cdot S(f, P), & \text{se } c \geq 0, \\ c \cdot s(f, P), & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la seconda uguaglianza, osserviamo che, se $A \subseteq [a, b]$,

$$\inf_{x \in A} \{f(x) + g(x)\} \geq \inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x)\,,$$
$$\sup_{x \in A} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)\,;$$

scrivendo tali disuguaglianze per $A = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, si ottiene

$$s(f, P) + s(g, P) \leq s(f + g, P) \leq S(f + g, P) \leq S(f, P) + S(g, P). \tag{8.8}$$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per il Teorema 8.10 esistono due partizioni P_1, P_2 di $[a, b]$ tali che

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) < \varepsilon/2, \qquad S(g, P_2) - s(g, P_2) < \varepsilon/2\,.$$

Se $P^* = P_1 \cup P_2$, dal Lemma 8.8 deduciamo che

$$S(f, P^*) - s(f, P^*) < \varepsilon/2, \qquad S(g, P^*) - s(g, P^*) < \varepsilon/2\,.$$

Di conseguenza, da (8.8) possiamo concludere che

$$S(f + g, P^*) - s(f + g, P^*) \leq S(f, P^*) + S(g, P^*) - s(f, P^*) - s(g, P^*) < \varepsilon\,,$$

dunque la tesi segue dal Teorema 8.10.

(ii) Sia P_1 una partizione di $[a, c]$ e P_2 una partizione di $[c, b]$; indichiamo con P la partizione di $[a, b]$ che contiene tutti i punti di P_1 e P_2. Abbiamo che

$$s(f, P_1) + s(f, P_2) = s(f, P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx\,;$$

prendendo l'estremo superiore al variare di P_1 e di P_2 otteniamo la disuguaglianza

$$\underline{\int_a^c} f(x)\, dx + \underline{\int_c^b} f(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx\,. \tag{8.9}$$

Analogamente, se P è una partizione di $[a, b]$, indichiamo con P^* la partizione ottenuta aggiungendo, se necessario, il punto c a P; indichiamo inoltre con P_1 e P_2 le partizioni di $[a, c]$ e $[c, b]$ ottenute rispettivamente prendendo i punti di P^* a sinistra e a destra di c (includendo c in entrambe). Per il Lemma 8.8 abbiamo che

$$s(f,P) \leq s(f,P^*) = s(f,P_1) + s(f,P_2) \leq \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\,.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare di P fra le partizioni di $[a,b]$ otteniamo quindi

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\,,$$

che, insieme a (8.9), fornisce

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\,.$$

In modo del tutto analogo si dimostra la medesima relazione per gli integrali superiori. Poiché per ipotesi f è integrabile in $[a,b]$, avremo che

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \\ &= \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right)\,. \end{aligned}$$

Poiché ciascuno dei termini fra parentesi che compaiono a destra è non negativo, ne segue che devono essere entrambi nulli; possiamo quindi concludere che f è integrabile secondo Riemann in ciascuno dei due intervalli $[a,c]$, $[c,b]$ e che vale l'uguaglianza in (ii).

(iii) Osserviamo che, se $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa e limitata, allora $s(h,P), S(h,P) \geq 0$ per ogni partizione P di $[a,b]$; in particolare, se h è anche integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, si ha che $\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$. Consideriamo la funzione $h = f - g$. Per ipotesi si ha che $h \geq 0$ mentre, per il punto (i), h è integrabile secondo Riemann; di conseguenza

$$0 \leq \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

da cui segue immediatamente la disuguaglianza in (iii).

(iv) Consideriamo la funzione parte positiva di f, definita da

$$f_+(x) = \max\{f(x),\, 0\}, \qquad x \in [a,b]. \tag{8.10}$$

Sia $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$. Indichiamo come al solito con m_k, M_k le quantità definite in (8.1); con m_k^+, M_k^+ indicheremo invece le analoghe quantità relative alla funzione f_+. Chiaramente, avremo che $M_k^+ - m_k^+ \leq M_k - m_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$, quindi

$$\begin{aligned} S(f_+, P) - s(f_+, P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k^+ - m_k^+)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = S(f, P) - s(f, P)\,. \end{aligned}$$

Poiché f è integrabile, dal Teorema 8.10 deduciamo che anche f_+ lo è. In maniera del tutto analoga si dimostra che anche la funzione parte negativa di f, definita da

$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \qquad x \in [a, b], \tag{8.11}$$

è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. Poiché $|f| = f_+ + f_-$, dal punto (i) segue l'integrabilità di $|f|$; inoltre, ricordando che $f = f_+ - f_-$, dalle proprietà di linearità e dal fatto che $f_+, f_- \geq 0$ si ha che

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b f_+(x)\,dx \right| + \left| \int_a^b f_-(x)\,dx \right| \\ &= \int_a^b f_+(x)\,dx + \int_a^b f_-(x)\,dx = \int_a^b [f_+(x) + f_-(x)]\,dx \\ &= \int_a^b |f(x)|\,dx\,, \end{aligned}$$

dunque (8.7) è dimostrata. □

Nel seguito utilizzeremo le seguenti convenzioni

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0; \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{se } b < a.$$

Con queste convenzioni è facile verificare che la proprietà enunciata nel Teorema 8.14(ii) è valida quale che sia l'ordine di a, b e c.

8.2 Interpretazione geometrica e calcolo di aree

Abbiamo già evidenziato, nel Paragrafo 8.1, che se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile e *non negativa*, allora l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area della regione di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$.

D'altra parte, la Definizione 8.5 è data per funzioni di segno qualsiasi. In particolare, se $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area compresa fra l'asse x, il grafico di f e le rette verticali $x = a$ e $x = b$, ma col segno negativo (perché tale area è uguale, per ragioni di simmetria, a quella della regione compresa fra l'asse x, il grafico della funzione non negativa $-f$ e le rette verticali $x = a$ e $x = b$). Per questo motivo si dice che l'integrale definito misura le **aree orientate**, o aree con segno. Consideriamo ad esempio la funzione f il cui grafico è tracciato nella Figura 8.3, e indichiamo con A_1, A_2, A_3 le aree delle tre regioni ombreggiate (queste sono aree geometriche, quindi questi tre valori sono positivi).

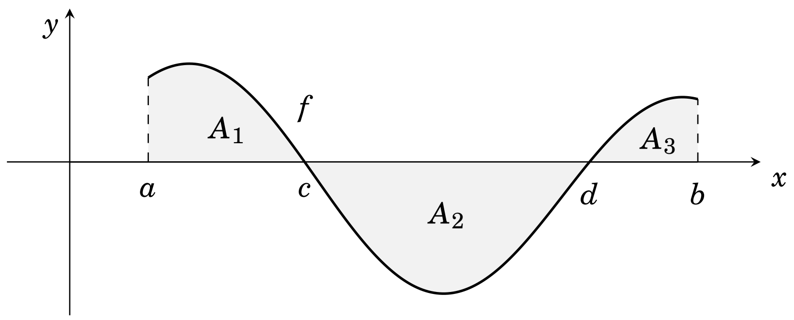


Figura 8.3: Grafico della funzione $f(x)$

Per quanto detto, utilizzando l'additività rispetto all'intervallo di integrazione, avremo che

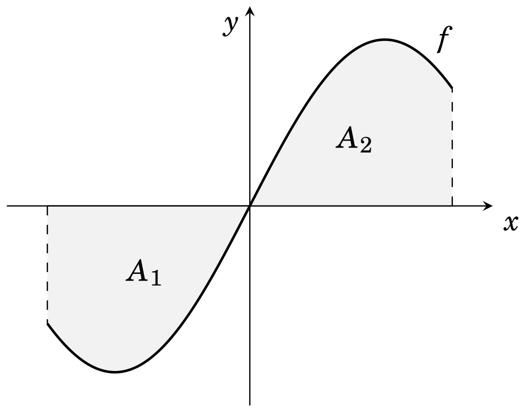
$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3\ .$$

In particolare, se è richiesto il calcolo dell'area (geometrica) della regione di piano ombreggiata, si ha

$$\text{Area totale} = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx\ .$$

Osservazione 8.15 (Integrali e simmetrie)**.** Alcuni integrali possono essere facilmente calcolati sulla base di semplici considerazioni geometriche.
Consideriamo ad esempio una funzione dispari, definita su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, cioè una funzione $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrabile, tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$ (si veda la Figura 8.4 a sinistra). Supponiamo, per fissare le idee, che $f(x) \geq 0$ quando $x \in [0, a]$ (quindi $f(x) \leq 0$ per $x \in [-a, 0]$). Consideriamo le aree (geometriche) A_1 e A_2 delle regioni del piano comprese fra il grafico di f e l'asse x, rispettivamente a sinistra e a destra dell'asse y. Poiché la funzione è dispari, dal punto di vista geometrico è chiaro che queste due aree sono uguali; se teniamo conto del fatto che l'integrale misura le aree orientate, avremo che

$$A_1 = -\int_{-a}^{0} f(x)\,dx, \qquad A_2 = \int_0^a f(x)\,dx.$$



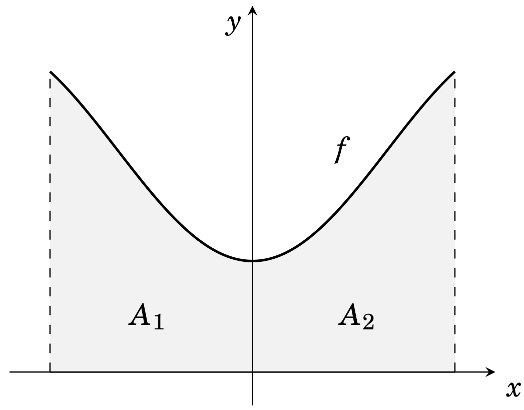


Figura 8.4: Integrale di funzioni dispari e pari

L'uguaglianza $A_1 = A_2$ implica immediatamente che

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0\ .$$

Ad esempio, usando queste considerazioni si ha subito che

$$\int_{-1}^{1} x^4 \sin x\,dx = 0\,,$$

in quanto l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine e la funzione $f(x) = x^4 \sin x$ è dispari (è il prodotto della funzione pari x^4 per la funzione dispari $\sin x$).
Considerazioni analoghe si possono fare anche nel caso di funzioni $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ pari, cioè tali che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-a,a]$ (si veda la Figura 8.4 a destra). In questo caso si ha che

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\ .$$

Naturalmente rimane l'integrale di destra da calcolare; tuttavia in alcuni casi questa semplificazione può risultare utile. $\triangleleft$

Un altro problema che si incontra spesso nelle applicazioni riguarda il calcolo dell'area della regione compresa tra due curve.
Supponiamo di avere due funzione f e g, continue in un intervallo $[a,b]$, e supponiamo che

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]\ .$$

Vogliamo calcolare l'area A della regione del piano compresa fra il grafico delle due funzioni e le rette verticali $x = a$ e $x = b$ (si veda la Figura 8.5). Supponiamo per il momento che entrambe le funzioni siano positive. Una semplice

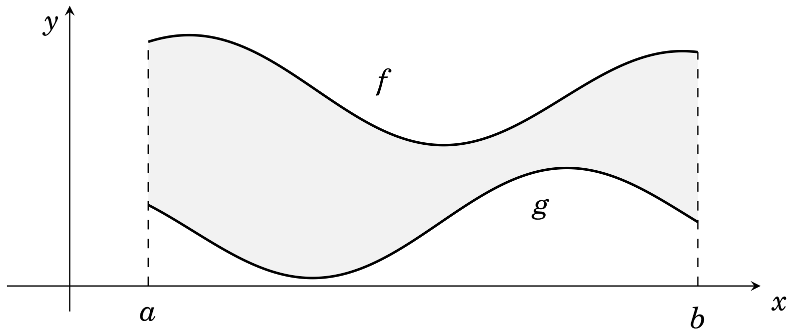


Figura 8.5: Regione compresa fra due curve

considerazione geometrica ci dice che l'area A in questione è la differenza fra l'area della regione che sta fra il grafico di f e l'asse x e l'area della regione che sta fra il grafico di g e l'asse x, cioè

Area della regione compresa fra due grafici ordinati

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \; . \tag{8.12}$$

Ricordando che, se le funzioni sono negative, l'integrale calcola un'area orientata, questo ragionamento si applica anche al caso in cui f e g non siano positive.

L'interpretazione geometrica dell'integrale chiarisce, come vedremo, anche il significato geometrico del seguente risultato.

Teorema 8.16 ➪ Teorema della media integrale

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \; .$$

*La quantità a primo membro è detta **media integrale** di f in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Poiché la funzione f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, il Teorema 4.17 di Weierstrass garantisce che essa ammetta minimo assoluto m e massimo assoluto M in tale intervallo. Chiaramente abbiamo che $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a,b]$. Dalla proprietà di monotonia dell'integrale segue che

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx \; ,$$

cioè, calcolando gli integrali delle funzioni costanti a primo e ultimo membro,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

(si veda l'Esempio 8.6). Dividendo tutto per la quantità positiva $(b-a)$ si ottiene quindi

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M\ .$$

Di conseguenza, la media integrale di f in $[a,b]$ è un numero compreso fra il minimo assoluto m e il massimo assoluto M di f in $[a,b]$. Per il Teorema 4.25 dei valori intermedi, tale valore è assunto da f, cioè esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che $f(c)$ è uguale alla media integrale. Il teorema è quindi dimostrato. □

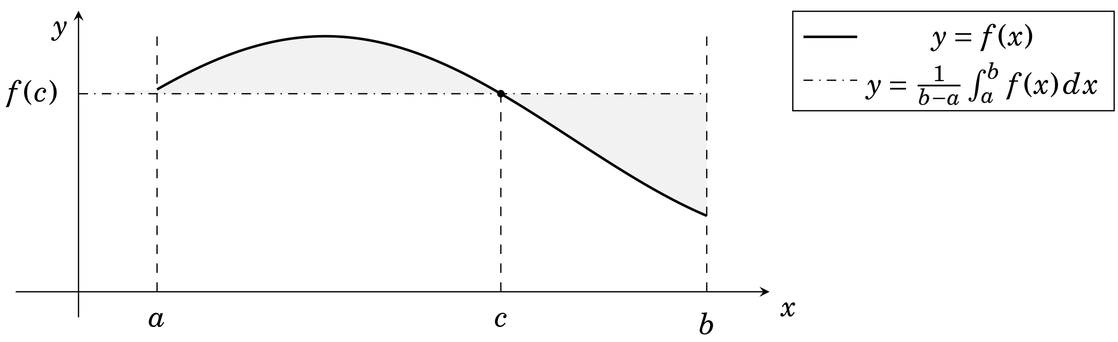


Figura 8.6: Interpretazione geometrica del teorema della media

L'interpretazione geometrica di questo teorema è la seguente (si veda la Figura 8.6). Supponiamo per semplicità che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Il teorema dice che esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che il rettangolo di base $[a,b]$ e altezza pari a $f(c)$ ha la stessa area della regione del piano compresa fra il grafico di f e l'asse x.

8.3 Primitive

Finora abbiamo visto la definizione di integrale di Riemann in termini di somme approssimanti e abbiamo calcolato alcuni integrali molto semplici utilizzando questa definizione. Tuttavia la definizione non si presta al calcolo esplicito di integrali più complicati quali

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx, \qquad \int_1^e \frac{\log^2 x}{x}\,dx\ . \tag{8.13}$$

Nel prossimo paragrafo presenteremo il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, che mette in relazione il calcolo degli integrali definiti con il calcolo di primitive, concetto relativo al calcolo differenziale.

La nozione di primitiva risponde alla seguente domanda: data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, vogliamo stabilire se f può essere vista come la derivata di una funzione g definita nel medesimo intervallo. Ad esempio, la funzione $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, è la derivata della funzione $g(x) = x^2$. In tal caso, diremo che g è una **primitiva** di f.

Definizione 8.17 ➩ Primitiva

Sia data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo. Diremo che una funzione $g\colon I \to \mathbb{R}$ è una ***primitiva*** *di f se g è derivabile in I e*

$$g'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I \ .$$

Riprendendo l'esempio precedente, osserviamo che le funzioni x^2, $x^2 + 1$, $x^2 - \pi$ sono tutte primitive della funzione $f(x) = 2x$. Questo dipende dal fatto che la derivata di una costante è nulla; di conseguenza, se $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$, anche $g(x) + c$, per ogni $c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f. Vale anche il viceversa: se g_1 e g_2 sono entrambe primitive di f, allora differiscono per una costante additiva.

Teorema 8.18 ➩ Caratterizzazione delle primitive

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$. Se g_1, g_2 sono due primitive di f, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $g_1(x) = g_2(x) + c$, per ogni $x \in I$. Viceversa, se g_1 è una primitiva di f e $c \in \mathbb{R}$ è una costante, allora anche $g_2(x) = g_1(x) + c$ è una primitiva di f.

Dimostrazione. Siano g_1, g_2 due primitive di f. Dobbiamo dimostrare che la funzione $h(x) = g_1(x) - g_2(x)$ è costante nell'intervallo I. Poiché g_1 e g_2 sono derivabili, anche h è derivabile; per il Teorema 6.13 sulla caratterizzazione delle funzioni costanti su un intervallo, basta quindi dimostrare che $h'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Ricordando che, per ipotesi, g_1 e g_2 sono entrambe primitive di f, abbiamo che

$$h'(x) = g_1'(x) - g_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad \forall x \in I,$$

quindi h è costante. La seconda parte del teorema segue dal fatto che la derivata di una costante è nulla. □

Il teorema precedente caratterizza completamente l'insieme delle primitive di una funzione f: se ne conosciamo una, tutte le altre si ottengono al variare di una costante additiva. Graficamente, tracciato il grafico di una primitiva, il grafico delle altre primitive si ottiene per traslazione di questo verso l'alto o verso il basso (si veda la Figura 8.7).

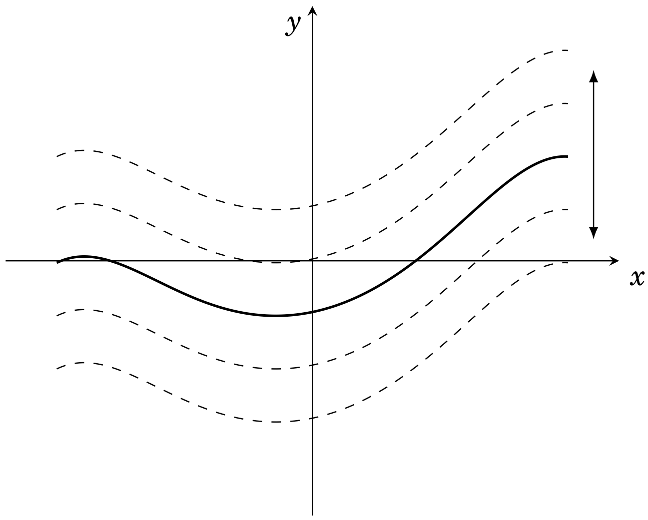


Figura 8.7: Famiglia di primitive

Prima di procedere oltre, è opportuno fare le seguenti osservazioni.

1. Una funzione può anche non ammettere primitive; ad esempio, la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
(o, più in generale, qualsiasi funzione con discontinuità di tipo salto) non ammette primitive. Infatti, per la proprietà di Darboux delle derivate (si veda il Teorema 6.19), la derivata di una funzione non può avere discontinuità di tipo salto.

2. Dimostreremo che ogni funzione continua ammette sicuramente primitive (si veda il Teorema 8.28 a pag. 415). Come conseguenza, ogni funzione elementare definita su un certo intervallo I, essendo continua (si veda l'Osservazione 4.33 a pag. 215), ammette primitive in I, ossia è la derivata di una funzione derivabile definita in I.

3. Se f è una funzione elementare, allora per il punto precedente essa ammette primitive, ma non è detto che le sue primitive siano anch'esse funzioni elementari. Ad esempio, si può dimostrare (ma la dimostrazione non è semplice) che le primitive della funzione elementare $f(x) = e^{-x^2}$ **non** sono funzioni elementari. In altre parole, esiste una funzione derivabile $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g'(x) = e^{-x^2}$, ma di questa funzione non

possiamo dare un'espressione esplicita costruita a partire dalle funzioni x, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.

Per tutti questi motivi la ricerca delle primitive di una funzione è, in generale, un'operazione più complicata del calcolo di una derivata, in quanto non esiste un metodo sistematico che possa essere applicato a qualsiasi funzione elementare e che permetta di calcolarne esplicitamente una primitiva.

Definizione 8.19 ➩ Integrale indefinito

Sia I un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$. L'insieme di tutte le primitive di f si chiama ***integrale indefinito*** *di f su I e si indica col simbolo*

$$\int f(x)\,dx\ .$$

La funzione f è detta ***funzione integranda****.*

Per quelli che sono i nostri scopi, il simbolo dx che compare nell'integrale indefinito indica che la variabile indipendente della famiglia di primitive è x. Naturalmente tale variabile indipendente può essere scelta in maniera arbitraria: $\int f(x)\,dx$, $\int f(y)\,dy$ e $\int f(t)\,dt$ indicano la stessa famiglia di primitive.

Per quanto detto sopra, tale insieme di primitive può essere vuoto, oppure contenere infinite funzioni che differiscono l'una dall'altra per una costante additiva. Ad esempio, si ha che

$$\int 2x\,dx = \left\{x^2 + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}\ .$$

Per semplificare la scrittura, si preferisce tralasciare la notazione insiemistica e si scrive

$$\int 2x\,dx = x^2 + c\,.$$

Osserviamo che un certo numero di primitive si può ottenere semplicemente leggendo "al contrario" una tabella di derivate. Ad esempio, sapendo che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ e che la derivata di $\cos x$ è $-\sin x$, si ha subito

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c.$$

Per controllare la correttezza di un integrale indefinito, è sufficiente verificare che la derivata del membro destro dell'uguaglianza sia uguale alla funzione integranda nel membro sinistro dell'uguaglianza. Riportiamo qui sotto alcuni integrali immediati, la cui verifica può essere fatta in questo modo; tra parentesi è indicato l'intervallo I in cui sono calcolate le primitive.

(a) Se $\alpha \neq -1$, $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1} + c$ (in generale $I = (0,+\infty)$; si può avere anche $I = (-\infty, 0)$ oppure $I = \mathbb{R}$ nei casi in cui x^α sia definita in questi intervalli).

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$ $(I = (0,+\infty)$ oppure $I = (-\infty,0))$.

(c) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c$, $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ $(I = \mathbb{R})$.

(d) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$ $(I = \mathbb{R})$.

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$ $(I = \mathbb{R})$.

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$ $(I = (-1,1))$.

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ $(I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oppure uno degli intervalli ottenuti da I per traslazione di multipli interi di π).

Ricordando che la derivata di una somma coincide con la somma delle derivate e che le costanti moltiplicative escono dalle derivate (si veda il Teorema 5.21) otteniamo le seguenti proprietà, nelle quali assumeremo che le funzioni coinvolte ammettano primitive:

Linearità dell'integrale indefinito

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\ ,$$
$$\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \tag{8.14}$$

In particolare, ricordando che $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, è facile calcolare l'integrale indefinito di un polinomio; ad esempio

$$\int (7x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5)\,dx = \frac{7}{6}\,x^6 - \frac{3}{4}\,x^4 + \frac{2}{3}\,x^3 + 5x + c\ .$$

Un altro metodo di integrazione, noto come **metodo di integrazione per parti**, discende direttamente dalla regola di derivazione di un prodotto.

Teorema 8.20 ➩ Integrazione per parti

Siano f e g due funzioni derivabili in un intervallo I. Allora vale la relazione

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\ . \tag{8.15}$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ossia che la funzione fg è una primitiva della funzione $f'g + fg'$, per cui

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\, dx = f(x)g(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Tenendo conto della prima proprietà in (8.14), si ottiene la (8.15) (in cui la costante c non appare perché può essere “assorbita” dall'integrale indefinito di $f'g$). $\square$

Esempio 8.21. Il metodo di integrazione per parti risulta utile quando la funzione integranda è il prodotto di un polinomio $f(x)$ e di una funzione $g'(x)$ del tipo $\sin x$, $\cos x$ o e^x. Infatti, in questo caso, integrando per parti si deriva il polinomio (che quindi si abbassa di grado), mentre una primitiva di $g'(x)$ continua a essere, a meno del segno, $\sin x$, $\cos x$ o e^x. Ad esempio, calcoliamo

$$\int x \cos x \, dx \ .$$

Possiamo utilizzare la formula (8.15) con $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$. La derivata di $f(x)$ vale 1, mentre una primitiva di $g'(x)$ è $\sin x$. Di conseguenza

$$\int x \cos x \, dx \overset{\left[\substack{(x)'=1 \\ \int \cos x \, dx = \sin x}\right]}{=} x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c \ .$$

Nel primo passaggio, sopra al simbolo “=” sono indicate, fra parentesi quadre, la derivata del fattore finito $f(x)$ e una primitiva del fattore differenziale $g'(x)$. Questa notazione verrà usata anche in seguito per indicare una integrazione per parti. $\lhd$

Esempio 8.22. Un altro caso in cui risulta utile il metodo di integrazione per parti si ha quando nella funzione integranda compare un fattore $\log x$ o $\arctan x$, la cui derivata è una funzione razionale. Ad esempio, cerchiamo le primitive della funzione $\log x$. Integrando per parti con $f(x) = \log x$ e $g'(x) = 1$ si ottiene

$$\int \log x \, dx \overset{\left[\substack{(\log x)'=1/x \\ \int 1 \, dx = x}\right]}{=} x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + c \ . \qquad \lhd$$

Esempio 8.23. In alcuni casi, il metodo di integrazione per parti non porta direttamente alla determinazione delle primitive, ma permette di ricavare delle identità tramite le quali si riesce a risalire alle primitive stesse. Ad esempio, calcoliamo l'integrale indefinito

$$\mathcal{I}(x) = \int e^x \sin x \, dx \ .$$

Integriamo due volte per parti:

$$\mathcal{I}(x) \overset{\left[\substack{(e^x)'=e^x \\ \int \sin x\,dx=-\cos x}\right]}{=} -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx \overset{\left[\substack{(e^x)'=e^x \\ \int \cos x\,dx=\sin x}\right]}{=}$$
$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx\ .$$

L'ultimo integrale a secondo membro è $I(x)$, quindi abbiamo ottenuto che

$$\mathcal{I}(x) = -e^x\cos x + e^x \sin x - \mathcal{I}(x)\ .$$

Risolvendo nell'incognita $I(x)$ otteniamo dunque

$$\mathcal{I}(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c\ .$$

(La costante arbitraria è stata aggiunta per avere la famiglia di tutte le primitive e non solo una particolare primitiva.) $\lhd$

Un altro importante strumento per il calcolo degli integrali è il **metodo di integrazione per sostituzione**, che discende facilmente dal Teorema 5.24 di derivazione della funzione composta.

Teorema 8.24 ➩ Integrazione per sostituzione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e sia $\varphi\colon J \to I$ una funzione derivabile. Allora

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\varphi(x)}\ . \tag{8.16}$$

Dimostrazione. Sia $F(y)$ una primitiva della funzione $f(y)$. Dal Teorema 5.24 di derivazione della funzione composta abbiamo che

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,,$$

da cui segue che $F(\varphi(x))$ è una primitiva della funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. $\square$

La notazione che compare nell'ultimo integrale in (8.16) ha il seguente significato: si calcola la famiglia di primitive $\int f(y)\,dy$ delle funzione f nella variabile y; in ciò che si ottiene si sostituisce poi $\varphi(x)$ al posto di y. Ad esempio, se $f(y) = 3y^2$ e $\varphi(x) = \cos x$,

$$\int 3y^2\,dy\Big|_{y=\cos x} = (y^3 + c)\Big|_{y=\cos x} = (\cos x)^3 + c\ .$$

Esempio 8.25. Si vogliano calcolare tutte le primitive della funzione $\frac{\log x}{x}$. Osserviamo che la funzione $1/x$ è la derivata di $\varphi(x) = \log x$. Applicando la formula (8.16) abbiamo che

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \int y\, dy\Big|_{y=\log x} = \left(\frac{1}{2}y^2 + c\right)\Big|_{y=\log x} = \frac{1}{2}\log^2 x + c\ .$$

Negli esercizi si usa spesso una semplificazione delle notazioni: se la sostituzione è $y = \varphi(x)$, si scrive $dy = \varphi'(x)\, dx$. Nell'integrale, il blocco $\varphi'(x)\, dx$ che compare al membro sinistro della formula (8.16) viene quindi sostituito da dy, mentre $\varphi(x)$ viene sostituito da y. Si ottiene quindi il membro destro in (8.16). Una volta che la sostituzione è chiaramente scritta, per semplificare ulteriormente le notazione in genere negli integrali nella nuova variabile y si evita di scrivere a pedice la sostituzione $y = \varphi(x)$. Nel seguito, le integrazioni per sostituzione verranno evidenziate indicando la sostituzione fatta fra parentesi quadre. Usando le notazioni appena esposte l'integrale precedente viene quindi scritto nel seguente modo:

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx \overset{\left[\substack{y=\log x \\ dy=1/x\, dx}\right]}{=} \int y\, dy = \frac{1}{2}y^2 + c = \frac{1}{2}\log^2 x + c\ . \qquad \triangleleft$$

8.4 Il Teorema Fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e un punto $x_0 \in [a,b]$, definiamo la funzione

Funzione integrale

$$I_f(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\ , \qquad x \in [a,b]\ . \tag{8.17}$$

(Si osservi che abbiamo utilizzato t come variabile di integrazione, in quanto con x abbiamo indicato uno degli estremi di integrazione. Ovviamente, la variabile con la quale si indica l'integrazione è muta, vale a dire che $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(z)\, dz = \ldots$) La funzione I_f è detta **funzione integrale di** f **relativa al punto** x_0.

Ad esempio, se f è non negativa e $x_0 = a$, per ogni $x \in [a,b]$ il valore della funzione integrale $I_f(x)$ corrisponde all'area della regione di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x e le rette verticali passanti per i punti di ascissa a e x (si veda la Figura 8.8).

Mostriamo che la funzione integrale gode di alcune proprietà di regolarità.

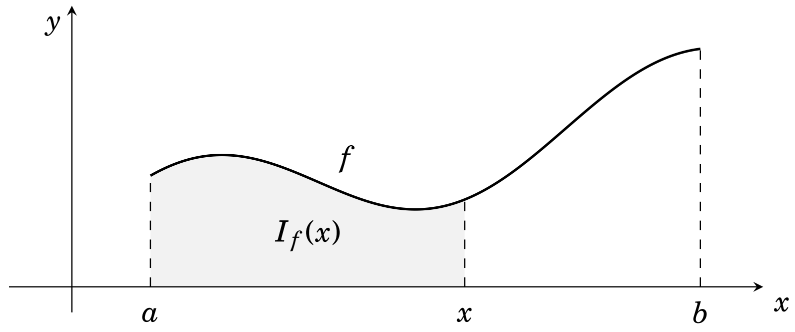


Figura 8.8: Definizione di $I_f(x)$

Teorema 8.26 ➪ Lipschitzianità della funzione integrale

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, allora

$$|I_f(x) - I_f(y)| \leq M\,|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b],$$

con $M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. In particolare, I_f è continua in $[a,b]$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in [a,b]$ e supponiamo $x < y$. Usando la definizione di I_f e le proprietà dell'integrale mostrate nel Teorema 8.14, si ha che

$$\begin{aligned} |I_f(x) - I_f(y)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{y} f(t)\,dt \right| \overset{(ii)}{=} \left| \int_{x}^{y} f(t)\,dt \right| \\ &\overset{(iv)}{\leq} \int_{x}^{y} |f(t)|\,dt \overset{(iii)}{\leq} M\,(y-x). \end{aligned}$$ □

Esempio 8.27. In generale non possiamo aspettarci una maggiore regolarità della funzione integrale. Ad esempio, la funzione $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, definita nell'Esempio 4.4, è integrabile in ogni intervallo limitato e la sua funzione integrale relativa a $x_0 = 0$ è $I_f(x) = |x|$. Questa funzione è Lipschitziana ma non è derivabile nell'origine. ◁

Mostriamo ora che, se la funzione integranda è continua, allora la sua funzione integrale è derivabile in ogni punto.

Teorema 8.28 ➪ di Torricelli

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $I_f(x)$ la sua funzione integrale relativa al punto $x_0 \in [a,b]$. Allora I_f è una primitiva di f. In altri termini, I_f è una funzione derivabile in $[a,b]$ e $I_f'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Dimostrazione. Sia $x \in [a,b]$. Per dimostrare che I_f è derivabile nel punto x, per definizione di derivata dobbiamo mostrare che esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{I_f(x+h) - I_f(x)}{h} \ . \tag{8.18}$$

Inoltre, vogliamo anche dimostrare che tale limite vale $f(x)$. Supponiamo, per semplicità, che $x < b$ e che $h > 0$, e scriviamo esplicitamente il rapporto incrementale che compare in (8.18). Dalla definizione di $I_f(x)$ e dalla proprietà di additività rispetto all'intervallo di integrazione abbiamo che (cfr. Figura 8.9)

$$\frac{I_f(x+h) - I_f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \ .$$

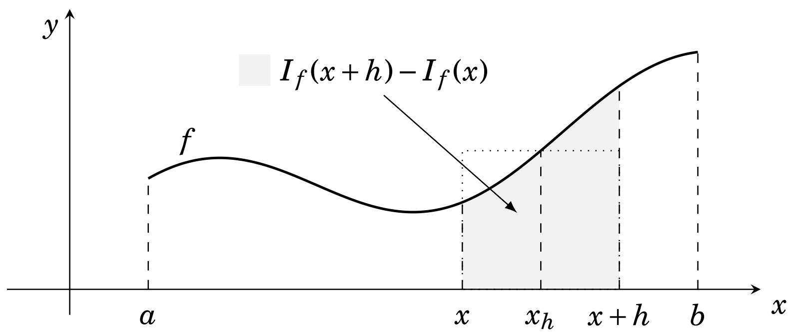


Figura 8.9: Rapporto incrementale di I_f

Osserviamo che l'ultimo termine della formula precedente è la media integrale della funzione f nell'intervallo $[x, x+h]$. Dal Teorema 8.16 della media integrale deduciamo che esiste un punto $x_h \in [x, x+h]$ tale che $f(x_h)$ coincide col valore di questa media integrale, cioè

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(x_h) \ .$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato che, fissato x e preso $h > 0$, esiste un punto $x_h \in [x, x+h]$ tale che

$$\frac{I_f(x+h) - I_f(x)}{h} = f(x_h) \ . \tag{8.19}$$

Osserviamo che quanto detto finora vale anche quando $h < 0$, con l'unica differenza che, in tal caso, $x_h \in [x+h, x]$. Dobbiamo ora passare al limite per $h \to 0$. Poiché $x \le x_h \le x+h$ se $h > 0$ e $x+h \le x_h \le x$ se $h < 0$, per il Teorema 3.23 sul confronto di limiti abbiamo che

$$\lim_{h\to 0} x_h = x \ ,$$

quindi, dal momento che la funzione f è continua, si ha che

$$\lim_{h\to 0} f(x_h) = f(x) \ . \tag{8.20}$$

Dalle formule (8.19) e (8.20) segue dunque la tesi. □

Dimostriamo ora il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, che riconduce il calcolo di un integrale definito al calcolo di una primitiva della funzione integranda.

Teorema 8.29 ➪ Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia G una sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b \ .$$

Dimostrazione. Sia I_f la funzione integrale di f relativa al punto a; per il Teorema 8.28 di Torricelli, I_f è una primitiva di f. Dal Teorema 8.18 sulla caratterizzazione delle primitive abbiamo che, poiché $G(x)$ è anch'essa una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$I_f(x) = G(x) + c \ , \qquad x \in [a,b] \ .$$

Poiché $I_f(a) = 0$, sostituendo $x = a$ nella precedente identità otteniamo dunque $0 = G(a) + c$, da cui $c = -G(a)$. Ne segue quindi che

$$I_f(x) = G(x) - G(a) \ , \qquad x \in [a,b] \ .$$

Poiché $\int_a^b f(x)\,dx = I_f(b) = G(b) - G(a)$, il teorema è dimostrato. □

Esempio 8.30. Tornando agli integrali in (8.13), si può verificare direttamente che le funzioni

$$F(x) = -\frac{1}{4(1+x^4)}, \qquad G(x) = \frac{\log^3 x}{3}$$

sono primitive, rispettivamente, delle funzioni

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^2}, \qquad g(x) = \frac{\log^2 x}{x}.$$

Quindi applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale otteniamo che

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{4(1+x^4)}\right]_0^1 = -\frac{1}{4(1+1^4)} + \frac{1}{4(1+0^4)} = \frac{1}{8} \ ,$$

$$\int_1^e \frac{\log^2 x}{x}\,dx = \left[\frac{\log^3 x}{3}\right]_1^e = \frac{\log^3 e}{3} - \frac{\log^3 1}{3} = \frac{1}{3} \ . \qquad \triangleleft$$

A questo punto diventa cruciale per il calcolo esplicito degli integrali essere in grado di determinare il maggior numero di primitive possibile, tema a cui sarà dedicato tutto il prossimo Capitolo.

8.5 Esercizi

Esercizio 8.1. Calcolare la media integrale delle seguenti funzioni nell'intervallo I indicato e determinare $x_0 \in I$ per cui $f(x_0)$ è uguale alla media integrale.

1) $f(x) = a + b\cos x$, $I = [-\pi, \pi]$

2) $f(x) = x^2$, $I = [0, 2]$

3) $f(x) = \sin^2 x$, $I = [0, \pi]$

Esercizio 8.2. Ricordando che $f(x) = [x]$ denota la funzione parte intera, calcolare gli integrali definiti

1) $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{[x]^2}\,dx, \quad b \geq 1$

2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-[x])^2}\,dx$

Esercizio 8.3. Siano g_1 e g_2 due funzioni derivabili in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia f una funzione continua su tutto l'asse reale. Dimostrare che la funzione

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt, \qquad x \in I,$$

è derivabile nell'intervallo I e che vale la formula

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x), \qquad x \in I.$$

Esercizio 8.4. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.5. Calcolare i seguenti limiti

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^{x^2} \frac{e^t}{3\sqrt{1+t^2}}\,dt$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2}\int_0^{\log^2(1+x)} \sqrt{4+t^2}\,dt$

Esercizio 8.6. Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x\log x}{x^2-1}\,dx$$

Esercizio 8.7. [Disuguaglianza di Hölder] Siano p e q due numeri reali maggiori di 1 e tali che $1/p + 1/q = 1$. Siano f e g due funzioni integrabili su un intervallo $[a, b]$. Ricordando la disuguaglianza di Young (Esercizio 2.24(a)), dimostrare che

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Esercizio 8.8. [Disuguaglianza di Poincarè] Sia f una funzione derivabile con derivata continua nell'intervallo $[a, b]$ e tale che $f(a) = 0$. Dimostrare che

(i) $|f(x)| \le \int_a^b |f'(t)|\,dt$ per ogni $x \in [a, b]$;

(ii) $\int_a^b |f(t)|\,dt \le (b-a)\int_a^b |f'(t)|\,dt$;

(iii) $\int_a^b |f(t)|^p\,dt \le (b-a)^p \int_a^b |f'(t)|^p\,dt$ per ogni $p \ge 1$.

Esercizio 8.9. Calcolare l'area della regione del piano compresa fra i grafici delle funzioni indicate:

1) $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x^3 + 1$, $x \in [-1, 1]$

2) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos(2x)$, $x \in [0, \pi/4]$

3) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x^2$, $x \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$

4) $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$ $\quad x \in [-2, 2]$.

Esercizio 8.10. Posto

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \le 1, \\ x^2, & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \le 0, \\ \log(1+x), & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

calcolare $\int_0^2 f(x)\,dx$ e $\int_{-\pi}^{e-1} g(x)\,dx$.

CAPITOLO 9

Calcolo integrale e applicazioni

In questo capitolo ci occuperemo di fornire alcune tecniche per la determinazione esplicita di primitive. Nella parte finale descriveremo in maniera non rigorosa alcune applicazioni geometriche e fisiche dell'integrale.

9.1 Alcune integrazioni per sostituzione

Illustriamo, tramite esempi, alcune applicazioni immediate del metodo di integrazione per sostituzione.

Esempio 9.1 (Integrale logaritmico)**.** Sia f una funzione derivabile e diversa da 0 in un certo intervallo I. Allora

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + c \qquad (x \in I). \tag{9.1}$$

La verifica può essere fatta ricordandosi che

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0),$$

e integrando per sostituzione ponendo $y = f(x)$. Ad esempio

$$\int \frac{3x^2 + 22x - 7}{x^3 + 11x^2 - 7x + 5}\, dx = \log|x^3 + 11x^2 - 7x + 5| + c. \qquad \triangleleft$$

Nel calcolo di molti integrali può essere comodo utilizzare il **metodo del completamento del quadrato** Supponiamo di avere il trinomio di secondo grado

$$x^2 + px + q\ ,$$

con $p, q \in \mathbb{R}$, e sia $\Delta = p^2 - 4q$ il suo discriminante. Osserviamo che, aggiungendo e togliendo $p^2/4$, si ha

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} .$$

Se $\Delta = 0$ il trinomio è un quadrato perfetto. Se $\Delta < 0$, il trinomio non ha zeri reali (si dice anche che è **irriducibile**); dalla formula precedente si ottiene che

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = \frac{|\Delta|}{4}\left[\left(\frac{2x + p}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2 + 1\right] \qquad (\text{se } \Delta < 0). \quad (9.2)$$

Ad esempio, se il trinomio in considerazione è $x^2 - 2x + 5$, si ha $\Delta = -16 < 0$ e

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 = 4\left[\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 + 1\right] . \qquad (9.3)$$

L'utilità della formula (9.2) risiede nel fatto che, con una sostituzione del tipo

$$y = \frac{2x + p}{\sqrt{|\Delta|}} \qquad (9.4)$$

il trinomio di secondo grado con $\Delta < 0$ viene ricondotto, a meno di una costante moltiplicativa, a un termine del tipo $y^2 + 1$.

Esempio 9.2. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\, dx .$$

Utilizziamo la formula (9.3) e facciamo il cambiamento di variabili

$$y = \frac{x - 1}{2}, \qquad dy = \frac{1}{2}\, dx \quad (\text{cioè } dx = 2\, dy).$$

Otteniamo che

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}\, dx \overset{\left[\substack{y=(x-1)/2 \\ dy=1/2\, dx}\right]}{=} \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2 + 1}\, 2\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\arctan y + c = \frac{1}{2}\arctan \frac{x - 1}{2} + c.$$

Osserviamo che, per passare dal secondo al terzo integrale, abbiamo sostituito y al posto di $\frac{x-1}{2}$ e $2\, dy$ al posto di dx. Un errore frequente consiste nel sostituire dx con dy senza tenere conto della derivata della sostituzione (che in questo caso vale $1/2$). $\triangleleft$

Quando $\Delta > 0$, il trinomio ammette due radici reali distinte. Col medesimo procedimento di prima si arriva alla formula

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = \frac{\Delta}{4}\left[\left(\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right] \qquad (\text{se } \Delta > 0),$$

che consente di ricondursi, col cambiamento di variabile (9.4), a un termine del tipo $y^2 - 1$ (a meno di una costante moltiplicativa).

Esempio 9.3. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}\, dx\ .$$

In questo caso abbiamo

$$-x^2 - 2x + 3 = -[(x+1)^2 - 4] = 4\left[1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]\ .$$

Col cambiamento di variabili $y = (x+1)/2$, $dx = 2dy$ si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\, dx \overset{\left[\substack{y=(x+1)/2 \\ dx=2\,dy}\right]}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, 2\, dy$$

$$= \arcsin y + c = \arcsin \frac{x+1}{2} + c. \qquad \triangleleft$$

9.2 Integrazione delle funzioni razionali

In questo paragrafo mostreremo, attraverso alcuni esempi, come possono essere integrate le funzioni razionali, cioè il rapporto fra due polinomi. In particolare mostreremo che le primitive di una funzione razionale sono sempre funzioni elementari.

Gli integrali di base da ricordare per poter integrare una funzione razionale sono i seguenti ($n \in \mathbb{N}$):

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c,$$

$$\int \frac{1}{x^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c \quad (n \geq 2),$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x + c, \qquad \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \log(x^2+1) + c.$$

(L'ultimo è un integrale logaritmico, descritto nell'Esempio 9.1.)

Come abbiamo già visto, il primo di questi integrali, insieme alle proprietà (8.14) di linearità dell'integrale, permette di calcolare l'integrale di qualsiasi polinomio. Dal secondo e dal terzo integrale (con la sostituzione $y = x - a$) otteniamo subito che

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + c, \qquad \int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{n-1}{(x-a)^{n-1}} + c \quad (n \geq 2).$$

Dal quarto integrale, usando il metodo di completamento dei quadrati siamo in grado di calcolare gli integrali del tipo

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$

quando il trinomio a denominatore è irriducibile (si veda l'Esempio 9.2). Segnaliamo in particolare il seguente integrale, di uso frequente:

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx \overset{\left[\substack{y=x/a \\ dy=(1/a)\,dx}\right]}{=} \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c \qquad (a \neq 0).} \tag{9.5}$$

Se il trinomio a denominatore è invece un quadrato perfetto ($\Delta = 0$) otteniamo un integrale del tipo

$$\int \frac{1}{(x-a)^2}\,dx = -\frac{1}{x-a} + c$$

che abbiamo già visto. Infine, se $\Delta > 0$, cioè se il trinomio a denominatore ammette due radici reali distinte, abbiamo un integrale del tipo

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx\ ,$$

dove a e b sono gli zeri distinti del trinomio. In tal caso si può usare il **metodo di decomposizione in fratti semplici**. Si scrive cioè

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \tag{9.6}$$

dove A e B sono due costanti da determinare. Facendo il denominatore comune a secondo membro si ha

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)}\ .$$

Di conseguenza, affinché valga (9.6), si deve avere che

$$1 = A(x-b) + B(x-a) \ , \tag{9.7}$$

ovvero

$$1 = (A+B)x - (Ab + Ba) \ .$$

Per il Principio di Identità dei Polinomi, che dice che due polinomi coincidono se e solo se i coefficienti dei termini dello stesso ordine sono uguali, si deve quindi avere che

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{(termini di primo grado, che non compaiono a sinistra)} \\ -(Ab+Ba)=1 & \text{(termini noti).} \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite A e B. Risolvendolo si ottiene

$$A = \frac{1}{a-b} \ , \qquad B = -\frac{1}{a-b} \ ,$$

per cui la (9.6) diviene

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right) \ .$$

Esiste anche un metodo più rapido per calcolare le costanti A e B. Poiché l'uguaglianza (9.7) deve valere *per ogni* valore di x, in particolare deve valere per $x = a$ e per $x = b$. Ponendo $x = a$ in (9.7) il secondo termine a secondo membro si annulla e si ottiene

$$1 = A(a-b),$$

da cui si ricava subito $A = 1/(a-b)$; analogamente, ponendo $x = b$ si ottiene

$$1 = B(b-a)$$

da cui si ricava subito $B = 1/(b-a)$.

Indipendentemente dal metodo utilizzato per calcolare le costanti A e B, si ottiene infine

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx &= \frac{1}{a-b}\left(\log|x-a| - \log|x-b|\right) + c \\ &= \frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + c. \end{aligned}} \tag{9.8}$$

Vediamo ora un altro caso semplice e molto frequente: l'integrale del rapporto fra un polinomio di primo grado e uno di secondo. Si voglia calcolare, ad esempio, il seguente integrale

$$\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}\, dx \; .$$

Osserviamo che il denominatore è un trinomio di secondo grado irriducibile, che possiamo scrivere come $(x+1)^2+1$. Vogliamo innanzitutto "assorbire" il termine in x a numeratore attraverso un integrale logaritmico. La derivata del denominatore è $2x+2$; di conseguenza, se il numeratore fosse $2x+2$, avremmo già concluso utilizzando (9.1). Per isolare il termine $(2x+2)$, il numeratore si può riscrivere come

$$3x+4 = \frac{3}{2}\,(2x+2)+1$$

(a secondo membro si scrive prima il fattore $(2x+2)$ che è quello che si vuol fare comparire, poi si sceglie il coefficiente moltiplicativo $3/2$ in modo da avere gli stessi coefficienti per la x a primo e secondo membro e infine si sceglie la costante additiva 1 in modo da far tornare i conti). L'integrale diviene quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}\, dx &= \int \frac{\frac{3}{2}\,(2x+2)+1}{x^2+2x+2}\, dx \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx \\ &= \frac{3}{2}\log(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)+c.\end{aligned}$$

Nel caso in cui il denominatore fosse un trinomio di secondo grado con $\Delta > 0$ conviene utilizzare direttamente il metodo di decomposizione in fratti semplici; si consideri ad esempio l'integrale

$$\int \frac{3x+7}{x^2-1}\, dx \; .$$

Poiché $x^2-1=(x+1)(x-1)$, il metodo di decomposizione in fratti semplici fornisce

$$\frac{3x+7}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \; .$$

Poiché i numeratori devono coincidere, si ottiene l'uguaglianza fra polinomi

$$3x+7 = A(x+1)+B(x-1) \tag{9.9}$$

ovvero

$$3x+7 = (A+B)x+(A-B).$$

Per il Principio di Identità dei Polinomi deve essere

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ A - B = 7, \end{cases}$$

da cui si ottiene $A = 5$, $B = -2$. Anche in questo caso le costanti A e B possono essere ottenute da (9.9) ponendo prima $x = 1$ (ottenendo $10 = 2A$, cioè $A = 5$) e poi $x = -1$ (ottenendo $4 = -2B$, cioè $B = -2$). Concludiamo dunque che

$$\int \frac{3x+7}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx = 5\log|x-1| - 2\log|x+1| + c.$$

Con quanto discusso finora siamo in grado di calcolare gli integrali di funzioni razionali con denominatore di secondo grado e numeratore di primo. Mediante la **divisione fra polinomi**, che richiameremo fra breve, saremo in grado di calcolare l'integrale di qualsiasi funzione razionale con denominatore di secondo grado. La divisione fra polinomi consiste in questo: dati due polinomi $N(x)$ e $D(x)$ di grado qualsiasi, è possibile determinare due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, detti quoziente e resto della divisione, tali che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \ ,$$

con $R(x)$ che ha grado **minore** rispetto a $D(x)$. Naturalmente, se $N(x)$ ha grado minore rispetto a $D(x)$ si avrà $Q(x) = 0$ (e $R(x) = N(x)$), quindi la divisione è banale. Il caso non banale si ha quando il grado di $N(x)$ è maggiore o uguale a quello di $D(x)$, nel qual caso si ottiene la somma di un polinomio (che sappiamo sempre integrare) e di una funzione razionale con numeratore di grado inferiore al denominatore (se il denominatore ha grado 2, sappiamo integrare anche questa). Ad esempio, è facile verificare, facendo il denominatore comune a secondo membro, che

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 9x + 2}{x^2 + x + 1} = 2x + 3 + \frac{4x - 1}{x^2 + x + 1} \ ; \tag{9.10}$$

in questo caso il quoziente della divisione è $Q(x) = 2x + 3$ mentre il resto è $R(x) = 4x - 1$.

Esiste un algoritmo abbastanza semplice per effettuare la divisione fra polinomi. Illustriamolo considerando l'esempio appena fatto. Si comincia tracciando il seguente schema:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 5x^2 + 9x + 2 \qquad\qquad & x^2 + x + 1 \qquad\qquad \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

Sulla sinistra si scrive in numeratore $N(x)$, mentre sulla destra il denominatore $D(x)$. Si divide ora il termine di grado massimo che c'è a sinistra ($2x^3$) per il termine di grado massimo del denominatore (x^2); il risultato ($2x$) si scrive sotto la riga orizzontale:

$$\begin{array}{l|l}
\boxed{2x^3} + 5x^2 + 9x + 2 & \boxed{x^2} + x + 1 \\ \cline{2-2}
 & 2x \\
 &
\end{array}$$

Adesso si moltiplica il risultato $2x$ per il denominatore $D(x) = x^2 + x + 1$ e si scrive il risultato sulla sinistra sotto il numeratore, incolonnando i termini dello stesso grado:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 + 5x^2 + 9x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
2x^3 + 2x^2 + 2x & 2x \\
 &
\end{array}$$

A questo punto, sulla sinistra si traccia una linea orizzontale sotto i due polinomi e si sottrae il secondo polinomio dal primo:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 5x^2 + 9x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
2x^3 + 2x^2 + 2x \phantom{{}+2} & 2x \\ \cline{1-1}
3x^2 + 7x + 2 &
\end{array}$$

Ora si ripete lo stesso procedimento prendendo in considerazione, a sinistra, il polinomio appena ottenuto ($3x^2 + 7x + 2$): si divide il termine di grado massimo $3x^2$ per il termine di grado massimo x^2 del denominatore, si aggiunge il risultato (3) al termine $2x$ ottenuto al primo passaggio, si moltiplica 3 per il denominatore e si scrive il risultato sulla colonna di sinistra, e si sottrae nuovamente:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 5x^2 + 9x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
2x^3 + 2x^2 + 2x \phantom{{}+2} & 2x + 3 \text{ (quoziente)} \\ \cline{1-1}
3x^2 + 7x + 2 & \\
3x^2 + 3x + 3 & \\ \cline{1-1}
4x - 1 \text{ (resto)} &
\end{array}$$

Il procedimento adesso si interrompe, in quanto il polinomio ottenuto ($4x - 1$) è di grado minore rispetto al denominatore. Il polinomio rimasto a sinistra è il resto della divisione ($R(x) = 4x - 1$), mentre quello ottenuto a destra è il quoziente della divisione ($Q(x) = 2x + 3$).

Esempio 9.4. Calcoliamo l'integrale della funzione razionale che compare a sinistra in (9.10). Dopo aver effettuato la divisione fra polinomi si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+5x^2+9x+2}{x^2+x+1}\,dx &= \int \left(2x+3+\frac{4x-1}{x^2+x+1}\right) dx \\ &= x^2+3x+\int \frac{2(2x+1)-3}{x^2+x+1}\,dx \\ &= x^2+3x+2\log(x^2+x+1)-3\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\ .\end{aligned}$$

L'ultimo integrale può ora calcolare col metodo del completamento del quadrato e la formula (9.5):

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c\ .$$

Il risultato finale è quindi

$$\int \frac{2x^3+5x^2+9x+2}{x^2+x+1}dx = x^2+3x+2\log(x^2+x+1)-2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Esempio 9.5. In molti casi la divisione fra polinomi può essere effettuata senza ricorrere all'algoritmo descritto sopra. Ad esempio, se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado allora il quoziente è il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo e il resto può essere calcolato come nel seguente esempio:

$$\frac{3x^2+7x-5}{x^2+x+1} \overset{[Q(x)=3]}{=} \frac{3(x^2+x+1)+4x-8}{x^2+x+1} = 3+\frac{4x-8}{x^2+x+1}\ .$$

Nel primo passaggio, abbiamo dapprima calcolato il quoziente $Q(x)=3$ come rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo; a questo punto, a numeratore scriviamo tale quoziente moltiplicato per il denominatore, poi aggiungiamo i termini necessari per "far tornare i conti". Infine si divide membro a membro: dalla prima parte si ottiene il quoziente, poi rimane il rapporto fra il resto e il denominatore. ◁

Discutiamo ora qualche esempio più complesso di integrazione di funzioni razionali. Per quanto appena detto, grazie alla divisione fra polinomi possiamo sempre supporre di esserci ridotti al caso in cui il numeratore $N(x)$ sia di grado inferiore rispetto a quello del denominatore $D(x)$. Il metodo generale consiste nello scomporre il denominatore $D(x)$ come prodotto di fattori *irriducibili* (cioè non ulteriormente scomponibili). Come conseguenza del Teorema fondamentale dell'algebra (si veda il Teorema 2.47 a pag. 103), un polinomio reale può sempre essere scomposto come prodotto di fattori di primo grado oppure di secondo grado irriducibili (cioè con $\Delta < 0$), eventualmente ripetuti; questo significa, ad esempio, che uno stesso fattore può comparire più di una volta, come in $(x-1)^3(x^2+x+1)^2$. Purtroppo questa fattorizzazione può essere, in pratica, molto difficile se non impossibile da ottenere esplicitamente. Nei discorsi che seguono supporremo comunque di essere riusciti a fattorizzare completamente il denominatore $D(x)$.

Analizziamo, con l'ausilio di esempi, alcuni dei casi che possono capitare.

Caso 1: Il denominatore $D(x)$ è il prodotto di un certo numero di fattori del primo ordine **tutti distinti**, cioè

$$D(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

dove $a_1, \ldots, a_n$ sono delle costanti numeriche tutte diverse (gli zeri del polinomio $D(x)$). In questo caso è sempre possibile trovare una decomposizione in fratti semplici del tipo

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}\ , \tag{9.11}$$

dove $A_1, \ldots, A_n$ sono opportune costanti. (Ricordiamo che stiamo sempre assumendo che il grado di $N(x)$ sia inferiore rispetto a quello di $D(x)$.) Le costanti $A_1, \ldots, A_n$ possono essere determinate in modo analogo a quanto già visto nel caso in cui $D(x)$ è il prodotto di due soli fattori. Osserviamo che, se si fa il denominatore comune a secondo membro e si utilizza il Principio di Identità dei Polinomi, si ottiene un sistema lineare di n equazioni nelle n incognite $A_1, \ldots, A_n$ che può richiedere molto tempo per essere risolto. Un metodo più rapido, utilizzabile *solo* in questo caso (fattori di primo grado tutti distinti), è il **metodo di copertura di Heaviside**, che illustriamo con un esempio.

Esempio 9.6. Si vogliano calcolare i coefficienti A, B, C della scomposizione

$$\frac{x^2+2x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\ . \tag{9.12}$$

Se moltiplichiamo per $(x-1)$ ambo i membri di (9.12), otteniamo l'uguaglianza

$$\frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}\ .$$

Se adesso, in questa uguaglianza, poniamo $x=1$, le frazioni contenenti le costanti B e C a secondo membro si annullano e rimane solo un'equazione per A:

$$\frac{1^2+2\cdot 1+7}{(1-2)(1-3)} = A,$$

cioè $A = 5$. Analogamente, moltiplicando (9.12) per $(x-2)$ e ponendo poi $x = 2$, si ottiene un'equazione per B, da cui si ricava $B = -15$. Infine, moltiplicando (9.12) per $(x-3)$ e ponendo poi $x = 3$, si ottiene un'equazione per C, da cui si ricava $C = 11$.
Questo procedimento per il calcolo delle costanti può essere ulteriormente semplificato. Ritorniamo al calcolo di A, che è la costante che sta a numeratore della frazione con $(x-1)$ a denominatore. Consideriamo la funzione razionale di partenza e "copriamo" il fattore $(x-1)$ a denominatore (da qui il nome del metodo):

$$\frac{x^2+2x+7}{\boxed{\cancel{(x-1)}}\,(x-2)(x-3)}\,.$$

L'espressione rimanente viene adesso calcolata per $x = 1$:

$$\frac{x^2+2x+7}{\boxed{\cancel{(x-1)}}\,(x-2)(x-3)} \quad \overset{[x=1]}{\Longrightarrow} \quad \frac{1^2+2\cdot 1+7}{(1-2)(1-3)} = 5 = A,$$

e il risultato fornisce il valore di A. Analogamente, per calcolare B, che è il numeratore della frazione avente per denominatore $(x-2)$, si "copre" il fattore $(x-2)$ e si calcola il risultato per $x = 2$:

$$\frac{x^2+2x+7}{(x-1)\,\boxed{\cancel{(x-2)}}\,(x-3)} \quad \overset{[x=2]}{\Longrightarrow} \quad \frac{2^2+2\cdot 2+7}{(2-1)(2-3)} = -15 = B.$$

Infine, per calcolare C si "copre" il fattore $(x-3)$ e si calcola il risultato per $x = 3$:

$$\frac{x^2+2x+7}{(x-1)(x-2)\,\boxed{\cancel{(x-3)}}} \quad \overset{[x=3]}{\Longrightarrow} \quad \frac{3^2+2\cdot 3+7}{(3-1)(3-2)} = 11 = C.$$

Siamo ora in grado di calcolare l'integrale della funzione razionale di partenza:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx &= \int \left[\frac{5}{x-1} - \frac{15}{x-2} + \frac{11}{x-3}\right] dx \\ &= 5\log|x-1| - 15\log|x-2| + 11\log|x-3| + c. \qquad \triangleleft\end{aligned}$$

Nel caso generale (9.11), i coefficienti $A_1, \ldots, A_n$ si calcolano esattamente allo stesso modo:

$$\frac{N(x)}{\boxed{\cancel{(x-a_1)}}\,(x-a_2)\cdots(x-a_n)} \quad \overset{[x=a_1]}{\Longrightarrow} \quad \frac{N(a_1)}{(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)} = A_1,$$

$$\frac{N(x)}{(x-a_1)\,\boxed{\cancel{(x-a_2)}}\,\cdots(x-a_n)} \quad \overset{[x=a_2]}{\Longrightarrow} \quad \frac{N(a_2)}{(a_2-a_1)\cdots(a_2-a_n)} = A_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{N(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\,\boxed{\cancel{(x-a_n)}}} \quad \overset{[x=a_n]}{\Longrightarrow} \quad \frac{N(a_n)}{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})} = A_n.$$

Caso 2: Il denominatore contiene dei fattori di primo grado elevati a una potenza $m > 1$. In tal caso, se ad esempio $D(x) = (x-a)^m$, nella decomposizione in fratti semplici devono comparire m frazioni, ciascuna con una costante a numeratore e un termine del tipo $(x-a)^k$ a denominatore, con k che varia da 1 a m.

Esempio 9.7. Decomponiamo in fratti semplici la funzione razionale

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^3}$$

e calcoliamone l'integrale. (Prima di effettuare la decomposizione, ricordarsi sempre di controllare che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore, altrimenti occorre effettuare prima la divisione fra polinomi.) Per quanto detto sopra, la decomposizione deve essere del tipo

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \ ,$$

con A, B, C costanti da calcolare. Possiamo procedere col metodo generale, che consiste nel passare a denominatore comune a secondo membro e usare poi il Principio di Identità di Polinomi. Ricordiamo che, in questo caso, **non** si può usare il metodo di copertura di Heaviside; esistono dei metodi simili, che preferiamo non esporre per evitare di fornire un elenco troppo lungo di "ricette" per il calcolo dei coefficienti. Facciamo dunque il denominatore comune

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

e uguagliamo i numeratori:

$$x^2 + 3x + 5 = Ax^2 + (-2A + B)x + (A - B + C) \ .$$

Per il Principio di Identità di Polinomi, questa identità fra polinomi è valida se e solo se le costanti A, B e C sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A + B = 3, \\ A - B + C = 5, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = 5, \\ C = 9. \end{cases}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^3}\, dx &= \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{9}{(x-1)^3} \right] dx \\ &= \log|x-1| - \frac{5}{x-1} - \frac{9}{2(x-1)^2} + c \ . \end{aligned}$$ $\triangleleft$

Caso 3: Il denominatore contiene dei fattori di secondo grado irriducibili elevati a una potenza $m > 1$. In tal caso, se ad esempio $D(x) = (x^2 + px + q)^m$ (con $\Delta = p^2 - 4q < 0$), nella decomposizione in fratti semplici devono comparire m frazioni, ciascuna con un polinomio di primo grado del tipo $Ax+B$ a numeratore e un termine del tipo $(x^2+px+q)^k$ a denominatore, con k che varia da 1 a m.

Esempio 9.8. Decomponiamo in fratti semplici la funzione razionale

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} .$$

Osserviamo che il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore e che il polinomio di secondo grado che compare a denominatore è irriducibile. Per quanto detto sopra, la decomposizione in fratti semplici sarà del tipo:

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} .$$

Compaiono quindi quattro costanti arbitrarie da determinare (in generale il numero di costanti arbitrarie è uguale al grado del denominatore). Procediamo col metodo generale utilizzato anche nel precedente esercizio: facciamo il denominatore comune

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

e uguagliamo i polinomi a numeratore:

$$x^2+3 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D) .$$

Uguagliamo i coefficienti dei termini aventi lo stesso grado e risolviamo il sistema così ottenuto:

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = 1, \\ A+C = 0, \\ B+D = 3, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = 1, \\ C = 0, \\ D = 2. \end{cases}$$

La decomposizione cercata è quindi

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2} . \tag{9.13}$$

Nella decomposizione (9.13) compare una funzione del tipo $1/(x^2+1)^2$, della quale non abbiamo ancora calcolato le primitive. In generale, un integrale del tipo

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

può essere ricondotto, quando $n \geq 2$, all'integrale $I_{n-1}(x)$ attraverso la formula di riduzione

$$I_n(x) = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\, I_{n-1}(x) \tag{9.14}$$

(si veda il Paragrafo 9.5 per la dimostrazione). Dal momento che $I_1(x) = \arctan x$, mediante questa formula di riduzione siamo in grado di calcolare $I_n(x)$ per qualsiasi valore di $n \in \mathbb{N}^+$. Ad esempio, per $n = 2$,

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\arctan x}{2} + c\,.} \tag{9.15}$$

Esempio 9.9. Si calcoli

$$\int \frac{x^2+3}{(x^2+1)^2}\, dx\ .$$

Utilizzando la decomposizione in fratti semplici calcolata nell'Esempio 9.8 e l'integrale (9.15) si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+3}{(x^2+1)^2}\, dx &= \int \left[\frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2}\right] dx \\
&= \arctan x + 2\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\arctan x}{2}\right] + c \\
&= 2\arctan x + \frac{x}{x^2+1} + c\ .
\end{aligned}$$

◁

Caso generale: la decomposizione in fratti semplici si ottiene utilizzando i metodi sopra esposti in corrispondenza di ogni fattore distinto del denominatore (elevato eventualmente a una potenza maggiore di 1).

Esempio 9.10. Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{3x^5+2x^4+2x^2-7x+8}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx\ .$$

Osserviamo che il numeratore della funzione razionale integranda è di grado 5, mentre il denominatore è di grado 6. Possiamo quindi procedere direttamente con la decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{3x^5+2x^4+2x^2-7x+8}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\ .$$

Facciamo il denominatore comune a secondo membro e uguagliamo i polinomi a numeratore:

$$\begin{aligned}3x^5 + 2x^4 + 2x^2 - 7x + 8 =& A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 \\ &+ (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2.\end{aligned}$$

Con un po' di pazienza, sviluppando i termini a secondo membro e uguagliando infine i coefficienti dei termini dello stesso ordine si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A + C = 3, \\ -A + B - 2C + D = 2, \\ 2A + 2C - 2D + E = 0, \\ -2A + 2B - 2C + 2D - 2E + F = 2, \\ A + C - 2D + E - 2F = -7, \\ -A + B + D + F = 8, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = 2, \\ C = 2, \\ D = 5, \\ E = 4, \\ F = 2. \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema si può procedere come segue: sommando tutte le equazioni si ottiene $4B = 8$, cioè $B = 2$, valore che può essere sostituito nelle equazioni. Sommando adesso la prima, la terza, la quinta e due volte la quarta si ottiene $-2E = -8$, cioè $E = 4$, che poi sostituiamo nelle equazioni. Sommando due volte la seconda e la terza si ha $-2C = -4$, cioè $C = 2$. Dalla prima si ricava poi $A = 3 - C = 1$, dalla seconda $D = A + 2C = 5$, e dalla sesta $F = 6 + A - D = 2$.

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} I(x) =& \int \frac{3x^5 + 2x^4 + 2x^2 - 7x + 8}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx \\ &+ \int \frac{2x+5}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4x+2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ =& \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + \log(x^2+1) 5 \arctan x - \frac{2}{x^2+1} + \\ &+ \frac{x}{x^2+1} + \arctan x + c \\ =& \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + \log(x^2+1) + 6\arctan x + \frac{x-2}{x^2+1} + c\,. \end{aligned}$$ ◁

9.3 Integrazione delle funzioni trigonometriche

In questo paragrafo mostreremo, attraverso esempi concreti, alcuni metodi di integrazione per funzioni trigonometriche.

Esempio 9.11. Le primitive della funzione $\tan x$ possono essere calcolate con la sostituzione $y = \cos x$, $dy = -\sin x\,dx$ (o anche utilizzando l'integrale logaritmico dell'Esempio 9.1):

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx \overset{\left[\substack{y=\cos x\\ dy=-\sin x\,dx}\right]}{=} -\int \frac{1}{y}\,dy = -\log|y| + c\\ &= -\log|\cos x| + c.\end{aligned}$$

Nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, dove $\cos x > 0$, possiamo anche scrivere

$$\int \tan x\,dx = -\log(\cos x) + c. \qquad \triangleleft$$

Esempio 9.12. Calcoliamo le primitive di un prodotto di potenze di funzioni $\sin x$ e $\cos x$:

$$\int (\sin x)^n (\cos x)^m\,dx\,, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che n e m possono anche essere nulli, nel qual caso si ha un integrale contenente solo potenze di $\sin x$ o di $\cos x$. Conviene distinguere i seguenti casi:

Caso 1. Almeno uno dei due esponenti n, m è dispari. Supponiamo, ad esempio, che l'esponente di $\sin x$ sia dispari (e quello di $\cos x$ qualsiasi). Teniamo un fattore $\sin x$ a parte e trasformiamo tutti gli altri fattori $\sin x$ (che a questo punto sono in numero pari) in $\cos x$ utilizzando la relazione $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Ad esempio:

$$\begin{aligned}&\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x),\\ &\sin^5 x = \sin x(\sin^2 x)^2 = \sin x(1 - \cos^2 x)^2 = \sin x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x).\end{aligned}$$

A questo punto, moltiplicando quanto ottenuto per il fattore $\cos^m x$ già presente nell'integrale, otteniamo una somma di integrali del tipo

$$\int \sin x \cos^k x\,dx \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

che si risolvono facilmente con una sostituzione del tipo $y = \cos x$, $dy = -\sin x\,dx$. In maniera analoga si può trattare il caso in cui l'esponente m di $\cos x$ sia dispari. Chiariamo il procedimento con alcuni esempi:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin x(1 - \cos^2 x)dx \overset{\left[\substack{y=\cos x\\ dy=-\sin x\,dx}\right]}{=} -\int (1 - y^2)dy\\ &= -y + \frac{y^3}{3} + c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \overset{\left[\substack{y=\sin x \\ dy=\cos x\,dx}\right]}{=} \\ &= \int y^2 (1 - y^2) \, dy = \int (y^2 - y^4) \, dy \\ &= \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c.\end{aligned}$$

Caso 2. Entrambi gli esponenti n, m sono pari. In questo caso si possono utilizzare le formule trigonometriche:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

che permettono di abbassare il grado degli esponenti. Vediamo anche in questo caso alcuni esempi:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \overset{\left[\substack{y=2x \\ dy=2\,dx}\right]}{=} \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos y}{4} \right) dy \\ &= \frac{y}{4} - \frac{\sin y}{4} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c.\end{aligned} \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx \overset{\left[\substack{y=2x \\ dy=2\,dx}\right]}{=} \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos y}{4} \right) dy \\ &= \frac{y}{4} + \frac{\sin y}{4} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c.\end{aligned} \tag{9.17}$$

(Naturalmente, se è noto $\int \sin^2 x \, dx$, basta osservare che $\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \, dx$.)

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx \\ &= \int \frac{1 - \cos^2(2x)}{4} \, dx \overset{\left[\substack{y=2x \\ dy=2\,dx}\right]}{=} \int \left(\frac{1}{8} - \frac{\cos^2 y}{8} \right) dy \\ &= \frac{y}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} \right) + c = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + c.\end{aligned}$$

(Nel penultimo passaggio abbiamo utilizzato l'integrale di $\cos^2 y$ calcolato in precedenza.) $\triangleleft$

Esempio 9.13. Le primitive di $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$, che abbiamo determinato rispettivamente in (9.16) e (9.17), possono essere calcolate anche con un altro metodo. Indichiamo con $I(x) = \int \sin^2 x\, dx$. Integrando per parti e sfruttando l'identità $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ si ha che:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sin x \sin x\, dx \overset{\left[\substack{(\sin x)'=\cos x \\ \int \sin x\, dx = -\cos x}\right]}{=} -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx = -\sin x \cos x + x - I(x)\ . \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto l'identità

$$I(x) = -\sin x \cos x + x - I(x)\ ,$$

da cui si ricava $I(x) = (-\sin x \cos x + x)/2$, cioè

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c\ .$$

Tenendo conto dell'identità $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, questa espressione coincide con quella già trovata in (9.16). In maniera analoga è possibile calcolare le primitive di $\cos^2 x$. ◁

Esempio 9.14. Calcoliamo

$$\int \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}\, dx.$$

Ricordando che $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, è senz'altro conveniente fare la sostituzione

$$y = \tan x, \qquad dy = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx,$$

ottenendo

$$\int \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}\, dx \overset{\left[\substack{y=\tan x \\ dy = 1/\cos^2 x\ dx}\right]}{=} \int y^4\, dy = \frac{y^5}{5} + c = \frac{\tan^5 x}{5} + c.$$ ◁

Esempio 9.15 (Formule parametriche)**.** Alcuni integrali in seno e coseno possono essere risolti utilizzando la sostituzione

$$y = \tan \frac{x}{2}\ .$$

Con questa sostituzione, si ha che

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}\ , \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}\ , \quad \tan x = \frac{2y}{1-y^2}$$

(si veda il Paragrafo 2.9.2). Inoltre, essendo $x = 2 \arctan y$ si ha

$$dx = \frac{2}{1+y^2}\, dy.$$

Ad esempio

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\, dx &\overset{\left[\substack{y=\tan(x/2)\\ dx=2/(1+y^2)\, dy}\right]}{=} \int \frac{1+y^2}{2y} \cdot \frac{2}{1+y^2}\, dy \\ &= \log|y| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c \\ &= \log\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + c\ .\end{aligned}$$

◁

Esempio 9.16. Utilizzando le formule parametriche descritte nell'esempio precedente, calcoliamo le primitive della funzione $1/\cos x$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\, dx &\overset{\left[\substack{y=\tan(x/2)\\ dx=2/(1+y^2)\, dy}\right]}{=} \int \frac{1+y^2}{1-y^2} \cdot \frac{2}{1+y^2}\, dy = \int \frac{2}{1-y^2}\, dy \\ &\overset{(9.8)}{=} \log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + c\ .\end{aligned}$$

Per ritornare alla variabile x, è opportuno osservare che

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{(1+y)^2}{1-y^2} = \frac{1+y^2}{1-y^2} + \frac{2y}{1-y^2} = \frac{1}{\cos x} + \tan x\ .$$

Otteniamo quindi che

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \log\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c\ . \tag{9.18}$$

9.4 Integrazione di funzioni irrazionali

In questo paragrafo ci occuperemo della ricerca delle primitive di alcune funzioni irrazionali. In particolare vedremo come si possono utilizzare alcune sostituzioni trigonometriche per il calcolo degli integrali. Abbiamo già incontrato un integrale di una funzione irrazionale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c\ .$$

Con la sostituzione $y = x/a$ si ottiene anche

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + c \qquad (a>0)\, .}$$

Col metodo del completamento del quadrato possiamo più in generale calcolare integrali del tipo

$$\int \frac{1}{\sqrt{-(x^2+px+q)}}\,dx$$

quando il trinomio che compare sotto radice ha $\Delta > 0$ (cfr. Esempio 9.3).

In generale, negli integrali contenenti $\sqrt{a^2-x^2}$ (con $a > 0$) può essere conveniente operare una sostituzione del tipo

$$x = a\sin y, \qquad dx = a\cos y, \qquad y = \arcsin\frac{x}{a}\ , \tag{9.19}$$

in maniera tale che

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 y} = a\cos y.$$

(In questo tipo di sostituzione si considera $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, quindi $\cos y \geq 0$.)

Esempio 9.17. Calcoliamo l'integrale

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a > 0).$$

Con la sostituzione $x = a\sin y$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &\overset{\left[\substack{x=a\sin y\\ dx=a\cos y\,dy}\right]}{=} \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 y}\cdot a\cos y\,dy = a^2\int \cos^2 y\,dy\\ &\overset{(9.17)}{=} a^2\left[\frac{y}{2}+\frac{\sin(2y)}{4}\right]+c\ .\end{aligned}$$

Per ritornare alla variabile x conviene osservare che

$$\sin(2y) = 2\sin y\cos y = 2\sin y\sqrt{1-\sin^2 y} = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\ .$$

Si ottiene quindi

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c\,.} \tag{9.20}$$

Vediamo ora come si possono trattare alcuni integrali contenenti il termine $\sqrt{a^2+x^2}$ (con $a > 0$). In questo caso può essere conveniente fare la sostituzione

$$x = a\tan y, \qquad dx = \frac{a}{\cos^2 y}\,dy, \qquad y = \arctan\frac{x}{a}\ ,$$

in maniera tale che

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 y} = \frac{a}{\cos y}\ .$$

Esempio 9.18. Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx \qquad (a>0). \tag{9.21}$$

Con la sostituzione $x = a\tan y$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx &\overset{\left[\substack{x=a\tan y\\ dx=a/\cos^2 y\,dy}\right]}{=} \int \frac{\cos y}{a}\cdot\frac{a}{\cos^2 y}\,dy = \int \frac{1}{\cos y}\,dy\\ &\overset{(9.18)}{=} \log\left|\frac{1}{\cos y}+\tan y\right| + c\\ &= \log\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right| + c = \log\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right) + c_1\ .\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio ci sono due particolari da notare: abbiamo eliminato il valore assoluto dall'argomento del logaritmo (poiché è sempre positivo) e abbiamo eliminato dal medesimo argomento il termine a a denominatore; questo è possibile in quanto $\log[f(x)/a] = \log f(x) - \log a$ (se $f(x)$ e a sono positivi) e la costante $-\log a$ è stata inglobata nella costante arbitraria c_1. $\triangleleft$

Esempio 9.19. Calcoliamo l'integrale

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx \qquad (a>0).$$

Con la sostituzione $x = a\tan y$ si otterrebbe

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &\overset{\left[\substack{x=a\tan y\\ dx=a/\cos^2 y\,dy}\right]}{=} \int \frac{a}{\cos y}\cdot\frac{a}{\cos^2 y}\,dy = \int \frac{a^2}{\cos^4 y}\,\cos y\,dy\\ &= \int \frac{a^2}{(1-\sin^2 y)^2}\,\cos y\,dy \overset{\left[\substack{z=\sin y\\ dz=\cos y\,dy}\right]}{=} \int \frac{a^2}{(z^2-1)^2}\,dz\end{aligned}$$

e l'integrale verrebbe ricondotto all'integrazione di una funzione razionale. Il calcolo dell'integrale effettuato con questo metodo risulta dunque piuttosto laborioso. Avendo però già calcolato l'integrale (9.21) possiamo seguire una strada alternativa più breve:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &\overset{\left[\substack{(\sqrt{a^2+x^2})'=x/\sqrt{a^2+x^2}\\ \int 1\,dx=x}\right]}{=} x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\,.\end{aligned}$$

Da quest'ultima identità si ricava subito

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &= \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx \\ &= \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right) + c\ .\end{aligned} \tag{9.22}$$

9.5 Alcune formule di riduzione

1) Posto

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

dimostriamo la formula di riduzione (9.14):

$$I_n(x) = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\, I_{n-1}(x) \qquad (n \geq 2)\ .$$

Cominciamo a suddividere l'integrale nel seguente modo:

$$\begin{aligned}I_n(x) &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx \\ &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx\ .\end{aligned} \tag{9.23}$$

Il primo integrale ottenuto è $I_{n-1}(x)$. Rimane da calcolare il secondo integrale. Procediamo con una integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx &= \frac{1}{2}\int x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx \overset{\left[\overset{(x)'=1}{\int \frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}}\right]}{=} \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\, I_{n-1}(x)\ .\end{aligned}$$

Inserendo questo integrale in (9.23) si ottiene subito la formula di riduzione.

2) Posto

$$I_n(x) = \int (\sin x)^n\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

dimostriamo che, per ogni $n \geq 2$,

$$I_n(x) = -\frac{\cos x(\sin x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}(x)\ . \tag{9.24}$$

Infatti, integrando per parti si ha che

$$
\begin{aligned}
I_n(x) &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx \overset{\left[\substack{[(\sin x)^{n-1}]' = (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x \\ \int \sin x\, dx = -\cos x}\right]}{=} \\
&= -\cos x (\sin x)^{n-1} + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx \overset{[\cos^2 x = 1 - \sin^2 x]}{=} \\
&= -\cos x (\sin x)^{n-1} + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \, dx - (n-1) \int (\sin x)^n \, dx \\
&= -\cos x (\sin x)^{n-1} + (n-1) I_{n-2}(x) - (n-1) I_n(x) \ .
\end{aligned}
$$

Si può ora ricavare $I_n(x)$ da questa identità, ottenendo così la (9.24).

9.6 Applicazioni del calcolo integrale

In questo paragrafo illustreremo dapprima il **metodo degli elementi infinitesimi**, che verrà poi applicato al calcolo di alcune quantità geometriche.

Ricordiamo che, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora il suo integrale può essere approssimato attraverso le somme di Cauchy–Riemann. Usando le notazioni dell'Approfondimento 8.13, data una successione (P_j) di partizioni, $P_j = \{x_0^j, x_1^j, \ldots, x_{n_j}^j\}$ di ampiezza $\Delta(P_j)$ infinitesima, sappiamo che

$$\lim_{j \to +\infty} \sum_{k=1}^{n_j} f(x_k^j)\,(x_k^j - x_{k-1}^j) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Quest'ultimo passaggio al limite equivale a considerare rettangoli di base "infinitesima": ovviamente questo è solo un modo di dire, in quanto la base di un rettangolo è sempre finita (ha cioè una lunghezza positiva), ma quando si parla di base "infinitesima" si intende dire che poi si farà (dopo aver effettuato tutti i calcoli) un passaggio al limite in cui la lunghezza di questa base tenderà a zero.

Supponiamo per semplicità che la funzione f sia positiva, in modo tale che il suo integrale possa essere interpretato come l'area A della regione di piano compresa fra il suo grafico e l'asse x. Supponiamo di aver suddiviso l'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli di uguale ampiezza $dx = (b-a)/n$. Consideriamo uno di questi sottointervalli, che indichiamo con $[x, x+dx]$ (ricordiamo che dx è la lunghezza della base). A questo sottointervallo associamo un rettangolino di altezza $f(x)$; dal momento che la variazione di x è molto piccola e la funzione f è continua, commettiamo solo un errore trascurabile se pensiamo che l'area di questo rettangolino coincida con l'area della regione di piano compresa fra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette verticali passanti per i punti di ascissa x e $x + dx$ (si veda la Figura 9.1). Poiché questo rettangolo ha altezza $f(x)$ e base dx, la sua area vale

$$dA = f(x)\, dx \ .$$

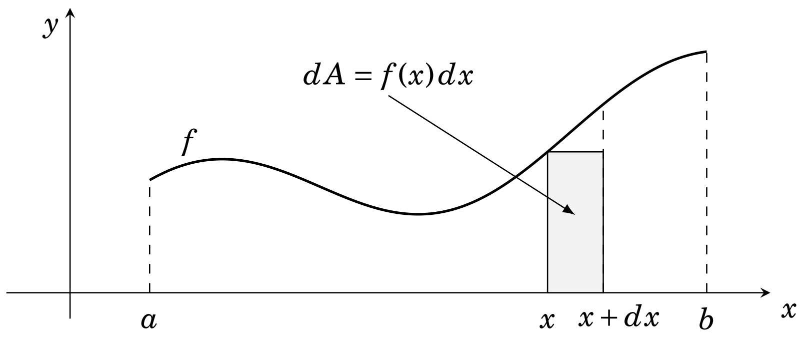


Figura 9.1: Elemento infinitesimo d'area

La quantità dA è anche detta **elemento infinitesimo d'area** (o semplicemente "elemento d'area"). Per ottenere l'area A dobbiamo adesso sommare le aree di tutti i rettangolini e poi passare al limite per il numero dei rettangolini che tende a infinito. Questo procedimento equivale a integrare l'elemento infinitesimo di area per x che varia fra a e b:

$$A = \int dA = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Il primo integrale, $\int dA$, ha il significato di "somma di tutti gli elementi infinitesimi d'area".

Questo tipo di ragionamento, basato sugli "elementi infinitesimi", permette di giustificare, anche se non in maniera rigorosa, l'uso degli integrali nel calcolo di alcune quantità geometriche o grandezze fisiche, come illustrato nei paragrafi che seguono.

9.6.1 Volume di un solido di rotazione

Consideriamo una funzione continua e positiva $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia S la regione di piano compresa fra il grafico di f e l'asse x.

Facciamo ora ruotare la regione S di un angolo giro attorno all'asse x; questa rotazione genera un solido, detto **solido di rotazione** (si veda la Figura 9.2), per il quale il calcolo del volume (e vedremo poi anche dell'area superficiale) è abbastanza semplice.

Applichiamo il metodo degli elementi infinitesimi. Calcoliamo l'**elemento infinitesimo di volume**, cioè il volume del solido generato dalla rotazione di

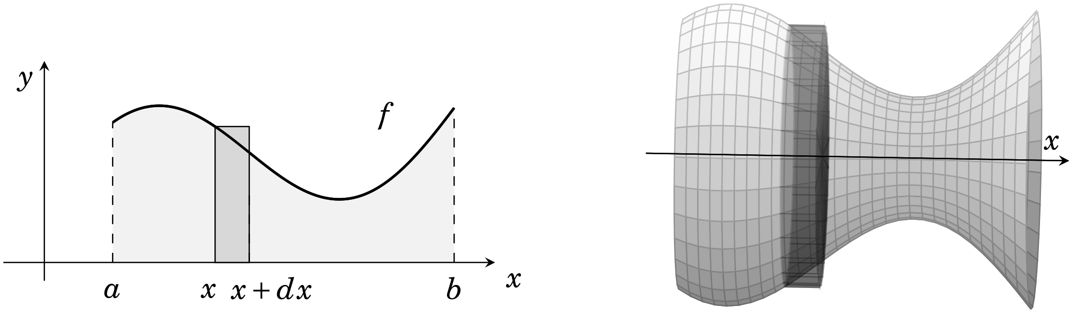


Figura 9.2: Solido di rotazione

un rettangolino avente per base il segmento $[x, x + dx]$ e per altezza $f(x)$. Tale solido è un cilindro avente per base un cerchio di raggio $f(x)$ e per altezza dx; il suo volume (area di base per altezza) sarà quindi

$$dV = \pi f(x)^2 \, dx \ .$$

Il volume totale del solido di rotazione sarà dunque dato da

Volume di un solido di rotazione

$$V = \int dV = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \ . \tag{9.25}$$

Esempio 9.20. Vogliamo calcolare, facendo uso della formula (9.25), il volume di un cono avente raggio di base r e altezza h.

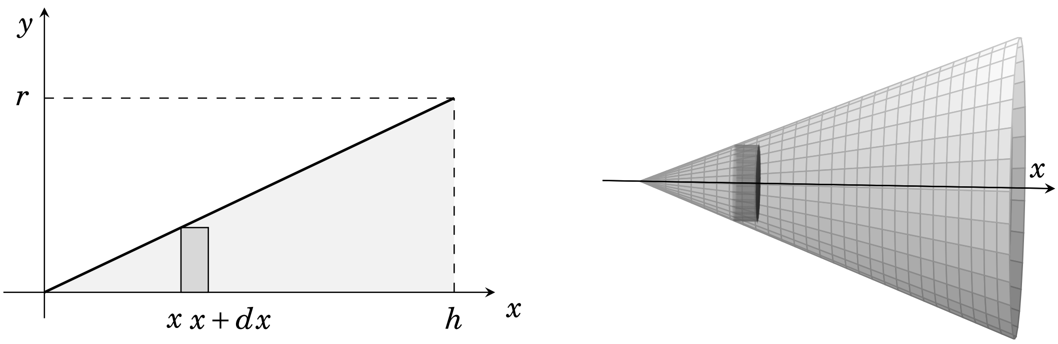


Figura 9.3: Volume di un cono

Un cono di questo tipo viene generato, ad esempio, dalla rotazione della regione sotto il grafico della funzione

$$y = \frac{r}{h} \, x, \qquad x \in [0, h]$$

(si veda la Figura 9.3). Applicando la formula (9.25) abbiamo che

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}\, x^2\, dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\, \pi r^2 h \ .$$

Abbiamo ottenuto quindi un risultato noto già a Democrito (e che abbiamo già utilizzato nell'Esempio 5.27 a pag. 262): il volume di un cono è un terzo del volume di un cilindro avente la stessa base e altezza. ◁

9.6.2 Lunghezza di un arco di curva

Consideriamo una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata continua. Vogliamo calcolare la lunghezza dell'arco di curva rappresentato dal grafico della funzione f (il linguaggio è matematicamente impreciso, ma la definizione corretta di curva e arco di curva esula dagli scopi di questo paragrafo).

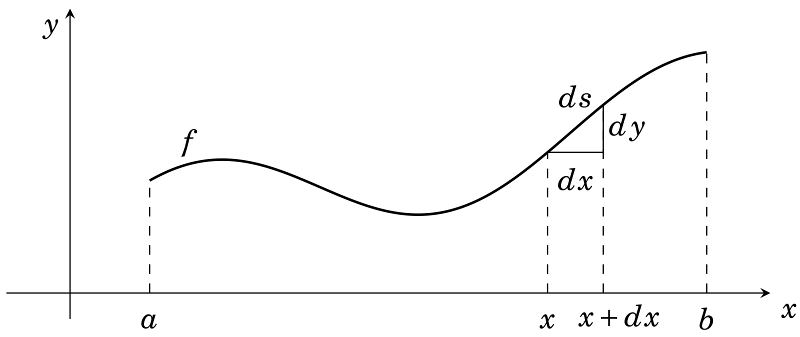


Figura 9.4: Lunghezza di un grafico

Utilizziamo, anche in questo caso, il metodo degli elementi infinitesimi. Consideriamo quindi un intervallino $[x, x+dx]$ sull'asse delle ascisse; a tale intervallino corrisponde un piccolo arco di curva, che in prima approssimazione possiamo pensare come un segmento. Questo segmento può essere visto come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente cateti di lunghezza dx e

$$dy = f(x+dx) - f(x) \ ,$$

e ha quindi lunghezza

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ .$$

Dalla definizione di derivata (si veda in particolare la formula (5.4) a pag. 251) segue che commettiamo un errore trascurabile se sostituiamo dy con $f'(x)\,dx$. Fatta questa sostituzione, otteniamo che l'elemento infinitesimo di lunghezza d'arco è

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + f'(x)^2 (dx)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx \ , \tag{9.26}$$

per cui la lunghezza dell'arco in questione è

Lunghezza di un grafico

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\ . \tag{9.27}$$

Osservazione 9.21. La dimostrazione della formula (9.27), non essendo rigorosa, non evidenzia il motivo per cui è stato richiesto che la funzione f abbia anche derivata continua. Tale ipotesi è indispensabile per formalizzare il fatto che valga la (9.27) una volta stabilito che l'elemento infinitesimo di lunghezza è dato da (9.26). ◁

Esempio 9.22. Vogliamo calcolare la lunghezza dell'arco della parabola $y = x^2$ compreso fra i punti $(0, 0)$ e $(2, 4)$. Usando la formula (9.27) otteniamo

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx \overset{\left[\substack{y=2x\\ dy=2\,dx}\right]}{=} \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{1 + y^2}\, dy$$
$$\overset{(9.22)}{=} \left[\frac{y\sqrt{1 + y^2} + \log(y + \sqrt{1 + y^2})}{4} \right]_0^4 = \sqrt{17} + \frac{\log(4 + \sqrt{17})}{4}\ . \qquad ◁$$

9.6.3 Area di una superficie di rotazione

Consideriamo una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ positiva e derivabile con derivata continua. Se facciamo ruotare il grafico della funzione f attorno all'asse delle ascisse, generiamo una superficie di rotazione, della quale vogliamo determinare l'area.

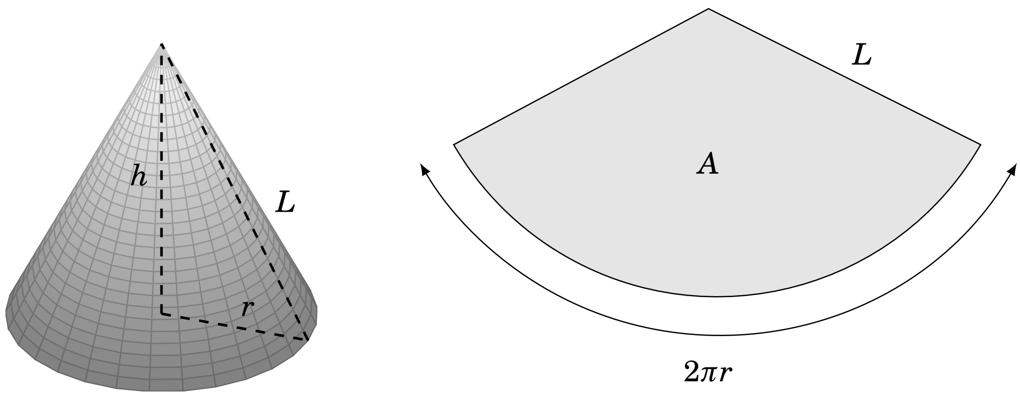


Figura 9.5: Superficie laterale di un cono

Prima di procedere col caso generale è opportuno considerare alcuni casi particolari. Richiamiamo innanzitutto la formula per il calcolo dell'area A della superficie laterale di un cono di raggio di base r e altezza h. Indichiamo con $L = \sqrt{r^2 + h^2}$ la lunghezza della generatrice del cono. Se sviluppiamo questa superficie su un piano otteniamo un settore circolare di raggio L sotteso da un arco di lunghezza $2\pi r$ (si veda la Figura 9.5). Poiché il rapporto fra l'area del settore circolare (A) e l'area del cerchio (πL^2) è uguale al rapporto fra la lunghezza dell'arco ($2\pi r$) e la lunghezza della circonferenza ($2\pi L$) abbiamo che

$$\frac{A}{\pi L^2} = \frac{2\pi r}{2\pi L} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \pi r L \ .$$

Fatta questa premessa, consideriamo un caso molto semplice di superficie di rotazione: facciamo ruotare, attorno all'asse x, un segmento che congiunge i punti (a, r_1) e (b, r_2), con $r_1, r_2 \geq 0$ (si veda la Figura 9.6).

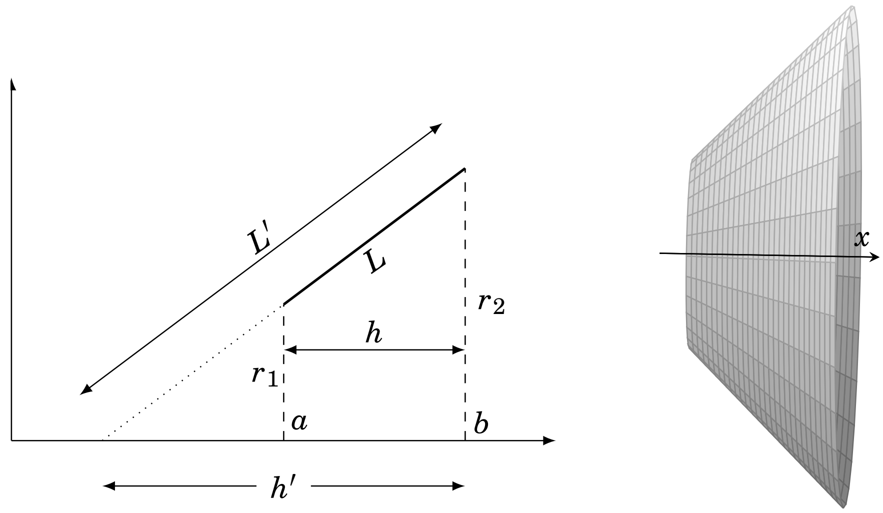


Figura 9.6: Superficie generata dalla rotazione di un segmento

Posto $h = b - a$, la lunghezza del segmento è data da

$$L = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \ .$$

Se $r_1 = r_2$ la superficie S generata da questa rotazione è un cilindro, avente quindi area $2\pi r_1 h = 2\pi r_1 L$. Consideriamo ora il caso $r_1 \neq r_2$ e supponiamo, per comodità, $r_1 < r_2$. È chiaro che ora la superficie S è un tronco di cono avente altezza h e raggi r_1 ed r_2 (se uno dei due raggi è nullo abbiamo un cono). Completiamo il tronco di cono S facendolo diventare un cono S' di altezza h' (e raggio di base r_2). Abbiamo che

$$\frac{r_2}{h'} = \frac{r_1}{h' - h} \qquad \Longrightarrow \qquad h' = \frac{r_2}{r_2 - r_1}\, h \ .$$

Una relazione analoga sussiste anche fra L e la lunghezza L' della generatrice del cono S':

$$L' = \frac{r_2}{r_2 - r_1}\, L \ .$$

L'area laterale del tronco di cono si può ora calcolare come differenza fra le aree di due coni:

$$\begin{aligned} A &= \pi L' r_2 - \pi(L' - L) r_1 = \pi[(r_2 - r_1)L' + r_1 L] \\ &= \pi \left[(r_2 - r_1) \frac{r_2}{r_2 - r_1} L + r_1 L \right] = \pi(r_1 + r_2)L \ . \end{aligned}$$

Osserviamo che questa formula rimane valida anche quando $r_1 = r_2$. Un altro modo di scrivere l'area della superficie laterale del tronco di cono è

$$A = (2\pi r) \cdot L, \qquad \text{con } r = \frac{r_1 + r_2}{2} \ . \tag{9.28}$$

Da questa formula risulta chiaro il seguente risultato:

Area generata dalla rotazione di un segmento

L'area generata dalla rotazione di un segmento è uguale alla lunghezza del segmento stesso moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo punto medio durante la rotazione.

Siamo ora in grado di affrontare il caso generale. Consideriamo quindi la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse x del grafico di una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ positiva e derivabile con derivata continua. Utilizziamo ancora il metodo degli elementi infinitesimi: calcoliamo dunque l'area della superficie generata dalla rotazione della piccola porzione del grafico di f corrispondente all'intervallino $[x, x + dx]$. In prima approssimazione questo piccolo arco di curva può essere approssimato con un segmento di lunghezza

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} \ dx$$

(si veda la formula (9.26)). Il punto medio di questo segmento ha ordinata

$$r = \frac{f(x + dx) + f(x)}{2} \simeq f(x)$$

(ossia, a meno di un errore trascurabile, vale $f(x)$) e, di conseguenza, dalla formula (9.28) otteniamo che l'elemento infinitesimo d'area vale

$$dA = 2\pi r \, ds = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \ dx \ .$$

L'area totale della superficie di rotazione diviene quindi

Area di una superficie di rotazione

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \; . \tag{9.29}$$

Esempio 9.23. Vogliamo calcolare, utilizzando la formula (9.29), l'area della superficie di una sfera di raggio unitario. Tale sfera può essere vista come la superficie di rotazione generata dal grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Abbiamo che

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \; .$$

Utilizzando la formula (9.29) otteniamo quindi

$$A = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} dx = 4\pi \; .$$

Osserviamo che, a rigore, non potremmo utilizzare la formula (9.29), in quanto la funzione f non è derivabile nei punti $x = \pm 1$. Il calcolo può comunque essere giustificato in maniera rigorosa utilizzando le tecniche descritte nel Paragrafo 10 (si veda l'Esempio 10.15 a pag. 499). $\lhd$

9.6.4 Applicazioni fisiche

Illustriamo, attraverso esempi, alcune applicazioni del calcolo integrale alla meccanica e alla fisica.

Esempio 9.24 (Lavoro di una forza elastica)**.** In meccanica si introduce la nozione di **lavoro di una forza**: se una forza costante F agisce su un corpo che si sposta parallelamente alla forza per una distanza d, il lavoro compiuto dalla forza è definito da

$$L = F \cdot d \; . \tag{9.30}$$

Consideriamo ora una particella di massa m soggetta a una forza elastica di richiamo. In base alla *legge di Hooke* la forza F di richiamo è proporzionale all'allungamento x della molla:

$$F = -k\, x \, .$$

La costante di proporzionalità $k > 0$ è detta *costante elastica* della molla e ne misura la rigidità. Il segno '$-$' davanti a $k\, x$ sta a indicare che la forza si oppone allo spostamento. Supponiamo di voler calcolare il lavoro compiuto da questa forza quando la particella si sposta da una distanza x_1 a una distanza x_2 dal punto di richiamo. Osserviamo che la forza di richiamo non è costante, ma dipende dall'allungamento; il lavoro da essa compiuto non può quindi essere calcolato attraverso la formula (9.30). Tuttavia possiamo applicare il metodo degli elementi infinitesimi: se la molla passa dall'allungamento x all'allungamento $x + dx$, possiamo supporre la forza costante (se dx è piccolo), quindi il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza è

$$dL = F\,dx = -kx\,dx\,.$$

Il lavoro totale compiuto dalla forza elastica quando l'allungamento varia da x_1 a x_2 sarà quindi

$$L = \int dL = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \left[-\frac{k}{2}\,x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)\ .$$

Consideriamo ad esempio una molla con costante elastica $k = 600$ N/m. Vogliamo calcolare il lavoro fatto da una forza esterna per allungare la molla di $d = 10$ cm dalla sua posizione di riposo. Osserviamo che il lavoro L_e compiuto dalla forza esterna è uguale a quello compiuto dalla forza elastica cambiato di segno (la forza esterna deve agire con verso opposto rispetto a quella di richiamo per allungare la molla). Di conseguenza

$$L_e = -L = \frac{k\,d^2}{2} = 3 \text{ Nm} = 3 \text{ J}. \qquad \triangleleft$$

Esempio 9.25 (Lavoro meccanico)**.** Consideriamo un cilindro chiuso, contenente gas, e munito di un pistone (si veda la Figura 9.7 a sinistra). Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dal gas per espandersi da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2.

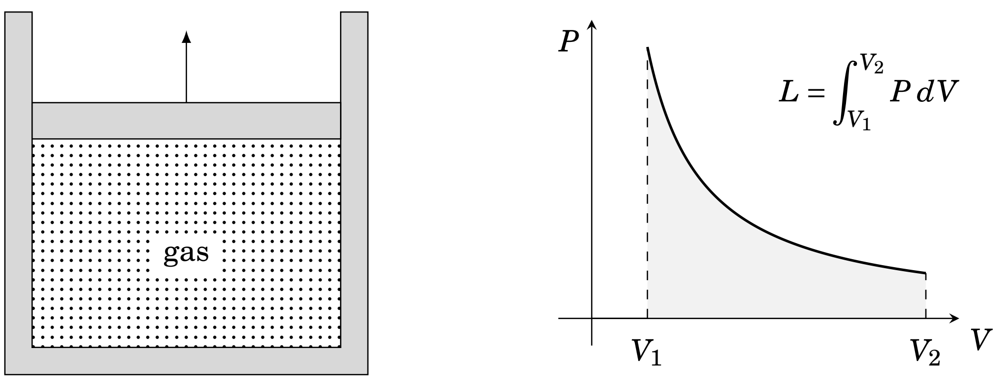


Figura 9.7: Espansione di un gas

Come è noto dalla termodinamica, il lavoro infinitesimale compiuto dal gas per espandersi da un volume V a un volume $V + dV$ (con dV piccolo) è dato da

$$dL = P\,dV\ ,$$

dove P è la pressione del gas. Se è nota la dipendenza $P = P(V)$ della pressione dal volume, il lavoro di espansione è dato da

$$L = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

(si veda la Figura 9.7 a destra). Ad esempio, se la trasformazione è isoterma, per la legge dei gas perfetti sappiamo che $P = k/V$, dove $k = nRT$ è una costante (n è il numero di moli di gas, R è la costante dei gas perfetti e T è la temperatura). Di conseguenza

$$L = [k \log V]_{V_1}^{V_2} = k \log \frac{V_2}{V_1} = nRT\ \log \frac{V_2}{V_1}\ . \qquad \triangleleft$$

9.7 Esercizi

Esercizio 9.1. Calcolare, col metodo di integrazione per parti, i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

2) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int x \log x\,dx$

4) $\displaystyle\int x \cos(x+3)\,dx$

Esercizio 9.2. Calcolare, col metodo di sostituzione, i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+16}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

Esercizio 9.3. Determinare una primitiva delle seguenti funzioni razionali:

1) $\displaystyle\frac{2x^3-3x^2+2x-4}{x^2+4}$

2) $\displaystyle\frac{6x^2+14x-20}{x^3-4x}$

3) $\displaystyle\frac{7x-6}{x^2-x-6}$

4) $\displaystyle\frac{x^2+46x-48}{x^3+5x^2-24x}$

5) $\displaystyle\frac{6x^2+7x+21}{(x+5)(x^2+9)}$

6) $\displaystyle\frac{5x^3-26x^2+37x-25}{(x-2)^2(x^2+1)}$

Esercizio 9.4. Determinare tutte le primitive delle seguenti funzioni:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

2) $f(x)=\sin x \log(\cos x)$

3) $f(x)=x^2\arctan x$

4) $f(x)=x\cos\sqrt{x}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{e^{-x^2}}$

6) $f(x)=e^x\sin(3x+1)$

7) $f(x)=x^3\sqrt{1-x^2}$

8) $f(x)=e^{\cos x}\sin x\cos x$

9) $f(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$

10) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{25x^2+1}}$

11) $f(x)=e^{-2x}(x^2-x)$

12) $f(x)=x^2\,\log(1+x)$

13) $f(x)=\dfrac{1+2\,x}{-5+2\,x+2\,x^2}$

14) $f(x)=x^6(3+x^7)^4$

15) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\,\arctan x}$

16) $f(x)=\dfrac{1}{2+x+x^2}$

17) $f(x)=\dfrac{-1+3\,x+x^5}{2+x}$

18) $f(x)=\tan x\cos^2 x$

19) $f(x)=\dfrac{2\,x}{(2+x^2)\log(2+x^2)}$

20) $f(x)=x^2\,\sin{(2\,x-1)}$

21) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+2)^2}$

22) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2x-3}$

23) $f(x)=(x^3-x)(x^4-2x^2+1)$

24) $f(x)=\log\left(\sqrt{1+x}\right)$

25) $f(x)=e^x\,\arctan{(1+e^x)}$

26) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\log^2 x}}{x}$

Esercizio 9.5. Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

1) $\displaystyle\int 3^x\,dx$

2) $\displaystyle\int 3^x e^x\,dx$

3) $\displaystyle\int (a+bx^3)^2\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^9}\,dx$

5) $\displaystyle\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$

7) $\displaystyle\int (\tan x)^2\,dx$

8) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x})\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\log x}{x}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

13) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

14) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

17) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$

18) $\displaystyle\int \frac{\sin(3x)}{2+\cos(3x)}\,dx$

19) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

20) $\displaystyle\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

21) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\log x}}{x}\,dx$

22) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin(x^2)}\,dx$

23) $\displaystyle\int \sqrt{e^x}\,dx$

24) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

25) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$

26) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

27) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx$

28) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

29) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx$

30) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

31) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

Esercizio 9.6. Utilizzando la sostituzione trigonometrica (9.19), calcolare

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx\ .$$

Esercizio 9.7. Calcolare i seguenti integrali definiti:

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+12}}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 (e^x+1)^4 e^x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \log(9-x^2)\,dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\log x}}{x}\,dx$

6) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(x^4+\cos x+1)\sin x}{x^2+1}\,dx$

7) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|e^{|x|}\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\cos^3 x\,dx$

10) $\displaystyle\int_{-4}^4 |(x-2)(x+3)|\,dx$

Esercizio 9.8. Calcolare i seguenti integrali definiti.

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}\, dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x\, dx$

Esercizio 9.9. Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

1) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\, dx$

2) $\displaystyle\int x \sin x \cos x\, dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$

4) $\displaystyle\int \arctan x\, dx,$

5) $\displaystyle\int x\cos(3x)\, dx$

6) $\displaystyle\int 3^x \cos x\, dx$

7) $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$

8) $\displaystyle\int x^2 e^x \cos x\, dx$

9) $\displaystyle\int x \sin^2 x\, dx$

10) $\displaystyle\int \log^2 x\, dx$

11) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$

12) $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\, dx.$

Esercizio 9.10. Determinare una primitiva delle seguenti funzioni razionali.

1) $\dfrac{2x^3-3x^2+2x-4}{x^2+4}$

2) $\dfrac{6x^2+14x-20}{x^3-4x}$

3) $\dfrac{7x-6}{x^2-x-6}$

4) $\dfrac{x^2+46x-48}{x^3+5x^2-24x}$

5) $\dfrac{6x^2+7x+21}{(x+5)(x^2+9)}$

6) $\dfrac{5x^3-26x^2+37x-25}{(x-2)^2(x^2+1)}$

Esercizio 9.11. Calcolare il volume dei solidi ottenuti facendo ruotare attorno all'asse x la regione sotto al grafico delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = 2 - x^2$, $x \in [-1, 1]$;

2) $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 0]$;

3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0, 1]$.

Esercizio 9.12. Calcolare la lunghezza dei seguenti archi di curva:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$, $x \in [1, 2]$;

2) $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

Esercizio 9.13. Determinare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse x il grafico della funzione $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

CAPITOLO 11

Serie numeriche

In questo paragrafo presenteremo il concetto di serie numerica. Intuitivamente (e in maniera imprecisa) si parla di serie quando si vuole "sommare" una successione di infiniti numeri reali $a_0, a_1, \ldots$ Naturalmente, in algebra è possibile sommare solo un numero finito di addendi. Vedremo però come il concetto di limite di una successione possa essere utilizzato per dare senso a una "somma di infiniti termini".

11.1 Definizioni ed esempi

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali. A partire da $(a_n)_n$ costruiamo un'altra successione $(s_n)_n$, definita per ricorrenza da

$$s_0 = a_0, \qquad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11.1}$$

vale a dire $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, …, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, …

Definizione 11.1 ➩ Serie numerica

*Si dice **serie** di termine generale a_n la successione $(s_n)_n$ definita in (11.1). L'elemento s_n si dice somma parziale n-esima o ridotta n-esima della serie. La serie si dice **convergente**, **divergente** o **indeterminata** se la successione $(s_n)_n$ è rispettivamente convergente, divergente o non ammette limite.*

La serie di termine generale a_n si indica con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{(serie di termine generale } a_n\text{)}$$

o, più semplicemente, con $\sum a_n$. Se la serie è convergente, cioè se $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, allora s è detta **somma** della serie e si scrive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Si dice resto n-esimo della serie $\sum a_n$ la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Se la serie è convergente ed s è la sua somma, allora il resto n-esimo è dato da

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n$$

e si ha $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Esempio 11.2 (Serie geometrica di ragione q)**.** Sia $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$. Calcoliamo s_n. Se $q = 1$ si ha banalmente $s_n = n + 1$, quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, cioè la serie diverge a $+\infty$. Per $q \neq 1$ conviene osservare che, fissato $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$q\, s_n = q + q^2 + \cdots + q^{n+1} = s_n - 1 + q^{n+1} \quad\Longrightarrow\quad s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,.$$

Ne segue che, se $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1/(1-q)$, quindi la serie converge a $1/(1-q)$; se $q > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$; infine, se $q < -1$, si ha $\lim_{n\to+\infty} |s_n| = +\infty$, ma il limite della successione $(s_n)_n$ non esiste in quanto i termini di posto pari sono positivi, mentre i termini di posto dispari sono negativi, e la serie è dunque indeterminata. $\triangleleft$

Esempio 11.3 (Serie di Mengoli)**.** Consideriamo la serie (detta **serie di Mengoli**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Poiché $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

(si veda anche l'Esercizio 1.6), quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$, cioè la serie è convergente con somma 1. $\triangleleft$

Affinché una serie converga, è ragionevole pensare che il suo termine generale debba essere infinitesimo. Nel seguente teorema dimostreremo rigorosamente questo fatto.

Teorema 11.4 ➾ Condizione necessaria per la convergenza

Se una serie $\sum a_n$ *è convergente, allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $(s_n)_n$ la successione delle somme parziali. Per ipotesi tale successione è convergente, cioè $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Ovviamente si avrà anche $\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$; ricordandosi che $a_n = s_n - s_{n-1}$, dal Teorema 3.30 sulla somma dei limiti finiti otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0 ,$$

cioè la tesi. □

Esempio 11.5. La condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non è sufficiente a garantire la convergenza di $\sum a_n$. Si consideri infatti la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots ,$$

detta **serie armonica**. Tale serie verifica la condizione necessaria espressa nel Teorema 11.4. Dimostreremo tuttavia nell'Esempio 11.9 che essa diverge a $+\infty$. ◁

Poiché la somma di una serie è ottenuta tramite un'operazione di limite, varranno i seguenti risultati riguardanti le operazioni con le serie.

Teorema 11.6 ➾ Operazioni con le serie

Siano $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie convergenti e sia* $c \in \mathbb{R}$ *una costante. Allora le serie* $\sum (a_n + b_n)$ *e* $\sum (c \cdot a_n)$ *sono convergenti, e si ha*

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n, \qquad \sum (c \cdot a_n) = c \sum a_n .$$

Dimostrazione. Siano s_n e σ_n le somme parziali rispettivamente delle serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$. La tesi segue immediatamente dal Teorema 3.30 sulle operazioni fra limiti finiti, dopo aver osservato che le somme parziali della serie $\sum(a_n+b_n)$ sono date da $s_n+\sigma_n$, mentre quelle della serie $\sum(c\cdot a_n)$ sono date da $c\cdot s_n$. □

Osservazione 11.7. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie tali che $a_n = b_n$ definitivamente, allora è chiaro che le due serie hanno lo stesso **carattere** (cioè sono entrambe convergenti, o divergenti, o indeterminate), poiché le rispettive somme parziali n-esime, per $n \geq n_0$, differiscono per una costante additiva. È altrettanto evidente che, se le due serie sono convergenti, le loro somme differiranno per la medesima costante. ◁

11.2 Serie a termini non negativi

Cominciamo con l'osservare che, se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è a termini non negativi, cioè se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la successione $(s_n)_n$ delle sue somme parziali n-esime è monotona crescente, poiché

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, esiste sempre $\lim_{n\to+\infty} s_n$; tale limite è finito se la successione $(s_n)_n$ è limitata, mentre vale $+\infty$ se $(s_n)_n$ non è limitata (si veda il Teorema 3.67 a pag. 167). Abbiamo così dimostrato il seguente risultato.

Teorema 11.8 ➾ Regolarità delle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi è convergente oppure diverge a $+\infty$ (non può essere indeterminata), ed è convergente se e solo se la successione delle sue somme parziali è limitata.

Con lo stesso tipo di argomento si dimostra che una serie a termini non positivi è convergente oppure diverge a $-\infty$.

Esempio 11.9 (Serie armonica)**.** Dimostriamo che la serie armonica, già considerata nell'Esempio 11.5, diverge a $+\infty$. Essendo una serie a termini positivi, per il Teorema 11.8 è sufficiente mostrare che la successione $(s_n)_n$ delle sue somme parziali non è limitata superiormente. A tale proposito, si ha che

$$\begin{aligned}
&s_1 = 1, \quad s_2 = s_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}\,,\\
&s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + 2\cdot\frac{1}{4} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}\,,\\
&s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + 4\cdot\frac{1}{8} > 1 + 3\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e, in generale,

$$s_{2^n} \geq 1 + n\cdot\frac{1}{2}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11.2}$$

Dimostriamo (11.2) per induzione. Abbiamo già verificato che la disuguaglianza è vera per $n = 0$; supponiamo ora che sia valida per un fissato $n \in \mathbb{N}$ e mostriamo che è vera per $n + 1$:

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq s_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + 2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + (n+1)\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Poiché la successione $1 + (n + 1)/2$ diverge a $+\infty$, concludiamo che la successione $(s_n)_n$ non è limitata superiormente. Daremo più avanti un'altra dimostrazione della divergenza della serie armonica (si veda l'Esempio 11.21 a pag. 518). ◁

Introduciamo degli strumenti utili per determinare il carattere di una serie a termini non negativi. Iniziamo con il classico teorema del confronto.

Teorema 11.10 ➾ Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi, tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

(a) se $\sum b_n$ è convergente, anche $\sum a_n$ è convergente;

(b) se $\sum a_n$ diverge (a $+\infty$), anche $\sum b_n$ diverge (a $+\infty$).

Dimostrazione. Indichiamo con s_n e σ_n rispettivamente le somme parziali n-esime di $\sum a_n$ e $\sum b_n$. Si avrà che

$$0 \leq s_n \leq \sigma_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nel caso (a), avremo che $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma \in [0, +\infty)$, con $\sigma_n \leq \sigma$ per ogni n. Di conseguenza, si avrà anche $0 \leq s_n \leq \sigma$, quindi anche la successione $(s_n)_n$ sarà convergente essendo limitata e monotona crescente. Il caso (b) non è altro che la negazione della proposizione (a). □

Per quanto detto nell'Osservazione 11.7, la tesi rimane valida anche se la disuguaglianza $a_n \leq b_n$ è verificata definitivamente, cioè da un certo indice n_0 in poi. Questa considerazione vale anche per gli altri criteri di convergenza che verranno enunciati in questo paragrafo.

Una immediata conseguenza del teorema del confronto è il seguente risultato che, essenzialmente, dice che se due serie hanno termini generali asintoticamente equivalenti, allora hanno lo stesso carattere.

Corollario 11.11 ➾ Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi (cioè a_n, $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Se esiste finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere; in particolare, esse sono entrambe convergenti oppure divergono entrambe a $+\infty$.

Dimostrazione. Poiché le due serie sono a termini positivi, abbiamo che $l > 0$. Per definizione di limite, esiste un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3l}{2}, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Poiché $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3l}{2} b_n, \qquad \forall n \geq n_0,$$

quindi la tesi segue dal Criterio del confronto (Teorema 11.10). □

Esempio 11.12. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$ diverge a $+\infty$. Infatti la serie è a termini positivi, in quanto $0 < 1/n \leq 1 < \pi/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$; inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} = 1,$$

quindi la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica, che diverge a $+\infty$ (si veda l'Esempio 11.9). ◁

Concludiamo con alcune ulteriori conseguenza del Criterio del confronto che permettono di studiare il carattere di una serie attraverso opportuni limiti del suo termine generale.

Teorema 11.13 ➾ Criterio della radice

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste un numero $l < 1$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq l$ definitivamente, allora la serie è convergente. Se invece $a_n \geq 1$ per infiniti indici $n \in \mathbb{N}$, allora la serie diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. Se $\sqrt[n]{a_n} \leq l$ definitivamente, allora $a_n \leq l^n$ definitivamente. Poiché l^n è il termine generale di una serie geometrica convergente (si veda l'Esempio 11.2), per il criterio del confronto si ha che anche $\sum a_n$ è convergente. Se invece $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti indici $n \in \mathbb{N}$, allora $a_n \geq 1$ per tali indici, quindi non è verificata la condizione necessaria di convergenza (si veda il Teorema 11.4). □

Corollario 11.14 ➾ Criterio della radice asintotico

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi e sia

$$l := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}\,. \tag{11.3}$$

Allora, se $l < 1$ la serie converge, mentre se $l > 1$ la serie diverge.

Dimostrazione. Se $l < 1$, allora scelto $l' \in (l, 1)$, dalla Proposizione 3.83 segue che $\sqrt[n]{a_n} \leq l'$ definitivamente. Se invece $l > 1$, allora dal Teorema 3.85 segue che esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ tale che $a_{n_k} \geq 1$ per ogni k. In entrambi i casi la tesi segue dal Teorema 11.13. □

Esempio 11.15. Se $l = 1$ in (11.3), allora in generale non si può concludere nulla circa la convergenza della serie $\sum a_n$. Ad esempio, sia per la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ il limite in (11.3) vale 1, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-(\log n)/n} = e^0 = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-(\log n)/n} e^{-(\log(n+1))/n} = e^0 e^0 = 1,$$

ma la prima serie diverge a $+\infty$ (Esempio 11.9), mentre la seconda converge (Esempio 11.3). $\triangleleft$

Teorema 11.16 ➩ Criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste un numero $l < 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l\,, \qquad \textit{definitivamente,} \tag{11.4}$$

allora la serie è convergente. Se invece si ha che $a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente, allora la serie è divergente.

Dimostrazione. Nel primo caso, non è restrittivo supporre che (11.4) valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. È facile verificare per induzione che

$$a_n \leq a_0\, l^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la serie geometrica $\sum l^n$ di ragione $l \in [0,1)$ è convergente, la tesi segue dal Teorema 11.10 del confronto.

Se invece esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \geq N$, allora si ha che $a_n \geq a_N > 0$ per ogni $n \geq N$, quindi non può essere verificata la condizione necessaria per la convergenza (Teorema 11.4). $\square$

Corollario 11.17 ➩ Criterio del rapporto asintotico

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi.

(i) Se

$$l := \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\,,$$

allora la serie converge.

(ii) Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ definitivamente, allora la serie diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. Nel caso (i), scelto $l' \in (l,1)$, dalla Proposizione 3.83 segue che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l'$ definitivamente. Nel caso (ii) si ha invece che $a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente. In entrambi i casi la tesi segue dal Teorema 11.16. $\square$

Anche in questo caso, come per il criterio della radice, nulla si può dire se nel caso (i) si ha $l = 1$ (si veda l'Esempio 11.15).

Esempio 11.18. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ è convergente. Infatti è a termini positivi e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0. \qquad \lhd$$

Approfondimento 11.19. Come conseguenza dell'Esercizio 3.19 a pag. 180, il criterio della radice asintotico (Corollario 11.17) è più efficiente di quello del rapporto (Corollary 11.17), nel senso che, quando il criterio della radice asintotico garantisce la convergenza della serie (vale a dire, il valore di l in (11.3) è minore di 1), allora anche il criterio del rapporto asintotico garantisce la convergenza e, analogamente, quando il criterio della radice non si può applicare (vale a dire, quando $l = 1$ in (11.3)), allora anche il criterio del rapporto non si può applicare.

D'altra parte, esistono serie per le quali il criterio del rapporto asintotico non può essere utilizzato, a differenza del criterio della radice. Si consideri, ad esempio, la serie di termine generale

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 2^{2-n}, & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Abbiamo che a_{n+1}/a_n vale 2 se n è dispari, mentre vale $1/8$ se n è pari, quindi il criterio del rapporto asintotico non è applicabile. Invece, $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} = 1/2$, quindi il criterio della radice asintotico garantisce la convergenza della serie. $\lhd$

Mostriamo un altro utile criterio di convergenza, che è una generalizzazione dell'idea usata nell'Esempio 11.9 per dimostrare che la serie armonica è divergente: "condensare" i termini della serie a pacchetti di 2^k elementi e stimare ciascun pacchetto.

Teorema 11.20 ➾ Criterio di condensazione di Cauchy

Sia (a_n) una successione decrescente a termini non negativi. Allora le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$$

hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti o divergono entrambe a $+\infty$.

Dimostrazione. Indichiamo con $(s_n)_n$ e $(\sigma_n)_n$ le somme parziali delle due serie:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ricordando che una serie a termini non negativi è convergente se e solo se la successione delle sue somme parziali è limitata (si veda il Teorema 11.8), la tesi seguirà dalle disuguaglianze

$$s_{2^n-1} \le \sigma_{n-1} \le 2s_{2^{n-1}}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{11.5}$$

Infatti, se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora la successione (s_n) è limitata e, per la seconda disuguaglianza in (11.5), anche la successione (σ_n) è limitata e dunque la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ è convergente.

D'altra parte, se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, allora la successione (s_n) è illimitata superiormente e, per la prima disuguaglianza in (11.5), anche la successione (σ_n) è illimitata e dunque la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ è divergente.

Dimostriamo ora, per induzione, le disuguaglianza (11.5). Indichiamo con $P(n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, la proprietà

$$P(n): \qquad\qquad s_{2^n-1} \le \sigma_{n-1} \le 2s_{2^{n-1}}\,.$$

Chiaramente $P(1)$ è vera, dal momento che $s_1 = a_1 = \sigma_0$.

Supponiamo ora che $P(n)$ sia vera per un fissato $n \in \mathbb{N}^+$ e dimostriamo che vale $P(n+1)$:

$$s_{2^{n+1}-1} \overset{(1)}{\le} \sigma_n \overset{(2)}{\le} 2s_{2^n}.$$

La disuguaglianza (1) si ottiene osservando che, per ogni n, $a_k \le a_{2^n}$ se $k \ge 2^n$, per cui

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \le 2^n a_{2^n}$$

(somma di 2^n termini minori di a_{2^n}) e quindi

$$s_{2^{n+1}-1} = s_{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \overset{[P(n)]}{\le} \sigma_{n-1} + 2^n a_{2^n} = \sigma_n.$$

Per dimostrare la disuguaglianza (2), usiamo l'ipotesi induttiva che ci garantisce che

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + 2^n a_{2^n} \overset{[P(n)]}{\le} 2(s_{2^{n-1}} + 2^{n-1}a_{2^n}).$$

Quindi il risultato si ottiene se si riesce a mostrare che $s_{2^{n-1}} + 2^{n-1}a_{2^n} \le s_{2^n}$. Una volta osservato che vale

$$s_{2^{n-1}} + 2^{n-1} a_{2^n} \leq s_{2^{n-1}} + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k$$

la disuguaglianza richiesta equivale a

$$2^{n-1} a_{2^n} \leq \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k\,,$$

disequazione sempre vera dal momento che a destra compare la somma di 2^{n-1} elementi $a_k \geq a_{2^n}$. Abbiamo così dimostrato la validità del passo dell'induzione e quindi, per il Principio di Induzione, la stima è vera per ogni $n \geq 1$. □

Esempio 11.21 (Serie armonica generalizzata)**.** Consideriamo la **serie armonica generalizzata**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha \leq 0$, il termine generale della serie non tende a zero, quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$.

Consideriamo quindi il caso $\alpha > 0$. Poiché la successione $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ è a termini positivi e monotona decrescente, per il Criterio di condensazione il carattere di $\sum a_n$ è uguale a quello della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{\alpha k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k .$$

Quest'ultima è una serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$ (si veda l'Esempio 11.2), che converge se e solo se $2^{1-\alpha} < 1$, cioè se e solo se $\alpha > 1$.

In conclusione, per $\alpha > 1$ la serie converge, mentre per $\alpha \leq 1$ la serie diverge a $+\infty$. ◁

Approfondimento 11.22 (Il numero di Nepero)**.** Il numero di Nepero e, introdotto nella Definizione 3.77 come limite della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, può essere alternativamente definito anche attraverso la somma di una serie. Dimostreremo infatti che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e. \tag{11.6}$$

A tale proposito, indichiamo con $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ le somme parziali della serie che compare in (11.6). Poiché si tratta di una serie a termini positivi, sappiamo che esiste, finito o $+\infty$, il $\lim_{n\to+\infty} s_n$. Utilizzando la formula (1.3) del binomio di Newton abbiamo che

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Osservando che tutti i fattori fra parentesi tonde sono positivi e minori di 1, si ha che

$$a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n\,,$$

quindi, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \ge \lim_{n\to+\infty} a_n = e. \tag{11.8}$$

Fissiamo $N \in \mathbb{N}^+$. Se $n \ge N$, troncando il secondo membro di (11.7) ai primi N termini, abbiamo che

$$\begin{aligned}
a_n &\ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{N!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{N-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Facciamo ora tendere n a $+\infty$. Poiché N è un fissato numero naturale, tutti i fattori fra parentesi tonde tendono a 1; di conseguenza, sempre per il teorema del confronto, avremo che

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!} = s_N.$$

Passando ora il limite per $N \to +\infty$ otteniamo infine che $e \ge \lim_{N\to+\infty} s_N$ che, insieme a (11.8), implica (11.6). $\triangleleft$

Approfondimento 11.23 (Irrazionalità di e)**.** L'uguaglianza (11.6) permette un'ottima approssimazione di e tramite la somma parziale s_n della serie, dal momento che $1/k!$ tende a 0 molto rapidamente al crescere di k. Ad esempio, si ha che $s_{10} = \frac{9864101}{3628800} = 2.7182818011463845$, da confrontarsi con $e = 2.718281828459045\ldots$, quindi $e - s_{10} \simeq 2.73 \times 10^{-8}$. Più precisamente, abbiamo che

$$\begin{aligned}
0 < e - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1+j)!} \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^j = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}\,.
\end{aligned} \tag{11.9}$$

Questa stima permette anche di dimostrare che e è un numero irrazionale. Infatti, supponiamo per assurdo che e sia razionale, cioè $e = p/q$, con $p, q \in \mathbb{N}^+$. Dalla stima (11.9) abbiamo che $0 < e - s_q < 1/(q!\,q)$, cioè $0 < q!(p/q - s_q) < 1/q$. Ma $q!(p/q - s_q)$ è un intero, e quindi non può essere strettamente compreso fra 0 e 1. ◁

11.3 Convergenza semplice e assoluta

Finora abbiamo studiato criteri di convergenza validi per serie a termini non negativi. Vedremo fra breve che questi risultati possono essere utilizzati anche per studiare serie con termine di segno qualsiasi. Per tale scopo introduciamo la nozione di convergenza assoluta.

Definizione 11.24 ➾ Serie assolutamente convergente

Diremo che la serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente se converge la serie a termini non negativi $\sum |a_n|$.

La convergenza assoluta garantisce la convergenza (semplice) della serie.

Teorema 11.25 ➾ Criterio di convergenza assoluta

Se $\sum |a_n|$ è convergente, allora anche $\sum a_n$ è convergente. In altri termini, una serie assolutamente convergente è convergente (semplicemente).

Dimostrazione. Definiamo la parte positiva e la parte negativa di a_n:

$$a_n^+ = \begin{cases} 0, & \text{se } a_n \le 0, \\ a_n, & \text{se } a_n > 0, \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, & \text{se } a_n \ge 0, \\ -a_n, & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

in modo che $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ e $0 \le a_n^+, a_n^- \le |a_n|$. Per il criterio del confronto (Teorema 11.10) e dall'ipotesi di convergenza della serie $\sum |a_n|$ deduciamo che anche le due serie a termini non negativi $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ sono convergenti. Per il Teorema 11.6 possiamo quindi concludere che anche $\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-)$ è convergente. □

Esempio 11.26. Se $\sum a_n$ è convergente, non è detto che sia assolutamente convergente. Ad esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ non converge assolutamente (la serie dei valori assoluti è la serie armonica, la cui divergenza è stata dimostrata nell'Esempio 11.9). D'altra parte, faremo vedere nell'Esempio 11.29 a pag. 522 che questa serie è convergente. ◁

Studiare il carattere di una serie a termini di segno qualsiasi che non sia assolutamente convergente risulta spesso difficile. Una classe importante di serie delle quali si può studiare abbastanza agevolmente la convergenza è quella di alcune serie a termini di segno alterno.

Definizione 11.27 ➫ Serie a termini di segno alterno

Una serie del tipo $\sum(-1)^n a_n$*, con* $a_n \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, si dice serie a termini di segno alterno.*

Teorema 11.28 ➫ Criterio di Leibniz

Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *una serie a termini di segno alterno e supponiamo che*

(i) la successione $(a_n)_n$ *sia monotona decrescente;*

(ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*.*

Allora $\sum a_n$ *è convergente. Inoltre, detta* s *la sua somma e indicata con* s_n *la sua somma parziale* n*-esima, si ha che*

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11.10}$$

Dimostrazione. Poiché la serie è a termini di segno alterno, la somma parziale n-esima s_n sarà data da

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n.$$

Osserviamo che, per l'ipotesi (i), si ha che $a_k - a_{k+1} \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi

$$s_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n},$$
$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq s_{2n-1},$$

da cui si deduce che la sottosuccessione $(s_{2n})_n$ di $(s_n)_n$ è monotona decrescente, mentre la sottosuccessione $(s_{2n+1})_n$ è monotona crescente. Inoltre, essendo $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0$, per la monotonia di $(s_{2n+1})_n$ abbiamo che

$$s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_{2n-1} \geq \cdots \geq s_1.$$

Di conseguenza, la sottosuccessione $(s_{2n})_n$ è limitata inferiormente, quindi, essendo anche monotona decrescente, è convergente (si veda il Teorema 3.67). Indichiamo con s il suo limite. Per l'ipotesi (ii) e il Teorema 3.30 sulla somma di limiti finiti abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - a_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = s,$$

quindi anche la sottosuccessione $(s_{2n+1})_n$ converge allo stesso limite s. Inoltre, essendo $(s_{2n})_n$ monotona decrescente e $(s_{2n+1})_n$ monotona crescente, si ha che

$$s_{2j+1} \leq s \leq s_{2k} \qquad \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

In particolare si ha che

$$\begin{aligned} &0 \leq s - s_{2n-1} \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}, \\ &0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Da queste disuguaglianze segue quindi (11.10); usando ancora l'ipotesi (ii) si conclude che $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$. □

Esempio 11.29. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$, già considerata nell'Esempio 11.26, è convergente (anche se non converge assolutamente). Infatti è facile verificare che sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Leibniz. ◁

Concludiamo questo paragrafo sulle serie con alcuni consigli pratici riguardanti lo studio del carattere di una serie $\sum a_n$. Può essere conveniente utilizzare lo schema seguente.

(i) Stabilire se è verificata la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (Teorema 11.4); in caso questa condizione non sia verificata, allora la serie non è convergente (bisogna però stabilire se è divergente oppure indeterminata, si veda anche il punto (ii)).

(ii) Stabilire se la serie è (definitivamente) a termini non negativi (risp. non positivi). In tal caso, per il Teorema 11.8 la serie sarà convergente oppure divergerà a $+\infty$ (risp. $-\infty$), ma non potrà essere indeterminata. Se la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non è verificata, allora la serie diverge a $+\infty$ (risp. a $-\infty$). Viceversa, per lo studio della convergenza si possono usare i criteri visti per le serie a termini non negativi (criterio del confronto, della radice, del rapporto, test integrale).

(iii) Se la serie non è a termini di segno costante, studiare prima la sua convergenza assoluta (si veda punto precedente). Se è assolutamente convergente, si conclude che è anche (semplicemente) convergente e non c'è altro da dimostrare. Se non è assolutamente convergente, può tuttavia essere semplicemente convergente; tipicamente in questo caso si vede se è possibile applicare il criterio di Leibniz.

Esempio 11.30. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}\,. \tag{11.11}$$

Poiché $\log n$ diverge a $+\infty$ quando $n \to +\infty$, il termine generale della serie tende a zero; è quindi soddisfatta la condizione necessaria di convergenza (Teorema 11.4). Osserviamo che la serie è a termini di segno alterno, in quanto è del tipo $\sum_n (-1)^n a_n$, con $a_n = 1/(1 + \log n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
Studiamo prima la convergenza assoluta. Poiché $\log n$ è un infinito di ordine inferiore a n (vale a dire, $(\log n)/n$ tende a 0 per $n \to +\infty$), abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \log n}{n} = 0,$$

quindi esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $0 < \frac{1+\log n}{n} < 1$ per ogni $n \geq N$, cioè

$$a_n = \frac{1}{1 + \log n} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq N.$$

(In realtà questa disuguaglianza vale per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, ma per i nostri scopi basta stabilire che vale definitivamente.) Poiché la serie armonica diverge a $+\infty$ (si veda l'Esempio 11.9), per il Teorema 11.10 del confronto possiamo concludere che anche $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$, ovvero che la serie di partenza $\sum_n (-1)^n a_n$ non converge assolutamente.
Poiché la serie non è a termini (definitivamente) di segno costante, anche se non converge assolutamente potrebbe convergere semplicemente. In questo caso particolare, avendo a che fare con una serie a termini di segno alterno, possiamo vedere se si può applicare il criterio di Leibniz (Teorema 11.28). Dal momento che la successione $(1 + \log n)_n$ è positiva e monotona crescente, abbiamo che $(a_n)_n$ è monotona decrescente; abbiamo inoltre già stabilito all'inizio che tende a zero. Di conseguenza, sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Leibniz e possiamo concludere che la serie (11.11) è convergente. $\triangleleft$

Esempio 11.31. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} .$$

Il termine generale della serie tende a zero; è quindi soddisfatta la condizione necessaria di convergenza (Teorema 11.4).
Osserviamo che anche questa serie, come quella considerata nell'esempio precedente, è a termini di segno alterno, in quanto è del tipo $\sum_n (-1)^n a_n$, con $a_n = 1/n^2 > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Questo spesso induce a vedere subito se è possibile applicare il criterio di Leibniz; anche in questo caso le ipotesi di tale criterio sono verificate, in quanto $(a_n)_n$ converge monotonamente a zero, quindi la serie converge semplicemente.

Nonostante quanto detto sopra sulla convergenza semplice della serie sia corretto, non è stata studiata la convergenza assoluta; in realtà si verifica immediatamente che la serie converge assolutamente (si veda l'Esempio 11.21; in alternativa si può utilizzare il criterio del confronto asintotico 11.11 con la serie di Mengoli studiata nell'Esempio 11.3). Da qui segue anche la convergenza semplice, senza la necessità di utilizzare il criterio di Leibniz. $\triangleleft$

11.4 Esercizi

Esercizio 11.1. [Confronto asintotico unilaterale] Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi. Dimostrare che se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

allora

(i) se la serie $\sum_k b_k$ converge, allora converge anche la serie $\sum_k a_k$;

(ii) se la serie $\sum_k a_k$ diverge, allora diverge anche la serie $\sum_k b_k$.

Mostrare a quali conclusioni si può giungere sul carattere delle serie se, invece, si ha come ipotesi che esista

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

Esercizio 11.2. Studiare la convergenza delle seguenti serie.

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k k}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!}$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(e^{1/k}-1\right)$

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\sqrt{k+2}}{3^k k^k}$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\sin(\frac{1}{3k})}{k+2}$

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(2k)}{k^2}$

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left((2k)^{\frac{1}{k^2}}-1\right)$

10) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j}\right)^k$

11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k(k+1)!}{k^{k+3}}$

12) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^{(-1)^k-k}$

13) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2\log(k)}$

14) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+2}}{k!}$

15) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k-4^k}{5^k}$

Esercizio 11.3. Mostrare che le seguenti serie sono convergenti e calcolarne la somma.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k^2-k}}$

Esercizio 11.4. Studiare la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ di coefficienti

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2k^2} & \text{se } k \text{ è pari,} \\ \dfrac{k}{2k^2+1} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Esercizio 11.5. Usando il criterio di condensazione, studiare la convergenza delle seguenti serie.

1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log(\log(k)))^3}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log^{\alpha}(k)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio 11.6. Studiare il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ il cui termine generale è dato da

1) $a_n = \dfrac{n^2-10n}{n^4+1}$

2) $a_n = \log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

3) $a_n = \dfrac{x^n}{n^n} \qquad (x \in \mathbb{R})$

4) $a_n = \dfrac{x^n}{n^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$

5) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$

6) $a_n = n\,x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$

7) $a_n = \frac{\sin^n x}{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$

8) $a_n = \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$

Esercizio 11.7. Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi, divergente a $+\infty$. Stabilire il carattere delle serie

1) $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ 2) $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1+n^2\,a_n}$

3) Cosa si può dire della serie $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1+n\,a_n}$?

Esercizio 11.8. Sia $\sum a_n$ una serie convergente a termini non negativi. Stabilire il carattere delle serie

1) $\sum a_n^2$ 2) $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

Capitolo 1

Curve

1.1 Definizioni

Se dotiamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ di un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, il moto di una particella nello spazio viene determinato dalle coordinate $(x(t), y(t), z(t))$ del punto in cui si trova la particella al tempo t. Al variare del parametro temporale in un intervallo $[a, b]$, la traiettoria è una curva descritta da una funzione definita su $[a, b]$ e a valori nell'insieme dei punti $\mathbb{R}^3$. È naturale richiedere che la traiettoria sia continua, ossia che non sia lecito che la particella salti istantaneamente da una posizione ad un'altra distante. Analiticamente questa ipotesi si traduce nella continuità delle tre funzioni che determinano la posizione della particella.

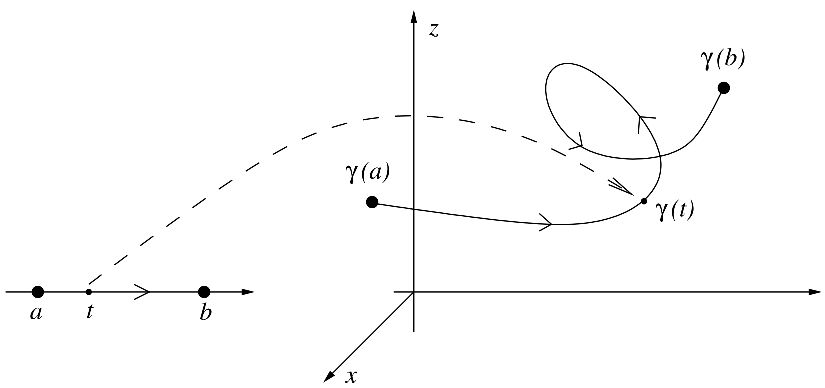


Figura 1.1: Curva parametrica

Generalizzando questo modello fisico si ottiene la definizione di curva in

$\mathbb{R}^n$ per qualsiasi $n \geq 2$.

Definizione 1.1 (Curva parametrica). Date n funzioni continue $x_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, chiameremo **curva parametrica** con parametrizzazione $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ la funzione reale a valori in $\mathbb{R}^n$ definita da $t \in [a,b] \mapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

La teoria delle curve sarà tutta svolta nello spazio $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. Risultano particolarmente interessanti i casi $n = 2$ (curve piane) ed $n = 3$ (curve dello spazio) in cui è possibile visualizzare geometricamente gli oggetti di cui si parla.

Esempio 1.2. Fissati a, $b > 0$ la curva parametrica piana che ha come parametrizzazione $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, è l'ellisse con centro nell'origine, semiassi a e b e che viene percorsa in senso antiorario. In particolare, se $a = b$ la curva è una circonferenza.

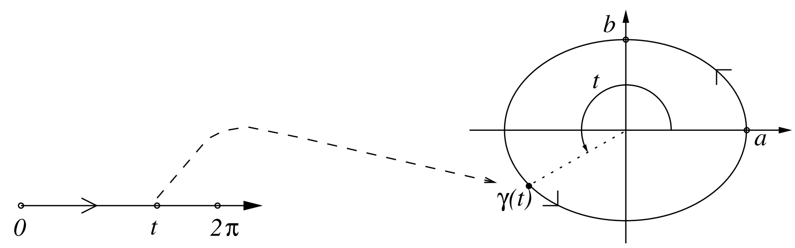


Figura 1.2: Ellisse

Definizione 1.3. Diremo che una curva parametrica $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, è **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Diremo che una curva parametrica $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, è **semplice** se comunque presi due valori distinti t_1, $t_2 \in [a,b]$ che non siano i due estremi (quindi t_1 oppure $t_2 \in (a,b)$) si ha $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Detto a parole, una curva è chiusa se alla fine del percorso si ritorna al punto di partenza, mentre una curva è semplice se il cammino non passa mai una seconda volta per un punto dove è già passato (si veda la Figura 1.3).

Torniamo al modello cinematico. Consideriamo una particella che si muove nel piano e che, partendo dal punto $P_0 = (x_0, y_0)$, deve arrivare in un diverso punto $P_1 = (x_1, y_1)$. Supponiamo che la particella si muova con moto

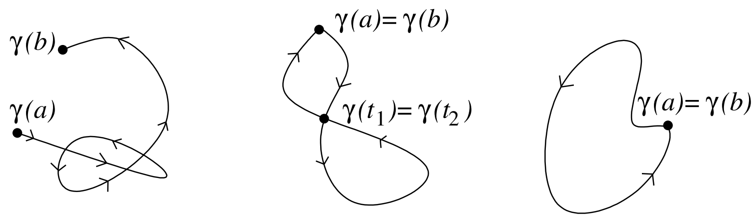


Figura 1.3: Curva né chiusa né semplice, curva chiusa, curva chiusa e semplice

rettilineo uniforme, ossia abbia accelerazione sempre nulla e velocità costante $\vec{v} = (p, q) \neq (0, 0)$. In questo caso la parametrizzazione del suo moto sarà

$$\gamma_1(t) = (x_0 + tp, y_0 + tq), \qquad t \in [0, T]\,, \tag{1.1}$$

dove T è il tempo di arrivo in (x_1, y_1). Supponiamo ora che la particella si muova sempre nel piano con moto rettilineo, ma, questa volta, uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a} = (p, q)$. Se supponiamo che la velocità iniziale sia nulla, abbiamo che la velocità al tempo t è $\vec{v}(t) = (pt, qt)$ e lo spostamento è parametrizzato da

$$\gamma_2(t) = \left(x_0 + p\frac{t^2}{2}, y_0 + q\frac{t^2}{2}\right), \qquad t \in [0, \sqrt{2T}]\,. \tag{1.2}$$

Quindi sia la parametrizzazione (1.1) che la parametrizzazione (1.2) individuano lo stesso oggetto geometrico (il segmento che congiunge i due punti), che viene percorso con velocità differenti.

Questa osservazione mette in evidenza che è necessario distinguere gli aspetti geometrici di una curva dagli aspetti cinematici (velocità e verso di percorrenza). La struttura geometrica di una curva è unicamente determinata dall'immagine della parametrizzazione $\gamma(t)$, che prende il nome di **sostegno** della curva. Nell'esempio precedente il sostegno delle curve parametrizzate da $\gamma_1(t)$ in (1.1) e da $\gamma_2(t)$ in (1.2) è il segmento che congiunge i due punti assegnati.

Esempio 1.4. Il grafico di una funzione continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è il sostegno di una curva parametrica piana con parametrizzazione $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$.

Definizione 1.5 (Curve equivalenti). Diremo che due curve parametriche $\gamma_1(t)$, $t \in [a, b]$, e $\gamma_2(t)$, $t \in [c, d]$ sono **equivalenti** se esiste una funzione $\varphi\colon [c, d] \to [a, b]$ biunivoca, derivabile con derivata continua in $[c, d]$, tale che $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in (c, d)$ (oppure $\varphi'(t) < 0$ per ogni $t \in (c, d)$) e $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ per ogni $t \in [c, d]$.

Quindi due curve equivalenti percorrono lo stesso cammino in maniera differente. Diremo che due curve equivalenti hanno **verso concorde** se la funzione φ che lega le due parametrizzazioni è strettamente crescente e hanno **verso discorde** se φ è strettamente decrescente.

Nell'esempio precedente le curve $\gamma_1(t)$ in (1.1) e $\gamma_2(t)$ in (1.2) sono equivalenti, hanno verso concorde e $\varphi\colon [0,\sqrt{2T}] \to [0,T]$ è $\varphi(t) = t^2/2$. La curva $\gamma_3(t) = (x_1 + (x_0 - x_1)t, y_1 + (y_0 - y_1)t)$, $t \in [0,1]$, è equivalente a γ_1 e γ_2, ma ha verso discorde rispetto a quello delle altre due.

Invece le due curve

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)\,,\ \ t \in [0,2\pi]\,, \qquad \gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))\,,\ \ t \in [0,2\pi]$$

non sono equivalenti perché non è possibile determinare una φ con le proprietà richieste. In questo caso le due curve hanno lo stesso sostegno, la circonferenza unitaria, che $\gamma_1(t)$ percorre una volta, mentre $\gamma_2(t)$ percorre due volte. In particolare, γ_1 è una curva semplice, mentre γ_2 non lo è.

Osservazione 1.6. Ricordiamo che una funzione derivabile in un intervallo I è anche continua in I (si veda il Teorema 4.8 del primo volume). D'ora in poi indicheremo con $C^1(I)$ la classe delle funzioni derivabili in I e con derivata continua in I. Più in generale, indicheremo con $C^k(I)$, $k \geq 1$, la classe di funzioni derivabili k volte in I e con derivata k–esima continua in I.

Per quanto riguarda le curve, diremo che $\gamma(t)$ è una curva con parametrizzazione di classe C^k in I se $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ con $x_i \in C^k(I)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Supponiamo di avere una curva parametrica piana con parametrizzazione $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ e supponiamo che $x(t)$ e $y(t)$ siano derivabili in $[a,b]$. Sia P_0 un punto della curva, ossia $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$ per un certo $t_0 \in [a,b]$. Fissato $h \neq 0$ in modo tale che $t_0 + h$ sia ancora in $[a,b]$, consideriamo il punto $P_h = (x(t_0 + h), y(t_0 + h))$. Poiché la parametrizzazione è continua, il punto P_h tende ad avvicinarsi a P_0, muovendosi lungo la curva, quando h tende a zero. Un vettore direzione della retta che congiunge i due punti P_0 e P_h è

$$\left(\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}\right)\,. \tag{1.3}$$

Quando h tende a zero, la retta per P_0 e P_h tende a diventare la retta tangente alla curva in P_0. D'altra parte il vettore direzione della retta dato in (1.3) ha componenti che tendono a $(x'(t_0), y'(t_0))$ che, dal punto di vista cinematico, corrisponde alla velocità della particella nel punto $(x(t_0), y(t_0))$.

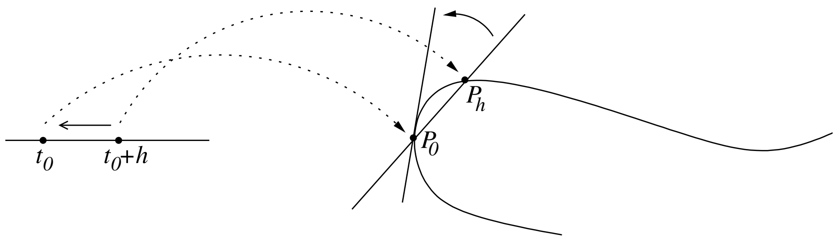


Figura 1.4: Retta tangente

Quindi la velocità con cui si percorre una curva è un vettore sempre tangente alla curva stessa. In dimensione qualsiasi avremo la seguente definizione.

Definizione 1.7 (Vettore tangente ad una curva). Data la curva parametrica $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ con $x_i\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, derivabili in $[a, b]$, il **vettore tangente** a γ nel punto $\gamma(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$, è $\gamma'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \ldots, x_n'(t_0))$.

Per le curve del tipo $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$, che hanno come sostegno il grafico di una funzione di una variabile, se la funzione f è derivabile in $[a, b]$, allora la curva non ha né spigoli né cuspidi. Si potrebbe supporre che, in generale, la derivabilità della parametrizzazione garantisca il fatto che la traiettoria sia liscia. Il prossimo esempio mostra che in realtà questo non è vero.

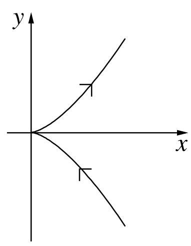


Figura 1.5: Supporto della curva $\gamma(t) = (t^2, t^3)$

Esempio 1.8. La curva piana con parametrizzazione $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, ha come sostegno il grafico della funzione $f(y) = y^{2/3}$, $y \in \mathbb{R}$, disegnato in Figura 1.5. Notiamo che la parametrizzazione è derivabile, il vettore tangente $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ è nullo per $t = 0$ e il sostegno presenta una cuspide nell'origine.

Per evitare cuspidi o punti angolosi è necessario richiedere che il vettore tangente non si annulli. D'ora in poi denoteremo con $\|\vec{u}\|$ l'usuale norma dei vettori di $\mathbb{V}^n$ (si veda la Definizione 7.8 del primo volume).

Definizione 1.9 (Curva regolare). Diremo che una curva parametrica con parametrizzazione $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $x_i \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, è regolare se la sua parametrizzazione è di classe C^1 in $[a, b]$ e se il vettore tangente $\gamma'(t)$ non è mai nullo in (a, b). Se una curva è regolare, allora è ben definito il vettore $\vec{T}(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$, $t \in [a, b]$, che prende il nome di **versore tangente** alla curva nel punto $\gamma(t)$.

Si noti che, mentre il vettore tangente ad una curva in un punto dipende dalla parametrizzazione della curva, il versore tangente in un punto non dipende dalla parametrizzazione. Più precisamente, se γ_1 e γ_2 sono due parametrizzazioni equivalenti e se φ è la funzione biunivoca, di classe C^1, con segno della derivata fissato e tale che $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$, per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha che

$$\frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma_2'(t)\|} = \frac{\gamma_1'(\varphi(t))}{\|\gamma_1'(\varphi(t))\|} \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} .$$

Se ne conclude che la direzione tangente non dipende dalla parametrizzazione, mentre il verso del versore tangente dipende solo dal verso di percorrenza della curva. Per questo, una volta fissato il verso di percorrenza di una curva γ, è ben definito il versore tangente $\vec{T}(P)$ alla curva in ogni punto P del suo sostegno.

Esempio 1.10. Se la curva parametrica è la circonferenza di raggio $r > 0$ con parametrizzazione $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, il vettore tangente in $\gamma(t)$ è dato da $\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, mentre il versore tangente ha componenti $\vec{T}(t) = (-\sin t, \cos t)$. Quindi, se $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza, allora $\vec{T}(P) = (-y/r, x/r)$, indipendentemente dalla parametrizzazione (a patto di percorrere la circonferenza in verso antiorario).

Osservazione 1.11. Il grafico di una funzione $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con parametrizzazione $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ ha vettore tangente $\gamma'(t) = (1, f'(t))$. Quindi la curva è sempre regolare.

Esempio 1.12. L'elica ellittica è una curva parametrica dello spazio con parametrizzazione $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tale curva ha parametrizzazione di classe C^1, il vettore tangente è $\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t, 1)$ e quindi la curva è regolare. Il sostegno dell'elica ellittica è disegnato in Figura 1.6 a sinistra. Una variante dell'esempio precedente è l'elica conica con parametrizzazione $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, che è sempre una curva regolare dello spazio con vettore tangente $\gamma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ (si veda la Figura 1.6 a destra).

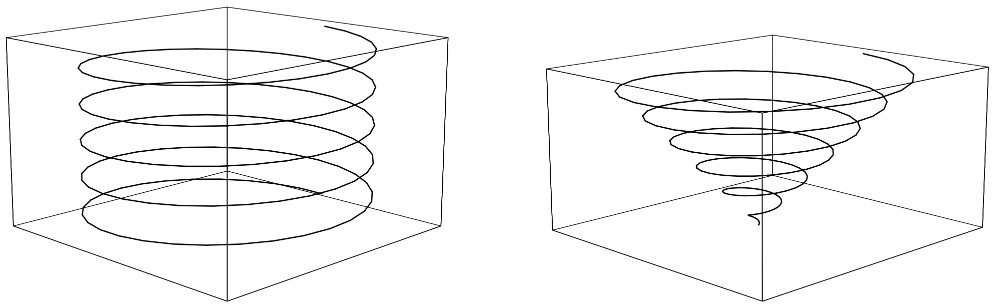


Figura 1.6: Elica ellittica ed elica conica

Nelle applicazioni è utile considerare curve che si ottengono "incollando" vari pezzi.

> **Definizione 1.13 (Concatenamento di due curve).** Date due curve γ_1 e γ_2 tali che il punto finale di γ_1 coincida con il punto iniziale di γ_2, chiameremo concatenamento di γ_1 e γ_2 la curva, indicata con $\gamma_1 \oplus \gamma_2$, che si ottiene percorrendo prima γ_1 e poi γ_2.

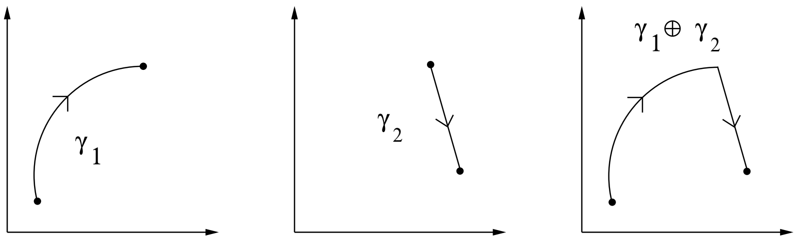


Figura 1.7: Concatenamento di due curve

Esempio 1.14. Siano date le due curve $\gamma_1(t) = (t-1, 1-t)$, $t \in [0,1]$, e $\gamma_2(t) = (\log(1+t), \log(1+t))$, $t \in [0, e-1]$. Osserviamo che $\gamma_1(1) = (0,0) = \gamma_2(0)$, quindi è possibile costruire il concatenamento $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ che risulta essere equivalente a $\widetilde{\gamma}(t) = (t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$.

Definizione 1.15 (Curva regolare a tratti). Diremo che una curva γ è regolare a tratti se è il concatenamento di un numero finito di curve regolari.

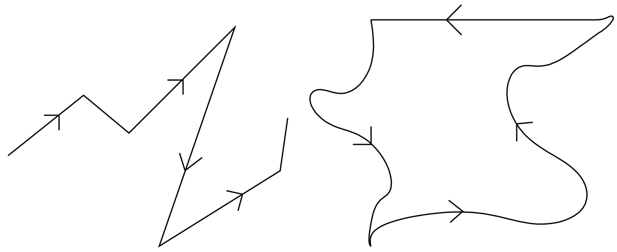


Figura 1.8: Curve regolari a tratti

Esempio 1.16. Una spezzata è regolare a tratti, in quanto concatenamento di segmenti.

1.2 Lunghezza di una curva e parametro arco

Vogliamo calcolare la lunghezza di un arco di curva piana regolare con parametrizzazione $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ su un intervallo $[a, b]$. Per calcolare la lunghezza della curva utilizzeremo il metodo degli elementi infinitesimi descritto nel Paragrafo 6.4 del primo volume. Consideriamo quindi un intervallino $[t, t + dt]$ nell'intervallo dei parametri $[a, b]$; a tale intervallino corrisponde un piccolo arco di curva, che in prima approssimazione possiamo pensare come un segmento.
Questo segmento può essere visto come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente cateti rispettivamente di lunghezza $|x(t+dt) - x(t)|$ e $|y(t+dt) - y(t)|$ e quindi, per il teorema di Pitagora, ha lunghezza

$$ds = \sqrt{[x(t + dt) - x(t)]^2 + [y(t + dt) - y(t)]^2} \ .$$

Dalla definizione di derivata abbiamo che

$$x(t + dt) - x(t) \simeq x'(t)\, dt\,, \qquad y(t + dt) - y(t) \simeq y'(t)\, dt\,,$$

ossia commettiamo solo un piccolo errore se sostituiamo all'incremento della x la quantità $x'(t)\, dt$ e all'incremento della y la quantità $y'(t)\, dt$ (in realtà,

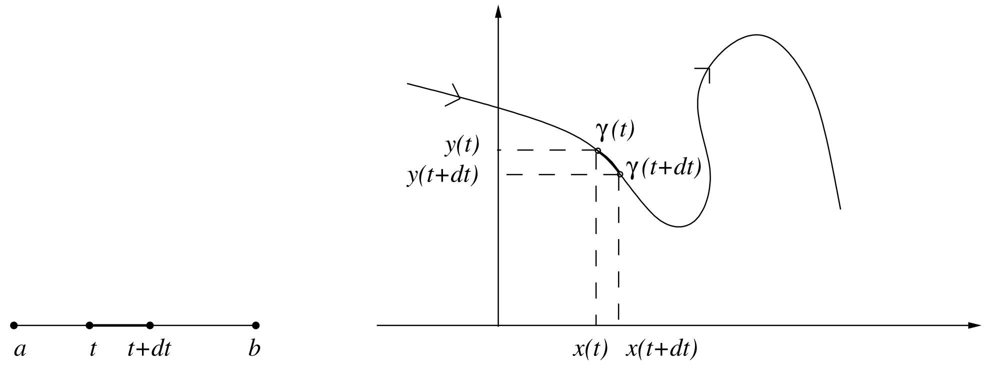


Figura 1.9: Lunghezza di una curva

la dimostrazione del fatto che questo errore sia trascurabile nel calcolo della lunghezza della curva non è immediata e sfrutta il fatto che $x'(t)$ e $y'(t)$ sono funzioni continue in $[a,b]$). Quindi la lunghezza ds del piccolo arco di curva considerato con buona approssimazione vale

$$ds = \sqrt{x'(t)^2(dt)^2 + y'(t)^2(dt)^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt\ . \tag{1.4}$$

La lunghezza dell'intero arco di curva si ottiene "sommando" queste lunghezze infinitesime, ossia calcolando l'integrale definito

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ dt\ .} \tag{1.5}$$

La definizione si estende in maniera ovvia al caso n–dimensionale.

Definizione 1.17 (Lunghezza di una curva). Data una curva parametrica regolare $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a,b]$, la sua lunghezza è

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \ldots + x_n'(t)^2}\ dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ dt\ .$$

Osservazione 1.18. Supponiamo che due curve parametriche $\gamma_1(t)$, $t \in [a,b]$, e $\gamma_2(t)$, $t \in [c,d]$ siano equivalenti e sia $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ una funzione biunivoca, di classe C^1 tale che $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in (c,d)$ (oppure $\varphi'(t) < 0$ per ogni $t \in (c,d)$) e $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ per ogni $t \in [c,d]$. Allora, per la formula di derivazione delle funzioni composte, $\|\gamma'_2(t)\| = |\varphi'(t)| \|\gamma'_1(\varphi(t))\|$. Supponiamo che $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in (c, d)$. Allora si ottiene

$$L(\gamma_2) = \int_c^d \|\gamma'_2(t)\| \, dt = \int_c^d \varphi'(t)\|\gamma'_1(\varphi(t))\| \, dt = \int_a^b \|\gamma'_1(\tau)\| \, d\tau = L(\gamma_1)\,,$$

dove la penultima uguaglianza è un'integrazione per sostituzione che tiene conto del fatto che $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$. In maniera analoga, se $\varphi'(t) < 0$ per ogni $t \in (c, d)$, si ha $\|\gamma'_2(t)\| = -\varphi'(t)\|\gamma'_1(\varphi(t))\|$ e $b = \varphi(c)$, $a = \varphi(d)$, quindi si arriva allo stesso risultato.

In conclusione, la lunghezza di una curva non dipende dalla velocità con cui la curva è percorsa né dal verso di percorrenza, come del resto deve essere da un punto di vista geometrico.

Osservazione 1.19. Se la curva γ è il grafico di una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1, una sua parametrizzazione è $\gamma(t) = (t, f(t))$ e la lunghezza di γ è

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt\,,$$

che corrisponde a quanto ottenuto nel Paragrafo 6.4.2 del primo volume.

Esempio 1.20. Calcoliamo la lunghezza dell'arco di spirale piana $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [0, 6\pi]$. Abbiamo $\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$, $t \in [0, 6\pi]$, e quindi

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{6\pi} e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} \, dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{6\pi} e^t \, dt = \sqrt{2}(e^{6\pi} - 1)\,. \end{aligned}$$

Data una curva regolare $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, la funzione $s\colon [a, b] \to [0, L(\gamma)]$ definita da

$$\boxed{s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau} \qquad \binom{\text{parametro}}{\text{arco}} \tag{1.6}$$

è una funzione derivabile (per il Teorema di Torricelli, si veda il Teorema 6.6 del primo volume) e strettamente monotona crescente (perché la funzione integranda è strettamente positiva) e quindi è invertibile in $[a, b]$. La funzione

$s(t)$, che misura la lunghezza dell'arco di curva dal punto iniziale $\gamma(a)$ al punto $\gamma(t)$ raggiunto al tempo t, prende il nome di **parametro arco** (o ascissa curvilinea).

Se indichiamo con $t(s)\colon [0, L(\gamma)] \to [a, b]$ la funzione inversa del parametro arco, la curva γ può essere parametrizzata dal parametro arco con la composizione $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$. Per la formula di derivazione della funzione composta si ha che

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{ds}(s) = \frac{d\gamma}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}(s) = \gamma'(t(s))\frac{dt}{ds}(s)\,. \tag{1.7}$$

Calcoliamo $\dfrac{dt}{ds}(s)$. Dal momento che $t(s)$ è la funzione inversa di $s(t)$, si ha

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\dfrac{ds}{dt}(t(s))}$$

(si veda il Teorema 4.32 del primo volume). Inoltre $s(t)$ è la funzione integrale di $\|\gamma'(t)\|$, quindi, per il Teorema di Torricelli si ha

$$\frac{ds}{dt}(t(s)) = \|\gamma'(t(s))\|\,.$$

Tornando alla formula (1.7), abbiamo ottenuto che

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{ds}(s) = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|}\,,$$

ossia il vettore tangente relativo alla parametrizzazione attraverso il parametro arco coincide con il versore tangente alla curva.

1.3 Calcolo differenziale per vettori

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto la nozione di derivata di un vettore dipendente dal tempo con componenti derivabili. La derivata di un vettore $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$ è il vettore

$$\vec{u}\,'(t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(t) = (u_1'(t), u_2'(t), \ldots, u_n'(t)) \in \mathbb{V}^n$$

che ha come componenti le derivate delle componenti di $\vec{u}(t)$. Se pensiamo $\vec{u}(t)$ come la traiettoria di un punto materiale, il vettore derivata $\vec{u}\,'(t)$ corrisponde alla velocità con cui il punto percorre la traiettoria.

Data una traiettoria, è possibile introdurre altre quantità, oltre alla velocità, che descrivono la geometria della curva. Per fare questo abbiamo preliminarmente bisogno di vedere come si calcola la derivata del prodotto scalare e del prodotto vettoriale tra vettori dello spazio che variano nel tempo.

Teorema 1.21. *Siano dati due vettori* $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ *e* $\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ *dello spazio le cui componenti* $u_i(t)$ *e* $v_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, *sono funzioni derivabili in* $[a, b]$. *Allora si ha che*

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{u}(t), \vec{v}(t)\rangle = \left\langle \vec{u}\,'(t), \vec{v}(t)\right\rangle + \left\langle \vec{u}(t), \vec{v}\,'(t)\right\rangle \tag{1.8}$$

e

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)) = \vec{u}\,'(t) \wedge \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \wedge \vec{v}\,'(t)\,. \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che il prodotto scalare tra $\vec{u}(t)$ e $\vec{v}(t)$ è dato da

$$\langle \vec{u}(t), \vec{v}(t)\rangle = u_1(t)v_1(t) + u_2(t)v_2(t) + u_3(t)v_3(t)\,.$$

Derivando rispetto a t e utilizzando la regola di derivazione del prodotto otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \vec{u}(t), \vec{v}(t)\rangle = u_1'(t)v_1(t) + u_1(t)v_1'(t) + u_2'(t)v_2(t) + u_2(t)v_2'(t) + \\ + u_3'(t)v_3(t) + u_3(t)v_3'(t)\,.\end{aligned}$$

A questo punto basta osservare che

$$\begin{aligned}u_1'(t)v_1(t) + u_2'(t)v_2(t) + u_3'(t)v_3(t) &= \left\langle \vec{u}\,'(t), \vec{v}(t)\right\rangle\,, \\ u_1(t)v_1'(t) + u_2(t)v_2'(t) + u_3(t)v_3'(t) &= \left\langle \vec{u}(t), \vec{v}\,'(t)\right\rangle\,,\end{aligned}$$

per ottenere la formula (1.8).

Per quanto riguarda il prodotto vettoriale, ricordiamo che

$$\begin{aligned}&\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t) = \\ &= (u_2(t)v_3(t) - u_3(t)v_2(t), u_3(t)v_1(t) - u_1(t)v_3(t), u_1(t)v_2(t) - u_2(t)v_1(t))\,.\end{aligned}$$

Facendo la derivata di ogni componente si ottiene la formula (1.9). Ad esempio, derivando la prima componente del prodotto vettoriale si ha che

$$\frac{d}{dt}(u_2(t)v_3(t) - u_3(t)v_2(t)) = u_2'(t)v_3(t) + u_2(t)v_3'(t) - u_3'(t)v_2(t) - u_3(t)v_2'(t)$$

che corrisponde esattamente alla prima componente del vettore $\vec{u}\,'(t) \wedge \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \wedge \vec{v}\,'(t)$. $\square$

CAPITOLO 12

Cenni sulle equazioni differenziali

Nella sua forma più generale, un'equazione differenziale è una relazione del tipo

$$g\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}(x), \frac{d^2y}{dx^2}(x), \dots, \frac{d^ny}{dx^n}(x)\right) = 0\,,$$

che lega una funzione $y(x)$ alle sue derivate fino all'ordine n. Noi lavoreremo quasi sempre con equazioni differenziali scritte in forma normale, ossia esplicitate rispetto alla derivata di ordine massimo nella forma

$$\frac{d^ny}{dx^n}(x) = f\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}(x), \frac{d^2y}{dx^2}(x), \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x)\right)\,. \tag{12.1}$$

Per alleggerire la notazione, in genere l'equazione (12.1) viene scritta nella forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})\,.$$

Questo non deve però far dimenticare che y è una funzione della variabile x e $y^{(k)}$ è la sua derivata di ordine k.

Definizione 12.1

*Una **soluzione dell'equazione differenziale** (12.1) è una funzione reale $y\colon I \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo I, derivabile n volte in I e che verifica l'equazione (12.1) per ogni x in I.*

In altri termini, per verificare se una data funzione $y\colon I \to \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione differenziale (12.1), basta calcolare tutte le sue derivate fino all'ordine $n-1$, andarle a sostituire in $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, poi calcolare la derivata di ordine n e vedere se le due funzioni ottenute sono uguali.

Esempio 12.2. Consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = y^{2/3}\,.$$

La funzione $y(x) = (\frac{x}{3} + 1)^3$, definita in tutto $\mathbb{R}$, è soluzione. Infatti è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$y'(x) = 3\left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 \frac{1}{3} = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2, \quad y(x)^{2/3} = \left[\left(\frac{x}{3} + 1\right)^3\right]^{2/3} = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2.$$

Verifichiamo ora che la funzione $y(x) = e^x$ non è soluzione dell'equazione differenziale: si ha $y'(x) = e^x$ e $y(x)^{2/3} = e^{\frac{2}{3}x}$. Poiché risulta $y'(x) \neq y(x)^{2/3}$ per ogni $x \neq 0$, la funzione non è soluzione dell'equazione. $\lhd$

L'esempio più semplice di equazione differenziale è dato da

$$y' = f(x)\,, \tag{12.2}$$

che corrisponde alla ricerca delle primitive di un'assegnata funzione f. Facciamo alcune osservazioni su questo problema.

1) Ci sono funzioni f non continue che non hanno nessuna primitiva (nessuna soluzione per (12.2)).
2) Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua sull'intervallo I, allora è noto che esistono infinite primitive di f definite in I (infinite soluzioni di (12.2)).
3) Data $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua sull'intervallo I, esiste una sola primitiva il cui grafico passa per un punto fissato (x_0, y_0) con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, ossia esiste un'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{12.3}$$

(un'unica soluzione di (12.2) che soddisfi una condizione iniziale).

Questa sarà la situazione anche in casi molto più generali: le soluzioni di un'equazione differenziale, se esistono, sono infinite e per sperare di selezionarne una sola è necessario imporre delle condizioni supplementari.

Definizione 12.3 ➯ Integrale generale

L'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale prende il nome di integrale generale dell'equazione.

Ci occuperemo solo di equazioni differenziali del primo e del secondo ordine ($n = 1$ o $n = 2$). Le condizioni supplementari che richiederemo per selezionare una soluzione particolare tra tutte quelle dell'integrale generale saranno sempre condizioni sul valore della funzione (ed eventualmente della sua derivata) in un fissato punto. Queste condizioni prendono il nome di **condizioni iniziali** e i problemi associati prendono il nome di **problemi di Cauchy**.

Definizione 12.4 ➾ Problema di Cauchy del primo ordine

Data un'equazione differenziale del primo ordine $y' = f(x, y)$, il problema di Cauchy associato a tale equazione con dato iniziale $y(x_0) = y_0$ sarà indicato con

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e corrisponderà alla determinazione di tutte le funzioni $y : I \to \mathbb{R}$ derivabili in un intervallo I contenente x_0, tali che $y'(x) = f(x, y(x))$ per ogni $x \in I$ e $y(x_0) = y_0$.

Definizione 12.5 ➾ Problema di Cauchy del secondo ordine

Data un'equazione differenziale del secondo ordine $y'' = f(x, y, y')$, il problema di Cauchy associato a tale equazione con dati iniziali $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = v_0$ sarà indicato con

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

e corrisponderà alla determinazione di tutte le funzioni $y : I \to \mathbb{R}$ derivabili due volte in un intervallo I contenente x_0, tali che $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ per ogni $x \in I$ e tali che $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = v_0$.

Osservazione 12.6. Ricordiamo che una funzione è determinata sia dalla "legge" che la definisce che dal suo dominio. Quindi la ricerca di una soluzione di un'equazione differenziale non si esaurisce una volta individuata una "legge" che verifichi puntualmente l'equazione, ma è necessario anche dichiarare su quale intervallo agisce tale "legge". Prendendo l'esempio semplice delle primitive, se vogliamo risolvere correttamente l'equazione $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$ dobbiamo dire che le soluzioni sono sia le funzioni $y(x) = \frac{1}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$, definite in $(0, +\infty)$, che le funzioni $y(x) = \frac{1}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$, definite in $(-\infty, 0)$. In particolare, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

è la funzione $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ definita in $(0, +\infty)$, mentre la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ y(-2) = -1 \end{cases}$$

è la funzione $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ definita in $(-\infty, 0)$. $\triangleleft$

I prossimi paragrafi saranno dedicati allo studio di particolari equazioni differenziali. Gli obiettivi che ci prefiggiamo sono due:

1) determinare delle condizioni sufficienti a garantire che esista un'unica soluzione per il problema di Cauchy;
2) fornire delle tecniche per la determinazione di tale soluzione.

Per capire graficamente cosa significhi avere un'unica soluzione del problema di Cauchy, consideriamo il caso di un'equazione del primo ordine e supponiamo di sapere che l'integrale generale sia costituito da funzioni definite su tutto l'asse reale.

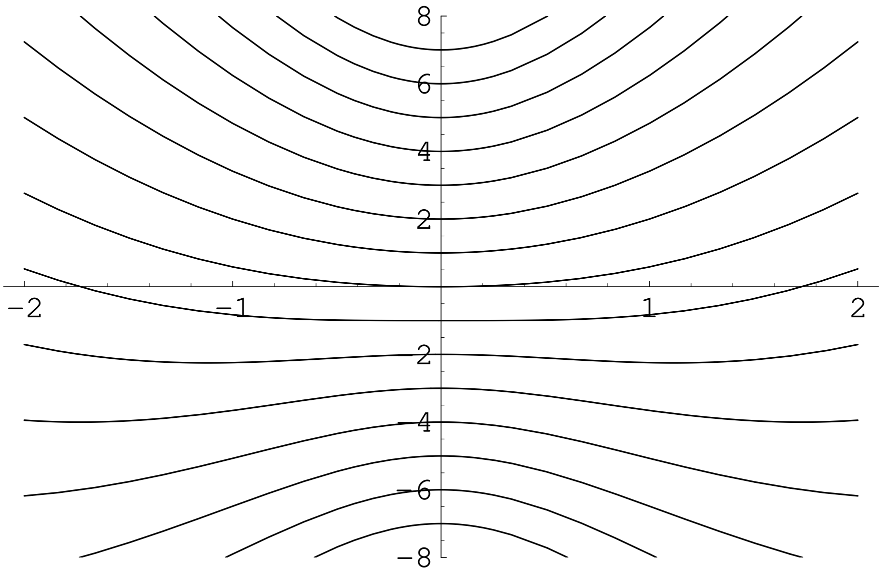


Figura 12.1: Integrale generale in ipotesi di esistenza e unicità

- Dire che **esiste** almeno una soluzione del problema di Cauchy per ogni dato iniziale $y(x_0) = y_0$ vuol dire che per ogni punto (x_0, y_0) del piano passa il grafico di una soluzione dell'equazione differenziale.
- Dire che la soluzione è **unica** corrisponde al fatto che i grafici di due soluzioni distinte dell'equazione differenziale non si possono intersecare.

Prima di procedere con la teoria, descriviamo alcuni esempi in cui un problema concreto si risolve attraverso lo studio di un'equazione differenziale.

Esempio 12.7 (Pilastro carico)**.** Si vuole costruire un pilastro di sezione circolare che sostenga un peso K ad un'altezza H. Si conosce il materiale con cui si vuole costruire il pilastro. In particolare sono noti il peso specifico p e il carico di sicurezza σ_0 (ricordiamo che σ_0 è la massima compressione per unità di area ben sopportata dal materiale). Si vuole conoscere il profilo del pilastro che permetta di utilizzare meno materiale possibile. Chiaramente il profilo è noto se per ogni quota h compresa tra 0 (il suolo) e H (altezza del pilastro) si conosce l'area $A(h)$ della sezione del pilastro a tale quota. Cercheremo un profilo per cui $A(h)$ sia una funzione continua.

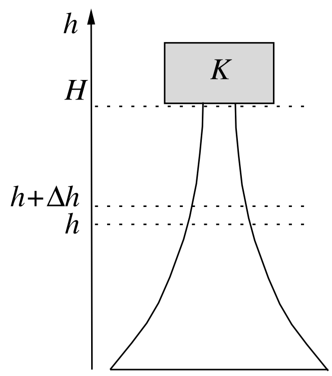


Figura 12.2: Pilastro carico

Non è restrittivo supporre che lo sforzo normale dipenda solo dalla quota h, ossia che sia costante su ogni sezione. Indicheremo con $N(h)$ tale sforzo di compressione. Fissiamo due quote distinte h e $h + \Delta h$ in $[0, H]$, con $\Delta h > 0$. Se Δh è abbastanza piccolo allora, per l'ipotesi di continuità del profilo, la porzione di pilastro compresa tra la quota h e la quota $h+\Delta h$ è approssimativamente un cilindro con area di base $A(h)$ e altezza Δh il cui peso è $A(h)p\,\Delta h$. Quindi si ha che

$$N(h) = N(h + \Delta h) + A(h)p\,\Delta h\,. \tag{12.4}$$

D'altra parte, per ottimizzare la quantità di materiale, lo sforzo normale per unità di superficie dovrà sempre coincidere con il carico di sicurezza. Avremo quindi

$$\frac{N(h + \Delta h)}{A(h + \Delta h)} = \sigma_0\,, \qquad \frac{N(h)}{A(h)} = \sigma_0$$

da cui si ricavano le identità

$$N(h + \Delta h) = \sigma_0 A(h + \Delta h)\,, \qquad N(h) = \sigma_0 A(h)\,,$$

che ci permettono di riscrivere la relazione (12.4) solo in termini della funzione incognita $A(h)$:

$$\sigma_0(A(h + \Delta h) - A(h)) = -A(h)p\,\Delta h\,. \tag{12.5}$$

Dividendo ambo i membri per $\sigma_0\,\Delta h$, otteniamo

$$\frac{A(h+\Delta h)-A(h)}{\Delta h}=-\frac{p}{\sigma_0}A(h)\,.$$

Infine, passando al limite per Δh che tende a zero arriviamo all'equazione differenziale

$$A'(h)=-\frac{p}{\sigma_0}A(h)$$

che lega $A(h)$ alla sua derivata. Per le osservazioni fatte in precedenza, ci aspettiamo che questa equazione differenziale abbia infinite soluzioni. Ma noi abbiamo la possibilità di aggiungere all'equazione una condizione iniziale perché sappiamo a priori che $K/A(H)=\sigma_0$. Infatti, anche alla quota massima H la compressione per unità di superficie dovrà valere σ_0, ma in questo caso sappiamo che la compressione $N(H)$ è dovuta solo al peso K che si trova sopra il pilastro. Quindi la nostra funzione incognita $A(h)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} A'(h)=-\frac{p}{\sigma_0}A(h)\,, & h\in[0,H] \\ A(H)=K/\sigma_0\,. \end{cases} \tag{12.6}$$

Si può verificare che la soluzione del problema è

$$A(h)=\frac{K}{\sigma_0}e^{\frac{p}{\sigma_0}(H-h)}\,,\qquad h\in[0,H]\,,$$

da cui si ricava che il pilastro ha sezione che decresce esponenzialmente. Notiamo che, per ogni h fissato, l'area $A(h)$ della sezione del pilastro cresce esponenzialmente all'aumentare dell'altezza H del pilastro (quindi alzare il pilastro, anche di poco, costa molto), mentre varia solo linearmente al variare del peso K che deve sopportare. $\lhd$

Esempio 12.8 (Modello logistico)**.** Consideriamo una popolazione che al tempo t sia composta da $N(t)$ individui. Se si suppone che la popolazione sia isolata, le densità di nascite e di morti saranno costanti che indicheremo rispettivamente con $\nu\geq 0$ e con $\mu\geq 0$, e la variazione della popolazione $N'(t)$ sarà proporzionale a $(\nu-\mu)N(t)$. Inoltre, nell'ipotesi che la popolazione disponga di risorse limitate, la variazione della popolazione dovrà decrescere al crescere di N fino ad arrestarsi in corrispondenza di un numero critico n_0 di individui. Questa dinamica può essere descritta dall'equazione differenziale

$$N'(t)=(\nu-\mu)N(t)\left(1-\frac{N(t)}{n_0}\right)\,,$$

che prende il nome di *modello logistico*. Se fissiamo il numero iniziale di individui $N(0) = s$ con $0 < s < n_0$, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa questa condizione iniziale è

$$N(t) = \frac{n_0 s e^{(\nu-\mu)t}}{n_0 - s + s e^{(\nu-\mu)t}} .$$

Quindi se $\nu - \mu > 0$ (ossia se ci sono più nascite che morti), la popolazione aumenta e per tempi grandi tende a stabilizzarsi sul numero critico n_0. Se invece $\nu - \mu < 0$ (ossia se ci sono più morti che nascite), la popolazione tende ad estinguersi. $\triangleleft$

Esempio 12.9 (Oscillazioni libere)**.** Consideriamo un corpo di massa m poggiato su un piano e collegato ad un muro attraverso una molla di costante elastica $k > 0$. Se indichiamo con $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, lo spostamento al tempo t dalla posizione di equilibrio e se supponiamo che non ci sia attrito sul piano, l'unica forza che agisce è la forza di richiamo della molla $F = -kx(t)$, proporzionale allo spostamento. Il moto del corpo è determinato dalla seconda legge di Newton $F = ma$, che in questo caso diventa

$$mx''(t) = -kx(t) .$$

Vedremo nel Paragrafo 12.3 che questa equazione differenziale del secondo ordine ammette infinite soluzioni tutte della forma

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) ,$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$, mentre A e B sono costanti reali arbitrarie.
Utilizzando semplici formule trigonometriche si ottiene che $x(t)$ può essere scritta come

$$x(t) = r\cos(\omega t - \alpha)$$

con r e α costanti reali arbitrarie. In questo modo è più facile vedere che il moto è periodico, l'ampiezza massima dell'oscillazione è $|r|$ e la sua frequenza è $\omega/(2\pi)$. $\triangleleft$

Mettere a posto figura! Alcune oscillazioni smorzate con attrito dominante

Esempio 12.10 (Oscillazioni smorzate)**.** Consideriamo il problema delle oscillazioni su un piano con attrito. Con buona approssimazione si può supporre che l'attrito sia proporzionale e di verso opposto alla velocità del corpo. Quindi la seconda legge di Newton in questo caso diventa

$$mx''(t) = -kx(t) - hx'(t) ,$$

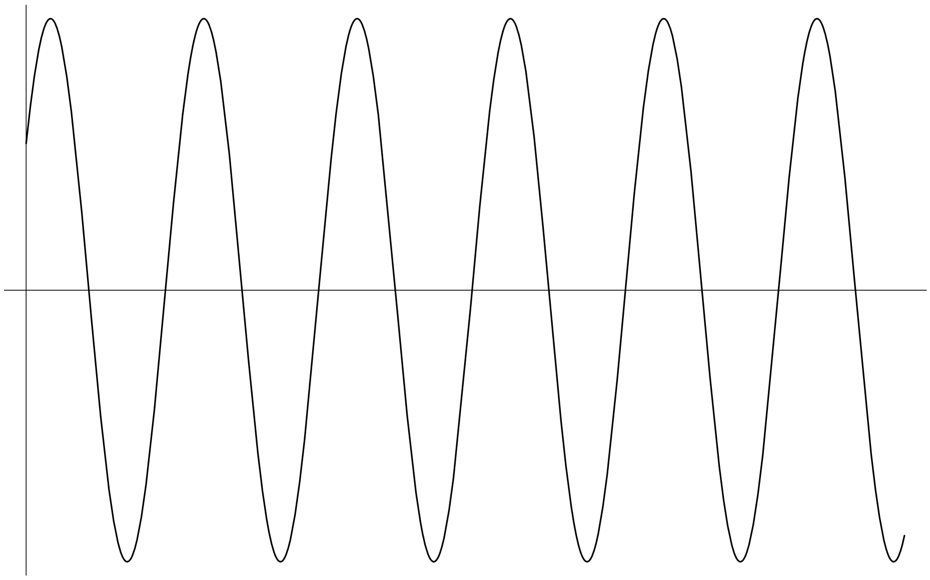


Figura 12.3: Oscillazioni libere

con $h > 0$. Come vedremo nel Paragrafo 12.3, questa equazione differenziale ha soluzioni diverse in funzione della differenza $h^2 - 4km$ (h è il coefficiente di attrito, k è la costante elastica della molla).
(a) Se $h^2 > 4km$ (attrito dominante), le soluzioni dell'equazione differenziale hanno tutte la forma $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, dove

$$\lambda_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} \, .$$

e A, B sono costanti reali arbitrarie. Notiamo che λ_1 e λ_2 sono entrambi negativi e quindi il moto, che non è più periodico come nel caso dell'oscillatore libero, si smorza in maniera esponenziale (si veda la Figura 12).
(b) Se $h^2 = 4km$ (attrito bilanciato dalle forze di richiamo), le soluzioni sono tutte della forma $x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{h}{2m}t}$, con A e B costanti reali arbitrarie. Quindi l'andamento è simile al caso di attrito dominante, ma il moto si smorza un po' più lentamente.
(c) Se $h^2 < 4km$ (attrito debole), le soluzioni sono tutte della forma

$$x(t) = e^{-\frac{h}{2m}t}(A\cos(qt) + B\sin(qt))$$

dove $q = \frac{\sqrt{4km-h^2}}{2m}$ e A, B sono costanti reali arbitrarie. In questo caso l'andamento è oscillante, ma l'ampiezza dell'oscillazione decresce in maniera esponenziale (si veda la Figura 12.4). $\triangleleft$

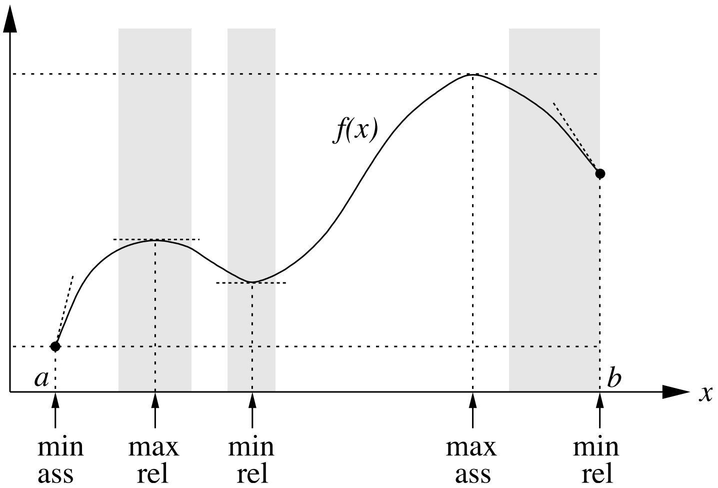


Figura 12.4: Oscillazioni smorzate con attrito debole

12.1 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Vogliamo studiare equazioni differenziali del primo ordine della forma

$$y' = f(x)g(y) \tag{12.7}$$

con f e g funzioni reali di una variabile reale. Le condizioni che garantiscono l'esistenza e l'unicità per il problema di Cauchy sono le seguenti.

Teorema 12.11

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo aperto I e sia $g\colon J \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 nell'intervallo aperto J. Allora per ogni $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ esiste un'unica soluzione $y\colon I_\delta \to J$, definita in un opportuno intorno I_δ di x_0, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \,. \end{cases} \tag{12.8}$$

Se g è una funzione costante, il problema si riduce alla ricerca delle primitive della funzione f, che sappiamo di poter risolvere se la funzione f è continua. Questo motiva la richiesta di continuità di f. Per quanto riguarda g, non solo viene richiesta la continuità della funzione, ma anche della sua derivata prima. Per capire perché, consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = y^{2/3}\,,$$

equazione del primo ordine a variabili separabili con $f(x) = 1$ e $g(y) = y^{2/3}$. Notiamo che la funzione g è continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in 0. Si verifica facilmente che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{12.9}$$

ammette sia la soluzione $y(x) = 0$ che la soluzione $y(x) = x^3/27$.

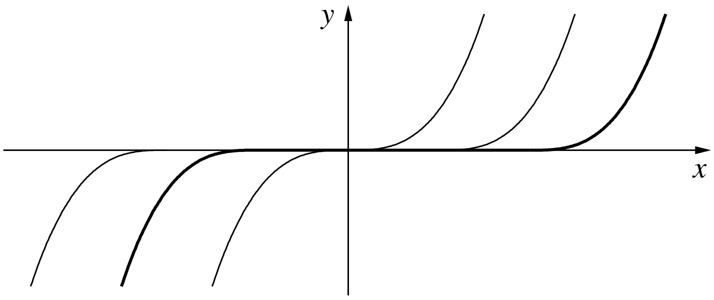


Figura 12.5: Alcune soluzioni del problema di Cauchy (12.9)

Incidentalmente notiamo che anche la funzione definita da

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x^3/27 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ ed è soluzione del precedente problema di Cauchy.

Quindi la sola continuità della funzione g (che, anche se non possiamo spiegare perché, basterebbe a garantire l'esistenza della soluzione) non basta per avere l'unicità.

Ora sappiamo che, sotto le ipotesi del Teorema 12.1, esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy con dato $y(x_0) = y_0$. Vediamo in che modo la possiamo determinare. Dal momento che il procedimento, descritto in generale, potrebbe risultare complicato, affiancheremo alla descrizione generale un caso concreto, corrispondente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y^3 \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

che verrà descritto tra parentesi quadre. Partiamo dall'equazione

$$y' = f(x)g(y)\,. \qquad \left[y' = x^2 y^3\right]$$

Osserviamo che se $g(y_0) = 0$, allora per ogni $x_0 \in I$ l'unica soluzione del problema di Cauchy (12.8) è $y(x) = y_0$, $x \in I$. [Nell'esempio, abbiamo $y_0 = 2$ e $g(y_0) = 8$, quindi il problema non ha soluzione costante.]

Assumiamo ora $g(y_0) \neq 0$. Per la continuità della funzione g e per il Teorema della permanenza del segno (Teorema 3.24 del primo volume) $g(y)$ ha lo stesso segno di $g(y_0)$ se $y \in J$ è abbastanza vicino a y_0. Sia J_0 il più grande intervallo aperto, contenuto in J e contenente y_0, tale che $g(y)$ ha lo stesso segno di $g(y_0)$ per ogni $y \in J_0$. Poiché stiamo assumendo che la funzione incognita $y(x)$ sia continua, esiste un intorno I_δ di x_0 tale che $y(x)$ appartiene a J_0 per ogni $x \in I_\delta$. In particolare $g(y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I_\delta$. [Nell'esempio abbiamo $y_0 = 2$, $J_0 = (0, +\infty)$ e possiamo supporre $y^3(x)$ strettamente positiva per x in un intorno (per ora incognito) di $x_0 = 1$.]

A questo punto possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per la quantità non nulla $g(y(x))$, $x \in I_\delta$, ottenendo

$$\frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x) \qquad \left[\frac{1}{y^3(x)} y'(x) = x^2 \right].$$

Le funzioni che compaiono ai due membri di questa identità devono avere la stessa famiglia di primitive:

$$\int \frac{1}{g(y(x))} y'(x)\, dx = \int f(x)\, dx \qquad \left[\int \frac{1}{y^3(x)} y'(x)\, dx = \int x^2\, dx \right].$$

Osserviamo che il membro di sinistra può essere integrato per sostituzione, ottenendo

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy \bigg|_{y=y(x)} = \int f(x)\, dx \qquad \left[\int \frac{1}{y^3}\, dy \bigg|_{y=y(x)} = \int x^2\, dx \right]. \tag{12.10}$$

Chiamiamo $G(y)$ una primitiva in J_0 di $\frac{1}{g(y)}$ e $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ in I [$G(y) = -1/(2y^2)$ in $(0, +\infty)$, $F(x) = x^3/3$]. L'uguaglianza precedente si può quindi scrivere come

$$G(y(x)) = F(x) + c\,, \qquad \left[-\frac{1}{2y^2(x)} = \frac{x^3}{3} + c \right],$$

dove c è una costante reale che si determina attraverso la condizione iniziale. Deve infatti essere $G(y_0) = F(x_0) + c$, da cui $c = G(y_0) - F(x_0)$. [Nell'esempio $c = -11/24$.] Una volta determinata c, abbiamo un'identità che definisce implicitamente la funzione $y(x)$. [Nell'esempio $-1/(2y^2) = x^3/3 - 11/24$.] Ora si tratta di esplicitare la y in funzione della x. Ricordiamo che $g(y(x))$ è sempre positiva oppure sempre negativa in I_δ. Dal momento che $1/g(y)$ è la derivata di $G(y)$ (per definizione di primitiva), per il test di monotonia (Teorema 4.51 del primo volume) avremo che G è una funzione strettamente monotona in J_0 e quindi invertibile con inversa G^{-1} definita sull'immagine attraverso G di J_0. [Nell'esempio $G^{-1}(z) = (-2z)^{-1/2}$, definita in $(-\infty, 0)$.] Se ci restringiamo ad un intervallo $\tilde{I}_\delta \subseteq I_\delta$ tale che $F(x) + c$ appartenga all'immagine di J_0 attraverso G [nell'esempio si deve porre $x^3/3 - 11/24 < 0$, verificata per x nella semiretta $(-\infty, \sqrt[3]{11}/2)$ contenente $x_0 = 1$], otterremo l'espressione esplicita della soluzione

$$y(x) = G^{-1}(F(x)+c),\ x \in \tilde{I}_\delta. \qquad \left[y(x) = \left(\frac{11}{12} - \frac{2x^3}{3} \right)^{-\frac{1}{2}},\ x \in (-\infty, \sqrt[3]{11}/2) \right]$$

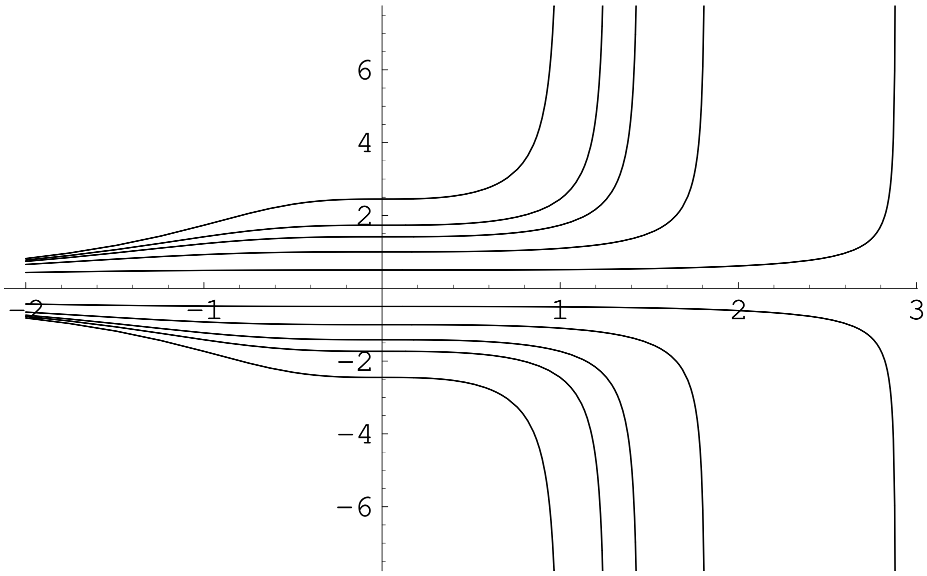


Figura 12.6: Integrale generale di $y' = x^2 y^3$

Osserviamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale (12.7) non è altro che l'insieme di tutte le soluzioni dei problemi di Cauchy (12.8) al variare di $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Ad esempio, l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = x^2 y^3$ è

$$y(x) = \begin{cases} \left(-\frac{2x^3}{3} - 2c\right)^{-1/2},\ x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{2y_0^2} + x_0^3}\right) & \text{se } y_0 > 0 \\ 0,\ x \in \mathbb{R} & \text{se } y_0 = 0 \\ -\left(-\frac{2x^3}{3} - 2c\right)^{-1/2},\ x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{2y_0^2} + x_0^3}\right) & \text{se } y_0 < 0\,, \end{cases}$$

con $c = G(y_0) - F(x_0) = -1/(2y_0^2) - x_0^3/3$.

Esempio 12.12 (Modello logistico)**.** Abbiamo visto che nel modello logistico, il numero $N(t)$ dei componenti della comunità al tempo t deve essere soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} N'(t) = (\nu - \mu)N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{n_0}\right) \\ N(0) = s \end{cases}$$

relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili. Utilizziamo la tecnica illustrata prima per determinare $N(t)$. Osserviamo preliminarmente che se $s = n_0$, allora $N(t) = n_0$ per ogni $t \geq 0$ è soluzione. Analogamente, se $s = 0$, allora $N(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ è soluzione. Quindi se il numero iniziale di componenti della comunità è zero o corrisponde al numero critico n_0 la popolazione è stazionaria. Siamo interessati al caso $0 < s < n_0$. Per il teorema di unicità, la soluzione corrispondente a tale dato sarà sempre compresa tra 0 e n_0. Dall'equazione si ricava che

$$n_0 \frac{1}{N(t)(n_0 - N(t))} N'(t) = (\nu - \mu)\,.$$

Integrando e cambiando le variabili nell'integrale di sinistra otteniamo

$$n_0 \int \frac{1}{N(n_0 - N)}\, dN = (\nu - \mu)t + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,. \tag{12.11}$$

A sinistra abbiamo un'integrale di funzione razionale con denominatore di secondo grado che si annulla per $N = 0$ ed $N = n_0$. Utilizzando il metodo di decomposizione in fratti semplici descritto nel Paragrafo 5.3 del primo volume otteniamo che

$$\frac{1}{N(n_0 - N)} = \frac{1}{n_0}\frac{1}{N} + \frac{1}{n_0}\frac{1}{n_0 - N}\,,$$

e quindi, tenendo conto che $0 < N < n_0$, la (12.11) diventa

$$\log\left(\frac{N}{n_0 - N}\right) = (\nu - \mu)t + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,. \tag{12.12}$$

A questo punto conviene calcolare la costante c. Dalla condizione iniziale otteniamo che $\log\left(\frac{s}{n_0 - s}\right) = c$ e la relazione (12.12) diventa

$$\log\left(\frac{N}{n_0 - N} \cdot \frac{n_0 - s}{s}\right) = (\nu - \mu)t\,, \quad t \geq 0\,.$$

Iniziamo ad esplicitare la funzione N, calcolando l'esponenziale di ambo i membri e ottenendo

$$\frac{N}{n_0 - N} = \frac{s}{n_0 - s} e^{(\nu - \mu)t}\,,$$

da cui si ricava

$$N(t) = \frac{s}{n_0 - s} e^{(\nu-\mu)t} (n_0 - N(t)) \, ,$$

$$\left(1 + \frac{s}{n_0 - s} e^{(\nu-\mu)t}\right) N(t) = \frac{s n_0}{n_0 - s} e^{(\nu-\mu)t}$$

e infine

$$N(t) = \frac{\frac{s n_0}{n_0 - s} e^{(\nu-\mu)t}}{1 + \frac{s}{n_0 - s} e^{(\nu-\mu)t}} = \frac{s n_0 e^{(\nu-\mu)t}}{n_0 - s + s e^{(\nu-\mu)t}} \, , \quad t \geq 0 \, ,$$

come annunciato nell'Esempio 12.8. ◁

Osservazione 12.13. La relazione (12.10) è stata rigorosamente ottenuta dall'equazione differenziale attraverso un'integrazione indefinita nella variabile x e un successivo cambiamento di variabili nell'integrale di sinistra. Mostriamo ora un procedimento puramente formale, ma molto semplice da ricordare, che porta dall'equazione differenziale alla relazione integrale (12.10). L'equazione può essere scritta come

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y) \, .$$

Se pensiamo formalmente $\frac{dy}{dx}$ non come un simbolo, ma come un vero rapporto (cosa che, ribadiamo, rigorosamente non ha senso) possiamo, oltre a dividere per $g(y)$, moltiplicare ambo i membri per dx, ottenendo

$$\frac{1}{g(y)} \, dy = f(x) \, dx$$

e quindi, "integrando ambo i membri", la formula (12.10).

Ad esempio, se vogliamo determinare l'integrale generale di $y' = e^{-y}$, arriviamo alla relazione integrale nel modo seguente:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} \implies e^y \, dy = dx \implies \int e^y \, dy = \int dx$$

da cui si ottiene l'identità $e^y = x + c$, che risulta invertibile per $x > -c$. Otteniamo così che l'integrale generale è costituito dalle funzioni $y(x) = \log(x + c)$ definite nell'intervallo $(-c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. ◁

12.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Consideriamo ora equazioni differenziali della forma

$$y' = a(x) y + b(x) \, ,$$

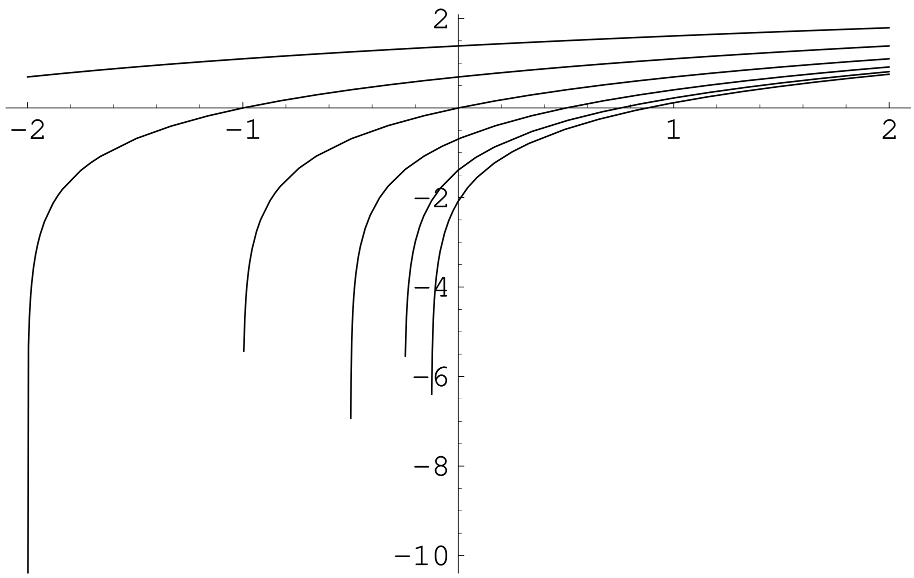


Figura 12.7: Integrale generale di $y' = e^{-y}$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Equazioni differenziali di questa forma si dicono lineari perché il secondo membro è un polinomio di primo grado nella variabile y con coefficienti che dipendono solo dalla variabile x. Osserviamo che se $b(x) = 0$ in I l'equazione diventa

$$y' = a(x)y\,, \tag{12.13}$$

che è un'equazione a variabili separabili che sappiamo risolvere (la (12.13) prende il nome di equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine). Ovviamente $y = 0$ appartiene all'integrale generale della (12.13) e corrisponde al problema di Cauchy con dato $y(x_0) = y_0 = 0$. Ricordiamo che il risultato di unicità della soluzione del problema di Cauchy garantisce che soluzioni differenti della stessa equazione differenziale non possano avere i grafici che si intersecano. Dal momento che $y(x) = 0$, $x \in I$ (il cui grafico è l'intervallo I sull'asse x) è soluzione con dato $y(x_0) = 0$, ogni soluzione con dato iniziale $y(x_0) = y_0 \neq 0$ non potrà attraversare l'asse delle x e quindi avrà sempre il segno di y_0. Quindi se abbiamo una condizione iniziale $y(x_0) = y_0 \neq 0$, possiamo dividere nell'equazione differenziale per y, ottenendo

$$\frac{1}{y}y' = a(x)\,,$$

da cui si ricava che

$$\log|y| = \int a(x)\,dx\,. \tag{12.14}$$

Se indichiamo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in I, sappiamo che $\int a(x)\,dx = A(x) + c$ dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Dalla (12.14) otteniamo che

$|y| = e^{A(x)+c}$. Se chiamiamo $C = e^c$, abbiamo che $|y| = Ce^{A(x)}$ per ogni $C > 0$. Quindi l'integrale generale è costituito dalla soluzione nulla e dalle funzioni $y = Ce^{A(x)}$ o $y = -Ce^{A(x)}$, con $C > 0$ arbitraria. Sinteticamente possiamo riassumere questi tre casi con

$$y(x) = Ce^{A(x)}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

che è l'integrale generale dell'equazione (12.13).

Teorema 12.14 ➯ Integrale generale di equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine

Sia $a\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I e sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in I. Allora l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = a(x)y$ è dato da $y(x) = Ce^{A(x)}$, $x \in I$, $C \in \mathbb{R}$, mentre la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y\,, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è data da $y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$, $x \in I$.

Dimostrazione. La caratterizzazione dell'integrale generale dell'equazione differenziale è già stata mostrata. Per quanto riguarda il problema di Cauchy, dobbiamo solo selezionare all'interno dell'integrale generale la funzione che verifica la condizione iniziale. Avremo che $y_0 = Ce^{A(x_0)}$. Quindi se scegliamo la primitiva $A(x)$ di $a(x)$ in modo tale da avere $A(x_0) = 0$, otterremo che $C = y_0$. A questo punto basta osservare che l'unica primitiva $A(x)$ di $a(x)$ che verifica $A(x_0) = 0$ è data dalla funzione integrale $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$. □

Esempio 12.15. Il problema di Cauchy soddisfatto dalla sezione del pilastro carico è

$$\begin{cases} A'(h) = -\frac{p}{\sigma_0} A(h) \\ A(H) = K/\sigma_0\,. \end{cases} \tag{12.15}$$

Si tratta quindi di risolvere un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine con coefficiente $a(x) = -\frac{p}{\sigma_0}$. Utilizzando la formula risolutiva, otteniamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$A(h) = Ce^{-\frac{p}{\sigma_0}h}\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

e il problema di Cauchy ha come unica soluzione la funzione corrispondente alla costante C che verifica

$$\frac{K}{\sigma_0} = Ce^{-\frac{p}{\sigma_0}H}\,,$$

come annunciato nell'Esempio 12.7. ◁

Passiamo ora alle equazioni differenziali lineari del primo ordine non omogenee, ossia con $b(x)$ non identicamente nulla.

Teorema 12.16 ➫ Integrale generale di equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine

Siano a, $b\colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue nell'intervallo I e sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in I. Allora l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = a(x)y + b(x)$ è

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int b(x)e^{-A(x)}\, dx \right), \qquad x \in I\,, \tag{12.16}$$

mentre la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)\,, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è la funzione

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)\, d\sigma}\, ds \right), \qquad x \in I\,. \tag{12.17}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa su alcune osservazioni.
1) Ogni funzione della forma (12.16) è effettivamente soluzione dell'equazione. Infatti se indichiamo con $C(x)$ una primitiva di $b(x)e^{-A(x)}$, riscriviamo la funzione y definita in (12.16) come $y(x) = (C(x) + c)e^{A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$, e la deriviamo, otteniamo

$$y' = A'(x)e^{A(x)}(C(x)+c)+e^{A(x)}C'(x) = a(x)y+e^{A(x)}b(x)e^{-A(x)} = a(x)y+b(x).$$

2) La soluzione del problema di Cauchy scritta in (12.17) è semplicemente ottenuta prendendo le funzioni della forma (12.16), che dipendono da una costante arbitraria attraverso l'integrale indefinito scritto tra parentesi tonde, e calcolando la costante in base alla condizione iniziale. Più precisamente, fissato x_0, si sceglie come primitiva di $a(x)$ la funzione integrale

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\,,$$

in modo tale che $A(x_0) = 0$. Poi si sceglie come primitiva $C(x)$ di $b(x)e^{-A(x)}$ la funzione

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)\, d\sigma}\, ds\,,$$

in modo che $C(x_0) = 0$. A questo punto la condizione iniziale diventa $y_0 = y(x_0) = e^0(C(x_0) + c) = c$. Inoltre, per il Teorema **??**, la funzione definita in (12.17) è l'unica soluzione del problema di Cauchy.
3) Resta solo da dimostrare che se $z(x)$ appartiene all'integrale generale, allora necessariamente deve avere la forma (12.16). Sia z una soluzione dell'equazione differenziale. Fissiamo un punto x_0 e calcoliamo $z(x_0)$. Abbiamo già visto che per ogni valore di $z(x_0)$ esiste una funzione $y(x)$ della forma (12.16) che risolve il problema di Cauchy con quel dato iniziale. Quindi sia y che z sono soluzioni l'equazione differenziale e $y(x_0) = z(x_0)$. Dal momento che la soluzione del problema di Cauchy è unica deve essere $z(x) = y(x)$ in I. □

Osservazione 12.17. La formula risolutiva (12.16), così come è stata proposta, sembra venire fuori dal nulla. Essa si basa invece su una tecnica che viene spesso usata per la risoluzione di equazioni differenziali lineari e che prende il nome di *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*. Il principio di questo metodo è quello di cercare soluzioni dell'equazione non omogenea della forma

$$y(x) = C(x)e^{A(x)}\,,$$

in cui la costante che compariva nell'integrale generale dell'equazione omogenea viene sostituita da una funzione $C(x)$ che si assume essere derivabile in I. Per determinare quale possa essere la funzione $C(x)$, imponiamo che la funzione y risolva l'equazione. Poiché si ha che

$$y'(x) = C'(x)e^{A(x)} + C(x)A'(x)e^{A(x)} = (C'(x) + C(x)a(x))e^{A(x)}\,,$$

l'equazione differenziale è verificata se

$$(C'(x) + C(x)a(x))e^{A(x)} = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x)\,.$$

Fatte le dovute semplificazioni otteniamo che deve valere l'identità

$$C'(x) = b(x)e^{-A(x)}\,,$$

ossia $C(x)$ deve essere una primitiva di $b(x)e^{-A(x)}$, esattamente come è scritto in (12.16). ◁

Esempio 12.18. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = -\frac{2x}{x^2+1}y + \cos x\,.$$

Abbiamo $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ le cui primitive sono

$$\int -\frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\log(x^2+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Scegliamo $A(x) = -\log(x^2+1)$ in modo da avere

$$e^{A(x)} = e^{-\log(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Poiché $b(x) = \cos x$ otteniamo che

$$\begin{aligned}\int b(x)e^{-A(x)}\,dx &= \int (x^2+1)\cos x\,dx = \left[{}^{(x^2+1)'=2x}_{\int \cos x\,dx=\sin x}\right]\\ &= (x^2+1)\sin x - \int 2x\sin x\,dx = \left[{}^{(x)'=1}_{\int \sin x\,dx=-\cos x}\right]\\ &= (x^2+1)\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) =\\ &= (x^2-1)\sin x + 2x\cos x + c\,.\end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale è

$$y(x) = \frac{1}{x^2+1}\Big((x^2-1)\sin x + 2x\cos x + c\Big)\,, \qquad c\in\mathbb{R}\,.$$

Supponiamo ora di voler conoscere, ad esempio, la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = 0$. Imponiamo la condizione iniziale:

$$0 = y(0) = \frac{1}{0+1}\left((0-1)\sin 0 + 2\cdot 0\cos 0 + c\right)\,,$$

e otteniamo $c = 0$, quindi la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{x^2+1}\Big((x^2-1)\sin x + 2x\cos x\Big)\,.$$

Se la condizione iniziale fosse stata $y(\pi) = 0$, avremmo ottenuto

$$0 = y(\pi) = \frac{1}{\pi^2+1}\Big((\pi^2-1)\sin\pi + 2\pi\cos\pi + c\Big)\,,$$

da cui si ha $c = 2\pi$ e quindi la soluzione sarebbe stata

$$y(x) = \frac{1}{x^2+1}\Big((x^2-1)\sin x + 2x\cos x + 2\pi\Big)\,.$$

◁

12.3 Equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine

Questo paragrafo è dedicato allo studio di equazioni differenziali del secondo ordine del tipo

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0\,, \tag{12.18}$$

che prendono il nome di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine. Riusciremo a determinare esplicitamente l'integrale generale di (12.18) solo nel caso in cui i coefficienti dell'equazione sono costanti, ma vogliamo iniziare col determinare alcune proprietà che valgono anche nel caso di coefficienti variabili. Iniziamo enunciando il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.

Teorema 12.19

Siano $b(x)$ e $c(x)$ due funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni z_0 e z_1 in $\mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y\colon I \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \\ y(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = z_1\,. \end{cases}$$

Osservazione 12.20. La necessità di fissare due dati iniziali quando si considerano equazioni differenziali del secondo ordine può essere spiegata, ad esempio, attraverso un modello cinematico del moto rettilineo di un corpo su una superficie con attrito. Abbiamo già detto che, con buona approssimazione, l'attrito di un corpo su una superficie può essere pensato proporzionale e con verso opposto alla sua velocità. Quindi, in assenza di forze esterne, la seconda legge di Newton diventa

$$ms''(t) = -hs'(t)\,,$$

dove $s(t)$ è la posizione del corpo al tempo t, m è la sua massa e h è il coefficiente di attrito della superficie. Risulta evidente sperimentalmente che non basta assegnare solo la posizione iniziale del corpo $s(0)$ per determinare univocamente il moto, ma è necessario anche sapere la sua velocità iniziale $s'(0)$. $\triangleleft$

Sappiamo quindi che l'integrale generale di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine è costituito da infinite soluzioni che dipendono da due parametri liberi. L'osservazione fondamentale per determinare questo insieme di funzioni è che non si tratta di un insieme qualsiasi, ma di uno spazio vettoriale di dimensione due (cfr. Definizione 7.19 e Definizione 7.32 del primo volume). Una volta dimostrato questo fatto, sarà sufficiente determinare una base di questo spazio per individuare tutte le altre soluzioni, che saranno tutte le loro possibili combinazioni lineari. Iniziamo col dimostrare che l'integrale generale dell'equazione differenziale (12.18) è uno spazio vettoriale.

Teorema 12.21

Siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione differenziale (12.18) e siano λ, μ due numeri reali. Allora la funzione $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale (12.18).

Dimostrazione. Segue facilmente dalla linearità sia dell'equazione che dell'operazione di derivazione. Più precisamente si ha che

$$y'(x) = \lambda y_1'(x) + \mu y_2'(x)\,, \qquad y''(x) = \lambda y_1''(x) + \mu y_2''(x)\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned} & y'' + b(x)y' + c(x)y = \\ & = (\lambda y_1'' + \mu y_2'') + b(x)(\lambda y_1' + \mu y_2') + c(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \\ & = \lambda(y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1) + \mu(y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2) = 0 \end{aligned} \tag{12.19}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che sia y_1 che y_2 sono, per ipotesi, soluzioni dell'equazione. □

Ora che sappiamo che l'integrale generale è uno spazio vettoriale, dobbiamo determinarne la dimensione.

Teorema 12.22

Siano y_1 e y_2 rispettivamente le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = 0 \\ y_1(x_0) = v_0 \\ y_1'(x_0) = v_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2 = 0 \\ y_2(x_0) = z_0 \\ y_2'(x_0) = z_1\,. \end{cases}$$

Supponiamo che i vettori (v_0, v_1) e (z_0, z_1) siano linearmente indipendenti. Allora ogni altra soluzione y dell'equazione differenziale

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

è una combinazione lineare di y_1 e y_2, cioè esistono due costanti A, $B \in \mathbb{R}$ tali che $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$.

Dimostrazione. Sia y una soluzione dell'equazione differenziale. Dobbiamo dimostrare che esistono due costanti A, $B \in \mathbb{R}$ tali che $y = Ay_1 + By_2$. Facciamo alcune osservazioni preliminari.
1) Grazie al Teorema 12.3 sappiamo che per ogni A e $B \in \mathbb{R}$ la funzione $Ay_1 + By_2$ risolve l'equazione differenziale.
2) Per il Teorema 12.3, se riusciamo a dimostrare che per ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione esistono A e $B \in \mathbb{R}$ tali che $Ay_1(x_0) + By_2(x_0) = y(x_0)$ e $Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) = y'(x_0)$, allora $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ per ogni $x \in I$. Infatti avremmo che y e $Ay_1 + By_2$ soddisfano lo stesso problema di Cauchy e quindi, per l'unicità della soluzione, devono coincidere.

Quindi il risultato è dimostrato se si può risolvere il sistema lineare di due equazioni nelle due incognite A e B

$$\begin{cases} Av_0 + Bz_0 = y(x_0) \\ Av_1 + Bz_1 = y'(x_0) . \end{cases} \tag{12.20}$$

Per il Teorema di Cramer (Teorema 7.66 del primo volume), il sistema ammette un'unica soluzione (A, B) per ogni scelta di $y(x_0)$ e $y'(x_0)$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} v_0 & z_0 \\ v_1 & z_1 \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Per ipotesi noi sappiamo che i vettori (v_0, v_1) e (z_0, z_1) sono linearmente indipendenti e quindi (per il Corollario 7.62 del primo volume) il determinante della matrice due per due con tali vettori come vettori colonna è effettivamente diverso da zero. Quindi per ogni funzione y, soluzione dell'equazione, è possibile trovare due costanti A e B che verificano il sistema (12.20) e di conseguenza, per quanto detto prima, risulta $y = Ay_0 + By_1$. □

A questo punto sappiamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale (12.18) è l'insieme delle combinazioni lineari di due soluzioni particolari corrispondenti a dati iniziali linearmente indipendenti. Si tratta ora di determinare la forma esplicita di queste due funzioni. Per fare questo ci dovremo limitare al caso in cui i coefficienti dell'equazione differenziale sono costanti. D'ora in poi considereremo quindi equazioni del tipo

$$ay'' + by' + cy = 0 , \qquad (a \neq 0) \tag{12.21}$$

con a, b e $c \in \mathbb{R}$. Per il Teorema 12.3, le soluzioni di questa equazione saranno funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Se $a = 0$, abbiamo un'equazione lineare omogenea del primo ordine e sappiamo che le soluzioni sono $y(x) = Ae^{-\frac{c}{b}x}$, $A \in \mathbb{R}$.

Proviamo a vedere se anche per le equazioni del secondo ordine (ossia quando $a \neq 0$) ci sono soluzioni di tipo $y(x) = e^{\lambda x}$. Poiché

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}\,, \qquad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}\,,$$

se calcoliamo $ay'' + by' + cy$ troviamo che

$$ay'' + by' + cy = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x}\,.$$

Quindi la funzione $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione differenziale se e solo se λ è soluzione dell'equazione di secondo grado

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,. \qquad \left(\substack{\text{equazione}\\ \text{caratteristica}}\right) \tag{12.22}$$

L'equazione (12.22) prende il nome di **equazione caratteristica** dell'equazione differenziale (12.21). Sappiamo bene che a questo punto ci troviamo davanti a tre possibilità, che dipendono dal segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ dell'equazione caratteristica.
Primo caso: $\Delta > 0$. Siano λ_1 e λ_2 le due soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica. Allora le funzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sono entrambe soluzioni dell'equazione differenziale (12.21). Inoltre si ha che

$$y_1(0) = y_2(0) = 1\,, \quad y_1'(0) = \lambda_1\,, \quad y_2'(0) = \lambda_2\,,$$

e, poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y_1 e y_2 hanno condizioni iniziali in $x = 0$ linearmente indipendenti. Quindi, per il Teorema 12.3, l'integrale generale dell'equazione differenziale (12.21) è

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad \left(\substack{\text{integrale generale}\\ \text{di (12.21) per } \Delta > 0}\right)$$

Secondo caso: $\Delta = 0$. Abbiamo una sola soluzione reale $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ dell'equazione caratteristica e quindi siamo in grado di determinare una sola soluzione di tipo esponenziale $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$. In questo caso però si verifica facilmente che anche la funzione $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ è soluzione. Infatti si ha

$$y_2'(x) = (1 + \lambda_1 x)e^{\lambda_1 x}\,, \qquad y_2''(x) = (2\lambda_1 + \lambda_1^2 x)e^{\lambda_1 x}\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= [a(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x) + b(1 + \lambda_1 x) + cx]e^{\lambda_1 x} = \\ &= [(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)x + (2\lambda_1 a + b)]e^{\lambda_1 x} = 0\,, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che λ_1 è soluzione dell'equazione caratteristica e che, in questo caso, $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ e quindi $2\lambda_1 a + b = 0$.

Verifichiamo che le condizioni iniziali in $x = 0$ di y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti: si ha $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, \lambda_1)$ e $(y_2(0), y_2'(0)) = (0, 1)$. Quindi, per il Teorema 12.3, l'integrale generale dell'equazione differenziale (12.21) è

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad \left(\substack{\text{integrale generale}\\ \text{di (12.21) per } \Delta = 0}\right)$$

Terzo caso: $\Delta < 0$. Non abbiamo nessuna soluzione reale dell'equazione caratteristica e quindi nessuna soluzione di tipo esponenziale dell'equazione differenziale. In questo caso le soluzioni y_1 e y_2 che generano tutto l'integrale generale sono

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,, \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,,$$

con

$$\alpha = -\frac{b}{2a}\,, \qquad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\,.$$

Verifichiamo che y_1 e y_2 risolvono l'equazione. Abbiamo che

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= [\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x)]e^{\alpha x}\\ y_1''(x) &= [(\alpha^2 - \beta^2)\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\sin(\beta x)]e^{\alpha x}\\ y_2'(x) &= [\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x)]e^{\alpha x}\\ y_2''(x) &= [(\alpha^2 - \beta^2)\sin(\beta x) + 2\alpha\beta\cos(\beta x)]e^{\alpha x} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} ay_1'' + by_1' + cy_1 &= [(a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) - (2a\alpha\beta + b\beta)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}\\ ay_2'' + by_2' + cy_2 &= [(a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\sin(\beta x) + (2a\alpha\beta + b\beta)\cos(\beta x)]e^{\alpha x}\,. \end{aligned}$$

Dalla definizione di α e β segue che

$$\begin{gathered} a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0\\ 2a\alpha\beta + b\beta = -b\beta + b\beta = 0\,, \end{gathered}$$

e quindi y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione. Inoltre i dati iniziali in $x = 0$ di y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti. Infatti si ha $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, \alpha)$ e $(y_2(0), y_2'(0)) = (0, \beta)$. Quindi, per il Teorema 12.3, l'integrale generale dell'equazione differenziale (12.21) è

$$y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad \left(\substack{\text{integrale generale}\\ \text{di (12.21) per } \Delta < 0}\right)$$

Esempio 12.23. Abbiamo visto che l'equazione differenziale del moto di un oscillatore libero è

$$mx'' + kx = 0$$

dove $m > 0$ è la massa del corpo e $k > 0$ è la costante elastica della molla. L'equazione caratteristica associata è

$$m\lambda^2 + k = 0\,,$$

che non ammette soluzioni reali. Ci troviamo quindi nel terzo caso considerato sopra e abbiamo che $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{k/m} = \omega$. Quindi l'integrale generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,.$$

Se invece consideriamo l'oscillatore smorzato, l'equazione del moto è

$$mx'' + hx' + kx = 0$$

e la sua equazione caratteristica determina gli zeri di un polinomio di secondo grado con discriminante $\Delta = h^2 - 4mk$, da cui si ricavano i tre casi per l'integrale generale visti nell'Esempio 12.10. $\lhd$

12.4 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti

Vogliamo ora considerare equazioni del tipo

$$ay'' + by' + cy = f(x)\,, \tag{12.23}$$

con a, b e c numeri reali (con $a \neq 0$) e f funzione continua. Iniziamo enunciando il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.

Teorema 12.24 ➫ S

$a \neq 0$ ed f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni y_0 e v_0 in $\mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

definita su tutto I.

Una volta stabilito che per ogni funzione continua f l'equazione (12.23) è risolubile, ci interessa determinarne l'integrale generale. La struttura dell'insieme delle soluzioni è descritta nel seguente teorema.

Teorema 12.25

Siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione (12.23). Allora la funzione $y = y_1 - y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea $ay'' + by' + cy = 0$, che chiameremo equazione omogenea associata alla (12.23).

Dimostrazione. Il risultato è conseguenza della proprietà di linearità sia dell'operazione di derivazione che dell'equazione differenziale. Infatti si ha $y' = y_1' - y_2'$, $y'' = y_1'' - y_2''$ e
$ay'' + by' + cy = ay_1'' + by_1' + cy_1 - (ay_2'' + by_2' + cy_2) = f(x) - f(x) = 0.$ □

Il teorema precedente ci dice che ogni soluzione dell'equazione (12.23) ha la forma

$$y(x) = \varphi(x) + \overline{y}(x)\,, \qquad \left(\begin{smallmatrix}\text{integrale generale}\\ \text{di (12.23)}\end{smallmatrix}\right)$$

dove $\varphi(x)$ è una particolare soluzione di (12.23) e $\overline{y}(x)$ appartiene all'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea (12.23) è completamente determinato se si conoscono

1) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
2) una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Il punto 1) è completamente risolto attraverso le tecniche descritte nel paragrafo precedente.
Il punto 2) è di non facile soluzione, in generale. Tuttavia in alcuni casi si può applicare quello che chiameremo **metodo di somiglianza**, cioè è possibile determinare una soluzione particolare $\varphi(x)$ che ha una forma simile a quella di $f(x)$.

***f* polinomio:** se $f(x)$ è un polinomio di grado n si può tentare di vedere se è possibile determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale che sia anch'essa un polinomio di grado n.

Ad esempio, determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = x^2\,.$$

Per prima cosa dobbiamo determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni reali. Siamo nel terzo caso discusso nel paragrafo precedente, con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\overline{y}(x) = A\cos x + B\sin x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ (generico polinomio di secondo grado). Abbiamo $\varphi'(x) = 2ax + b$ e $\varphi''(x) = 2a$.

Imponiamo che φ sia soluzione dell'equazione:

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2 \,,$$

che è un'identità solo se

$$a = 1 \,, \quad b = 0 \,, \quad 2a + c = 0 \,,$$

cioè per $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$. Quindi la soluzione particolare è $\varphi(x) = x^2 - 2$ e l'integrale generale è

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + x^2 - 2 \,, \qquad A, B \in \mathbb{R} \,.$$

Proviamo ora a fare lo stesso con l'equazione differenziale

$$y'' - 3y' = x^2 + 1 \,. \tag{12.24}$$

Questa volta l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x) = A + Be^{3x} \,, \qquad A, B \in \mathbb{R} \,.$$

Come prima, cerchiamo la soluzione particolare della forma $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$. Affinché sia soddisfatta l'equazione dovrà essere

$$2a - 3(2ax + b) = x^2 + 1 \,,$$

cosa che chiaramente non sarà mai verificata (abbiamo a sinistra un polinomio di primo grado e vorremmo che coincidesse con un polinomio di secondo grado).

Questa è una difficoltà di ordine generale che si incontra tutte le volte che nell'equazione differenziale non compare la funzione y, ma solo le sue derivate. Infatti, se f è un polinomio di grado k e si cerca una soluzione particolare φ che sia un polinomio di grado k, l'assenza del termine y nell'equazione fa in modo che a sinistra dell'uguale appaia sempre un polinomio di grado al più $k - 1$. In questo caso è quindi necessario cercare la soluzione particolare φ come un polinomio di grado $k + 1$.

Torniamo all'equazione (12.24) e proviamo a cercare φ della forma $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ora abbiamo $\varphi'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $\varphi''(x) = 6ax + 2b$ e l'equazione sarà verificata se

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 1 \,,$$

che risulta essere un'identità se

$$-9a = 1 \,, \quad 6a - 6b = 0 \,, \quad 2b - 3c = 1 \,,$$

ossia per $a = -1/9$, $b = -1/9$ e $c = -11/27$. Non abbiamo ottenuto nessuna condizione sulla costante d, che può essere scelta arbitrariamente, ad esempio $d = 0$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = A + Be^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

***f* esponenziale:** se abbiamo $f(x) = C_0 e^{\alpha x}$, $C_0 \in \mathbb{R}$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma $\varphi(x) = C(x)e^{\alpha x}$ dove la funzione $C(x)$ va determinata attraverso l'equazione differenziale. Infatti, poiché

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= C'(x)e^{\alpha x} + C(x)\alpha e^{\alpha x} \\ \varphi''(x) &= C''(x)e^{\alpha x} + 2C'(x)\alpha e^{\alpha x} + C(x)\alpha^2 e^{\alpha x}\,, \end{aligned}$$

affinché φ sia soluzione di

$$ay'' + by' + c = C_0 e^{\alpha x}\,,$$

deve essere verificata l'identità

$$[a(C'' + 2\alpha C' + \alpha^2 C) + b(C' + \alpha C) + cC]e^{\alpha x} = C_0 e^{\alpha x}\,,$$

che può essere riscritta, dopo le dovute semplificazioni, come

$$aC'' + (2a\alpha + b)C' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)C = C_0\,.$$

Ora abbiamo tre possibilità:

1) α non è soluzione dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$). In questo caso è sufficiente scegliere C costante ($C'(x) = C''(x) = 0$), $C = \frac{C_0}{a\alpha^2+b\alpha+c}$.
2) α è soluzione semplice dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, ma $2a\alpha + b \neq 0$). In questo caso basta prendere $C = \frac{C_0}{a\alpha+b}x$, in modo da avere $C''(x) = 0$ e l'identità verificata.
3) α è soluzione doppia dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2+b\alpha+c = 0$ e $2a\alpha+b = 0$). In questo caso deve essere verificata l'equazione $aC'' = C_0$, quindi con una doppia integrazione si ottiene $C(x) = \frac{C_0}{a}\frac{x^2}{2}$.

Esempio 12.26. Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 3e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2-2\lambda+1=0$, che è risolta solo da $\lambda=1$. Quindi siamo nel secondo caso descritto nel paragrafo precedente e l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x)=Ae^x+Bxe^x\,,\qquad A,B\in\mathbb{R}\,.$$

Determiniamo la soluzione particolare. Poiché $\alpha=-1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, possiamo cercare la soluzione della forma $\varphi(x)=Ce^{-x}$ con C costante da determinare. Dal momento che $\varphi'(x)=-Ce^{-x}$ e $\varphi''(x)=Ce^{-x}$, imponendo che φ risolva l'equazione otteniamo $C+2C+C=3$, quindi $C=3/4$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x)=Ae^x+Bxe^x+\frac{3}{4}e^{-x}\,.$$

Ora (e, attenzione, solo ora) possiamo imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{gathered} y(0)=A+\frac{3}{4}=0\\ y'(x)=Ae^x+Be^x+Bxe^x-\frac{3}{4}e^{-x}\quad\Longrightarrow\quad y'(0)=A+B-\frac{3}{4}=1\end{gathered}$$

da cui si ottiene che $A=-\frac{3}{4}$, $B=\frac{5}{2}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x)=-\frac{3}{4}e^x+\frac{5}{2}xe^x+\frac{3}{4}e^{-x}\,.$$

$\lhd$

***f* trigonometrica:** se abbiamo $f(x)=C_0\cos(\alpha x)$ oppure $f(x)=C_0\sin(\alpha x)$ $C_0\in\mathbb{R}$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$\varphi(x)=C_1\cos(\alpha x)+C_2\sin(\alpha x)\,,$$

dove le costanti C_1 e C_2 vanno determinate attraverso l'equazione differenziale. Se, ad esempio, vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''-2y'-3y=-\sin(3x)\,,$$

come sempre prima determiniamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata che risulta essere

$$\overline{y}(x)=Ae^{-x}+Be^{3x}\,,\qquad A,B\in\mathbb{R}\,.$$

Per determinare la soluzione particolare, proviamo con $\varphi(x)=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)$. Abbiamo che

$$\varphi'(x)=-3C_1\sin(3x)+3C_2\cos(3x)\,,\quad \varphi''(x)=-9C_1\cos(3x)-9C_2\sin(3x)\,,$$

e quindi, affinché l'equazione sia verificata, dovrà essere

$$(-9C_1 - 6C_2 - 3C_1)\cos(3x) + (-9C_2 + 6C_1 - 3C_2)\sin(3x) = -\sin(3x)\,,$$

ossia

$$-12C_1 - 6C_2 = 0\,, \qquad -12C_2 + 6C_1 = -1\,,$$

da cui si ricava $C_1 = -\frac{1}{30}$ e $C_2 = \frac{1}{15}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale di partenza è

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{30}\cos(3x) + \frac{1}{15}\sin(3x)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Facciamo notare esplicitamente che, se avessimo cercato una soluzione del tipo $\varphi(x) = C_1 \sin(3x)$ (ossia simile al termine $f(x)$) non la avremmo trovata. Questo perché, mentre nei due casi precedenti (polinomi ed esponenziali) avevamo funzioni che, dopo una o più derivazioni mantenevano la stessa struttura (qualsiasi derivata di un polinomio è un polinomio e qualsiasi derivata di un esponenziale è un esponenziale), in questo caso se si parte da una funzione trigonometrica (diciamo il seno) dopo una derivazione otteniamo l'altra (ossia il coseno). Quindi in questo caso il metodo di somiglianza può funzionare a patto di cercare soluzioni che siano combinazioni lineari di seno e coseno. Può tuttavia succedere che non sia possibile trovare una soluzione particolare della forma proposta (si veda l'Esempio 12.27), per motivi simili a quelli esposti nei casi precedenti.

Esempio 12.27 (Oscillazioni forzate)**.** Consideriamo di nuovo l'oscillatore in assenza di attrito, ma questa volta facciamo intervenire una forza esterna $f(t) = \cos(\gamma t)$, $\gamma > 0$, che spinga la molla. L'equazione differenziale soddisfatta dal moto è

$$x'' + \omega^2 x = \cos(\gamma t)\,.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è stato determinato nell'Esempio 12.23 ed è

$$\overline{x}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, utilizzando il metodo di somiglianza. Sia $\varphi(t) = C_1\cos(\gamma t) + C_2\sin(\gamma t)$. Si ha

$$\varphi'(t) = -\gamma C_1 \sin(\gamma t) + \gamma C_2 \cos(\gamma t), \quad \varphi''(t) = -\gamma^2 C_1 \cos(\gamma t) - \gamma^2 C_2 \sin(\gamma t).$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$(\omega^2 - \gamma^2)(C_1\cos(\gamma t) + C_2\sin(\gamma t)) = \cos(\gamma t)\,,$$

che risulta risolubile se $\gamma \neq \omega$, con $C_2 = 0$ e $C_1 = 1/(\omega^2 - \gamma^2)$. Quindi se $\gamma \neq \omega$ l'integrale generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}\cos(\gamma t)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che se γ e ω sono molto simili (ossia se la frequenza della forzante è molto simile alla frequenza propria dell'oscillatore), l'ampiezza dell'oscillazione è molto grande.

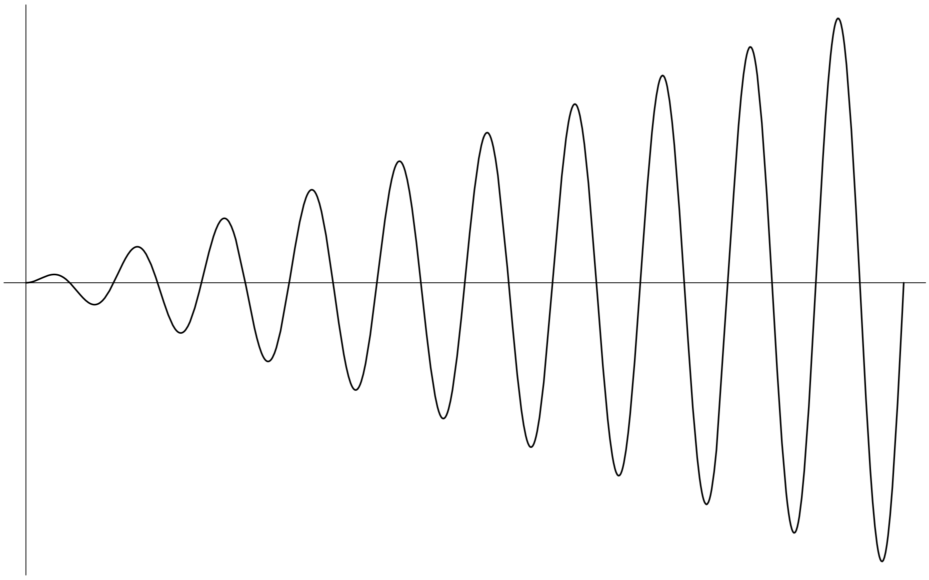


Figura 12.8: Risonanza

Si può verificare che nel caso limite $\gamma = \omega$ l'integrale generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{1}{2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)\,,$$

quindi l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente con il tempo (si veda la Figura 12.8). In questo caso si dice che l'oscillatore è in risonanza. $\triangleleft$

Qualche altro caso: il metodo di somiglianza descritto nei casi precedenti continua a funzionare quando $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, $f(x) = P(x)\cos(\alpha x)$, oppure $f(x) = P(x)\sin(\alpha x)$, con P polinomio. Ad esempio, determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = xe^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Abbiamo $\Delta = -16$, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x) = e^x(A\cos(2x) + B\sin(2x)), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo la soluzione particolare della forma $\varphi(x) = (ax+b)e^{2x}$. Si ha che

$$\varphi'(x) = (2ax + 2b + a)e^{2x}, \qquad \varphi''(x) = 4(ax + b + a)e^{2x}.$$

Quindi φ verifica l'equazione differenziale se

$$[4(ax + b + a) - 2(2ax + 2b + a) + 5(ax + b)]e^{2x} = xe^{2x},$$

ossia, dopo le dovute semplificazioni

$$5ax + 2a + 5b = x,$$

verificata se $5a = 1$ e $2a + 5b = 0$, cioè $a = \frac{1}{5}$ e $b = -\frac{2}{25}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = e^x(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^{2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Possiamo ora determinare la soluzione del problema di Cauchy, imponendo le condizioni iniziali:

$$y'(x) = e^x\left((A + 2B)\cos(2x) + (B - 2A)\sin(2x)\right) + \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right)e^{2x}$$
$$\Longrightarrow \qquad y(0) = A - \frac{2}{25} = 0, \qquad y'(0) = A + 2B + \frac{1}{25} = 0,$$

da cui si ricava $A = \frac{2}{25}$ e $B = -\frac{3}{50}$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = e^x\left(\frac{2}{25}\cos(2x) - \frac{3}{50}\sin(2x)\right) + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^{2x}.$$

Concludiamo con un risultato (la cui dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 12.4) che permette di utilizzare le tecniche viste finora per determinare le soluzioni di altre equazioni differenziali lineari non omogenee.

Teorema 12.28 ➭ Principio di sovrapposizione

Siano f_1 ed f_2 due funzioni continue sullo stesso intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e siano y_1 e y_2 rispettivamente soluzioni delle equazioni differenziali

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1(x), \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2(x).$$

Allora la funzione $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale
$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)\,.$$

Esempio 12.29. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 3y' = e^{-2x} + 5\,. \tag{12.25}$$
L'equazione caratteristica è
$$\lambda^2 - 3\lambda = 0\,,$$
che ha due soluzioni reali $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$\overline{y}(x) = A + Be^{3x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$
Per determinare la soluzione particolare $\varphi(x)$ dell'equazione non omogenea, cerchiamo una soluzione particolare delle due equazioni
$$y'' - 3y' = e^{-2x}\,, \qquad y'' - 3y' = 5\,,$$
e poi utilizziamo il principio di sovrapposizione. Una soluzione particolare della prima equazione ha la forma $\varphi_1(x) = Ce^{-2x}$, con C costante da determinare. Abbiamo $\varphi_1'(x) = -2Ce^{-2x}$ e $\varphi_1''(x) = 4Ce^{-2x}$, che sostituite nell'equazione danno
$$(4C + 6C)e^{-2x} = e^{-2x}\,,$$
verificata per $C = 1/10$. Quindi $\varphi_1(x) = e^{-2x}/10$. Una soluzione particolare della seconda equazione ha la forma $\varphi_2(x) = ax + b$, con le costanti a e b da determinare (il termine forzante è un polinomio di grado zero, ma nell'equazione non compare la y e quindi dobbiamo cercare la soluzione particolare come un polinomio di primo grado). Abbiamo $\varphi_2'(x) = a$ e $\varphi_2''(x) = 0$, che sostituite nell'equazione danno $-3a = 5$. Quindi $\varphi_2(x) = -5x/3$ (la scelta di b era arbitraria e abbiamo scelto $b = 0$). Per il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (12.25) è
$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = e^{-2x}/10 - 5x/3\,,$$
quindi il suo integrale generale è
$$y(x) = A + Be^{3x} + \frac{e^{-2x}}{10} - \frac{5}{3}x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$
◁

12.5 Esercizi

Esercizio 12.1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

✍ 1) $y' = 2xy^2$

✍ 2) $y' = -\dfrac{y}{x}$

✍ 3) $\dfrac{y'}{\sqrt{y^2-2}} = \dfrac{e^x}{2y}$

4) $y' = e^{x-y}$

✍ 5) $yy' = \dfrac{1+y^2}{x}$

6) $y' = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y$

Esercizio 12.2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali a variabili separabili.

✍ 1) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x(x-2)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

✍ 2) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

✍ 3) $\begin{cases} y' \log y = \dfrac{y}{x} \\ y(e^2) = e \end{cases}$

✍ 4) $\begin{cases} \dfrac{y'}{\sqrt{y}} = -\dfrac{2x}{1-x^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y}\, e^{x^2-y^2} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y'e^{-y} + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Esercizio 12.3. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

✍ 1) $y' = \dfrac{y}{x \log x}$, $x \in (0,1)$

2) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x+3}}$, $x \in (-3, +\infty)$

✍ 3) $y' = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, y$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

✍ 4) $y' + \dfrac{y}{x} = \cos x$, $x \in (0, \infty)$

✍ 5) $y' = \dfrac{xy}{2x^2-1} - x$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

6) $y' + 2y = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

7) $y' + \dfrac{\cos x}{\sin x}\, y = x$, $x \in (0, \pi)$

✍ 8) $y' = \dfrac{-2x-2}{x^2+2x+3}\, y + e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 12.4. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali lineari del primo ordine.

✍ 1) $\begin{cases} y' = 3y + e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

✍ 2) $\begin{cases} y' = y \sin x + \sin x \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' = 2xy + xe^{x^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y' = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x} y \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' = 2xy - y \\ y(-2) = 1 \end{cases}$

✍ 6) $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2-1} + 3 \\ y(2) = 0 \end{cases}$

Esercizio 12.5. Determinare l'integrale generale delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

✍ 1) $y'' + 4y = x^2$
2) $y'' + 16y = 0$
✍ 3) $y'' - 4y = 2 + x$
✍ 4) $4y'' + 4y' + y = e^{2x} + \cos x$
✍ 5) $y'' + 2y' - 3y = xe^x$
6) $y'' - 2y = 0$
7) $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$
8) $y'' - 6y' + 9y = x$
9) $y'' - y = e^x + x^2$
10) $y'' + 2y' + y = 6\sin(2x)$

Esercizio 12.6. Trovare la soluzione dei problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

✍ 1) $\begin{cases} 2y'' - y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

✍ 2) $\begin{cases} y'' - y = \sin(2x) + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'' + 3y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

✍ 5) $\begin{cases} y'' - 6y' = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

✍ 6) $\begin{cases} y'' + 2y' = \cos(3x) + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \cos x + 2\sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

12.6 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 12.1.

1) $y' = 2xy^2$.
La funzione $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ è soluzione. Per il Teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy, ogni altra soluzione non si può annullare

mai. Per determinare le altre soluzioni separiamo le variabili:

$$\frac{1}{y^2}y' = 2x\,.$$

Passando alle primitive, otteniamo

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Per esplicitare la y, dobbiamo prima assicurarci che $x^2 + c \neq 0$. Se $c > 0$, non abbiamo restrizioni sulla x. Se $c \leq 0$, dovremo porre $x^2 \neq -c$. Sotto queste condizioni, possiamo esplicitare la y:

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Abbiamo così ottenuto che l'integrale generale è composto dalla soluzione costante $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, dalle funzioni $y(x) = -1/(x^2 + c)$ corrispondenti a $c > 0$, definite su tutto $\mathbb{R}$, e da tre famiglie di funzioni, che hanno tutte legge $y(x) = -1/(x^2 + c)$ con $c \leq 0$ ma di cui una famiglia è definita nella semiretta $(-\infty, -\sqrt{-c})$, un'altra definita in $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ e l'ultima definita nella semiretta $(\sqrt{-c}, +\infty)$.

2) $y' = -\dfrac{y}{x}$.
Dobbiamo escludere $x = 0$, quindi le soluzioni dell'equazione differenziale saranno definite su intervalli che non contengono l'origine. Sicuramente le funzioni costanti $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$ e $y(x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$ sono soluzioni. Per il Teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy, ogni altra soluzione non si può annullare mai. Per determinare le altre soluzioni separiamo le variabili:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}\,.$$

Passando alle primitive, otteniamo

$$\log|y| = -\log|x| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Per esplicitare la y applichiamo la funzione esponenziale ad ambo i membri dell'identità:

$$|y| = e^{-\log|x| + c}\,.$$

Per le proprietà dell'esponenziale si ha che

$$e^{-\log|x|+c} = e^{-\log|x|}e^c = e^c\frac{1}{|x|}\,.$$

In conclusione, abbiamo che

$$y(x) = \pm e^c \frac{1}{|x|}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che, per la suriettività della funzione esponenziale, e^c con c che varia in $\mathbb{R}$ corrisponde all'insieme di tutti i numeri positivi. Quindi $\pm e^c$, $c \in \mathbb{R}$ corrisponde all'insieme di tutti i numeri reali non nulli. Quindi possiamo riscrivere l'identità precedente come

$$y(x) = c\frac{1}{|x|}, \quad c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$

Quindi le soluzioni diverse da quelle nulle sono date dalla famiglia $y(x) = -c/x$, $c \neq 0$, definite su $(-\infty, 0)$ e $y(x) = c/x$, $c \neq 0$, definite su $(0, +\infty)$. Sinteticamente, possiamo scrivere $y = c/x$, $c \in \mathbb{R}$, con $x \in (-\infty, 0)$ oppure $x \in (0, +\infty)$.

3) $\dfrac{y'}{\sqrt{y^2-2}} = \dfrac{e^x}{2y}$.
Iniziamo osservando che deve essere $y \neq 0$, ossia nessuna soluzione si può mai annullare, altrimenti non ha senso la frazione a destra dell'uguale. Inoltre deve essere $y^2 > 2$ per dar senso alla radice quadrata a denominatore. Quindi avremo soluzioni che saranno o sempre maggiori di $\sqrt{2}$, oppure sempre minori di $-\sqrt{2}$. Per determinare queste soluzioni, separiamo le variabili

$$\frac{2y}{\sqrt{y^2-2}}y' = e^x,$$

e poi passiamo alle primitive

$$2\sqrt{y^2-2} = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo così ottenuto un'identità che determina le soluzioni $y(x)$ in forma implicita. Riscriviamo l'identità come

$$\sqrt{y^2-2} = \frac{1}{2}e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(Osserviamo che, data l'arbitrarietà di c, non abbiamo scritto $c/2$, ma solo riscalato la costante.)

Per poter esplicitare la y, dobbiamo elevare al quadrato i due membri dell'identità. Questa operazione è corretta solo se $\frac{1}{2}e^x + c > 0$, ossia nei casi

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \text{se } c \geq 0, \\ x \in (\log(-2c), +\infty), & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Quindi, tenendo conto di queste limitazioni sulla variabile x, possiamo elevare i due membri al quadrato, ottenendo $y^2 - 2 = (\frac{1}{2}e^x + c)^2$, $c \in \mathbb{R}$, ossia

$$y^2 = \left(\frac{1}{2}e^x + c\right)^2 + 2\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

A questo punto, dal momento che il secondo membro è sempre strettamente positivo, possiamo esplicitare la y come

$$y = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^x + c\right)^2 + 2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$y(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^x + c\right)^2 + 2}\,,\ y(x) = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^x + c\right)^2 + 2}\,,$$

definite su tutto $\mathbb{R}$ quando $c \geq 0$, oppure definite solo su $(-\infty, \log(-2c))$, se $c < 0$.

4) $y' = e^{x-y}$.
$y(x) = \log(e^x + c)$, $c \in \mathbb{R}$, definite su tutto $\mathbb{R}$ quando $c \geq 0$, oppure definite solo su $(\log(-c), +\infty)$, se $c < 0$.

5) $yy' = \dfrac{1+y^2}{x}$.
Dobbiamo porre $x \neq 0$, quindi al più le soluzioni saranno definite sulla semiretta $(-\infty, 0)$ o sulla semiretta $(0, +\infty)$. Osserviamo che una soluzione non si può mai annullare, perché in x tale che $y(x) = 0$ l'equazione non è verificata. Separiamo le variabili

$$\frac{y}{1+y^2}y' = \frac{1}{x}\,,$$

e passiamo alle primitive

$$\frac{1}{2}\log(1+y^2) = \log|x| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Riscriviamo l'identità che definisce implicitamente la y come

$$\log(1+y^2) = 2\log|x| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Calcolando l'esponenziale ad ambo i membri, cosa che si può fare senza alcuna restrizione su x, otteniamo

$$1 + y^2 = e^{2\log|x|+c}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

ossia
$$y^2 = e^{2\log|x|+c} - 1 = e^c x^2 - 1\,,\ x \neq 0\,,\quad c \in \mathbb{R}\,,$$
Dal momento che y^2 deve essere strettamente positivo, quest'ultima identità ha senso solo se $e^c x^2 - 1 > 0$, cioè per x appartenente alle semirette $(-\infty, -e^{-c/2})$ e $(e^{-c/2}, +\infty)$. Sotto queste restrizioni sulla variabile x, possiamo esplicitare y, ottenendo
$$y(x) = \pm\sqrt{e^c x^2 - 1}\,,\quad c \in \mathbb{R}\,.$$
Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è composto dalle funzioni
$$y(x) = -\sqrt{e^c x^2 - 1}\,,\quad y(x) = \sqrt{e^c x^2 - 1}\,,$$
definite o sulla semiretta $(-\infty, -e^{-c/2})$, oppure sulla semiretta $(e^{-c/2}, +\infty)$. Osserviamo esplicitamente che abbiamo due famiglie di soluzioni negative, definite attraverso la stessa legge $y(x) = -\sqrt{e^c x^2 - 1}$, ma su domini differenti $((-\infty, -e^{-c/2})$, oppure $(e^{-c/2}, +\infty))$ e due famiglie di di soluzioni positive, definite attraverso la stessa legge $y(x) = \sqrt{e^c x^2 - 1}$, ma su domini differenti $((-\infty, -e^{-c/2})$, oppure $(e^{-c/2}, +\infty))$.

6) $y' = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y$.
$y(x) = cxe^x$, $c \in \mathbb{R}$, definita su $(-\infty, 0)$ oppure su $(0, +\infty)$.

Svolgimento dell'esercizio 12.2.

1) $y' = \dfrac{y}{x(x-2)}\,,\ y(1) = 1$.
Per dare senso all'equazione dobbiamo porre $x \neq 0$ e $x \neq 2$. Poiché la condizione iniziale richiede che la soluzione sia definita per $x_0 = 1$, al più tale soluzione sarà definita nell'intervallo $(0, 2)$. Inoltre la funzione nulla su $(0, 2)$ è soluzione dell'equazione differenziale con condizione iniziale, ad esempio, $y(1) = 0$, quindi la soluzione del nostro problema di Cauchy non si annullerà mai (in realtà sarà sempre positiva, perché $y(1) = 1$). Questo ci permette di separare le variabili
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x-2)}\,.$$
Passando alle primitive (la funzione di destra è una funzione razionale che si integra per decomposizione in fratti semplici) otteniamo
$$\log|y| = \frac{1}{2}\log\left(\frac{|x-2|}{|x|}\right) + c\,,\quad c \in \mathbb{R}\,.$$
Togliamo i moduli in funzione della condizione iniziale: per quanto detto prima $y > 0$ e $x \in (0, 2)$, quindi
$$\log y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2-x}{x}\right) + c\,,\quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Determiniamo la costante attraverso la condizione iniziale: $0 = 0 + c$. Esplicitiamo y a partire da

$$\log y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2-x}{x}\right).$$

applicando la funzione esponenziale ai due membri dell'identità:

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{2-x}{x}\right)} = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,.$$

Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ definita sull'intervallo $(0, 2)$.

2) $y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1}$, $y(0) = 0$.
Non abbiamo restrizioni da porre né nella x né nella y per poter separare le variabili. Otteniamo

$$\frac{y'}{y^2+1} = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

e, passando alle primitive,

$$\arctan y = \arctan x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Determiniamo la costante c attraverso la condizione iniziale: si ha che $0 = \arctan(y(0)) = c$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è definita implicitamente dall'identità $\arctan y = \arctan x$. Si ha quindi che $y(x) = x$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

3) $y' \log y = \dfrac{y}{x}$, $y(e^2) = e$.
Deve essere $y > 0$ per dare senso al logaritmo, quindi la soluzione sarà strettamente positiva. Inoltre la soluzione non può mai valere 1 perché per $y = 1$ si annulla $\log y$ e l'equazione non può essere verificata. Infine dobbiamo porre $x \neq 0$, quindi la soluzione che ci interessa sarà al più definita sulla semiretta $(0, +\infty)$, che contiene il dato iniziale $x_0 = e^2$. Separiamo le variabili

$$\frac{\log y}{y}y' = \frac{1}{x}\,,$$

e passiamo alle primitive

$$\frac{\log^2 y}{2} = \log|x| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Siccome ci interessa una soluzione definita per $x > 0$, possiamo riscrivere l'identità precedente come

$$\log^2 y = 2\log x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Calcoliamo la costante c imponendo la condizione iniziale: $1 = 4 + c$, da cui $c = -3$, che andiamo a sostituire nell'identità precedente, ottenendo $\log^2 y = 2\log x - 3$. Ora dobbiamo esplicitare y. Dobbiamo preliminarmente porre $2\log x - 3 > 0$, da cui abbiamo che deve essere $x > e^{3/2}$. Quindi per $x \in (e^{3/2}, +\infty)$ possiamo passare alla radice quadrata dei due termini dell'identità, ottenendo $\log y = \sqrt{2\log x - 3}$ per $x \in (e^{3/2}, +\infty)$. Infine applichiamo l'esponenziale ad ambo i membri e concludiamo che la soluzione cercata è $y(x) = e^{\sqrt{2\log x - 3}}$ definita sulla semiretta $(e^{3/2}, +\infty)$.

4) $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = \dfrac{-2x}{1-x^2}$, $y(2) = 1$.

Deve essere $y > 0$ per dare senso alla radice a denominatore. Quindi la soluzione sarà strettamente positiva. Per quanto riguarda la x, deve essere $x^2 \neq 1$. Dal momento che vogliamo che la soluzione sia definita per $x = 2$, tale soluzione sarà definita al più in $(1, +\infty)$. Con questi presupposti, separiamo le variabili

$$\frac{1}{\sqrt{y}} y' = \frac{-2x}{1-x^2},$$

e, passando alle primitive

$$2\sqrt{y} = \log|1 - x^2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Togliamo il modulo, tenendo conto del fatto che la soluzione sarà definita al più sulla semiretta $(1, +\infty)$:

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\log(x^2 - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo la costante c utilizzando la condizione iniziale: $1 = (\log 3)/2 + c$. Quindi $c = 1 - (\log 3)/2$ e l'identità diventa

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{3}\right) + 1.$$

Prima di elevare al quadrato ambo i membri dobbiamo imporre

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{3}\right) + 1 > 0,$$

ossia $x^2 - 1 > 3e^{-2}$ e in conclusione $x > \sqrt{1 + 3e^{-2}}$ (ricordiamo che ci eravamo già limitati alle $x > 1$). Quindi la soluzione è

$$y(x) = \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{3}\right) + 1\right]^2,$$

definita sulla semiretta $(\sqrt{1+3e^{-2}}, +\infty)$.

5) $y' = \dfrac{x}{y}\, e^{x^2-y^2}$, $y(-1) = 2$.
La soluzione è $y(x) = \sqrt{\log(e^{x^2} + e^4 - e)}$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

6) $y'e^{-y} + x = 0$, $y(0) = 0$. La soluzione è $y(x) = -\log\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento dell'esercizio 12.3.

1) $y' = \dfrac{y}{x\log x}$, $x \in (0,1)$.
Si tratta di un'equazione omogenea con $a(x) = (x\log x)^{-1}$, funzione continua sull'intervallo $(0,1)$. Calcoliamo le primitive di a:

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} t=\log x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{smallmatrix}\right] = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log|\log x| + c\,.$$

Scegliamo la primitiva $A(x)$ corrispondente al valore $c = 0$ e osserviamo che, dal momento che $x \in (0,1)$, si ha $|\log x| = -\log x$. Quindi l'integrale generale è

$$y(x) = c\,e^{\log(-\log x)} = -c\,\log x\,,\ x \in (0,1)\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

2) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x+3}}$, $x \in (-3,+\infty)$.
L'integrale generale è $y(x) = c\,e^{2\sqrt{x+3}}$, $x \in (-3,+\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

3) $y' = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}y$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Si tratta di un'equazione omogenea con $a(x) = \sin x/\sqrt{\cos x}$, funzione continua sull'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Calcoliamo le primitive di a:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{smallmatrix}\right] = -\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = -2\sqrt{t} + c = -2\sqrt{\cos x} + c\,.$$

Se scegliamo la primitiva $A(x)$ corrispondente al valore $c = 0$, otteniamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = c\,e^{-2\sqrt{\cos x}}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $c \in \mathbb{R}$.

4) $y' + \dfrac{y}{x} = \cos x$, $x \in (0,+\infty)$.
Si tratta di un'equazione non omogenea con $a(x) = -1/x$ e $b(x) = \cos x$, funzioni continue in $(0,+\infty)$. Scegliamo $A(x) = -\log x$, in modo che $e^{A(x)} = 1/x$. Calcoliamo ora le primitive di $b(x)e^{-A(x)}$:

$$\int x\cos x\,dx = \left[\begin{smallmatrix} (x)'=1 \\ \int \cos x\,dx=\sin x \end{smallmatrix}\right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{x}(\cos x + x\sin x + c)$, $x \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

5) $y' = \dfrac{x}{2x^2-1}y - x$, $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Si tratta di un'equazione non omogenea con $a(x) = x/(2x^2-1)$ e $b(x) = -x$, funzioni continue in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcoliamo le primitive di $a(x)$:

$$\int \frac{x}{2x^2-1}\,dx = \left[\substack{t=2x^2-1\\ dt=4x\,dx}\right] = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{4}\log|t| + c = \frac{1}{4}\log|2x^2-1| + c\,.$$

Scegliamo la primitiva $A(x)$ corrispondente a $c = 0$. Inoltre osserviamo che $|2x^2-1| = 1-2x^2$ nell'intervallo $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Quindi $e^{A(x)} = \sqrt[4]{1-2x^2}$. Calcoliamo ora le primitive di $b(x)e^{-A(x)}$:

$$\int \frac{-x}{\sqrt[4]{1-2x^2}}\,dx = \left[\substack{t=1-2x^2\\ dt=-4x\,dx}\right] = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\,dt = \frac{1}{3}\sqrt[4]{t^3} + c = \frac{1}{3}\sqrt[4]{(1-2x^2)^3} + c\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{3}(1-2x^2) + c\sqrt[4]{1-2x^2}$, $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $c \in \mathbb{R}$.

6) $y' + 2y = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
L'integrale generale è $y(x) = e^{-x} + c\,e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

7) $y' + \dfrac{\cos x}{\sin x}y = x$, $x \in (0, \pi)$.
L'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{\sin x}(\sin x - x\cos x + c)$, $x \in (0, \pi)$, $c \in \mathbb{R}$.

8) $y' = -\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}y + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.
Si tratta di un'equazione non omogenea con $a(x) = -\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ e $b(x) = e^x$. Osserviamo che il discriminante del polinomio x^2+2x+3 è -8, quindi il polinomio è sempre strettamente positivo. In particolare i coefficienti dell'equazione lineare sono continui su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo le primitive di $a(x)$:

$$\begin{aligned}-\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx &= \left[\substack{t=x^2+2x+3\\ dt=(2x+2)\,dx}\right] = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\log|t| + c = \\ &= -\log(x^2+2x+3) + c\,.\end{aligned}$$

Scegliamo la primitiva $A(x)$ corrispondente a $c = 0$, in modo che $e^{A(x)} = 1/(x^2+2x+3)$. Calcoliamo ora le primitive di $b(x)e^{-A(x)}$:

$$\begin{aligned}&\int e^x(x^2+2x+3)\,dx = \left[\substack{(x^2+2x+3)'=2x+2\\ \int e^x\,dx=e^x}\right] = \\ &\quad= (x^2+2x+3)e^x - 2\int (x+1)e^x\,dx = \left[\substack{(x+1)'=1\\ \int e^x\,dx=e^x}\right] = \\ &\quad= (x^2+2x+3)e^x - 2(x+1)e^x + 2e^x + c = e^x(x^2+3) + c\,.\end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}(e^x(x^2+3) + c)$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Svolgimento dell'esercizio 12.4.

1) $y' = 3y + e^{-x}\,,\ y(0) = 1$.
I coefficienti dell'equazione differenziale sono $a(x) = 3$ e $b(x) = e^{-x}$ che risultano essere funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$. La primitiva della funzione $a(x)$ che ci occorre è

$$A(x) = \int_0^x 3\,dt = 3x\,,$$

mentre la primitiva di $b(x)e^{-A(x)}$ che ci occorre è

$$C(x) = \int_0^x e^{-t}e^{-3t}\,dt = -\frac{1}{4}(e^{-4x} - 1)\,.$$

Quindi, essendo $y_0 = 1$, la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = \frac{e^{3x}}{4}(5 - e^{-4x})$, $x \in \mathbb{R}$.

2) $y' = y\sin x + \sin x\cos x\,,\ y(0) = 0$.
I coefficienti dell'equazione differenziale sono $a(x) = \sin x$ e $b(x) = \sin x\cos x$ che risultano essere funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$. La primitiva della funzione $a(x)$ che ci occorre è

$$A(x) = \int_0^x \sin t\,dt = -\cos x + 1\,,$$

mentre la primitiva di $b(x)e^{-A(x)}$ che ci occorre è

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \sin t\cos t\, e^{\cos t - 1}\,dt = \left[{}_{ds=-\sin t\,dt}^{s=\cos t}\right] = -\,e^{-1}\int_1^{\cos x} s\,e^s\,ds = \\ &= -e^{-1}\left[se^s - e^s\right]_1^{\cos x} = (1-\cos x)e^{\cos x - 1}\,. \end{aligned}$$

Quindi, essendo $y_0 = 0$, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{-\cos x + 1}(1-\cos x)e^{\cos x - 1} = 1 - \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

3) $y' = 2xy + xe^{x^2/2}\,,\ y(0) = 1$.
La soluzione è $y(x) = e^{x^2}(2 - e^{-x^2/2})$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $y' = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}y\,,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
La soluzione è $y(x) = e^{-\arctan(\cos x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

5) $y' = 2xy - y\,,\ y(-2) = 1$.
La soluzione è $y(x) = e^{x^2-x-6}$, $x \in \mathbb{R}$.

6) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-1} + 3\,,\ y(2) = 0$.

I coefficienti dell'equazione differenziale sono $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ e $b(x) = 3$. Il coefficiente a risulta essere continuo per $x \neq \pm 1$. Dal momento che cerchiamo una soluzione definita per $x = 2$, dovremo limitarci alle x nella semiretta $(1, +\infty)$. La primitiva della funzione $a(x)$ che ci occorre è

$$A(x) = \int_2^x \frac{2t}{t^2-1}\,dt = \log(x^2-1) - \log 3 = \log\left(\frac{1}{3}(x^2-1)\right), \quad x \in (1,+\infty),$$

mentre la primitiva di $b(x)e^{-A(x)}$ che ci occorre è

$$C(x) = 9\int_2^x \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{9}{2}\left[\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^x = \frac{9}{2}\log\left(3\frac{x-1}{x+1}\right),\ x \in (1,+\infty).$$

(L'integrale della funzione razionale è stato calcolato per decomposizione in fratti semplici.) Quindi, essendo $y_0 = 0$, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{3}{2}(x^2-1)\log\left(\frac{3x-3}{x+1}\right)$, $x \in (1,+\infty)$.

Svolgimento dell'esercizio 12.5.

1) $y'' + 4y = x^2$.
Si tratta di una equazione non omogenea con termine noto $f(x) = x^2$. Iniziamo determinando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4 = 0$, che non ha soluzioni reali. Abbiamo $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, da cui si ricava che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\overline{y}(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza: consideriamo $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ e determiniamo i coefficienti del polinomio in modo tale che φ sia una soluzione dell'equazione differenziale. Abbiamo $\varphi'(x) = 2ax + b$ e $\varphi''(x) = 2a$. Quindi l'equazione è verificata se $2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = x^2$ ossia per $4a = 1$, $4b = 0$ e $2a + 4c = 0$, cioè $a = 1/4$, $b = 0$ e $c = -1/8$. Abbiamo ottenuto che $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$ è una soluzione particolare dell'equazione. Possiamo quindi concludere che l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$, con A e $B \in \mathbb{R}$.

2) $y'' + 16y = 0$.
L'integrale generale è $y(x) = A\cos(4x) + B\sin(4x)$, con A, $B \in \mathbb{R}$.

3) $y'' - 4y = 2 + x$.
Si tratta di una equazione non omogenea con termine noto $f(x) = x + 2$. Iniziamo determinando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4 = 0$, che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, da cui si ricava che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\overline{y}(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza: consideriamo $\varphi(x) = ax + b$ e

determiniamo i coefficienti del polinomio in modo tale che φ sia una soluzione dell'equazione differenziale. Abbiamo $\varphi'(x) = a$ e $\varphi''(x) = 0$. Quindi l'equazione è verificata se $-4ax - 4b = 2 + x$ ossia per $-4a = 1$, $-4b = 2$. Abbiamo ottenuto che $\varphi(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ è una soluzione particolare dell'equazione. Possiamo quindi concludere che l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, con A e $B \in \mathbb{R}$.

4) $4y'' + 4y' + y = e^{2x} + \cos x$.
Si tratta di una equazione non omogenea con termine noto $f(x) = e^{2x} + \cos x$. Iniziamo determinando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$, che ha un'unica soluzione reale $\lambda_1 = -1/2$, da cui si ricava che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\overline{y}(x) = Ae^{-x/2} + Bxe^{-x/2}$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione. Utilizziamo il principio di sovrapposizione che ci garantisce che una soluzione particolare è data dalla somma $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ dove $\varphi_1(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale con termine noto $f_1(x) = e^{2x}$, mentre $\varphi_2(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale con termine noto $f_2(x) = \cos x$. Iniziamo a determinare φ_1 della forma $\varphi_1(x) = Ce^{2x}$. Abbiamo $\varphi_1'(x) = 2Ce^{2x}$ e $\varphi_1''(x) = 4Ce^{2x}$, quindi l'equazione con termine noto $f_1(x)$ è soddisfatta se $(16 + 8 + 1)Ce^{2x} = e^{2x}$, ossia per $C = 1/25$. Abbiamo ottenuto $\varphi_1(x) = e^{2x}/25$. Determiniamo ora φ_2 della forma $\varphi_2(x) = a\cos x + b\sin x$. Abbiamo $\varphi_2'(x) = -a\sin x + b\cos x$ e $\varphi_2''(x) = -a\cos x - b\sin x$. Quindi l'equazione con termine noto $f_2(x)$ è verificata se

$$4(-a\cos x - b\sin x) + 4(-a\sin x + b\cos x) + a\cos x + b\sin x = \cos x\,,$$

ossia se $a = -3/25$ e $b = 4/25$. Quindi $\varphi_2(x) = (-3\cos x + 4\sin x)/25$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = Ae^{-x/2} + Bxe^{-x/2} + e^{2x}/25 + (-3\cos x + 4\sin x)/25$.

5) $y'' + 2y' - 3y = xe^x$.
Si tratta di una equazione non omogenea con termine noto $f(x) = xe^x$. Iniziamo determinando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 1$, da cui si ricava che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\overline{y}(x) = Ae^{-3x} + Be^x$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza: inizieremmo considerando $\varphi(x) = (ax + b)e^x$ e cercando di determinare i coefficienti del polinomio in modo tale che φ sia una soluzione dell'equazione differenziale. Si può verificare che non si riesce a trovare una soluzione di questa forma. Allora tentiamo alzando il grado del polinomio, ossia con una funzione della forma

$\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$, e determiniamo i coefficienti del polinomio in modo tale che φ sia una soluzione dell'equazione differenziale. Abbiamo

$$\varphi'(x) = (ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x\,, \quad \varphi''(x) = (ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)e^x\,,$$

e quindi l'equazione è verificata se

$$\begin{aligned}(ax^2+&(4a+b)x+2a+2b+c)e^x+\\ &+2(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x-3(ax^2+bx+c)e^x = xe^x\,.\end{aligned}$$

Fatte le dovute semplificazioni si ottiene che deve essere $(8ax + 2a + 4b)e^x = xe^x$, ossia $8a = 1$, $2a+4b = 0$, da cui $a = 1/8$ e $b = -1/16$, mentre c può essere qualsiasi (sceglieremo $c = 0$). Abbiamo ottenuto che $\varphi(x) = (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x)e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione. Possiamo quindi concludere che l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = Ae^{-3x} + Be^x + (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x)e^x$, con A e $B \in \mathbb{R}$.

6) $y'' - 2y = 0$.
L'integrale generale è $y(x) = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x}$, con A, $B \in \mathbb{R}$.

7) $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$.
L'integrale generale è $y(x) = e^x(A\cos(2x)+B\sin(2x))+\frac{1}{13}e^{-2x}$, con A, $B \in \mathbb{R}$.

8) $y'' - 6y' + 9y = x$.
L'integrale generale è $y(x) = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + \frac{1}{27}(3x + 2)$, con A, $B \in \mathbb{R}$.

9) $y'' - y = e^x + x^2$.
L'integrale generale è $y(x) = Ae^x + Be^{-x} - 2 - x^2 + \frac{1}{2}xe^x$, con A, $B \in \mathbb{R}$.

10) $y'' + 2y' + y = 6\sin(2x)$.
L'integrale generale è $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} - \frac{24}{25}\cos(2x) - \frac{18}{25}\sin(2x)$, con A, $B \in \mathbb{R}$.

Svolgimento dell'esercizio 12.6.

1) $2y'' - y' = 0\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = -1$.
Si tratta di una equazione omogenea. L'equazione caratteristica è $2\lambda^2 - \lambda = 0$ che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1/2$. Di conseguenza l'integrale generale è $y(x) = A+Be^{x/2}$. Imponiamo le condizioni iniziali per determinare la soluzione del problema di Cauchy. Abbiamo $y'(x) = (B\,e^{x/2})/2$ e quindi

$$y(0) = A + B = 0\,, \quad y'(0) = B/2 = -1\,,$$

da cui si ricava $B = -2$ e $A = 2$. In conclusione, la soluzione è $y(x) = 2-2e^{x/2}$.

2) $y'' - y = \sin(2x) + x\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$.

Si tratta di una equazione non omogenea con termine noto $f(x) = \sin(2x)+x$. Iniziamo determinando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$, che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$, da cui si ricava che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\overline{y}(x) = Ae^{-x} + Be^{x}$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione. Utilizziamo il principio di sovrapposizione che ci garantisce che una soluzione particolare è data dalla somma $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ dove $\varphi_1(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale con termine noto $f_1(x) = x$, mentre $\varphi_2(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale con termine noto $f_2(x) = \sin(2x)$. Iniziamo a determinare φ_1 della forma $\varphi_1(x) = ax + b$. Abbiamo $\varphi_1'(x) = a$ e $\varphi_1''(x) = 0$, quindi l'equazione termine noto $f_1(x)$ è soddisfatta se $-ax - b = x$, ossia per $a = -1$ e $b = 0$. Abbiamo ottenuto $\varphi_1(x) = -x$. Determiniamo ora φ_2 della forma $\varphi_2(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. Abbiamo $\varphi_2'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$ e $\varphi_2''(x) = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$. Quindi l'equazione termine noto $f_2(x)$ è verificata se

$$-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) - a\cos(2x) - b\sin(2x) = \sin(2x)\,,$$

ossia se $a = 0$ e $b = -1/5$. Quindi $\varphi_2(x) = -1\sin(2x)/5$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = Ae^{-x} + Be^{x} - x - 1\sin(2x)/5$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo infine le costanti A e B imponendo le condizioni iniziali: deve essere $y(0) = A + B = 0$, quindi $A = -B$; inoltre

$$y'(x) = -B(-e^{-x}) + Be^{x} - 1 - \frac{2}{5}\cos(2x)\,,$$

e quindi $y'(0) = 2B - 1 - \frac{2}{5} = 0$ da cui $B = 7/10$ (e $A = -B = -7/10$). Se ne conclude che la soluzione è $y(x) = -7e^{-x}/10 + 7e^{x}/10 - x - \sin(2x)/5$.

3) $y'' + 2y' + y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0.$
La soluzione è $y(x) = e^{-x}(1 + x)$.

4) $y'' + 3y' + 5y = 0\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1.$
La soluzione è $y(x) = \frac{2}{\sqrt{11}}e^{-3x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)$.

5) $y'' - 6y' = x^2\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0.$
Si tratta di una equazione non omogenea con termine noto $f(x) = x^2$. Iniziamo determinando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 6\lambda = 0$, che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 6$, da cui si ricava che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\overline{y}(x) = A + Be^{6x}$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una soluzione particolare. Osserviamo che nell'equazione non compare esplicitamente la y, quindi non riusciremo a trovare una soluzione particolare della stessa forma del termine noto

(polinomio di secondo grado), ma dovremo cercare una soluzione della forma $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Abbiamo $\varphi'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $\varphi''(x) = 6ax + 2b$. Quindi l'equazione è verificata se $6ax + 2b - 6(3ax^2 + 2bx + c) = x^2$, ossia se $a = -1/18$, $b = -1/36$, $c = -1/108$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = A + Be^{6x} - x^3/18 - x^2/6 - x/108$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo infine le costanti A e B imponendo le condizioni iniziali: deve essere $y(0) = A + B = 0$, cioè $A = -B$; inoltre si ha

$$y'(x) = 6Be^{6x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{108}\,, \quad y'(0) = 6B - \frac{1}{108}\,,$$

da cui si ricava $B = 1/648$ e $A = -B = -1/648$. Se ne conclude che la soluzione è $y(x) = -1/648 + e^{6x}/648 - x^3/18 - x^2/36 - x/108$.

6) $y'' + 2y' = \cos(3x) + 1\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$.
Si tratta di una equazione non omogenea con termine noto $f(x) = \cos(3x) + 1$. Iniziamo determinando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$, da cui si ricava che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\overline{y}(x) = A + Be^{-2x}$, con A e $B \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione. Utilizziamo il principio di sovrapposizione che ci garantisce che una soluzione particolare è data dalla somma $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ dove $\varphi_1(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale con termine noto $f_1(x) = 1$, mentre $\varphi_2(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale con termine noto $f_2(x) = \cos(3x)$. Siccome nell'equazione non compare la y, dobbiamo cercare φ_1 della forma $\varphi_1(x) = ax$. Abbiamo $\varphi_1'(x) = a$ e $\varphi_1''(x) = 0$, quindi l'equazione termine noto $f_1(x)$ è soddisfatta se $2a = 1$, ossia per $a = 1/2$. Abbiamo ottenuto $\varphi_1(x) = x/2$. Determiniamo ora φ_2 della forma $\varphi_2(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$. Abbiamo $\varphi_2'(x) = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)$ e $\varphi_2''(x) = -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x)$. Quindi l'equazione termine noto $f_2(x)$ è verificata se

$$-9a\cos(3x) - 9b\sin(3x) - 6a\sin(3x) + 6b\cos(3x) = \cos(3x)\,,$$

ossia se $a = -1/13$ e $b = 2/39$. Quindi $\varphi_2(x) = -\cos(3x)/13 + 2\sin(3x)/39$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = A + Be^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{13}\cos(3x) + \frac{2}{39}\sin(3x),\ \ A,\ B \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo infine le costanti A e B imponendo le condizioni iniziali: deve essere $y(0) = A + B - 1/13 = 0$; inoltre

$$y'(x) = -2Be^{-2x} + \frac{1}{2} + \frac{3}{13}\sin(3x) + \frac{6}{39}\cos(3x)\,,$$

quindi la seconda condizione iniziale diventa $y'(0) = -2B + 1/2 + 6/39 = 0$ da cui si ricava $B = 17/52$. Infine si ha $A = -B + 1/13 = -1/4$. Se ne conclude che la soluzione è $y(x) = -1/4 + 17e^{-2x}/52 + x/2 - \cos(3x)/13 + 2\sin(3x)/39$.

7) $y'' + 2y' + y = \cos x + 2\sin x\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$.
La soluzione è $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}/2 - \cos x + (\sin x)/2$.

8) $y'' + 2y' + y = e^{3x}\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$.
La soluzione è $y(x) = \frac{1}{16}(e^{3x} - e^{-x} + 12xe^{-x})$.

Capitolo 2

Funzioni reali di due o più variabili reali

2.1 Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Sulla retta reale sono state introdotte le nozioni di intervallo aperto, intervallo chiuso e di intorno di un punto (si veda il Paragrafo 1.2 del primo volume). Abbiamo ora la necessità di generalizzare queste nozioni agli spazi n-dimensionali (in realtà penseremo sempre al piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ o allo spazio $\mathbb{R}^3$).

Un punto di $\mathbb{R}^n$ sarà indicato con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dove x_i, $i = 1, \dots, n$, è l'i–esima coordinata di $\mathbf{x}$. Un punto di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$) sarà indicato anche con $P = (x, y)$ (rispettivamente $P = (x, y, z)$).

Diamo la definizione di distanza euclidea tra due punti.

Definizione 2.1. Siano $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ due punti di $\mathbb{R}^n$. La **distanza euclidea** $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ di $\mathbf{x}$ da $\mathbf{y}$ è definita da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

In particolare, se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ sono due punti di $\mathbb{R}^2$, si ha

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

Analogamente, se $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sono due punti di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,.$$

In entrambi i casi, la distanza di P da Q coincide con la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$. Per ogni $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ valgono le seguenti proprietà:

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (disuguaglianza triangolare).

Le prime due proprietà sono evidenti dalla definizione, mentre la terza proprietà (la disuguaglianza triangolare) è del tutto analoga a quella discussa per la norma di vettori (si veda il Capitolo 7 del primo volume).

Una volta introdotta una distanza in $\mathbb{R}^n$ è possibile dare una nozione generalizzata di sfera.

Definizione 2.2. L'**intorno sferico** $B_r(\mathbf{x_0})$ di un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ e di raggio $r > 0$ è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che distano da $\mathbf{x_0}$ meno di r, ossia

$$B_r(\mathbf{x_0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) < r\} \ .$$

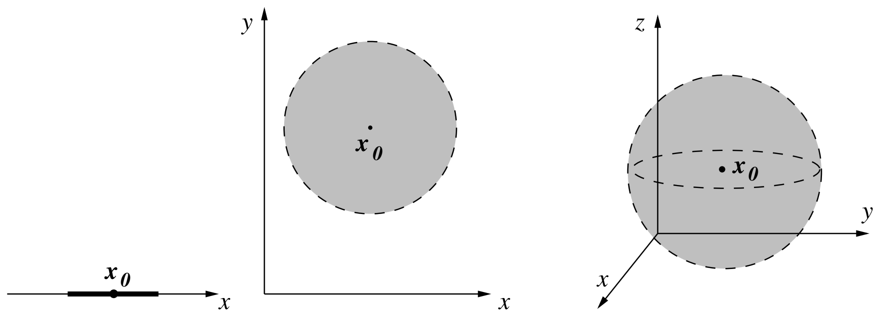


Figura 2.1: Intorni sferici per $n = 1$, 2 e 3

Se $n = 1$, l'intorno sferico $B_r(\mathbf{x_0})$ è l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$, quindi gli intorni sferici coincidono con gli intorni definiti nel primo volume, Definizione 1.5. Se $n = 2$, $B_r(\mathbf{x_0})$ non è altro che il cerchio centrato in $\mathbf{x_0}$ e raggio r, privato della circonferenza. Analogamente, se $n = 3$, $B_r(\mathbf{x_0})$ è la sfera centrata in $\mathbf{x_0}$ e di raggio r, privata della superficie sferica.

Siamo ora in grado di introdurre le principali nozioni della topologia di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.3. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **aperto** se per ogni $\mathbf{x} \in A$ esiste almeno un intorno $B_r(\mathbf{x})$ tutto contenuto in A. Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **chiuso** se il suo complementare $\mathbb{R}^n \setminus C$ in $\mathbb{R}^n$ è aperto.

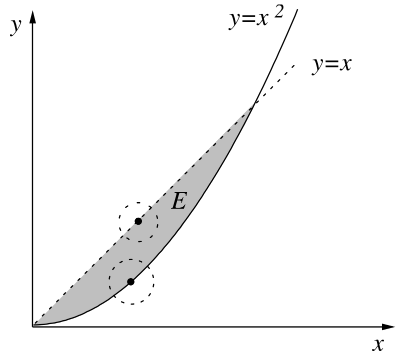


Figura 2.2: L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in [0, 1],\ x^2 \leq y < x\}$.

Osservazione 2.4. L'insieme vuoto $\emptyset$ ed $\mathbb{R}^n$ sono entrambi sia aperti che chiusi. Notiamo che è un errore aspettarsi che un insieme sia aperto oppure chiuso. Anzi, la classe degli insiemi aperti, così come quella degli insiemi chiusi, non è molto ricca e, tipicamente, un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ non è né aperto né chiuso. Ad esempio, l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in [0, 1],\ x^2 \leq y < x\}$ disegnato nella Figura 2.2 non è aperto, perché i punti dell'arco di parabola $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ appartengono ad E ma non è possibile disegnare un cerchio centrato in quei punti tutto contenuto in E. D'altra parte, E non è neanche chiuso, perché i punti del segmento $y = x$, $x \in [0, 1]$ appartengono al complementare di E ma non è possibile disegnare un cerchio centrato in quei punti tutto contenuto nel complementare di E.

Le principali proprietà degli insiemi aperti o chiusi sono le seguenti.

1. L'unione di una qualsiasi famiglia di aperti è un aperto.
2. L'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto.
3. L'intersezione di una qualsiasi famiglia di chiusi è un chiuso.
4. L'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso.

Esempio 2.5. In $\mathbb{R}$, si verifica facilmente che l'intervallo (a, b) e le semirette $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ sono insiemi aperti e, di conseguenza, che l'intervallo $[a, b]$ e le semirette $(-\infty, a]$ e $[b, +\infty)$ sono insiemi chiusi.

Esempio 2.6. Fissati $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$, l'intorno $B_r(\mathbf{x_0})$ è un insieme aperto. Infatti, per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0})$ l'intorno $B_\rho(\mathbf{x})$ con $\rho = (r - d(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}))/2$ è tutto contenuto in $B_r(\mathbf{x_0})$ (si veda la Figura 2.3 a sinistra).

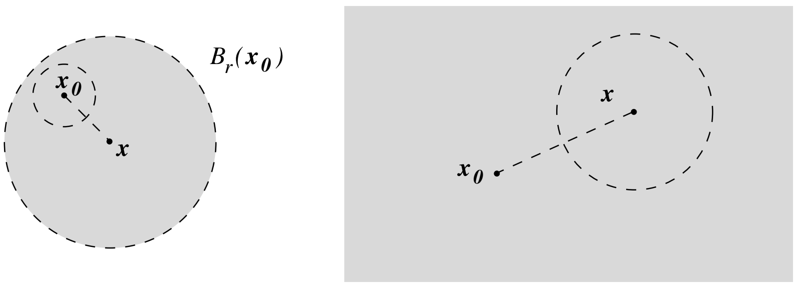


Figura 2.3: Gli insiemi $B_r(\mathbf{x_0})$ ed $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x_0}\}$ sono aperti.

Esempio 2.7. Sia $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$. L'insieme $A = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x_0}\}$ è aperto. Infatti, per ogni $\mathbf{x} \in A$ l'intorno $B_r(\mathbf{x})$ con $r = d(\mathbf{x}, \mathbf{x_0})/2$ è tutto contenuto in A. Come conseguenza, abbiamo che gli insiemi composti da un solo punto sono chiusi in $\mathbb{R}^n$ (si veda la Figura 2.3 a destra).

Definizione 2.8. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Il punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice **interno** ad A se esiste un intorno $B_r(\mathbf{x})$ di $\mathbf{x}$ tutto contenuto in A. Il punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è di **frontiera** per A se ogni intorno di $\mathbf{x}$ contiene sia elementi di A che elementi del complementare di A. L'insieme di tutti i punti di frontiera di A si indica con ∂A. Un punto $\mathbf{x} \in A$ si dice **isolato** se esiste $r > 0$ tale che $B_r(\mathbf{x}) \cap A = \{\mathbf{x}\}$. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è di **accumulazione** per A se ogni intorno di $\mathbf{x}$ contiene elementi di A diversi da $\mathbf{x}$.

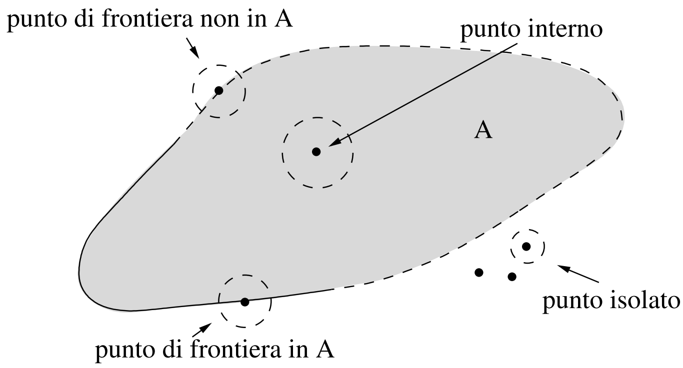


Figura 2.4: Punti interni, isolati e di frontiera

Osservazione 2.9. Per definizione, un insieme A è aperto se e solo se ogni suo punto è interno.

Osservazione 2.10. I punti di frontiera o di accumulazione non appartengono necessariamente all'insieme. In particolare, se A è un insieme aperto, A non contiene nessuno dei suoi punti di frontiera. Ovviamente ogni punto isolato di un insieme è di frontiera per tale insieme. Non è difficile mostrare che ogni punto di frontiera non isolato di un insieme A è un punto di accumulazione per A.

Sia $A \in \mathbb{R}^n$. La **chiusura** di A in $\mathbb{R}^n$ è l'insieme $\overline{A} = A \cup \partial A$, che si può dimostrare essere il più piccolo insieme chiuso contenente A.

Definizione 2.11. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice **limitato** se esiste una sfera $B_r(\mathbf{x})$ che lo contiene. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice **compatto** se è chiuso e limitato.

Definizione 2.12. Diremo che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è **connesso** se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in A$ esiste una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A, che congiunge $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

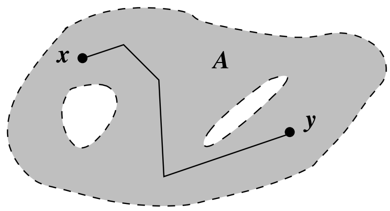


Figura 2.5: Insieme aperto connesso.

2.2 Funzioni reali di più variabili reali

All'inizio del Capitolo 2 del primo volume abbiamo dato la definizione astratta di funzione. Siamo ora interessati alle funzioni da $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, in $\mathbb{R}$, ossia a terne (X, Y, f) dove il dominio X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, il codominio Y è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e $f\colon X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associa ad ogni punto $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ un unico valore reale $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$. Indicheremo con $\mathrm{Dom}(f)$ il dominio di f, e con

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \colon \ \exists\ \mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tale che } y = f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}$$

l'**immagine** di f. Concentreremo la nostra attenzione soprattutto ai casi $n = 2$ o $n = 3$. Ricordando le notazioni introdotte nel paragrafo precedente per le coordinate dei punti del piano e dello spazio, una funzione reale di due variabili reali sarà denotata con $f(x, y)$, mentre una funzione reale di tre variabili reali sarà denotata con $f(x, y, z)$.

Esempio 2.13. La funzione definita da $f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, O)$ (distanza di un punto dall'origine) ha come dominio tutto $\mathbb{R}^n$ e come immagine la semiretta $[0, +\infty)$.

Le funzioni che considereremo saranno quasi sempre **funzioni elementari** in più variabili ossia quelle funzioni che si ottengono facendo somme, prodotti, quozienti e composizioni di funzioni elementari in una delle variabili. Ad esempio $f(x, y) = \log(1-x^2-y^2)\sin(xy)$ è una funzione elementare di due variabili. Quando, come in questo esempio, una funzione elementare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ viene indicata solo attraverso la legge che ne definisce l'azione, è sempre sottinteso che il suo dominio $\mathrm{Dom}(f)$ coincida con il suo **insieme di definizione** (o dominio naturale), cioè con il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in cui la legge f risulta definita. Ad esempio la funzione $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)\sin(xy)$ ha come dominio naturale il cerchio aperto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

Esempio 2.14. Determiniamo il dominio naturale della funzione

$$f(x, y) = \log(6x - y) + \sqrt{9 - x^2 - y^2} \tag{2.1}$$

e disegnamolo sul piano cartesiano.

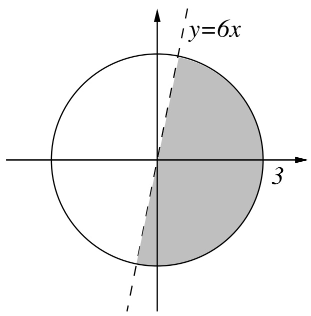


Figura 2.6: Dominio della funzione definita in (2.1)

Il dominio naturale è l'insieme dei punti del piano le cui coordinate (x, y) verificano le disequazioni

$$\begin{cases} 6x - y > 0\,, \\ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\,, \end{cases}$$

in modo tale che sia il logaritmo che la radice quadrata che compaiono nell'espressione della funzione siano ben definiti. Per avere un'idea geometrica del dominio, conviene scrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} y < 6x\,, \\ x^2 + y^2 \leq 9\,. \end{cases}$$

Sappiamo disegnare l'insieme dei punti per cui vale $y = 6x$, che è una retta passante per l'origine con coefficiente angolare uguale a 6. I punti del piano le cui coordinate verificano la prima disequazione devono avere coordinata y più piccola di $6x$, quindi sono i punti al di sotto della retta (retta esclusa). D'altra parte, i punti che verificano la seconda disequazione sono quelli che distano al più 3 dall'origine degli assi, quindi sono i punti del cerchio di raggio 3 centrato nell'origine, inclusa la circonferenza di frontiera. Affinché siano verificate entrambe le disequazioni, il punto di coordinate (x, y) deve appartenere all'intersezione di questi due insiemi, quindi il dominio della funzione $f(x, y)$ è l'insieme disegnato nella Figura 2.6.

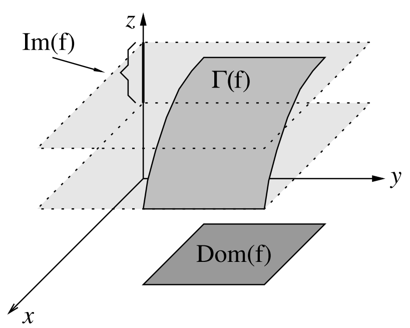


Figura 2.7: Dominio, immagine e grafico di una funzione di due variabili

Il **grafico** di una funzione $f\colon \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ definito da

$$\boxed{\Gamma(f) = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ \mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(f),\ t = f(\mathbf{x})\}\,.}$$

In particolare, il grafico di una funzione reale di due variabili reali è, in genere, una superficie dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Esempio 2.15. Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, la funzione di due variabili $f(x, y) = ax + by + c$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e ha come grafico il piano dello spazio di equazione cartesiana $z = ax + by + c$. In particolare, se $a = b = 0$ la funzione è costante e il suo grafico è un piano parallelo al piano xy.

Può essere talvolta conveniente vedere come una funzione f agisce su un sottoinsieme E del suo dominio. In questo caso diremo che la funzione f viene ristretta ad E e indicheremo con $f|_E$ la **restrizione** di f ad E . Nel seguito saremo particolarmente interessati alla restrizione di una funzione di n variabili ad una curva n–dimensionale.

Definizione 2.16. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\gamma(t)$ una curva parametrica $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a, b]$, con sostegno contenuto in A. La **restrizione sulla curva** γ della funzione $f(x, y)$ è la funzione reale di variabile reale $t \in [a, b]$ ottenuta tramite la composizione $f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

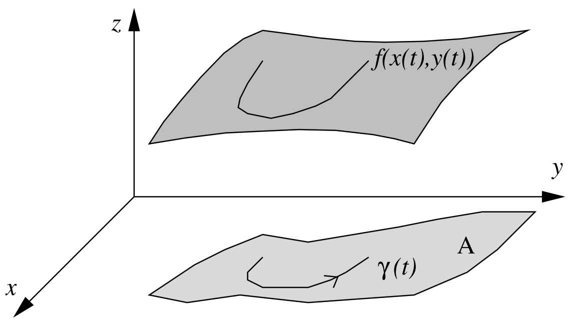


Figura 2.8: Restrizione di una funzione di due variabili ad una curva

Per le funzioni di due variabili, risulta talvolta conveniente una descrizione grafica attraverso le **curve di livello** ossia gli insiemi

$$\boxed{l_c = \{(x, y) \in \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2\colon\ f(x, y) = c\}\,.}$$

Il fatto che questi insiemi siano, in genere, proprio delle curve non è ovvio e verrà dimostrato nel Paragrafo 3.4.

La rappresentazione grafica di una funzione di due variabili attraverso le sue curve di livello è quella che siamo abituati a vedere, ad esempio, sulle mappe delle previsioni del tempo, dove vengono tracciate le curve di livello della pressione atmosferica, oppure nelle carte topografiche, dove sono tracciate le curve di livello dell'altezza del suolo rispetto al livello del mare.

Esempio 2.17. La funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ è definita nel cerchio centrato nell'origine e raggio 1 e ha come immagine l'intervallo $[0, 1]$. Il suo grafico e le sue curve di livello sono disegnati nella Figura 2.9.

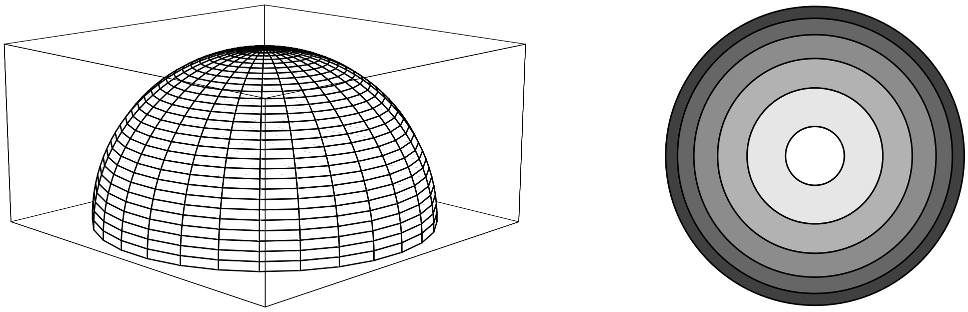


Figura 2.9: Grafico e curve di livello di $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Osservazione 2.18. Nella legge che definisce una funzione di più variabili possono non apparire alcune delle variabili. In questi casi il grafico e le curve di livello sono di tipo particolare. Ad esempio la funzione $f(x, y) = \sin y$ non dipende dalla variabile x.

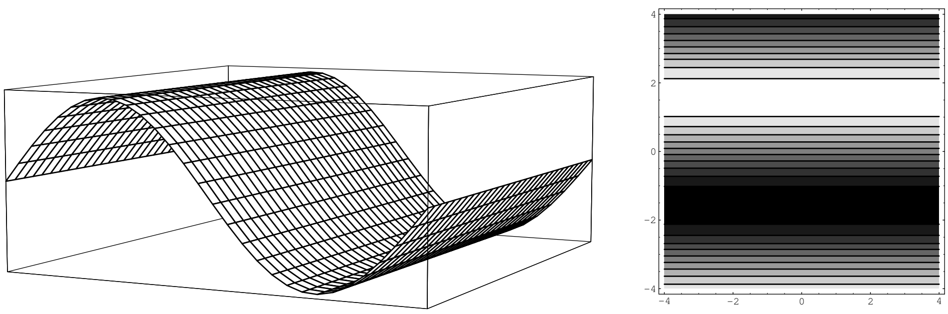


Figura 2.10: Grafico e curve di livello di $f(x, y) = \sin y$

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e il suo grafico si ottiene nel modo seguente: si disegna nel piano yz il grafico della funzione (di una sola variabile) $z = \sin y$ e poi si considera la superficie che proietta tale curva parallelamente all'asse x (cfr. Figura 2.10). Poiché la condizione $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ non dipende da x le curve di livello della funzione sono rette parallele all'asse delle x.

Analogamente, la funzione $f(x, y) = x$ ha grafico che si ottiene disegnando la retta $z = x$ sul piano xz e poi si considera il piano che proietta tale retta parallelamente all'asse y (cfr. Figura 2.11). Poiché la condizione $f(x, y) = c$,

$c \in \mathbb{R}$, non dipende da y le curve di livello della funzione sono rette parallele all'asse delle y.

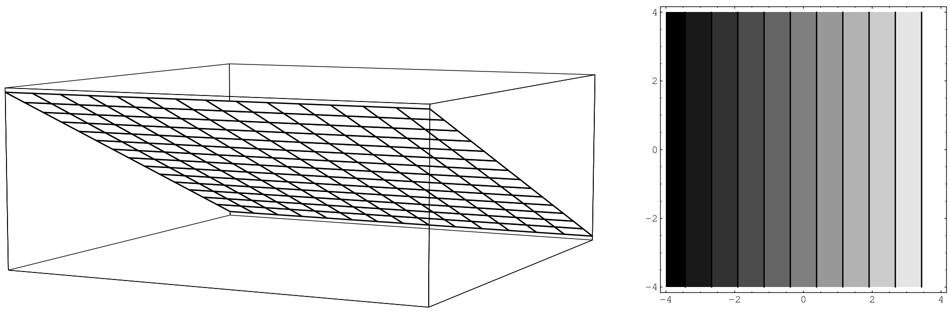


Figura 2.11: Grafico e curve di livello di $f(x, y) = x$

Ricordiamo che $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, non è un insieme ordinato, quindi non avrà senso parlare di monotonia di una funzione di più variabili. Continuano invece ad avere senso le definizioni relative alla limitatezza, che riguardano l'immagine della funzione (che è un sottoinsieme dei numeri reali).

Definizione 2.19. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremo che f è **limitata superiormente** (rispettivamente **inferiormente**) se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(\mathbf{x}) \leq M$ (rispettivamente $f(\mathbf{x}) \geq M$) per ogni $\mathbf{x} \in A$. Se f è limitata sia superiomente che inferiormente diremo che f è **limitata**.

Esempio 2.20. La funzione $f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, O)$ è limitata inferiormente da 0 e non è limitata superiormente.

La funzione $f(x, y) = ax+by+c$ è limitata se e solo se $a = b = 0$, altrimenti non è limitata inferiormente né superiormente.

La funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ è limitata inferiormente da 0 e superiomente da 1, quindi è limitata.

2.3 Limiti e continuità

Vogliamo estendere al caso di funzioni di più variabili la nozione di limite introdotta per funzioni di una variabile nel Paragrafo 3.1 del primo volume. Considereremo solo limiti finiti ($l \in \mathbb{R}$) in un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 2.21. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione per A. Diciamo che $l \in \mathbb{R}$ è il limite di f per $\mathbf{x}$ che tende ad $\mathbf{x_0}$, e scriviamo

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = l\,,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon\,, \qquad \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x_0}) \cap A\,,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x_0}\,.$$

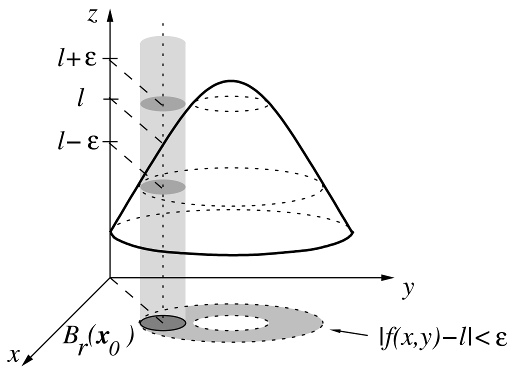


Figura 2.12: Limite di una funzione di due variabili

Si può notare che la definizione di limite è formalmente identica a quella data nel caso unidimensionale (è stato sufficiente sostituire gli intorni unidimensionali di un punto con quelli n–dimensionali). Tuttavia la verifica di un limite nel caso di più dimensioni è seriamente più complicata del caso unidimensionale.

Esempio 2.22. Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare $\delta > 0$ in modo tale che tutti i punti $\mathbf{x} = (x, y)$ del piano che distano dal $\mathbf{x_0} = (0, 0)$ meno di δ (cioè le cui coordinate soddisfano $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$), godano della proprietà che il prodotto xy delle coordinate sia in valore assoluto minore di ε (ossia $|xy| < \varepsilon$).

Uno dei metodi standard per determinare δ è quello di trovare una maggiorazione di $|f(\mathbf{x}) - l|$ con una quantità che dipenda solo dalla distanza di $\mathbf{x}$ da $\mathbf{x_0}$. Nel nostro caso, vogliamo maggiorare $|xy|$ con una quantità che dipenda solo da $\sqrt{x^2+y^2}$. Per fare questo, basta osservare che dalla ovvia proprietà

$$x^2 + y^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$$

discende la disuguaglianza

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,. \tag{2.2}$$

Quindi, se scegliamo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ abbiamo che, se $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, allora

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

e questo completa la verifica richiesta.

L'operazione di limite è ben definita, come enunciato nel seguente risultato.

Teorema 2.23 (Unicità del limite). *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x_0}$ punto di accumulazione di A. Supponiamo che $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = l_1$ e $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = l_2$. Allora $l_1 = l_2$.*

La dimostrazione del teorema sull'unicità del limite è identica a quella fatta per funzioni reali di una variabile reale (si veda il Teorema 3.10 del primo volume) e viene quindi omessa.

La definizione di limite ci dice che l'immagine $f(\mathbf{x})$ tramite f di punti vicini a $\mathbf{x_0}$ è uniformemente vicina al valore l, ossia che tutti i punti contenuti in un opportuno intorno centrato in $\mathbf{x_0}$ hanno immagine che dista poco da l. In particolare, se esiste il limite in $\mathbf{x_0}$, questo è indipendente dal percorso compiuto per avvicinarsi a $\mathbf{x_0}$, come enunciato nel seguente teorema.

Teorema 2.24. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x_0}$ punto di accumulazione di A. Supponiamo che esista il limite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = l$. Allora, per ogni curva regolare $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a,b]$ tale che esista $t_0 \in [a,b]$ con $\gamma(t_0) = \mathbf{x_0}$ si ha che $\lim_{t\to t_0} f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = l$.*

Il teorema precedente ci fornisce un criterio generale per verificare quando una funzione di più variabili non ammette limite. Infatti, se esistono restrizioni della funzione a curve diverse per cui il limite è diverso, oppure se su una restrizione il limite non esiste, allora sicuramente la funzione non ammette limite nel punto.

Esempio 2.25. Studiamo il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

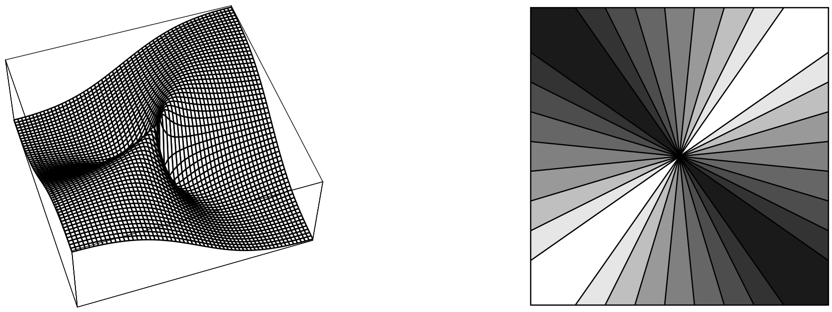


Figura 2.13: Grafico e curve di livello di $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$

Proviamo ad avvicinarci all'origine lungo la retta di equazione $y = mx$. La funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ su questa retta vale

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}, \quad x \neq 0.$$

Quindi la funzione considerata è costante su ogni retta passante per l'origine e il valore della costante varia con il coefficiente angolare della retta (si veda la Figura 2.13). Alla luce del Teorema 2.24, questo fatto implica che il limite considerato non esiste.

Esempio 2.26. Studiamo il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Anche questa volta iniziamo ad avvicinarci all'origine lungo la retta di equazione $y = mx$. La funzione $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ su questa retta vale

$$f(x,mx) = \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \frac{mx}{x^2+m^2}, \quad x \neq 0$$

e si ha $\lim_{x\to0} f(x,mx) = 0$ per ogni m, quindi il limite nell'origine lungo una qualunque retta è 0. Tuttavia questo non è sufficiente per concludere che il

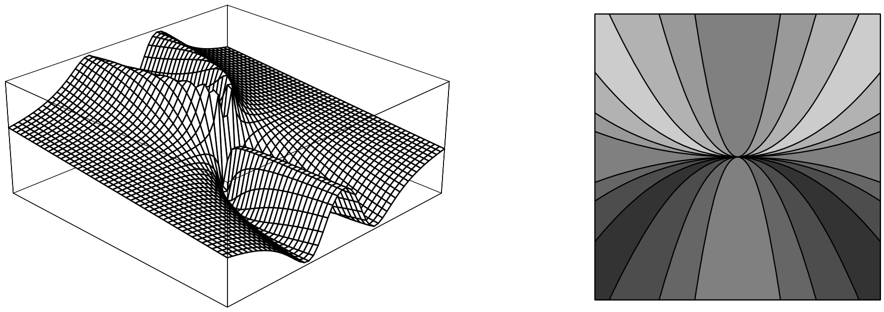


Figura 2.14: Grafico e curve di livello di $f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$

limite della funzione di due variabili esista e valga 0. Infatti, se proviamo ad avvicinarci all'origine lungo una parabola di equazione $y = ax^2$, otteniamo che la funzione lungo tale parabola vale

$$f(x, ax^2) = \frac{ax^4}{x^4 + a^2x^4} = \frac{a}{1 + a^2}\,, \quad x \neq 0\,,$$

ossia la funzione è costante lungo le parabole con vertice nell'origine e la costante dipende dal coefficiente di concavità della parabola (si veda la Figura 2.14). Per il Teorema 2.24 questo basta per affermare che il limite considerato non esiste.

Riportiamo ora le principali proprietà dei limiti, analoghe a quelle del caso unidimensionale, sia negli enunciati che nelle dimostrazioni (che ometteremo).

Teorema 2.27 (Permanenza del segno). *Sia* $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e sia* $\mathbf{x_0}$ *un punto di accumulazione di* A.
(a) Se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = l > 0$ *(risp.* < 0*), allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(\mathbf{x}) > 0$ *(risp.* < 0*) per ogni* $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x_0}) \cap A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x_0}$.
(b) Se esiste $\delta > 0$ *tale che* $f(\mathbf{x}) \geq 0$ *(risp.* ≤ 0*) per ogni* $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x_0}) \cap A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x_0}$*, e se esiste* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = l$*, allora* $l \geq 0$ *(risp.* ≤ 0*).*

Teorema 2.28 (Operazioni sui limiti finiti). *Siano* $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e sia* $\mathbf{x_0}$ *un punto di accumulazione di* A*. Supponiamo che esistano i limiti* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x}) = \beta \in \mathbb{R}$*. Allora esistono anche i limiti di* $f + g$ *e* $f \cdot g$ *e si ha* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = \alpha + \beta$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \beta$.
Se inoltre $\beta \neq 0$*, allora esiste anche il limite* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ *e vale* α/β.

Anche la definizione di continuità è del tutto analoga al caso unidimensionale.

Definizione 2.29 (Continuità). Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x_0} \in A$. Diciamo che f è continua in $\mathbf{x_0}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0})| < \varepsilon$$

per ogni $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x_0}) \cap A$. Diciamo che f è continua in A se è continua in ogni punto $\mathbf{x_0} \in A$.

Osservazione 2.30. Se $\mathbf{x_0}$ è un punto di accumulazione di A, allora la continuità di f in $\mathbf{x_0}$ è equivalente a richiedere che esista il limite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})$ e valga $f(\mathbf{x_0})$:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) . \qquad \left(\substack{\text{continuità in } \mathbf{x_0}\\ \text{di accumulazione}}\right)$$

Se invece $\mathbf{x_0}$ è un punto isolato di A, allora $B_\delta(\mathbf{x_0}) \cap A = \{\mathbf{x_0}\}$ per ogni $\delta > 0$ abbastanza piccolo e quindi la funzione f è continua in $\mathbf{x_0}$.

Osservazione 2.31 (Topologia degli insiemi di livello). Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^n$. Fissato $c \in \mathbb{R}$ consideriamo l'insieme $S_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}) < c\}$. Mostriamo che per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme S_c è aperto. Se S_c è l'insieme vuoto, la conclusione è ovvia. Supponiamo che S_c sia non vuoto e sia $\mathbf{x_0} \in S_c$. Questo vuol dire che $f(\mathbf{x_0}) < c$. Dal momento che la disuguaglianza è stretta, esiste $\varepsilon > 0$ tale che valga $f(\mathbf{x_0}) + \varepsilon < c$. La continuità di f in $\mathbf{x_0}$ garantisce che in corrispondenza di questo ε è possibile determinare $\delta > 0$ tale che $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0})| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x_0})$. Per tali valori di $\mathbf{x}$ otteniamo $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x_0}) + \varepsilon < c$ e quindi $B_\delta(\mathbf{x_0})$ è contenuto in S_c. Abbiamo così dimostrato che ogni punto $\mathbf{x_0} \in S_c$ è interno ad S_c, ossia che l'insieme S_c è aperto. In maniera analoga si dimostra che l'insieme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}) > c\}$ è un insieme aperto. Di conseguenza gli insiemi $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}) \geq c\}$ e $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}) \leq c\}$ sono insiemi chiusi, in quanto complementari di un aperto, e infine l'insieme di livello

$$l_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}) = c\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}) \geq c\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}) \leq c\}$$

è un insieme chiuso, in quanto intersezione di due chiusi.

Come conseguenza del Teorema 2.28 otteniamo il seguente risultato.

Teorema 2.32 (Continuità di somma, prodotto e quoziente). *Se $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue in un punto $\mathbf{x_0} \in A$, allora le funzioni $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue nel punto $\mathbf{x_0}$; se inoltre $g(\mathbf{x_0}) \neq 0$, anche la funzione f/g è continua in $\mathbf{x_0}$.*

Per quanto riguarda le funzioni composte, possiamo avere diverse combinazioni. Date una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e una funzione $F\colon J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se si ha $\mathrm{Im}(f) \subseteq J$, allora per $\mathbf{x} \in A$ è ben definita la composizione $F(f(\mathbf{x}))$ che risulta essere una funzione reale di n variabili reali.

Ad esempio, se $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $F(t) = \sqrt{t}$, allora la composizione è $F(f(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ovviamente la composizione $f(F)$ non ha nessun senso se $n \geq 2$. La composizione corretta va fatta nel modo seguente: date n funzioni reali di una variabile reale $x_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tutte definite su uno stesso intervallo I e con $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ appartenente ad A per ogni $t \in I$, allora si può fare la composizione $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ che risulta essere una funzione reale di variabile reale. Ricordiamo che, se si pensa alle funzioni $x_i(t)$ come le componenti di una parametrizzazione di una curva parametrica $\gamma(t)$, allora la funzione $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ non è altro che la restrizione della funzione f alla curva. Riguardo alla continuità delle funzioni composte, valgono i seguenti risultati.

Teorema 2.33 (Continuità della funzione composta). *Sia data una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbf{x_0} \in A$.*
i) Se $F\colon J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di una variabile tale che Im$(f) \subseteq J$, continua in $t_0 = f(\mathbf{x_0})$, allora la funzione composta $F(f(\mathbf{x}))$ è continua in $\mathbf{x_0}$.
ii) Se $x_1, x_2, \dots, x_n\colon I \to \mathbb{R}$ sono n funzioni definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, tali che $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in A$ per ogni $t \in I$, continue in $t_0 \in I$ e con $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = \mathbf{x_0}$, allora la funzione composta $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ è continua in t_0.

Dal momento che la verifica dei limiti in più variabili è abbastanza complicata, servono degli strumenti teorici che garantiscano la continuità delle funzioni elementari.

Teorema 2.34. *Se $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dipende solo da una variabile, ossia esiste $g\colon$ Dom$(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(\mathbf{x}) = g(x_i)$, e se g è una funzione reale di una variabile reale continua nel suo dominio, allora f è continua (come funzione di più variabili) in A.*

Osservazione 2.35 (Continuità delle funzioni elementari). I Teoremi 2.34, 2.32 e 2.33 garantiscono che le funzioni elementari di più variabili sono continue nel loro insieme di definizione. Ad esempio, la funzione $f(x, y) = x^2y^2 \sin(x + y^2)$ è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti è il prodotto dei fattori x^2 (dipendente solo da x e continuo su $\mathbb{R}$ come funzione di una sola variabile), y^2 (dipendente solo da y e continuo su $\mathbb{R}$ come funzione di una sola variabile) e $\sin(x + y^2)$. Quest'ultimo fattore è la composizione della funzione $F(t) = \sin t$ con la funzione $f(x, y) = x + y^2$, e quindi, per la prima parte del Teorema 2.33, è continua.

2.4 Calcolo differenziale in due e tre variabili

In questo paragrafo verranno inizialmente considerate le funzioni reali di due variabili reali. In un secondo momento le definizioni introdotte e i risultati ottenuti saranno estesi anche a funzioni di tre variabili.

L'idea di fondo della derivazione è sempre quella di calcolare il limite di un rapporto incrementale. In presenza di due variabili, è chiaro che risulta interessante studiare l'incremento della funzione sia a seguito dell'incremento di una variabile, che a seguito dell'incremento dell'altra. Ne segue la definizione di derivata parziale.

Definizione 2.36 (Derivate parziali). Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Se esiste finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.3}$$

la funzione f si dice derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto P_0. Il limite prende il nome di derivata parziale rispetto a x di f in P_0 e si indica con $f_x(x_0, y_0)$. Analogamente, se esiste finito il limite

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \tag{2.4}$$

la funzione f si dice derivabile parzialmente rispetto alla variabile y nel punto P_0. Il limite prende il nome di derivata parziale rispetto a y di f in P_0 e si indica con $f_y(x_0, y_0)$.

Osservazione 2.37. In letteratura esistono molte notazioni diverse per le derivate parziali. Alcune sono

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = D_x f(x_0,y_0)\,,$$
$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = D_y f(x_0,y_0)\,.$$

Esempio 2.38. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x + |y|$. La funzione è derivabile parzialmente rispetto ad x in $P_0 = (0,0)$ e $f_x(0,0) = 1$. Infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1\,.$$

D'altra parte f non è derivabile parzialmente in $(0,0)$ rispetto ad y. Infatti

$$\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{|k|}{k}$$

e il limite per k che tende a 0 di tale rapporto incrementale nella variabile y non esiste.

Osservazione 2.39. Dalla Definizione 2.36 si evince che il calcolo di una derivata parziale si riconduce al calcolo della derivata di una funzione di una sola variabile secondo le usuali regole di calcolo. Infatti, se si vuole calcolare la derivata parziale rispetto ad x di una funzione $f(x,y)$ è sufficiente pensare la funzione come dipendente dalla sola x, considerando y come una costante, e derivare in x. Analogamente la derivata parziale rispetto ad y si calcola pensando x come ad una costante e derivando la funzione come sola funzione di y. Ad esempio, le derivate parziali della funzione $f(x,y) = xe^{xy^2} + \sin y$ sono

$$f_x(x,y) = e^{xy^2} + xy^2 e^{xy^2}\,, \qquad f_y(x,y) = 2yx^2 e^{xy^2} + \cos y\,.$$

Osservazione 2.40 (Interpretazione geometrica delle derivate parziali). Sia f una funzione di due variabili che ammetta le due derivate parziali in un punto $P_0 = (x_0,y_0)$. Dal punto di vista geometrico, spostarsi dal punto (x_0,y_0) al punto (x_0+h,y_0) vuol dire muoversi sul piano xy (che contiene il dominio della funzione) da P_0 parallelamente all'asse delle x. Quindi i punti $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ e $(x_0+h,y_0,f(x_0+h,y_0))$ si trovano sulla curva γ_1 che si ottiene come intersezione tra il grafico di f (che è una superficie dello spazio) e il piano di equazione cartesiana $y = y_0$ (si veda la Figura 2.15).

In particolare, il rapporto incrementale $[f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)]/h$ determina l'inclinazione della retta r_h dello spazio contenuta nel piano $y = y_0$ e

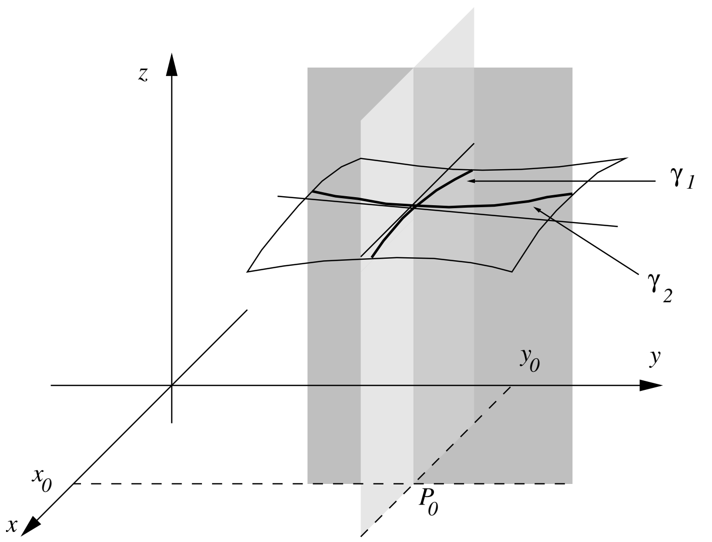


Figura 2.15: Significato geometrico delle derivate parziali

che passa per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e $(x_0 + h, y_0, f(x_0 + h, y_0))$. Quando h tende a zero, il punto $(x_0 + h, y_0, f(x_0 + h, y_0))$ si avvicina a $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ muovendosi lungo la curva γ_1 e la retta r_h tende a diventare la retta tangente alla curva γ_1 in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Più precisamente, la retta tangente a γ_1 in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Analogamente, i punti $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e $(x_0, y_0 + k, f(x_0, y_0 + k))$ si trovano sulla curva γ_2 che si ottiene come intersezione tra il grafico di f e il piano di equazione cartesiana $x = x_0$. In questo caso, il rapporto incrementale $[f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]/k$ determina l'inclinazione della retta s_k dello spazio contenuta nel piano $x = x_0$ e che passa per i punti $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e $(x_0, y_0 + k, f(x_0, y_0 + k))$. Quando k tende a zero, il punto $(x_0, y_0 + k, f(x_0, y_0 + k))$ si avvicina a $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ muovendosi lungo la curva γ_2 e la retta s_k tende a diventare la retta tangente alla curva γ_2 in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Anche in questo caso specifichiamo che la retta tangente a γ_2 in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Le due curve γ_1 e γ_2 prendono il nome di **curve coordinate** nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ appartenente al grafico di f. Abbiamo ottenuto che le derivate parziali di f in P_0 determinano l'inclinazione delle rette tangenti alle due curve coordinate nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Esempio 2.41. Abbiamo visto nell'Esempio 2.38 che una funzione continua può non avere derivate parziali. Come ulteriore esempio consideriamo la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Il suo incremento rispetto alla x nel punto $P_0 = (0,0)$ è

$$\frac{\sqrt{h^2}}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0\,, \\ -1 & \text{se } h < 0\,, \end{cases}$$

da cui si deduce che non esiste la derivata parziale rispetto a x di f in $(0,0)$. In maniera analoga si mostra che non può esistere neanche la derivata parziale rispetto ad y di f in $(0,0)$.

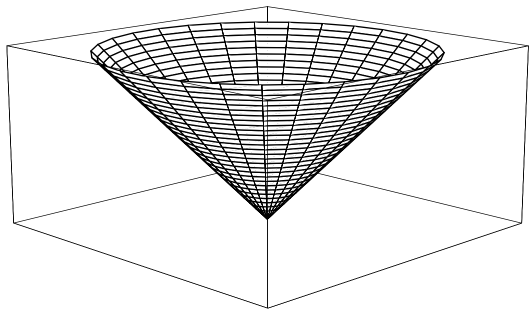


Figura 2.16: Grafico di $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Notiamo che il grafico della funzione è un cono con vertice nell'origine (si veda la Figura 2.16) e le due curve coordinate presentano uno spigolo nell'origine.

Osservazione 2.42. La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non è continua nell'origine (si veda l'Esempio 2.25). D'altra parte si ha

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,\ h \neq 0\,, \qquad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0,\ k \neq 0\,.$$

Quindi la funzione è derivabile parzialmente nell'origine e si ha $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. Se ne deduce che una funzione che ammette derivate parziali in un punto non è necessariamente continua in tale punto.

Definizione 2.43. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Il **piano tangente** al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il piano che passa per tale punto (quindi con equazione cartesiana $z = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$) e che meglio approssima il grafico della funzione f vicino a P_0, nel senso che i coefficienti a e b sono determinati dalla proprietà

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0\,. \tag{2.7}$$

Diremo che f è **differenziabile** in $P_0 = (x_0, y_0)$ se esiste il piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, cioè se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che valga (2.7). Diremo che f è differenziabile in A se è differenziabile in ogni punto di A.

La definizione richiede che il piano tangente abbia la seguente proprietà: non solo l'errore che si commette considerando i valori sul piano tangente anziché sul grafico della funzione deve essere piccolo vicino a P_0 (per avere questo sarebbe sufficiente richiedere che il numeratore in (2.7) tenda a zero, cioè che la funzione f sia continua in (x_0, y_0)), ma in più deve essere talmente piccolo da andare a zero più rapidamente della distanza da P_0 (solo in questo modo è possibile che il limite del rapporto tenda a zero, come richiesto in (2.7)).

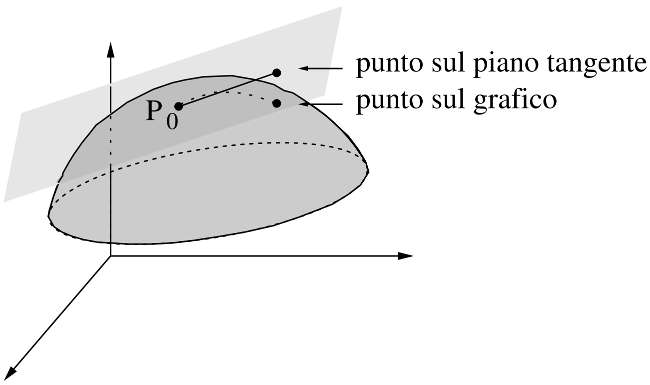


Figura 2.17: Piano tangente

Abbiamo sottolineato nell'Osservazione 2.42 che una funzione dotata di derivate parziali in un punto non è necessariamente continua in tale punto. D'altra parte, sappiamo che per le funzioni di una variabile la derivabilità implica la continuità (si veda il Teorema 4.8 del primo volume). L'analogo multidimensionale di questo risultato è il seguente.

Teorema 2.44. *Sia* $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *$A$ aperto, e sia* $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. *Se f è differenziabile in P_0 allora f è continua in P_0.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. Per le proprietà dei limiti, questo è equivalente a mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) - f(x_0,y_0)] = 0\,. \tag{2.8}$$

Per ipotesi f è differenziabile in P_0, ossia esistono a e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0\,.$$

Per sfruttare questa informazione, manipoliamo la differenza $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ in modo tale che compaia il termine di cui sappiamo calcolare il limite. Abbiamo che

$$\begin{aligned} &f(x,y) - f(x_0,y_0) = \\ &= \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\ &+ a(x-x_0) + b(y-y_0)\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Le funzioni $g(x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ e $h(x,y) = a(x-x_0) + b(y-y_0)$ sono continue in P_0 e si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = 0\,, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [a(x-x_0)+b(y-y_0)] = 0\,.$$

Sfruttando queste informazioni, l'ipotesi di differenziabilità e le proprietà dei limiti, possiamo passare al limite per (x,y) che tende a (x_0,y_0) nella (2.9), ottenendo la (2.8), cioè che la funzione f è continua in P_0. $\square$

Naturalmente esistono delle funzioni che non sono differenziabili in qualche punto del loro dominio. Ad esempio, la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ non ammette piano tangente nell'origine (il suo grafico è un cono che nell'origine ha una punta, come mostrato nella Figura 2.16). In analogia con il caso unidimensionale, in cui una funzione derivabile in un punto ammette sempre retta tangente al grafico in corrispondenza di quel punto, si potrebbe pensare che il piano tangente esista se e solo se esistono le derivate parziali. In realtà questo non è vero. Quello che vale è il seguente risultato.

Teorema 2.45. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Se f è differenziabile in P_0 allora la funzione ammette derivate parziali in P_0 e il piano tangente ha equazione cartesiana*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

Dimostrazione. Dire che esiste il piano tangente al grafico di f in P_0 significa che esistono due coefficienti a, $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0\,.$$

Per il Teorema 2.24, anche il limite di ogni restrizione ad una curva regolare è uguale a zero. In particolare se ci si avvicina a P_0 lungo la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(ossia parallelamente all'asse delle x) si ottiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - [f(x_0, y_0) + at]}{|t|} = 0$$

e quindi

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = a\,.$$

L'ultima uguaglianza dice che esiste la derivata parziale $f_x(x_0, y_0)$ e che è uguale ad a. In maniera analoga, calcolando il limite lungo la restrizione alla retta parallela all'asse delle y

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

si ottiene che esiste la derivata parziale $f_y(x_0, y_0)$ e che è uguale a b. $\square$

Osservazione 2.46. Notiamo che se esiste il piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, esso contiene le rette tangenti alle due curve coordinate in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Infatti l'equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

è verificata da tutti i punti che verificano (2.5) o (2.6). In realtà si può dimostrare che il piano tangente contiene le tangenti a tutte le curve regolari che passano per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e con sostegno che giace sul grafico di f.

Ora sappiamo che l'esistenza del piano tangente garantisce l'esistenza delle derivate parziali. Il viceversa è falso; infatti nell'Osservazione 2.42 abbiamo mostrato che l'esistenza delle derivate parziali non garantisce la continuità della funzione, e quindi, per il Teorema 2.44, neppure la differenziabilità. Mostriamo un ulteriore esempio di funzione continua e parzialmente derivabile che non è differenziabile.

Esempio 2.47. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

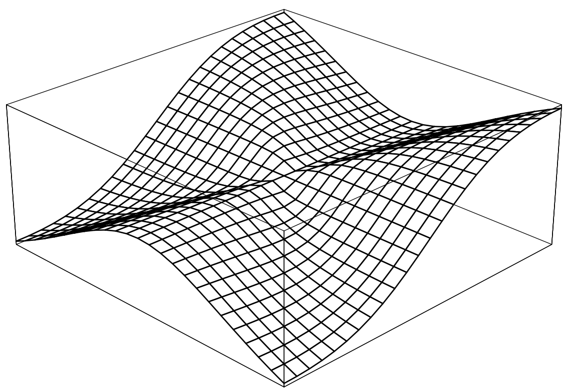


Figura 2.18: Grafico di $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Osserviamo che la funzione è continua nell'origine. Infatti, utilizzando la stima (2.2) e il fatto che $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, otteniamo che

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|y| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

da cui si ricava che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

(basta scegliere nella definizione di limite $\delta = 2\varepsilon$). Inoltre la funzione è costantemente nulla sull'asse x e sull'asse y e quindi esistono le due derivate parziali $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ e sono uguali a zero. Verifichiamo che la funzione non è differenziabile nell'origine. Se f fosse differenziabile in $(0,0)$, per il Teorema 2.45 e per il fatto che $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, il piano tangente al grafico di f in $(0,0,0)$ dovrebbe avere equazione cartesiana $z = 0$ e il limite in (2.7) diventerebbe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = 0\,.$$

Invece il limite scritto sopra non esiste. Per verificarlo, basta considerare la restrizione della funzione alla retta $y = mx$ (che passa per l'origine). Si ottiene

$$\frac{m^2x^3}{\sqrt{x^2+m^2x^2}(x^2+m^2x^2)} = \frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}\frac{x}{|x|}\,, \quad x \neq 0$$

ossia su ogni semiretta uscente dall'origine la funzione è costante, con valore che varia al variare del coefficiente angolare della retta e di conseguenza, per il Teorema 2.24, il limite in zero non esiste. Se ne conclude che la funzione non è differenziabile nell'origine, nonostante sia continua ed esistano le derivate parziali in tale punto.

La differenziabilità di una funzione f in un punto può essere interpretata geometricamente come una proprietà di regolarità del grafico della funzione. L'esempio precedente mostra che l'esistenza delle derivate parziali non basta a garantire che il grafico sia liscio, neanche quando la funzione è continua.

Enunciamo, senza dimostrazione, un criterio che ci permette, tramite semplici verifiche, di essere sicuri che una funzione sia differenziabile.

Teorema 2.48. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto A. Supponiamo che f sia derivabile parzialmente sia rispetto a x che rispetto a y in tutto A e che le derivate parziali siano continue in un punto P_0 di A. Allora f è differenziabile in P_0.*

Nel seguito sarà utile la seguente definizione.

Definizione 2.49. Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Indicheremo con $C^1(A)$ l'insieme di tutte le funzioni $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che siano derivabili parzialmente in ogni punto di A e abbiano derivate parziali continue in tutto A.

Con questa notazione i risultati dei teoremi precedenti possono essere sintetizzati dalla catena di implicazioni

$$\boxed{f \in C^1 \text{ in } A \text{ aperto} \Longrightarrow f \text{ differenziabile in } A \Longrightarrow \begin{cases} \exists\ f_x \text{ e } f_y \text{ in } A\,, \\ f \text{ continua in } A. \end{cases}}$$

Definizione 2.50. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile parzialmente su un insieme aperto A. Per ogni $(x,y) \in A$ il vettore $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ prende il nome di **gradiente** di f in (x,y).

Esempio 2.51. Il gradiente della funzione $f(x,y) = x\log(1+x^2+y^2)$ è

$$\nabla f(x,y) = \left(\log(1+x^2+y^2) + \frac{2x^2}{1+x^2+y^2}, \frac{2xy}{1+x^2+y^2}\right).$$

Finora abbiamo parlato solo di derivate parziali di una funzione in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, osservando che tali derivate non sono altro che il limite di un rapporto incrementale calcolato lungo direzioni particolari (quella parallela all'asse x o quella parallela all'asse y, rispettivamente). Consideriamo ora una direzione qualsiasi, determinata da un vettore unitario $\vec{v} = (p,q)$, $\|\vec{v}\| = 1$. La retta passante per P_0 e con la direzione di $\vec{v}$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(si veda il Paragrafo 8.1 del primo volume) e la restrizione di una funzione $f(x,y)$ a tale retta è la funzione di una variabile $F(t) = f(x_0+tp, y_0+tq)$. Il rapporto incrementale in P_0 di tale restrizione è

$$\frac{f(x_0+tp, y_0+tq) - f(x_0,y_0)}{t}, \quad t \neq 0\,.$$

A questo punto dovrebbe risultare chiara la seguente definizione.

Definizione 2.52 (Derivata direzionale). Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto A, sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di A e sia $\vec{v} = (p, q)$ un vettore unitario (cioè con $\|\vec{v}\| = 1$). Se esiste finito il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tp, y_0 + tq) - f(x_0, y_0)}{t} = l \in \mathbb{R}$$

diremo che la funzione f ammette derivata direzionale lungo la direzione di $\vec{v}$ nel punto P_0. Il limite l prende il nome di derivata direzionale di f in P_0 lungo la direzione di $\vec{v}$ e si indica con $f_{\vec{v}}(x_0, y_0)$.

Esempio 2.53. Calcoliamo la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y$ nel punto $P_0 = (0,0)$ lungo la direzione della bisettrice nel verso delle x crescenti. Un vettore unitario che determina la direzione richiesta è $\vec{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Quindi la derivata direzionale è data da

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0 + t\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 + t\frac{1}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2/2 + \sqrt{2}t}{t} = \sqrt{2}\,.$$

Se la funzione f è differenziabile, le derivate direzionali esistono sempre e si calcolano facilmente attraverso un prodotto scalare.

Teorema 2.54 (Formula del gradiente). *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto A e differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$. Allora per ogni vettore $\vec{v} = (p,q)$ con $\|\vec{v}\| = 1$ esiste la derivata direzionale di f in (x_0, y_0) lungo la direzione di $\vec{v}$ e vale l'identità*

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle = f_x(x_0, y_0)p + f_y(x_0, y_0)q\,.$$

Esempio 2.55. Rivediamo l'Esempio 2.53 alla luce di questo risultato. Abbiamo $\nabla f(x,y) = (2x, 2)$ e quindi $\nabla f(0,0) = (0,2)$. Ne segue che

$$f_{\vec{v}}(0,0) = \left\langle (0,2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \sqrt{2}\,.$$

Osservazione 2.56 (Interpretazione geometrica del gradiente). Il Teorema 2.54 afferma che se la funzione f è differenziabile in un insieme aperto, allora, una volta noto il gradiente della funzione (ossia le due derivate parziali) si calcolano facilmente tutte le derivate direzionali. Osserviamo che la derivata direzionale non è altro che la rapidità di variazione della funzione f in (x_0, y_0) lungo la direzione di $\vec{v}$. D'altra parte, grazie alla caratterizzazione geometrica del prodotto scalare (si veda il Teorema 7.12 del primo volume), si ha che

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta \,,$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{v}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$. Quindi la rapidità di variazione è massima (e vale $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$) lungo la direzione di $\nabla f(x_0, y_0)$ ed è minima (e vale $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$) lungo la direzione di $-\nabla f(x_0, y_0)$. Di conseguenza il gradiente punta sempre verso la direzione di massima crescita della funzione o, in termini geometrici, di massima pendenza del grafico della funzione. Ad esempio, il gradiente della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ è $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Quindi nel punto $(1, 1)$ si ha $\nabla f(1, 1) = (2, -2)$, e la funzione ha la massima crescita se ci si sposta dal punto $(1, 1)$ lungo la retta $y = 2 - x$, nel verso delle x crescenti, mentre ha massima decrescita se ci si sposta nella direzione $(-2, 2)$, cioè sempre sulla stessa retta ma nel verso delle x decrescenti.

Il prossimo risultato fornisce la regola di derivazione per le funzioni composte. Anche in questo caso è necessario che la funzione di due variabili sia differenziabile e nuovamente il prodotto scalare con il gradiente è lo strumento di calcolo.

Teorema 2.57 (Derivata della funzione composta). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ una curva parametrica con parametrizzazione derivabile e con sostegno in A (ossia $(x(t), y(t)) \in A$ per ogni $t \in [a, b]$). Sia $f(x, y)$ una funzione differenziabile nell'aperto A. Allora la restrizione di f a γ, $F(t) = f(x(t), y(t))$, è una funzione derivabile in $[a, b]$ e la derivata è*

$$F'(t) = \langle \nabla f(x(t), y(t)), \gamma'(t) \rangle = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \,.$$

Esempio 2.58. Consideriamo la restrizione della funzione $f(x, y) = x^2 + y^3$ alla curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Abbiamo $F(t) = f(x(t), y(t)) = t^4 + t^3$ e quindi $F'(t) = 4t^3 + 3t^2$. D'altra parte $\nabla f(x, y) = (2x, 3y^2)$ da cui si ottiene $\nabla f(x(t), y(t)) = (2t^2, 3t^2)$. Infine si ha $\gamma'(t) = (2t, 1)$ e quindi

$$\langle \nabla f(x(t), y(t)), \gamma'(t) \rangle = 2t^2(2t) + 3t^2 \cdot 1 = 4t^3 + 3t^2 \,.$$

Se una funzione $f(x,y)$ ha derivate parziali f_x e f_y definite in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e che sono a loro volta derivabili parzialmente, diremo che la funzione f ammette **derivate parziali seconde**

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = D^2_{xx} f(x,y)\,,\\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = D^2_{xy} f(x,y)\,,\\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = D^2_{yx} f(x,y)\,,\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = D^2_{yy} f(x,y)\,.
\end{aligned}
$$

Le derivate f_{xx} e f_{yy} prendono il nome di **derivate seconde pure**, mentre le derivate f_{xy} e f_{yx} prendono il nome di **derivate seconde miste**.

Definizione 2.59. Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Indicheremo con $C^2(A)$ l'insieme di tutte le funzioni $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ammettano derivate parziali prime e seconde continue in ogni punto di A.

Così come le derivate parziali prime possono essere pensate come le componenti di un vettore (il gradiente), le quattro derivate parziali seconde possono essere pensate come elementi di una matrice, che prende il nome di **matrice hessiana** e viene denotata con $H(x,y)$:

$$
H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}. \tag{2.10}
$$

Esempio 2.60. Calcoliamo le derivate parziali prime e seconde della funzione $f(x,y) = e^{x+y}(xy^2 + y)$ e scriviamo la matrice hessiana nel punto $(0,1)$. Abbiamo che

$$
\begin{gathered}
f_x(x,y) = e^{x+y}(xy^2 + y + y^2)\,, \quad f_y(x,y) = e^{x+y}(xy^2 + y + 2xy + 1)\,,\\
f_{xx}(x,y) = e^{x+y}(xy^2 + y + 2y^2)\,, \quad f_{yy}(x,y) = e^{x+y}(xy^2 + 4xy + 2 + 2x + y)\,,\\
f_{xy}(x,y) = e^{x+y}(xy^2 + 3y + y^2 + 2xy + 1)\,,\\
f_{yx}(x,y) = e^{x+y}(xy^2 + 3y + y^2 + 2xy + 1)\,,
\end{gathered}
$$

e la matrice hessiana in $(0,1)$ è $H(0,1) = \begin{pmatrix} 3e & 5e \\ 5e & 3e \end{pmatrix}$.

Nell'esempio precedente le due derivate parziali seconde miste sono uguali per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Questo fatto non è casuale, come mostra il seguente risultato.

Teorema 2.61 (di Schwarz). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia f una funzione di classe C^2 in A. Allora si ha $f_{xy} = f_{yx}$ in A.*

In altri termini, il Teorema di Schwarz afferma che se f è di classe C^2 allora la matrice hessiana è simmetrica.

Concludiamo vedendo velocemente come si generalizzano le nozioni e i risultati descritti per funzioni di due variabili reali al caso di funzioni di tre variabili. In realtà, tutto quello che mostreremo in questa ultima parte del paragrafo può essere generalizzato al caso di funzioni che dipendono da un numero qualsiasi di variabili.

Avremo tre derivate parziali, definite nel modo seguente.

Definizione 2.62 (Derivate parziali). Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, A aperto e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$. Se esiste finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

la funzione si dice derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto P_0. Il limite prende il nome di derivata parziale rispetto a x di f in P_0 e viene indicato con $f_x(x_0, y_0, z_0)$. Analogamente, se esiste finito il limite

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k}$$

la funzione si dice derivabile parzialmente rispetto alla variabile y nel punto P_0. Il limite prende il nome di derivata parziale rispetto a y di f in P_0 e viene indicato con $f_y(x_0, y_0, z_0)$. Infine, se esiste finito il limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + r) - f(x_0, y_0, z_0)}{r}$$

la funzione si dice derivabile parzialmente rispetto alla variabile z nel punto P_0. Il limite prende il nome di derivata parziale rispetto a z di f in P_0 e viene indicato con $f_x(x_0, y_0, z_0)$.

Esempio 2.63. La funzione $f(x,y,z) = y^2(x-1)z$ è derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili e si ha

$$f_x(x,y,z) = y^2 z\,, \quad f_y(x,y,z) = 2y(x-1)z\,, \quad f_z(x,y,z) = y^2(x-1)\,.$$

Ovviamente, dal momento che il grafico di una funzione di tre variabili è un sottoinsieme dello spazio $\mathbb{R}^4$, diventa poco significativo utilizzare nozioni geometriche come il piano tangente. La definizione di differenziabilità diventa la seguente.

Definizione 2.64. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, A aperto, e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$. Diremo che f è differenziabile in P_0 se esistono a, b e $c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{(x,y,z)\to P_0} \frac{f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0) - c(z-z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = 0.$$

Seguendo le stesse dimostrazioni dei Teoremi 2.44 e 2.45 si dimostra che se f è differenziabile in P_0 allora è continua in P_0, ammette derivate parziali in P_0 e si ha

$$a = f_x(x_0,y_0,z_0)\,, \quad b = f_y(x_0,y_0,z_0)\,, \quad c = f_z(x_0,y_0,z_0)\,.$$

Il gradiente di una funzione di tre variabili è il vettore

$$\boxed{\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))\,.}$$

La derivata direzionale lungo la direzione di un vettore $\vec{v} = (p,q,r)$ unitario (cioè con $\|\vec{v}\| = 1$) è, se esiste finito, il limite

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tp, y_0+tq, z_0+tr) - f(x_0,y_0,z_0)}{t} = f_{\vec{v}}(x_0,y_0,z_0)\,.}$$

Se f è una funzione differenziabile su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$, allora ammette derivata direzionale lungo ogni direzione $\vec{v} = (p,q,r)$ con $\|\vec{v}\| = 1$ e si ha

$$\begin{aligned} f_{\vec{v}}(x_0,y_0,z_0) &= \langle \nabla f(x_0,y_0,z_0), \vec{v} \rangle = \\ &= f_x(x_0,y_0,z_0)p + f_y(x_0,y_0,z_0)q + f_z(x_0,y_0.z_0)r\,. \end{aligned}$$

Il teorema di derivazione delle funzioni composte si generalizza come segue.

Teorema 2.65. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$, sia $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$ una curva parametrica con parametrizzazione derivabile e con sostegno in A. Sia $f(x,y,z)$ una funzione differenziabile nell'aperto A. Allora la restrizione di f a γ, $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, è una funzione derivabile in $[a,b]$ e la derivata è*

$$F'(t) = \langle \nabla f(x(t), y(t), z(t)), \gamma'(t) \rangle =$$
$$f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t).$$

Le derivate seconde (se esistono tutte) sono nove e la matrice hessiana è

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Continua a valere il Teorema di Schwarz che garantisce che se f è una funzione di classe C^2 in un aperto A, cioè se tutte le sue derivate parziali seconde sono continue in A, allora la matrice hessiana è simmetrica per ogni $(x,y,z) \in A$.

✂ 2.5 Il polinomio di Taylor in due variabili

Come nel caso unidimensionale, anche per funzioni di due variabili le derivate seconde sono lo strumento per conoscere la "concavità" di un funzione (cosa che si vedrà nel Paragrafo 3.2). Ricordiamo che questo fatto, nel caso di funzioni di una variabile, era giustificato attraverso lo studio del polinomio di Taylor approssimante la funzione. Partendo dalla formula di Taylor valida per funzioni di una variabile, vogliamo ottenere una formula di Taylor per funzioni di due variabili.

Ricordiamo che, data una funzione di una variabile $\varphi(t)$ che sia di classe C^2 in un intervallo aperto che contiene $t_0 = 0$, la formula di Taylor al secondo ordine in $t_0 = 0$ per tale funzione è

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(\theta t)}{2}t^2,$$

per un opportuno $\theta \in (0,1)$ dipendente da t (si veda il Paragrafo 4.4 del primo volume). Data ora una funzione di due variabili $f(x,y) \in C^2(A)$, con A aperto di $\mathbb{R}^2$, e dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, per ogni $(x,y) \in A$ consideriamo la restrizione della funzione f al segmento di equazioni parametriche $\gamma(t) =$

$(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0))$, $t\in[0,1]$, che congiunge (x_0,y_0) con (x,y). Per il Teorema 2.57, la composizione $\varphi(t)=f(x(t),y(t))$ è una funzione di classe C^2 in $[0,1]$ che ha derivata prima

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x(t),y(t)), \gamma'(t)\rangle = f_x(x(t),y(t))(x-x_0) + f_y(x(t),y(t))(y-y_0)\,,$$

e derivata seconda

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \frac{d}{dt}\Big[f_x(x(t),y(t))(x-x_0) + f_y(x(t),y(t))(y-y_0)\Big]\\ &= \big\langle \nabla f_x(x(t),y(t)),\ \gamma'(t)\big\rangle\,(x-x_0) + \big\langle \nabla f_y(x(t),y(t)),\ \gamma'(t)\big\rangle\,(y-y_0)\\ &= f_{xx}(x(t),y(t))(x-x_0)^2 + f_{xy}(x(t),y(t))(x-x_0)(y-y_0)\\ &\quad + f_{yy}(x(t),y(t))(y-y_0)^2 + f_{yx}(x(t),y(t))(x-x_0)(y-y_0)\,.\end{aligned}$$

Ora scriviamo $f(x(1),y(1))$ utilizzando la formula di Taylor della funzione $f(x(t),y(t))$ centrata in $t=0$. Ricordando che $(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$, che $(x(1),y(1))=(x,y)$ e che $f_{xy}=f_{yx}$ per il Teorema di Schwarz, otteniamo

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &\quad + \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0)^2\\ &\quad + 2f_{xy}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0)(y-y_0)\\ &\quad + f_{yy}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))(y-y_0)^2\Big]\end{aligned} \tag{2.12}$$

per un opportuno $\theta\in(0,1)$.

Per semplificare le notazioni, chiamiamo $h=x-x_0$ e $k=y-y_0$. Sia $\sigma(h,k)$ la funzione

$$\begin{aligned}\sigma(h,k) &= f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k\\ &\quad - \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2\Big]\,.\end{aligned}$$

Dalla (2.12) abbiamo che

$$\begin{aligned}\sigma(h,k) &= \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)) - f_{xx}(x_0,y_0)\Big]h^2\\ &\quad + \Big[f_{xy}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)) - f_{xy}(x_0,y_0)\Big]hk\\ &\quad + \frac{1}{2}\Big[f_{yy}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)) - f_{yy}(x_0,y_0)\Big]k^2\,.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dal momento che le derivate parziali seconde sono continue, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} |f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - f_{xx}(x_0,y_0)| < \varepsilon\,, \\ |f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - f_{xy}(x_0,y_0)| < \varepsilon\,, \\ |f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - f_{yy}(x_0,y_0)| < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

per ogni (h,k) tale che $h^2+k^2 < \delta^2$ e per ogni $\theta \in (0,1)$. Di conseguenza abbiamo che

$$\left|\frac{\sigma(h,k)}{h^2+k^2}\right| \le \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{h^2+k^2}\,\varepsilon + \frac{|hk|}{h^2+k^2}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{h^2+k^2}\,\varepsilon \le \frac{3}{2}\,\varepsilon\,,$$

per ogni (h,k) tale che $h^2+k^2 < \delta^2$. Se introduciamo la funzione di due variabili $\epsilon(h,k) = \frac{\sigma(h,k)}{h^2+k^2}$, abbiamo dimostrato che $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0$ e la formula (2.13) diventa

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k \\ &+ \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)\,h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\,hk + f_{yy}(x_0,y_0)\,k^2\Big] \\ &+ \epsilon(h,k)(h^2+k^2)\,, \qquad \text{con} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0. \end{aligned}} \tag{2.14}$$

Il polinomio di secondo grado

$$\begin{aligned} &T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \end{aligned}$$

prende il nome di **polinomio di Taylor** e la formula (2.14) afferma che una funzione di due variabili di classe C^2 su un aperto A è sempre approssimabile vicino ad un punto (x_0, y_0) con il suo polinomio di Taylor e che l'errore commesso è molto piccolo (tende a zero più velocemente della distanza al quadrato da (x_0, y_0)).

2.6 Esercizi

Esercizio 2.1. Disegnare sul piano cartesiano gli intorni $B_2(0,0)$, $B_3(1,2)$ e $B_{1/2}(-1,0)$.

✍ **Esercizio 2.2.** Mostrare che i seguenti insiemi sono aperti, determinarne la frontiera e dire se sono limitati.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0,\ y > 0\}, \\ C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \neq 0\}, \\ D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.3. Dire se il punto $P = (1, 0)$ è interno, esterno o di frontiera per i seguenti insiemi.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R},\ y > x^2\}. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 2.4.** Mostrare graficamente che l'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \cos y \le x \le 1,\ -\pi < y < \pi\}$$

non è né aperto né chiuso.

Esercizio 2.5. Disegnare sul piano cartesiano i seguenti insiemi aperti e dire se sono connessi.

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2} < y < \sin x\}$.

2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R},\ |y| > 1\}$.

3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 < 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < \frac{1}{2},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2.6. Disegnare nel piano cartesiano le curve di livello delle seguenti funzioni.

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; 2) $f(x,y) = xy$; 3) $f(x,y) = 2x + y$.

✍ **Esercizio 2.7.** Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni e disegnarli sul piano cartesiano.

1) $f(x,y) = \sqrt{1 - x - y}\,\sqrt[4]{1 - y^2} + \log(\log x - y)$;

2) $f(x,y) = \sqrt[4]{x - 2y} - \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1}$;

3) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2) + \log\left(\frac{1}{4} - y^2\right);$

4) $f(x,y) = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}};$

5) $f(x,y) = \frac{\log(e^x - 1)}{\sqrt{x - y}\sqrt{y - 2}};$

6) $f(x,y) = \log((x-1)(y-2)).$

✍ **Esercizio 2.8.** Dire se le seguenti funzioni $f(x,y)$ sono continue in $(0,0)$.

1) $\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{xy \arctan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x^6}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

✍ **Esercizio 2.9.** Utilizzando l'Osservazione 2.31, mostrare che i seguenti insiemi sono chiusi:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \in \mathbb{R},\ e^x - 3 \leq y \leq e^x\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ \log(1 + x^2) \geq y^2 + 3\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 2.10. Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni.

1) $f(x,y) = \log\left(1 + \sqrt{3x^2 + y^4}\right)$

✍ 2) $f(x,y) = e^{x \arctan(y/x)}$

3) $f(x,y) = \cos(xy^2 + \sin(xy))$

✍ 4) $f(x,y) = x^y$

✍ 5) $f(x,y) = xye^{x^2/2} \log(xy)$

6) $f(x,y) = \sin(x^2 y e^{xy})$

7) $f(x,y) = \log(x^2 + 4y^4 + 1)$

✍ 8) $f(x,y) = (x+y)(x-y)(x^2+3y)$

Esercizio 2.11. Calcolare la derivata direzionale della funzione f rispetto alla direzione di $\vec{v}$ nel punto P e l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in corrispondenza del punto P.

✍ 1) $f(x,y) = xe^{xy} + y^7$, $\vec{v} = (-1,-1)$, $P = (0,1)$;

2) $f(x,y) = (x+y)^2$, $\vec{v} = (0,-1)$, $P = (2,1)$;

✍ 3) $f(x,y) = y\cos(2x) + e^{-xy} - 1$, $\vec{v} = (1,-1)$, $P = (0,1)$;

4) $f(x,y) = xy^3 + \log(1+x^2) - 3$, $\vec{v} = (-1,1)$, $P = (0,1)$;

5) $f(x,y) = ye^{x^2} + \sin(xy)$, $\vec{v} = (1,1)$, $P = (0,1)$;

6) $f(x,y) = e^x$, $\vec{v} = (1,-1)$, $P = (0,0)$.

✍ **Esercizio 2.12.** Date le funzioni di due variabili e le curve piane

1) $f(x,y) = x - 3y$, $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

2) $f(x,y) = \cos(xy) - x^2$, $\gamma(t) = (1-2t, t)$, $t \in [0,1]$,

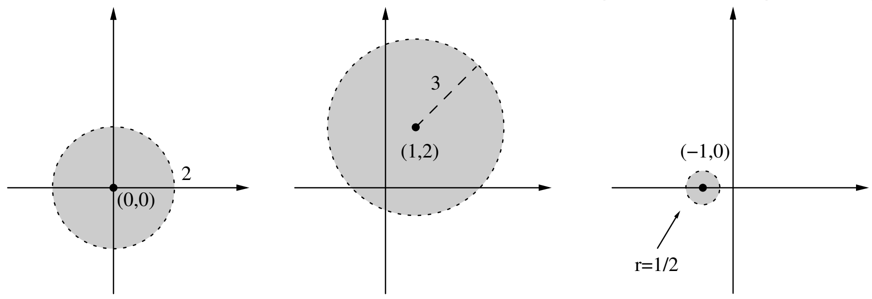
disegnare le curve considerate sul piano cartesiano, calcolare la restrizione di $f(x,y)$ alla curva γ e calcolare la derivata della funzione ristretta alla curva.

Esercizio 2.13. Calcolare le derivate parziali prime e la matrice hessiana delle funzioni

$$f(x,y,z) = 3x + 5y + 4z;\ \ g(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 - z;\ \ h(x,y,z) = ze^{x+y}.$$

2.7 Svolgimento degli esercizi

Soluzione dell'esercizio 2.1. Gli intorni sono disegnati nella seguente figura:



Svolgimento dell'esercizio 2.2.

1) Per mostrare che l'insieme A è aperto dobbiamo far vedere che ogni suo punto è interno. Fissiamo quindi $P_0 = (x_0, y_0)$ in A. Dobbiamo determinare $r > 0$ tale che tutto l'intorno di P_0 di raggio r sia contenuto in A. Osserviamo che A è una striscia verticale nel piano e che, fissato P_0, un cerchio aperto centrato in P_0 risulta tutto contenuto in A a patto di considerare punti con ascissa non troppo diversa da x_0. Più precisamente, abbiamo che ogni punto

P appartenente a $B_r(P_0)$, con $r = (1 - |x_0|)/2$, appartiene ad A. Infatti, per definizione, un punto $P = (x, y)$ appartiene a tale intorno se e solo se $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$. In particolare si ha $(x - x_0)^2 < r^2$ da cui, passando alla radice quadrata di ambo i membri, $|x - x_0| < r$. Ricordando la scelta di r, abbiamo $|x - x_0| < (1 - |x_0|)/2$, ossia

$$x_0 - \frac{1 - |x_0|}{2} < x < x_0 + \frac{1 - |x_0|}{2}\,.$$

In particolare si ha

$$\begin{cases} -1/2 < 3x_0/2 - 1/2 < x < 1/2 + x_0/2 < 1 & \text{se } x_0 \geq 0\,, \\ -1 < x_0/2 - 1/2 < x < 1/2 + 3x_0/2 < 1/2 & \text{se } x_0 < 0\,, \end{cases}$$

quindi, in ogni caso $|x| < 1$. Ne concludiamo che A è un insieme aperto. La sua frontiera è formata dalle due rette $x = 1$ e $x = -1$. Infine l'insieme A non è limitato.

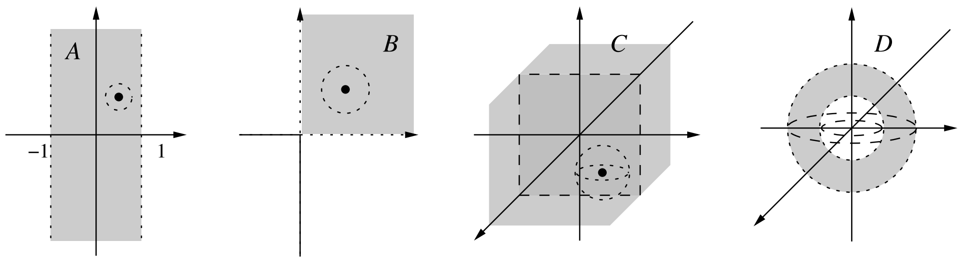


Figura 2.19: Esercizio 2.2

2) Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in B$, ossia con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$. Dobbiamo determinare $r > 0$ tale che ogni punto $P = (x, y)$ dell'intorno $B_r(x_0, y_0)$ appartenga a B ossia abbia $x > 0$ e $y > 0$. Osserviamo che $P = (x, y)$ appartiene all'intorno $B_r(x_0, y_0)$ se e solo se $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$. In particolare si ha

$$|x - x_0| < r, \quad |y - y_0| < r\,.$$

Graficamente questa implicazione significa semplicemente che il cerchio di centro P_0 e raggio $r > 0$ è tutto contenuto nel quadrato centrato in P_0 e con lato lungo $2r$. A questo punto è chiaro che, se chiamiamo δ il valore più piccolo tra x_0 e y_0 e se scegliamo $r = \delta/2$ abbiamo che se $P = (x, y)$ appartiene all'intorno $B_r(x_0, y_0)$, allora

$$x > x_0 - \delta/2 > 0, \quad y > y_0 - \delta/2 > 0\,,$$

e quindi P appartiene a B.

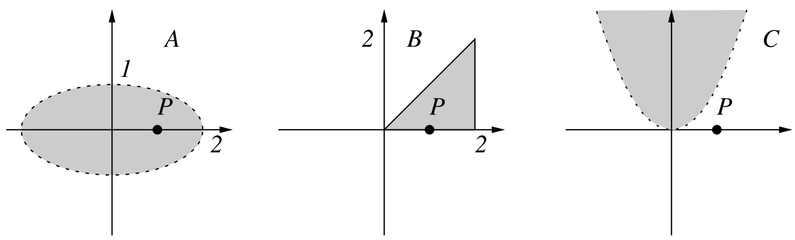
3) Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$, ossia con $x_0 \neq 0$. Dobbiamo determinare $r > 0$ tale che ogni punto $P = (x, y, z)$ dell'intorno $B_r(x_0, y_0, z_0)$ appartenga a C ossia abbia $x \neq 0$. Osserviamo che $P = (x, y, z)$ appartiene all'intorno $B_r(x_0, y_0, z_0)$ se e solo se $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2$. In particolare si ha $|x - x_0| < r$, ossia la sfera di centro P_0 e raggio $r > 0$ è tutta contenuta nella striscia tridimensionale compresa tra i due piani paralleli $x = x_0 - r$ e $x = x_0 + r$. A questo punto basta scegliere $r = |x_0|/2$ per avere che P appartenente a $B_r(x_0, y_0, z_0)$ soddisfi $x_0 - |x_0|/2 < x < x_0 + |x_0|/2$ e quindi in ogni caso verifichi $x \neq 0$, ossia P appartenga a C.

4) L'insieme D è l'intersezione tra l'intorno sferico $B_2(0, 0, 0)$ e l'insieme $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$. L'intorno $B_2(0, 0, 0)$ è aperto (si veda l'Esempio 2.6). Ricordiamo che l'intersezione di due aperti è un insieme aperto. Quindi basta dimostrare che l'insieme D_1 è aperto. Se introduciamo la distanza euclidea $d(P, 0)$ dall'origine, possiamo riscrivere l'insieme come $D_1 = \{P \in \mathbb{R}^3 \colon\ d(P, 0) > 1\}$. Sia ora P_0 un punto di D_1 ossia tale che $d(P_0, 0) > 1$. Grazie alla disuguaglianza triangolare abbiamo che per ogni $P \in \mathbb{R}^3$ si ha $d(P_0, 0) < d(P_0, P) + d(P, 0)$. Quindi $d(P, 0) > d(P_0, 0) - d(P_0, P)$ e, se scegliamo $r = d(P_0, 0) - 1$, ogni $P \in B_r(P_0)$ (ossia tale che $d(P, P_0) < r = d(P_0, 0) - 1$) verifica

$$d(P, 0) > d(P_0, 0) - d(P_0, P) > d(P_0, 0) - [d(P_0, 0) - 1] = 1\,,$$

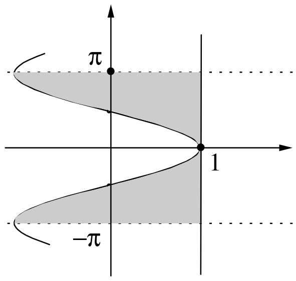
cioè appartiene a D_1. Ne concludiamo che D_1 è aperto e che D è aperto in quanto intersezione di due aperti.

Soluzione dell'esercizio 2.3. Gli insiemi sono disegnati in figura.



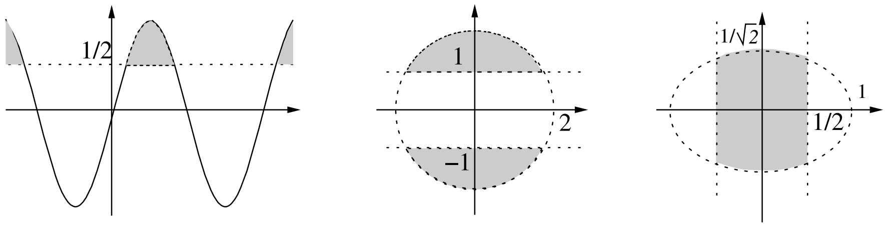
Risulta quindi che P è interno ad A, di frontiera per B ed esterno a C.

Svolgimento dell'esercizio 2.4. L'insieme è disegnato in figura.

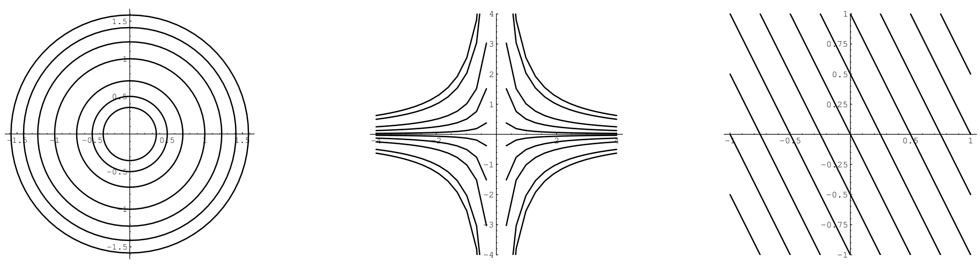


L'insieme non può essere aperto perché, ad esempio, il punto $(1, 0)$ appartiene all'insieme, ma non è interno (è di frontiera). D'altra parte l'insieme non può essere chiuso perché, ad esempio, il punto $(0, \pi)$ è di frontiera, ma non appartiene all'insieme.

Soluzione dell'esercizio 2.5. Gli insiemi considerati sono disegnati in figura. Si vede graficamente che l'unico aperto connesso è il terzo, mentre i primi due non sono connessi.



Soluzione dell'esercizio 2.6. Gli insiemi di livello sono i seguenti:



Svolgimento dell'esercizio 2.7. Discuteremo le condizioni affinché le funzioni risultino ben definite. Il disegno degli insiemi di definizione è alla fine dello svolgimento, nelle Figure 2.20 e 2.21. Nelle figure si usa la convenzione che i punti di frontiera sulle curve continue sono inclusi nell'insieme di definizione, mentre quelli sulle curve tratteggiate sono esclusi.

1) Affinché la funzione risulti ben definita deve essere

$$\begin{cases} 1-x-y \geq 0 & \text{(argomento di una radice quadrata),} \\ 1-y^2 \geq 0 & \text{(argomento di una radice quarta),} \\ x > 0 & \text{(argomento di un logaritmo),} \\ \log x - y > 0 & \text{(argomento di un logaritmo).} \end{cases}$$

La prima condizione può essere scritta come $y \leq 1-x$ ed è soddisfatta dalle coordinate dei punti del semipiano al di sotto della retta di equazione cartesiana $y = 1-x$, retta inclusa. La seconda condizione è $y^2 \leq 1$, ossia $-1 \leq y \leq 1$, soddisfatta dalle coordinate dei punti contenuti nella striscia orizzontale compresa tra le rette $y = -1$ e $y = 1$, rette incluse. La condizione $x > 0$ è soddisfatta dai punti del semipiano a destra dell'asse y, asse escluso. L'ultima condizione è $y < \log x$, soddisfatta dalle coordinate dei punti del piano che si trovano al di sotto della curva logaritmica $y = \log x$, curva esclusa. Il dominio della funzione è l'intersezione di questi quattro insiemi (si veda la Figura 2.20 a sinistra).

2) Affinché la funzione risulti ben definita deve essere

$$\begin{cases} x-2y \geq 0 & \text{(argomento di una radice quarta),} \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 \geq 0 & \text{(argomento di una radice quadrata).} \end{cases}$$

La prima condizione può essere scritta come $y \leq x/2$ ed è soddisfatta dalle coordinate dei punti del semipiano al di sotto della retta $y = x/2$, retta inclusa. La seconda condizione è $x^2/4 + y^2 \geq 1$ ed è soddisfatta dalle coordinate dei punti del piano esterni all'ellisse con centro l'origine e di semiassi 2 e 1, inclusi i punti dell'ellisse. Il dominio della funzione è l'intersezione di questi due insiemi (si veda la Figura 2.20 al centro).

3) Affinché la funzione risulti ben definita deve essere

$$\begin{cases} 1-x^2-y^2 > 0 & \text{(argomento di un logaritmo),} \\ \dfrac{1}{4} - y^2 > 0 & \text{(argomento di un logaritmo).} \end{cases}$$

La prima condizione può essere scritta come $x^2 + y^2 < 1$ ed è soddisfatta dalle coordinate dei punti interni alla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, esclusi i punti della circonferenza. La seconda condizione è $y^2 < 1/4$, ossia $-1/2 < y < 1/2$, soddisfatta dalle coordinate dei punti della striscia orizzontale compresa tra le rette $y = -1/2$ e $y = 1/2$, rette escluse. L'insieme

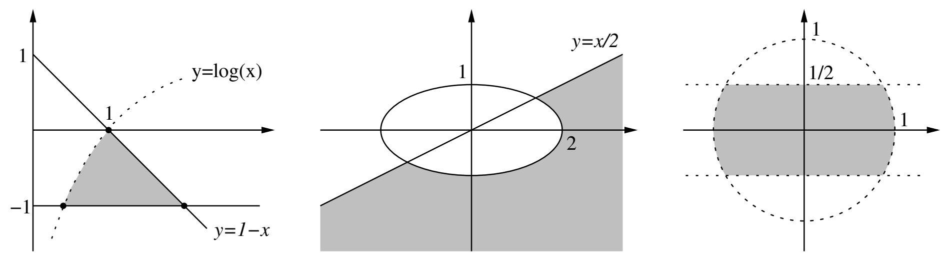


Figura 2.20: Esercizio 2.7, 1) 2) e 3)

di definizione della funzione è l'intersezione di questi due insiemi (si veda la Figura 2.20 a destra).

4) Affinché la funzione risulti ben definita deve essere

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 & \text{(argomento di una radice quadrata),} \\ 4 - y^2 > 0 & \text{(argomento di una radice quadrata + termine a denomin.).} \end{cases}$$

La prima condizione è verificata per i punti con ascissa in $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, (2k+1)\pi]$, che corrisponde all'unione di strisce verticali contenute tra la retta $x = 2k\pi$ e la retta $x = (2k+1)\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, rette incluse. La seconda condizione è $y^2 < 4$, ossia $-2 < y < 2$, verificata da tutti i punti del piano appartenenti alla striscia contenuta tra le rette $y = -2$ e $y = 2$, rette escluse. L'insieme di definizione della funzione è l'intersezione di questi due insiemi, che è l'unione di infiniti rettangoli (si veda la Figura 2.21 a sinistra).

5) Affinché la funzione risulti ben definita deve essere

$$\begin{cases} e^x > 1 & \text{(argomento di un logartitmo),} \\ x - y > 0 & \text{(argomento di una radice quadrata + termine a denomin.),} \\ y - 2 > 0 & \text{(argomento di una radice quadrata + termine a denomin.).} \end{cases}$$

La prima condizione è verificata per $x > 0$, quindi da tutti i punti del semipiano a destra dell'asse delle y, retta esclusa. La seconda condizione può essere scritta come $y < x$ ed è soddisfatta da tutti i punti del piano al di sotto della bisettrice $y = x$, bisettrice esclusa. Infine, la terza condizione è $y > 2$, soddisfatta da tutti i punti del piano al di sopra della retta $y = 2$, retta esclusa. L'insieme di definizione della funzione è l'intersezione di questi tre insiemi (si veda la Figura 2.21 al centro).

6) Affinché la funzione risulti ben definita deve essere

$$(x - 1)(y - 2) > 0 \quad \text{(argomento di un logartitmo)}\,,$$

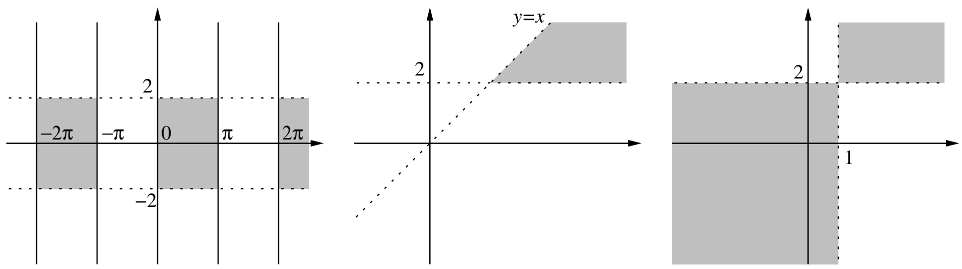


Figura 2.21: Esercizio 2.7, 4) 5) e 6)

che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x-1>0 \\ y-2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1<0 \\ y-2<0. \end{cases}$$

Quindi l'insieme di definizione della funzione è l'unione dei due quadranti

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x>1,\ y>2\},\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x<1,\ y<2\}.$$

(si veda la Figura 2.21 a destra).

Svolgimento dell'esercizio 2.8. In tutti gli esempi il punto P_0 in cui verificare la continuità è l'origine degli assi e il valore della funzione in P_0 è 0. Per dimostrare che la funzione è continua dobbiamo quindi mostrare che, per ogni $\epsilon>0$ fissato è possibile determinare $\delta>0$ tale che $|f(x,y)|<\epsilon$ per ogni (x,y) tale che $x^2+y^2<\delta^2$.

1) Dalla disuguaglianza (2.2) ricaviamo che

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

quindi se, fissato $\epsilon>0$, scegliamo $\delta=2\epsilon$ otteniamo che, se (x,y) verifica $x^2+y^2<\delta^2$, allora $|f(x,y)|<\delta/2=\epsilon$.

2) Sappiamo che $|\arctan(xy)|<\pi/2$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, quindi

$$\left|\frac{xy\arctan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{\pi}{2}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{\pi}{4}\sqrt{x^2+y^2}$$

e, questa volta, si può scegliere $\delta=4\epsilon/\pi$.

3) Sempre dalla disuguaglianza (2.2) ricaviamo che

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}x^2 \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)\,,$$

quindi se, fissato $\epsilon > 0$, scegliamo $\delta = \sqrt{2\epsilon}$ otteniamo che, se (x, y) verifica $x^2 + y^2 < \delta^2$, allora $|f(x, y)| < \delta^2/2 = \epsilon$.

4) La funzione non è continua perché il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6+y^2}$$

non esiste. Se infatti si restringe la funzione all'asse delle x si ha $f(x, 0) = 1$ per $x \ne 0$, mentre se si restringe la funzione all'asse delle y si ha $f(0, y) = 0$. Quindi, per il Teorema 2.24, il limite della funzione in $(0, 0)$ non può esistere.

Svolgimento dell'esercizio 2.9. In tutti i casi sfrutteremo il fatto che se f è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^n$ allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ gli insiemi $\{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) \le c\}$ e $\{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) \ge c\}$ sono chiusi in $\mathbb{R}^n$.

1) L'insieme A può essere scritto come

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y - e^x \le 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y - e^x \ge -3\}.$$

Dal momento che la funzione $f(x, y) = y - e^x$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ i due insiemi sono chiusi. Poiché l'intersezione di due insiemi chiusi è un insieme chiuso, anche A risulta essere chiuso.

2) L'insieme B può essere scritto come

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \log(1 + x^2) - y^2 \ge 3\}\,.$$

Dal momento che la funzione $f(x, y) = \log(1 + x^2) - y^2$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, l'insieme B risulta essere chiuso.

3) L'insieme C è un cilindro illimitato con asse coincidente con l'asse z. L'insieme è chiuso, perché la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ è continua su tutto $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento dell'esercizio 2.10. 1) $f(x, y) = \log\left(1 + \sqrt{3x^2 + y^4}\right)$.

$$f_x(x,y) = \frac{3x}{(1+\sqrt{3x^2+y^4})\sqrt{3x^2+y^4}},$$
$$f_y(x,y) = \frac{2y^3}{(1+\sqrt{3x^2+y^4})\sqrt{3x^2+y^4}}.$$

2) $f(x,y) = e^{x\arctan(y/x)}$.

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^{x\arctan(y/x)}\left(\arctan(y/x) + x\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right) = \\
&= e^{x\arctan(y/x)}\left(\arctan(y/x) - \frac{xy}{x^2+y^2}\right), \\
f_y(x,y) &= e^{x\arctan(y/x)}\left(x\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}\right) = e^{x\arctan(y/x)}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right).
\end{aligned}
$$

3) $f(x,y) = \cos(xy^2 + \sin(xy))$.

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -\sin(xy^2+\sin(xy))(y^2 + y\cos(xy)), \\
f_y(x,y) &= -\sin(xy^2+\sin(xy))(2xy + x\cos(xy)).
\end{aligned}
$$

4) $f(x,y) = x^y$. Osserviamo che $x^y = e^{y\log x}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^{y\log x}\frac{y}{x} = x^{y-1}y, \\
f_y(x,y) &= e^{y\log x}\log x = x^y\log x.
\end{aligned}
$$

5) $f(x,y) = xye^{x^2/2}\log(xy)$.

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= ye^{x^2/2}\log(xy) + xyxe^{x^2/2}\log(xy) + xye^{x^2/2}\frac{y}{xy} = \\
&= e^{x^2/2}y(1+(1+x^2)\log(xy)), \\
f_y(x,y) &= xe^{x^2/2}\log(xy) + xye^{x^2/2}\frac{x}{xy} = xe^{x^2/2}(1+\log(xy)).
\end{aligned}
$$

6) $f(x,y) = \sin(x^2ye^{xy})$.

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^{xy}xy(2+xy)\cos(x^2ye^{xy}), \\
f_y(x,y) &= e^{xy}x^2(1+xy)\cos(x^2ye^{xy}).
\end{aligned}
$$

7) $f(x,y) = \log(x^2+4y^4+1)$.

$$
f_x(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+4y^4}\ , \qquad f_y(x,y) = \frac{16y^3}{1+x^2+4y^4}\ .
$$

8) $f(x,y) = (x+y)(x-y)(x^2+3y)$.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x-y)(x^2+3y) + (x+y)(x^2+3y) + (x+y)(x-y)2x = \\ &= 4x^3 - 2xy(y-3), \\ f_y(x,y) &= (x-y)(x^2+3y) - (x+y)(x^2+3y) + 3(x+y)(x-y) = \\ &= x^2(3-2y) - 9y^2. \end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 2.11.

1) $f(x,y) = xe^{xy} + y^7$, $\vec{v} = (-1,-1)$, $P = (0,1)$. Le derivate parziali della funzione f sono

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy},\ f_y(x,y) = x^2e^{xy} + 7y^6\,,$$

quindi il gradiente della funzione nel punto P è il vettore $\nabla f(0,1) = (1,7)$. Per il Teorema 2.54 la derivata direzionale di f in P lungo la direzione di $\vec{v}$ si ottiene facendo il prodotto scalare tra il gradiente di f in P e il vettore unitario che ha la direzione e il verso di $\vec{v}$. Si ha $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, quindi il vettore unitario che individua la direzione e il verso di $\vec{v}$ è $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e la derivata direzionale è

$$f_{\vec{v}}(0,1) = -1/\sqrt{2} - 7/\sqrt{2} = -4\sqrt{2}\,.$$

Infine, dal momento che $f(0,1) = 1$, per il Teorema 2.45, l'equazione del piano tangente è $z = 1 + 1(x-0) + 7(y-1)$ ossia $z = x + 7y - 6$.

2) $f(x,y) = (x+y)^2$, $\vec{v} = (0,-1)$, $P = (2,1)$.

$$\begin{aligned} &\nabla f(x,y) = 2(x+y, x+y),\ \nabla f(2,1) = (6,6),\ f(2,1) = 9,\ \|\vec{v}\| = 1 \\ &f_{\vec{v}}(2,1) = -6, \quad \text{equazione del piano tangente: } z = 6x + 6y - 9 \end{aligned}$$

3) $f(x,y) = y\cos(2x) + e^{-xy} - 1$, $\vec{v} = (1,-1)$, $P = (0,1)$. Le derivate parziali della funzione f sono

$$f_x(x,y) = -2y\sin(2x) - ye^{-xy},\ f_y(x,y) = \cos(2x) - xe^{-xy}\,,$$

quindi il gradiente della funzione nel punto P è il vettore $\nabla f(0,1) = (-1,1)$. Per il Teorema 2.54 la derivata direzionale di f in P lungo la direzione di $\vec{v}$ si ottiene facendo il prodotto scalare tra il gradiente di f in P e il vettore unitario che ha la direzione e il verso di $\vec{v}$. Si ha $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, quindi il vettore unitario che individua la direzione e il verso di $\vec{v}$ è $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e la derivata direzionale è

$$f_{\vec{v}}(0,1) = -1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}\,.$$

Infine, dal momento che $f(0,1) = 1$, per il Teorema 2.45, l'equazione del piano tangente è $z = 1 - (x - 0) + (y - 1)$ ossia $z = -x + y$.

4) $f(x, y) = xy^3 + \log(1 + x^2) - 3$, $\vec{v} = (-1, 1)$, $P = (0, 1)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(y^3 + \frac{2x}{1+x^2}, 3xy^2\right), \ \nabla f(0,1) = (1,0), \ f(0,1) = -3, \ \|v\| = \sqrt{2}$$

$$f_{\vec{v}}(0,1) = -1/\sqrt{2}, \quad \text{equazione del piano tangente: } z = x - 3$$

5) $f(x, y) = ye^{x^2} + \sin(xy)$, $\vec{v} = (1, 1)$, $P = (0, 1)$.

$$\begin{aligned} &\nabla f(x,y) = \left(2xye^{x^2} + y\cos(xy), e^{x^2} + x\cos(xy)\right), \\ &\nabla f(0,1) = (1,1), \ f(0,1) = 1, \ \|v\| = \sqrt{2} \\ &f_{\vec{v}}(0,1) = \sqrt{2}, \quad \text{equazione del piano tangente: } z = x + y \end{aligned}$$

6) $f(x, y) = e^x$, $\vec{v} = (1, -1)$, $P = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} &\nabla f(x,y) = (e^x, 0), \ \nabla f(0,0) = (1,0), \ f(0,0) = 1, \ \|v\| = \sqrt{2} \\ &f_{\vec{v}}(0,0) = 1/\sqrt{2}, \quad \text{equazione del piano tangente: } z = 1 + x \end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 2.12. 1) La curva γ è l'ellisse disegnata in Figura 2.22 a sinistra. La funzione composta è $h(t) = f(x(t), y(t)) = 2\cos t - 9\sin t$ e la sua derivata è $h'(t) = -2\sin t - 9\cos t$. Osserviamo che $\nabla f(x, y) = (1, -3)$ e $\gamma'(t) = (-2\sin t, 3\cos t)$ e quindi risulta $h'(t) = \langle \nabla f(x(t), y(t)), \gamma'(t)\rangle$.

2) La curva γ è il segmento disegnato in Figura 2.22 a destra. La funzione ristretta alla curva è $h(t) = f(x(t), y(t)) = \cos(t - 2t^2) - (1 - 2t)^2$, $t \in [0, 1]$ e $h'(t) = (4t - 1)\sin(t - 2t^2) + 4 - 8t$.

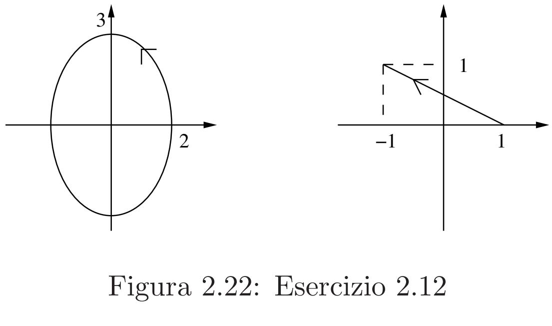


Figura 2.22: Esercizio 2.12

Soluzione dell'esercizio 2.13.

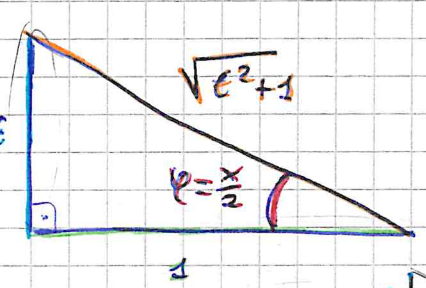
$$f_x(x,y,z) = 3,\ f_y(x,y,z) = 5,\ f_z(x,y,z) = 4, \quad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_x(x,y,z) = 4x,\ g_y(x,y,z) = 8y,\ g_z(x,y,z) = -1,\ H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_x(x,y,z) = ze^{x+y},\ h_y(x,y,z) = ze^{x+y},\ h_z(x,y,z) = e^{x+y},$$

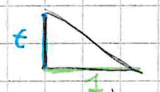
$$H_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^{x+y} & ze^{x+y} & e^{x+y} \\ ze^{x+y} & ze^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} & 0 \end{pmatrix}$$

Giustificazione di formule parametriche



Dato un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza 1 e t $\Rightarrow$ la ipotenusa è $\sqrt{t^2+1}$

Chiamiamo $\varphi = \frac{x}{2}$ l'angolo

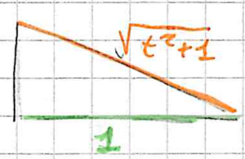


$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{1} = t \quad \Rightarrow \text{sostituzione } \boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

- Osserviamo che $\boxed{\text{sen}(\varphi)} = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ (*)

  e $\boxed{\cos(\varphi)} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ (*)



- Sappiamo che
$$\begin{cases} \text{sen}(2\varphi) = 2\,\text{sen}(\varphi)\cdot\cos(\varphi) \\ \cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \text{sen}^2(\varphi) \end{cases}$$

$\varphi = \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}(x)} = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) \overset{(*)(*)}{=} 2\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \boxed{\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$\boxed{\cos(x)} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \overset{(*)(*)}{=} \frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1} = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Finalmente, se $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$

I) $dt = \frac{1}{2}\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)dx = \frac{1}{2}(t^2+1)\,dx \Rightarrow dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt$

oppure $dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = 2(t^2+1)\,dx \Rightarrow$

II) Oppure $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\arctan(t)$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

1.11 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 1.1. Ricordiamo che l'uguaglianza tra due insiemi $E = F$ equivale alla doppia richiesta $E \subseteq F$ e $F \subseteq E$.

a_1) $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Se $x \in A \cup (B \cap C)$, allora $x \in A$ oppure $x \in (B \cap C)$.
Primo caso: $x \in A$; allora sicuramente $x \in A \cup B$ e anche $x \in A \cup C$, quindi $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Secondo caso: $x \in B \cap C$; allora $x \in B$ (e, di conseguenza, $x \in A \cup B$) e, contemporaneamente, $x \in C$ (e, di conseguenza, $x \in A \cup C$). Quindi $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Abbiamo così dimostrato che ogni $x \in A \cup (B \cap C)$ appartiene anche a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, ossia $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dimostriamo ora l'inclusione opposta; sia $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Quindi $x \in A \cup B$ e, contemporaneamente, $x \in A \cup C$. A questo punto abbiamo due casi.
Primo caso: $x \in A$; allora sicuramente $x \in A \cup (B \cap C)$.
Secondo caso: $x \notin A$; allora, dovendo appartenere ad $A \cup B$, avremo che $x \in B$. Analogamente, dovendo anche appartenere ad $A \cup C$, avremo che $x \in C$. Ossia $x \in B \cap C$ e, in particolare, $x \in A \cup (B \cap C)$.

Abbiamo così dimostrato che ogni $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ appartiene anche a $A \cup (B \cap C)$, ossia $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Avendo dimostrato la doppia inclusione, abbiamo l'uguaglianza tra i due insiemi considerati.

a_2) $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Se $x \in A \cap (B \cup C)$, allora $x \in A$ e, contemporaneamente, $x \in B \cup C$. Quindi x appartiene anche a B oppure a C, ossia $x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C$. In conclusione, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Abbiamo così dimostrato che ogni $x \in A \cap (B \cup C)$ appartiene anche a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, ossia $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dimostriamo ora l'inclusione opposta; sia $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Quindi $x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C$, cioè sicuramente x appartiene ad A. Inoltre, se $x \in A \cap B$ allora x appartiene anche a B, mentre se $x \in A \cap C$, allora $x \in C$. In conclusione, sicuramente $x \in B \cup C$.

Abbiamo così dimostrato che ogni $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ appartiene anche a $A \cap (B \cup C)$, ossia $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Avendo dimostrato la doppia inclusione, abbiamo l'uguaglianza tra i due insiemi considerati.

b_1) $\quad A \cap (A \cup B) = A$

L'inclusione $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ segue direttamente dalla definizione di intersezione di insiemi.
D'altra parte si ha che $A \subseteq (A \cup B)$ (e ovviamente $A \subseteq A$) da cui segue che $A \subseteq A \cap (A \cup B)$. Avendo dimostrato la doppia inclusione, abbiamo l'uguaglianza tra i due insiemi considerati.

$b_2)$ $\quad A \cup (A \cap B) = A$

L'inclusione $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ segue direttamente dalla definizione di unione di insiemi.
D'altra parte si ha che $(A \cap B) \subseteq A$ (e ovviamente $A \subseteq A$) da cui segue che $A \cup (A \cap B) \subseteq A$. Avendo dimostrato la doppia inclusione, abbiamo l'uguaglianza tra i due insiemi considerati.

Svolgimento dell'esercizio 1.2. Dimostriamo la prima identità. Se $\omega \in A \cap B$, allora per definizione $\chi_{A\cap B}(\omega) = 1$. D'altra parte ω appartiene sia ad A che a B, quindi $\chi_A(\omega) = 1$ e $\chi_B(\omega) = 1$. Se invece $\omega \notin A \cap B$, allora per definizione $\chi_{A\cap B}(\omega) = 0$. D'altra parte $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$, quindi almeno una tra $\chi_A(\omega)$ e $\chi_B(\omega)$ deve essere nulla. In conclusione, vale la prima identità.

Dimostriamo ora la seconda identità. Se $\omega \in A \cup B$, ma $\omega \notin A \cap B$, allora $\chi_{A\cap B}(\omega) = 0$, $\chi_{A\cup B}(\omega) = 1$ e $\chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) = 1$. Se invece $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cap B$, allora $\chi_{A\cap B}(\omega) = \chi_{A\cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) = \chi_B(\omega) = 1$. Infine, se $\omega \notin A \cup B$, allora $\chi_{A\cap B}(\omega) = \chi_{A\cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) = \chi_B(\omega) = 0$. In conclusione, vale la seconda identità.

Svolgimento dell'esercizio 1.3.
i) Esiste almeno un q tale che la proprietà $P(q)$ è falsa.
ii) Per ogni ogni q la proprietà $P(q)$ è falsa.
iii) In quel quartiere esiste almeno un palazzo con la seguente proprietà: in ogni area riservata di parcheggio c'è almeno una macchina parcheggiata che non appartiene a un abitante di tale palazzo.
iv) In almeno due occasioni distinte sono andato in quel bar e sono stato servito da persone diverse.

Soluzione dell'esercizio 1.4.

$$\sum_{k=0}^{7}(-1)^k(k+1) = -4 \ , \qquad \sum_{k=1}^{4} k! = 33 \ .$$

Svolgimento dell'esercizio 1.5. Si tratta essenzialmente di distribuire i prodotti, rinominare gli indici e poi ricordarsi che l'indice di sommatoria è muto (ossia $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{j=1}^n x_j$).

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})b_k + a_1 b_1 &= \sum_{k=2}^{n} a_k b_k - \sum_{k=2}^{n} a_{k-1} b_k + a_1 b_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_{j+1} \\ &= a_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k - \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k (b_k - b_{k+1}) + a_n b_n.\end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 1.6. Scrivendo esplicitamente la somma si ha

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a causa della cancellazione dei termini intermedi. Volendo essere più formali (cioè non volendo sottointendere nulla tramite "$\cdots$"), si possono fare i conti mantenendo il simbolo di sommatoria:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &\overset{(a)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \overset{(b)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

dove nel passaggio (a) abbiamo usato la associatività della somma, nel passaggio (b) abbiamo rinominato gli indici della seconda sommatoria $(j = k+1)$ e poi, ricordandoci che l'indice di sommatoria è muto, abbiamo semplicemente semplificato.

Svolgimento dell'esercizio 1.7. Indichiamo con $P(n)$ la proprietà

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Per $n = 1$ abbiamo $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, quindi $P(1)$ è vera. Supponiamo ora che $P(n)$ sia vera e mostriamo che da questo segue che anche $P(n+1)$ è vera. Operativamente, si tratta di isolare l'ultimo termine della sommatoria degli $n+1$

quadrati, usare l'ipotesi induttiva e poi eseguire semplici calcoli algebrici:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Dunque $P(n+1)$ è vera. Questo permette di concludere, attraverso il Principio di Induzione, che $P(n)$ è vera per ogni $n \in N^+$.

Svolgimento dell'esercizio 1.8. Per $n = 1$ l'identità è soddisfatta, dal momento che sia il primo che il secondo membro valgono $1/2$. Supponiamo adesso che l'identità sia soddisfatta per un certo $n \in \mathbb{N}^+$ e dimostriamo che vale anche per $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k},\end{aligned}$$

dunque l'identità è soddisfatta anche per $n+1$. Questo permette di concludere, attraverso il Principio di Induzione, che l'identità è vera per ogni $n \in N^+$.

Soluzione dell'esercizio 1.9. Usando la formula (1.3) si ottiene $(2-x)^4 = 16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$.

Svolgimento dell'esercizio 1.10. Utilizzando la Formula del binomio di Newton si ottiene che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n,$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0.$$

Svolgimento dell'esercizio 1.11. Utilizzando la Formula del binomio di Newton otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Questo ci permette, con qualche manipolazione algebrica, di dimostrare direttamente l'identità richiesta:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}k = \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n\,2^{n-1}.\end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 1.12.
i) Poniamo

$$P(n): \qquad n! \geq 2^{n-1}, \quad n\mathbb{N}^{+}.$$

Mostriamo che $P(1)$ è vera:

$$1 = 1!, \quad 2^0 = 1 \implies 1! \geq 2^0.$$

Ora, supponendo che sia vera $P(n)$, dimostriamo che vale anche $P(n+1)$ ossia mostriamo che

$$(n+1)! \geq 2^n.$$

Abbiamo che

$$(n+1)! = (n+1)n! \overset{[P(n)]}{\geq} (n+1)2^{n-1} \overset{[n+1\geq 2]}{\geq} 2^n.$$

Dal Principio di Induzione segue che $P(n)$ sia vera per ogni numero naturale $n \geq 1$.

ii) Poniamo

$$P(n): \qquad n^n \geq 2^{n-1}n! \quad n \geq 1$$

Mostriamo che $P(1)$ è vera:

$$1 = 1^1, \quad 2^0 1 = 1 \implies 1^1 \geq 2^0 1.$$

Ora, supponendo che sia vera $P(n)$, dimostriamo che vale anche $P(n+1)$ ossia mostriamo che

$$(n+1)^{n+1} \geq 2^n(n+1)!.$$

Osserviamo che, per applicare l'ipotesi induttiva, conviene fare la stima a partire dal termine 2^n (dal termine $(n+1)^{n+1}$ non è chiaro come far comparire il termine n^n che sappiamo stimare). Abbiamo che

$$2^n(n+1)! = 2(n+1)\,2^{n-1}n! \overset{[P(n)]}{\leq} 2(n+1)n^n.$$

A questo punto, $P(n+1)$ è dimostrata a patto che sia vero che

$$2(n+1)n^n \leq (n+1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

o, equivalentemente, a patto che sia vera la stima $2n^n \leq (n+1)^n$ (che tra l'altro ci sarà utile in seguito, nella definizione del numero di Nepero e). Per questo ci viene in soccorso la formula del Binomio di Newton:

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k = n^n + n\, n^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} n^k \geq 2n^n.$$

Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo. Dal Principio di Induzione segue che $P(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geq 1$.

iii) Poniamo

$$P(n): \qquad n^n \leq 3^n n! \quad n \in \mathbb{N}^+ .$$

Mostriamo che $P(1)$ è vera:

$$1 = 1^1, \quad 3^0 1 = 1 \implies 1^1 \leq 3^0 1.$$

Ora, supponendo che sia vera $P(n)$, dimostriamo che vale anche $P(n+1)$ ossia mostriamo che

$$(n+1)^{n+1} \leq 3^{n+1}(n+1)!.$$

Abbiamo che

$$3^{n+1}(n+1)! = 3(n+1)\, 3^n n! \overset{[P(n)]}{\geq} 3(n+1)n^n.$$

A questo punto, $P(n+1)$ è dimostrata a patto che sia vero che

$$3(n+1)n^n \geq (n+1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

o, equivalentemente, a patto che sia vera la stima $3n^n \geq (n+1)^n$ (che tra l'altro ci sarà utile in seguito, nella definizione del numero di Nepero e). Questa volta conviene scrivere la stima richiesta nel modo seguente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

e utilizzare la formula del Binomio di Newton nel modo seguente:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.$$

A questo punto basta osservare che $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ è il prodotto di k termini ognuno dei quali minore o uguale ad n per cui si ha

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \leq 1.$$

Inoltre, per l'esercizio i), sappiamo che $1/k! \leq 2^{1-k}$ per ogni $k \geq 1$ per cui, collezionando le varie informazioni e utilizzando il valore della somma della progressione geometrica ottenuto nell'Esempio 1.13, si ottiene la stima che cercavamo:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2-1+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= 1+\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3.\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo. Dal Principio di Induzione segue che $P(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geq 1$.

Svolgimento dell'esercizio 1.13. Innanzi tutto si ha

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1+\varphi.$$

Poniamo

$$P(n): \qquad F_n \geq \varphi^{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostriamo che $P(0)$ è vera:

$$1 \geq \varphi^{-2} \iff 1 \leq \varphi^2$$

e l'ultima disuguaglianza è vera perché $\varphi^2 = \varphi + 1 > 1$. Inoltre $\varphi \geq 1$ e quindi anche $P(1)$ risulta essere vera.

Utilizzeremo il Principio di Induzione debole (equivalente a quello usuale): fissato $n \in \mathbb{N}$, supporremo $P(m)$ vera per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ e dimostreremo che questo implica la validità anche di $P(n+1)$ ossia che

$$F_{n+1} \geq \varphi^{n-1}.$$

Abbiamo che

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \overset{P(n),P(n-1)}{\geq} \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} = \varphi^{n-3}(\varphi+1) = \varphi^{n-3}\varphi^2 = \varphi^{n-1}.$$

Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo. Dal Principio di Induzione debole segue che $P(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geq 1$.

Svolgimento dell'esercizio 1.14. Verranno citate le proprietà di base di operazioni e ordinamento in $\mathbb{R}$, come indicate nel testo.
i) È conseguenza diretta della proprietà (C1) di compatibilità tra l'ordinamento e le operazioni.
ii) Mostriamo preliminarmente che $0x = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che

$$x \overset{(A3),(M3)}{=} (1+0)x \overset{(D)}{=} 1x + 0x.$$

Quindi $0x$ è l'elemento neutro per l'addizione e quindi deve essere $0x = 0$. A questo punto è chiaro che, se $a = 0$ oppure $b = 0$, allora $ab = 0$.

Viceversa, se $ab = 0$ e, ad esempio, $a \neq 0$, per quanto visto prima, $a^{-1}(ab) = 0$ e quindi, per (M2), $(a^{-1}a)b = 0$ e, in conclusione grazie a (M4), $b = 0$.
iii) Per (D) si ha $(ab - ac) = a(b - c)$. A questo punto la proprietà segue da quella mostrata in *ii*).
iv) Dimostriamo preliminarmente che se $a > 0$ allora $a^{-1} > 0$. Se, per assurdo, fosse $-a^{-1} > 0$, allora avremmo

$$0 \overset{(C2)}{<} a(-a^{-1}) \overset{(M2),(M4)}{=} -1,$$

il che è impossibile. A questo punto la proprietà segue dal fatto che

$$ab \leq ac \overset{(i),(D)}{\iff} a(c-b) \geq 0 \overset{(C2)}{\iff} a^{-1}a(c-b) \geq 0.$$

v) La dimostrazione è del tutto analoga a quella di iv).

Svolgimento dell'esercizio 1.15. Per definizione abbiamo che $\inf B \leq b \leq \sup B$ per ogni $b \in B$; poiché $A \subset B$ tali disuguaglianze valgono anche per ogni $b \in A$, ossia $\inf B$ e $\sup B$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante per A. Essendo $\inf A$ il massimo dei minoranti di A, ne segue che $\inf B \leq \inf A$. Analogamente, essendo $\sup A$ il minimo dei maggioranti di A, ne segue che $\sup A \leq \sup B$.

Svolgimento dell'esercizio 1.16. Risulta $A = A_1 \cup A_2$ con

$$A_1 = \left\{\frac{1}{2k}\,;\ k \in \mathbb{N}^+\right\}, \qquad A_2 = \left\{-\frac{1}{2k+1}\,;\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Gli insiemi A_1 e A_2 sono disgiunti e $a_1 > a_2$ per ogni $a_1 \in A_1$ e per ogni $a_2 \in A_2$. Osserviamo che $1/2$ è il massimo di A_1 e -1 è il minimo di A_2. Quindi otteniamo che A è limitato e ha massimo uguale a $1/2$ e minimo uguale a -1.

Soluzione dell'esercizio 1.17. L'insieme A è limitato inferiormente da $-\sqrt{2}$ (minimo) e limitato superiormente da $\sqrt{2}$ (massimo).

Soluzione dell'esercizio 1.18. L'insieme A è limitato inferiormente da $-\sqrt{2}$ (che non è minimo) e limitato superiormente da $\sqrt{2}$ (che non è massimo).

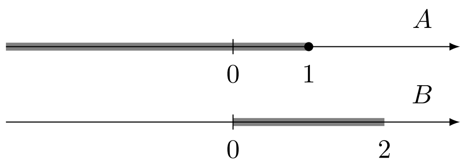
Soluzione dell'esercizio 1.19. $A \cup B$ è l'insieme di tutte le città italiane con più di un milione di abitanti e di tutte le città italiane con almeno una università;

$A \cap B$ è l'insieme di tutte le città italiane che hanno più di un milione di abitanti e hanno anche almeno una università;

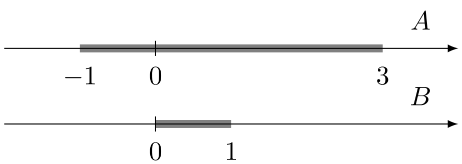
$A \setminus B$ è l'insieme di tutte le città italiane che hanno più di un milione di abitanti, ma che non hanno una università;

$B \setminus A$ è l'insieme di tutte le città italiane che hanno almeno una università, ma hanno meno di un milione di abitanti.

Soluzione dell'esercizio 1.20. $A \cup B = (-\infty, 2)$, $A \cap B = (0, 1]$, $A \setminus B = (-\infty, 0]$, $B \setminus A = (1, 2)$.

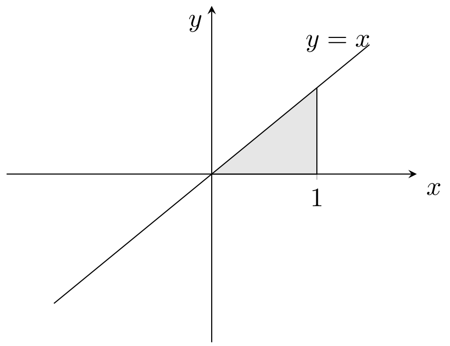


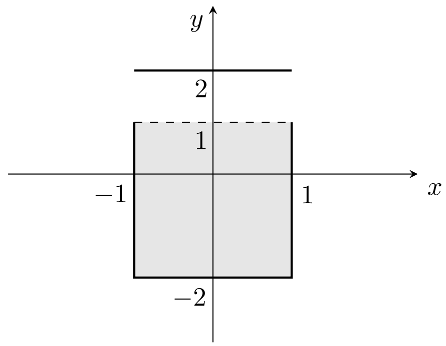
Svolgimento dell'esercizio 1.21. Si ha $A = (-1, 3)$ e $B = (0, 1)$. Quindi $A \cup B = (-1, 3)$, $A \cap B = (0, 1)$, $A \setminus B = (-1, 0] \cup [1, 3)$, $B \setminus A = \emptyset$.



Soluzione dell'esercizio 1.22. $d(P_1, P_2) = \sqrt{2}$, $d(P_1, P_3) = 1$ e $d(P_2, P_3) = 1$.

Soluzione dell'esercizio 1.23.





Svolgimento dell'esercizio 1.24. I punti della bisettrice hanno coordinate (x, y) con $y = x$. Quindi la distanza di un punto della bisettrice da $(-1, 0)$ è data da $\sqrt{(x+1)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$. Vediamo per quali x la distanza è 1: si ha $2x^2 + 2x + 1 = 1$ che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = -1$. Quindi i punti richiesti sono $(0, 0)$ e $(-1, -1)$.

Svolgimento dell'esercizio 1.25.

1) $\Omega := \bigcup_{n\geq 2} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$

L'insieme Ω è l'unione di intervalli chiusi

$$I_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

crescenti, nel senso che $I_n \subset I_{n+1}$, che, per capirci, hanno l'estremo sinistro "un po' più grande" di 0 e l'estremo destro "un po' più piccolo" di 1. Quando n diventa grande, ci si aspetta che l'unione di questi insiemi copra tutto l'intervallo $(0, 1)$. Verifichiamolo. Vorremmo dimostrare che per ogni $x \in (0, 1)$ esiste un numero naturale $n_x \geq 2$ (dipendente da x) tale che $1/n_x \leq x \leq 1 - 1/n_x$. Poiché $0 < x < 1$, abbiamo che

$$\frac{1}{n} \leq x \Longleftrightarrow \frac{1}{x} \leq n, \qquad x \leq 1 - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{1}{1-x} \leq n.$$

Quindi, per trovare il numero naturale n_x richiesto possiamo procedere in questo modo: prendiamo $z_x = \max\{1/x, 1/(1-x)\}$ (ossia il più grande valore tra $1/x$ e $1/(1-x)$) e scegliamo $n_x = [z_x] + 1$ (il naturale successivo alla parte intera di z_x). Poiché $z_x > 1$, $n_x \geq 2$ e, per quanto visto prima x appartiene a I_{n_x}. Abbiamo così mostrato che l'insieme A contiene l'intervallo $(0, 1)$. D'altra parte, se $x \leq 0$, allora $x \leq 1/n$ per ogni numero naturale n e, se $x \geq 1$ allora $x \geq 1 - 1/n$ per ogni numero naturale n. In conclusione $\Omega = (0, 1)$ per cui $\inf \Omega = 0$, $\sup \Omega = 1$ e l'insieme non ha né minimo né massimo.

2) $\quad \Omega := \bigcap_{n\geq 1} \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$

Con tecniche del tutto analoghe a quelle usate nel punto a) si dimostra che $\Omega = [0,1]$, per cui $\min \Omega = 0$, $\max \Omega = 1$

3) $\quad \Omega := \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

L'insieme Ω è la collezione di tutte le possibili somme delle progressioni geometriche di ragione $x = 1/2$ e noi sappiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

(si ricordi l'Esercizio 1.13). Quindi

$$\Omega = \left\{2 - \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Osserviamo che

$$0 < \frac{1}{2^n} \leq 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e che 1 è il valore assunto in corrispondenza di $n = 0$. Quindi sicuramente $\inf \Omega = \min \Omega = 1$ e $2 \notin \Omega$ è un maggiorante per Ω. Dimostriamo che è l'estremo superiore: fissato $\varepsilon > 0$ vogliamo verificare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$2 - \frac{1}{2^n} > 2 - \varepsilon \iff 2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

e, siccome $2^n \geq n$ se $n > 0$ (perché?), sicuramente l'ultima disequazione è verificata per n abbastanza grande. In conclusione $\sup \Omega = 2$ (non massimo).

4) $\quad \Omega := \left\{\sum_{k=0}^{n} 2^k,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

L'insieme Ω è la collezione di tutte le possibili somme delle progressioni geometriche di ragione $x = 2$ e noi sappiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-(2)^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{2^{n+1} - 1,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Poiché $2^{n+1} \geq n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme è illimitato superiormente. D'altra parte 1 è un minorante per l'insieme e appartiene all'insieme (è l'elemento corrispondente a $n = 0$), quindi $\inf \Omega = \min \Omega = 1$.

5) $\qquad \Omega := \left\{ \dfrac{3n^2}{4n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

L'insieme Ω ha tutti elementi non negativi e $0 \in \Omega$ (è l'elemento corrispondente ad $n = 0$), quindi $\inf \Omega = \min \Omega = 0$. D'altra parte, se $n \geq 1$ si ha

$$\frac{3n^2}{4n+1} \geq \frac{3n^2}{4n+n} = \frac{3}{5}n\,,$$

quindi Ω non è limitato superiormente.

6) $\qquad \Omega := \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

Risulta conveniente riscrivere l'insieme Ω distinguendo gli elementi corrispondenti agli indici pari ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$) da quelli corrispondenti agli indici dispari ($n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$):

$$\Omega = \left\{ -\frac{1}{2k+2},\ k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2k+1},\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

A questo punto, è chiaro che per individuare l'estremo inferiore di Ω basta considerare il sottoinsieme dei suoi elementi negativi. Chiaramente

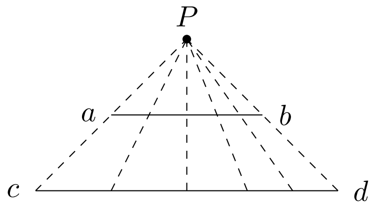
$$-\frac{1}{2k+2} \geq -\frac{1}{2}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ e } -\frac{1}{2k+2} = -\frac{1}{2} \text{ per } k = 0 \text{ (cioè } n = 1)$$

quindi $\inf \Omega = \min \Omega = -1/2$. D'altra parte, per individuare l'estremo superiore di Ω basta considerare il sottoinsieme dei suoi elementi positivi, per i quali risulta

$$\frac{1}{2k+1} \leq 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ e } \frac{1}{2k+1} = 1 \text{ per } k = 0 \text{ (cioè } n = 0).$$

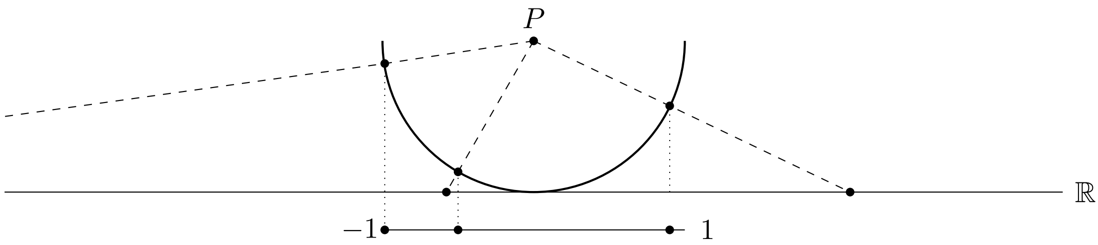
Quindi $\sup \Omega = \max \Omega = 1$.

Svolgimento dell'esercizio 1.26. Diamo solo un'idea grafica della dimostrazione. Una possibile corrispondenza biunivoca tra due intervalli aperti (a, b) e (c, d) della retta reale è la seguente:



Fissando opportunamente il punto P in modo che gli estremi dell'intervallo (a, b) si proiettino sui relativi estremi dell'intervallo (c, d) la corrispondenza è data dalla proiezione da P dei punti di (c, d).

Per mettere in corrispondenza biunivoca un interlallo limitato, diciamo $(-1, 1)$, con tutta la retta reale, serve una sorta di "meccanismo di amplificazione" (questo che segue prende il nome di proiezione stereografica).



Ogni punto x dell'intervallo $(-1, 1)$ individua un unico punto $\pi(x)$ sulla circonferenza unitaria. Ad x associamo il numero reale corrispondente alla proiezione di $\pi(x)$ dal centro della circonferenza, come in figura. Si può mostrare che questa è una corrispondenza biunivoca tra i punti di $(-1, 1)$ e i punti di R.

Svolgimento dell'esercizio 1.27. Indichiamo con S il sottoinsieme dell'intervallo $[0, 1]$ definito da

$$S := \{x = 1/k \colon k \in \mathbb{N}^+,\ k \geq 2\}$$

e definiamo la corrispondenza

$$x \in [0,1] \ \mapsto \begin{cases} x & x \in (0,1) \setminus S, \\ 1/(k+2) & x \in S,\ x = 1/k, \\ 1/2 & x = 0, \\ 1/3 & x = 1. \end{cases}$$

Il principio applicato è quello del famoso "Albergo di Hilbert": i punti di S vengono "spostati di due", generando lo spazio in (0,1) (i due valori 1/2 e 1/3) da assegnare agli estremi dell'intervallo chiuso.

Soluzione dell'esercizio 1.28.

1) $z - 4w = -7 - 6i$, $zw - 2z^2 = 10 + 5i$, $|zw| = 5$, $\overline{3z - w} = 1 + 7i$.

2) $z - 4w = 3 + 3i$, $zw - 2z^2 = -17 + 9i$, $|zw| = \sqrt{10}$, $\overline{3z - w} = 9 + 2i$.

3) $z - 4w = 9 + i$, $zw - 2z^2 = -2 - 6i$, $|zw| = 2\sqrt{2}$, $\overline{3z - w} = 5 - 3i$.

4) $z - 4w = -9 - 7i$, $zw - 2z^2 = -4 + 4i$, $|zw| = 4$, $\overline{3z - w} = -5 - i$.

Svolgimento dell'esercizio 1.29. Per svolgere questo esercizio può essere conveniente moltiplicare e dividere per il coniugato complesso del denominatore; infatti, se abbiamo un numero della forma z/w, con $z, w \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$, moltiplicando e dividendo per $\overline{w}$ si ottiene

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2},$$

in modo tale che il denominatore sia adesso un numero reale e non ci siano difficoltà a scrivere il rapporto in forma cartesiana.

Procedendo in questo modo abbiamo che:

$$z_1 = \frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3}{13} + i\,\frac{2}{13},$$
$$z_2 = \frac{4+i}{1-i} = \frac{4+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{3}{2} + i\,\frac{5}{2}.$$

Per quanto riguarda z_3, occorre prima riscrivere il denominatore in forma cartesiana:

$$i(2+i)^2 = i(3+4i) = -4+3i,$$

da cui

$$z_3 = \frac{1}{-4+3i} = \frac{1}{-4+3i} \cdot \frac{-4-3i}{-4-3i} = -\frac{4}{25} - i\,\frac{3}{25}.$$

Soluzione dell'esercizio 1.30. $z_1 = 2(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$, $z_2 = 5(\cos\pi + i\,\sin\pi)$, $z_3 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\,\sin(\pi/4))$.

2.11 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 2.1.

1) No: l'asse delle y ha infinite intersezioni con se stesso. Quindi tale elemento del dominio avrebbe infinite immagini.

2) Sì e la funzione è sia iniettiva che suriettiva.

3) Sì e la funzione è sia iniettiva che suriettiva.

4) No: fissato $x > 0$ esistono infiniti rettangoli di area x (quelli di lati lunghi a e x/a per ogni $a > 0$).

5) Sì. Non è iniettiva (ad esempio il rettangolo di lati 1 e 1 ha la stessa area del rettangolo di lati 1/2 e 2), né suriettiva ($\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$).

6) Sì e la funzione è sia iniettiva che suriettiva (associa a ogni $x \in (0, +\infty)$ il quadrato di lato $\sqrt{x}$).

Svolgimento dell'esercizio 2.2. $f(0) = 1$, $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = 2$, $f(1) = 1^3 - 2 + 1 = 0$.

Svolgimento dell'esercizio 2.3. $f(0) = -1/3$, $f(1) = -1/2$, $f(-2) = -1/5$. Il punto $x = 3$ non appartiene al dominio della funzione.

Soluzione dell'esercizio 2.4.

$f(x)$	x^2	$1+x^2$	$\log x$	$1+\cos x$
$\in \mathrm{Im}(f)$	3, $\sqrt{2}$, 0	1, 5	0, 1, $-1/2$, $1/2$	2, 0 , $1/2$
$\notin \mathrm{Im}(f)$	-1	0, $1/2$		-1

Svolgimento dell'esercizio 2.5. L'implicazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) è ovvia. Viceversa, supponiamo per assurdo che esista $x \neq 0$ soddisfacente (ii). Per la proprietà archimedea (Teorema 1.27), applicata ad $a = |x| > 0$ e $b = 1$, esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $N\,|x| > 1$, cioè $|x| > 1/N$, in contraddizione con (ii).

Svolgimento dell'esercizio 2.6. L'uguaglianza vale quando x e y hanno lo stesso segno. Infatti, se $x, y \geq 0$, allora $|x + y| = x + y$, $|x| = x$, $|y| = y$, mentre se $x, y \leq 0$, allora $|x+y| = -(x+y)$, $|x| = -x$, $|y| = -y$; in entrambi i casi l'identità è verificata. Supponiamo ora che x e y abbiano segno discorde, cioè $xy < 0$. Non è restrittivo supporre che $|x| \geq |y|$. In tal caso $|x + y| = |x| - |y| < |x| + |y|$.

Svolgimento dell'esercizio 2.7.

1) $[1/2, +\infty)$

2) $(-\infty, 5/3)$

3) Facendo le dovute semplificazioni si ottiene $6 \geq 2$ che è verificata sempre. Quindi l'insieme delle soluzioni è tutto $\mathbb{R}$.

4) Facendo le dovute semplificazioni si ottiene $0 \geq 4$ che non è verificata mai. Quindi l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto $\emptyset$.

5) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

6) La disequazione può essere riscritta come $(x-2)^2 > 0$ che è verificata per $x \neq 2$ (abbiamo un quadrato che è sempre positivo salvo in $x = 2$ dove si annulla). Quindi l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

7) $\emptyset$.

8) Il membro di sinistra è la somma di due termini non negativi, quindi la disequazione è sempre verificata e l'insieme delle soluzioni è tutto $\mathbb{R}$.

9) Facendo il denominatore comune e le dovute semplificazioni si ottiene

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} > 0\,.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore, osservando che il rapporto tra due quantità è positivo quando le due quantità hanno segni concordi.

$$\begin{array}{cccc|c}
+++ & +++ & ---------- & +++ & x^2+x-2 \\
--- & +++ & ++++++++++ & +++ & x+3 \\
\hline
--- & +++ & ---------- & +++ & \frac{x^2+x-2}{x+3} \\
\multicolumn{1}{r}{-3} & \multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{1} & &
\end{array}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è $(-3, -2) \cup (1, +\infty)$.

10) Per risolvere una disequazione con i moduli si deve suddividere la retta reale in segmenti in cui i moduli possono essere esplicitati usando la definizione. Nella disequazione considerata abbiamo $|x-1|$, che ha argomento che cambia segno in $x = 1$ e $|2x-3|$, che ha argomento che cambia segno in $x = 3/2$. I moduli si esplicitano nel modo seguente:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1, \\ 1-x & \text{se } x < 1, \end{cases} \qquad |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } x \geq 3/2, \\ 3-2x & \text{se } x < 3/2. \end{cases}$$

Quindi la disequazione di partenza ha come soluzioni l'unione delle soluzioni dei tre sistemi

$$a) \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 - x + 3 - 2x \geq 1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 1 < x < 3/2 \\ x - 1 + 3 - 2x \geq 1 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} x \geq 3/2 \\ x - 1 + 2x - 3 \geq 1 \end{cases}$$

che hanno rispettivamente insieme delle soluzioni dato da $(-\infty, 1]$, l'insieme vuoto $\emptyset$ e $[5/3, +\infty)$. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è $(-\infty, 1] \cup [5/3, +\infty)$.

11) $(-2, +\infty)$.

12) Ponendo $t = \cos x$ la disequazione diventa $t^2 - 2t - 3 < 0$. Il polinomio di secondo grado in t ha come zeri $t = -1$ e $t = 3$, quindi la disequazione in t è verificata per $-1 < t < 3$. Sostituendo $t = \cos x$ si ottiene che le soluzioni della disequazione sono quelle x tali che $-1 < \cos x < 3$. La seconda disequazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre la prima è verificata quando $\cos x \neq -1$, ossia per $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

13) Il logaritmo è positivo quando il suo argomento è maggiore di 1. Quindi la disequazione di partenza ha le stesse soluzioni della disequazione $4x - 5 \geq 1$. Di conseguenza l'insieme delle soluzioni è $[3/2, +\infty)$.

14) La disequazione ha senso solo all'interno del dominio della radice, ossia per $x \in [-2, 0]$. Inoltre, la disequazione non è sicuramente verificata se $x < -1$ (in questo caso il termine di destra è negativo, mentre la radice è positiva). In $[-1, 0]$ possiamo elevare al quadrato ambo i membri ottenendo $-x(x+2) < x^2 + 2x + 1$, che semplificata diventa $2x^2 + 4x + 1 > 0$. Il polinomio di secondo grado ha zeri in $x = -1 - \sqrt{2}/2$ e in $x = -1 + \sqrt{2}/2$ ed è positivo nell'intervallo compreso tra i due zeri. Intersecando tale intervallo con $[-1, 0]$, otteniamo l'insieme delle soluzioni della disequazione, che risulta essere $(-1 + \sqrt{2}/2, 0]$.

15) Applicando il logaritmo a entrambi i termini, otteniamo $|x| < x + 1$. Esplicitando il modulo, questa disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x < x + 1 \end{cases}$$

che hanno rispettivamente come insieme delle soluzioni $[0, +\infty)$ e l'intervallo $(-1/2, 0)$. Quindi l'insieme delle soluzioni è $(-1/2, +\infty)$.

16) Ponendo $t = \tan x$ la disequazione diventa $t^2 \geq 3$ che ha insieme di soluzioni $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$. Quindi x deve soddisfare $\tan x \leq -\sqrt{3}$ oppure $\tan x \geq \sqrt{3}$. Determiniamo graficamente l'insieme delle soluzioni di queste due disequazioni trigonometriche, ricordando che $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ e $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ (si veda la Figura 2.30).

Quindi l'insieme delle soluzioni è l'unione in $k \in \mathbb{Z}$ degli insiemi $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi] \cup [\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

Svolgimento dell'esercizio 2.8.

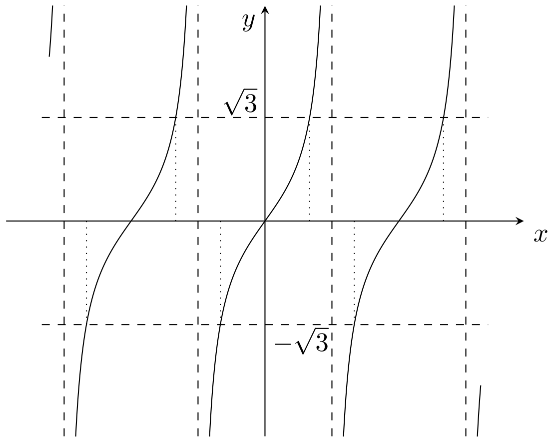


Figura 2.30: Disequazione $\tan^2 x \geq 3$

1) A è l'intorno di ampiezza 2 del punto -3, quindi è l'intervallo $(-5, -1)$. B è l'intorno chiuso di ampiezza 2 del punto 0, quindi è l'intervallo $[-2, 2]$. La loro intersezione è l'intervallo $[-2, -1)$.

2) $A = (1, 5)$, $B = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = \emptyset$.

3) $A = [-3, -1]$, $B = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, $A \cap B = [-3, -2]$.

4) Per determinare A si deve risolvere la disequazione $\log(2 - x^2) \geq 0$ che ha le stesse soluzioni della disequazione $2 - x^2 \geq 1$. Quindi A è l'intervallo chiuso $[-1, 1]$. D'altra parte, B è l'intorno di ampiezza $\sqrt{3}$ di 1 e quindi $B = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. Se ne conclude che $A \cap B = (1 - \sqrt{3}, 1]$.

5) Per determinare A si deve risolvere la disequazione $e^{\arctan(x-1)} < 1$ che ha le stesse soluzioni della disequazione $\arctan(x - 1) < 0$. Quindi A è la semiretta $(-\infty, 1)$. D'altra parte, B è la semiretta $(e^2, +\infty)$ e quindi $A \cap B = \emptyset$.

6) $(1, +\infty)$.

Svolgimento dell'esercizio 2.9.

1) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| > x - 1$

Innanzi tutto osserviamo che il dominio di definizione delle funzioni coinvolte nella disequazione è $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, quindi l'insieme delle soluzioni deve essere un sottoinsieme di D.

Una volta osservato che $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{|x-1|}{|x+1|}$, l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta essere l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{x-1}{|x+1|} > x-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ x \neq -1 \\ \dfrac{1-x}{|x+1|} > x-1 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni: non è verificato per $x = 1$ e, se $x > 1$, è equivalente a richiedere simultaneamente che $x > 1$ e $|x+1| < 1$. Il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x < 1 \\ x \neq -1 \\ \dfrac{1-x}{|x+1|} > x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x \neq -1 \\ |x+1| > -1 \end{cases}$$

che ha come insieme delle soluzioni $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, si ha che $\inf S = -\infty$, $\sup S = 1$ e l'insieme non ha né massimo né minimo.

2) $|x+1| > \sqrt{x+1}$

Osserviamo che il dominio di definizione delle funzioni coinvolte nella disequazione è $D = \{x \geq -1\}$, e $|x+1| = x+1$ in D. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione coincide con quello delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 > \sqrt{x+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ (x+1)^2 > x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x+1) > 0 \end{cases}$$

e, in conclusione, è $S = (0, +\infty)$. Abbiamo che $\inf S = 0$, $\sup S = +\infty$ e l'insieme non ha né massimo né minimo.

3) $|x+2| + |x+1| > 2\,|x-3|$

La disequazione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Per tener conto della presenza dei valori assoluti, dobbiamo ricercare le soluzioni in quattro intervalli distinti, in cui il segno di tutti gli argomenti sia fissato:

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ -(x+2) - (x+1) > -2\,(x-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 < x \leq -1 \\ (x+2) - (x+1) > -2\,(x-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x \leq 3 \\ (x+2) + (x+1) > -2\,(x-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3 \\ (x+2) + (x+1) > 2\,(x-3) \end{cases}$$

i cui insieme di soluzioni sono rispettivamente $\emptyset$, $\emptyset$, $(3/4, 3]$ e $(3, +\infty)$. In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = (3/4, +\infty)$, $\inf S = 3/4$, $\sup S = +\infty$ e l'insieme non ha né massimo né minimo.

4) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < \sqrt{x} + 1$

Il dominio di definizione delle funzioni coinvolte nella disequazione è $D = \{x \geq 0, x \neq 1\}$. Inoltre la variabile compare sempre sotto radice, il che suggerisce di riscrivere tutto come funzione della nuova variabile $t = \sqrt{x}$. Si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \neq 1 \\ \dfrac{t}{t-1} < t + 1 \end{cases}$$

che, a conti fatti, ha come insieme delle soluzioni $(0, 1) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = (0, 1) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, $\inf S = 0$, $\sup S = +\infty$ e l'insieme non ha né massimo né minimo.

5) $2^{2x} \geq 4^{x^2-2}$

Una volta osservato che la disequazione può essere riscritta come

$$4^x \geq 4^{x^2-2},$$

utilizziamo il fatto che la funzione esponenziale con base maggiore di 1 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Ne segue che la disequazione di partenza equivale alla disequazione algebrica $x \geq x^2 - 2$, il cui insieme di soluzioni è l'intervallo chiuso $S = [-1, 2]$. Se ne deduce che $\inf S = \min S = -1$ e $\sup S = \max S = 2$.

6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+3} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x}$

Utilizzando il fatto che la funzione esponenziale con base minore di 1 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$, si può concludere che la disequazione di partenza equivale alla disequazione algebrica $x^2 + 3 \leq 4x$, il cui insieme di soluzioni è l'intervallo chiuso $S = [1, 3]$. Se ne deduce che $\inf S = \min S = 1$ e $\sup S = \max S = 3$.

Soluzione dell'esercizio 2.10.

1) $(-\infty, 0]$

2) $[0, 2) \cup (2, +\infty)$

3) $(0, +\infty)$

4) $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

5) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

6) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

7) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

8) $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

9) $\emptyset$

10) $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ in $[0, 2\pi]$ e tutti i suoi traslati di $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

11) $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

12) $(1, +\infty)$

13) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

14) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

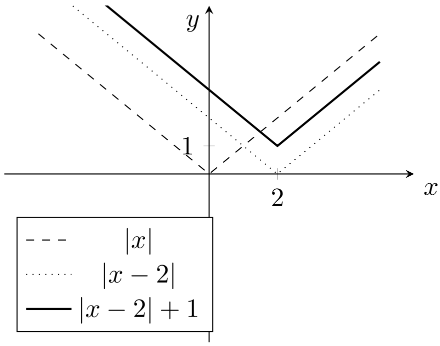
15) $[0, 1]$

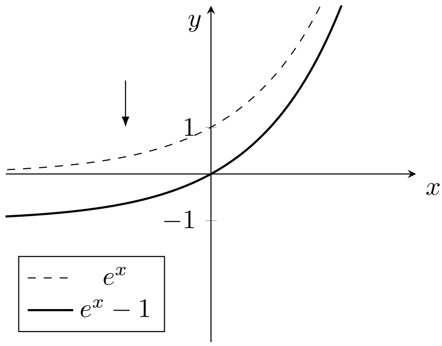
16) $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

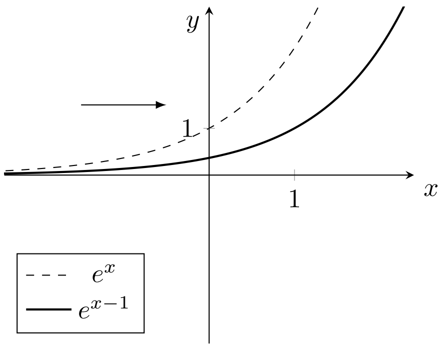
17) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

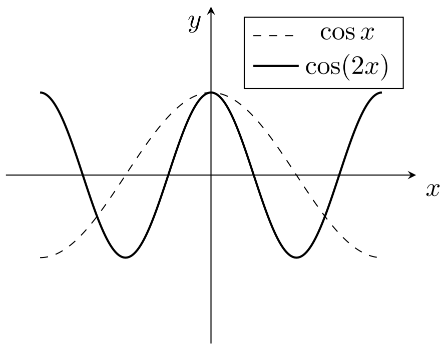
18) $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

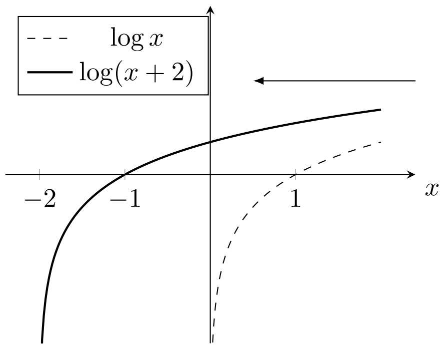
Soluzione dell'esercizio 2.11.

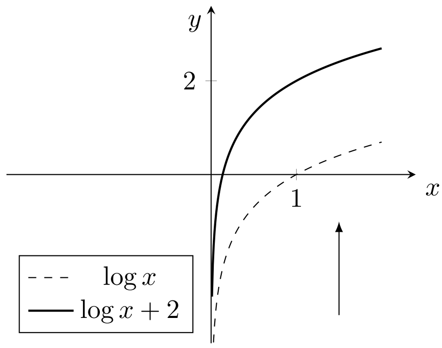












Soluzione dell'esercizio 2.12.

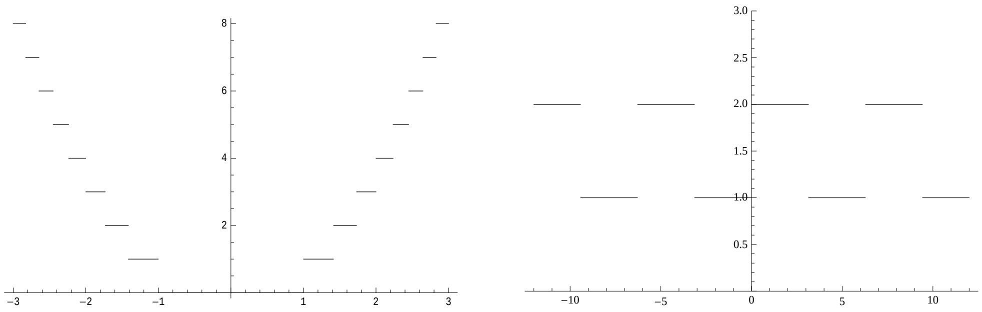


Figura 2.31: $[x^2]$ a sinistra, $[2 + \sin x]$ a destra

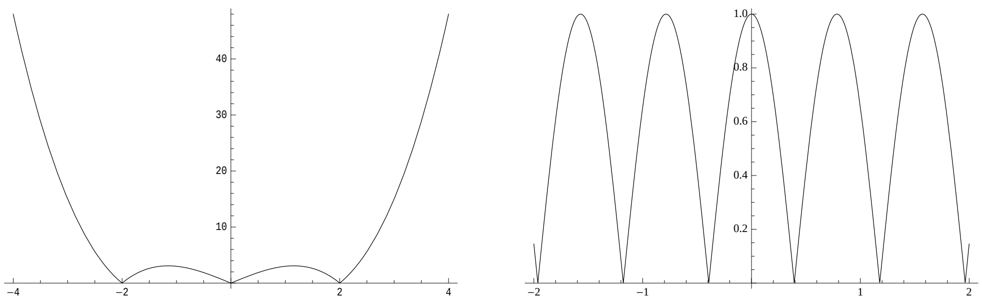
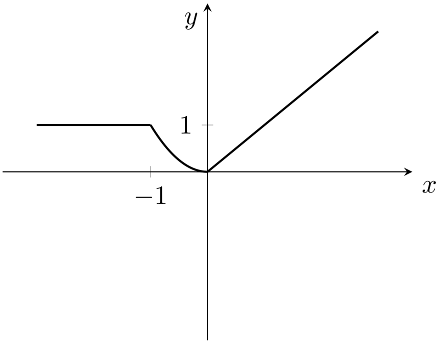
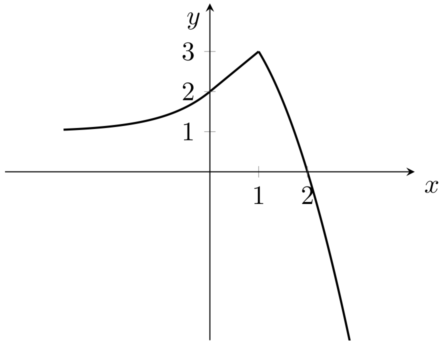


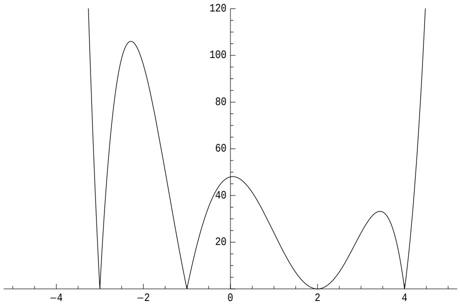
Figura 2.32: $|x(x+2)(x-2)|$ a sinistra, $|\sin^2(2x) - \cos^2(2x)|$ a destra

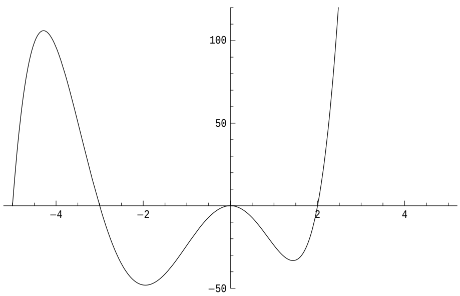
Soluzione dell'esercizio 2.13.

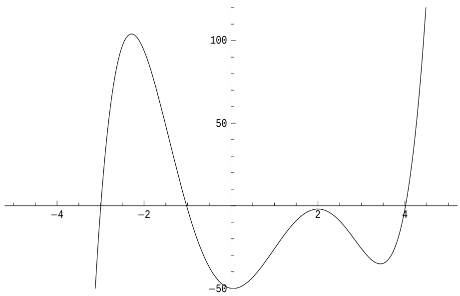


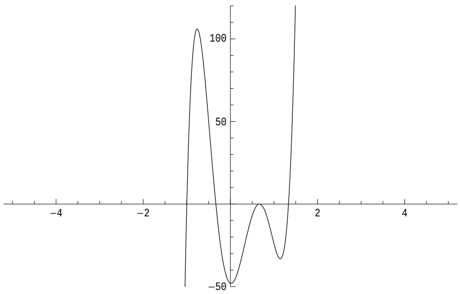


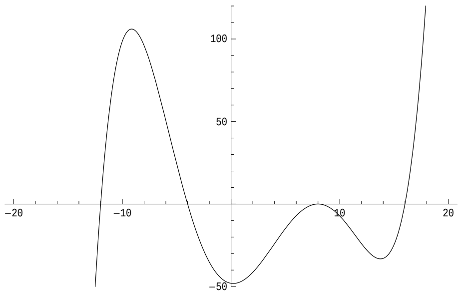
Soluzione dell'esercizio 2.14.

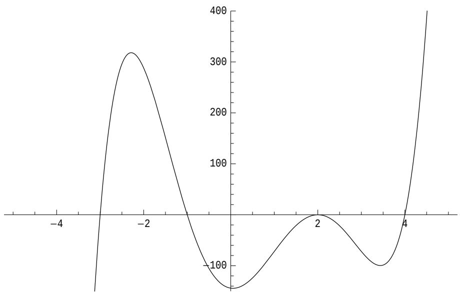


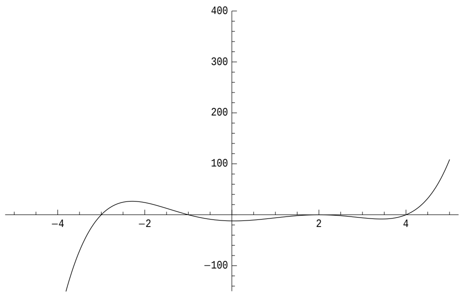












Svolgimento dell'esercizio 2.15.

1) $f \circ g(x) = e^{\cos x}$ definito in $\mathbb{R}$; $g \circ f(x) = \cos(e^x)$ definito in $\mathbb{R}$.

2) $f \circ g(x) = \log(1 + 7x^2)$ definito in $\mathbb{R}$; $g \circ f(x) = 1 + 7(\log x)^2$ definito in $(0, +\infty)$.

3) $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ definito in $\mathbb{R}$; $g \circ f(x) = x + 3$ definito in $[0, +\infty)$.

4) $f \circ g(x) = \sin(\sqrt{1 - x^2})$ definito in $[-1, 1]$; $g \circ f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$ definito in $\mathbb{R}$.

5) $f \circ g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 8}$ definito in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; $g \circ f(x) = \left(\dfrac{1}{x - 8}\right)^3$ definito in $\mathbb{R} \setminus \{8\}$.

6) $f \circ g(x) = \arctan(\log(1 + x^2))$ definito in $\mathbb{R}$; $g \circ f(x) = \log(1 + \arctan^2 x)$ definito in $\mathbb{R}$.

Svolgimento dell'esercizio 2.16. a) Dominio di f: deve essere $x \neq 0$ (per non fare annullare il denominatore della frazione). Inoltre deve essere $\frac{x^2+1}{2x} > 0$. La disequazione è verificata per $x > 0$, quindi $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$.
b) Per verificare che $f(x) \geq 0$ in $(0, +\infty)$ basta mostrare che $\frac{x^2+1}{2x} \geq 1$ in $(0, +\infty)$. Poiché $x > 0$, la disequazione ha le stesse soluzioni in $(0, +\infty)$ di $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, che è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ (a sinistra c'è il quadrato di un binomio). Quindi anche $f(x) \geq 0$ è verificata per ogni $x \in (0, +\infty)$.

Svolgimento dell'esercizio 2.17. a) f è dispari. Infatti

$$f(-x) = \frac{-x}{1 + (-x)^2} = \frac{-x}{1 + x^2} = -f(x)\,.$$

b) Dobbiamo mostrare che esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Poiché il denominatore è positivo,

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1 + x^2}\,,$$

quindi dobbiamo cercare $M > 0$ tale che

$$\frac{|x|}{1+x^2} \leq M\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per $1 + x^2 > 0$ e portando tutti i termini a destra della disuguaglianza otteniamo

$$Mx^2 - |x| + M \geq 0\,,$$

che è una disequazione di secondo grado nella variabile $|x|$. Affinché la disequazione sia verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ deve essere $\Delta = 1 - 4M^2 \leq 0$, ossia $M \geq 1/2$. Ad esempio, possiamo scegliere $M = 1/2$ e otteniamo che $|f(x)| \leq 1/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
c) Siano $1 < x_1 < x_2$. Vediamo se $f(x_1) > f(x_2)$, ossia se

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} > \frac{x_2}{1+x_2^2}\,.$$

Svolgiamo i conti:

$$\begin{gathered}
\frac{x_1}{1+x_1^2} > \frac{x_2}{1+x_2^2} \\
x_1 + x_1x_2^2 > x_2 + x_2x_1^2 \\
x_1 - x_2x_1^2 - x_2 + x_1x_2^2 > 0 \\
(x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) > 0
\end{gathered}$$

e l'ultima disuguaglianza è sicuramente verificata perché $(x_1 - x_2) < 0$ per ipotesi e $(1 - x_1x_2) < 0$ perché sia x_1 che x_2 sono maggiori di 1.
d) Poniamo

$$y = \frac{x}{1+x^2} \qquad (x \geq 1)$$

ed esplicitiamo la x:

$$yx^2 - x + y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{2y}\,.$$

L'ultima formula necessita di alcune precisazioni. Innanzitutto abbiamo mostrato nel punto b) che $|f(x)| \leq 1/2$, quindi se y appartiene all'immagine di f, allora $1 - y^2$ è positivo e quindi se ne può calcolare la radice quadrata. In più, se $x \geq 1$ allora la sua immagine è diversa da zero e quindi si può dividere per y. Infine, dovendo essere $x \geq 1$, una delle due soluzioni dell'equazione di secondo grado è stata esclusa. Concludendo, la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2x}$.

Svolgimento dell'esercizio 2.18. a) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.
b) Per mostrare che f non è limitata superiormente si deve dimostrare che, preso comunque $M > 0$ esiste $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tale che $f(x) > M$. Fissiamo $M > 0$ e vediamo se la disequazione

$$-\frac{2|x-1|}{1+x} > M$$

ammette soluzioni. Osserviamo che per $x > -1$ la funzione è negativa, quindi la disequazione sicuramente non è verificata. Quindi ci possiamo restringere alla semiretta $(-\infty, -1)$, in cui $|x-1| = 1-x$. Manipoliamo la disequazione:

$$\begin{gathered} -2\,\frac{1-x}{1+x} > M \\ 1-x > -\frac{M}{2}(1+x) \qquad \text{(in quanto } 1+x<0\text{)} \\ 1+\frac{M}{2} > \left(1-\frac{M}{2}\right)x\,. \end{gathered}$$

Osserviamo che non è restrittivo supporre $M > 2$ (ovviamente è sufficiente che la disequazione sia risolubile per M grande) e quindi avremo $(1-\frac{M}{2}) < 0$. Con questa scelta di M, la disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x > 0$, poiché il primo membro è positivo mentre il secondo membro è negativo. Di conseguenza la funzione è illimitata superiormente. Con conti del tutto analoghi si mostra che f è illimitata inferiormente.
c) Siano $1 < x_1 < x_2$. Vediamo se è vero che $f(x_1) > f(x_2)$.

$$\begin{gathered} -\frac{2(x_1-1)}{1+x_1} > -\frac{2(x_2-1)}{1+x_2} \\ \frac{x_1-1}{1+x_1} < \frac{x_2-1}{1+x_2} \\ x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 < x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 \\ 2(x_1-x_2) < 0\,. \end{gathered}$$

L'ultima disequazione è verificata per ipotesi, quindi la monotonia è dimostrata.

Svolgimento dell'esercizio 2.19. a) f è pari. Infatti

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)\,.$$

b) f è limitata. La funzione è positiva o nulla, quindi è limitata inferiormente da $m = 0$. Inoltre il numeratore è sempre minore del denominatore, quindi la funzione è limitata superiormente da $M = 1$.

c) Siano $0 \leq x_1 < x_2$. Vediamo se è vero che $f(x_1) < f(x_2)$.

$$\begin{gathered}
\frac{x_1^2}{1+x_1^2} < \frac{x_2^2}{1+x_2^2} \\
x_1^2 + x_1^2 x_2^2 < x_2^2 + x_1^2 x_2^2 \\
x_1^2 < x_2^2 \,.
\end{gathered}$$

L'ultima disuguaglianza è sicuramente verificata (perché la funzione x^2 è strettamente crescente per $x \geq 0$) e quindi la stretta monotonia di f è dimostrata.
d) Poniamo

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

ed esplicitiamo la x:

$$\begin{aligned}
y + yx^2 &= x^2 \\
x^2 &= \frac{y}{1-y} \,.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, per il punto b), si ha $0 \leq y < 1$. Quindi è possibile applicare la radice quadrata ad ambo i membri; dal momento che $x \geq 0$ si ottiene

$$x = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \,.$$

Di conseguenza la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

Svolgimento dell'esercizio 2.20.

1) $\log\left(\dfrac{1-\sin(2x)}{\sqrt{\pi^2 - 9\arctan^2\left(\left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|\right)}}\right)$

Le condizioni da imporre, oltre ad $x \neq -1$, sono

$$\begin{aligned}
&\pi^2 - 9\arctan^2\left(\left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|\right) \geq 0 && \text{(argomento di una radice quadrata)}, \\
&\pi^2 - 9\arctan^2\left(\left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|\right) \neq 0 && \text{(denominatore di una frazione)}, \\
&\frac{1-\sin(2x)}{\sqrt{\pi^2 - 9\arctan^2\left(\left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|\right)}} > 0 && \text{(argomento di un logaritmo)}.
\end{aligned}$$

Le prime due condizioni si riassumono nella richiesta

$$\pi^2 - 9\arctan^2\left(\left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|\right) > 0 \iff -\frac{\pi}{3} < \arctan\left(\left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|\right) < \frac{\pi}{3}$$

e, poiché $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$, $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ e la funzione $\tan x$ è monotona strettamente crescente nell'intervallo $-\pi/2, \pi/2$, l'ultima richiesta equivale a

$$-\sqrt{3} < \left|\frac{x\sqrt{3}}{x+1}\right| < \sqrt{3}.$$

La prima disequazione è sempre verificata, mentre la seconda equivale a richiedere $|x| < |x+1|$, verificata per $x > -1/2$. Per tali valori di x ha interesse studiare la terza disequazione, che si riduce a

$$1 - \sin(2x) > 0 \iff \sin(2x) \neq 1 \iff x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

In conclusione, il dominio naturale della funzione considerata è

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \setminus \left\{x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2) $\sqrt{\dfrac{|x^2-2|+1}{x^2-1}}$

L'argomento della radice quadrata è un rapporto con numeratore sempre positivo, quindi si ottiene immediatamente che

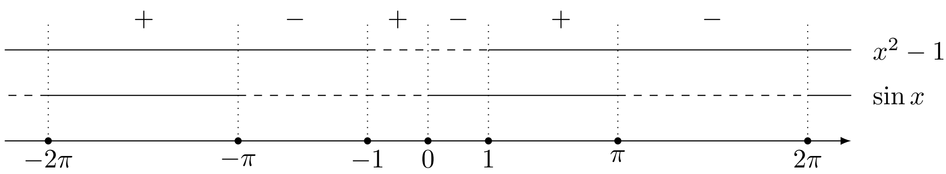
$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, , -1) \cup (1, +\infty)\,.$$

3) $\left(\dfrac{\sin x}{x^2-1}\right)^{\log(6x^2+x-1)}$

Le condizioni da imporre sono

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 1 &> 0 && \text{(argomento di un logaritmo),} \\ \frac{\sin x}{x^2-1} &> 0 && \text{(base di una potenza con esponente reale).} \end{aligned}$$

La prima disequazione è verificata per $x \in (-\infty, -1/2) \cup (1/3, +\infty)$. D'altra parte, lo schema di risoluzione della seconda disequazione è il seguente:



e quindi la seconda disequazione è verificata da

$$x \in (-1,0) \cup (1,\pi) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} (2k\pi,(2k+1)\pi).$$

In conclusione, il dominio naturale della funzione considerata è

$$\mathrm{Dom}(f) = (-1,-1/2) \cup (1,\pi) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} (2k\pi,(2k+1)\pi).$$

4) $\sqrt{\log 3 - \log\left(\dfrac{|x|-3}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{x}\right)}$

Dal momento che devono essere ben definite le funzioni $\sqrt{x}$ e $\sqrt{2-x}$, il dominio naturale della funzione deve essere un sottoinsieme dell'intervallo $[0,2]$. Tuttavia, in tale intervallo si ha $|x|-3<0$ e quindi l'argomento del logaritmo risulta essere sempre negativo. Quindi $\mathrm{Dom}(f)=\emptyset$.

Svolgimento dell'esercizio 2.21.

Se $c=1$, allora la funzione a sinistra è definita per $x\neq 1$ e vale sempre zero. Quindi la disequazione è verificata per ogni $x \neq 1$.

Se $c>1$, allora la funzione coinvolta nella disequazione ha come dominio naturale $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,1)\cup(c,+\infty)$ e, dal momento che la funzione esponenziale con base e è strettamente crescente, la disequazione è equivalente a richiedere che

$$\frac{x-1}{x-c} \leq e^{\frac{1}{2}}.$$

A questo punto, se $x>c$, la disequazione diventa

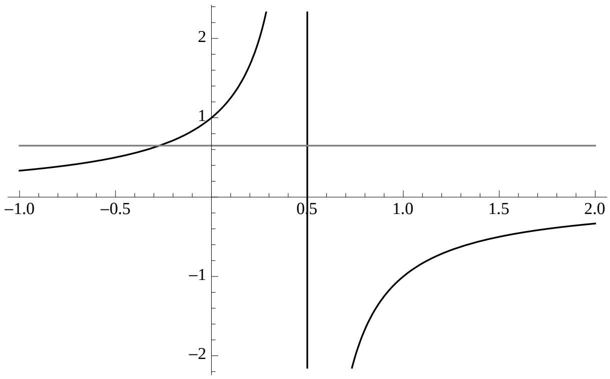
$$x-1 \leq (x-c)e^{\frac{1}{2}} \iff x \geq \frac{1-ce^{\frac{1}{2}}}{1-e^{\frac{1}{2}}} := x_c$$

(osserviamo che il valore che abbiamo chiamato x_c è maggiore di c se $c>1$). Conti analoghi riducono la disequazione ad $x \leq x_c$ se $x \leq 1$. Quindi, se $c>1$, allora le soluzioni della disequazione sono i valori di x appartenenti a $(-\infty,1)\cup(x_c,+\infty)$.

Se $c<1$, allora allora la funzione coinvolta nella disequazione ha come dominio naturale $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,x_c)\cup(1,+\infty)$. Ovviamente potremmo procedere come nel caso precedente per determinare le soluzioni. Tuttavia proponiamo un metodo diverso:

$$\frac{x-1}{x-c} \leq e^{\frac{1}{2}} \iff \frac{c-1}{x-c} \leq e^{\frac{1}{2}} - 1$$

che ha come soluzioni i valori di x appartenenti a $(-\infty, x_c) \cup (1, +\infty)$. Si può visualizzare qualitativamente la correttezza della risoluzione tramite un analisi grafica mostrata nella figura sottostante: la retta orizzontale corrisponde al valore $e^{\frac{1}{2}} - 1$ sulle ordinate, e la disequazione è verificata in corrispondenza di quei valori di x per i quali il grafico della funzione $\frac{c-1}{x-c}$ si trova al di sotto di tale retta.



Svolgimento dell'esercizio 2.22. Il principio di induzione sarà applicato alla proprietà $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log x_k \leq \log\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right), \quad x_k > 0,\ \alpha_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1.$$

La concavità della funzione logaritmo ci assicura che $P(2)$ è vera (basta riscriverla con $\lambda = \alpha_1$, per cui, dovendo essere $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, si avrà $1 - \lambda = \alpha_2$).

Supponendo vera $P(n)$ dimostriamo la validità di $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \log x_k \leq \log\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right), \quad x_k > 0,\ \alpha_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1.$$

Poiché $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 = \alpha_{n+1}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\log\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) &= \log\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right) \\
&= \log\left((1-\alpha_{n+1})\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right) \\
&\overset{P(2)}{\geq} (1-\alpha_{n+1})\log\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k\right) + \alpha_{n+1}\log x_{n+1} \\
&\overset{P(n)}{\geq} (1-\alpha_{n+1})\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} \log x_k + \alpha_{n+1}\log x_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \log x_k.
\end{aligned}$$

Per il Principio di Induzione possiamo quindi concludere che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 2$.

Svolgimento dell'esercizio 2.23. La disuguaglianza

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

equivale a richiedere che

$$\log\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\right) \leq \log\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)$$

visto che il logaritmo naturale è una funzione strettamente crescente. Inoltre, utilizzando le proprietà del logaritmo, la richiesta diventa

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log a_k \leq \log\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right).$$

La validità di quest'ultima disuguaglianza segue direttamente dall'Esercizio 2.22, scegliendo $\alpha_k = 1/n$ e $x_k = a_k$, $k = 1, \ldots, n$.

La disuguaglianza

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

si ottiene applicando la prima parte dell'esercizio ai valori $b_k = 1/a_k$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Svolgimento dell'esercizio 2.24.
(a) Se uno dei due valori a,b è nullo, la disuguaglianza è evidentemente vera. Nel caso in cui $a > 0$ e $b > 0$, la disuguaglianza di Young si ottiene passando ai logaritmi e sfruttandone le proprietà (inclusa la concavità):

$$\log(ab) = \log\left((a^p)^{1/p}(b^q)^{1/q}\right) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \le \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

(b) Introducendo le due quantità

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}, \qquad B = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q},$$

osserviamo che $A = 0$ se e solo se $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e, analogamente, $B = 0$ se e solo se $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Di conseguenza, se $A = 0$ oppure $B = 0$ la disuguaglianza è banalmente soddisfatta. Assumiamo dunque che $A > 0$ e $B > 0$. In tal caso, la disuguaglianza da dimostrare può essere scritta come $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le AB$ o, equivalentemente, come

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B} \le 1.$$

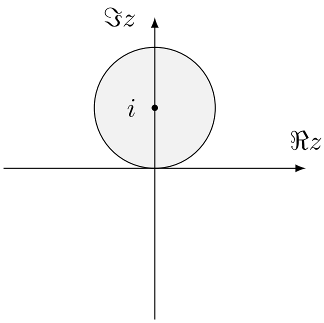
Il punto (a) ci garantisce che

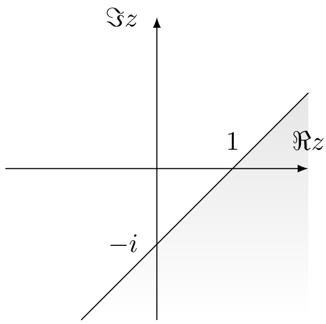
$$\frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B} \le \frac{1}{p}\left(\frac{a_k}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b_k}{B}\right)^q$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$, e quindi, sommando, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B} &\le \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{a_k}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b_k}{B}\right)^q\right] = \frac{1}{p\,A^p}\sum_{k=1}^{n} a_k^p + \frac{1}{q\,B^q}\sum_{k=1}^{n} b_k^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 2.25.





Svolgimento dell'esercizio 2.26. Per poter utilizzare la formula di de Moivre (2.9) dobbiamo prima trasformare i numeri in forma trigonometrica. Abbiamo che $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\, \sin(\pi/4))$, dunque

$$z_1^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos(12\pi/4) + i \sin(12\pi/4)) = 64(\cos(3\pi) + i\, \sin(3\pi)) = -64.$$

Analogamente $z_2 = \sqrt{3} - i = 2(\cos(-\pi/6) + i\, \sin(-\pi/6))$, da cui

$$z_2^4 = 2^4(\cos(-4\pi/6) + i\, \sin(-4\pi/6)) = 16\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - 8\,i\,\sqrt{3}\,.$$

Infine, si ha

$$z_3 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = i = 1(\cos(\pi/2) + i\, \sin(\pi/2)),$$

da cui

$$z_3^{20} = \cos(10\pi) + i \sin(10\pi) = 1.$$

Soluzione dell'esercizio 2.27. $\sqrt{4} = \{-2, +2\}$; $\sqrt{-9} = \{-3i, 3i\}$; $\sqrt{2i} = \{1+i, -1-i\}$; $\sqrt[3]{8} = \{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$, $\sqrt[4]{-4} = \{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$.

Svolgimento dell'esercizio 2.28.

1) Si tratta di un'equazione di secondo grado, della forma (2.12), con $a = 1$, $b = -(2 + i)$, $c = (3 + 2i)/4$. Le sue due soluzioni possono essere calcolate attraverso la formula risolutiva (2.14). Iniziamo a calcolare le radici quadrate del numero complesso

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2 + i)^2 - (3 + 2i) = 3 + 4i - 3 - 2i = 2i.$$

Poiché $\Delta = 2(\cos(\pi/2) + i\, \sin(\pi/2))$, si ha che $\sqrt{\Delta} = \{1 + i, -1 - i\}$, dunque le soluzioni dell'equazione sono

$$z_0 = \frac{2+i+1+i}{2} = \frac{3}{2} + i, \qquad z_1 = \frac{2+i-1-i}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

2) L'equazione è polinomiale di quarto grado, dunque per il Teorema Fondamentale dell'Algebra ammetterà esattamente quattro soluzioni (contate con la loro molteplicità). Poiché compaiono solo le potenze pari di z, possiamo effettuare la sostituzione $w = z^2$, ottenendo per w l'equazione di secondo grado $w^2 + 5w + 4 = 0$. Tale equazione ammette le soluzioni $w_0 = -1$ e $w_1 = -4$. Le quattro soluzioni dell'equazione di partenza sono le radici quadrate complesse di questi due numeri, vale a dire

$$z_0 = i, \qquad z_1 = -i, \qquad z_2 = -2i, \qquad z_3 = 2i\,.$$

3) Osserviamo che l'equazione proposta **non** è un'equazione polinomiale di secondo grado, dal momento che compare $\overline{z}$, dunque non rientra nei casi previsti dal Teorema Fondamentale dell'Algebra. Ne consegue che, a priori, nulla si può dire sul numero di soluzioni dell'equazione stessa.

Scrivendo $z = x + iy$ in forma algebrica, l'equazione diviene $i(x^2 - y^2 + 2ixy) = x - iy$, ovvero

$$-2xy + i(x^2 - y^2) = x - iy.$$

Tale equazione in campo complesso è soddisfatta se e solo se le parti reale e immaginaria del numero complesso a primo membro coincidono rispettivamente con quelle del numero complesso a secondo membro, vale a dire se

$$\begin{cases} -2xy = x & \text{(uguaglianza delle parti reali)} \\ x^2 - y^2 = -y & \text{(uguaglianza delle parti immaginarie)}\,. \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto un sistema (non lineare) di due equazioni nelle due incognite reali x e y. La prima equazione è soddisfatta per $x = 0$ oppure per $y = -1/2$; se $x = 0$, la seconda equazione fornisce $y = 0$ oppure $y = 1$, mentre se $y = -1/2$ la seconda equazione fornisce $x^2 = 3/4$, cioè $x = \pm\sqrt{3}/2$. In conclusione, l'equazione ammette le quattro soluzioni

$$z_0 = 0, \qquad z_1 = i, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\,, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\,.$$

4) Anche questa, come la precedente, **non** è un'equazione polinomiale, quindi a priori nulla si può dire sul numero delle sue soluzioni. Poiché compare una potenza abbastanza elevata di z (z^4), può essere conveniente passare in forma trigonometrica in modo da poter utilizzare le formule di de Moivre per il calcolo delle potenze. Scrivendo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ otteniamo

$$\rho^4(\cos(4\theta) + i\sin(4\theta)) = \rho.$$

L'equazione è certamente soddisfatta per $\rho = 0$ (cioè per $z = 0$); se $\rho > 0$, dividendo per ρ e uguagliando parte reale e parte immaginaria dei due membri otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \rho^3\cos(4\theta) = 1, \\ \rho^3\sin(4\theta) = 0. \end{cases}$$

Poiché $\rho \neq 0$, la seconda equazione è soddisfatta solo se $\sin(4\theta) = 0$, vale a dire se $\theta = k\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. D'altra parte $\cos(4k\pi/4) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, dunque la prima equazione è soddisfatta se k è pari e $\rho = 1$. I valori ottenuti di θ, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, sono dunque $-\pi/2, 0, \pi/2, \pi$; essendo $\rho = 1$, a questi valori di θ corrispondono i numeri complessi $-i, 1, i, -1$. In conclusione, l'equazione ammette queste quattro soluzioni più la soluzione nulla.

3.8 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 3.1. Sia $x_0 \in A$. È facile verificare che, se δ è un numero positivo sufficientemente piccolo, allora $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset A$, quindi ogni intorno di x_0 contiene punti di A distinti da x_0 stesso. Da questo segue che tutti i punti di A sono di accumulazione per A.
Verifichiamo ora che anche i punti 0, 1 e 2 sono di accumulazione per A. Ad esempio, se $x_0 = 0$ allora l'intersezione fra un intorno di x_0 e A contiene un intorno destro di x_0. Analogamente, se $x_0 = 2$ l'intersezione fra un intorno di x_0 e A contiene un intorno sinistro di x_0. Se invece $x_0 = 1$ l'intersezione fra un intorno di x_0 e A contiene sia un intorno sinistro che un intorno destro di x_0.
Per concludere l'esercizio, occorre dimostrare che se $x_0 \notin [0,2]$, allora x_0 non è di accumulazione per A. Supponiamo ad esempio che $x_0 > 2$ (in maniera analoga si tratta il caso $x_0 < 0$). Se scegliamo $\delta = x_0 - 2$, si ha chiaramente $\delta > 0$ e $(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A = \emptyset$; abbiamo quindi trovato un intorno di x_0 che ha intersezione vuota con A, per cui x_0 non è di accumulazione per A.

Soluzione dell'esercizio 3.2. 1) Basta scegliere $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$. 2) Conviene considerare $0 < \varepsilon < 4$ e scegliere $\delta(\varepsilon) = 2 - \sqrt{4-\varepsilon}$.

Svolgimento dell'esercizio 3.3.

1) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sin(2\pi x)}{x-1} \overset{[y=x-1]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2\pi y + 2\pi)}{y} = \lim_{y\to 0} 2\pi \cdot \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi y} = 2\pi\,.$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0\,.$

3) $\displaystyle \lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{(x-\pi/2)^2} \overset{[y=x-\pi/2]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1-\sin(y+\pi/2)}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}\,.$

4) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1\,.$

Svolgimento dell'esercizio 3.4.

1) $\displaystyle \lim_{x\to 3} (x-3) \cdot \sin\left(\frac{e^x+7}{x^2-9}\right) = 0$; infatti la funzione di cui si vuole calcolare il limite è il prodotto fra la funzione $x-3$ che tende a zero e la funzione $\sin(\cdots)$ che è limitata (in valore assoluto è sempre ≤ 1).

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} \arctan\left(\frac{e^{-x} + 7\log(x^2+9)}{x^5}\right) = 0$; infatti la funzione $\arctan(\cdots)$ è limitata, mentre $\sqrt[3]{x} \to 0$ quando $x \to 0$.

Soluzione dell'esercizio 3.5. 1) $+\infty$. 2) $-\infty$.

Svolgimento dell'esercizio 3.6.

1) Abbiamo che x diverge a $+\infty$, mentre $\sin x$ non ammette limite per $x \to +\infty$. Di conseguenza non si può usare il Teorema 3.30 sulla somma dei limiti (con l'aritmetizzazione parziale di ∞), dal momento che uno dei due limiti in questione non esiste. Osserviamo tuttavia che

$$x + \sin x \geq x - 1,$$

e che $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$. Di conseguenza, per il Teorema 3.28, possiamo concludere che anche $x + \sin x$ diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

2) Questo limite può essere trattato in maniera analoga al precedente: poiché il coseno è sempre compreso fra -1 e 1 vale la seguente minorazione:

$$\frac{3 + \cos(1/x)}{x} \geq \frac{2}{x}, \qquad \forall x > 0.$$

(Osserviamo che, per $x < 0$, questa disuguaglianza non è vera dal momento che il denominatore delle due frazioni è negativo.) Poiché $2/x \to +\infty$ per $x \to 0^+$, possiamo concludere che anche in questo caso il limite in questione vale $+\infty$.

Svolgimento dell'esercizio 3.7.

1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right)$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $-\infty + \infty$ (dal momento che le funzioni razionali hanno numeratore di grado superiore a quello del denominatore).

Svolgendo semplici calcoli algebrici otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+4x^2}{9x^3-12x+6x^2-8}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}\left(\frac{2+4/x}{9-12/x^2+6/x-8/x^3}\right) = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Indicando con $P(x) = 2x^3-5x^2-4x+12$ e $Q(x) = x^4-4x^3+5x^2-4x+4$, constatiamo che $P(2) = Q(2) = 0$. Fattorizzando i polinomi con la regola di

Ruffini otteniamo che $P(x) = (x-2)^2(2x+3)$ e $Q(x) = (x-2)^2(x^2+1)$ Quindi si ha

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{7}{5}.$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$.

Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+1/x}+1)} = \frac{1}{2}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Facendo le opportune manipolazioni algebriche che ci permettono di utilizzare i limiti notevoli, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{(2x)^2}{(3x)^2} \cdot \frac{(3x)^2}{\sin^2(3x)} = \frac{2}{9}.$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5+\cos(x)}}{x^2+1}$

La funzione $\sqrt{5+\cos(x)}$ è limitata (e non ammette limite per $x \to +\infty$), mentre la funzione $\dfrac{1}{x^2+1}$ è infinitesima per $x \to +\infty$. Dal Teorema 3.34 segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+\cos(x)}}{x^2+1} = 0.$$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{\sqrt{x}-1}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Evidenziando gli infiniti principali si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos(x)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\cos(x)/x}{1-1/\sqrt{x}} = +\infty.$$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Con il cambiamento di variabile $y = e^x$ otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^3+1}{y^2+2} = +\infty.$$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2}$

Non c'è alcuna forma di indeterminazione, visto che sia numeratore che denominatore hanno limite finito e non nullo. Quindi, semplicemente per l'algebra dei limiti, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2} = \frac{1}{2}.$$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Razionalizzando e semplificando si ottiene

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1\right)}$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

10) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Moltiplicando e dividendo per $1+\sqrt{\cos x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})} = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x}{(1-\cos(\sqrt{x}))(1+\sqrt{\cos x})}.$$

Ora possiamo utilizzare il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

e osservare che da questo, con il cambiamento di variabile $y=\sqrt{x}$, si ottiene anche

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2}.$$

In conclusione riusciamo a eliminare la forma indeterminata nel modo seguente

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1-\cos(\sqrt{x})}\,\frac{1-\cos x}{x^2}\,x\,\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Svolgimento dell'esercizio 3.8.

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+m(x)}{x+\sqrt{x}}$

Dal momento che $0\le m(x)<1$, per il Teorema 3.34, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x)}{x}=0,$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+m(x)}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{m(x)}{x}}{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}=1.$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{[3x+1]}{\sqrt{x^2+1}}$

Dal momento che $3x\le[3x+1]\le 3x+1$, si ha

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\le\frac{[3x+1]}{\sqrt{x^2+1}}\le\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+1/x^2}}=3,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+1/x}{\sqrt{1+1/x^2}}=3,$$

per cui, per il Teorema del confronto, si ha che il limite richiesto vale 3.

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}$

Dal momento che $x-1 \leq [x] \leq x$ e quindi

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{[x]}{x} \leq 1,$$

per il Teorema del confronto, si ha che il limite richiesto vale 1.

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+\sin(x))}{x^3}$

Dal momento che $2 \leq 3+\sin(x) \leq 4$ e che il logaritmo è una funzione strettamente crescente, si ha

$$\log 2 \leq \log(3+\sin(x)) \leq \log 4 \Longrightarrow \frac{\log 2}{x^3} \leq \frac{\log(3+\sin(x))}{x^3} \leq \frac{\log 4}{x^3}.$$

A questo punto segue dal teorema del confronto che il limite richiesto esiste e vale 0.

Osserviamo che alla stessa conclusione si poteva arrivare direttamente osservando che si tratta del limite del prodotto tra una funzione limitata e una funzione infinitesima.

Svolgimento dell'esercizio 3.9.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1}}-1\right)$

Il limite presenta varie forme indeterminate da gestire. La prima, della forma 0/0, è

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Razionalizzando (sia il numeratore che il denominatore) otteniamo

$$\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{1-1+x}{1+\sqrt{1-x}}\,\frac{\sqrt{x+1}+1}{x-1+1} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{1+\sqrt{1-x}} \qquad (*) \qquad (3.17)$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{1+\sqrt{1-x}} = 1.$$

A questo punto, il limite che ci interessa è anch'esso una forma indeterminata del tipo 0/0. Ricordando che $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$ e indicando con $g(x)$ la funzione

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

otteniamo

$$g(x)-1=\frac{g^3(x)-1}{g^2(x)+g(x)+1}=\frac{1}{g^2(x)+g(x)+1}\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1}-1\right)$$
$$\overset{(3.17)}{=}\frac{1}{g^2(x)+g(x)+1}\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{1+\sqrt{1-x}}-1\right)$$
$$=\frac{1}{g^2(x)+g(x)+1}\,\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$$
$$=\frac{1}{g^2(x)+g(x)+1}\,\frac{2x}{(1+\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}.$$

A questo punto non abbiamo più forme indeterminate e otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{g^2(x)+g(x)+1}\,\frac{2}{(1+\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{3\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{6}.$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\sin^2(\pi-2\arctan(x))}{x^2+3}$

Dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan(x))=0,$$

un cambiamento di variabile ci garantisce che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2(\pi-2\arctan(x))}{\pi-2\arctan(x)}=1.$$

Quindi conviene leggere la funzione considerata nel modo seguenti:

$$\frac{x^2}{x^2+3}\cdot\frac{\sin^2(\pi-2\arctan(x))}{(\pi-2\arctan(x))^2}\,x^2(\pi-2\arctan(x))^2$$

in cui resta da analizzare una forma indeterminata del tipo $+\infty\cdot 0$ per il termine $x^2(\pi-2\arctan(x))^2$. Con il cambio di variabile $y=\pi-2\arctan(x)$ e osservando che $x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)=\cot\left(\frac{y}{2}\right)$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}x^2(\pi-2\arctan(x))^2=\lim_{y\to 0}y^2\cot^2\left(\frac{y}{2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)=4.$$

In conclusione si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\sin^2(\pi-2\arctan(x))}{x^2+3}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+3}\,\frac{\sin^2(\pi-2\arctan(x))}{(\pi-2\arctan(x))^2}\,x^2(\pi-2\arctan(x))^2=1\cdot 1\cdot 4=4\,.$$

Svolgimento dell'esercizio 3.10. Dal momento che la definizione di limite assume la conoscenza a priori del valore stesso del limite, la richiesta dell'esercizio è di farsi un'idea intuitiva della convergenza o meno della successione e del valore dell'eventuale limite, per poi verificare formalmente la validità dell'intuizione.

1) $a_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$

Per n grande il denominatore diventa grande, mentre il numeratore resta fissato. Sembra ragionevole dunque che la successione sia infinitesima, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0.$$

Per verificarlo formalmente, fissiamo $\varepsilon > 0$ e studiamo la disuguaglianza

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} < \varepsilon$$

che, per $\varepsilon \in (0,1)$, impone come condizione $n > \sqrt{1/\varepsilon - 1}$. In conclusione, la disequazione è soddisfatta definitivamente (ossia per ogni n maggiore di un intero n_0 fissato e dipendente, eventualmente, da ε), quindi la successione ha limite $\ell = 0$.

2) $a_n = \dfrac{an+b}{cn+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Per n grande il numeratore non è molto diverso da an e il denominatore non è molto diverso da bn, per cui sembra ragionevole ipotizzare che la successione abbia limite e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{an+b}{cn+d} = \frac{a}{c}.$$

Per verificarlo formalmente, fissiamo $\varepsilon > 0$ e studiamo la disuguaglianza

$$\left|\frac{an+b}{cn+d} - \frac{a}{c}\right| < \varepsilon, \quad \text{cioè} \quad \left|\frac{bc-da}{c^2n+cd}\right| < \varepsilon\,.$$

Osserviamo che, per n sufficientemente grande, si ha $c^2n + cd > 0$, e la disuguaglianza è soddisfatta per

$$n > \frac{|bc-da|}{c^2\varepsilon} - \frac{d}{c}.$$

In conclusione, la disequazione è soddisfatta definitivamente, quindi la successione ha limite $l = \frac{a}{c}$.

3) $a_n = \cos n$

L'intuizione ci dice che il limite in questo caso non esiste a causa dell'andamento oscillatorio della successione. Per dimostrarlo rigorosamente, procediamo per assurdo: supponiamo che il limite esista e chiamiamolo α. Per il Teorema della permanenza del segno deve essere $\alpha \in [-1, 1]$.

Per arrivare a una contraddizione, possiamo ad esempio osservare che, dalla definizione di limite, si ha anche $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \cos(n+1)$. D'altra parte, utilizzando le formule di addizione per il coseno, $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$, ossia

$$\sin(n) = \frac{\cos(n)\cos(1) - \cos(n+1)}{\sin(1)}\,.$$

Quindi, per l'algebra dei limiti, la nostra ipotesi per assurdo garantisce anche che esiste anche il $\lim_{n\to+\infty} \sin(n) = \beta$ e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Infine, utilizzando ancora le formule di addizione, otteniamo

$$\cos(1) = \cos(n+1-n) = \cos(n+1)\cos(n) + \sin(n+1)\sin(n)$$

da cui concludiamo, sempre utilizzando l'algebra dei limiti,

$$\cos(1) = \lim_{n\to+\infty} \cos(n+1)\cos(n) + \sin(n+1)\sin(n) = \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

un'uguaglianza falsa. Quindi il limite richiesto non può esistere.

4) $a_n = (-1)^n \log n$

Fissato $M > 0$, si ha

$$\log n > M \quad \Longleftrightarrow \quad n > e^M,$$

il che dimostra che $\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty$. Quindi la successione che stiamo considerando diverge in valore assoluto, ma cambia segno a seconda della parità di n. Se ne conclude che non ammette limite.

5) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{n-1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Si ha che

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = 1$$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{2k} < \varepsilon, \qquad 1 - a_{2k+1} < \varepsilon, \qquad \forall\ k > k_0.$$

Se ne conclude che

$$a_{2k+1} - a_{2k} > 1 - 2\varepsilon \qquad \forall\ k > k_0.$$

Quindi il limite della successione non può esistere. Infatti, essendo $0 \le a_n \le 1$, se tale limite ℓ esistesse, per il Teorema della permanenza del segno si avrebbe $\ell \in [0,1]$ e esisterebbe $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n \ge n_0$. Ma allora per $k > k_0$ tale che $2k > n_0$, risulterebbe

$$1 - 2\varepsilon < a_{2k+1} - a_{2k} \le |a_{2k+1} - \ell| + |a_{2k} - l| < 2\varepsilon$$

catena di disuguaglianze che non può essere verificata se $\varepsilon < 1/4$.

6) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Si ha che

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

quindi, ragionando essenzialmente come nell'Esercizio 1), si ottiene che il limite della sottosuccessione corrispondente agli indici dispari tende a zero. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, basta prendere n_0 più grande di $1/\varepsilon$ e $1/\varepsilon^2$ per ottenere che $0 < a_n < \varepsilon$ per ogni $n > n_0$. Se ne conclude che la successione converge a 0.

Svolgimento dell'esercizio 3.11.

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $(a > 0)$

Basta osservare che $\sqrt[n]{a} = e^{(\log a)/n}$ e usare il fatto che $\lim_{x\to 0} e^x = 1$.

2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Sia $a_n = \sqrt[n]{n}$ e sia $c_n > 0$ tale che $n^{1/2} = (1+c_n)^n$, ossia $c_n = n^{1/(2n)} - 1 = \sqrt{a_n} - 1$. La disuguaglianza di Bernoulli garantisce che

$$\sqrt{n} = (1 + c_n)^n > 1 + nc_n \quad \Longrightarrow \quad 0 < c_n < \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

Per il Teorema del confronto $\lim_n c_n = 0$ quindi, per l'algebra dei limiti, $\lim_n a_n = \lim_n (1 + c_n)^2 = 1$.

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Il risultato segue dal fatto che $n! \ge n^n 3^{-n}$ (si veda l'Esercizio 1.12(iii)) e dal Teorema del confronto:

$$\sqrt[n]{n!} \ge \frac{n}{3} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Svolgimento dell'esercizio 3.12.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n!\pi)$

Dal momento che $\sin(n!\pi) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il limite vale 0.

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$

Ricordando la definizione di coefficiente binomiale si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2(n-2)!}\,\frac{3\cdot 2\cdot (n-3)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{(n-2)} = 0\,.$$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!(2n+1)}$

Raccogliendo $n!$ sia a numeratore che a denominatore si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n![(n+1)(n+2)-1]}{n!(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+\ldots+\alpha_k^n}, \qquad k\geq 1,\ \alpha_i>0\ \forall i=1,\ldots,k$

Sia $A=\max_{i=1,\ldots,k}\alpha_i$. Osserviamo che $0<\alpha_i/A\leq 1$ per ogni $i=1,\ldots,k$, e inoltre vale 1 per almeno un indice i, per cui

$$1\leq \left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^n+\cdots+\left(\frac{\alpha_k}{A}\right)^n\leq k.$$

Di conseguenza

$$A\leq \sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_k^n}\leq A\sqrt[n]{k}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{k}=1$, per il Teorema del confronto il limite richiesto esiste e vale A.

5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n 2k}-n\right)$

Ricordando che $\sum_{k=1}^n 2k = 2\sum_{k=1}^n k = n(n+1)$ (si veda l'Esempio 1.10), si ricava che

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n 2k}-n=\sqrt{n^2+n}-n\,.$$

D'altra parte, razionalizzando e mettendo in evidenza in maniera opportuna, si ottiene

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

In conclusione si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}2k}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

6) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)-n\right)$

Ricordando che $\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=(n+1)^2$ (si veda l'Esempio 1.11) si ricava che la successione considerata è costantemente uguale a 1.

Svolgimento dell'esercizio 3.13.

1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\log^7(n)}{2^n-n}$

Mettendo in evidenza l'infinito principale sia a numeratore che a denominatore si ottiene

$$\frac{n^2+\log^7(n)}{2^n-n}=\frac{n^2\left(1+\frac{\log^7(n)}{n^2}\right)}{2^n\left(1-\frac{n}{2^n}\right)}$$

A questo punto, per la gerarchia degli infiniti, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}=0,\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{\log^7(n)}{n^2}=0,\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

e quindi il limite richiesto vale 0.

2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n!}{1000^n+n^{50000}}$

Mettendo in evidenza l'infinito principale sia a numeratore che a denominatore e usando la gerarchia degli infiniti si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n!}{1000^n+n^{50000}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\left(\frac{3^n}{n!}+1\right)}{1000^n\left(1+\frac{n^{50000}}{1000^n}\right)}=+\infty.$$

3) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=\lim_{n\to+\infty}3\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n}+1}=\lim_{n\to+\infty}3e^{\frac{1}{n}\log\left(\frac{2^n}{3^n}+1\right)}=3\,.$$

4) $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$

Si ha

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n > 2^n$$

quindi, per il Teorema del confronto, il limite richiesto vale $+\infty$.

5) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+3}{n}\right)^n$

Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli si ha

$$\left(\frac{n+\sqrt{n}+3}{n}\right)^n = \left(1+\frac{\sqrt{n}+3}{n}\right)^n \overset{[\text{Bernoulli}]}{\geq} 1+\sqrt{n}+3,$$

quindi, per il Teorema del confronto, il limite richiesto vale $+\infty$.

6) $\lim_{n\to+\infty} 3^n\left(2^{1/n!}-1\right)$

Si ha

$$3^n\left(2^{1/n!}-1\right) = \frac{3^n}{n!}\left(n!\left(2^{1/n!}-1\right)\right).$$

Chiamando $a_n = 2^{1/n!}-1$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \qquad \frac{1}{n!} = \log_2(1+a_n) = \frac{\log(1+a_n)}{\log 2}$$

e quindi, per il Teorema Ponte,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n!\left(2^{1/n!}-1\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\log 2\frac{a_n}{\log(1+a_n)} = \log 2.$$

Utilizzando la gerarchia degli infiniti e il limite appena ottenuto, si può concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n\left(2^{1/n!}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}\left(n!\left(2^{1/n!}-1\right)\right) = 0\cdot\log 2 = 0.$$

Svolgimento dell'esercizio 3.14.

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{x+1}(e-e^{\sin(x)})$

Per il Teorema Ponte, basta esibire due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, entrambe divergenti a $+\infty$ e tali che $f(x_n)$ e $f(y_n)$ abbiano limiti diversi. In questo caso si può scegliere

$$x_n = \frac{\pi}{2}+2n\pi, \qquad y_n = 2n\pi, \qquad n\in\mathbb{N}$$

per avere $f(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(y_n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n\pi)^2 - 10n\pi}{2n\pi + 1}(e-1) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(4\pi^2 - 10\pi/n)}{n(2\pi + 1/n)}(e-1) = +\infty.\end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cos(x)$

Per il Teorema Ponte, basta esibire due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, entrambi divergenti a $+\infty$ e tali che $f(x_n)$ e $f(y_n)$ abbiano limiti diversi. In questo caso si può scegliere

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \qquad y_n = 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}$$

per avere $f(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n\pi} = +\infty$.

Svolgimento dell'esercizio 3.15. Se x è un numero razionale $x = p/q$, si ha che $n!x \in \mathbb{Z}$ per ogni $n > q$ e quindi $\sin(n!\pi x) = 0$ e $f(x) = 1$.

Se invece x è un numero irrazionale, allora $n!x$ non è mai un multiplo intero di π e quindi $\sin(n!\pi x) \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi si può passare al limite in t senza problemi di forme indeterminate e

$$f(x) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(n!\pi x)}{\sin^2(n!\pi x) + t^2} \right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2(n!\pi x)}{\sin^2(n!\pi x)} = 1 - 1 = 0$$

La funzione limite ottenuta

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

prende il nome di *funzione di Dirichlet*.

Svolgimento dell'esercizio 3.16. (a) Sia $1 < \beta < \ell$. Per definizione di limite, esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \beta$ per ogni $n \geq N$. Per ogni $n > N$ si ha che $a_{n+1} \geq \beta\, a_n > a_n$, dunque la successione è definitivamente strettamente crescente; inoltre

$$a_n \geq \beta\, a_{n-1} \geq \beta^2 a_{n-2} \geq \ldots \geq \beta^{n-N} a_N = \beta^n(\beta^{-N} a_N).$$

Poiché $\beta > 1$ e $\beta^{-N} a_N > 0$, la successione $(a_n)_n$ diverge a $+\infty$ per il Teorema 3.28 del confronto.

(b) Sia $\ell < \beta < 1$. Per definizione di limite, esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \beta$ per ogni $n \geq N$. Per ogni $n > N$ si ha che $a_{n+1} \leq \beta\, a_n < a_n$, dunque la successione è definitivamente strettamente decrescente; inoltre

$$0 < a_n \leq \beta\, a_{n-1} \leq \beta^2 a_{n-2} \leq \ldots \leq \beta^{n-N} a_N = \beta^n(\beta^{-N} a_N).$$

Poiché $0 < \beta < 1$ e $\beta^{-N} a_N > 0$, la successione $(a_n)_n$ converge a 0 per il Teorema 3.23 del confronto.

Svolgimento dell'esercizio 3.17. Ricordiamo che I è caratterizzato dalle due proprietà:
(a) $I \leq x$ per ogni $x \in E$;
(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in E$ tale che $x_\varepsilon \leq I + \varepsilon$.
Fissato $\varepsilon = 1$, sia $x_1 \in E$ tale che $x_1 \leq I + 1$. Ora fissiamo $\varepsilon = 1/2$ e consideriamo $y \in E$ tale che $y \leq I + 1/2$. Se $y < x_1$, scegliamo $x_2 = y$, se invece $y \geq x_1$, prendiamo $x_2 = x_1$. Continuando in questa maniera con $\varepsilon = 1/n$, si determina una successione decrescente $x_n \in E$ e tale che

$$I \leq x_n \leq I + \frac{1}{n}.$$

Quindi per il Teorema del confronto, la successione ammette limite e tale limite è esattamente I.

Svolgimento dell'esercizio 3.18. Supponiamo per assurdo che la successione non sia limitata. Quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste almeno un elemento a_{n_k} della successione tale che $|a_{n_k}| > k$. A patto di scegliere gli indici in maniera crescente, cosa sempre possibile selezionando $a_{n_{k+1}}$ solo tra gli elementi $\{a_n \colon n > n_k\}$, abbiamo costruito una sottosuccessione da cui non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente (le successioni convergenti sono sempre limitate).

Svolgimento dell'esercizio 3.19. Osserviamo che

$$a_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}, \qquad a_{2k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

quindi $(a_{2k})_k$ è crescente e converge a e, mentre $(a_{2k+1})_k$ è decrescente e converge a $1/e$. Di conseguenze $\liminf_n a_n = 1/e$ e $\limsup_n a_n = e$.

Svolgimento dell'esercizio 3.20. Osserviamo che la seconda parte dell'esercizio è una diretta conseguenza della prima parte e del Teorema 3.86.

Per quanto riguarda la prima parte, dimostreremo che

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}\,;$$

la disuguaglianza per i $\liminf$ si dimostra in maniera analoga.

Sia $\beta := \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Se $\beta = +\infty$ la disuguaglianza è ovvia; consideriamo quindi il caso $\beta \in [0, +\infty)$. Dimostreremo che, per ogni $\gamma > \beta$, si ha che

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \gamma. \tag{3.18}$$

Per l'arbitrarietà di $\gamma > \beta$, seguirà dunque che $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \beta$, cioè la tesi.

Mostriamo quindi che, fissato $\gamma > \beta$, vale (3.18). Per definizione di β e per le proprietà del $\limsup$ dimostrate nella Proposizione 3.83, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \gamma, \qquad \forall n \geq N.$$

Di conseguenza, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, $x_{N+k} \leq \gamma x_{N+k-1} \leq \cdots \leq \gamma^k x_N$ o, equivalentemente, $x_n \leq \gamma^{n-N} x_N = \gamma^n(\gamma^{-N} x_N)$, per ogni $n \geq N$. Da qui segue che $\sqrt[n]{x_n} \leq \gamma \sqrt[n]{a}$, con $a := \gamma^{-N} x_N$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, concludiamo quindi che vale (3.18).

Svolgimento dell'esercizio 3.21. Posto $x_n = n^n/n!$, abbiamo che

$$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

Il risultato segue dunque da quanto dimostrato nell'Esercizio 3.20.

Svolgimento dell'esercizio 3.22. Poiché $|a_n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, chiaramente la classe limite di $(a_n)_n$ è contenuta nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$. Mostriamo che essa coincide con tale intervallo.

Sia $S := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'immagine della successione; dimostreremo che

$$\forall x_0 \in [-1, 1],\ \forall r > 0,\ (x_0 - r, x_0 + r) \cap (S \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset. \tag{3.19}$$

(Questa proprietà è detta di *densità*: l'insieme S è denso nell'intervallo $[-1, 1]$, cioè ogni punto $x_0 \in [-1, 1]$ è di accumulazione per S.)

Dalla proprietà (3.19) seguirà il risultato. Infatti, se $x_0 \in [-1, 1]$, è possibile costruire una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ convergente a x_0 scegliendo $n_0 = 0$ e, per induzione, scegliendo per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ un indice $n_k > n_{k-1}$ tale che $|a_{n_k} - x_0| < 1/k$.

Mostriamo dunque che vale (3.19). Per avere una migliore intuizione geometrica, può essere conveniente considerare i punti $P_n = (\cos n, \sin n)$, $n \in \mathbb{N}$, sulla circonferenza goniometrica; abbiamo che $P_0 = (1, 0)$ e P_{n+1} si ottiene da P_n attraverso una rotazione di un radiante in senso antiorario. Poiché π è irrazionale, è facile verificare che $\sin i \neq \sin j$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, quindi $P_i \neq P_j$ per ogni $i \neq j$.

Fissato $r > 0$, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $N > 2\pi/r$. Suddividiamo la circonferenza goniometrica in N archi di uguale lunghezza, partendo dall'origine. Consideriamo i punti $P_1, \ldots, P_{N+1}$. Per il *principio della piccionaia*, uno di questi archi conterrà almeno due di questi punti; di conseguenza, esistono due indici i, j con $1 \leq i < j \leq N+1$, tali che la distanza angolare dei punti P_i e P_j è inferiore a $2\pi/N$ e dunque inferiore a r. Posto $d = j - i \in \mathbb{N}^+$, i punti P_{dk}, $k \in \mathbb{N}$, sono tutti distinti e ciascuno ha una distanza angolare dal successivo inferiore a r. Quindi almeno due di essi, diciamo P_{di} e P_{dj}, con $i \neq j$, cadono nell'arco di ampiezza angolare pari a $2r$, centrato in $Q = (\cos x_0, \sin x_0)$; in particolare almeno uno di essi, diciamo P_{di}, è distinto da Q e ha una distanza angolare da Q inferiore a r, per cui $|\sin(di) - \sin(x_0)| < r$.

4.8 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 4.1. I grafici delle due funzioni considerate sono tracciati in Figura 4.9.

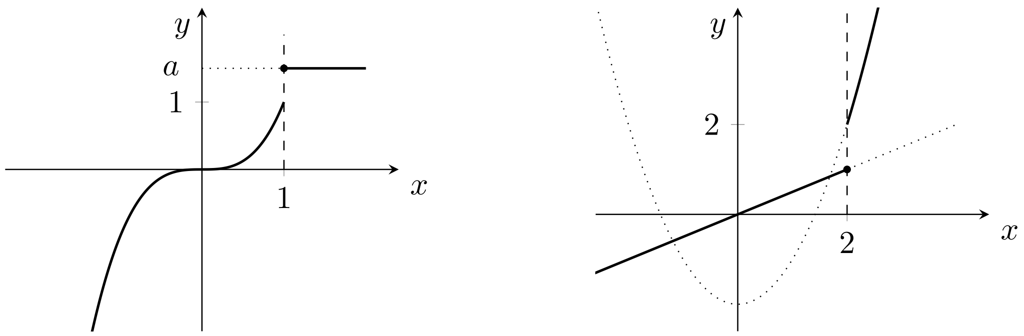


Figura 4.9: Le funzioni dell'Esercizio 4.1

1) La funzione f è sicuramente continua in tutti i punti $x \neq 1$. In $x = 1$ si ha $f(1) = 1$ e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = a.$$

Di conseguenza, l'unico valore di a per il quale il limite per $x \to 1$ esiste e vale $f(1)$ (e quindi f è continua in $x = 1$) è $a = 1$.

2) La funzione f è continua in tutti i punti $x \neq 2$, mentre per $x = 2$ si ha $f(2) = 2a$ e

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2a, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2,$$

dunque f è continua se e solo se $a = 1$.

Svolgimento dell'esercizio 4.2. La verifica della continuità della prima funzione è immediata; essa infatti è chiaramente continua per ogni $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ si ha $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0\ .$$

Per quanto riguarda la seconda funzione, essa è chiaramente continua per $x \neq 0$, $x > -1$; per $x = 0$ si ha $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\log|x| + 3}{2\log|x| + 7x - 12} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\log|x|}{2\log|x|} = \frac{1}{2}\ ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x^2 - 1}{x^2} = 0\ .$$

Concludiamo dunque che la seconda funzione non è continua in $x = 0$, in quanto in tale punto presenta una discontinuità di tipo salto.

Svolgimento dell'esercizio 4.3.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + a & x > 0 \\ b & x = 0 \\ c + \dfrac{\sin(x)}{x} & x < 0 \end{cases}$

La funzione è sicuramente continua in ogni $x \neq 0$ essendo ottenuta come somma, prodotto, composizione e rapporto (a denominatore non nullo) di funzioni continue. Per quanto riguarda $x = 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 3x + a) = a, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(c + \frac{\sin(x)}{x}\right) = c+1,$$

quindi la funzione è anche continua in $x_0 = 0$ se e solo se $a = b = c + 1$.

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1} + b & x > 1 \\ c & x = 1 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} \sin\left(\dfrac{(x-1)^3}{x^2 - 3x + 2}\right) & x < 1 \end{cases}$

La funzione è sicuramente continua in ogni $x \neq 1$ essendo ottenuta come somma, prodotto, composizione e rapporto (a denominatore non nullo) di funzioni continue. Per quanto riguarda $x = 1$, si ha che

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{a}{x-1} + b \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a \neq 0 \\ = b & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

quindi la funzione sicuramente non è continua se $a \neq 0$. D'altra parte

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} \sin\left(\frac{(x-1)^3}{x^2 - 3x + 2}\right) \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)^2} \sin\left(\frac{(x-1)^2}{x-2}\right) \frac{1}{x-2} = -1. \end{aligned}$$

In conclusione, la funzione è continua anche in $x_0 = 1$ se e solo se $a = 0$ $b = c = -1$.

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2x} & \text{se } x > 0, \\ c & \text{se } x = 0, \\ a + b \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$

La funzione è sicuramente continua in ogni $x \neq 0$ essendo ottenuta come somma, prodotto, composizione e rapporto (a denominatore non nullo) di funzioni continue. Per quanto riguarda $x = 0$, si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a + b \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } b \neq 0, \\ = a & \text{se } b = 0. \end{cases}$$

In conclusione, la funzione è continua anche in $x_0 = 0$ se e solo se $a = c = \frac{1}{2}$ e $b = 0$.

Svolgimento dell'esercizio 4.4. Se $0 \neq x_0 = p/q \in \mathbb{Q}$, la successione $x_n = x_0 + \sqrt{2}/n$ converge ad x_0, ma $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ per ogni $n \geq 1$, per cui

$$f(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0 = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

quindi la funzione è discontinua su tutti i razionali dell'intervallo $[0, 1]$ (se $x_0 = 1$, si prenda $x_n = 1 - \sqrt{2}/n$).

Se $x_0 = 0$ oppure $x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, si ha $f(x_0) = 0$, quindi per dimostrare la continuità della funzione dobbiamo far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato esiste un valore $\delta > 0$ tale che

$$f(x) < \varepsilon \qquad \forall\, x \in [0, 1] \text{ tale che } |x - x_0| < \delta.$$

Per ogni $x \in [0, 1]$ irrazionale si ha $f(x) = 0 < \varepsilon$, quindi ovviamente l'ampiezza δ dell'intorno di x_0 da considerare dipenderà solo dai valori di f sui punti razionali vicini a x_0. Su tali punti si ha $f(p/q) = 1/q$, quindi la richiesta è di avere $1/q < \varepsilon$. Questo succederà a patto di scegliere δ in modo tale che l'intorno di centro x_0 e raggio δ non contenga punti dell'insieme

$$Q_\varepsilon = \{p/q \in (0, 1) \colon\ p, q \in \mathbb{N}^+,\ \text{mcd}\{p, q\} = 1 \text{ e } q \leq 1/\varepsilon\}.$$

D'altra parte, Q_ε può contenere al più un numero finito di elementi. Infatti i numeri naturali $q \leq 1/\varepsilon$ sono sicuramente un numero finito e, per ciascuno di questi valori di q ci sono al più un numero finito di $p \in \mathbb{N}$ coprimi con q. Quindi, se chiamiamo $x_1, x_2, \ldots, x_N$ i punti di Q_ε e prendiamo $0 < \delta < \min_{i=1,\ldots,N} |x_i - x_0|$ otteniamo $Q_\varepsilon \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \emptyset$, ossia

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x = \frac{p}{q},\ \text{mcd}\{p, q\} = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

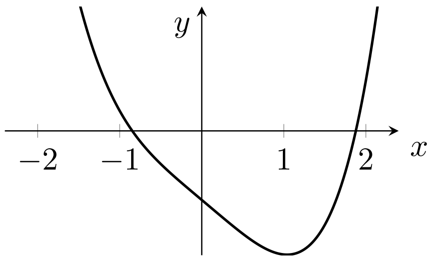


Figura 4.10: Grafico della funzione $f(x) = x^4 - 5x + \sin x - 4$

Svolgimento dell'esercizio 4.5. Dimostriamo che la funzione $f(x) = x^4 - 5x + \sin x - 4$ ammette almeno uno zero negativo e uno positivo. L'andamento della funzione f nell'intervallo $[-1, 2]$ è mostrato nella Figura 4.10.
Cominciamo a osservare che f è una funzione continua e che $f(0) = -4$. Inoltre $\sin x$ è sempre compreso fra -1 e 1, quindi

$$f(x) \geq x^4 - 5x - 5 \to +\infty, \qquad x \to \pm\infty \ .$$

Per il Teorema 3.23 del confronto avremo anche che $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$. Di conseguenza $f(x)$ sarà positiva quando $|x|$ è abbastanza grande. Ad esempio si ha che

$$f(2) = 2 + \sin 2 \geq 1 > 0, \qquad f(-1) = 2 + \sin(-1) \geq 1 > 0 \,.$$

Di conseguenza, applicando il Teorema 4.19 degli zeri nei due intervalli $[-1, 0]$ e $[0, 2]$ otteniamo che esistono almeno due zeri di f, uno fra -1 e 0 (quindi negativo) e uno fra 0 e 2 (quindi positivo).

Svolgimento dell'esercizio 4.6. Basta osservare che g è una funzione continua nell'intervallo $[a, (a + b)/2]$, in quanto differenza di funzioni continue, e che

$$g(a) = f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - f(a) = f\left(\frac{b+a}{2}\right) - f(a)$$

e

$$\begin{aligned} g\left(\frac{b+a}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) - f\left(\frac{b+a}{2}\right) = f(b) - f\left(\frac{b+a}{2}\right) \\ &= f(a) - f\left(\frac{b+a}{2}\right) = -g(a). \end{aligned}$$

Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema degli zeri, da cui segue la proprietà richiesta.

Svolgimento dell'esercizio 4.7. Per sfruttare il risultato dell'Esercizio 4.6 si deve introdurre un'opportuna funzione $f(t)$ che ad ogni tempo t (misurato in ore), tenga conto della la distanza $d(t)$ percorsa al tempo t e tale che $f(0) = f(1)$. Ad esempio va bene

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = d(t) - 4t$$

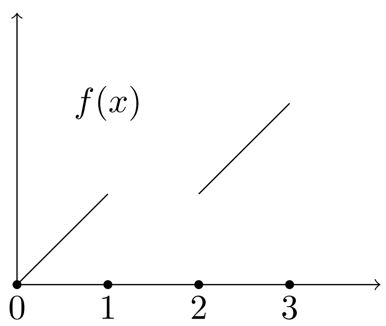
(è del tutto naturale supporre che la distanza $d(t)$ sia continua). Applicando il risultato dell'esercizio precedente, si conclude che esiste $c \in [0, 1/2]$ tale che $f(c + 1/2) = f(c)$, ossia tale che $d(c + 1/2) = d(c) + 2$. In altri termini, nell'intervallo di tempo $[c, c+1/2]$ la distanza percorsa è esattamente di 2 km.

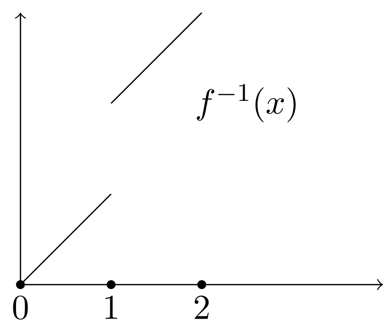
Svolgimento dell'esercizio 4.8.
(a) VERA: infatti la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ soddisfa le ipotesi del Teorema degli zeri, da cui segue la conclusione.
(b) FALSA: ad esempio $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x + 2$ nell'intervallo $[0, 1]$ soddisfano le ipotesi, ma sono diverse su tutto l'intervallo.
(c) VERA: basta applicare il Teorema degli zeri alla funzione $h(x) = f(x)g(x)$.
(d) VERA: basta applicare il Teorema degli zeri alla funzione $h(x) = f(x)g(x) - (f(x) + g(x))$.

Svolgimento dell'esercizio 4.9. La funzione è strettamente crescente nel suo dominio $D = [0, 1) \cup [2, 3]$ e quindi è invertibile. D'altra parte, la sua funzione inversa è data da

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ x+1 & x \in [1,2] \end{cases}$$

ed ha una discontinuità di salto per $x = 1$. Questo esempio non contraddice la proprietà generale di continuità dell'inversa: per garantire la continuità dell'inversa, la funzione deve essere continua in un intervallo, mentre in questo caso stiamo considerando una funzione continua e invertibile su un dominio costituito dall'unione di due intervalli disgiunti.





Svolgimento dell'esercizio 4.10.

1) Fissato $\varepsilon > 0$, prendendo $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$, se $|x-y| < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha < C\delta^\alpha = \varepsilon$$

cioè la funzione è continua in x (notare che la scelta di δ non dipende dal punto x considerato, quindi f è uniformemente continua).
2) Dobbiamo dimostrare che esiste $C > 0$ tale che

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C\sqrt{x-y}, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Possiamo limitarci a considerare il caso $x > y \geq 0$ per evidenti ragioni di simmetria, per cui la richiesta diventa

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq C\sqrt{x-y} \iff x + y - 2\sqrt{xy} \leq C^2(x-y)$$

soddisfatta per $C = 1$ (dal momento che $x > y$ e quindi $\sqrt{xy} > y$).
3) Siano $x \neq y \in [a, b]$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Definiamo, per $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ i punti $x_k = x + \frac{k}{n}(y-x)$ in modo tale che $x_0 = x$, $x_n = y$ e ogni punto disti dal successivo esattamente $1/n$. Con queste scelte avremo che

$$\begin{aligned}
0 \leq |f(y) - f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\
&\leq C \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}|^\alpha = \frac{C|y-x|^\alpha}{n^{\alpha-1}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio si è scritta una somma telescopica, nel secondo si è usata la disuguaglianza triangolare e, infine, nel calcolo del limite si è utilizzata l'ipotesi che che α sia strettamente maggiore di 1. Questo ci fa concludere che $|f(y) - f(x)| = 0$, cioè la funzione è costante in $[a, b]$.

Svolgimento dell'esercizio 4.11. Se $f(-1) = -1$ oppure $f(1) = 1$, allora abbiamo già determinato almeno un punto fisso. Se invece $f(-1) > -1$ e $f(1) < 1$ (ricordiamo che l'immagine della funzione è per ipotesi contenuta nell'intervallo $[-1, 1]$), la funzione $g(x) = f(x) - x$ soddisfa le ipotesi del Teorema degli zeri in $[-1, 1]$, il che garantisce l'esistenza di un punto $x_0 \in (-1, 1)$ tale che $g(x_0) = 0$. Tale valore x_0 è un punto fisso per la funzione f.

Se in più la funzione è Lipschitziana con costante $C \in (0, 1)$, se x_0 e x_1 sono due punti fissi per la funzione si ha

$$|x_0 - x_1| = |f(x_0) - f(x_1)| \leq C|x_0 - x_1|$$

cioè $(1 - C)|x_0 - x_1| \leq 0$. Essendo $1 - C > 0$, questo implica $|x_0 - x_1| = 0$ e quindi $x_0 = x_1$.

Svolgimento dell'esercizio 4.12. Dal momento che la successione $(x_n)_n$ è limitata, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a un opportuno $x_0 \in \mathbb{R}$. Essendo f una funzione continua, la sottosuccessione $(f(x_{n_k}))_k$, convergerà dunque a $f(x_0)$.

Svolgimento dell'esercizio 4.13.

1) Osserviamo che, per $x \to 0^+$, le due funzioni $f(x) = 1/\sqrt{x}$ e $g(x) = 1/\sin x$ divergono entrambe a $+\infty$, quindi il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - (+\infty)$. Confrontiamo i due infiniti: poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = 0,$$

deduciamo che $g(x)$ è un infinito di ordine superiore a $f(x)$, o equivalentemente che $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$. Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{\sin x} \right) = -\infty \; .$$

2) Abbiamo che $|\sin x| \leq 1$ per ogni x, mentre $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$; di conseguenza, utilizzando il Teorema 3.34 si ha che $\lim_{x\to-\infty} e^x \sin x = 0$.

3) La funzione $f(x) = e^x \cos^2 x$ è non negativa e si annulla nei punti $x_k = \pi/2 + k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo inoltre che, nei punti $y_k = k\pi$, si ha invece $\cos^2 y_k = 1$, quindi $f(y_k) = e^{y_k}$. Riassumendo, se prendiamo k naturale positivo si ha che

$$f(x_k) = 0, \qquad f(y_k) = e^{y_k} \geq 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Osserviamo che, preso ad arbitrio $M > 0$, per k abbastanza grande si ha che $x_k > M$, $y_k > M$ (nel linguaggio delle successioni questo significa $\lim_k x_k = +\infty$, $\lim_k y_k = +\infty$). Ragionando come nell'Esempio 3.17 possiamo quindi concludere che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$. (Utilizzando le successioni, abbiamo trovato due successioni $(x_k)_k$ e $(y_k)_k$, entrambe divergenti a $+\infty$, tali che i due limiti $\lim_k f(x_k) = 0$ e $\lim_k f(y_k) = +\infty$ sono diversi. Per il Teorema 3.62 sulla caratterizzazione sequenziale dei limiti si può quindi concludere che il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ non esiste.)

4) Abbiamo che $|\sin(\log x^7 + \cos x)| \leq 1$ per ogni $x > 0$, mentre $1/\log x \to 0$ per $x \to +\infty$. Di conseguenza, utilizzando il Teorema 3.34 si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x} \cdot \sin(\log x^7 + \cos x) = 0\,.$$

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin 2^x}{2^x} \overset{[y=2^x]}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = 1.$

6) $\lim_{x\to\pi} e^{-x}\cos x = e^{-\pi}\cos\pi = -e^{-\pi}.$

Svolgimento dell'esercizio 4.14. Sia $c \in I_1 \cap I_2$ e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Poiché, per ogni $i = 1, 2$, f è uniformemente continua su I_i, esiste $\delta_i > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x, y \in I_i,\ |x - y| < \delta_i.$$

Sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e siano $x, y \in I$, $|x - y| < \delta$. Se $x, y \in I_1$ oppure $x, y \in I_2$, allora per quanto appena detto si avrà $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Viceversa, se i due punti non appartengono al medesimo intervallo ma, ad esempio $x \in I_1$ mentre $y \in I_2$, allora dal momento che $x, c \in I_1$ e $y, c \in I_2$, con $|x - c| < |x - y| < \delta$ e $|y - c| < |y - x| < \delta$, avremo che

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(c)| + |f(y) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,;$$

di conseguenza f è uniformemente continua in I.

Svolgimento dell'esercizio 4.15.

1) Poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$, la funzione non è linearmente limitata in $[0, +\infty)$, cioè non soddisfa la limitazione (4.10) del Teorema 4.43 della farfalla. Concludiamo dunque che f non è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

In alternativa, si può procedere come mostrato nell'Osservazione 4.38 e nell'Esempio 4.40.

2) Dimostriamo che f è uniformemente continua in $(0, +\infty)$. Per l'Esercizio 4.14, sarà sufficiente dimostrare che è f uniformemente continua in $(0, 1]$ e in $[1, +\infty)$. Poiché $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (si veda l'Esempio 3.26) possiamo estendere con continuità la funzione sulla semiretta chiusa $[0, +\infty)$. In particolare, per il Teorema 4.41 di Heine–Cantor possiamo concludere che questa estensione è uniformemente continua in $[0, 1]$ e dunque che f è uniformemente continua in $(0, 1]$.

Vediamo ora cosa succede nella semiretta chiusa $[1, +\infty)$. Poiché la funzione seno è limitata, per il Teorema 3.34 abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

Di conseguenza, per il Teorema 4.42 dell'asintoto possiamo concludere che f è uniformemente continua anche in $[1, +\infty)$.

3) La funzione f non è uniformemente continua in tutto $\mathbb{R}$. Per dimostrarlo possiamo ragionare come nell'Osservazione 4.38, utilizzando le successioni

$$x_n = \sqrt{2n\pi}\,, \qquad y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} |x_n - y_n| &= \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi} = \sqrt{2n\pi}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} - 1\right) \\ &= \frac{\sqrt{2n\pi}}{4n} \cdot \frac{\sqrt{1 + (1/4n)} - 1}{(1/4n)}\,. \end{aligned}$$

Poiché, per $n \to +\infty$, la seconda frazione tende a $1/2$ (si veda il terzo limite notevole in (4.9), con $\alpha = 1/2$), mentre la prima tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

D'altra parte $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, dunque f non è uniformemente continua.

Svolgimento dell'esercizio 4.16.

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{n^3}$

Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{n^4}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^4}} = 1,$$

dove nel calcolo dell'ultimo limite abbiamo sfruttato il fatto che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{n^4} = e$$

(che si può ad esempio dedurre dal limite (4.6) e dal Teorema Ponte), per cui il limite dell'esponente è 0 e, per la continuità della funzione esponenziale, il limite è $e^0 = 1$.

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)^{n^2}$

Abbiamo che

$$\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)^{n^2} = e^{n^2\log\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}.$$

Inoltre

$$n^2 \log\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right) = n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n \log\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^n}.$$

Per la gerarchia degli infiniti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

mentre con un cambiamento di variabili nel limite si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 1.$$

In conclusione si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n \log\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^n}} = e^0 = 1$$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n$

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}\right]^{\frac{n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n}{n!}\log\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}} = e^0 = 1\,.$$

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\log\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$

Per il Teorema Ponte e il primo limite in (4.9), dal momento che $a_n = \frac{1}{n^2}$ converge a 0, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\log\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Svolgimento dell'esercizio 4.17.

1) Scrivendo $x-1 = (x+1)-2$ al numeratore dell'argomento del logaritmo si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{2}{x+1}\right)\frac{\log\left(1-\frac{2}{x+1}\right)}{\left(-\frac{2}{x+1}\right)}\,.\end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{2}{x+1}\right) = -2$, mentre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1-\frac{2}{x+1}\right)}{\left(-\frac{2}{x+1}\right)} \overset{[y=-\frac{2}{x+1}]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} \overset{(4.9)}{=} 1 \,.$$

Applicando il Teorema 3.30 sul prodotto di limiti finiti concludiamo quindi che il limite proposto vale -2.

2) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \overset{[y=x-4]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{3-\sqrt{9+y}}{1-\sqrt{1-y}} = \lim_{y\to 0} 3\,\frac{1-\sqrt{1+y/9}}{1-\sqrt{1-y}} = (\star)$
Come si può osservare, dopo questi passaggi algebrici i radicandi sono nella forma "1+ qualcosa che tende a zero". Per riuscire a sfruttare il terzo limite notevole in (4.9) sono necessari alcuni ulteriori passaggi algebrici:

$$(\star) = \lim_{y\to 0} 3 \cdot \frac{\sqrt{1+y/9}-1}{y/9} \cdot \frac{(-y)}{\sqrt{1+(-y)}-1} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) .$$

In questo modo, usando il terzo limite in (4.9), la prima frazione tende a $1/2$, mentre la seconda a 2 (il reciproco di $1/2$). Per il Teorema 3.30 sul prodotto di limiti finiti, concludiamo quindi che il limite in questione vale $-1/3$.
In alternativa, il limite poteva essere calcolato moltiplicando e dividendo sia per $1+\sqrt{5-x}$ che per $3+\sqrt{5+x}$:

$$\begin{aligned} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} &= \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} \cdot \frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}} \\ &= \frac{9-(5+x)}{1-(5-x)} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \,. \end{aligned}$$

In questo modo si elimina la forma indeterminata ed è facile verificare che il limite per $x\to 4$ vale $-1/3$.

3) Per ricondurci a limiti notevoli noti possiamo effettuare alcuni passaggi algebrici:

$$\frac{e^{\sqrt{1+x}}-e}{x} = e\,\frac{e^{\sqrt{1+x}-1}-1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \,.$$

Il limite della prima frazione può essere calcolato col cambiamento di variabile $y=\sqrt{1+x}-1$; poiché $y\to 0$ quando $x\to 0$, questo primo limite esiste e vale 1. Il limite della seconda frazione è invece il limite notevole della radice quadrata, che vale $1/2$. Di conseguenza, il limite in questione vale $e/2$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+(e^x-1)}-1}{e^x-1} \cdot \frac{e^x-1}{x}$. Il limite della prima frazione vale $1/2$, in quanto si riconduce a un limite notevole col cambiamento di variabile $y = e^x - 1$ ($y \to 0$ per $x \to 0$). Il limite della seconda frazione è un limite notevole che vale 1. In conclusione, il limite di partenza esiste finito e vale 1/2.

Svolgimento dell'esercizio 4.18.
(i) Per $n = 0$ la disuguaglianza è verificata. Se supponiamo che $a_n \leq 2$, allora

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2,$$

quindi anche il passo induttivo è dimostrato e, per il Principio di Induzione, la stima su a_n vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Dobbiamo mostrare che $a_{n+1} \geq a_n$ o, equivalentemente, che $\sqrt{2 + a_n} \geq a_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altra parte si ha

$$\sqrt{2 + a_n} \geq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + a_n \geq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n^2 - a_n - 2 \leq 0.$$

Dal momento che la funzione $f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ è negativa per $x \in (-1, 2)$ e, grazie ad (i), $a_n \in [0, 2]$, si conclude che l'ultima disequazione è sempre verificata da a_n e, in definitiva, che la successione è monotona crescente.
(iii) La successione è monotona crescente e limitata superiormente, quindi ha sicuramente limite finito ℓ. Tale valore, per via della legge di ricorrenza e della continuità della funzione radice, dovrà soddisfare

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \ell}$$

da cui si ottiene che deve essere $\ell^2 = 2 + \ell$. Per il Teorema della permanenza del segno ℓ è positivo, per cui sarà $\ell = 2$.

Svolgimento dell'esercizio 4.19.

1) Raccogliendo e^{2x} sotto la radice e facendo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{e^{2x} + e^x} - e^x) &= \lim_{x \to +\infty} e^x (\sqrt{1 + e^{-x}} - 1) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + e^{-x}} - 1}{e^{-x}} \overset{[y = e^{-x}]}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{1+y} - 1}{y} = \frac{1}{2} \,.\end{aligned}$$

In alternativa si può moltiplicare e dividere per $\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x$ ottenendo:

$$\begin{aligned}\sqrt{e^{2x} + e^x} - e^x &= \left(\sqrt{e^{2x} + e^x} - e^x\right) \cdot \frac{\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x} \\ &= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x}} + 1} \,.\end{aligned}$$

In questo modo la forma di indeterminazione è stata eliminata ed è facile verificare che l'ultima frazione tende a $1/2$ quando $x \to +\infty$.

2) $\lim_{x\to+\infty} x \tan \frac{1}{x} \overset{[y=1/x]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = 1$.

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{(1+x)\cos x} = 0$.

4) Utilizziamo il metodo descritto nell'Approfondimento 3.42, raccogliendo un fattore $(x-1)$ sia a numeratore che a denominatore:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^7 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-2)} = \frac{1}{2} .$$

5) Il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$. Facendo il cambiamento di variabile $y = x-1$ e ricordando che $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ si ha che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\log x} \overset{[y=x-1]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi y + \pi)}{\log(1+y)} = \lim_{y\to 0} (-\pi) \cdot \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \cdot \frac{y}{\log(1+y)} = -\pi .$$

6) $\lim_{x\to 7} \frac{\sin 2\pi x}{(x-7)} \overset{[y=x-7]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2\pi y + 14\pi)}{y} = \lim_{y\to 0} 2\pi \cdot \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi y} = 2\pi$.

7) Questo limite può essere calcolato anche senza utilizzare i limiti notevoli. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ si ottiene infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1 .\end{aligned}$$

8) Può essere conveniente fare il cambiamento di variabile $y = x - \pi/3$; tenendo poi conto dell'identità $\cos(y+\pi/3) = (\cos y - \sqrt{3}\sin y)/2$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi - 3x} &\overset{[y=x-\pi/3]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1-2\cos(y+\pi/3)}{\pi - 3(y+\pi/3)} \\ &= \lim_{y\to 0} \left(\frac{1-\cos y}{-3y} + \frac{\sqrt{3}\sin y}{-3y} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} .\end{aligned}$$

9) $\lim_{x\to 0} xe^x = 0 \cdot 1 = 0$.

10) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{\log^2 x} \overset{[y=x-1]}{=} \lim_{y\to 0^+} \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{y^2}{\log^2(1+y)} = -\infty$.

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\sqrt{1+1/x^2}-1)$
$\overset{[y=1/x]}{=} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+y^2}-1}{y^2} = \dfrac{1}{2}\,.$

12) Cominciamo a riscrivere il limite come

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\log x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1+2\sqrt{x}\,\log x}{2\sqrt{x}}\,.$$

Poiché $\sqrt{x}\,\log x \to 0$ per $x\to 0$ (si veda l'Esercizio 7.7) il numeratore tende a 1, mentre il denominatore tende a 0 (positivo); possiamo quindi concludere che il limite in questione vale $+\infty$.

Svolgimento dell'esercizio 4.20.

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)\cos(1/x)}{e^x-1} & x<0 \\ \log(1+x) & x\geq 0 \end{cases}$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(x)\cos(1/x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(x)}{x^2}(x\cos(1/x))\frac{x}{e^x-1}$$
$$= 1\cdot 0\cdot 1 = 0\,..$$

(abbiamo usato limiti notevoli e il fatto che $\lim_{x\to 0^-} x\cos(1/x)=0$ trattandosi del prodotto di una funzione infinitesima per una limitata). D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\log(1+x) = 0\,.$$

Quindi limite destro e limite sinistro in $x_0=0$ sono uguali e coincidono anche con $f(0)=0$, per cui la funzione è continua in $x_0=0$.

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\sin^2(x/2)}{\log(1+x^2)+3x^2} & x<0 \\ 1/4+\sqrt{x} & x\geq 0 \end{cases}$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{4\sin^2(x/2)}{\log(1+x^2)+3x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\,\frac{x^2}{x^2\left(\frac{\log(1+x^2)}{x^2}+3\right)} = \frac{1}{4}$$

(abbiamo usato solo limiti notevoli). D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1/4+\sqrt{x} = \frac{1}{4}\,.$$

Quindi limite destro e limite sinistro in $x_0 = 0$ sono uguali e coincidono anche con $f(0) = 1/4$, per cui la funzione è continua in $x_0 = 0$.

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan^3(x)\sin(1/x)}{1-\cos(x)} & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \cos(x) & x \geq 0 \end{cases}$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\tan^3(x)\sin(1/x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\tan^3(x)}{x^3}\, x\sin(1/x)\, \frac{x^2}{1-\cos(x)} = 0$$

(abbiamo usato limiti notevoli e il fatto che $\lim_{x\to 0^-} x\sin(1/x) = 0$ trattandosi del prodotto di una funzione infinitesima per una limitata). D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1.$$

Quindi limite destro e limite sinistro in $x_0 = 0$ sono diversi, per cui la funzione non è continua in $x_0 = 0$ (ha una discontinuità di tipo salto).

4) $f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x})^{1/x} & 0 < x < \frac{\pi^2}{4} \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Si ha che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(\sqrt{x})^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log(\cos(\sqrt{x}))} = e^{-1/2}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\log(\cos(\sqrt{x})) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}\, \frac{\log(1+\cos(\sqrt{x})-1)}{\cos(\sqrt{x})-1} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Quindi limite destro e limite sinistro in $x_0 = 0$ sono diversi, per cui la funzione non è continua in $x_0 = 0$ (ha una discontinuità di tipo salto).

Svolgimento dell'esercizio 4.21.

Tutti gli svolgimenti si baseranno sul determinare le opportune manipolazioni algebriche per ridurre il problema all'uso di limiti noti.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log^2(x+1) - \log^2(\sin(x)+1)}{x(x-\sin(x))}$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\frac{\log^2(x+1)-\log^2(\sin(x)+1)}{x(x-\sin(x))}\\
&=\frac{(\log(x+1)-\log(\sin(x)+1))(\log(x+1)+\log(\sin(x)+1))}{x(x-\sin(x))}\\
&=\log\left(\frac{x+1}{\sin(x)+1}\right)\frac{1}{x(x-\sin(x))}(\log(x+1)+\log(\sin(x)+1))\\
&=\frac{\log\left(1+\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}\right)}{\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}}\frac{\log(x+1)+\log(\sin(x)+1)}{x(\sin x+1)}\\
&=\frac{\log\left(1+\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}\right)}{\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}}\frac{1}{\sin x+1}\left[\frac{\log(x+1)}{x}+\frac{\log(\sin(x)+1)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\right]
\end{aligned}$$

Dal momento che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}=0 \quad \overset{[cambio\ variabile]}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}\right)}{\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}}=1$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x+1}=1\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=1\,,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\sin(x)+1)}{\sin x}=1\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,,$$

si conclude che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}\right)}{\frac{x-\sin x}{\sin(x)+1}}\frac{1}{\sin x+1}\left[\frac{\log(x+1)}{x}+\frac{\log(\sin(x)+1)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\right]=2\,.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2(x)+1}{1-x}\right)^{\cot(x)}$

Si ha

$$\frac{\sin^2(x)+1}{1-x}=1+\frac{\sin^2(x)+x}{1-x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)+x}{1-x}=0$$

e, cambiando variabile nel limite,

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin^2(x)+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{\sin^2(x)+x}}=e.$$

D'altra parte

$$\cot(x)\frac{\sin^2(x)+x}{1-x} = \frac{\cos x}{1-x}\frac{\sin^2(x)+x}{\sin x} = \frac{\cos x}{1-x}\left(\sin x + \frac{x}{\sin x}\right),$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}\cot(x)\frac{\sin^2(x)+x}{1-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1-x}\left(\sin x + \frac{x}{\sin x}\right) = 1(0+1) = 1.$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(x)+1}{1-x}\right)^{\cot(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin^2(x)+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{\sin^2(x)+x}}\right]^{\cot(x)\frac{\sin^2(x)+x}{1-x}} = e.$$

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\arctan(1-e^x))^2\log(x\sin(x)+1)}{\sqrt[4]{3x^4+1}-1}$

Si ha

$$\begin{aligned}&\frac{(\arctan(1-e^x))^2\log(x\sin(x)+1)}{\sqrt[4]{3x^4+1}-1}\\ &= \frac{(\arctan(1-e^x))^2}{(1-e^x)^2}\frac{(1-e^x)^2}{x^2}\frac{x^2}{\sqrt[4]{3x^4+1}-1}\frac{\log(x\sin(x)+1)}{x\sin x}x\sin x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(\arctan(1-e^x))^2}{(1-e^x)^2} &\overset{[y=1-e^x]}{=} \lim_{y\to 0}\frac{(\arctan y)^2}{y^2}\\ &\overset{[z=\arctan y]}{=} \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{(\tan z)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{(\sin z)^2}(\cos z)^2 = 1,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{x}\right)^2 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x\sin(x)+1)}{x\sin x} \overset{[y=x\sin(x)]}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\log(y+1)}{y} = 1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{\sqrt[4]{3x^4+1}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{\sqrt{3x^4+1}-1}(\sqrt[4]{3x^4+1}+1)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{3x^4}(\sqrt[4]{3x^4+1}+1)(\sqrt{3x^4+1}+1) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

In conclusione, il limite vale 4/3.

5.4 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 5.1. Dobbiamo vedere se esiste finito il limite del rapporto incrementale (5.2) in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(L'ultimo limite è stato calcolato nell'Esempio 3.35.) Concludiamo dunque che la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$ e che $f'(0) = 0$.
Consideriamo ora il limite del rapporto incrementale per la funzione g nel punto $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} \overset{[y=1/x^2]}{=} \lim_{y\to +\infty} \sqrt{y}\, e^{-y} = 0.$$

(L'ultimo limite è stato calcolato utilizzando (7.4).) Anche in questo caso concludiamo che la funzione g è derivabile in $x_0 = 0$ e $g'(0) = 0$.

Soluzione dell'esercizio 5.2.

1) $f(x) = \pi^5$, $\qquad f'(x) = 0$

2) $f(x) = e^{-3x^2}$, $\qquad f'(x) = -6x\, e^{-3x^2}$

3) $f(x) = \sqrt{\cos x + 2}$, $\qquad f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{2 + \cos x}}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\log 2 + x^2}$, $\qquad f'(x) = \dfrac{-2\,x}{(x^2 + \log 2)^2}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x)^2}$, $\qquad f'(x) = \dfrac{2\,(2\,x + 1)}{3\sqrt[3]{x^2 + x}}$

6) $f(x) = (3x^2 - 2)(x^5 + 4x^3 - 3)$,
$f'(x) = \left(3\,x^2 - 2\right)\left(5\,x^4 + 12\,x^2\right) + 6\,x\left(x^5 + 4\,x^3 - 3\right)$

7) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + 1}$, $\qquad f'(x) = \dfrac{2 + 6\,x - 2\,x^2}{(x^2 + 1)^2}$

8) $f(x) = [\sin(4x - 1)^3]^2$, $\qquad f'(x) = 24(4x - 1)^2 \cos(4\,x - 1)^3 \sin(4\,x - 1)^3$

9) $f(x) = x^3 \cos(1/x^2)$, $\qquad f'(x) = 3\,x^2 \cos(1/x^2) + 2\sin(1/x^2)$

10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{3x} + x^2}$, $\qquad f'(x) = \dfrac{(e^{3\,x} + x^2)\cos x - (3\,e^{3\,x} + 2\,x)\sin x}{(e^{3\,x} + x^2)^2}$

11) $f(x) = \sin(\log(\cos x))$, $\qquad f'(x) = -\cos(\log(\cos x))\tan x$

12) $f(x) = \dfrac{\tan^2 x}{\sin x}\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

13) $f(x) = e^x\ \sin x\ ,\qquad f'(x) = e^x\ \cos x + e^x\ \sin x$

14) $f(x) = \arctan(e^{\sin(x^2)})\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{2\, e^{\sin(x^2)}\ x\ \cos(x^2)}{1+e^{2\ \sin(x^2)}}$

15) $f(x) = \left(7\,x^2 + x^5\right)\log(2+e^x)$

$$f'(x) = \left(14\,x + 5\,x^4\right)\ \log(2+e^x) + \frac{e^x\ (7\,x^2+x^5)}{2+e^x}$$

16) $f(x) = \left(1+x^2\right)^{\sin x}$

$$f'(x) = \left(1+x^2\right)^{\sin x}\ \left(\cos x\ \log(1+x^2) + \frac{2\,x\ \sin x}{1+x^2}\right)$$

17) $f(x) = e^{\arctan(x^2+3x-2)}\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{(3+2x)e^{\arctan(x^2+3x-2)}}{5-12\,x+5\,x^2+6\,x^3+x^4}$

18) $f(x) = \arctan(e^{x^2}+x^2)\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{2\,\left(1+e^{x^2}\right)\ x}{1+\left(e^{x^2}+x^2\right)^2}$

19) $f(x) = \arcsin(3+\tan x)\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-(3+\tan x)^2}}$

20) $f(x) = \cos^2(1+x^2)\sin^3 x$

$$f'(x) = \cos(1+x^2)\sin^2 x\ \left(3\ \cos x\ \cos(1+x^2) - 4\,x\ \sin x\ \sin(1+x^2)\right)$$

21) $f(x) = e^{x\ \sin x} + \cos(3\,x)\ ,\qquad f'(x) = e^{x\ \sin x}\ (x\ \cos x + \sin x) - 3\ \sin(3\,x)$

22) $f(x) = \sqrt[3]{\tan(7+3\,x^2)}\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{2\,x}{\cos^2(7+3\,x^2)\,[\tan(7+3\,x^2)]^{\frac{2}{3}}}$

23) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ \left(-1+(1+x)\ \log(1+\frac{1}{x})\right)}{1+x}$

24) $f(x) = -x^2 + 2\,x^2\ \log x\ ,\qquad f'(x) = 4\,x\ \log x$

25) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3x - \arctan x - 4\log(1+x^2)\ ,\qquad f'(x) = \dfrac{2-7\,x+3\,x^2+x^3}{1+x^2}$

26) $f(x) = x\,\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})\ ,\qquad f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$

Svolgimento dell'esercizio 5.3.

1) $f(x) = \begin{cases} e^{2x}-1 & \text{se } x>0\,, \\ a+bx & \text{se } x\le 0\,. \end{cases}$

La funzione è sicuramente continua e derivabile in ogni $x \neq 0$, poiché nelle semirette aperte $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ coincide con una funzione derivabile.

Affinché f sia continua anche in $x_0 = 0$ deve essere

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Abbiamo che $f(0) = a$ e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^{2x} - 1) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (a + bx) = a\,,$$

quindi la continuità è garantita se $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$. Ricordando che una funzione derivabile è anche continua, lo studio della derivabilità diventa la determinazione dei valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1 & \text{se } x > 0\,, \\ bx & \text{se } x \leq 0\,, \end{cases}$$

è derivabile in $x_0 = 0$, ossia per cui

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Essendo $f(0) = 0$, otteniamo

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{2h} - 1}{h} = 2\,,$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{bh}{h} = b\,,$$

quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ se e solo se $a = 0$ e $b = 2$.

2) $f(x) = \begin{cases} ax - bx^2 & \text{se } x > 0\,, \\ a & \text{se } x = 0\,, \\ 1 - \cos x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$

La funzione è sicuramente continua e derivabile in ogni $x \neq 0$, poiché nelle semirette aperte $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ coincide con una funzione derivabile.

Affinché f sia continua anche in $x_0 = 0$ deve essere

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Abbiamo che $f(0) = a$ e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (ax - bx^2) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 0\,,$$

quindi la continuità è garantita se $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$. Ricordando che una funzione derivabile è anche continua, lo studio della derivabilità diventa la determinazione dei valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 & \text{se } x > 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \\ 1 - \cos x & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

è derivabile in $x_0 = 0$, ossia per cui

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Essendo $f(0) = 0$, otteniamo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{bh^2}{h} = 0\,,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-\cos h}{h} = 0\,,$$

quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ se e solo se $a = 0$ e per ogni $b \in \mathbb{R}$.

Svolgimento dell'esercizio 5.4.

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \cos x}{x^a} & \text{se } x > 0, \\ b & \text{se } x = 0, \\ c \sin x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

La funzione è sicuramente continua e derivabile in ogni $x \neq 0$, poiché nelle semirette aperte $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ coincide con una funzione derivabile.
Continuità in $x_0 = 0$: il limite sinistro di f in 0 è sempre 0. Per calcolare il limite destro osserviamo che

$$\frac{e^x - \cos x}{x^a} = \frac{e^x - 1}{x^a} - \frac{\cos x - 1}{x^a}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^a} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x^a} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ -1/2 & \text{se } \alpha = 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

per cui si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{x^a} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

In conclusione,

$$f \text{ è continua} \iff a < 1,\ b = 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

Derivabilità in $x_0 = 0$: sappiamo già che deve essere $a < 1$ e $b = 0$. Calcoliamo la derivata sinistra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{c \sin x}{x} = c.$$

Per quanto riguarda la derivata destra, osserviamo che

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - \cos(h)}{h^{a+1}} = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{e^h - 1}{h} + \frac{1 - \cos h}{h} \right) \cdot h^{-a}.$$

Questo limite è finito solo se $a \leq 0$ e, in tal caso, otteniamo

$$f'_+(0) = 0 \text{ se } a < 0, \qquad f'_+(0) = 1 \text{ se } a = 0.$$

In conclusione f è derivabile solo nei casi seguenti:

$$a < 0,\ b = c = 0 \quad \text{oppure } a = 0,\ b = 0,\ c = 1.$$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - (1+x)^a}{x} & \text{se } x > 0, \\ b & \text{se } x = 0, \\ c\,x + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

La funzione è sicuramente continua e derivabile in ogni $x \neq 0$, poiché nelle semirette aperte $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ coincide con una funzione derivabile.

Studiamo il comportamento in $x = 0$. Il limite sinistro in 0 è 2 qualunque sia il valore di c. Il limite destro in 0 è

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - (1+x)^a}{x} = -a.$$

Quindi la funzione data è contina anche in zero se e solo se i limiti destro e sinistro in 0 coincidono fra loro e col valore $f(0)$, ossia se e solo se

$$a = -2, \qquad b = 2, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Studiamo la derivabilità in 0. Sappiamo già che deve essere $a = -2$ e $b = 2$, quindi stiamo studiando la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - (1+x)^{-2}}{x} & \text{se } x > 0, \\ 2 & \text{se } x = 0, \\ c\,x + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata sinistra in $x = 0$:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(c\,x+2)-2}{x} = c.$$

Per quanto riguarda la derivata destra, osserviamo che, per $h > 0$ il rapporto incrementale vale

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1-(1+h)^{-2}}{h} - 2\right) = \frac{1-(1+h)^{-2}-2h}{h^2} = \frac{-3-2h}{(1+h)^2}$$

e quindi

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -3\,.$$

In conclusione, la funzione è derivabile anche in 0 se e solo se

$$a = -2, \qquad b = 2, \qquad c = -3.$$

Svolgimento dell'esercizio 5.5. Utilizziamo la formula (5.3).

1) $f(x) = x\,e^x$, $x_0 = 1$. Abbiamo che $f'(x) = e^x(x+1)$, quindi $f'(1) = 2e$. Inoltre $f(1) = e$; l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, e)$ è quindi $y = e + 2e(x-1)$, cioè $y = 2ex - e$.

2) $f(x) = x^2 \sin x$, $x_0 = -2$. Abbiamo che $f'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$, quindi $f'(-2) = 4(\cos 2 + \sin 2)$ (si ricordi che $\cos(-2) = \cos 2$ e $\sin(-2) = -\sin 2$). Inoltre $f(-2) = -4 \sin 2$; l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(-2, -4\sin 2)$ è quindi $y = -4\sin 2 + 4(\cos 2 + \sin 2)(x+2)$, cioè $y = 4(2\cos 2 + \sin 2) + 4(\cos 2 + \sin 2)x$.

3) $f(x) = \log x\, \tan x$, $x_0 = 1$. Retta tangente: $y = \tan 1 \cdot (x-1)$.

4) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$. Retta tangente: $y = x$.

5) $f(x) = \sin(x^2 + 3x + 2)$, $x_0 = -1$. Retta tangente: $y = x + 1$.

6) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x_0 = 1/2$. Retta tangente: $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Svolgimento dell'esercizio 5.6. La funzione $f(x) = x^3 + \arctan x$ è strettamente monotona crescente, in quanto somma di due funzioni strettamente monotone crescenti. Poiché

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

abbiamo che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è biiettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Indichiamo con f^{-1} la sua funzione inversa, di cui vogliamo calcolare la derivata nel punto

$y_0 = 1 + \pi/4$. È facile vedere che il punto y_0 è l'immagine, attraverso f, del punto $x_0 = 1$. Poiché $f'(x_0) \neq 0$, possiamo applicare il Teorema 5.31 di derivazione della funzione inversa, ottenendo

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{3 + 1/2} = \frac{2}{7} \, .$$

6.6 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 6.1. La funzione ristretta sia all'intervallo $[a, c]$ che all'intervallo $[c, b]$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle, quindi esistono due punti $d_1 \in (a, c)$ e $d_2 \in (c, d)$ (quindi diversi) tali che $f'(d_1) = f'(d_2) = 0$. Ora, la funzione $f' \colon [d_1, d_2] \to \mathbb{R}$ a sua volta soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle, per cui esiste $d \in (d_1, d_2)$ tale che $f''(d) = 0$.

Svolgimento dell'esercizio 6.2. Per il Teorema di Lagrange per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste y_x tale che $x < y_x < x + 1$ e tale che $f(x + 1) - f(x) = f'(y_x)$. Dal momento che $\lim_{x\to+\infty} y_x = +\infty$ e poichè anche $\lim_{x\to+\infty} f(x + 1) = \ell$, si ottiene

$$0 = \lim_{x\to+\infty} (f(x + 1) - f(x)) = \lim_{x\to+\infty} f'(y_x) = M.$$

Svolgimento dell'esercizio 6.3. Indichiamo con r il raggio di base della lattina e con h la sua altezza. Il volume della lattina è dato da $V = \pi r^2 h$; poiché V è fissato, questo ci permette di ricavare, ad esempio, h in funzione di r:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \ .$$

1. Se lo spessore della lattina è uniforme, la quantità di alluminio da utilizzare è proporzionale alla superficie della lattina stessa:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \ .$$

Inoltre abbiamo già visto che $h = V/(\pi r^2)$; questo ci permette di determinare S in funzione del solo raggio di base:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad (r > 0).$$

Il nostro scopo è di determinare il valore di r che minimizza $S(r)$. A tale proposito calcoliamo la derivata prima di $S(r)$:

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 2\,\frac{2\pi r^3 - V}{r^2} \ .$$

Osserviamo che

$$\frac{dS}{dr} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \ .$$

Inoltre, se $0 < r < r_0$ la derivata è negativa, mentre per $r > r_0$ la derivata è positiva. Dal Teorema 6.18 deduciamo quindi che r_0 è un punto di minimo (assoluto) per $S(r)$ sulla semiretta $(0, +\infty)$. In conclusione, le dimensioni ottimali della lattina sono

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \simeq 3.74 \text{ cm}, \qquad h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \simeq 7.49 \text{ cm}.$$

2. Assumiamo ora che lo spessore dei due cerchi di base sia doppio rispetto a quello della superficie laterale. La quantità di alluminio sarà quindi proporzionale a

$$Q = 2(2\pi r^2) + 2\pi r h$$

(si noti il fattore 2 che moltiplica l'area dei due cerchi di base). Sostituendo come prima $h = V/(\pi r^2)$, possiamo scrivere Q in funzione del raggio di base r:

$$Q(r) = 4\pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad (r > 0).$$

Procediamo come prima, calcolando la derivata di Q:

$$\frac{dQ}{dr} = 8\pi r - \frac{2V}{r^2} = 2\,\frac{4\pi r^3 - V}{r^2}\,.$$

Osserviamo che

$$\frac{dQ}{dr} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}\,.$$

Inoltre, se $0 < r < r_1$ la derivata è negativa, mentre per $r > r_1$ la derivata è positiva. Dal Teorema 6.18 deduciamo quindi che r_1 è un punto di minimo assoluto per $Q(r)$ sulla semiretta $(0, +\infty)$. In conclusione, le dimensioni ottimali della lattina sono in questo caso

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \simeq 2.97 \text{ cm}, \qquad h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{16V}{\pi}} \simeq 11.89 \text{ cm}.$$

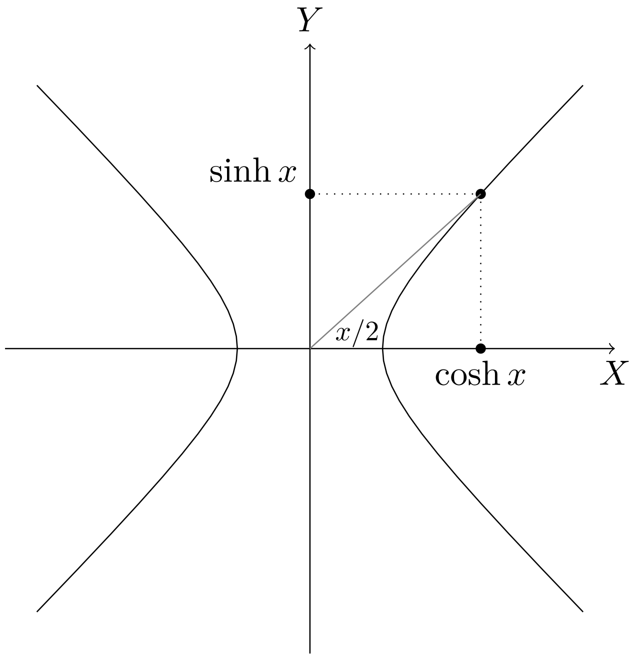
Osserviamo che, rispetto al punto precedente, è diminuito il raggio di base ed è aumentata l'altezza, come del resto si poteva immaginare dal momento che, in questo caso, le due basi "costano" di più.

Svolgimento dell'esercizio 6.4.

(i) Utilizzando la definizione si ha

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1.\end{aligned}$$

Questa relazione ci dice che i punti del piano di coordinate $(\cosh x, \sinh x)$ descrivono, al variare di $x \in \mathbb{R}$, un'iperbole di equazione cartesiana $X^2 - Y^2 = 1$. Si può mostrare che $(\cosh x, \sinh x)$ sono le coordinate del punto sull'iperbole associato al settore iperbolico di area $A = x/2$, se $x > 0$.



(ii) Si ha che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cosh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \\
\frac{d}{dx}(\sinh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \\
\frac{d}{dx}(\tanh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.
\end{aligned}$$

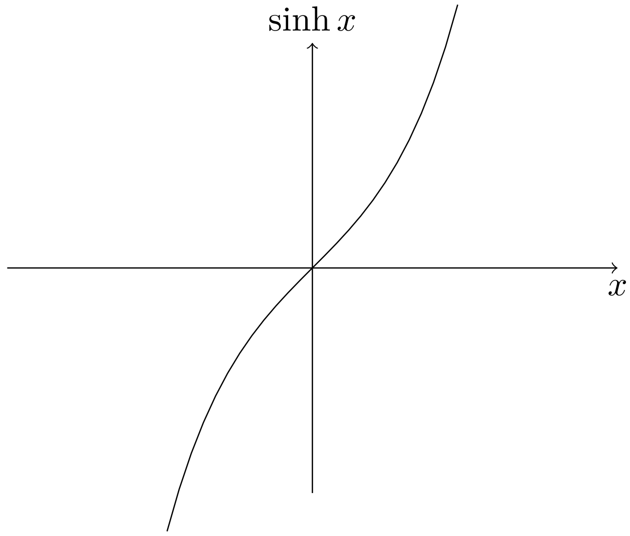
(iii) La funzione $f(x) = \sinh x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, è dispari e

$$e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x \iff x > 0$$

per cui è positiva per $x > 0$ e si annulla solo per $x = 0$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.$$

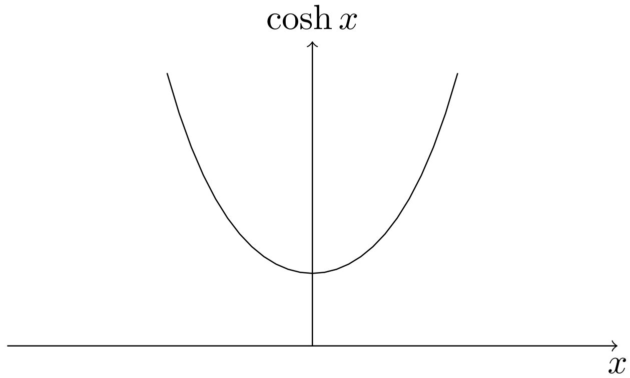
Infine $f'(x) = \cosh x > 0$, per cui la funzione è sempre crescente, e $f''(x) = \sinh x$ per cui la funzione è convessa sulla semiretta delle x positive e concava sulla semiretta delle x negative.



La funzione $f(x) = \cosh x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, è pari ed è sempre strettamente positiva (in quanto somma di esponenziali) e i limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty.$$

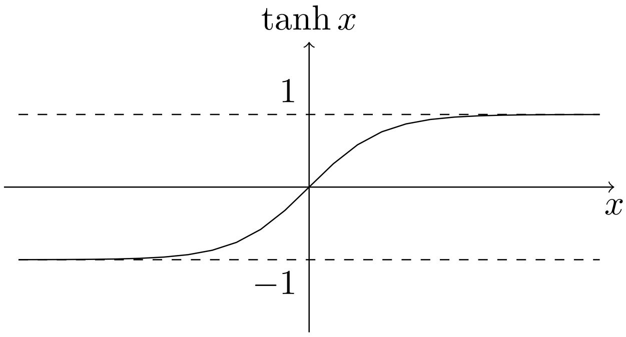
Inoltre $f'(x) = \sinh x > 0$ e per quanto visto prima la funzione risulta essere decrescente sulla semiretta delle x negative e crescente sulla semiretta delle x positive. Infine $f''(x) = \cosh x$ per cui la funzione è sempre convessa.



La funzione $f(x) = \tanh x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, è dispari e ha lo stesso segno di $\sinh x$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1.$$

Infine $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$, per cui la funzione è sempre crescente, e $f''(x) = -2(\cosh x)^{-3} \sinh x$ per cui la funzione è convessa sulla semiretta delle x negative e concava sulla semiretta delle x positive.



(iv) La funzione $f(x) = \sinh x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi invertibile. Indichiamo con $\operatorname{settSh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (settore del seno iperbolico) la sua inversa e calcoliamola esplicitamente. Si ha

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

e, prendendo la soluzione positiva dell'ultima equazione di secondo grado in $z = e^x$, otteniamo $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ e, infine, $x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Se ne conclude che

$$\operatorname{settSh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione $f(x) = \cosh x$ è strettamente crescente sulla semiretta $[0, +\infty)$ e quindi ivi invertibile. Indichiamo con $\operatorname{settCh}\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ (settore del coseno iperbolico) la sua funzione inversa. Con conti analoghi a quelli fatti nel caso precedente si dimostra che

$$\operatorname{settCh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \in [1, +\infty).$$

Infine, la funzione $f(x) = \tanh x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi invertibile. Indichiamo con $\operatorname{settTh}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ (settore della tangente iperbolica) la sua funzione inversa e calcoliamola esplicitamente. Si ha

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad &\iff \quad e^{2x}y + y = e^{2x} - 1 \\ &\iff \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \iff x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

ossia

$$\operatorname{settTh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right), \qquad x \in (-1, 1).$$

(v) Usando la formula di derivazione della funzione inversa si ottiene

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{settSh} x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{settSh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{settSh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{settCh} x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{settCh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{settCh} x)-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{settTh} x) = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{settTh} x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Svolgimento dell'esercizio 6.5.

1) $f(x) = \begin{cases} x^{1-x} & \text{se } x > 0 \\ ax & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Si ha $\lim_{x\to 0^+} x^{1-x} = 0 = \lim_{x\to 0^-} ax$, quindi la funzione si può estendere con continuità in 0 ponendo $f(0) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. La funzione è ora definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Tale funzione è strettamente positiva per $x > 0$ e ha segno opposto a quello di a per $x < 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{(1-x)\log x} = 0$$

perché $\lim_{x\to+\infty}(1-x)\log x = -\infty$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -\infty & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

In tutti i casi la retta $y = ax$ è un asintoto (obliquo o orizzontale) per la funzione quando x diverge a $-\infty$. Per quanto riguarda la derivabilità, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} x^{1-x}\left(-\log x + \dfrac{1-x}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ a & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{1-h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{-h} = \lim_{h\to 0^+} e^{-h\log h} = 1,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ah}{h} = a,$$

per cui, in particolare, f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $a = 1$. Per $x < 0$ la funzione è crescente o decrescente a seconda del segno di a. Per studiare la monotonia della funzione sulla semiretta delle x positive si deve studiare il segno della funzione $g(x) = \frac{1-x}{x} - \log x$ per $x > 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x} - \log x\right) = -\infty, \quad \lim_{x\to0}\left(\frac{1-x}{x} - \log x\right) = +\infty,$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0,$$

per cui la funzione g è strettamente decrescente e ha un solo zero. A ben vedere, lo zero è determinabile, ed è $x = 1$. Quindi la funzione f è strettamente crescente nell'intervallo $(0, 1)$, strettamente decrescente in $(1, +\infty)$ e ha un massimo relativo per $x = 1$. Se $a < 0$, allora $x = 0$ è un minimo assoluto della funzione. Se $a = 0$ tutti i punti $x \leq 0$ sono di minimo assoluto e $x = 1$ è un massimo assoluto. Se $a > 0$ la funzione non ha minimi.

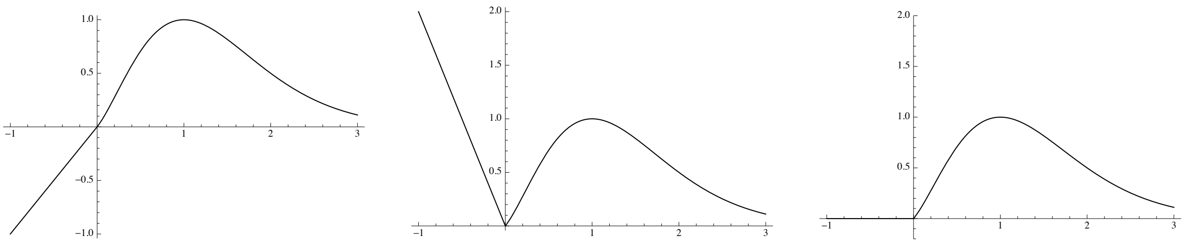


Figura 6.16: la funzione dell'Esercizio 1) per $a = 1$, $a = -2$ e $a = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} \arctan(x\log x) & \text{se } x > 0 \\ e^x - a & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Dal momento che

$$\lim_{x\to0^+} \arctan(x\log x) = 0, \qquad \lim_{x\to0^-} (e^x - a) = 1 - a,$$

la funzione si può estendere con continuità in $x = 0$ (ponendo $f(0) = 0$) solo se $a = 1$. In questo modo la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e sicuramente derivabile per $x \neq 0$. In $x = 0$ si ha

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\arctan(h\log h)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\arctan(h\log h)}{h\log h} \log h = -\infty$$

$$\lim_{h\to0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$ dove ha un punto angoloso. Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x + 1}{1 + (x\log x)^2} & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

quindi la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$, è decrescente nell'intervallo $(0, 1/e)$ ed è crescente sulla semiretta $(1/e, +\infty)$. Infine

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x \log x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - 1) = -1\,,$$

per cui $y = \pi/2$ e $y = -1$ sono asintoti orizzontali per f rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

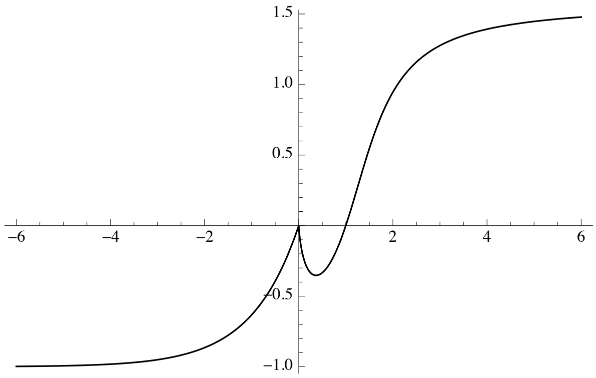


Figura 6.17: la funzione dell'esercizio 2)

Svolgimento dell'esercizio 6.6. Se la funzione è strettamente crescente in I, allora per il Test di Monotonia si ha che vale (i). Inoltre, se $[a, b] \subset I$, $a < b$, allora per il Teorema di Lagrange esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dal momento che $f(b) > f(a)$ poiché f è strettamente monotona crescente, si ha che $f'(c) > 0$, quindi f' non è identicamente nulla nell'intervallo $[a, b]$.

Viceversa, se vale (i), sempre per il Test di Monotonia, la funzione f è crescente in I. D'altra parte, se f non fosse strettamente crescente, esisterebbero $a, b \in I$, $a < b$, tali che $f(a) = f(b)$. Dalla monotonia seguirebbe che f è costante, e quindi $f' = 0$, nell'intervallo $[a, b]$.

Svolgimento dell'esercizio 6.7.

1) Cominciamo a vedere se la funzione ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} = +\infty\ ,$$

in quanto si tratta di una funzione razionale con numeratore di grado maggiore del denominatore (ed entrambi di segno positivo per x abbastanza grande). Abbiamo inoltre che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + x} = 1\ ,$$

quindi il coefficiente angolare di un eventuale asintoto obliquo è $m = 1$. Rimane da calcolare il limite di $f(x) - mx$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1} - x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+1-x^3-x}{x^2+1} = 2\ ,\end{aligned}$$

quindi la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Con calcoli identici si verifica che la medesima retta è asintoto obliquo anche per $x \to -\infty$.

2) La funzione è definita in $[0, +\infty)$; vediamo se essa ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x + 2\sqrt{x}) = +\infty,$$

dal momento che f è la somma di due funzioni divergenti entrambe a $+\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 1\,,$$

quindi il coefficiente angolare di un eventuale asintoto obliquo è $m = 1$. Rimane da calcolare il limite di $f(x) - mx$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty\,,$$

quindi non esiste asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

6.6.1 Studi di funzione

Svolgimento dell'esercizio 6.8. Funzione da studiare: $\frac{1}{\log(x-3)}$.
1. Dominio: dobbiamo richiedere che il denominatore non si annulli e che il logaritmo sia ben definito. Quindi le condizioni sono

$$\begin{cases}\log(x-3) \neq 0 \\ x - 3 > 0\end{cases}$$

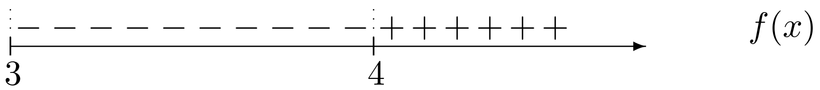
ossia

$$\begin{cases}x - 3 \neq 1 \\ x - 3 > 0\,.\end{cases}$$

Di conseguenza

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 4\,, x > 3\} = (3, 4) \cup (4, +\infty)\,.$$

2. Simmetrie e periodicità: la funzione non è né pari né dispari né periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: il segno della funzione coincide con il segno di $\log(x-3)$. La disuguaglianza $\log(x-3) > 0$ è verificata se e solo se $x-3 > 1$ ossia nell'intervallo $(4, +\infty)$. La funzione è negativa in $(3, 4)$ (osserviamo che la disuguaglianza $x - 3 < 1$ è verificata per $x < 4$, ma non ha senso parlare del segno della funzione fuori dal dominio). Ovviamente la funzione non si annulla mai (affinché un rapporto sia nullo si deve annullare il numeratore, che in questo caso è la costante 1). Quindi il segno della funzione è descritto dallo schema seguente:



4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulla semiretta $(4, +\infty)$, quindi è necessario studiare il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(x-3)} .$$

Si tratta del limite di una funzione fratta in cui il numeratore è una costante positiva, mentre il denominatore diverge a $+\infty$. Ne segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(x-3)} = 0$$

e l'asse delle x è asintoto orizzontale a $+\infty$.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: in questo caso i punti sono $x = 3$, dove è possibile calcolare solo il limite destro (i punti a sinistra di 3 sono fuori dal dominio) e $x = 4$, dove dovremo calcolare sia il limite destro che il limite sinistro.

Quando x tende a 3 da destra, il termine $x - 3$ tende a zero e, di conseguenza, il termine $\log(x - 3)$ diverge a $-\infty$. Ne concludiamo che

$$\lim_{x\to3^+} \frac{1}{\log(x-3)} = 0$$

e quindi la funzione $f(x)$ può essere prolungata con continuità in $x = 3$ (che non appartiene al suo dominio naturale) ponendo $f(3) = 0$.

Restano da calcolare i limiti in 4. Se x tende a 4 da sinistra, il termine $\log(x - 3)$ tende a zero e ha sempre segno positivo, quindi

$$\lim_{x\to4^+} \frac{1}{\log(x-3)} = +\infty .$$

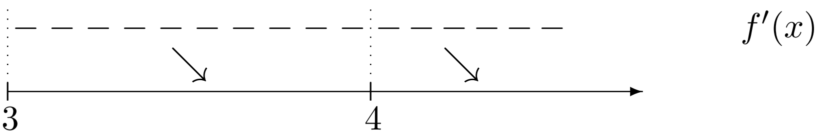
Se invece x tende a 4 da sinistra, il termine $\log(x-3)$ continua a tendere a zero, ma questa volta ha sempre segno negativo, dunque

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{\log(x-3)} = -\infty\,.$$

La retta verticale $x=4$ è quindi un asintoto verticale.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: la funzione è derivabile in tutto il suo dominio, quindi si può sempre applicare il test di monotonia (Teorema 6.15). Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x-3}}{(\log(x-3))^2} = \frac{-1}{(x-3)(\log(x-3))^2}\,.$$

Il segno della derivata prima è opposto al segno del denominatore (il numeratore è una costante negativa). A sua volta il denominatore è il prodotto di due termini positivi nel dominio della funzione. Quindi la derivata prima della funzione è sempre negativa e, per il test di monotonia, la funzione è decrescente sia in $(3,4)$ che in $(4,+\infty)$:



Non ci sono punti stazionari (la derivata prima non si annulla mai).

Vediamo la pendenza con cui il grafico della funzione arriva nel punto $(3,0)$:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{-1}{(x-3)(\log(x-3))^2} = -\infty\,,$$

quindi il grafico della funzione entra in $(3,0)$ con tangente verticale.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{\log(x-3)^2 + (x-3)2\log(x-3)\frac{1}{x-3}}{(x-3)^2(\log(x-3))^4} = \frac{\log(x-3)+2}{(x-3)^2(\log(x-3))^3}\,.$$

La derivata seconda si annulla se

$$\log(x-3) = -2\,.$$

Per risolvere questa equazione, calcoliamo l'esponenziale di ciascun membro:

$$e^{\log(x-3)} = e^{-2} \iff x-3 = e^{-2} \iff x = 3+e^{-2}\,.$$

Quindi la derivata seconda si annulla per $x = 3+e^{-2}$. Lo studio del segno della derivata seconda è sintetizzato nel seguente schema:

$(3, 3+e^{-2})$	$(3+e^{-2}, 4)$	$(4, +\infty)$	
$---$	$+++++++++$	$++++++$	$\log(x-3)+2$
$---$	$---------$	$++++++$	$(x-3)^2[\log(x-3)]^3$
$+++$	$---------$	$++++++$	$f''(x)$
$\smile$	$\frown$	$\smile$	

Ne concludiamo che la funzione risulta convessa nell'intervallo $(3, 3+e^{-2})$, ha un flesso in $x = 3 + e^{-2}$, è concava nell'intervallo $(3 + e^{-2}, 4)$ ed è convessa sulla semiretta $(4, +\infty)$.

8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.18.

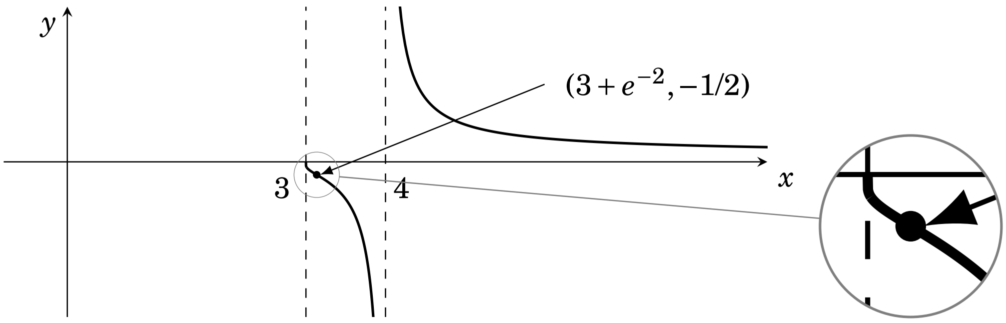


Figura 6.18: Grafico della funzione 6.8

Svolgimento dell'esercizio 6.9. Funzione da studiare: $\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

1. Dominio: dobbiamo imporre che $x \neq 0$ e che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Ma $1 + \frac{1}{x^2} > 0$ per ogni $x \neq 0$, anzi è vero che

$$1 + \frac{1}{x^2} > 1 \tag{6.20}$$

per ogni $x \neq 0$. Quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\,.$$

2. Simmetrie e periodicità: la funzione è pari. Infatti

$$f(-x) = \log\left(1 + \frac{1}{(-x)^2}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = f(x)\,.$$

Quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y.

3. Segno e intersezioni con gli assi: per la formula (6.20), l'argomento del logaritmo è sempre strettamente maggiore di 1 e quindi la funzione è strettamente positiva:

$$\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Poiché $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$, non ci possono essere intersezioni tra il grafico della funzione e l'asse delle y.
4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, quindi è necessario studiare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right), \qquad \lim_{x\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

In entrambi i casi l'argomento del logaritmo tende a 1, da cui

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0\,,$$

e l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Ricordiamo che il limite a $+\infty$ doveva essere uguale a quello a $-\infty$ per motivi di simmetria.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: sempre per motivi di simmetria, il limite destro e il limite sinistro in 0 (se esistono) devono essere uguali. Quando x tende a 0 (sia da destra che da sinistra), il termine $1+\frac{1}{x^2}$ diverge a $+\infty$ e quindi

$$\lim_{x\to0^-} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^+} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty\,.$$

Di conseguenza la retta $x = 0$ è asintoto verticale.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: la funzione è derivabile in tutto il suo dominio, quindi si può sempre applicare il test di monotonia. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{-2}{x(1+x^2)}\,.$$

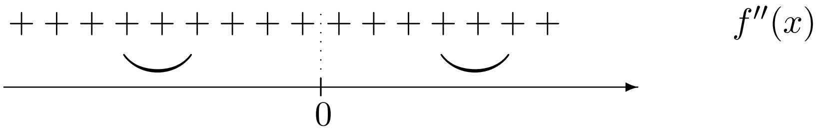
Il segno della derivata prima è opposto al segno del denominatore (il numeratore è una costante negativa). A sua volta il denominatore è il prodotto di due termini di cui uno $(1 + x^2)$ sempre strettamente positivo e l'altro (x) che cambia segno in 0. Quindi la derivata prima della funzione è positiva (e la funzione è crescente) in $(-\infty, 0)$ e negativa (funzione decrescente) in $(0, +\infty)$. Non ci sono punti stazionari (la derivata prima non si annulla mai).

$$\begin{array}{cc|cc}
 & - - - - - - - - - - & + + + + + + + & x(1+x^2) \\
\hline
 & + + + + + + + + + + & - - - - - - - & f'(x) \\
 & \nearrow & \searrow & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{2(1+3x^2)}{(x+x^3)^2}\,.$$

La derivata seconda è una funzione razionale con numeratore strettamente positivo (è, anzi, maggiore o uguale a 2) e denominatore strettamente positivo nel dominio della funzione. Quindi la derivata seconda è sempre positiva nel dominio di f e la funzione risulta convessa nelle semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Non ci sono punti di flesso.



8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.19.

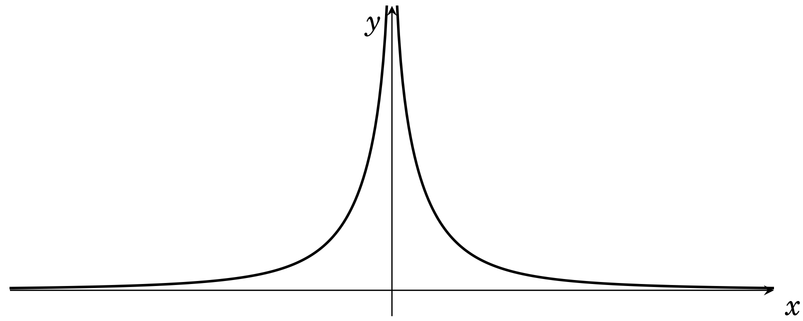


Figura 6.19: Grafico della funzione 6.9

Svolgimento dell'esercizio 6.10. Funzione da studiare: $\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}$.
1. Dominio: dobbiamo imporre che $x \neq 0$ e che l'argomento della radice sia non negativo, ossia

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x^2 - 2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Otteniamo le condizioni

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \geq \sqrt{2}\,,\ x \leq -\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)\,.$$

2. Simmetrie e periodicità: la funzione è dispari. Infatti

$$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2 - 2}}{-x} = -\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} = -f(x)\,.$$

Quindi il grafico è simmetrico rispetto all'origine.
3. Segno e intersezioni con gli assi: il numeratore è positivo e si annulla per $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$, che sono zeri della funzione. Il denominatore cambia segno nell'origine e il segno della funzione è descritto dallo schema seguente.

	$x<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$x>\sqrt{2}$	
	$+ + + + + +$						$+ + + +$	$\sqrt{x^2-2}$
	$- - - - - -$						$+ + + +$	x
	$- - - - - -$						$+ + + +$	$f(x)$

4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulle due semirette $(-\infty, -\sqrt{2}]$ e $[\sqrt{2}, +\infty)$, quindi è necessario studiare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,.$$

Siccome la funzione è dispari, deve essere (se i limiti esistono)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,.$$

Calcoliamo il limite a $+\infty$. Siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Mettiamo in evidenza il termine x^2 nella radice e poi portiamolo fuori dalla radice:

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{x}\,.$$

Quando $x > 0$ si ha $\frac{|x|}{x} = 1$ (mentre se $x < 0$ si ha $\frac{|x|}{x} = -1$). Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{2}{x^2}} = 1$$

e quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} = 1\,.$$

Abbiamo ottenuto che $y = 1$ è asintoto orizzontale per la funzione a $+\infty$, mentre $y = -1$ è asintoto orizzontale per la funzione a $-\infty$.

5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera del dominio che non appartengono al dominio (ricordiamo che $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ appartengono al dominio e sono zeri della funzione).

6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: la funzione è certamente derivabile negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, +\infty)$ dove si può applicare il test di monotonia. Calcoliamo la derivata prima per $|x| > 2$:

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} - \sqrt{x^2-2}}{x^2} = \frac{2}{x^2\sqrt{x^2-2}}\,.$$

Sia numeratore che denominatore sono strettamente positivi. Quindi non ci sono punti stazionari e la funzione è strettamente crescente nelle semirette $(-\infty, -\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, +\infty)$. Inoltre

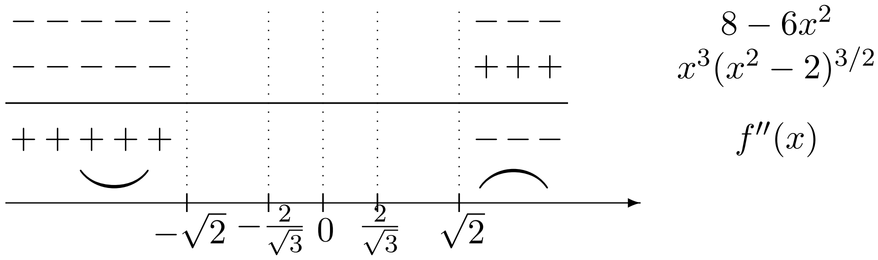
$$\lim_{x \to (-\sqrt{2})^-} f'(x) = \lim_{x \to (\sqrt{2})^+} f'(x) = +\infty\,,$$

cioè la funzione entra a tangente verticale in $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$. Infine, il punto $-\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo per la funzione, mentre $\sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo.

7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda in $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

$$f''(x) = -2\frac{2x\sqrt{x^2-2} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}}{x^4(x^2-2)} = \frac{8-6x^2}{x^3(x^2-2)^{3/2}}\,.$$

Il numeratore si annullerebbe nei punti $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ma $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} < -\frac{2}{\sqrt{3}}$, quindi i due valori che annullano il numeratore non appartengono al dominio. La funzione quindi non ha punti di flesso. Il segno della derivata seconda è descritto nel seguente schema.



8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.20.

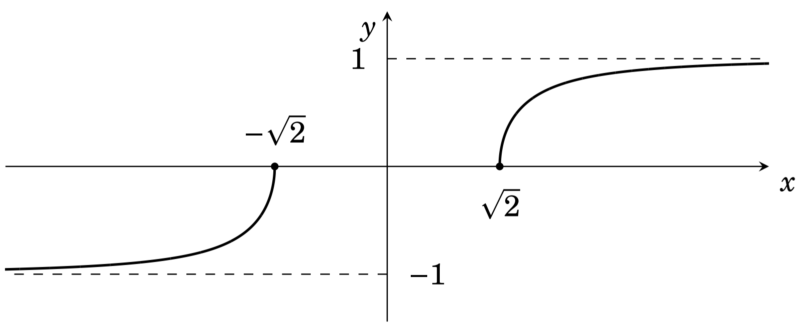


Figura 6.20: Grafico della funzione 6.10

Soluzione dell'esercizio 6.11. Funzione da studiare: $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \qquad f''(x) = \frac{3x^2-2}{x^3(1-x^2)^{3/2}}.$$

La funzione è dispari, ha un asintoto verticale in 0, è decrescente in $[-1, 0)$ e in $(0, 1]$, ha un massimo relativo in $x = -1$ (punto di non derivabilità) e un minimo relativo in $x = 1$ (punto di non derivabilità). La funzione è convessa in $(-1, -\sqrt{2/3})$ e in $(0, \sqrt{2/3})$ ed è concava altrove. Ha due flessi per $x = -\sqrt{2/3}$ e per $x = \sqrt{2/3}$. Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.21.

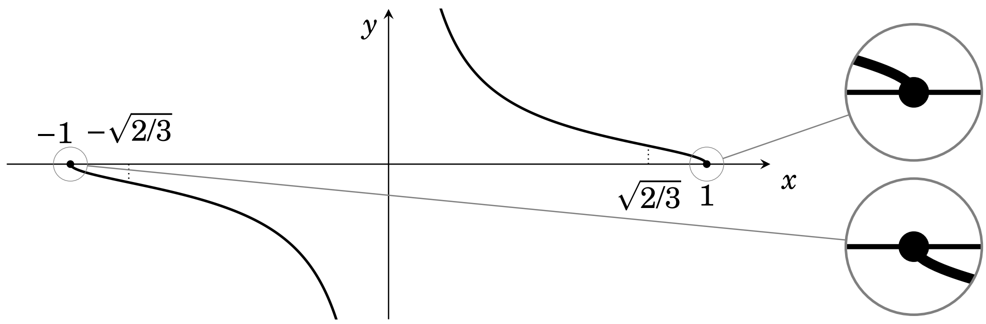
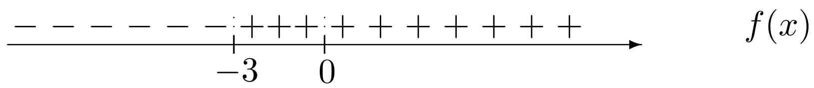


Figura 6.21: Grafico della funzione 6.11

Svolgimento dell'esercizio 6.12. Funzione da studiare: $\dfrac{x+3}{x^2}$.
1. Dominio: dobbiamo imporre solo che $x \neq 0$, quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha particolari simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: il numeratore si annulla per $x = -3$ (zero della funzione) e cambia segno in tale punto. Il denominatore è sempre strettamente positivo nel dominio. In conclusione, il segno della funzione è il seguente.



4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, quindi è necessario studiare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2}.$$

La funzione è razionale con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore, quindi (cfr. Esempio 3.54)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x^2} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2} = 0\,.$$

Abbiamo ottenuto che $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: l'unico punto di frontiera del dominio è $x = 0$, in cui dobbiamo calcolare sia il limite destro che il limite sinistro. In $x = 0$ il denominatore si annulla mentre il numeratore resta limitato. Quindi la funzione esplode in 0 (ossia $\lim_{x\to0} |f(x)| = +\infty$) e, guardando il segno della funzione, si ottiene che

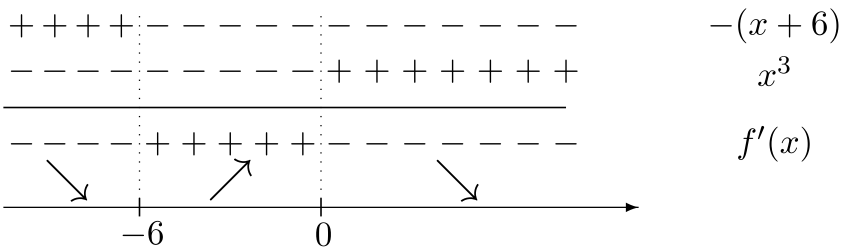
$$\lim_{x\to0^-} \frac{x+3}{x^2} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2} = +\infty\,.$$

La retta $x = 0$ è quindi un asintoto verticale.

6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: la funzione è derivabile nel suo dominio e negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ si può applicare il test di monotonia. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x+3)2x}{x^4} = -\frac{x+6}{x^3}\,.$$

Abbiamo un punto stazionario per $x = -6$ e il segno della derivata prima è il seguente.

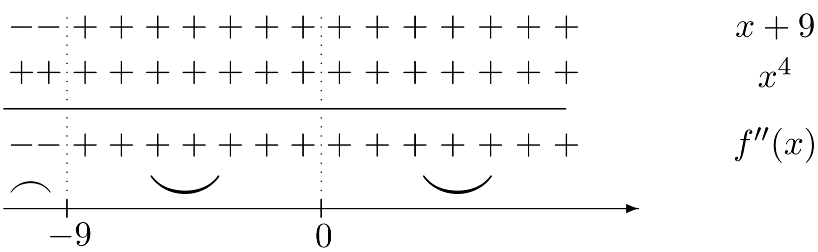


Quindi il punto $x = -6$ è un punto di minimo per la funzione.

7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{x^3 - (x+6)3x^2}{x^6} = \frac{2(x+9)}{x^4}\,.$$

Il numeratore si annulla nel punto $x = -9$ e il segno della derivata seconda è descritto dal seguente schema.



Quindi $x = -9$ è un punto di flesso.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.22.

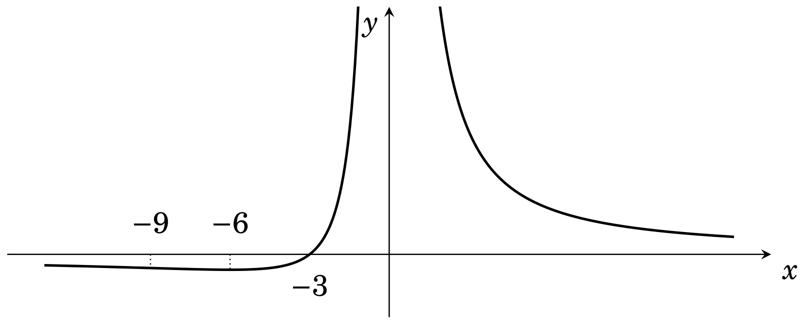


Figura 6.22: Grafico della funzione 6.12

Soluzione dell'esercizio 6.13. Funzione da studiare: $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$
$$f'(x) = -\frac{x+5}{(x-1)^3}\,, \qquad f''(x) = 2\frac{x+8}{(x-1)^4}\,.$$

Sottolineiamo che la funzione considerata è una traslazione di $h = -1$ sull'asse delle x della funzione studiata nell'esercizio precedente, quindi il suo grafico si ottiene traslando di 1 verso destra il grafico di tale funzione. Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.23.

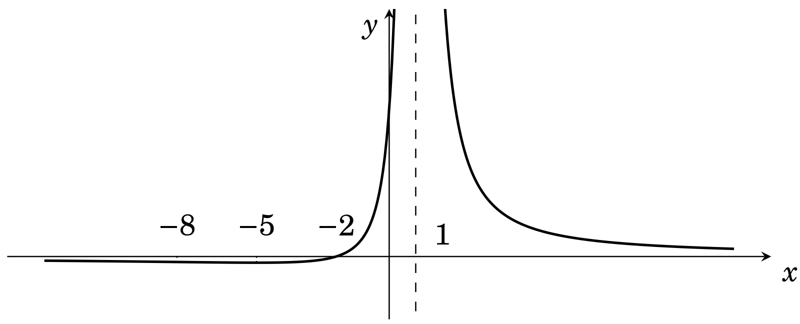


Figura 6.23: Grafico della funzione 6.13

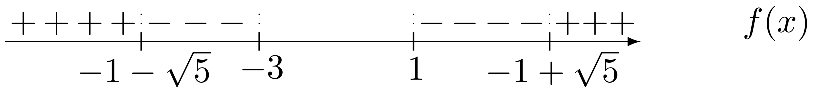
Svolgimento dell'esercizio 6.14. Funzione da studiare: $\log(x^2 + 2x - 3)$.
1. Dominio: dobbiamo imporre $x^2 + 2x - 3 > 0$ per dare senso al logaritmo. L'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$ ha soluzioni $x = -3$ e $x = 1$, quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)\,.$$

2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha particolari simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: ricordiamo che il logaritmo si annulla in 1. Quindi gli zeri della funzione risolvono l'equazione

$$x^2 + 2x - 3 = 1$$

e sono $x = -1 - \sqrt{5}$ e $x = -1 + \sqrt{5}$. Osserviamo che $2 < \sqrt{5} < 3$, dunque risulta $-1 - \sqrt{5} < -3$ e $1 < -1 + \sqrt{5} < 2$. Inoltre, il logaritmo è strettamente crescente, quindi la funzione che stiamo studiando è positiva quando $x^2 + 2x - 3 > 1$ e negativa quando $0 < x^2 + 2x - 3 < 1$. In conclusione, il segno della funzione è il seguente.



4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulle due semirette $(-\infty, -3)$ e $(1, +\infty)$, quindi è necessario studiare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \log(x^2 + 2x - 3), \qquad \lim_{x\to+\infty} \log(x^2 + 2x - 3)\,.$$

L'argomento del logaritmo è un polinomio di secondo grado, quindi

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x - 3) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x - 3) = +\infty\,,$$

e, di conseguenza,

$$\lim_{x\to-\infty} \log(x^2 + 2x - 3) = \lim_{x\to+\infty} \log(x^2 + 2x - 3) = +\infty\,.$$

Per vedere se c'è un asintoto obliquo a $+\infty$ calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2 + 2x - 3)}{x}$$

con la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x+2}{x^2+2x-3}}{1} = 0$$

(si tratta del rapporto tra due polinomi con denominatore con grado maggiore del numeratore), da cui si deduce che non c'è asintoto obliquo.

Notiamo che, utilizzando la sostituzione degli infiniti, si ottiene subito che $\log(x^2 + 2x - 3)$ è asintotico a $\log(x^2) = 2\log x$ a $+\infty$ e quindi non ammette asintoto obliquo. Analogamente si mostra che la funzione non ammette asintoto obliquo a $-\infty$.

5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: si ottiene che

$$\lim_{x\to -3^-} \log(x^2+2x-3) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \log(x^2+2x-3) = -\infty\,,$$

perché in entrambi i casi l'argomento del logaritmo tende a zero da destra. Quindi $x=-3$ e $x=1$ sono asintoti verticali.

6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: la funzione è derivabile nel suo dominio e negli intervalli $(-\infty,-3)$ e $(1,+\infty)$ si può applicare il test di monotonia. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}\,.$$

Il valore $x=-1$, che annullerebbe il numeratore, non appartiene al dominio. Quindi non ci sono punti stazionari e il segno della derivata prima è il seguente.

$x<-3$	$-3<x<1$	$x>1$	
$------$		$+++++$	$2x+2$
$++++++$		$+++++$	x^2+2x-3
$------$		$+++++$	$f'(x)$
$\searrow$		$\nearrow$	

$-3 \qquad 1$

7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = 2\,\frac{x^2+2x-3-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = -2\frac{x^2+2x+5}{(x^2+2x-3)^2}\,.$$

Il numeratore non ha zeri reali ed è sempre positivo. Anche il denominatore è sempre positivo, quindi la derivata seconda è sempre negativa; concludiamo che la funzione è concava nelle semirette $(-\infty,-3)$ e $(1,+\infty)$.

8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.24.

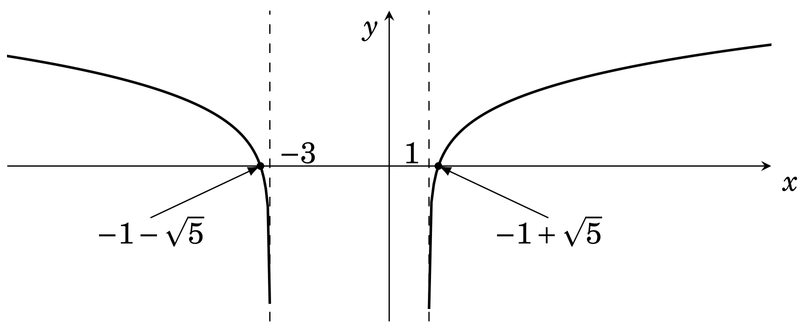


Figura 6.24: Grafico della funzione 6.14

Soluzione dell'esercizio 6.15. Funzione da studiare: $f(x) = \log(x^2 - 1/4)$.

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{8x}{4x^2 - 1}\,, \qquad f''(x) = -8\frac{1 + 4x^2}{(4x^2 - 1)^2}\,.$$

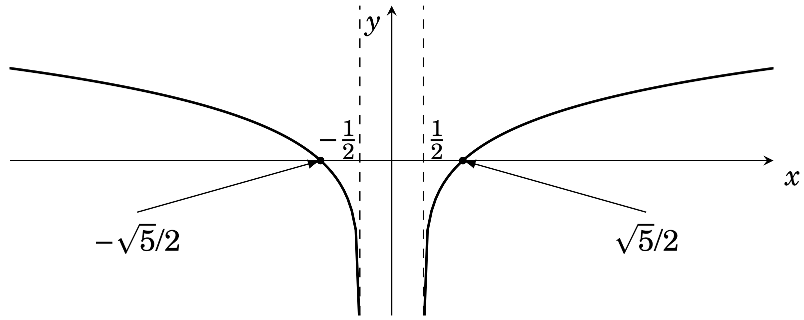


Figura 6.25: Grafico della funzione 6.15

Svolgimento dell'esercizio 6.16. Funzione da studiare: $x(x+3)e^{-x}$.
1. Dominio: non ci sono restrizioni da imporre, quindi $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha particolari simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: ricordiamo che l'esponenziale non si annulla mai ed è sempre strettamente positivo. Quindi gli zeri della funzione sono $x = -3$ e $x = 0$ e il segno della funzione è il seguente.

− − − − −	+ + + + +	+ + + + + + +	$x+3$
− − − − −	− − − − − −	+ + + + + + +	x
+ + + + +	− − − − − −	+ + + + + + +	$f(x)$
-3	0		

4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita su tutto l'asse reale, quindi è necessario studiare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} x(x+3)e^{-x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x(x+3)e^{-x}\,.$$

Quando x tende a $-\infty$, abbiamo il prodotto di un polinomio di secondo grado, che diverge a $+\infty$ e di un esponenziale che diverge anch'esso a $+\infty$. Di conseguenza

$$\lim_{x\to-\infty} x(x+3)e^{-x} = +\infty\,.$$

Quando x tende a $+\infty$, il polinomio $x^2 + 3x$ diverge a $+\infty$, mentre l'esponenziale tende a zero. Per il confronto tra gli infiniti otteniamo

$$\lim_{x \to +\infty} x(x+3)e^{-x} = 0 \, .$$

Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$. Per x che tende a $-\infty$ sicuramente non c'è asintoto obliquo: infatti

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} (x+3)e^{-x} = +\infty \, .$$

5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = (x+3)e^{-x} + xe^{-x} - x(x+3)e^{-x} = -e^{-x}(x^2 + x - 3) \, .$$

Il segno della derivata prima dipende solo dal segno del fattore $x^2 + x - 3$. Tale polinomio si annulla in $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ed in $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, che sono punti stazionari. Osserviamo che $3 < \sqrt{13} < 4$, e conseguentemente $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} > -3$ e $\frac{-1+\sqrt{13}}{2} > 0$. Il segno della derivata prima è il seguente.

		-3		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	
x^2+x-3	$++++$		$++++$		$-----$		$---$		$+++$
$f'(x)$	$----$		$----$		$+++++$		$+++$		$---$
	$\searrow$				$\nearrow$				$\searrow$

Quindi $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ è un punto di minimo, mentre $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ è un punto di massimo.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -(2x+1)e^{-x} + (x^2 + x - 3)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - x - 4) \, .$$

Il segno della derivata seconda coincide con il segno del polinomio $x^2 - x - 4$ ed è il seguente.

		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$	
x^2-x-4	$++++$		$++++$		$-----$		$---$		$+++$
$f''(x)$	$++++$		$++++$		$-----$		$---$		$+++$
	$\smile$				$\frown$				$\smile$

8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.26.

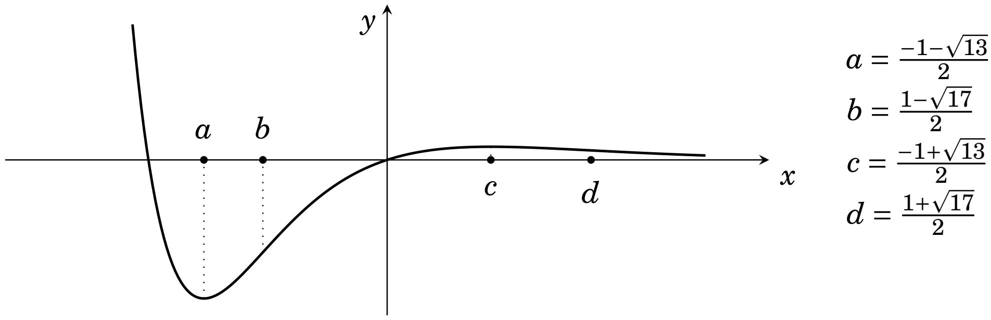


Figura 6.26: Grafico della funzione 6.16

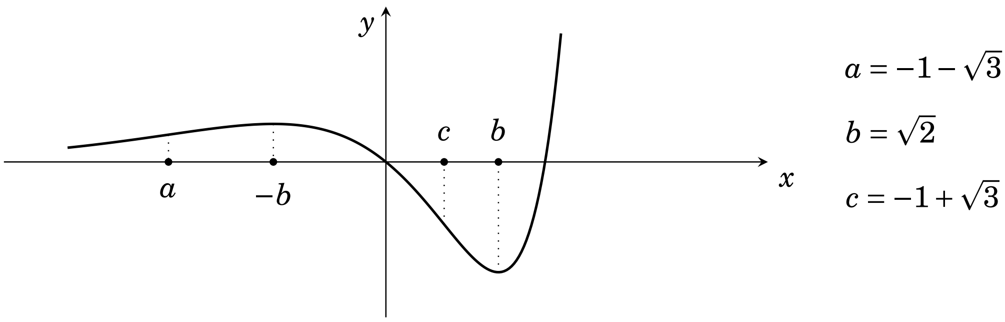


Figura 6.27: Grafico della funzione 6.17

Soluzione dell'esercizio 6.17. Funzione da studiare: $f(x) = x(x-2)e^x$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = (x^2-2)e^x \ , \qquad f''(x) = e^x(x^2+2x-2) \ .$$

Svolgimento dell'esercizio 6.18. Funzione da studiare: $\frac{1}{3}(x-2)^3(x+1)$.
1. Dominio: non ci sono restrizioni da imporre, quindi $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha particolari simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione è un prodotto di polinomi e si annulla in $x=-1$ e $x=2$. Il segno della funzione è il seguente.

$$\begin{array}{ccc|c} ------ & ------ & +++++ & (x-2)^3 \\ ------ & +++++ & +++++ & x+1 \\ \hline ++++++ & ------ & +++++ & f(x) \\ & -1 \quad & 2 & \end{array}$$

4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita su tutto l'asse reale, quindi è necessario studiare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}(x-2)^3(x+1), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}(x-2)^3(x+1) \, .$$

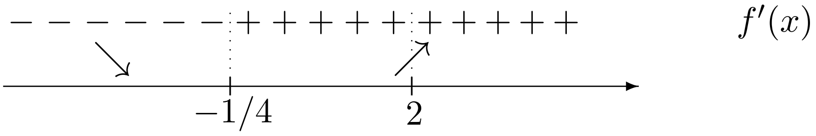
La funzione è un polinomio di quarto grado con termine di ordine massimo $\frac{1}{3}x^4$, quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}(x-2)^3(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}(x-2)^3(x+1)=+\infty\,.$$

Ovviamente non ci sono asintoti obliqui.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x)=(x-2)^2(x+1)+\frac{1}{3}(x-2)^3=\frac{1}{3}(x-2)^2(1+4x)\,.$$

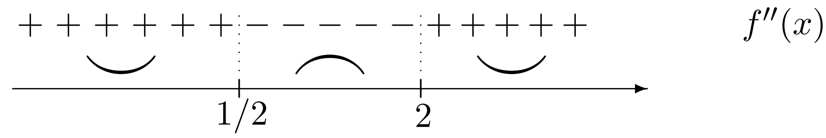
Tale polinomio si annulla in $x=-1/4$ ed in $x=2$, che sono punti stazionari. Il segno della derivata prima coincide con il segno di $1+4x$.



Quindi $x=-1/4$ è un punto di minimo, mentre $x=2$ non è un estremo della funzione.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x)=\frac{1}{3}(2(x-2)(1+4x)+4(x-2)^2)=2(x-2)(2x-1)\,.$$

La derivata seconda si annulla in $x=1/2$ e $x=2$ e il segno è il seguente.



In corrispondenza di $x=1/2$ abbiamo quindi un punto di flesso a tangente obliqua, mentre per $x=2$ abbiamo un punto di flesso a tangente orizzontale.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.28.

Soluzione dell'esercizio 6.19. Funzione da studiare: $f(x)=\frac{1}{3}(x-4)^3x$.

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\frac{4}{3}(x-4)^2(x-1)\,,\qquad f''(x)=4(x^2-6x+8)\,.$$

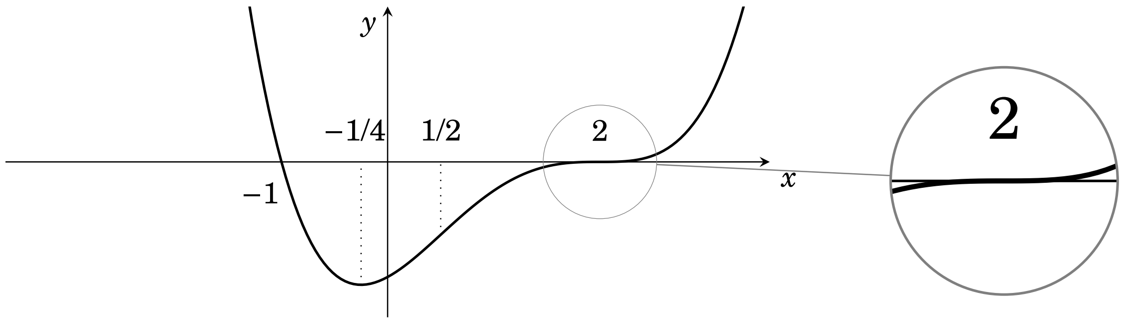


Figura 6.28: Grafico della funzione 6.18

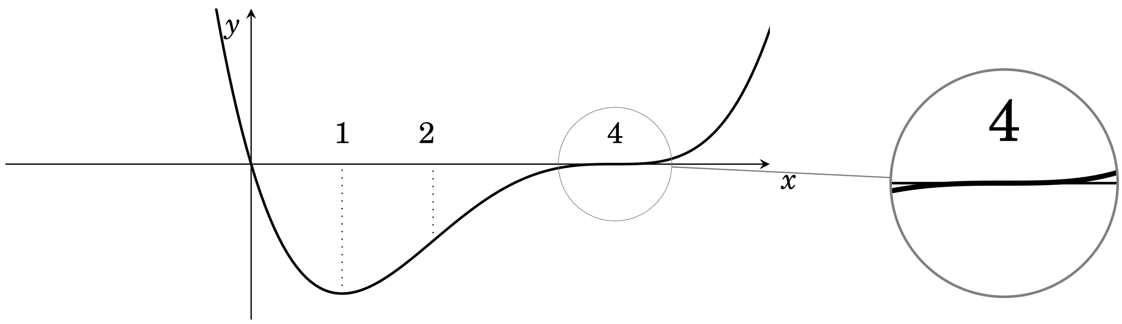


Figura 6.29: Grafico della funzione 6.19

Svolgimento dell'esercizio 6.20. Funzione da studiare: $\frac{e^x}{x+2}$.
1. Dominio: non si deve annullare il denominatore, quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)\,.$$

2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha particolari simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione è una frazione con numeratore sempre strettamente positivo. Quindi la funzione non si annulla mai e il segno coincide con il segno del denominatore.

$$\begin{array}{ccc} - - - - - - - - - & + + + + + + + + & f(x) \\ & -2 & \end{array}$$

Per $x = 0$ si ha $y = 1/2$, intersezione con l'asse delle ordinate.
4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulle semirette $(-\infty, -2)$ e $(-2, +\infty)$, quindi è necessario studiare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+2}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+2}\,.$$

Quando x tende a $-\infty$, e^x tende a 0 così come $1/(x+2)$ e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+2} = 0\,.$$

Quando x tende a $+\infty$, sia il numeratore che il denominatore divergono. Utilizzando la gerarchia degli infiniti si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+2} = +\infty\,.$$

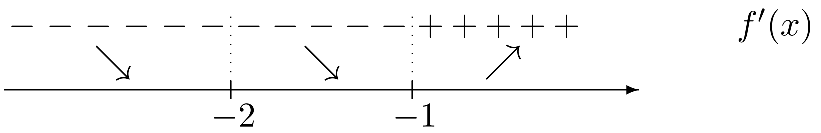
Notiamo che, se non ci fossimo ricordati della gerarchia degli infiniti, il limite si sarebbe potuto calcolare facilmente con la regola di L'Hôpital. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, mentre non ci sono asintoti obliqui a $+\infty$ (sempre per la gerarchia degli infiniti).
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: l'unico punto di frontiera è $x = -2$, in cui si devono calcolare limite destro e sinistro. In $x = -2$ si annulla il denominatore, mentre il numeratore resta limitato. Quindi la funzione diverge. Osservando il segno della funzione si ottiene

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{e^x}{x+2} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{e^x}{x+2} = +\infty\,.$$

La retta $x = 2$ è un asintoto verticale per f.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}\,.$$

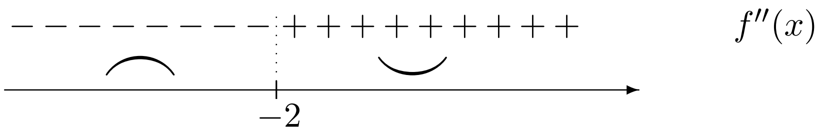
Il numeratore si annulla in $x = -1$ che è un punto stazionario. Il segno della derivata prima coincide con il segno di $x + 1$.



Il punto $x = -1$ è di minimo relativo.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{[e^x(x+1) + e^x](x+2)^2 - 2(x+2)e^x(x+1)}{(x+2)^4} = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}\,.$$

Il polinomio a numeratore ha discriminante negativo, quindi il numeratore è sempre strettamente positivo e il segno della derivata seconda coincide con il segno di $(x + 2)^3$.



La funzione è quindi concava in $(-\infty, -2)$ e convessa in $(-2, +\infty)$.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.30.

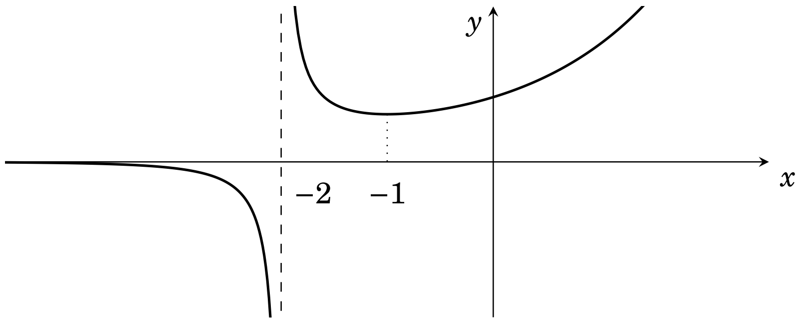


Figura 6.30: Grafico della funzione 6.20

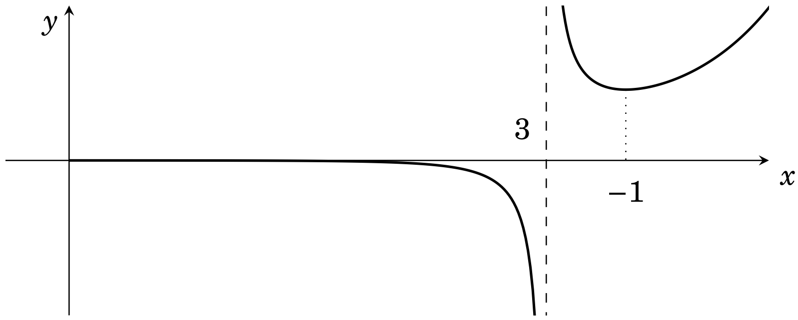


Figura 6.31: Grafico della funzione 6.21

Soluzione dell'esercizio 6.21. Funzione da studiare: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x-3}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)\,,$$
$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-7)}{(x-3)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2-14x+25)}{(x-3)^3}\,.$$

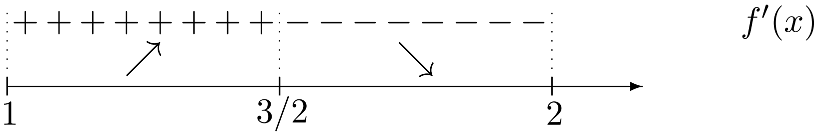
Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.31.

Svolgimento dell'esercizio 6.22. Funzione da studiare: $\sqrt{3x-x^2-2}$.
1. Dominio: l'argomento della radice deve essere positivo o nullo, quindi dobbiamo imporre $-x^2+3x-2 \geq 0$. Il polinomio da studiare ha due zeri reali, $x = 1$ e $x = 2$, e ha coefficiente del quadrato negativo. Quindi $\mathrm{Dom}(f) = [1, 2]$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha particolari simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione è una radice, quindi è sempre non negativa nel dominio e si annulla per $x = 1$ e $x = 2$.
4. Comportamento all'infinito: la funzione non è definita su alcuna semiretta, quindi non ci sono limiti all'infinito da calcolare.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: i punto di frontiera sono $x = 1$ e $x = 2$, in cui la funzione è definita e vale 0. Non ci sono limiti da calcolare.

6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2-2}}\,, \qquad x \in (1,2)\,.$$

Il numeratore si annulla in $x = 3/2$ che è un punto stazionario. Il segno della derivata prima coincide con il segno di $3 - 2x$.



Il punto $x = 3/2$ è punto di massimo. Per sapere come entra la funzione negli estremi del dominio, calcoliamo i limiti delle derivate:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2-2}} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2-2}} = -\infty\,.$$

I limiti sono stati ottenuti osservando che in entrambi i casi il denominatore si annulla mentre il numeratore resta finito e utilizzando il segno della derivata prima.

7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-2\sqrt{3x-x^2-2} - \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{3x-x^2-2}}}{3x-x^2-2} = -\frac{1}{4(3x-x^2-2)^{3/2}}\,.$$

La derivata seconda è sempre negativa nel dominio, quindi la funzione è concava.

8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.32.

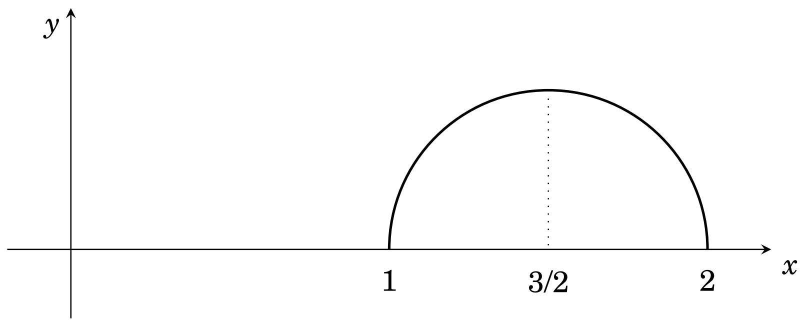


Figura 6.32: Grafico della funzione 6.22

Osservazione: si verifica immediatamente che $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$. Di conseguenza, i punti del grafico di f soddisfano la relazione

$$y^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2, \qquad y \geq 0,$$

vale a dire, sono i punti della semicirconferenza centrata in $(3/2, 0)$, di raggio $1/2$, che giace nel semipiano $y \geq 0$.

Soluzione dell'esercizio 6.23. Funzione da studiare: $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)\,.$$

$$f'(x) = \frac{1 + 2x}{2\sqrt{x^2 + x}}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4(x^2 + x)^{3/2}}\,.$$

Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.33.

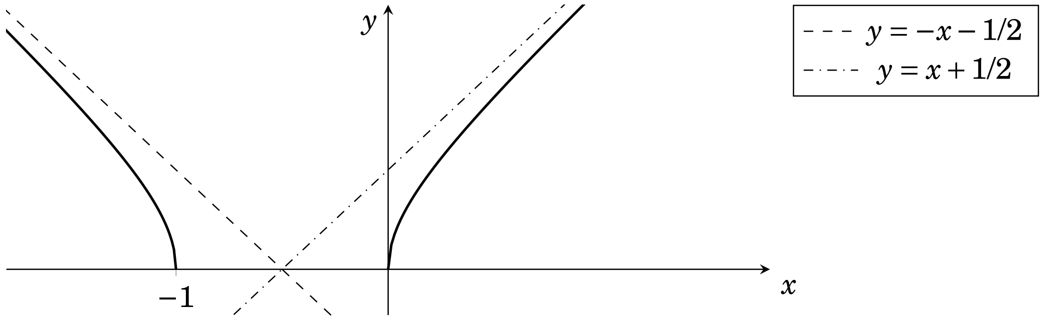
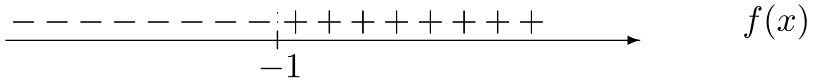


Figura 6.33: Grafico della funzione 6.23

Svolgimento dell'esercizio 6.24. Funzione da studiare: $(x + 1)e^{2x}$.
1. Dominio: non ci sono restrizioni da imporre e $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha particolari simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione si annulla per $x = -1$ e ha lo stesso segno di $(x + 1)$.



Per $x = 0$ si ottiene $y = 1$, intersezione con l'asse delle ordinate.
4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita su tutta la retta reale e quindi si devono calcolare i limiti

$$\lim_{x \to -\infty} (x + 1)e^{2x}\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} (x + 1)e^{2x}\,.$$

Quando x tende a $-\infty$, l'esponenziale e^{2x} tende a 0, mentre $x + 1$ diverge a $-\infty$. Il limite si può scrivere nella forma

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x + 1)}{e^{-2x}}$$

e in questo modo diventa una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ che si risolve con la gerarchia degli infiniti (o con la regola di L'Hôpital), ottenendo

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)}{e^{-2x}} = 0\,.$$

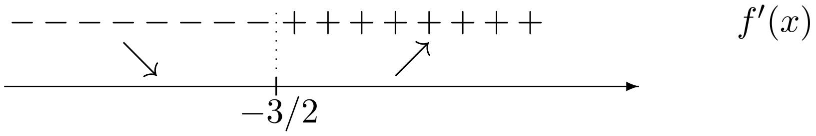
L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Quando x tende a $+\infty$, entrambi i fattori divergono a $+\infty$ e quindi

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{2x} = +\infty\,.$$

Si verifica immediatamente che non ci sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera del dominio.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2e^{2x}(x+1) + e^{2x} = e^{2x}(2x+3)\,,$$

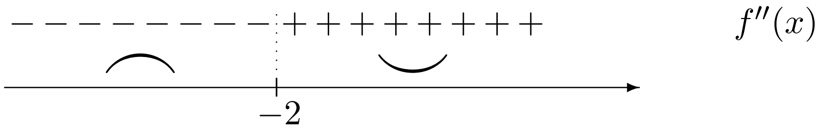
che si annulla in $x = -3/2$ e ha lo stesso segno di $2x+3$.



Il punto $x = -3/2$ è punto di minimo.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = 2e^{2x}(2x+3) + 2e^{2x} = 4e^{2x}(x+2)\,.$$

La derivata seconda si annulla in $x = -2$ e ha il seguente segno:



La funzione è quindi concava nella semiretta $(-\infty, -2)$ e convessa nella semiretta $(-2, +\infty)$.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.34.

Soluzione dell'esercizio 6.25. Funzione da studiare: $f(x) = 3xe^{-x-2}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\,,$$
$$f'(x) = -3e^{-x-2}(x-1)\ , \qquad f''(x) = 3e^{-x-2}(x-2)\ .$$

Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.35.

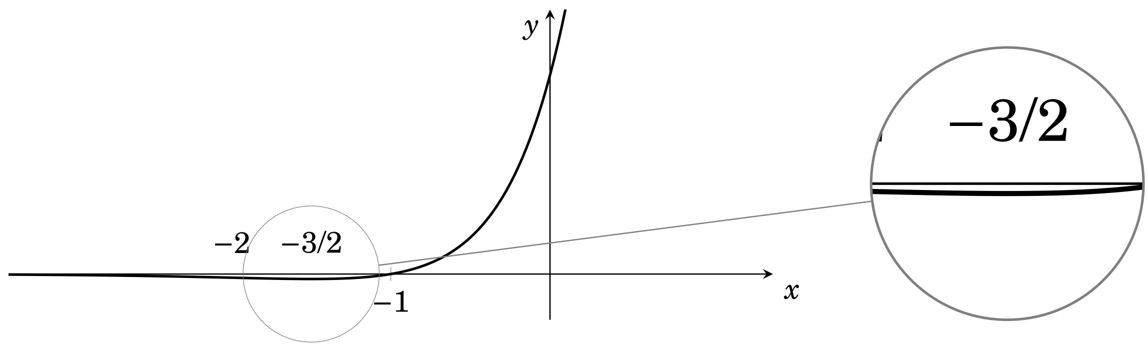


Figura 6.34: Grafico della funzione 6.24

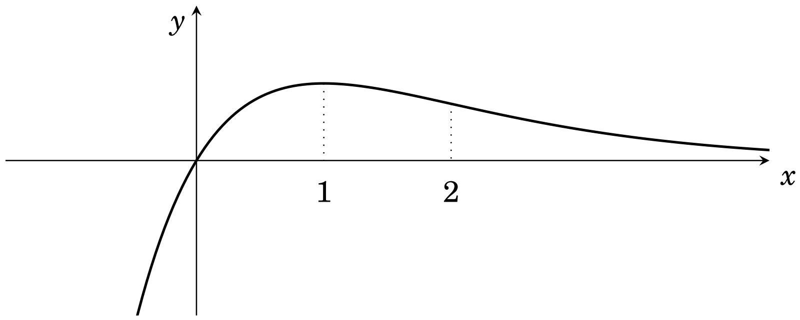


Figura 6.35: Grafico della funzione 6.25

Soluzione dell'esercizio 6.26. Funzione da studiare: $\frac{x-2}{2x}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\,,$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,, \qquad f''(x) = -\frac{2}{x^3}\,.$$

Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.36.

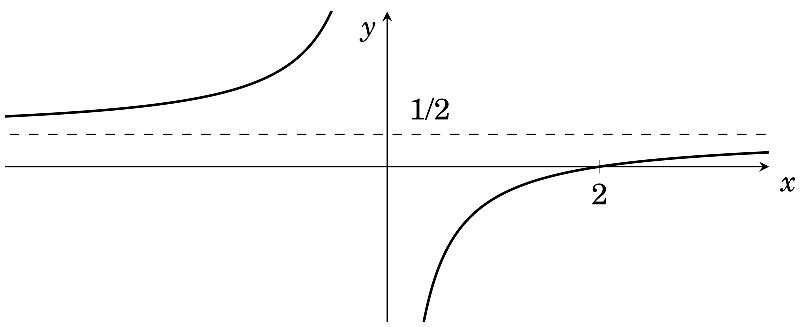


Figura 6.36: Grafico della funzione 6.26

Soluzione dell'esercizio 6.27. Funzione da studiare: $\sqrt{x}\log x$.

$$\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)\,,$$
$$f'(x) = \frac{2 + \log x}{2\sqrt{x}}\,, \qquad f''(x) = -\frac{\log x}{4x^{3/2}}\,.$$

Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.37.

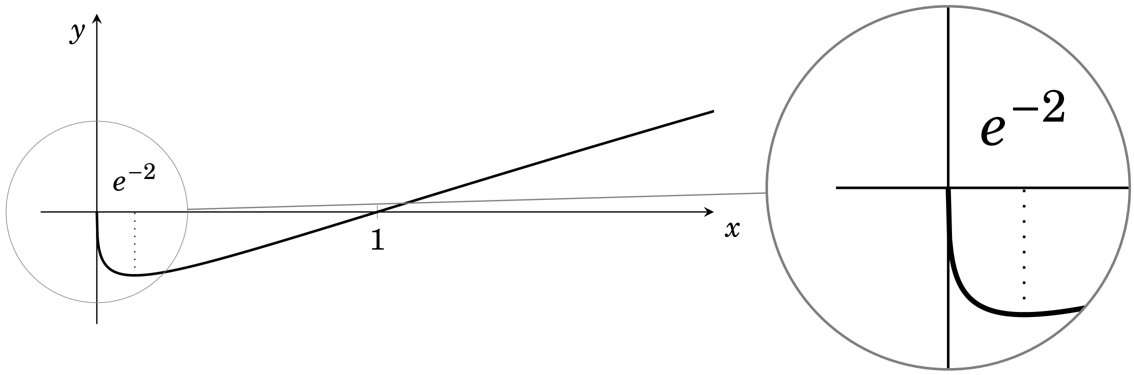


Figura 6.37: Grafico della funzione 6.27

Svolgimento dell'esercizio 6.28. Funzione da studiare: $\arctan(x^2 - 1)$.
1. Dominio: non ci sono restrizioni da imporre e $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione è pari ($f(-x) = f(x)$).
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione si annulla quando $x^2 - 1 = 0$, ossia per $x = 1$ e $x = -1$. Inoltre l'arcotangente è positiva quando il suo argomento è positivo. Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x^2 - 1 > 0$, ossia sulle semirette $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$. Ricapitolando, otteniamo il seguente schema.

$$\begin{array}{ccccccc} + + + + & | & - - - - & | & - - - - & | & + + + + \\ & -1 & & 0 & & 1 & \end{array} \qquad f(x)$$

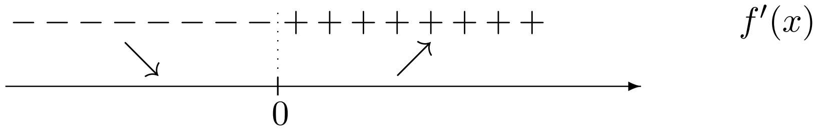
4. Comportamento all'infinito: la funzione è un'arcotangente con argomento che diverge a $+\infty$ sia quando x tende a $-\infty$ che quando x tende a $+\infty$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x^2 - 1) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x^2 - 1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera del dominio.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + (x^2 - 1)^2}\,,$$

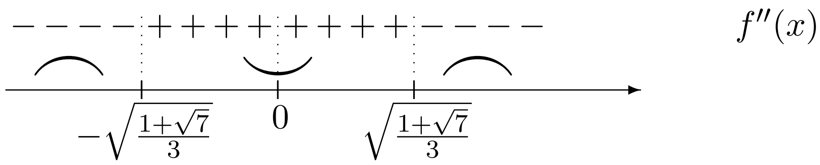
che si annulla per $x = 0$ e ha lo stesso segno del numeratore (essendo il denominatore sempre positivo). Quindi il segno della derivata prima è il seguente.



Il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto e $f(0) = \arctan(-1) = -\pi/4$.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = 2\,\frac{1 + (x^2-1)^2 - x(2(x^2-1)2x)}{(1+(x^2-1)^2)^2} = -2\frac{3x^4 - 2x^2 - 2}{(1+(x^2-1)^2)^2}\,.$$

La derivata seconda ha gli stessi zeri del polinomio $3x^4 - 2x^2 - 2$. Per determinarli, poniamo $t = x^2$ e cerchiamo le t che risolvono $3t^2 - 2t - 2 = 0$, che sono $t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$. Ricordando che $t = x^2$ e osservando che $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$ è negativo (e quindi non può essere un quadrato), gli zeri reali del polinomio di quarto grado sono $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ e $x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$. Inoltre il polinomio in t è negativo solo per $t \in (\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3})$, il che implica che il polinomio di quarto grado in x è negativo per $x^2 < \frac{1+\sqrt{7}}{3}$, ossia per ogni x in $\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}\right)$. In sintesi,il segno della derivata seconda è il seguente.



I punti $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ e $x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ sono punti di flesso.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.38.

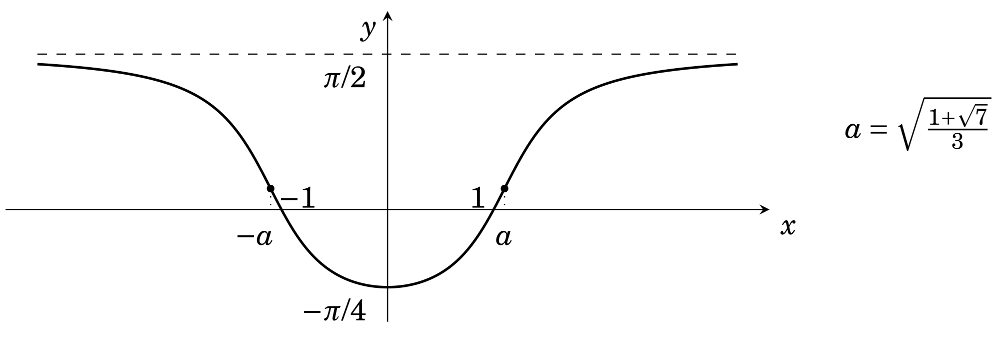


Figura 6.38: Grafico della funzione 6.28

Soluzione dell'esercizio 6.29. Funzione da studiare: $\arctan(3 - 2x^2)$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\,,$$

$$f'(x) = -\frac{4x}{1+(3-2x^2)^2}\,, \qquad f''(x) = 2\frac{6x^4 - 6x^2 - 5}{(1+(3-2x^2)^2)^2}\,.$$

Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.39.

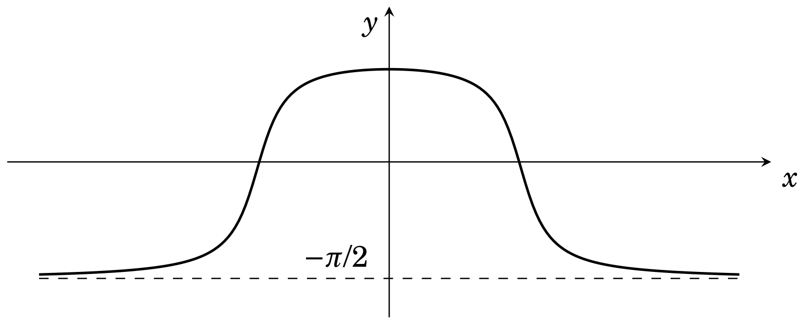
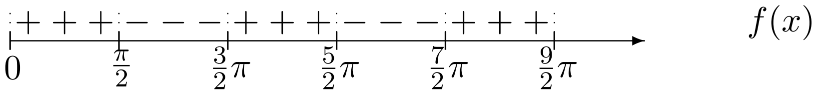


Figura 6.39: Grafico della funzione 6.29

Svolgimento dell'esercizio 6.30. Funzione da studiare: $e^{-|x|}\cos x$.
1. Dominio: non ci sono restrizioni da imporre e $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione è pari ($f(-x) = f(x)$). Questo ci permette di studiarla solo per $x \geq 0$ (dove $|x| = x$) e di ottenere il grafico per x negativo utilizzando la simmetria. Quindi d'ora in poi considereremo la funzione

$$f(x) = e^{-x}\cos x\,, \quad x \geq 0\,.$$

3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione ha lo stesso segno e gli stessi zeri di $\cos x$ (ricordiamo che $\cos x = 0$ per ogni x del tipo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



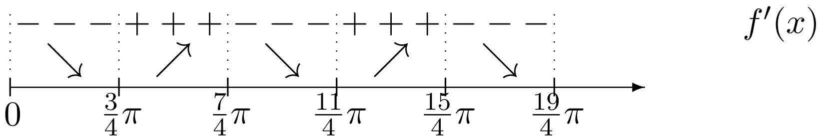
Inoltre $f(0) = 1$ è la quota dell'intersezione con l'asse y.
4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ e per il Teorema 3.34 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos x = 0\,.$$

5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera del dominio.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)\,,$$

che si annulla quando $\cos x = -\sin x$, ossia per $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}^+$. Le soluzioni di $f'(x) > 0$ coincidono con le soluzioni di $\sin x < -\cos x$, disequazione che è stata svolta nell'Esempio 2.40 a pag. 93. Quindi il segno della derivata prima è il seguente.



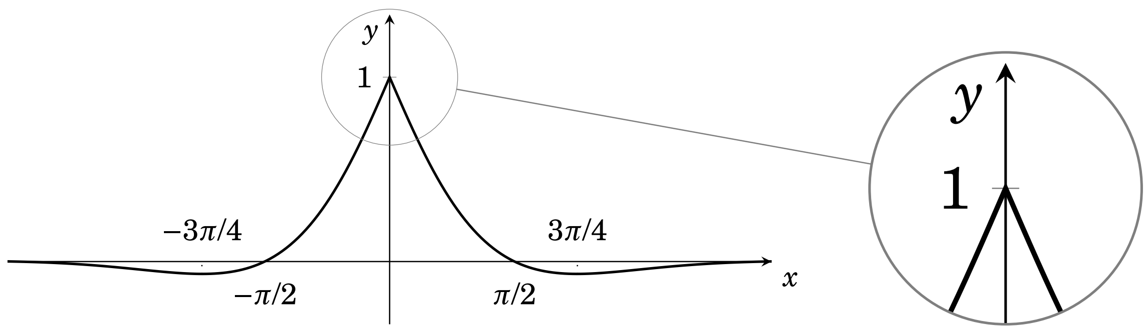
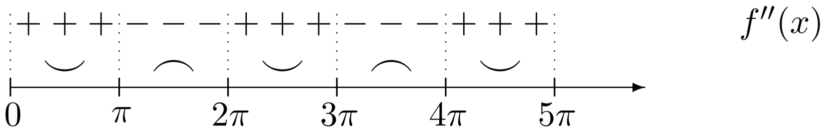


Figura 6.40: Grafico della funzione 6.30

I punti $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, sono punti di minimo relativo, mentre i punti $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, sono punti di massimo relativo. Infine, dal momento che la funzione è pari, $x = 0$ è un punto di massimo (assoluto). Notiamo che in $x = 0$ la funzione di partenza $f(x) = e^{-|x|}\cos x$ non è derivabile in quanto $f'_+(0) = -1$ e $f'_-(0) = 1$.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(-\sin x + \cos x) = 2e^{-x}\sin x\,.$$

La derivata seconda ha gli stessi zeri e lo stesso segno di $\sin x$.



8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.40.

Soluzione dell'esercizio 6.31. Funzione da studiare: $\frac{\cos x}{2+\sin x}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\,,$$
$$f'(x) = -\frac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}\,, \qquad f''(x) = 2\frac{\cos x(\sin x - 1)}{(2+\sin x)^3}\,.$$

Il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.41.

Svolgimento dell'esercizio 6.32. Funzione da studiare: $\arctan\left(\dfrac{x^2}{|x-1|}\right)$.

1. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: dal momento che l'argomento dell'arcotangente è sempre maggiore o uguale a zero, avremo $f(x) \geq 0$ nel suo dominio. Inoltre $f(x) = 0$ solo per $x = 0$.

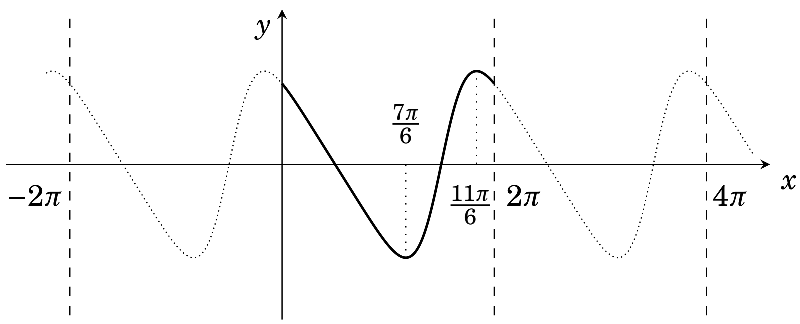


Figura 6.41: Grafico della funzione 6.31

4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulle due semirette $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$ e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(l'argomento dell'arcotangente diverge a $+\infty$ in entrambi i casi). Abbiamo un asintoto orizzontale $y = \pi/2$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio:

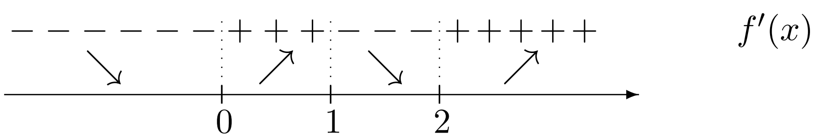
$$\lim_{x\to1^-} \arctan\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = \lim_{x\to1^+} \arctan\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(anche questa volta l'argomento dell'arcotangente diverge a $+\infty$ in entrambi i casi). Quindi la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 1$ ponendo $f(1) = \pi/2$.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima (ovviamente per $x \neq 1$): abbiamo che

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^4}{(x-1)^2}} \, \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2 + x^4}, \qquad \text{se } x > 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^4}{(x-1)^2}} \, \frac{2x(1-x) + x^2}{(x-1)^2} = -\frac{x(x-2)}{(x-1)^2 + x^4}, \qquad \text{se } x < 1,$$

che si annulla per $x = 0$ e $x = 2$. Quindi il segno della derivata prima è il seguente.



Il punto $x = 0$ è di minimo assoluto e il punto $x = 2$ è di minimo relativo. Infine, dallo studio della monotonia della funzione si ottiene anche che $x = 1$ è un punto di massimo assoluto dell'estensione continua di $f(x)$. Notiamo che in $x = 1$ la funzione estesa non è derivabile in quanto $f'_+(1) = -1$ e $f'_-(0) = 1$.
7. Concavità e convessità: calcolando la derivata seconda, ci si accorge che uno studio quantitativo è complicato (si tratta di studiare il segno di un polinomio di quinto grado). Sicuramente in un intorno di $x = 0$ e $x = 2$ la funzione è convessa, visto che sono punti di minimo stretto. D'altra parte, per x che diverge, sia a $+\infty$ che a $-\infty$, la funzione tende all'asintoto orizzontale da sotto, quindi per x grande (in valore assoluto) la funzione dovrà essere concava. Qundi ci saranno sicuramente almeno due flessi, uno nella semiretta $(2, +\infty)$ e uno nella semiretta $(-\infty, 0)$
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.42.

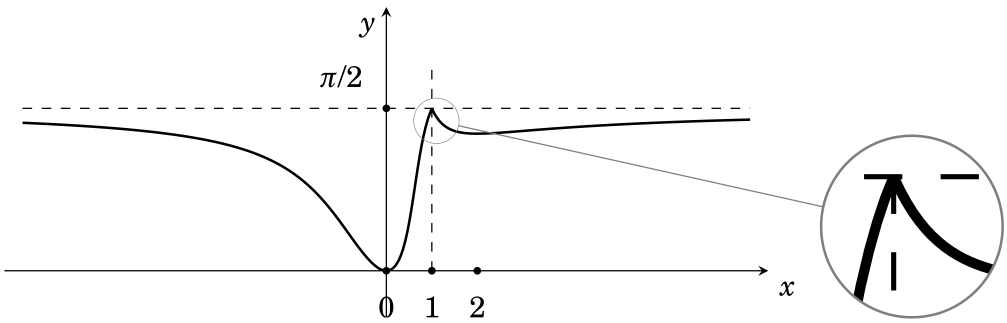


Figura 6.42: Grafico della funzione 6.32

Svolgimento dell'esercizio 6.33. Funzione da studiare: $\log(|\arctan x|)$.
1. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione è pari ($f(-x) = f(x)$). Questo ci permette di studiarla solo per $x > 0$ e di ottenere il grafico per x negativo utilizzando la simmetria. Dal momento che $\arctan x$ è strettamente positiva per $x > 0$, d'ora in poi considereremo la funzione

$$f(x) = \log(\arctan x)\,, \quad x > 0\,.$$

3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione si annulla per $x = \tan 1$ e ha il segno seguente:

	0		$\tan 1$		
$f(x)$		$- - - - - -$		$+ + + + + + + + + + + +$	

Non ci sono intersezioni con l'asse y.
4. Comportamento all'infinito: la funzione è definita sulla semiretta $(0, +\infty)$ e si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \log(\arctan x) = \log(\pi/2).$$

Quindi $y = \log(\pi/2)$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} \log(\arctan x) = -\infty.$$

Quindi $x = 0$ è un asintoto verticale.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\ \arctan x}, \qquad x > 0\,,$$

che è sempre strettamente positiva, quindi la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{1 + 2x \arctan x}{(1+x^2)^2 (\arctan x)^2}\,.$$

La derivata seconda è sempre negativa, quindi la funzione è concava in $(0, +\infty)$.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.43.

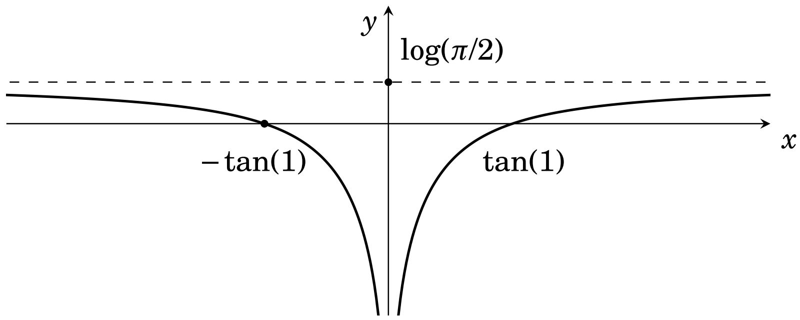


Figura 6.43: Grafico della funzione 6.33

Svolgimento dell'esercizio 6.34. Funzione da studiare: $\log(|\cos x|)$.
1. Dominio: $\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione è periodica di periodo π ed è pari nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Questo ci permette di studiarla solo nell'intervallo $(0, \pi/2)$, di ottenere il grafico per x negativo utilizzando la simmetria e poi di estenderlo per periodicità. Dal momento che $\cos x \in (0, 1]$ per $x \in (0, \pi/2)$, la funzione data è

$$f(x) = \log(\cos x)\,, \quad x \in (0, \pi/2)\,.$$

3. Segno e intersezioni con gli assi: dal momento che $\cos x \in (0, 1]$ per $x \in (0, \pi/2)$, la funzione non assume mai valori positivi e $\log(\cos x) = 0$ solo per $x = 0$. Il grafico interseca l'asse y nell'origine.

4. Comportamento all'infinito: la funzione che stiamo considerando è definita su un intervallo limitato.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio:

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \log(\cos x) = -\infty$$

(l'argomento del logaritmo tende a zero). Quindi $x = \pi/2$ è un asintoto verticale.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, \qquad x \in (0, \pi/2)\,,$$

che è strettamente negativa in $(0, \pi/2)$, quindi la funzione è strettamente decrescente in tale intervallo. Si noti inoltre che, per motivi di simmetria, la funzione è negativa anche in $(-\pi/2, 0)$ e ha un punto di massimo relativo in $x = 0$.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{1}{(\cos x)^2}\,.$$

La derivata seconda è sempre negativa, quindi la funzione è concava in $(0, \pi/2)$.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.44.

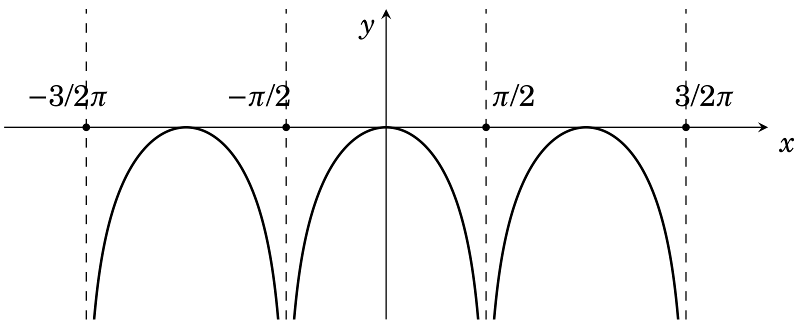


Figura 6.44: Grafico della funzione 6.34

Svolgimento dell'esercizio 6.35. Funzione da studiare: $e^{-e^{-x}}$.
1. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione non ha simmetrie e non è periodica.
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione è sempre strettamente positiva e $f(0) = e^{-1}$.
4. Comportamento all'infinito: utilizzando il fatto che $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$ e il teorema sul limite della composizione di funzioni si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-e^{-x}} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-e^{-x}} = 0.$$

5. Il dominio della funzione non ha punti di frontiera al finito.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = e^{-e^{-x}}(-e^{-x})(-1) = e^{-e^{-x}-x},$$

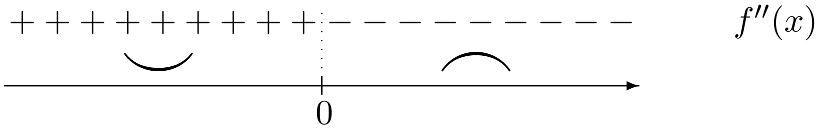
che è strettamente positiva in $\mathbb{R}$, quindi la funzione è strettamente crescente su tutto l'asse reale.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = e^{-e^{-x}-x}(e^{-x} - 1).$$

La derivata seconda ha lo stesso segno del fattore $e^{-x} - 1$ e

$$e^{-x} - 1 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1 \iff -x \geq 0$$

per cui il segno della derivata seconda è il seguente:



La funzione è quindi convessa nella semiretta $(-\infty, 0)$ e concava nella semiretta $(0, +\infty)$.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.45.

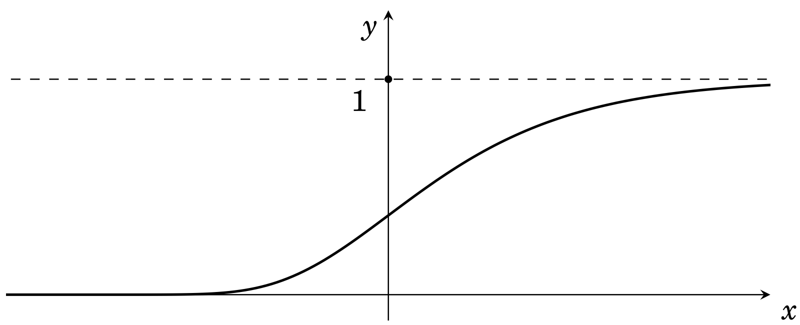


Figura 6.45: Grafico della funzione 6.35

Svolgimento dell'esercizio 6.36. Funzione da studiare: $\sqrt[3]{|x|(1-x^2)}$.
1. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Simmetrie e periodicità: La funzione non è periodica. La funzione è pari e questo ci permette di studiarla solo per $x > 0$ (per cui avremo $|x| = x$) e di ottenere il grafico relativo alla semiretta delle x negative utilizzando la simmetria.

3. Segno e intersezioni con gli assi: la radice cubica ha lo stesso segno del suo argomento, quindi la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x(1-x^2)}, \qquad x \geq 0,$$

è positiva nell'intervallo $(0, 1)$, ha due zeri per $x = 0$ e $x = 1$ ed è negativa nella semiretta $(1, +\infty)$.
4. Comportamento all'infinito: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x(1-x^2)} = -\infty$$

ed è ragionevole aspettarsi un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (l'argomento della radice cubica è asintoticamente equivalente a x^3 per $x \to +\infty$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x-x^3}{x^3}} = -1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x(1-x^2)} + x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-x^2)+x^3}{(\sqrt[3]{x(1-x^2)})^2 - x\sqrt[3]{x(1-x^2)} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\left(\sqrt[3]{x^{-2}(1-x^2)})^2 - \sqrt[3]{x^{-2}(1-x^2)} + 1\right)} = 0.$$

(Osserviamo che nello svolgimento del secondo limite abbiamo risolto la forma indeterminata utilizzando il fatto che $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$). Dai risultati ottenuti otteniamo che la retta di equazione cartesiana $y = -x$ è l'asintoto obliquo per la funzione data quando x diverge a $+\infty$.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima, ove possibile con tecniche elementari, ossia per $x > 0$, $x \neq 1$: abbiamo che

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x(1-x^2))^{-2/3}(1-3x^2) \qquad \text{se } x > 0,\ x \neq 1,$$

che si annulla per $x = 1/\sqrt{3}$. Quindi il segno della derivata prima per $x > 0$ è il seguente.

$$\begin{array}{l|l|l}
 & \nearrow & \searrow \\
 & +++++ & ------------- \quad f'(x) \\
0 & & 1/\sqrt{3}
\end{array}$$

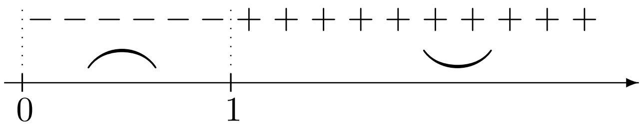
La funzione è quindi crescente nell'intervallo $(0, 1/\sqrt{3})$, decrescente nella semiretta $(1/\sqrt{3}, +\infty)$ e il punto $x = 1/\sqrt{3}$ è di massimo assoluto. Infine, la funzione non è derivabile né in $x = 0$, né in $x = 1$ in quanto

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty, \qquad f'_-(1) = f'_+(1) = -\infty.$$

In $x = 0$ avremo quindi un punto di cuspide, mentre in $x = 1$ avremo un punto a tangente verticale.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda (per $x > 0$, $x \neq 1$):

$$f''(x) = (x(1-x^2))^{-5/3} \left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{3}x^2 \right).$$

Una volta osservato che il secondo fattore è sempre strettamente negativo, si ottiene che il segno della derivata seconda è il seguente:



8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.46.

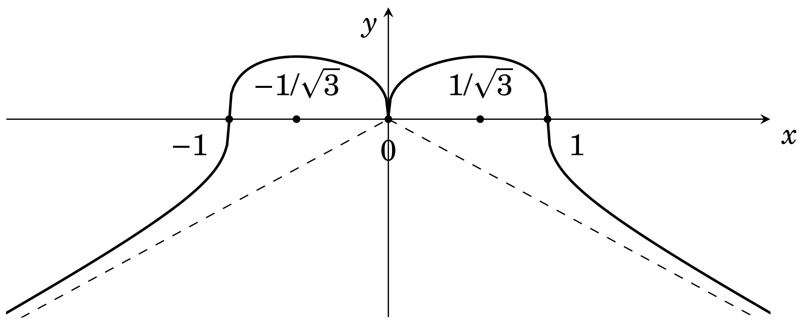


Figura 6.46: Grafico della funzione 6.36

Svolgimento dell'esercizio 6.37. Funzione da studiare: $x\,\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$.
1. Dominio: non ci sono restrizioni da imporre e $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. La funzione è continua nel suo dominio, in quanto prodotto e rapporto di funzioni continue.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione è pari:

$$f(-x) = -x\,\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} = -x\,\frac{1-\frac{1}{2^x}}{1+\frac{1}{2^x}} = -x\,\frac{2^x-1}{1+2^x} = f(x).$$

Quindi ci limiteremo a studiarla per $x \geq 0$ e otterremo il grafico completo per simmetria.

3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione si annulla per $x = 0$ ed è strettamente negativa in $(0, +\infty)$, dal momento che $2^x > 1$ per ogni $x > 0$.
4. Comportamento all'infinito: dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2^x}{1+2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{2^x} \frac{2^{-x}-1}{1+2^{-x}} = -1\,,$$

ricaviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{1-2^x}{1+2^x} = -\infty.$$

Il conto precedente ci dice che potrebbe esistere un asintoto obliquo con coefficiente angolare $m = -1$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{1-2^x}{1+2^x} + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+2^x} = 0,$$

(utilizzando la gerarchia degli infiniti). Quindi la retta $y = -x$ è asintototo obliquo per la funzione quando x diverge a $+\infty$.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera del dominio.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x} + x\,\frac{-2^x \log 2(1+2^x) - 2^x \log 2(1-2^x)}{(1+2^x)^2} = \frac{1-2^x}{1+2^x} - \frac{x\,2^{x+1}\log 2}{(1+2^x)^2}$$

che si annulla in $x = 0$ ed è strettamente negativa per $x > 0$ in quanto somma di termini strettamente negativi. Quindi la funzione è strettamente decresecente nella semiretta $(0, +\infty)$ ed, essendo pari, ha un punto di massimo (assoluto) per $x = 0$.
7. Concavità e convessità: lo studio analitico della derivata seconda è decisamente complicato, quindi limitiamoci a una analisi qualitativa. Intorno al punto di massimo la funzione deve essere concava. D'altra parte, per x che diverge a $+\infty$ il grafico approssima l'asintoto $y = -x$ dall'alto, visto che

$$x\frac{1-2^x}{1+2^x} + x = \frac{2x}{1+2^x} > 0,$$

e quindi la funzione deve essere convessa per x grande. Se ne deduce che c'è sicuramente almeno un punto di flesso.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.47.

Svolgimento dell'esercizio 6.38. Funzione da studiare: $f(x) = 2^{\cos x}$.
1. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. La funzione è continua nel suo dominio in quanto composizione di funzioni continue.

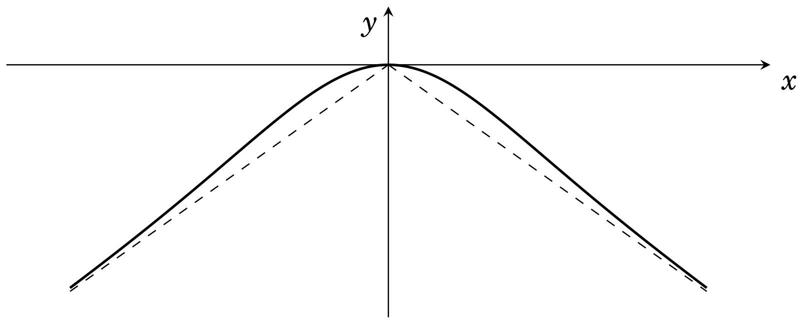


Figura 6.47: Grafico della funzione 6.37

2. Simmetrie e periodicità: la funzione è periodica di periodo 2π e pari ($f(-x) = f(x)$). Questo ci permette di studiarla solo per $x \in [0, \pi]$ e di ottenere il grafico prima estendendolo per simmetria a $[-\pi, \pi]$ e poi per periodicità a tutta la retta reale.
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione è sempre strettamente positiva e $f(0) = 2$.
4. Comportamento all'infinito: la funzione è periodica, quindi non ammette limite all'infinito.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = -\sin x \, 2^{\cos x} \log 2$$

che ha lo stesso segno e zeri di $-\sin x$. Quindi la funzione è strettamente decrescente in $(0, \pi)$ ed, essendo pari, strettamente crescente in $(-\pi, 0)$. In particolare, i punti di massimo saranno dati da $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e i punti di minimo da $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = 2^{\cos x} \log 2(\sin^2 x \log 2 - \cos x) \, .$$

La richiesta $f''(x) \geq 0$, con la sostituzione $t = \cos x$ diventa

$$t^2 \log 2 + t - \log 2 \leq 0 \iff t \in [t_1, t_2], \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\log^2 2}}{2 \log 2}.$$

Dal momento che $t_1 < -1$, mentre $0 < t_2 < 1$ la condizione diventa $\arccos t_2 \doteq x_0 \leq x \leq \pi$ (ricordare che la funzione coseno è decrescente in $[0, \pi]$. Quindi la funzione è convessa per $x \in (x_0, \pi)$, è concava in $(0, x_0)$ e ha un flesso per $x = x_0$.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.48.

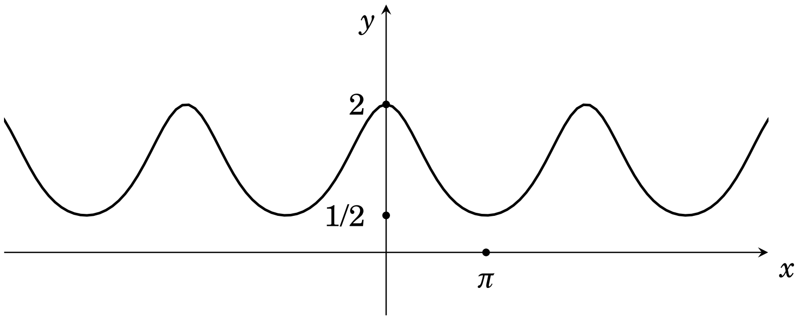


Figura 6.48: Grafico della funzione 6.38

Svolgimento dell'esercizio 6.39. Funzione da studiare: $\arctan(\sqrt{|x|})$.
1. Dominio: non ci sono restrizioni da imporre e $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. La funzione è continua nel suo dominio, in quanto prodotto e rapporto di funzioni continue.
2. Simmetrie e periodicità: la funzione è pari, quindi ci limiteremo a studiarla per $x \geq 0$ e otterremo il grafico completo per simmetria.
3. Segno e intersezioni con gli assi: la funzione si annulla per $x = 0$ ed è strettamente positiva in $(0, +\infty)$.
4. Comportamento all'infinito: si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(\sqrt{|x|}) = \frac{\pi}{2}$$

quindi $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per $f(x)$ quando x diverge a $+\infty$.
5. Limiti nei punti di frontiera del dominio: non ci sono punti di frontiera del dominio.
6. Crescenza e decrescenza, massimi e minimi: calcoliamo la derivata prima in $(0, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

che è strettamente positiva per $x > 0$. Quindi la funzione è strettamente cresecente nella semiretta $(0, +\infty)$ ed, essendo pari, ha un punto di minimo (assoluto) per $x = 0$.

Osserviamo che f non è derivabile in $x = 0$, dal momento che

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$$

per cui il grafico della funzione entra nell'origine a tangente verticale.
7. Concavità e convessità: calcoliamo la derivata seconda in $(0, +\infty)$:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - \sqrt{x}}{x(1+x)^2} = -\frac{1}{4} \frac{1+3x}{x^{3/4}(1+x)^2},$$

che è sempre strettamente negativa. Quindi la funzione è concava in $(0, +\infty)$.
8. Grafico della funzione: il grafico della funzione è disegnato in Figura 6.49.

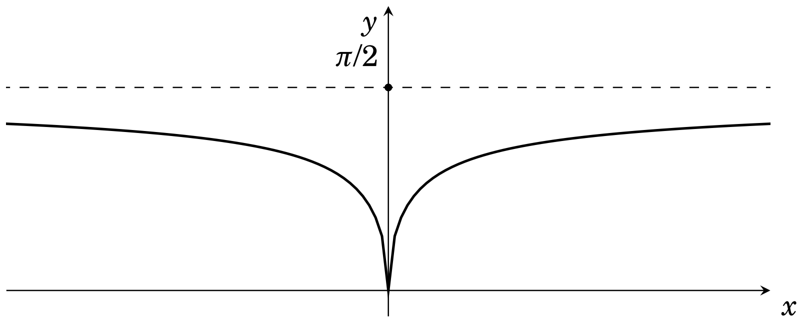


Figura 6.49: Grafico della funzione 6.39

7.5 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 7.1.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$, con numeratore e denominatore derivabili per ogni x. Vediamo se è possibile applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital; studiamo quindi il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \; . \tag{7.20}$$

Questo limite si presenta ancora in forma indeterminata del tipo $0/0$. Possiamo utilizzare il limite notevole calcolato nell'Esempio 3.33, ottenendo subito che il limite (7.20) vale $-1/6$. In alternativa possiamo vedere se è nuovamente applicabile il Teorema 7.2 di L'Hôpital, andando a studiare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} \; .$$

Per calcolare questo nuovo limite (che si presenta sempre in forma indeterminata del tipo $0/0$) possiamo utilizzare il limite notevole (3.26), ottenendo nuovamente il valore $-1/6$, oppure applicare ancora il Teorema 7.2 di L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6} \; .$$

In conclusione, il limite di partenza esiste e vale $-1/6$.

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x + 1}$. Si tratta del limite di una funzione razionale, che si presenta in forma indeterminata del tipo $0/0$. Questi casi possono essere sempre trattati utilizzando il Teorema 7.2 di L'Hôpital, o in alternativa si può utilizzare il metodo descritto nell'Approfondimento 3.42. Studiamo il limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x - 4}{3x^2 - 2} = \frac{-2}{1} = -2 \; .$$

Concludiamo quindi che il limite in questione esiste e vale -2.

3) $\lim_{x \to \pi} \frac{e^x \sin x}{\tan x} = -e^{\pi}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

5) $\lim_{x \to 2} \frac{e^x - 2}{x^2 - 4}$. In questo caso **non** è applicabile il Teorema 7.2 di L'Hôpital, in quanto in limite non si presenta in forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞: il numeratore tende infatti a $e^2 - 2$ (che è un numero positivo), mentre il denominatore tende a 0. Poiché il denominatore è positivo per $x > 2$ mentre è negativo per $x < 2$, concludiamo quindi che il limite in questione non esiste (il limite sinistro vale $-\infty$ mentre quello destro vale $+\infty$).

6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}\; e^{1/x}}{x+2} = 1.$

7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+1}$. Siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo $+\infty/+\infty$. Vediamo se è possibile applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital; a tale proposito studiamo il limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\cos x)\ .$$

Questo limite non esiste, ma ciò non significa necessariamente che anche il limite di partenza non esista. L'unica conclusione che si può trarre a questo punto è che non è possibile applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital. In realtà il limite richiesto esiste e vale 1; infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x[1+(\sin x)/x]}{x(1+1/x)} = 1\ .$$

(Si ricordi che $(\sin x)/x \to 0$ quando $x \to +\infty$.)

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - x/3}{x^2} = -\frac{1}{9}\ .$

Svolgimento dell'esercizio 7.2.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0. Dal momento che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x\cos(x^2)}{6x^5} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,,$$

per il Teorema 7.2 di L'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x\cos(x^2)}{6x^5} = \frac{1}{6}\,.$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}}{(\pi/2 - \arctan x)^2}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0. Ricordando che, per $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, il limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}}{\arctan^2(1/x)} \overset{[y=1/x]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1 - y}{\arctan^2 y}$$

e, dal momento che il limite del rapporto delle derivate è

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{2\arctan y}(1+y^2) = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}\,\frac{y}{\arctan y}(1+y^2) = \frac{1}{2}\,,$$

per il Teorema 7.2 di L'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}}{\arctan^2(1/x)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{2\arctan y}(1+y^2) = \frac{1}{2}.$$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x - \log(x+1))\sin x}{(e^{x^2} - 1)\log(x+1)}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Dal momento che sappiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\log(1+x)} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(e^{x^2} - 1)} = 1$$

ci basterebbe sapere che il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(x+1)}{x^2}$$

esiste e conoscerne il valore. Visto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}\,,$$

possiamo applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital, ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \frac{1}{2}\,.$$

In conclusione, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \log(x+1))\sin x}{(e^{x^2} - 1)\log(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \log(x+1))}{x^2}\,\frac{\sin x}{\log(x+1)}\,\frac{x^2}{(e^{x^2} - 1)} = \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital al rapporto di funzioni iniziale sarebbe stato tecnicamente molto più complicato.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x} - e^{x+1}}{e^x - 1 - \sin x}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Per vedere se è possibile applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital, vediamo se esiste il limite del rapporto delle derivate. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x e^{e^x} - e^{x+1}}{e^x - \cos x} = \lim_{x\to 0} e^x\,\frac{e^{e^x} - e}{e^x - \cos x},$$

che è nuovamente una forma indeterminata del tipo $0/0$. Dal momento che $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, ci basterebbe sapere se esiste e quanto vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x} - e}{e^x - \cos x}.$$

Proviamo ad applicare il Teorema 7.2 di L'Hôpital a questo limite, che si presenta ancora in forma indeterminata del tipo $0/0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x e^{e^x}}{e^x + \sin x} = e,$$

per cui anche

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x} - e}{e^x - \cos x} = e$$

e, in conclusione,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x} - e^{x+1}}{e^x - 1 - \sin x} = \lim_{x\to 0} e^x \, \frac{e^{e^x} - e}{e^x - \cos x} = e.$$

Svolgimento dell'esercizio 7.3. Osserviamo preliminarmente che per $x \to 0$ tutte le funzioni in questione tendono a zero, quindi sono tutte infinitesimi per $x \to 0$.

1) $f(x) = \sin x + x^2$ e $g(x) = \cos x - 1$; abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} + 1 \right) \frac{x^2}{\cos x - 1} \right| .$$

Poiché $(\sin x)/x \to 1$ e $x^2/(\cos x - 1) \to -2$ per $x \to 0$, la funzione dentro il valore assoluto tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to 0^-$; il valore assoluto di questa quantità tenderà quindi a $+\infty$. Concludiamo dunque che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$, cioè $g(x) = o(f(x))$.

2) $f(x) = \tan x$ e $g(x) = \sqrt[3]{x} - x^3$; ricordando che $\lim_{x\to 0} (\tan x)/x = 1$, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x}(1 - x^{3-1/3})} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{x^{2/3}}{1 - x^{8/3}} = 0 .$$

Di conseguenza, $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, cioè $f(x) = o(g(x))$, per $x \to 0$.

3) $f(x) = e^{x^2} - 1$ e $g(x) = 3x^2$; usando il limite notevole dell'esponenziale si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3} ,$$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

4) $f(x) = \sqrt[5]{1+x^2} - 1$ e $g(x) = x^2$; in questo caso si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{[y=x^2]}{=} \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{1/5}-1}{y} = \frac{1}{5} \ ,$$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

Svolgimento dell'esercizio 7.4.

1) Posto $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$, $f_1(x) = 4x - x^5$, $g(x) = 3\sqrt{x}$, $g_1(x) = \log(1+x^2)$, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1 + 4x - x^5}{3\sqrt{x} + \log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} \ ,$$

e queste quattro funzioni sono tutte infinitesime per $x \to 0^+$. Inoltre si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x - x^5}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} = \lim_{x\to 0^+} (4\sqrt{x} - x^{9/2}) \cdot \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{3\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^{3/2}}{3} = 0 \ ,$$

quindi $f_1(x)$ è un infinitesimo trascurabile rispetto a $f(x)$ e analogamente $g_1(x)$ è un infinitesimo trascurabile rispetto a $g(x)$. Per il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) otteniamo quindi che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \ .$$

2) Posto $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$, $f_1(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = 2x$, $g_1(x) = -5x^4$, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \cos x}{2x - 5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} \ ,$$

e queste quattro funzioni sono tutte infinitesime per $x \to 0$. Inoltre si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{g_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-5x^4}{2x} = 0,$$

quindi $f_1(x)$ è un infinitesimo trascurabile rispetto a $f(x)$ e analogamente $g_1(x)$ è un infinitesimo trascurabile rispetto a $g(x)$. Per il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) otteniamo quindi che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2x} = \frac{1}{6} \; .$$

Svolgimento dell'esercizio 7.5.

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, e^{1/x} \overset{[y=1/x]}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^\alpha} = +\infty \; .$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, |\log x|^\beta \overset{[y=1/x]}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{|-\log y|^\beta}{y^\alpha} = 0 \qquad (\alpha>0).$

3) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} \overset{[y=1/x]}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{e^y} = 0 \; .$

Svolgimento dell'esercizio 7.6.

1) $f(x) = x\,e^x$, $x_0 = 0$. Calcoliamo le prime due derivate di f e valutiamole in $x_0 = 0$:

$$f'(x) = e^x(x+1), \quad f''(x) = e^x(x+2) \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2 \; .$$

Lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ (o, se si preferisce, lo sviluppo di Mac Laurin) è dunque

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + o(x^2) = x + x^2 + o(x^2).$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare osservando che $e^x = 1+x+o(x)$, quindi $xe^x = x + x^2 + o(x^2)$.

2) $f(x) = x\,e^x$, $x_0 = 1$.

$$f(x) = e + 2\,e\;(x-1) + \frac{3\,e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \; .$$

3) $f(x) = \log(1+x+x^2)$, $x_0 = 2$.

$$f(x) = \log(7) + \frac{5}{7}\,(x-2) - \frac{11}{98}\,(x-2)^2 + o((x-2)^2) \; .$$

4) $f(x) = x^3 \sin x$, $x_0 = \pi$.

$$f(x) = -\pi^3\;(x-\pi) - 3\,\pi^2\,(x-\pi)^2 + o((x-\pi)^2) \; .$$

Svolgimento dell'esercizio 7.7.

1) Determiniamo lo sviluppo di Mac Laurin del numeratore al terz'ordine (come già spiegato, la scelta dell'ordine è dovuta al fatto che il denominatore è x^3):

$$e^x - 1 + \log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Utilizzando ora il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) concludiamo che il limite richiesto esiste e vale $-1/6$.

2) Determiniamo anche in questo caso lo sviluppo di Mac Laurin del numeratore al terz'ordine:

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+2x} + \log(1-x) - e^{-x^2}\\ &\qquad = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 1 + x^2 = \frac{x^3}{6} + o(x^3).\end{aligned}$$

Utilizzando ora il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) concludiamo che il limite richiesto esiste e vale $1/6$.

3) Lo sviluppo di Mac Laurin del denominatore fornisce

$$x \sin x = x(x + o(x)) = x^2 + o(x^2).$$

Sarà dunque sufficiente sviluppare anche il numeratore al secondo ordine:

$$\begin{aligned}2^{\cos x} - 2 &= 2^{1-x^2/2+o(x^2)} - 2 = 2 \cdot 2^{-x^2/2+o(x^2)} - 2 = 2 \cdot e^{[-x^2/2+o(x^2)]\log 2} - 2\\ &= 2\left(1 - \frac{x^2}{2}\log 2 + o(x^2)\right) - 2 = -x^2 \log 2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Utilizzando ora il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) concludiamo che il limite richiesto esiste e vale $-\log 2$.

4) Vista la presenza del fattore $1/x^4$, sarà opportuno sviluppare il fattore in parentesi fino al quarto ordine; utilizzando lo sviluppo di Mac Laurin della funzione $\sin^2 x$ già calcolato in (7.15) si ha

$$\frac{x^2}{1-x} - \sin^2 x - x^3 = x^2(1 + x + x^2 + o(x^2)) - x^2 + \frac{x^4}{3} - x^3 = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4).$$

Utilizzando ora il Principio di sostituzione degli infinitesimi (Teorema 3.47) concludiamo che il limite richiesto esiste e vale $4/3$.

Svolgimento dell'esercizio 7.8.

1) $3\arctan x - 2x\cos x - x$

$$\begin{aligned}
&3\arctan x - 2x\cos x - x\\
&= 3\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - x\\
&= 3x - x^3 + \frac{3}{5}x^5 - 2x + x^3 - \frac{x^5}{12} - x + o(x^5) = \frac{31}{60}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

quindi si tratta di un infinitesimo di ordine 5 con parte principale $\frac{31}{60}x^5$.

2) $\dfrac{\pi - 2\arctan(1/x^2)}{\sin(4x)}$
Ricordando che $\pi - 2\arctan(1/x^2) = 2\arctan(x^2)$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\pi - 2\arctan(1/x^2)}{\sin(4x)} &= \frac{2\arctan(x^2)}{\sin(4x)} = 2\frac{x^2 + o(x^2)}{4x + o(x^2)} = \frac{1}{2x}\frac{x^2 + o(x^2)}{1 + o(x)}\\
&= \frac{1}{2x}(x^2 + o(x^2))(1 + o(x)) = \frac{x}{2} + o(x),
\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato il Teorema 7.24(iv). Quindi la nostra funzione è un infinitesimo di ordine 1 con parte principale $\dfrac{x}{2}$.

3) $\log\left(x + e^{-x}\right) - x\log(1 + 2x)$

$$\begin{aligned}
&\log\left(x + e^{-x}\right) - x\log(1 + 2x)\\
&= \log\left(x + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x\left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)\right)\\
&= \log\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),
\end{aligned}$$

quindi si tratta di un infinitesimo di ordine 2 con parte principale $-\frac{3}{2}x^2$.

4) $\left(e^x - e^{\sqrt{1+2x}-1}\right)^2$.
Osserviamo preliminarmente che

$$\sqrt{1 + 2x} - 1 = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2) - 1 = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

da cui otteniamo

$$
\begin{aligned}
e^{\sqrt{1+2x}-1} &= 1+\sqrt{1+2x}-1+\frac{(\sqrt{1+2x}-1)^2}{2}+o((\sqrt{1+2x}-1)^2\\
&= 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^2)=1+x+o(x^2).
\end{aligned}
$$

Usando questa informazione otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\left(e^x-e^{\sqrt{1+2x}-1}\right)^2=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(1+x+o(x^2))\right)^2\\
&=\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2=\frac{x^4}{4}+o(x^4),
\end{aligned}
$$

quindi si tratta di un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $\dfrac{x^4}{4}$.

Svolgimento dell'esercizio 7.9.

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$

Cambiando variabile $y=1/x$ il limite diventa una forma indeterminata del tipo $0/0$:

$$
\lim_{y\to0^+}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\log(1+\sin y)\right]=\lim_{y\to0}\frac{y-\log(1+\sin y)}{y^2}.
$$

Per risolvere l'indeterminazione utilizziamo la formula di Taylor per il seno e il logaritmo:

$$
\begin{aligned}
y-\log(1+\sin y) &= y-\log\left(1+y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)\\
&= y-\left(y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}y^2+o(y^2).
\end{aligned}
$$

In conclusione, utilizzando quanto ottenuto e il Principio di sostituzione degli infinitesimi, si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] &= \lim_{y\to0}\frac{y-\log(1+\sin y)}{y^2}\\
&= \lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{2}y^2+o(y^2)}{y^2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x}$

Osserviamo che, essendo $1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2)$, il denominatore è un infinitesimo di ordine 2 per cui anche il numeratore va sviluppato all'ordine 2. Abbiamo che

$$5^x = 1 + \log(5)x + \frac{\log^2(5)}{2}x^2 + o(x^2)\,.$$

Inoltre, $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ e $(\tan x)'' = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$, quindi $\tan x = x + o(x^2)$. Ne segue che

$$5^{1+\tan^2 x} - 5 = 5(5^{\tan^2 x} - 1) = 5(\log(5)(\tan^2 x) + o(x^2)) = 5(\log(5)x^2 + o(x^2))$$

e, in conclusione, per il Principio di sostituzione degli infinitesimi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{5(\log(5)x^2 + o(x^2))}{x^2/2 + o(x^2)} = 10\log 5.$$

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1 + x\arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}$

Il denominatore è $\sqrt{1 + 2x^4} - 1 = x^4 + o(x^4)$, quindi anche il numeratore va sviluppato all'ordine 4. Si ha che

$$\begin{aligned}
&\log(1 + x\arctan x) + 1 - e^{x^2} \\
&= \log\left(1 + x\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\right) + 1 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) \\
&= x\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} - x^2\frac{x^4}{2} + o(x^4) = -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

e, utilizzando il Principio di sostituzione degli infinitesimi, possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{4}{3}.$$

4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{12\log\left(1 + \sin(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x}\right) + 2x - \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[10]{1 + x} - 1\right)}{\log^2(1 + \sqrt{x}) + x\sqrt{x} - \sin x}$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\log^2(1+\sqrt{x}) + x\sqrt{x} - \sin x \\
&\qquad = \left(x^{1/2} - \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)^2 + x^{3/2} - x + o(x^2) \\
&\qquad = x + \frac{x^2}{4} - x^{3/2} + 2\frac{x^2}{3} + x^{3/2} - x + o(x^2) = \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

quindi dobbiamo sviluppare anche il numeratore all'ordine 2. Dal momento che

$$\begin{aligned}
&\log\left(1 + \sin(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x}\right) = \log\left(1 + x^{1/3} - \frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{5!} + o(x^2) - x^{1/3}\right) \\
&= \log\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{5!} + o(x^2)\right) \\
&= \left(-\frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{5!} + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{5!} + o(x^2)\right)^2 \\
&= -\frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{120} - \frac{x^2}{72} + o(x^2)
\end{aligned}$$

e

$$\sqrt[10]{1+x} = 1 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{2}\frac{1}{10}\left(-\frac{9}{10}\right)x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{10}x + \frac{9}{200}x^2 + o(x^2)\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
&12\log\left(1 + \sin(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x}\right) + 2x - \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[10]{1+x} - 1\right) \\
&= 12\left(-\frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{120} - \frac{x^2}{72} + o(x^2)\right) + 2x - x^{2/3}\left(\frac{1}{10}x + \frac{9}{200}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= -\frac{x^2}{6} + o(x^2).
\end{aligned}$$

A questo punto il limite richiesto è calcolabile con il Principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{12\log\left(1 + \sin(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x}\right) + 2x - \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[10]{1+x} - 1\right)}{\log^2(1+\sqrt{x}) + x\sqrt{x} - \sin x} \\
&\qquad = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{6} + o(x^2)}{\frac{11}{12}x^2 + o(x^2)} = -\frac{2}{11}.
\end{aligned}$$

8.6 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 8.1.

1) $f(x) = a + b\cos x$, $I = [-\pi, \pi]$

Si ha che

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a+b\cos x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(ax+b\sin x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(a\pi+b\sin\pi+a\pi-b\sin(-\pi)) = a$$

e l'uguaglianza $a + b\cos(\xi) = a$ in $[-\pi, \pi]$ vale per $\xi = -\pi/2$ e $\xi = \pi/2$.

2) $f(x) = x^2$, $I = [0, 2]$

Si ha che

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

e l'uguaglianza $\xi^2 = 4/3$ in [0,2] vale per $\xi = 2/\sqrt{3}$.

3) $f(x) = \sin^2 x$, $I = [0, \pi]$

Come primo passo, dobbiamo calcolare l'integrale di f. Osserviamo che, per motivi di simmetria, l'integrale della funzione $\sin^2(x)$ è lo stesso negli intervalli $[0, \pi/2]$ e $[\pi/2, \pi]$. D'altra parte, la funzione $\cos^2(x)$ si ottiene come traslazione di $\pm\pi/2$ di $\sin^2(x)$; di conseguenza

$$\int_0^{\pi}\cos^2(x)\,dx = \int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx.$$

Inoltre, per la linearità dell'integrale, si ha che

$$\int_0^{\pi}\cos^2(x)\,dx + \int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx = \int_0^{\pi}1\,dx = \pi,$$

per cui $\int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx = \pi/2$ e

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

L'uguaglianza $\sin^2\xi = 1/2$ in $[0, \pi]$ vale per $\xi = \pi/4$ e $\xi = 3\pi/4$.

Svolgimento dell'esercizio 8.2.

1) $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{[x]^2},\ b \geq 1$

La funzione integranda è costante a tratti e, per l'additività dell'integrale di Riemann rispetto all'intervallo, si ha

$$\int_1^b \frac{dx}{[x]^2} = \sum_{k=1}^{[b]-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}\,dx + \int_{[b]}^b \frac{1}{[b]^2}\,dx = \sum_{k=1}^{[b]-1}\frac{1}{k^2} + \frac{b-[b]}{[b]^2}.$$

2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$

Utilizzando l'additività dell'integrale di Riemann rispetto all'intervallo e ricordando che $[x]=0$ in $[0,1)$ e $[x]=1$ in $[1,\sqrt{3}]$, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+(x-[x])^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+(x-1)^2} \\ &= \arctan x\Big|_0^1 + \arctan(x-1)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} + \arctan(\sqrt{3}-1).\end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 8.3. Fissato un qualsiasi $x_0 \in I$, consideriamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

che, per il Teorema di Torricelli, è derivabile con derivata $F'(x) = f(x)$. Inoltre, per l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo, abbiamo che

$$\begin{aligned}H(x) &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt = \int_{g_1(x)}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{g_2(x)} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{g_2(x)} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{g_1(x)} f(t)\,dt = F(g_2(x)) - F(g_1(x)).\end{aligned}$$

Usando il teorema di derivazione di somma e delle funzioni composte, si ottiene

$$\begin{aligned}H'(x) &= (F(g_2(x)) - F(g_1(x)))' = F'(g_2(x))g_2'(x) - F'(g_1(x))g_1'(x) \\ &= f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x).\end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 8.4. F è la funzione integrale di un'integranda continua su tutta la retta reale, quindi per il Teorema di Torricelli è derivabile (e quindi continua) su $\mathbb{R}$. Inoltre $F(0)=0$, per cui F è un infinitesimo per $x \to 0$. Ancora per il Teorema di Torricelli si ha che $F'(x) = \sin(x^2)$ da cui segue che $F'(0)=0$ e che esistono le derivate di F di ogni ordine definite su tutto $\mathbb{R}$. In particolare si ha $F''(x) = 2x\cos(x^2)$ e $F''(0)=0$ e, infine, $F'''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$ e $F'''(0)=2$. Utilizzando la formula di Taylor di ordine 3 per F centrata in $x_0 = 0$, otteniamo

$$F(x) = \frac{F'''(0)}{3!}\,x^3 = \frac{2}{3!}\,x^3 + o(x^3)$$

per cui F è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $x^3/3$.

Svolgimento dell'esercizio 8.5.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}\frac{e^t}{3\sqrt{1+t^2}}\,dt$

Le due funzioni

$$f(x)=\int_0^{x^2}\frac{e^t}{3\sqrt{1+t^2}}\,dt,\qquad g(x)=x^2$$

sono infinitesime per $x\to 0$, per cui il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$ (la funzione f è la funzione integrale di un'integranda continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi è a sua volta continua e derivabile su $\mathbb{R}$). Proviamo ad usare il Teorema di L'Hôpital: utilizzando l'Esercizio 8.3 si ha che

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}}{3\sqrt{1+x^4}}2x\,,$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{3}.$$

Applicando il Teorema di L'Hôpital, si ottiene che anche il limite richiesto vale $1/3$.

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2}\int_0^{\log^2(1+x)}\sqrt{4+t^2}\,dt$

Le due funzioni

$$f(x)=2\int_0^{\log^2(1+x)}\sqrt{4+t^2}\,dt,\qquad g(x)=x^2$$

sono infinitesime per $x\to 0$, per cui il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$ (la funzione f è la funzione integrale di un'integranda continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi è a sua volta continua e derivabile su $\mathbb{R}$). Proviamo ad usare il Teorema di L'Hôpital: utilizzando l'Esercizio 8.3 si ha che

$$f'(x)=4\log(1+x)\frac{1}{1+x}\sqrt{4+\log^4(1+x)}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}2\frac{\log(1+x)}{x}\frac{\sqrt{4+\log^4(1+x)}}{1+x}=4$$

Applicando il Teorema di L'Hôpital, si ottiene che anche il limite richiesto vale 4.

Svolgimento dell'esercizio 8.6. La funzione integranda è continua sulla semiretta $(1, +\infty)$, quindi per ogni $n \geq 2$ possiamo applicare il teorema della media integrale nell'intervallo $[n, n+1]$, determinando $c_n \in [n, n+1]$ tale che

$$\int_n^{n+1} \frac{x \log x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{c_n \log c_n}{c_n^2 - 1}.$$

Per il Teorema del confronto si ha che $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ e, in conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x \log x}{x^2 - 1}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n \log c_n}{c_n^2 - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log c_n}{c_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{c_n^2}} = 0$$

(nell'ultimo limite si è usata la gerarchia degli infiniti).

Svolgimento dell'esercizio 8.7. La dimostrazione è del tutto analoga a quella fatta per le sommatorie nell'Esercizio 2.24(b). Se introduciamo i due valori

$$A = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \qquad B = \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{1/q},$$

per la disuguaglianza di Young abbiamo che

$$\frac{|f(x)|}{A} \frac{|g(x)|}{B} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{A} \right)^q \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

e, per la monotonia dell'integrale definito,

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{A} \frac{|g(x)|}{B}\, dx \leq \int_a^b \left[\frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{A} \right)^q \right] dx.$$

Usando la linearità dell'integrale definito si conclude che

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \int_a^b |f(x)|\, |g(x)|\, dx &\leq \frac{1}{p\, A^p} \int_a^b |f(x)|^p\, dx + \frac{1}{q\, B^q} \int_a^b |f(x)|^q\, dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

ossia

$$\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|\, dx \leq AB = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{1/q}.$$

Svolgimento dell'esercizio 8.8.
(i) Si ha che

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\overset{[f(a)=0]}{=} |f(x)-f(a)| \overset{[\text{Torricelli}]}{=} \left| \int_a^x f'(t)\,dt \right| \\
&\overset{[\text{assoluta int.}]}{\leq} \int_a^x |f'(t)|\,dt \leq \int_a^b |f'(t)|\,dt.
\end{aligned}
$$

(ii) Usando la stima (i) e la monotonia dell'integrale otteniamo

$$
\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |f'(t)|\,dt \right) dx = (b-a) \int_a^b |f'(x)|\,dx,
$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo semplicemente calcolato l'integrale definito di una funzione costante.
(iii) Fissato $p>1$ e q tale che $1/p+1/q=1$, utilizzando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f'(x)|\,dx &\leq \left(\int_a^b |f'(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b 1^q\,dx \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_a^b |f'(x)|^p\,dx \right)^{1/p} (b-a)^{1-1/p}.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi

$$
|f(x)|^p \overset{[(i)]}{\leq} \left(\int_a^b |f'(x)|\,dx \right)^p \overset{[(ii)]}{\leq} \left(\int_a^b |f'(x)|^p\,dx \right) (b-a)^{p-1}
$$

e, grazie alla monotonia dell'integrale definito, si conclude che

$$
\int_a^b |f(x)|^p dx \leq (b-a) \left(\int_a^b |f'(x)|^p\,dx \right) (b-a)^{p-1}.
$$

Svolgimento dell'esercizio 8.9.

1) Si ha che $f(x)=x^3+x^2 \leq g(x)=x^3+1$ per ogni $x \in [-1,1]$ (si veda la Figura 8.10 a sinistra). Di conseguenza, l'area A della regione di piano compresa fra il grafico delle due funzioni è data da

$$
A = \int_{-1}^1 [g(x)-f(x)]\,dx = \int_{-1}^1 [1-x^2]\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}\,.
$$

2) Cominciamo a vedere dove la funzione $f(x)=\sin x$ è maggiore della funzione $g(x)=\cos(2x)$ nell'intervallo $[0,\pi/4]$ (si veda la Figura 8.10 a destra).

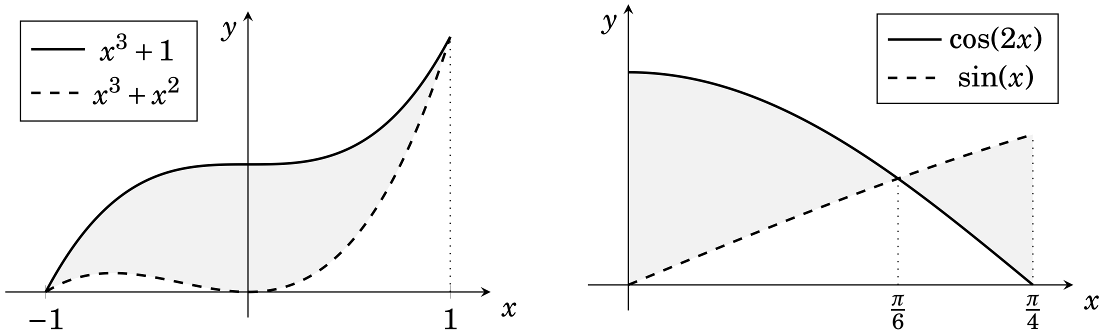


Figura 8.10: Esercizio 8.9

Poiché $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, questo equivale a vedere per quali valori di $x \in [0, \pi/4]$ è soddisfatta la disequazione

$$\sin x > 1 - 2\sin^2 x \ .$$

Posto $t = \sin x$ otteniamo la disequazione di secondo grado $2t^2 + t - 1 > 0$, che è soddisfatta per $t < -1$ oppure per $t > 1/2$. Tornando alla variabile x, otteniamo quindi le disequazioni $\sin x < -1$, che non è mai soddisfatta, e $\sin x > 1/2$ che, nell'intervallo $x \in [0, \pi/4]$, è soddisfatta per $\pi/6 < x \leq \pi/4$. Di conseguenza, l'area richiesta è data da

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/6} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{\pi/6}^{\pi/4} [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \left[\frac{\sin(2x)}{2} + \cos x\right]_0^{\pi/6} - \left[\frac{\sin(2x)}{2} + \cos x\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{3\sqrt{3} - 3 - \sqrt{2}}{2} \ . \end{aligned}$$

3) $A = \displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1 - 2x^2)\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \ .$

4) $A = \displaystyle\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \overset{\text{[simm.]}}{=} 2\int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx$

$\displaystyle = 2\left[\int_0^1 [4 - x - (1 - x^2)]\, dx + \int_1^2 (4 - x)\, dx\right] = \frac{32}{3} \ .$

Svolgimento dell'esercizio 8.10. Osserviamo che entrambe le funzioni sono continue su tutto $\mathbb{R}$, quindi possono essere integrate negli intervalli dati. Poiché però sono definite utilizzando due leggi, conviene utilizzare la proprietà additiva rispetto all'intervallo di integrazione per spezzare gli integrali:

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{17}{6} \ .$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{e-1} g(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx + \int_{0}^{e-1} \log(1+x)\,dx \\ &= [-\cos x]_{-\pi}^{0} + [(x+1)\log(x+1) - x]_{0}^{e-1} = -2+1 = -1\,.\end{aligned}$$

9.8 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 9.1.

1) $\int x^2 e^x\,dx = \left[\substack{(x^2)'=2x \\ \int e^x\,dx=e^x}\right] = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left[\substack{(x)'=1 \\ \int e^x\,dx=e^x}\right] =$
$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c\,.$

2) $I(x) = \int e^x \cos x\,dx$. Si procede con una doppia integrazione per parti come nell'Esempio 8.23, ottenendo $I(x) = e^x(\sin x + \cos x) - I(x)$ da cui

$$I(x) = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + c\,.$$

3) $\int x\log x\,dx = \left[\substack{(\log x)'=1/x \\ \int x\,dx=x^2/2}\right] = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c\,.$

4) $\int x\cos(x+3)\,dx = \left[\substack{(x)'=1 \\ \int \cos(x+3)\,dx=\sin(x+3)}\right] = x\sin(x+3) - \int \sin(x+3)\,dx$
$= x\sin(x+3) + \cos(x+3) + c\,.$

Svolgimento dell'esercizio 9.2.

1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \left[\substack{y=\sin x \\ dy=\cos x\,dx}\right] = \int \frac{1}{\sqrt{1+y}}\,dy = \int (1+y)^{-1/2}\,dy$
$= 2(1+y)^{1/2} + c = 2\sqrt{1+\sin x} + c\,.$

2) $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \left[\substack{y=\log x \\ dy=1/x\,dx}\right] = \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| + c = \log|\log x| + c\,.$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x/3)^2}}\,dx = \left[\substack{y=2x/3 \\ dy=2/3\,dx}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$
$= \frac{\arcsin y}{2} + c = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + c\,.$

4) $\int \frac{1}{x^2+16}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{(x/4)^2+1}\,dx = \left[\substack{y=x/4 \\ dy=1/4\,dx}\right] = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy =$
$= \frac{\arctan y}{4} + c = \frac{\arctan(x/4)}{4} + c\,.$

5) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\substack{y=\sqrt{x} \\ dy=1/(2\sqrt{x})\,dx}\right] = 2\int e^y\,dy = 2e^y + c = 2e^{\sqrt{x}} + c\,.$

6) $\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \left[\substack{y=\log x \\ dy=1/x\,dx}\right] = \int \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\log x)^{3/2} + c\,.$

7) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x \, dx = \left[\begin{smallmatrix} y=\sin x \\ dy=\cos x\, dx \end{smallmatrix}\right] =$
$= \int y^2(1-y^2)\, dy = \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{y^5}{5} + c = \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + c$.

Svolgimento dell'esercizio 9.3.

1) $I(x) = \int \dfrac{2x^3-3x^2+2x-4}{x^2+4}\, dx$. Osserviamo che il grado nel numeratore non è minore di quello del denominatore, quindi occorre eseguire la divisione fra polinomi:

$$\begin{array}{llll|l} 2x^3 & -3x^2 & +2x & -4 & x^2+4 \\ \cline{5-5} 2x^3 & & +8x & & 2x-3 \text{ (quoziente)} \\ \cline{1-4} & -3x^2 & -6x & -4 & \\ & -3x^2 & & -12 & \\ \cline{1-4} & & -6x & +8 \text{ (resto)} & \end{array}$$

Osserviamo che il denominatore è un polinomio irriducibile di secondo grado. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(2x-3+\frac{-6x+8}{x^2+4}\right) dx \\ &= x^2-3x-3\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx + 8\int \frac{1}{x^2+4}\, dx \\ &= x^2-3x-3\log(x^2+4)+4\arctan\frac{x}{2}+c\ . \end{aligned}$$

2) $\int \dfrac{6x^2+14x-20}{x^3-4x}\, dx = 5\log|x| - 3\log|x+2| + 4\log|x-2| + c$ (osservare che $x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$).

3) $\int \dfrac{7x-6}{x^2-x-6}\, dx = 3\log|x-3| + 4\log|x+2| + c$.

4) $\int \dfrac{x^2+46x-48}{x^3+5x^2-24x}\, dx = 2\log|x| - 4\log|x+8| + 3\log|x-3| + c$ (osservare che $x^3+5x^2-24x = x(x^2+5x-24) = x(x+8)(x-3)$).

5) $\int \dfrac{6x^2+7x+21}{(x+5)(x^2+9)}\, dx = 4\log|x+5| + \log(x^2+9) - \arctan\dfrac{x}{3} + c$.

6) $I(x) = \int \dfrac{5x^3-26x^2+37x-25}{(x-2)^2(x^2+1)}\, dx$. Il numeratore è di grado inferiore rispetto al denominatore. Possiamo quindi procedere col metodo di scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{5x^3-26x^2+37x-25}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\ .$$

Facendo il denominatore comune a secondo membro e uguagliando poi i numeratori si ottiene:

$$5x^3 - 26x^2 + 37x - 25 = A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2 \ .$$

Svolgendo le operazioni a secondo membro, raccogliendo i termini di uguale grado e utilizzando il Principio di Identità dei Polinomi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A + C = 5, \\ -2A + B - 4C + D = -26, \\ A + 4C - 4D = 37, \\ -2A + B + 4D = -25, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = -3, \\ C = 4, \\ D = -5. \end{cases}$$

(Il sistema può essere risolto, ad esempio, per sostituzione, ricavando $C = 5-A$ dalla prima equazione, sostituendo nella terza e ricavando $D = -(3A+17)/4$, sostituendo poi nella quarta per ricavare anche B in funzione della sola A.) Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{4x-5}{x^2+1} \right) dx \\ &= \log|x-2| + \frac{3}{x-2} + 2\log(x^2+1) - 5\arctan x + c \ . \end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 9.4.

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\, dx = \left[\substack{y=\sqrt{x},\ x=y^2 \\ dx=2y\,dy}\right] = \int \frac{y}{y^2-1}\, 2y\, dy = \int \left(2 + \frac{2}{y^2-1}\right) dy$

$\displaystyle = \int \left(2 + \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y-1}\right) dy = 2y + \log|y-1| - \log|y+1| + c$

$= 2\sqrt{x} + \log|\sqrt{x}-1| - \log(\sqrt{x}+1) + c \ .$

2) $\displaystyle\int \sin x \log(\cos x)\, dx = \cos x - \cos x \log(\cos x) + c$ (sostituzione $y = \cos x$, poi integrale del logaritmo per parti).

3) $\displaystyle I(x) = \int x^2 \arctan x\, dx = \left[\substack{(\arctan x)' = 1/(1+x^2) \\ \int x^2\, dx = x^3/3}\right] =$

$\displaystyle = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx \ .$

La funzione rimasta da integrare è una funzione razionale, con grado del numeratore non minore di quello del denominatore. Si può eseguire la divisione fra polinomi, oppure si può, più semplicemente, aggiungere e togliere x a numeratore:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx &= \int \frac{(x^3+x)-x}{1+x^2}\, dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{\log(1+x^2)}{2} + c \ . \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$I(x) = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{\log(1+x^2)}{6} + c \ .$$

4) $\displaystyle\int x \cos\sqrt{x}\, dx = 6(x-2)\cos\sqrt{x} + 2(x-6)\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + c$ (sostituzione $y=\sqrt{x}$, poi integrare tre volte per parti).

5) $\displaystyle\int \frac{x^3}{e^{-x^2}}\, dx = \int x^2\,(xe^{x^2})\, dx = \left[{}^{(x^2)'=2x}_{\int xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}/2}\right] = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \int xe^{x^2}\, dx$
$\displaystyle = \frac{x^2e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + c \ .$

6) $\displaystyle\int e^x \sin(3x+1)\, dx = e^x\,\frac{\sin(3x+1) - 3\cos(3x+1)}{10} + c$ (procedere con una doppia integrazione per parti come nell'Esempio 8.23).

7) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{1-x^2}\,(-2x)dx = \left[{}^{y=1-x^2}_{dy=-2x\,dx}\right]$
$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int (1-y)\sqrt{y}\, dy = -\frac{1}{2}\int (y^{1/2} - y^{3/2})\, dy = -\frac{y^{3/2}}{3} + \frac{y^{5/2}}{5} + c$
$\displaystyle = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{5/2}}{5} + c \ .$

8) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x\cos x\, dx = e^{\cos x}(1-\cos x) + c$ (sostituzione $y = \cos x$, poi per parti).

9) $\displaystyle\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\, dx = e^{\sqrt{x}}(2x - 4\sqrt{x} + 4) + c$ (sostituzione $y=\sqrt{x}$, poi due volte per parti).

10) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{25x^2+1}}\, dx = \frac{1}{50}\int 50x(25x^2+1)^{-1/2}\, dx \overset{\left[{}^{y=25x^2+1}_{dy=50x\,dx}\right]}{=} \frac{\sqrt{25x^2+1}}{25} + c \ .$

11) $\displaystyle\int e^{-2x}(x^2-x)\, dx = -\frac{x^2}{2}\, e^{-2x} + c \ .$

12) $\displaystyle\int x^2\,\log(1+x)\, dx = -\frac{x}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{9} + \frac{\log(1+x)}{3} + \frac{x^3\,\log(1+x)}{3} + c \ .$

13) $\displaystyle\int \frac{1+2\,x}{-5+2\,x+2\,x^2}\, dx = \frac{\log(-5+2\,x+2\,x^2)}{2} + c \ .$

14) $\displaystyle\int x^6(3+x^7)^4\, dx = \frac{(3+x^7)^5}{35} + c \ .$

15) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\,\arctan x}\, dx = \log|\arctan x| + c \ .$

16) $\displaystyle\int \frac{1}{2+x+x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{1+2\,x}{\sqrt{7}}\right)+c\ .$

17) $\displaystyle\int \frac{-1+3\,x+x^5}{2+x}\,dx = 19\,x-4\,x^2+\frac{4\,x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}-39\,\log|2+x|+c\ .$

18) $\displaystyle\int \tan x\cos^2 x\,dx = -\frac{\cos^2 x}{2}+c\ .$

19) $\displaystyle\int \frac{2\,x}{(2+x^2)\log(2+x^2)}\,dx = \begin{bmatrix} y=\log(2+x^2) \\ dy=\frac{2\,x}{2+x^2}\ dx\end{bmatrix} = \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|+c$
$= \log(\log(2+x^2))+c\ .$

20) $\displaystyle\int x^2\,\sin(2\,x-1)\,dx = \frac{(1-2\,x^2)\,\cos(2\,x-1)+2\,x\,\sin(2\,x-1)}{4}+c\ .$

21) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx = \frac{3}{x+2}+\log|x+2|+c\ .$

22) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{3}{4}\,\log|x-1|+\frac{5}{4}\,\log|x+3|+c\ .$

23) $\displaystyle\int \left(x^3-x\right)\left(x^4-2x^2+1\right)\,dx = \frac{(x^4-2x^2+1)^2}{8}+c\ .$

24) $\displaystyle\int \log(\sqrt{1+x})\,dx = \frac{(1+x)\,\log(1+x)}{2}-\frac{1+x}{2}+c\ .$

25) $\displaystyle\int e^x\,\arctan(1+e^x)\,dx = (1+e^x)\,\arctan(1+e^x)-\frac{\log(1+(1+e^x)^2)}{2}+c\ .$

26) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-\log^2 x}}{x}\,dx = \begin{bmatrix} y=\log x \\ dy=1/x\,dx\end{bmatrix} = \int \sqrt{1-y^2}\,dy \overset{(9.20)}{=}$
$\displaystyle= \frac{\arcsin y + y\sqrt{1-y^2}}{2}+c = \frac{\arcsin(\log x)+\log x\,\sqrt{1-\log^2 x}}{2}+c\ .$

Svolgimento dell'esercizio 9.5. Nello svolgimento degli integrali, in caso di integrazione per sostituzione, per brevità useremo la notazione semplificata $t=\phi(x)$, $dt=\phi'(x)\,dx$.

1) $\displaystyle\int 3^x\,dx$

Dal momento che

$$\int 3^x\,dx = \int e^{x\log 3}\,dx,$$

poniamo $t = x\log 3$ in modo tale che $dx = \dfrac{1}{\log 3}\,dt$. Sostituendo otteniamo

$$\int 3^x\,dx = \int e^t\cdot\frac{1}{\log 3}\,dt = \frac{1}{\log 3}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{\log 3}+c = \frac{e^{x\log 3}}{\log 3}+c = \frac{3^x}{\log 3}+c.$$

2) $\displaystyle\int 3^x e^x\,dx$

Dal momento che

$$\int 3^x e^x\,dx = \int (3e)^x\,dx = \int e^{x\log(3e)}\,dx$$

poniamo $t = x\log(3e)$ in modo tale che $dx = \dfrac{1}{\log(3e)}\,dt$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}\int 3^x e^x\,dx &= \int e^t \cdot \frac{1}{\log(3e)}\,dt = \frac{1}{\log(3e)}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{\log(3e)} + c \\ &= \frac{e^{x\log(3e)}}{\log(3e)} + c = \frac{(3e)^x}{\log(3e)} + c\,.\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int (a+bx^3)^2\,dx = \int (a^2+b^2x^6+2abx^3)\,dx$

$\displaystyle\quad = \int a^2\,dx + b^2\int x^6\,dx + 2ab\int x^3\,dx = a^2x + \frac{b^2x^7}{7} + \frac{abx^4}{2} + c\,.$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^9}\,dx = \int x^{-9}\,dx = -\frac{1}{8x^8} + c\,.$

5) $\displaystyle\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx$

Poniamo $t = nx$ in modo che $dx = \dfrac{1}{n}\,dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \left(t^{\frac{1-n}{n}} \cdot \frac{1}{n}\right)dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{1-n}{n}}\,dt = \frac{t^{\frac{1-n}{n}+1}}{\dfrac{1-n}{n}+1}\cdot\frac{1}{n} + c = \frac{y^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} + c = (nx)^{\frac{1}{n}} + c\,.$$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+7}\,dx = \int \frac{1}{7\left(\dfrac{x^2}{7}+1\right)}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{\left(\dfrac{x}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx\,.$

Poniamo $t = \dfrac{x}{\sqrt{7}}$ in modo che $dx = \sqrt{7}\,dt$. Sostituendo quindi:

$$\frac{1}{7}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\sqrt{7}\,dt = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan t + c = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c\,.$$

7) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c\,.$$

8) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x})\, dx = \int (x\sqrt{x} - x + x - \sqrt{x})\, dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}})\, dx$
$\displaystyle= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c\,.$

9) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

Poniamo $t = x^2 + 1$ in modo che $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Sostituendo quindi:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = t^{\frac{1}{2}} + c = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c\,.$$

10) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \log x}{x}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx + \int \frac{\log x}{x}\, dx\,.$

La risoluzione del primo integrale è immediata, mentre per il secondo poniamo $t = \log x$ in modo che $\dfrac{1}{x}\, dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int t\, dt = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{t^2}{2} + c = 2\sqrt{x} + \frac{\log^2 x}{2} + c\,.$$

11) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\, dx$

Poniamo $t = x^3$ in modo che $x^2\, dx = \frac{1}{3}\, dt$. Sostituendo quindi:

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{3} \arctan(t) + c = \frac{1}{3} \arctan(x^3) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\, dx\,.$

Attraverso il metodo di copertura di Heaviside ricaviamo che

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Da questo otteniamo che:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + c = \frac{1}{2} \log\left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c\,.$$

13) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$

Poniamo $t = e^x - 1$ in modo che $e^x\,dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log|e^x - 1| + c\,.$$

14) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 5}\,dx$

Poniamo $t = x^2 - 5$ in modo che $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Sostituendo quindi:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t| + c = \frac{1}{2}\log|x^2 - 5| + c\,.$$

15) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

Poniamo $t = e^x$ in modo che $e^x\,dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \frac{1}{1 + t^2}\,dt = \arctan t + c = \arctan(e^x) + c\,.$$

16) $\displaystyle\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

Poniamo $t = \sqrt{x}$ in modo che $\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,dt$. Sostituendo quindi:

$$2\int \cos t\,dt = 2\sin t + c = 2\sin(\sqrt{x}) + c\,.$$

17) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$

Poniamo $t = \cos x$ in modo che $\sin x\,dx = -\,dt$. Sostituendo quindi:

$$-\int \frac{1}{t^4}\,dt = \frac{1}{3t^3} + c = \frac{1}{3\cos^3 x} + c\,.$$

18) $\displaystyle\int \frac{\sin(3x)}{2 + \cos(3x)}\,dx$

Poniamo $t = 2 + \cos(3x)$ in modo che $\sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\,dt$. Sostituendo e osservando che $2 + \cos(3x) > 0$ otteniamo:

$$-\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{3}\log|t| + c = -\frac{1}{3}\log(2 + \cos(3x)) + c\,.$$

19) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

Per risolvere questo integrale utilizziamo le formule parametriche razionali, ricordando che

$$\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Si ottiene quindi:

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

Poniamo $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ in modo che $1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = 2\,dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c\,.$$

20) $\displaystyle\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

Poniamo $t = 5-x^2$ in modo che $x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$. Sostituendo quindi:

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt[5]{t}\,dt = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{5}}\,dt = -\frac{5}{12}t^{\frac{6}{5}} + c = -\frac{5}{12}(5-x^2)^{\frac{6}{5}} + c\,.$$

21) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\log x}}{x}\,dx$

Poniamo $t = 1+\log x$ in modo che $\frac{1}{x}\,dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \sqrt[3]{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}(1+\log x)^{\frac{4}{3}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

22) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin(x^2)}\,dx$

Poniamo $t = x^2$ in modo che $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Sostituendo quindi:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin(t)}\,dt \overset{\text{[Es.xx)]}}{=} \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{x^2}{2}\right) + c\,.$$

23) $\displaystyle\int \sqrt{e^x}\,dx = \int e^{\frac{x}{2}}\,dx$

Poniamo $t = \frac{x}{2}$ in modo che $dx = 2\,dt$. Sostituendo quindi:

$$2\int e^t\,dt = 2e^t + c = 2e^{\frac{x}{2}} + c\,.$$

24) $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

Considerato che $(\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$, per integrazione logaritmica avremo che:

$$-\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = -\log|\sin x + \cos x| + c\,.$$

25) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$

Per risolvere questo integrale utilizziamo l'integrazione per parti:

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Da cui:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \mathrm{settSh}(x) + c\,.$$

26) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

Poniamo $t = \log x$ in modo che $\dfrac{1}{x}\,dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log|\log x| + c\,.$$

27) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx$

Poniamo $t = \log x$ in modo che $\dfrac{1}{x}\,dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + c = -\frac{1}{2(\log x)^2} + c\,.$$

28) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

Poniamo $t = \cos x$ in modo che $\sin x\,dx = -dt$. Sostituendo quindi:

$$-\int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}\,dt = -\left(\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt - \int t^{\frac{3}{2}}\,dt\right) = -2t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + c = -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + c\,.$$

29) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-2}}\,dx\,.$

Poniamo $t = \sqrt{x^2-2}$ in modo che $x^2 = t^2+2$ e $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right)+c\,.\end{aligned}$$

30) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

Poniamo $t = x+4$ in modo che $x = t-4$ e $dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \frac{t-4}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt - 4\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 8t^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + c\,.$$

31) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

Poniamo $t = \sin x$ in modo che $\cos x\,dx = dt$. Sostituendo quindi:

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t + c = \arctan(\sin x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soluzione dell'esercizio 9.6.

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c\ .$$

Svolgimento dell'esercizio 9.7.

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+12}}\,dx = \left[{\scriptstyle y=x^2+3x+12 \atop dy=(2x+3)\,dx}\right] = \int_{16}^{22} y^{-1/2}\,dy = [2\sqrt{y}]_{16}^{22}$
$= 2\sqrt{22} - 8\,.$

2) $\displaystyle\int_0^1 (e^x+1)^4 e^x\,dx = \left[{\scriptstyle y=e^x+1 \atop dy=e^x\,dx}\right] = \int_2^{e+1} y^4\,dy = \left[\frac{y^5}{5}\right]_2^{e+1} = \frac{(e+1)^5-32}{5}\,.$

3) $\displaystyle\int_0^1 \log(9-x^2)\,dx = \left[{\scriptstyle f(x)=\log(9-x^2),\ f'(x)=-2x/(9-x^2) \atop g'(x)=1,\ g(x)=x}\right]$
$\displaystyle= \Big[x\log(9-x^2)\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{9-x^2}\,dx$

$$= \log 8 + \left[-2x + 3\log\left(\frac{3+x}{3-x}\right)\right]_0^1 6\log 2 - 2\,.$$

4) $\displaystyle\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} y=1/x \\ dy=-1/x^2\,dx \end{smallmatrix}\right] = -\int_1^{1/2} (1+y)^3\,dy = \left[\frac{(1+y)^4}{4}\right]_1^{1/2}$
$\displaystyle = \frac{175}{64}\,.$

5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\log x}}{x}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} y=\log x \\ dy=1/x\,dx \end{smallmatrix}\right] = \int_0^1 \sqrt[3]{y}\,dy = \left[\frac{3}{4}y^{4/3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}\,.$

6) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(x^4+\cos x+1)\sin x}{x^2+1}\,dx$

Si verifica facilmente che la funzione integranda è dispari. Poiché l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine si ha dunque

$$\int_{-1}^1 \frac{(x^4+\cos x+1)\sin x}{x^2+1}\,dx = 0\,.$$

7) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|e^{|x|}\,dx$

La funzione integranda è pari, per cui

$$\int_{-1}^1 |x|e^{|x|}\,dx = 2\int_0^1 |x|e^{|x|}\,dx = 2\int_0^1 xe^x\,dx\;.$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente per parti:

$$2\int_0^1 xe^x\,dx = \left[\begin{smallmatrix} (x)'=1 \\ \int e^x\,dx=e^x \end{smallmatrix}\right] = 2[x\,e^x]_0^1 - 2\int_0^1 e^x\,dx = 2e - 2(e-1) = 2\,.$$

8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} y=x^5+1 \\ dy=5x^4\,dx \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{5}\int_1^2 y^{-1/2}\,dy = \frac{2}{5}\,[\sqrt{y}]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-2}{5}\,.$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \left[\begin{smallmatrix} y=\sin x \\ dy=\cos x\,dx \end{smallmatrix}\right]$
$\displaystyle = \int_0^1 y^3(1-y^2)\,dy = \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\,.$

10) $\displaystyle\int_{-4}^4 |(x-2)(x+3)|\,dx$

Definiamo la funzione $f(x) = (x-2)(x+3)$; poiché dobbiamo calcolare $\int_{-4}^4 |f(x)|\,dx$, è opportuno studiare il segno di f per poi eliminare il valore assoluto dall'integrale. Poiché $f(x) < 0$ per $x \in (-3, 2)$, mentre $f(x) \geq 0$ per gli altri valori di x, abbiamo che

$$\int_{-4}^{4} |f(x)|\, dx = \int_{-4}^{-3} f(x)\, dx - \int_{-3}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{4} f(x)\, dx\ .$$

Una primitiva di $f(x)$ è $x^3/3 + x^2/2 - 6x$; otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4} |(x-2)(x+3)|\, dx = &\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-4}^{-3} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{2} \\ &+ \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4} = \frac{109}{3}\ .\end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 9.8.

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\, dx \left[\begin{smallmatrix} y=2x+1 \\ dy=2\,dx \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\log y}{y^2}\, dx = \left[\begin{smallmatrix} (\log y)'=1/y \\ \int y^-2=-y^{-1} \end{smallmatrix}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{y}\log y\right]_1^5 + \int_1^5 \frac{1}{y^2}\, dy\right) = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{y}\log y - \frac{1}{y}\right]_1^5\right) = -\frac{1}{10}\log 5 + \frac{4}{10}\,.$$

2) $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x - 3\sqrt{x}+2}\, dx = \left[\begin{smallmatrix} y=\sqrt{x} \\ dx=2y\,dy \end{smallmatrix}\right]$

$$\begin{aligned}&= 2\int_3^4 \frac{y^2-3y}{y^2-3y+2}\, dy = 2\int_3^4 \left(1 - \frac{2}{y^2-3y+2}\right) dy \\ &= 2 - 4\int_3^4 \frac{1}{y^2-3y+2}\, dy = 2 - 4\left(-\int_3^4 \frac{1}{y-1}\, dy + \int_3^4 \frac{1}{y-2}\, dy\right) \\ &= 2 - 4\left[-\log|y-1| + \log|y+2|\right]_3^4 = 2 + 4\log 3 - 8\log 2\,.\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x\, dx - \int_0^1 4(x-1)\arctan x\, dx + \int_1^{\sqrt{3}} 4(x-1)\arctan x\, dx\,.$

Cerchiamo una primitiva della funzione $f(x) = (x-1)\arctan x$:

$$\begin{aligned}&\int (x-1)\arctan x\, dx = \left[\begin{smallmatrix} (\arctan x)'=1/(1+x^2) \\ \int (x-1)=x^2/2-x \end{smallmatrix}\right] \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-2x}{1+x^2}\, dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1-2x}{1+x^2}\, dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x + c.\end{aligned}$$

Indicando con $F(x)$ la primitiva corrispondente a $c = 0$, per il Teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x \, dx &= -4F(1) + 4F(0) + 4F(\sqrt{3}) - 4F(1) \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 4(2-\sqrt{3})\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 9.9.

1) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\, dx$
Dal momento che

$$\int \frac{x}{e^x}\, dx = \int xe^{-x}\, dx$$

ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = -e^{-x}, \quad f'(x) = e^{-x}, \qquad g(x) = x, \quad g'(x) = 1$$

Da cui:

$$\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2) $\displaystyle\int x \sin x \cos x \, dx$
Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{2}, \quad f'(x) = \sin x \cos x, \qquad g(x) = x, \quad g'(x) = 1$$

Da cui:

$$\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{x \sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin^2 x \, dx$$

È necessario risolvere per parti anche $\int \sin^2 x \, dx$:

$$f(x) = -\cos x, \quad f'(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin x, \quad g'(x) = \cos x$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int 1 - \sin^2 x \, dx \\ 2\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + x + c \\ \int \sin^2 x \, dx &= -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + c\,.\end{aligned}$$

Sostituendo quindi nell'integrale che ci interessa:

$$\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{x \sin^2 x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{4} - \frac{x}{4} + c\,.$$

3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$
Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = 2\sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad g(x) = \log x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Da cui:

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\log x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + c\,.$$

4) $\displaystyle\int \arctan x \, dx$
Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = x, \quad f'(x) = 1, \qquad g(x) = \arctan x, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Da cui:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c\,.$$

5) $\displaystyle\int x\cos(3x)\, dx$ Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = \frac{1}{3}\sin(3x), \quad f'(x) = \cos(3x), \qquad g(x) = x, \quad g'(x) = 1$$

Da cui:

$$\int x\cos(3x)\, dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\, dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + c\,.$$

6) $\displaystyle\int 3^x \cos x \, dx$
Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = \frac{3^x}{\log 3}, \quad f'(x) = 3^x, \qquad g(x) = \cos x, \quad g'(x) = -\sin x$$

Da cui:

$$\int 3^x \cos x \, dx = \frac{3^x}{\log 3}\cos x + \frac{1}{\log 3}\int 3^x \sin x \, dx$$

È necessario risolvere per parti anche $\int 3^x \sin x\, dx$:

$$f(x) = \frac{3^x}{\log 3}, \quad f'(x) = 3^x, \qquad g(x) = \sin x, \quad g'(x) = \cos x$$

Quindi:

$$\int 3^x \sin x\, dx = \frac{3^x}{\log 3} \sin x - \frac{1}{\log 3} \int 3^x \cos x\, dx$$

Sostituendo quindi nell'integrale che ci interessa:

$$\begin{aligned}
\int 3^x \cos x\, dx &= \frac{3^x}{\log 3} \cos x + \frac{1}{\log 3} \left(\frac{3^x}{\log 3} \sin x - \frac{1}{\log 3} \int 3^x \cos x\, dx \right) \\
\int 3^x \cos x\, dx &= \frac{3^x}{\log 3} \cos x + \frac{3^x}{(\log 3)^2} \sin x - \frac{1}{(\log 3)^2} \int 3^x \cos x\, dx \\
\left(1 + \frac{1}{(\log 3)^2}\right) \int 3^x \cos x\, dx &= \frac{3^x}{\log 3} \cos x + \frac{3^x}{(\log 3)^2} \sin x + c \\
\int 3^x \cos x\, dx &= \frac{\log 3}{1 + (\log 3)^2} 3^x \cos x + \frac{3^x}{1 + (\log 3)^2} \sin x + c\,.
\end{aligned}$$

7) $\int e^x \cos x\, dx$

Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \qquad g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x$$

Da cui:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

È necessario risolvere per parti anche $\int e^x \sin x\, dx$:

$$f(x) = -\cos x, \quad f'(x) = \sin x, \qquad g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x$$

Quindi:

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

Sostituendo quindi nell'integrale che ci interessa:

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x\, dx &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx \\
2 \int e^x \cos x\, dx &= e^x \sin x + e^x \cos x + c \\
\int e^x \cos x\, dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c\,.
\end{aligned}$$

8) $\int x^2 e^x \cos x \, dx$
Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x), \quad f'(x) = e^x \cos x, \qquad g(x) = x^2, \quad g'(x) = 2x$$

Da cui:

$$\int x^2 e^x \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} e^x(\sin x + \cos x) - \int x e^x(\sin x + \cos x) \, dx$$

È necessario risolvere per parti anche $\int x e^x(\sin x + \cos x)\, dx$:

$$f(x) = e^x \sin x, \quad f'(x) = e^x(\sin x + \cos x), \qquad g(x) = x, \quad g'(x) = 1.$$

Quindi:

$$\int x e^x(\sin x + \cos x) \, dx = x e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Ricordando che

$$\int e^x \sin x \, dx \overset{\text{[Es.vii)]}}{=} -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

e

$$\int e^x \cos x \, dx \overset{\text{[Es.vii)]}}{=} \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + c\,,$$

concludiamo che

$$\int x e^x(\sin x + \cos x) \, dx = x e^x \sin x + e^x \cos x - \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + c\,.$$

Sostituendo quindi nell'integrale che ci interessa:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \cos x \, dx &= \frac{x^2}{2} e^x(\sin x + \cos x) - x e^x \sin x - e^x \cos x \\ &\quad + \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + c \\ &= \frac{x^2}{2} e^x(\sin x + \cos x) - x e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c\,.\end{aligned}$$

9) $\int x \sin^2 x \, dx$
Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}, \quad f'(x) = \sin^2 x, \qquad g(x) = x, \quad g'(x) = 1.$$

Da cui:

$$\int x\sin^2 x\,dx = x\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin x\cos x}{2}\right)-\int \frac{x}{2}-\frac{\sin x\cos x}{2}\,dx$$

Ricordando che

$$\int \sin x\cos x\,dx \overset{[\text{Es.ii})]}{=} \frac{\sin^2 x}{2}+c \quad c\in\mathbb{R},$$

concludiamo che

$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x\,dx &= \frac{x^2}{2}-\frac{x\sin x\cos x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{\sin^2 x}{4}+c\\ &= \frac{x^2}{4}-\frac{x\sin x\cos x}{2}+\frac{\sin^2 x}{4}+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

10) $\int \log^2 x\,dx$

Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x)=x,\quad f'(x)=1,\qquad g(x)=\log^2 x,\quad g'(x)=\frac{2\log x}{x}.$$

Da cui:

$$\begin{aligned}\int \log^2 x\,dx &= x\log^2 x-2\int \log x\,dx\\ &= x\log^2 x-2(x\log x-x)+c\,.\end{aligned}$$

11) $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

Ricorriamo all'integrazione per parti:

$$f(x)=-\frac{1}{x},\quad f'(x)=\frac{1}{x^2},\qquad g(x)=\arctan x,\quad g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Da cui:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx=-\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

Per risolvere l'ultimo integrale utilizzo la decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{A+Ax^2+Bx^2+Cx}{x(1+x^2)}$$

ottenendo il sistema

$$\begin{cases}A+B=0\\ C=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-1\\ C=0\end{cases}$$

Quindi:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,dx$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \log|x| - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c\,.$$

12) $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\,dx$
Dal momento che

$$\int x^5 e^{-x^3}\,dx = \int x^3 e^{-x^3} x^2\,dx$$

poniamo $t = x^3$ in modo che $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$. Sostituendo otteniamo

$$\frac{1}{3}\int te^{-t}\,dt \overset{[\text{Es } 1)]}{=} \frac{1}{3}(-te^{-t} - e^{-t}) + c$$
$$= -\frac{1}{3}(x^3e^{-x^3} + e^{-x^3}) + c\,.$$

Svolgimento dell'esercizio 9.10.

1) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{x^2+4}\,dx$
Osserviamo che il grado nel numeratore non è minore di quello del denominatore, quindi occorre eseguire la divisione fra polinomi:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\,3x^2 & +\,2x & -\,4 & x^2+4 \\ \cline{5-5}
2x^3 & & +\,8x & & 2x-3 \text{ (quoziente)} \\ \cline{1-4}
& -\,3x^2 & -\,6x & -\,4 & \\
& -\,3x^2 & & -\,12 & \\ \cline{1-4}
& & -\,6x & +\,8 \text{ (resto)} &
\end{array}$$

Osserviamo che il denominatore è un polinomio irriducibile di secondo grado. Si ha quindi:

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{x^2+4}\,dx = \int \left(2x - 3 + \frac{-6x+8}{x^2+4}\right)\,dx$$
$$= x^2 - 3x - 3\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 8\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$
$$= x^2 - 3x - 3\log(x^2+4) + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c\,.$$

2) $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 14x - 20}{x^3 - 4x}\,dx$

Dal momento che

$$\int \frac{6x^2+14x-20}{x^3-4x}\,dx = \int \frac{6x^2+14x-20}{x(x^2-4)}\,dx = \int \frac{6x^2+14x-20}{x(x-2)(x+2)}\,dx$$

per la risoluzione dell'integrale ricorriamo al metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned}\frac{6x^2+14x-20}{x(x-2)(x+2)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}\\ &= \frac{A(x^2-4)+B(x^2+2x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{x^2(A+B+C)+2x(B-C)-4A}{x(x-2)(x+2)}\end{aligned}$$

quindi deve essere

$$\begin{cases}A+B+C=6\\ B-C=7\\ -4A=-20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=5\\ B+C=1\\ B-C=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=5\\ B=4\\ C=-3\end{cases}$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2+14x-20}{x(x-2)(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{5}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx\\ &= 5\log|x|+4\log|x-2|-3\log|x+2|+c\,.\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int \frac{7x-6}{x^2-x-6}\,dx$

Dal momento che

$$\int \frac{7x-6}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{7x-6}{(x+2)(x-3)}\,dx$$

per la risoluzione dell'integrale ricorriamo al metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{7x-6}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases}A+B=7\\ 2B-3A=-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=4\\ B=3\end{cases}$$

Quindi:

$$\int \frac{7x-6}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-3}\right) dx = 4\log|x+2|+3\log|x-3|+c\,.$$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2+46x-48}{x^3+5x^2-24x}\,dx$
Dal momento che

$$\int \frac{x^2+46x-48}{x^3+5x^2-24x}\,dx = \int \frac{x^2+46x-48}{x(x^2+5x-24)}\,dx = \int \frac{x^2+46x-48}{x(x-3)(x+8)}\,dx$$

per la risoluzione dell'integrale ricorriamo al metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+46x-48}{x(x-3)(x+8)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+8}\\ &= \frac{A(x^2+5x-24)+B(x^2+8x)+C(x^2-3x)}{x(x-3)(x+8)}\\ &= \frac{x^2(A+B+C)+x(5A+8B-3C)-24A}{x(x-3)(x+8)}\end{aligned}$$

quindi deve essere

$$\begin{cases} A+B+C=1\\ 5A+8B-3C=46\\ -24A=-48\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2\\ B+C=-1\\ 8B-3C=36\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2\\ B=3\\ C=-4\end{cases}$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+46x-48}{x(x-3)(x+8)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-3}-\frac{4}{x+8}\right) dx\\ &= 2\log|x|+3\log|x-3|-4\log|x+8|+c\,.\end{aligned}$$

5) $\displaystyle\int \frac{6x^2+7x+21}{(x+5)(x^2+9)}\,dx$
Per la risoluzione dell'integrale ricorriamo al metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned}\frac{6x^2+7x+21}{(x+5)(x^2+9)} = \frac{A}{x+5}+\frac{Bx+C}{x^2+9} &= \frac{Ax^2+9A+Bx^2+5Bx+Cx+5C}{(x+5)(x^2+9)}\\ &= \frac{x^2(A+B)+x(5B+C)+9A+5C}{(x+5)(x^2+9)}\end{aligned}$$

quindi deve essere

$$\begin{cases} A+B=6 \\ 5B+C=7 \\ 9A+5C=21 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=4 \\ B=2 \\ C=-3 \end{cases}$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2+7x+21}{(x+5)(x^2+9)}\,dx &= \int \left(\frac{4}{x+5}+\frac{2x-3}{x^2+9}\right) dx \\ &= 4\log|x+5| + \int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \\ &= 4\log|x+5| + \log(x^2+9) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c\,. \end{aligned}$$

6) $\displaystyle\int \frac{5x^3-26x^2+37x-25}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx$

Per la risoluzione dell'integrale ricorriamo al metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned} \frac{5x^3-26x^2+37x-25}{(x-2)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \\ = \frac{A(x^3-2x^2+x-2)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-4x+4)}{(x-2)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

quindi deve essere

$$\begin{cases} A+C=5 \\ -2A+B-4C+D=-26 \\ A+4C-4D=37 \\ -2A+B+4D=-25 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-3 \\ C=4 \\ D=-5 \end{cases}$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} &\int \frac{5x^3-26x^2+37x-25}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{4x-5}{x^2+1}\right) dx \\ &= \log|x-2| - 3\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 5\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \log|x-2| + \frac{3}{x-2} + 2\log(x^2+1) - 5\arctan x + c\,. \end{aligned}$$

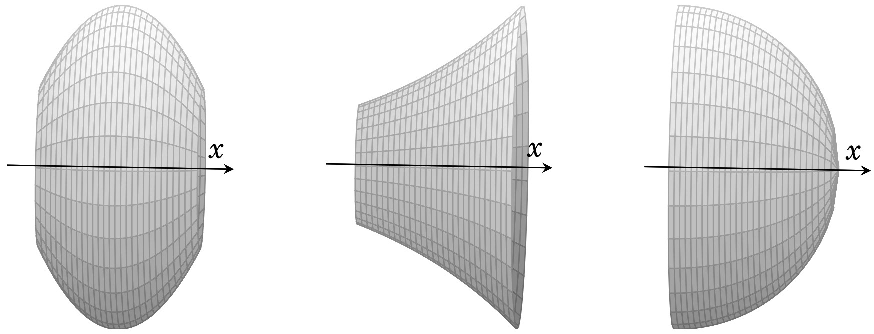


Figura 9.8: Solidi di rotazione dell'Esercizio 9.11

Svolgimento dell'esercizio 9.11. I solidi di rotazione in questione sono mostrati nella Figura 9.8. Calcoliamone i volumi utilizzando la formula (9.25).

1) $f(x) = 2 - x^2$, $x \in [-1, 1]$:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4-4x^2+4) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^{1} = \frac{86\pi}{15}\,.$$

2) $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 0]$:

$$V = \pi \int_{-1}^{0} e^x \, dx = \frac{\pi}{2} \left[e^{2x} \right]_{-1}^{0} = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2e^2}\,.$$

3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$:

$$V = \pi \int_{0}^{1} (1 - x^2) \, dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{1} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Il risultato non dovrebbe sorprendere dal momento che il solido in questione è una semisfera di raggio unitario.

Svolgimento dell'esercizio 9.12. Per calcolare la lunghezza degli archi di curva in questione utilizziamo la formula (9.27).

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $x \in [1, 2]$. Abbiamo che $f'(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2}$, da cui si ricava

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{\frac{16x^8 + 8x^4 + 1}{16x^4}} = \frac{4x^4 + 1}{4x^2} = x^2 + \frac{1}{4x^2} \quad (x \in [1, 2]).$$

Otteniamo quindi

$$L = \int_{1}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{4x^2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x} \right]_{1}^{2} = \frac{59}{24}\,.$$

2) $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$. In questo caso $\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+e^{2x}}$. Con la sostituzione $y = \sqrt{1+e^{2x}}$, cioè $x = \frac{1}{2}\log(y^2-1)$ si ottiene

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \overset{\left[\substack{y=\sqrt{1+e^{2x}} \\ dx=\frac{y}{y^2-1}\,dy}\right]}{=} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{y^2}{y^2-1}\,dy \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1+\frac{1}{y^2-1}\right) dy = \left[y + \frac{1}{2}\,\log\frac{y-1}{y+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \\ &= \sqrt{1+e^2} + \frac{1}{2}\,\log\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\,\left(\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\,. \end{aligned}$$

Svolgimento dell'esercizio 9.13. Possiamo utilizzare la formula (9.29). Poiché $f'(x) = e^x$, l'area in questione vale

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \left[\substack{y=e^x \\ dy=e^x\,dx}\right] = 2\pi \int_1^e \sqrt{1+y^2}\,dy \overset{(9.22)}{=} \\ &= \pi\left[y\sqrt{1+y^2} + \log(y+\sqrt{1+y^2})\right]_1^e \\ &= \pi\left[e\sqrt{1+e^2} + \log(e+\sqrt{1+e^2}) - \sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2})\right]\,. \end{aligned}$$

11.5 Svolgimento degli esercizi

Svolgimento dell'esercizio 11.1. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, allora in corrispondenza di $\varepsilon = 1$ è possibile determinare $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a_n}{b_n} < 1$, ossia $a_n < b_n$ per ogni $n \geq n_0$. Il risultato segue quindi dal Teorema del confronto per serie a termini non negativi.

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ e quindi si ottiene che

(i) se la serie $\sum_k a_k$ converge, allora converge anche la serie $\sum_k b_k$;

(ii) se la serie $\sum_k b_k$ diverge, allora diverge anche la serie $\sum_k a_k$.

Svolgimento dell'esercizio 11.2. In tutti gli svolgimenti indicheremo con a_k il termine generale della serie.

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k k}$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Usiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{3\sqrt[k]{k}} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} < 1\,,$$

quindi la serie converge. Abbiamo usato il fatto che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ (Esercizio 3.11).

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!}$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Usiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(2k+2)!}\frac{(2k)!}{k^k} &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} \\ &= \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e\cdot 0 = 0\,,\end{aligned}$$

quindi la serie converge.

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Dal momento che $0 < \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, si ha che $0 \leq \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{1}{k^2}$. Quindi la serie è a termini positivi e, per confronto con la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, è convergente.

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$

Dal momento che $\arctan x > 0$ per $x > 0$, la serie è a termini positivi. Sapendo che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = 1\,,$$

per confronto asintotico con la serie armonica possiamo concludere che la serie diverge.

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(e^{1/k} - 1\right)$

Dal momento che $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi/2)$ e $e^x > 1$ se $x > 0$, la serie è a termini positivi. Sapendo che

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{k}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 1, \qquad \lim_{k\to+\infty} k(e^{1/k} - 1) = 1,$$

e quindi

$$\lim_{k\to+\infty} k^{3/2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(e^{1/k} - 1\right) = 1,$$

per confronto con la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$, la serie considerata risulta essere convergente.

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\sqrt{k+2}}{3^k k^k}$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Usiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1)!\sqrt{k+3}}{3^{k+1}(k+1)^{k+1}}\frac{3^k k^k}{k!\sqrt{k+2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\sqrt{\frac{k+3}{k+2}}\\ &\xrightarrow{k\to+\infty} \frac{1}{3}e^{-1}\sqrt{1} = \frac{1}{3e} < 1\,,\end{aligned}$$

quindi la serie converge. Nel limite precedente abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to+\infty}\left[\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right]^{-1} = \lim_{k\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = e^{-1}.$$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\sin\left(\frac{1}{3k}\right)}{k+2}$

La serie è a termini positivi e, poiché si ha

$$\lim_{k\to+\infty} k\sin\left(\frac{1}{3k}\right)=\frac{1}{3},$$

si può concludere che

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{2k\sin\left(\frac{1}{3k}\right)}{k+2}}{\dfrac{1}{k}}=\frac{2}{3}.$$

Per il Criterio del confronto asintotico, la serie considerata ha lo stesso carattere della serie armonica, quindi diverge a $+\infty$.

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(2k)}{k^2}$

La serie è a termini positivi, dal momento che $\log x>0$ per $x>1$. Inoltre si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{\log(2k)}{k^2}}{\dfrac{1}{k^\alpha}}=0 \qquad \text{se } \alpha<2$$

e quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico unilaterale (Esercizio 11.1) con, ad esempio, la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$. Tale serie converge e, dal momento che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{\frac{1}{k^{3/2}}}=0$, converge anche la serie data.

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left((2k)^{\frac{1}{k^2}}-1\right)$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Dal momento che

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\left((2k)^{\frac{1}{k^2}}-1\right)}{\dfrac{\log(2k)}{k^2}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{e^{\frac{\log(2k)}{k^2}}-1}{\dfrac{\log(2k)}{k^2}}=1$$

la serie converge per confronto asintotico con quella studiata in 8). Nel calcolo del limite abbiamo usato il cambiamento di variabile $y=\dfrac{\log(2k)}{k^2}$ e il fatto che, per la gerarchia degli infiniti, $\lim_{k\to+\infty}\dfrac{\log(2k)}{k^2}=0$.

10) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j}\right)^k$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Usiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,,$$

quindi la serie diverge.

11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k (k+1)!}{k^{k+3}}$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Usiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(\sqrt{2})^{k+1}(k+2)!}{(k+1)^{k+4}} \frac{k^{k+3}}{(\sqrt{2})^k (k+1)!} = \sqrt{2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+4} \frac{k+2}{k} \\ &= \sqrt{2}\,\frac{k+2}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{3} \\ &\stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}\cdot 1 \cdot e^{-1}\cdot 1 = \sqrt{2}e^{-1} < 1\,,\end{aligned}$$

quindi la serie converge.

12) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^{(-1)^k - k}$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Usiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[k]{a_k} = 3^{\frac{(-1)^k - k}{k}} \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 3^{-1} < 1$$

quindi la serie converge. Nel calcolo del limite abbiamo usato il fatto che $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} = 0$ (limitata per infinitesima).

13) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log(k)}$

Dal momento che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k^2\log(k)}}{\frac{1}{k^2}} = 0\,,$$

possiamo usare il criterio del confronto asintotico unilaterale (Esercizio 11.1) con la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Tale serie converge e, dal momento che $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{k^2}} = 0$, converge anche la serie data.

14) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+2}}{k!}$

Chiaramente la serie è a termini positivi. Usiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+3}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^{k+2}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot e = e > 1\,,$$

quindi la serie diverge.

15) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k - 4^k}{5^k}$

Le serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^k}$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{5^k}$ sono geometriche di ragione minore di 1, quindi convergono. La serie considerata ha come elementi la differenza degli elementi di queste due serie e quindi converge, grazie al risultato sull'algebra delle serie convergenti.

Svolgimento dell'esercizio 11.3.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

La convergenza della serie si ottiene, ad esempio, utilizzando il criterio del confronto asintotico con la serie convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Inoltre si ha che

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)\,,$$

per cui nel calcolo della ridotta n-esima si hanno delle cancellazioni (somma telescopica) e

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In conclusione, la somma della serie vale 1/2.

2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k^2-k}}$

Dal momento che

$$\frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k^2-k}} = \frac{1}{\sqrt{k^2-k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})}\,,$$

i temini della serie sono asintoticamente equivalenti a quelli della serie armonica generalizzata di esponente 3/2:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{k^{3/2}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{3/2}}{k\sqrt{1-\frac{1}{k}}\,\sqrt{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{k-1}{k}}\right)}$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{k}}\left(1+\sqrt{1+\frac{k-1}{k}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Quindi per confronto asintotico la serie è convergente. Anche questa volta, le ridotte n–esime della serie sono somme telescopiche:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k^2-k}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e, passando al limite per $n \to +\infty$, si ottiene che la somma della serie vale 1.

Svolgimento dell'esercizio 11.4. Se indichiamo con s_n la ridotta n–esima della serie abbiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$s_{2n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} > \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{2j+1}{2(2j+1)^2+1}\,.$$

Dal momento che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+1}{2(2j+1)^2+1}$ diverge a $+\infty$ (risultato che si ottiene per confronto asintotico con la serie armonica), per il teorema del confronto tra successioni possiamo concludere che la successione (s_n) ha una sottosuccessione (s_{2n+1}) illimitata e quindi è, a sua volta, illimitata. Trattandosi di una serie a termini positivi, la serie necessariamente diverge a $+\infty$.

Svolgimento dell'esercizio 11.5. Detto a_k il termine generale della serie, verificheremo che è possibile applicare il criterio di condensazione, ovvero che $(a_k)_k$ è una successione decrescente a termini positivi. Il carattere della serie sarà dunque determinato dalla serie avente termine generale $2^k a_{2^k}$.

1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log(\log(k)))^3}$

Poiché la successione $\log(\log k))^3$ è crescente, in quanto composizione di funzioni crescenti, ed è positiva per $k \geq 3$, la successione $(a_k)_k$ è positiva e decrescente. Inoltre

$$a_{2^k} = \frac{1}{(\log(\log(2^k)))^3} = \frac{1}{(\log(k\log(2)))^3} = \frac{1}{(\log k + \log\log 2)^3}$$

da cui

$$\lim_{k\to+\infty} 2^k a_{2^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^k}{(\log k + \log\log 2)^3} = +\infty.$$

Quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ diverge e per il Criterio di condensazione, diverge anche la serie considerata.

2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log^\alpha(k)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Se $\alpha \le 0$ abbiamo che $a_k \ge 1/k$ per ogni $k \ge 3$, quindi la serie diverge per confronto con la serie armonica.

Se $\alpha > 0$, la successione $(a_k)_k$ è decrescente e a termini positivi. Inoltre

$$a_{2^k} = \frac{1}{2^k \log^\alpha(2^k)} = \frac{1}{2^k k^\alpha \log^\alpha(2)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \log^\alpha(2)}.$$

Quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ è una serie armonica generalizzata. Applicando il Criterio di condensazione, otteniamo che la serie considerata converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \le 1$.

Svolgimento dell'esercizio 11.6.

1) $a_n = \dfrac{n^2 - 10n}{n^4 + 1}$. Serie a termini definitivamente positivi. Converge assolutamente (confronto asintotico con $1/n^2$).

2) $a_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Serie a termini positivi. Diverge a $+\infty$ (confronto asintotico con la serie di termine generale $1/\sqrt{n}$).

3) $a_n = \dfrac{x^n}{n^n}$, con $x \in \mathbb{R}$. Converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ (criterio della radice).

4) $a_n = \dfrac{x^n}{n^2}$, con $x \in \mathbb{R}$. Converge assolutamente per $|x| \le 1$ (criterio del rapporto per $x \ne 0$ oppure per confronto, $|a_n| \le 1/n^2$). Per $x > 1$ si ha $|a_n| \to +\infty$, quindi la serie non converge; diverge a $+\infty$ se $x > 1$, mentre è oscillante se $x < -1$.

5) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$, con $x \in \mathbb{R}$. Serie a termini negativi se $x < 0$, a termini di segno alterno per $x \ge 0$. Converge assolutamente per $|x| < 1$ (criterio del rapporto o della radice), semplicemente per $x = 1$ (criterio di Leibniz), diverge a $-\infty$ per $x \le -1$, è indeterminata per $x > 1$.

6) $a_n = n\,x^n$, con $x \in \mathbb{R}$. Se $|x| \ge 1$ si ha $|a_n| \to +\infty$, quindi la serie non converge (diverge a $+\infty$ per $x \ge 1$, è oscillante per $x \le -1$). Per $|x| < 1$ converge assolutamente (criterio della radice).

7) $a_n = \dfrac{\sin^n x}{n}$, con $x \in \mathbb{R}$. Si ha $\sqrt[n]{|a_n|} \to |\sin x|$. Se $|\sin x| < 1$ la serie converge assolutamente per il criterio della radice. Se $|\sin x| = 1$ non si può applicare il criterio della radice; tuttavia, quando $\sin x = 1$ (cioè $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) abbiamo $a_n = 1/n$ (serie armonica), dunque la serie diverge a $+\infty$. Quando $\sin x = -1$ (cioè $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), abbiamo la serie di termine generale $a_n = (-1)^n/n$, che converge (semplicemente) per il criterio di Leibniz.

8) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$. La serie non converge assolutamente (confronto asintotico con la serie armonica). La serie è a termini di segno alterno, ma la successione $|a_n|$, pur convergendo a 0, non è monotona decrescente, quindi non è possibile utilizzare il criterio di Leibniz. Tuttavia, per $n \geq 2$ si ha che

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n} \cdot \frac{n + (-1)^n}{n + (-1)^n} = (-1)^n \, \frac{n}{n^2 - 1} + \frac{1}{n^2 - 1}\,.$$

La serie di termine generale $(-1)^n \, \frac{n}{n^2-1}$ soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz, ed è quindi convergente (semplicemente). La serie di termine generale $\frac{1}{n^2-1}$ converge assolutamente, per confronto asintotico con $1/n^2$. Di conseguenza, per il Teorema 11.6, anche $\sum a_n$ converge.

Svolgimento dell'esercizio 11.7.

1) $\sum \dfrac{a_n}{1 + a_n}$.

Dimostriamo che questa serie diverge a $+\infty$. Distinguiamo due casi: (i) è verificata la condizione necessaria di convergenza (Teorema 11.4), cioè $\lim_n a_n = 0$; (ii) non è verificata la condizione necessaria di convergenza.

Nel secondo caso la serie, essendo a termini non negativi, diverge a $+\infty$.

Nel primo caso si ha che $a_n \leq 1$ definitivamente, quindi

$$\frac{a_n}{1 + a_n} \geq \frac{a_n}{2} \qquad \text{definitivamente.}$$

Dal teorema del confronto deduciamo quindi che $\sum a_n/(1 + a_n)$ diverge a $+\infty$.

2) $\sum \dfrac{a_n}{1 + n^2\, a_n}$.

Questa serie è convergente. Infatti, se $a_n = 0$, anche $\frac{a_n}{1+n^2\, a_n} = 0$, mentre, se $a_n > 0$,

$$\frac{a_n}{1 + n^2\, a_n} < \frac{a_n}{n^2\, a_n} = \frac{1}{n^2} \qquad (a_n > 0).$$

Abbiamo quindi che $0 \leq \frac{a_n}{n^2\, a_n} \leq \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, quindi la serie converge per confronto con la serie armonica generalizzata.

3) $\sum \dfrac{a_n}{1 + n\, a_n}$.

In generale, nulla si può dire sul carattere di questa serie. Ad esempio, se $a_n = 1/n$ si ha che $\frac{a_n}{1+n\,a_n} = \frac{1}{2n}$, che è una serie divergente.

Risulta un po' più complicato, invece, costruire una serie tale che $\sum a_n$ diverga mentre $\sum \frac{a_n}{1+n\,a_n}$ converga. Tuttavia, si può verificare che, scegliendo $a_{2^k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, e $a_n = 0$ per tutti gli altri indici, allora $\sum a_n$ diverge, poiché non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, mentre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n\, a_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2^k}}{1 + 2^k\, a_{2^k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^k}$$

è convergente.

Svolgimento dell'esercizio 11.8.

1) $\sum a_n^2$.

Poiché, per ipotesi, $\sum a_n$ è convergente, allora è verificata la condizione necessaria per la convergenza $\lim_n a_n = 0$. Di conseguenza, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $0 \le a_n \le 1$ per ogni $n \ge N$. Quindi $0 \le a_n^2 \le a_n$ per ogni $n \ge N$, dunque $\sum a_n^2$ converge per il criterio del confronto.

2) $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Usando la disuguaglianza $a\, b \le (a^2 + b^2)/2$, abbiamo che

$$\sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{n} \le \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n^2} =: b_n\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

A secondo membro compaiono i termini generali di due serie a termini non negativi, entrambe convergenti, quindi $\sum b_n$ è convergente. Per il criterio del confronto, anche $\sum \sqrt{a_n}/n$ è convergente.