Appunti di Laboratorio di Meccanica

Liam Ferretti

31 ottobre 2025

Indice

Capitolo 1

Probabilità

Per probabilità si intende un numero: $0 \leq p \leq 1$.

La valutazione di P:

- Combinatoria: non si addice a tutti i casi, nello specifico in quelli scientifici utili a definire la natura:

  $$\{e_i\} \text{ evento elementare} \Rightarrow \text{ se } \{e_i\} \text{ si verifica } \Rightarrow \text{ successo}$$

  E, A, B, eventi compositi l'evento complementare di E è $\overline{E}$, ovvero non si verifica E, sono mutualmente esclusivi, se si verifica E, non si può verificare $\overline{E}$

1.1 Condizione di Laplace:

La probabilità di ogni evento è uguale a un certo numero p per ogni i:

$$P(\{e_i\}) = p\forall i$$

Presi allora n casi possibili, quindi n eventi elementari, allora:

$$p = \frac{1}{n} \Rightarrow P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$$

Definito un certo evento compositi, E_j, con n_j eventi favorevoli allora:

$$P(E_j) = n_j\frac{1}{n}$$

Def di Laplace (combinatori) di P:

$$P(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi totali ed equiprobabili}}$$

Questa definizione non è universale, in quanto non sapendo i casi totali o favorevoli non è valida.

1.2 Valutazione frequentista, legge empirica del caso

Prese n misure, ed una carta modalità $\{e_i\}$ (per un dato una delle facce).

$$p(E_i) = \frac{n(E_i)}{n} \Rightarrow p \approx \frac{\text{successi}}{\text{prove totali}}$$

non è giusto dire:

$$p = \lim_{n \to +\infty} \frac{\text{successi}}{\text{prove}} = \frac{n_j}{n}$$

1.3 Probabilità composta/condizionata

Preso E un certo evento, allora:

$$E \mid I$$

dove I è lo stato di informazione, e si legge E condizionato I, allora:

$$P(E \mid I) = P(E)$$

ovvero la probabilità di E condizionato I, e la condizione I è sempre implicita, preso un altro evento C, se si vuole calcolare la probabilità di:

$$P(E \mid C)$$

bisogna calcolare la probabilità che si verifichi C e poi quella in cui si verifica E, ed equivale a:

$$P(E \mid C) = \frac{\text{casi favorevoli a E ed a C}}{\text{casi favorevoli a C}}$$

In generale se C non si verifica non posso definire la probabilità, e quindi anche se non ho uno stato di informazione non la posso definire.

Ad esempio se P è la probabilità che un certo cavallo vinca una certa gara se la gara si svolge, ma piove e quindi la gara non si svolge e quindi non essendosi svolta la gara non è possibile definire la probabilità di vincita, e quindi non si può dire che sia nulla.

1.4 Definizione di probabilità

È una definizione soggettiva di P, deve essere una rational bet, e si ottiene un grado di fiducia.

Presa A una certa puntata e E un certo evento, allora

$$A \alpha P(E)$$

quindi più è alta la puntata più è alta la probabilità, definendo S un certo premio, allora

$$A \alpha S$$

$$A \alpha P(E) S$$

Invece $\overline{E} \to P(\overline{E})$, e B e la puntata su $\overline{E}$, quindi:

$$P(E) = \frac{A}{S}$$

se $S = 1$, allora:

$$P(E) = A$$

quindi avendo che $A \leq S \Rightarrow 0 \leq P(E) \leq 1$

Invece:

$$B = P(E)S$$

Quindi:

$$A + B = S(P(E) + P(\overline{E}))$$

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

$$P(E \mid I) + P(\overline{E} \mid I) = 1$$

ovvero l'assioma della probabilità.

$$\frac{A}{B} = \frac{P(E)}{P(\overline{E})}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{A}{B}P(\overline{E}) = \frac{A}{B}\frac{B}{A} = \frac{A}{S} = \frac{A}{A+B}$$

Presi ad esempio $A = 2, B = 1$, allora:

$$P(E) = \frac{2}{3}, P(\overline{E}) = \frac{1}{3}$$

Si dice di probabilità di un evento E, il grado di fiducia ..., bisogna però assumere che il risutalto delle misura è soggettivo, dipende dallo stato di informazione, ma deve essere comunque ragionevole, quindi l'osservatore è parte fondamentale del processo di misura anche nel mondo deterministico.

1.5 Assiomi delle probabilità

- Un evento certo è definito con Ω, ha probabilità 1

- Un evento impossibile, ha probabilità 0

- Probabilità di implicazione:

  $$E_1 \subseteq E_2$$

  Se si verifica E_1 si deve verificare anche E_2

- Evento opposto, $\overline{E}$ opposto di E, se E è vero allora $\overline{E}$ è falso e vice verso.

- Prodotto logico (AND):

  $$E_1 \cap E_2$$

  $$\Rightarrow E \cap \overline{E} = \emptyset$$

  $$(E_1 \cap E_2) \subseteq E_2 \wedge \subseteq E_1$$

  definito sovrapposizione o overlap.

- Somma logica:

  $$E_1 \cup E_2$$

  vera se si verifica E_1 oppure E_2

  La somma logica tra E e $\overline{E}$, ovvero

  $$E \cup \overline{E} = \Omega$$

  $$E_2, E_1 \subseteq (E_1 \cup E_2$$

- Classe completa di eventi:

  $$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$$

  $$E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

  quindi sono eventi mutualmente esclusivi.

  Presi $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, allora:

  $$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

  $$P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E}) = P(\Omega) = 1$$

  $$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_1) = P(\Omega) = 1$$

  Se i due eventi non sono disgiunti allora:

  $$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

  Presi due insiemi A, B, allora:

  $$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

  Posso definire l'unione tra A e B:

  $$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$$

  $$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

  $$B = (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A)$$

  Sottraendo e calcolando le probabilità si ottiene che:

  $$P(A \cup B) - P(A) - P(B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) - P(A \cap B) +$$

  $$-P(A \cap \overline{B}) - P(B \cap A) - P(B \cap \overline{A})$$

  $$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.6 Probabilità condizionata 2

Perso H il condizionante, E l'evento, e Ω l'evento completo, allora:

$$P(E|H), se H \in \Omega, H \Rightarrow \Omega, P(H) \neq 0$$

Bisogna comparare quindi:

$$P(E|H)$$

e:

$$P(E \wedge H)$$

e sappiamo che:

$$P(E|H) \geq P(E \wedge H)$$

inoltre:

$$P(E|H) = P(E \wedge H) \iff H = 1$$

In generale:

$$P(E|H) \neq P(H|E)$$

ed inoltre: $P(E \wedge H) = P(H \wedge E)$, solo se a proprietà non è condizionata.

1.6.1 Legge della proprietà composta

È un teorema se visto con il paradigma della rational bet.

$$P(E|H) \cdot P(H) = P(E \wedge H) \Rightarrow P(E|H) = \frac{P(E \wedge H)}{P(H)}$$

$E|H$ non è definito se H non è verificata.

Sapendo che:

$$P(E \wedge H) = P(H \wedge E)$$

allora:

$$P(E|H)P(H) = P(H|E)P(E) \Rightarrow \frac{P(E|H)}{P(E)} = \frac{P(H|E)}{P(H)}$$

Interpretandolo con l'interpretazione frequentista, equivarrebbe a:

$$P(E|H) = \frac{P(E \wedge H)}{P(H)} = \frac{\text{num casi favorevoli ad E e H}}{\text{num casi favorevoli ad H}}$$

1.7 Teorema della probabilità composta

$$P(E|H) = \frac{P(E \wedge H)}{P(H)} = \frac{A}{S}$$

dove A è la quantità che si scommette, ed S è la vincita, se S è uguale a 1, allora:

$$P(E|H) = A, A \in [0, 1]$$

La previsione del guadagno, ϕ, deve essere nullo, per il fatto che la scommessa deve essere una rational bet.

$$\phi = -A + SP(E \wedge H) + AP(\overline{H})$$

dove $-A$ equivale alla puntata iniziale, $SP(E \wedge H)$ la probabilità di vincere S, $AP(\overline{H}$ la probabilità del ritorno della puntata quando H non si verifica.

$$\phi = G = -P(E|H) + P(E \wedge H) + P(E|H)(1 - P(H))$$

$$P(E \wedge H) = P(E|H)P(H) = P(E|H) = \frac{P(E \wedge H)}{P(H)}$$

1.7.1 Eventi indipendenti (in probabilità)

Se:

$$P(E|H) = P(E)$$

vuol dire che i due aventi hanno probabilità indipendenti.

$$P(E \cap H) = P(E|H)P(H) = P(E)P(H)$$

ovvero la legge dei moltiplicazione delle probabilità, solo se i due eventi sono indipendenti in probabilità, se non lo sono, allora l'ultimo passaggio non è valido. Se si hanno più condizionanti, allora, se tutti gli E_i sono indipendenti in probabilità, allora:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i)$$

1.8 Legge delle alternative (disintegrazione delle probabilità)

Classe completa di ipotesi, $H_i, i \in \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega \\ H_i \cap H_j = \emptyset \forall i \neq j \end{cases}$$

Preso un certo evento E che implica Omega, allora:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap H_i)$$

in probabilità:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap H_i) \Rightarrow P(E) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(P(E \cap H_i))}{\sum_{i=1}^{n}(P(H_i))}$$

Quindi:

$$P(E) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)}$$

Vale se e solo se si ha che una classe completa di ipotesi.

1.9 Teorema di Bayes/Laplace

Persa una certa ipotesi H_i, possiamo definire usando il teorema della probabilià composta:

$$P(E \cap H_i) = P(E|H_i)P(H_i)$$

$$P(H_i \cap E) = P(H_i|E)P(E)$$

uguagliando:

$$P(E|H_i)P(H_i) = P(H_i|E)P(E)$$

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{P(E)}$$

Sapendo che $H_i \subset \Omega$, e $H_i, i \in \{1, \cdots, n\}$ è una classe di ipotesi.

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(E|H_i)P(H_i)}$$

Allora,

$$P(H_i|E) \quad \alpha \quad P(E|H_i)P(H_i)$$

si ha la posterior ($P(H_i|E)$) proporzionale alla likelihood ($P(E|H_i)$) per la prior ($P(H_i)$), il risultato è una posterior probability di una specifica ipotesi.

Se si hanno due ipotesi, H_i, H_j, allora:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(E|H_i)P(H_i)}$$

$$P(H_j|E) = \frac{P(E|H_j)P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(E|H_i)P(H_i)}$$

si può quindi fare il rapporto:

$$\frac{P(H_i|E)}{P(H_j|E)} = \frac{\frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(E|H_i)P(H_i)}}{\frac{P(E|H_j)P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(E|H_i)P(H_i)}} = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{P(E|H_j)P(H_i)} = \frac{P(E|H_i)}{P(E|H_j)} \cdot \frac{P(H_i)}{P(H_j)}$$

ed è chiamato rapporto delle verosimiglianze, o likelihood ration, chiamato anche Bayes factor.

Preso $\Omega = H_i \cup \overline{H_i}$, con $n = 2$, in questo caso:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{P(E|H_i)P(H_i) + P(E|\overline{H_i})P(\overline{H_i})} = \frac{P(H_i)}{P(H_i) + \frac{P(E|\overline{H_i})}{P(E|H_i)}P(\overline{H_i})}$$

Escludere una teoria è possibile solo quando:

$$P(H_i|E) = 0 \iff P(H_i) = 0$$

quindi si può escludere una ipotesi solo se prima di fare la misura sapevo già che non sarebbe possibile.

Il teorema di Bayes si può usare in modo iterativo, prendendo n eventi:

$$E_1, E_2, \cdots, E_n$$

e una certa ipotesi:

$$H_k$$

con una certa probabilità a priori:

$$P(H_k)$$

Misurando E_1, allora:

$$P(H_k|E_1)\alpha P(E_1|H_k)P(H_k)$$

misurando ancora:

$$P(H_k|E_2 \wedge E_1)\alpha P(E_2|H_k) \cdot P(H_k|E_1) = P(E_2|H_k)P(E_1|H_k)P(H_k)$$

e così via, in generale dopo n misure:

$$P(H_k|E_n \wedge E_{n-1} \wedge \cdots \wedge E_1) = P(H_k)\prod_{i=1}^{n} P(E_1|H_k)$$

solo quindi indipendenti in probabilità.

$$\prod_{i=1}^{n} P(E_1|H_k) = \mathcal{L}_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i$$

Esempio: Ipotizzano di aver fatto un test HIV con efficienza del 99.9% ed è risultato positivo, inoltre ha un tasso di falsi positivi di 0.2%, quanto è la vera probabilità di essere veramente infetti?

Definisco $H_i = I$, ovvero infatti, e $\overline{H_i} = S$ ovvero sani:

$$\begin{cases} P(+|I) = 0.999 \\ P(+|S) = 2 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Allora il potere predittivo positivo è:

$$P(I|+) = \frac{P(+|I)P(I)}{P(+|I)P(I) + P(+|S)P(S)} = \frac{0.999 \cdot P(I)}{0.999P(I) \cdot 2 \cdot 10^{-3}P(S)}$$

per svolgere il calcolo bisogna stimare la probabilità di essere infetti:

$$\frac{0.999 \cdot P(I)}{0.999P(I) \cdot 2 \cdot 10^{-3}P(S)} = \frac{0.999 \cdot 10^{-3}}{0.999 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0.999} = \frac{1}{3}$$

Ora si svolge un altro test, ed è ancora positivo:

$$P(I| + \wedge +) = \frac{P(++|I)P(I|+)}{P(++|I)P(I|+) + P(++|S)P(S|H)} =$$

$$= \frac{P(+_2|I)P(+_1|I)P(I)}{P(+_2|I)P(+_1|I)P(I) + P(+_2|S)P(+_1|S)P(S)} = \frac{0.999 \cdot 0.999 \cdot 10^{-3}}{0.999 \cdot 0.999 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0.999} =$$

$$= \frac{0.999}{0.999 + 4 \cdot 10^{-3}} = 99.6\%$$

Questo risultato sarebbe stato diverso se si fossero fatte ipotesi iniziali diverse.

Esempio 2: Prese 5 scatole:

1. 5 bianche e 0 nere
2. 4 bianche e 1 nere
3. 3 bianche e 2 nere
4. 2 bianche e 3 nere
5. 1 bianche e 4 nere
6. 0 bianche e 5 nere

A priori prendere una scatola ha la stessa probabilità, allora $P(H_i) = \frac{1}{6}, \forall i \in [0, 5]$

$$P(N|H_i) = \frac{i}{5}$$

$$P(B|H_i) = \frac{5-i}{5}$$

Allora estraendo una pallina nera:

$$P(H_i|N_1) = \frac{P(N_1|H_i)P(H_i)}{P(N_1)} = \frac{P(N_1|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=0}^{5} P(N_1|H_i)P(H_1)} = \frac{\frac{i}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\sum_{i=0}^{5}\frac{i}{5}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{i}{15}$$

Pesco una nuova pallina, ed esce bianca:

$$P(H_i|B_2 \wedge N_1) = \frac{P(B_2|H_i)P(H_i|N_1)}{\sum_{i=0}^{5} P(B_2|H_i)P(H_i|N_1)} = \frac{\frac{5-i}{5}}{\cdot}\frac{i}{15}\sum_{i=0}^{5}\frac{5-i}{5}\cdot\frac{i}{15} = \frac{(5-i)i}{20}$$

Se fosse uscita una nuova nera:

$$P(H_i|N_2 \wedge N_1) = \frac{P(N_2|H_i)P(H_i|N_1)}{\sum_{i=0}^{5} P(N_2|H_i)P(H_i|N_1)} = \frac{\frac{i}{5}\cdot\frac{i}{denominatore}}{denominatore}$$

Estraendo una nuova pallina, che esce nera, dopo averne estratta una nera e una bianca: Allora ora:

$P(H_i)$	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
priori	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
N_1	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$
B_2, N_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	0
N_2, N_1	0	$\frac{1}{55}$	$\frac{4}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{16}{55}$	$\frac{25}{55}$

Se $N_3 \wedge B_2 \wedge N_1 \Rightarrow P(B_4)$?

$$P(B_4|N_3 \wedge B_2 \wedge N_1) = \sum_{i=0}^{5} P(B_4|H_i)P(H_i|N_3 \wedge B_2 \wedge N_1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{5}\frac{5-1}{5}\frac{(5-i)i^2}{50} = \frac{1}{250}(5-i)^2 i^2 = \frac{104}{250} \simeq 41.6\%$$