



Electromagnétisme

Exercices

Année académique 2019-2020

Marc WUILPART

24 mars 2021

Table des matières

1	Etats statiques	1
1.1	Rappels	1
1.2	Relations importantes	5
1.3	Exercices résolus	7
1.4	Exercices	12
2	Etats stationnaires	19
2.1	Calcul du champ, de l'induction et des forces magnétiques	19
2.1.1	Rappels	19
2.1.2	Exercices résolus	22
2.1.3	Exercices	25
2.2	Circuits magnétiques	36
2.2.1	Rappels	36
2.2.2	Exercices résolus	39
2.2.3	Exercices	44
2.3	Circuits résistifs	53
2.3.1	Rappels	53
2.3.2	Exercices résolus	55
2.3.3	Exercices	57
2.4	Schémas équivalents de Thévenin et Norton	69
2.4.1	Rappels	69
2.4.2	Exercices résolus	70
2.4.3	Exercices	74
3	Etats variables	85
3.1	Résolution de circuits en mode transitoire	85
3.1.1	Rappels	85
3.1.2	Exercices résolus	86
3.1.3	Exercices	91
3.2	Résolution de circuits en régime sinusoïdal	100
3.2.1	Rappels	100
3.2.2	Exercices résolus	101
3.2.3	Exercices	106

Chapitre 1

Etats statiques

1.1 Rappels

Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{u}_n \cdot \vec{D} dS = Q$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \eta$$

avec

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.1.1)$$

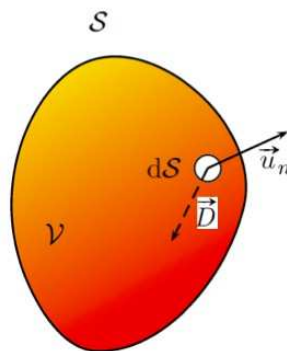


FIGURE 1.1.1 – Surface de Gauss

Loi de Poisson

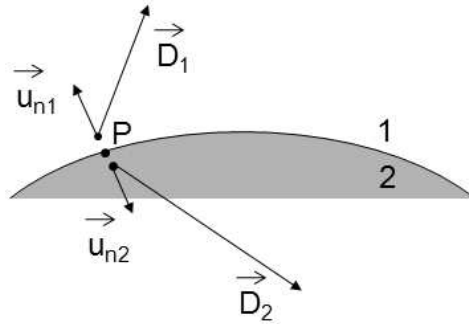
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\eta + \eta')$$

Calcul de la charge surfacique

Considérons la figure 1.1.2 qui représente une surface de discontinuité qui n'est pas une double couche. On peut montrer en P (voir cours) que :

$$\vec{u}_{n_1} \cdot \vec{D}_1 + \vec{u}_{n_2} \cdot \vec{D}_2 = \sigma \quad (1.1.2)$$

avec σ , la charge surfacique. \vec{D}_1 et \vec{D}_2 sont les déplacements électriques en deux points infiniment voisins, l'un situé le long de la face 1 et l'autre, le long de la face 2. Cette relation peut être mise à profit pour le calcul de σ à partir de \vec{D}_1 et \vec{D}_2 .

FIGURE 1.1.2 – Discontinuité de \vec{D}

Images électriques

Considérons une équipotentielle quelconque (ligne en tirets de la figure 1.1.3) d'un système de conducteurs chargés (1, 2 et 3); nous pouvons matérialiser cette équipotentielle sous la forme d'une couche métallique infiniment mince, sans modifier le champ de part et d'autre. Si ensuite nous fixons le potentiel de la couche par rapport aux conducteurs (1 et 2) qui se trouvent d'un côté et si nous supprimons ceux (3 ici) qui se trouvent de l'autre côté, il résulte de la section précédente que le champ du premier côté n'est pas altéré.

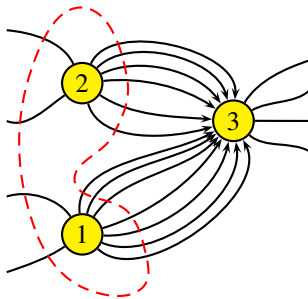


FIGURE 1.1.3 – Image électrique

Réciproquement, après avoir réduit un conducteur à une couche infiniment mince matérialisant sa surface (extérieure ou intérieure selon le cas), on peut essayer d'installer, du côté opposé aux autres conducteurs, un système de conducteurs nouveaux tel que l'ensemble de tous ces conducteurs admette la couche mince comme équipotentielle (avec la valeur primitive du potentiel). Si on y parvient — et l'alinéa précédent montre que c'est possible — on dit que le nouveau système de conducteurs est *l'image électrique* du premier système par rapport au conducteur que l'on a supposé réduit à une couche mince; on peut alors supprimer celle-ci sans modifier le champ.

Le recours aux images électriques simplifie la résolution de certains problèmes, ainsi qu'on le verra dans les applications. Un cas simple est celui où la surface par rapport à laquelle on recherche une image électrique est un plan. Alors, l'image d'un conducteur est son symétrique par rapport au plan, et porte une charge égale et de signe contraire; on constate en effet que, pour raison de symétrie, l'ensemble du conducteur et de l'image admet bien le plan comme équipotentielle; le champ entre le conducteur et le plan est identique, dans cette région, au champ entre le conducteur et son image.

Une application fréquente de ce cas est l'étude du champ d'un système de conducteurs placés au-dessus du sol car en première approximation celui-ci peut être assimilé à un plan conducteur.

Relation liant la tension aux bornes d'un condensateur et sa charge

Considérons la figure 1.1.4. On a :

$$Q = CU$$

avec C , la capacité du condensateur. Il est important de noter que la relation précédente est valable pour la configuration présentée à la figure 1.1.4

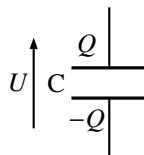


FIGURE 1.1.4 – Condensateur

Association de condensateurs en série

Considérons la figure 1.1.5 présentant trois condensateurs disposés en série. Le système étant initialement neutre,

les armatures se chargent lorsqu'on applique une différence de potentiel U_{12} . On peut montrer que le système est équivalent à une seule capacité C de charge (Q) tel que :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Considérons à présent le système représenté à la figure 1.1.6. On peut montrer que :

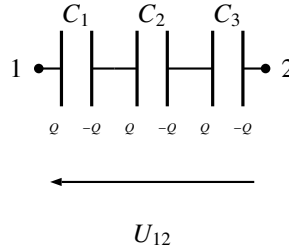


FIGURE 1.1.5 – Condensateurs en série (1)

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$$

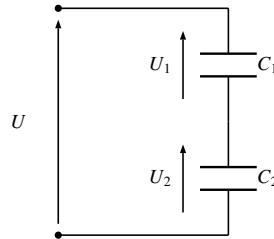


FIGURE 1.1.6 – Condensateurs en série (2)

Association de condensateurs en parallèle

Considérons la figure 1.1.7 présentant trois condensateurs disposés en parallèle. Le système étant initialement neutre, les armatures se chargent lorsqu'on applique une différence de potentiel U_{12} . On peut montrer que le système est équivalent à une seule capacité C de charge $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ telle que :

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Considérons à présent le système représenté à la figure 1.1.8. On peut montrer que ($Q = Q_1 + Q_2$) :

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q$$

$$Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q$$

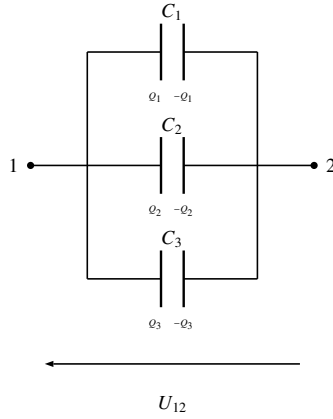


FIGURE 1.1.7 – Condensateurs en parallèle (1)

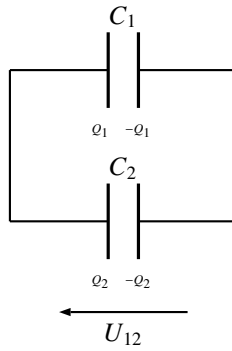


FIGURE 1.1.8 – Condensateurs en parallèle (2)

Travail effectué par les forces du champ

A charges constantes, le travail δT effectué par les forces du champ vaut l'opposé de la variation d'énergie électrique du système :

$$\delta T = -(\delta W)_Q$$

A tensions constantes, le travail δT effectué par les forces du champ est égal à la variation d'énergie électrique du système :

$$\delta T = (\delta W)_U$$

Calcul indirect des forces

Pour calculer la force \vec{F} associée à un solide, on suppose donner à celui-ci une translation élémentaire $\delta \vec{s}$ (dans la direction de la force). Le travail élémentaire $\vec{F} \delta \vec{s}$ s'écrit :

$$\delta T = \vec{F} \delta \vec{s} = F \delta s = -(\delta W)_Q = (\delta W)_U$$

ce qui nous donne :

$$F = -\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)_Q = \left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)_U$$

Pour calculer le moment d'un couple, on suppose donner au système une rotation élémentaire $\delta \vec{\alpha}$. Le travail élémentaire $\vec{C} \delta \vec{\alpha}$ s'écrit :

$$\delta T = \vec{C} \delta \vec{\alpha} = C \delta \alpha = -(\delta W)_Q = (\delta W)_U$$

ce qui nous donne :

$$C = -\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_Q = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_U$$

REMARK.— Pour résoudre les exercices, il est utile de se rappeler que l'énergie emmagasinée dans un condensateur s'exprime par :

$$W = \frac{1}{2}CU^2$$

1.2 Relations importantes

Conducteurs cylindriques concentriques

Considérons deux conducteurs cylindriques illimités et concentriques comme indiqué à la figure 1.2.1. Entre les deux conducteurs ($R_1 < r < R_2$), on a :

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{Q}{L} \right) \quad (1.2.1)$$

$$V(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \ln \frac{R_1}{r} \quad (1.2.2)$$

où $\left(\frac{Q}{L} \right)$ est la charge linéique. Notons que le champ électrique est radial et que le potentiel a été posé nul en $r = R_1$.

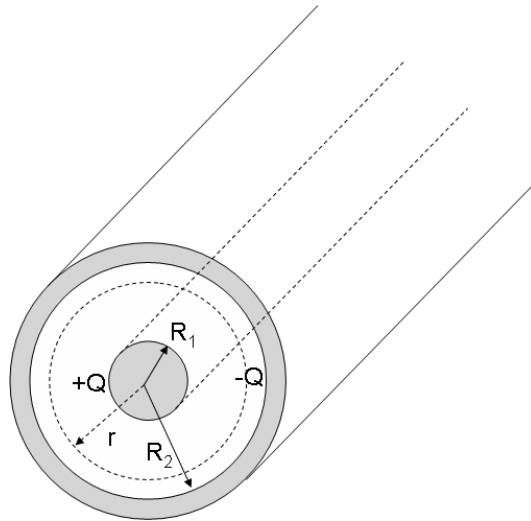


FIGURE 1.2.1 – Conducteurs illimités concentriques

La capacité linéique d'un tel système est donnée par :

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (1.2.3)$$

On montre également que :

$$E(r) = \frac{U_{12}}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (1.2.4)$$

Capacité entre un plan et un conducteur cylindrique illimité

Considérons un système composé d'un plan illimité et d'un conducteur cylindrique illimité parallèle à ce plan de rayon R (figure 1.2.2). Si la distance entre le plan et le conducteur vaut b , la capacité linéique est donnée par :

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{b}{R} + \sqrt{\left(\frac{b}{R} \right)^2 - 1} \right)} \quad (1.2.5)$$

Si R est petit devant b , on obtient :

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2b}{R}} \quad (1.2.6)$$

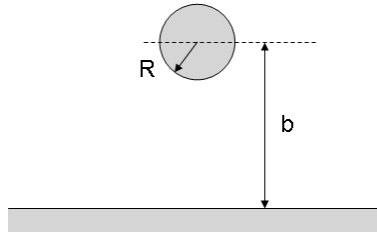


FIGURE 1.2.2 – Conducteur cylindrique parallèle à un plan illimité

Capacité entre deux conducteurs cylindriques illimités

Considérons un système composé de deux conducteurs cylindriques illimités parallèles et de rayon R (figure 1.2.3). Si la distance entre les conducteurs vaut $2b$, la capacité linéique est donnée par :

$$\frac{C}{L} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{b}{R} + \sqrt{\left(\frac{b}{R} \right)^2 - 1} \right)} \quad (1.2.7)$$

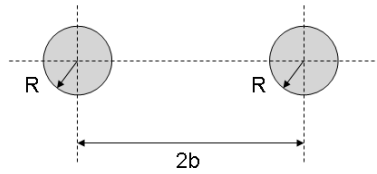


FIGURE 1.2.3 – Conducteurs cylindriques parallèles

Potentiel et champ à l'extérieur d'un conducteur cylindrique illimité

Considérons la figure 1.2.4. Le champ électrique à une distance ρ du centre du conducteur s'écrit :

$$\vec{E}(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{\rho} \vec{u}_\rho \quad (1.2.8)$$

Le potentiel, quant à lui, s'exprime par :

$$V(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$$

avec ρ_0 , la distance séparant le centre du conducteur et le point A où le potentiel a été posé nul.

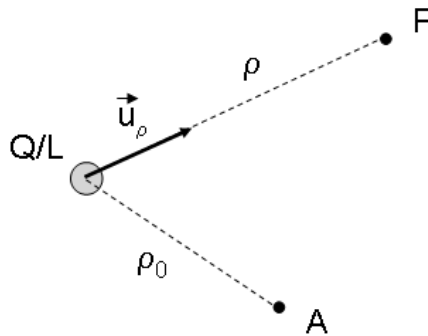


FIGURE 1.2.4 – Potentiel et champ autour d'un conducteur cylindrique illimité

1.3 Exercices résolus

Exercice R1 - Etablissez la relation (1.2.3).

Solution

La capacité recherchée s'écrit :

$$C_{12} = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{V(R_1) - V(R_2)} = -\frac{Q}{V(R_2)}$$

puisque on a posé $V(R_1) = 0$. A partir de la relation (1.2.2), on a :

$$V(R_2) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \ln \frac{R_1}{R_2}$$

Dès lors :

$$C_{12} = -\frac{Q}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \ln \frac{R_1}{R_2}}$$

Et finalement :

$$\frac{C_{12}}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Exercice R2 - On considère (figure 1.3.1) deux conducteurs cylindriques coaxiaux illimités, 1 et 2, parallèles à un plan conducteur 0. Le rayon R_1 du conducteur 1 est de 5 cm, les rayons intérieur R_2 et extérieur R_3 du conducteur 2 sont respectivement de 10 cm et 12 cm. La distance entre l'axe des cylindres et le plan est de $b = 24$ cm. Le milieu entre les cylindres est un diélectrique parfait de permittivité relative égale à 4. Le milieu entre le conducteur 2 et la plan est le vide. On applique, entre le plan et le conducteur 1, une différence de potentiel U_{10} égale à 500 V. Quelle est, par unité de longueur, la charge prise par le conducteur 1 ?

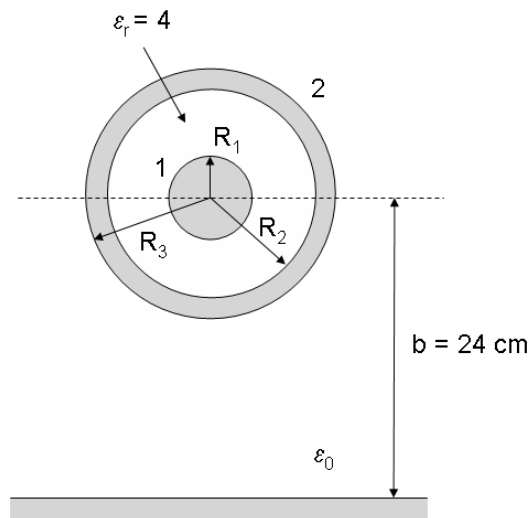


FIGURE 1.3.1 – Exercice R2 (1)

Solution

Le système est équivalent à la mise en série de deux capacités comme indiqué à la figure 1.3.2 avec, en utili-

sant les relations (1.2.3) et (1.2.5) :

$$\frac{C_{12}}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 3,21 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$$

$$\frac{C_{20}}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{b}{R_3} + \sqrt{\left(\frac{b}{R_3} \right)^2 - 1} \right)} = 4,22 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$$

La tension U_{12} s'écrit donc :

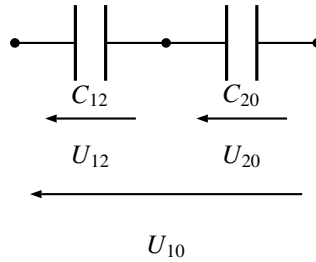


FIGURE 1.3.2 – Exercice R2 (2)

$$U_{12} = \frac{C_{20}}{C_{12} + C_{20}} U_{10} = \frac{\frac{C_{20}}{L}}{\frac{C_{12}}{L} + \frac{C_{20}}{L}} U_{10}$$

La charge linéique prise par le conducteur 1 s'exprime par :

$$\frac{Q_1}{L} = \frac{C_{12}}{L} U_{12} = \frac{C_{12}}{L} \frac{\frac{C_{20}}{L}}{\frac{C_{12}}{L} + \frac{C_{20}}{L}} U_{10} = 18,6 \text{ nC/m}$$

Exercice R3 - Deux conducteurs cylindriques illimités 1 et 2, de rayon R , parallèles entre eux et parallèles à un plan conducteur, sont disposés comme l'indique la figure 1.3.3. On suppose R très petit par rapport à h et à d . Le plan a une charge totale nulle, et les conducteurs 1 et 2 portent des charges linéiques uniformément réparties, égales respectivement à $\frac{Q}{L}$ et $-\frac{Q}{L}$. Le milieu est le vide.

1. Que vaut en grandeur, direction et sens, le champ électrique le long du plan conducteur en un point P , pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la section du conducteur 1 au plan ?
2. Que vaut, en grandeur et en signe, la charge surfacique en P ?

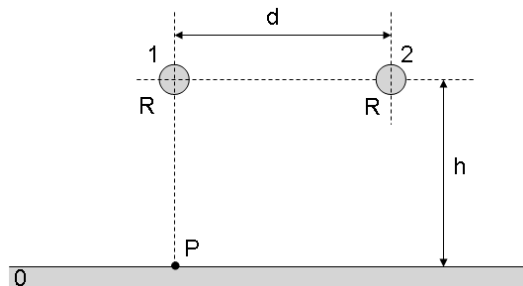


FIGURE 1.3.3 – Exercice R3 (1)

Solution

1. Par le principe des images électriques, le système représenté à la figure 1.3.3 est équivalent au système de la figure 1.3.4. Dès lors, le champ électrique au point P s'exprime selon :

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) + \vec{E}_{1'}(P) + \vec{E}_{2'}(P)$$

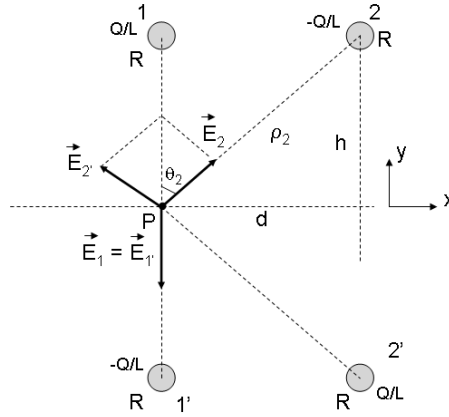


FIGURE 1.3.4 – Exercice R3 (2)

où \vec{E}_i désigne la contribution du conducteur i . Les directions des champs ont été obtenus conformément à la relation (1.2.8). Les grandeurs sont données par :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{Q}{L} \\ E_{1'} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{Q}{L} \\ E_2 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 \rho_2} \frac{Q}{L} \\ E_{2'} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 \rho_2} \frac{Q}{L} \end{aligned}$$

Il apparaît que le champ électrique en P est dirigé selon l'axe y . Le champ global selon y s'écrit :

$$E_y(P) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{Q}{L} - \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{Q}{L} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0 \rho_2} \frac{Q}{L} \cos \theta_2 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0 \rho_2} \frac{Q}{L} \cos \theta_2$$

avec

$$\rho_2 = \sqrt{d^2 + h^2} \quad \text{et} \quad \cos \theta_2 = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

ce qui donne :

$$\vec{E}(P) = \left[\frac{2}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{d^2 + h^2} \right) \right] \vec{u}_y$$

et enfin :

$$\boxed{\vec{E}(P) = \left(\frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{-d^2}{h(d^2 + h^2)} \right) \vec{u}_y}$$

Le vecteur champ électrique au point P est dirigé vers les y négatifs.

2. On a au point P (voir cours) :

$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E}.$$

Avec \vec{n} , le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur. Dès lors, puisque \vec{D} est parallèle à \vec{n} (figure 1.3.5) :

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{-d^2}{h(d^2 + h^2)}$$

et enfin :

$$\boxed{\sigma = -\frac{1}{\pi} \frac{Q}{L} \frac{d^2}{h(d^2 + h^2)}}$$

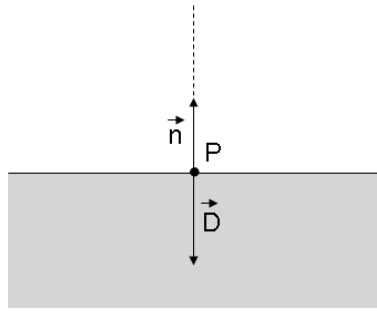


FIGURE 1.3.5 – Exercice R3 (3)

Exercice R4 - Calculez la force entre les deux armatures d'un condensateur plan.

Solution

Supposons donner au niveau de l'armature de droite un déplacement élémentaire δx (voir figure 1.3.6 où la variable x correspond à la position de la seconde armature). On a :

$$F = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_U$$

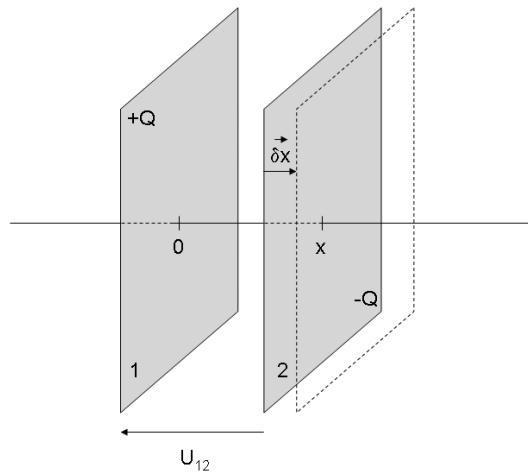


FIGURE 1.3.6 – Exercice R4

L'énergie du système s'exprime par :

$$W = \frac{1}{2} C U_{12}^2$$

Dès lors, si l'on travaille à potentiel constant :

$$F = \frac{1}{2} U_{12}^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

La capacité C associée à un condensateur plan s'exprime par :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{x}$$

Par conséquent :

$$F = \frac{1}{2} U_{12}^2 \epsilon_0 S \frac{-1}{x^2}$$

Si l'on désire exprimer cette force en fonction de la charge Q , on remplace U_{12} par $\frac{Q}{C}$, ce qui donne :

$$F = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \epsilon_0 S \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\left(\frac{\epsilon_0 S}{x}\right)^2} \epsilon_0 S \frac{1}{x^2}$$

ce qui donne finalement :

$$F = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S}$$

Le signe négatif nous enseigne qu'il s'agit d'une force d'attraction entre les deux armatures (\vec{F} opposé à $\vec{\delta x}$). Si

l'on travaille à charges constantes, on utilise l'expression suivante de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Dès lors, on a :

$$F = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial \frac{1}{C}}{\partial x}$$

Puisque :

$$\frac{1}{C} = \frac{x}{\epsilon_0 S}$$

on trouve aussi que :

$$F = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S}$$

1.4 Exercices

Exercice 1 - Considérons un système composé d'un plan illimité (conducteur 0) et d'un conducteur cylindrique illimité (conducteur 1) parallèle à ce plan et de rayon R (voir figure 1.2.2). Le rayon R est négligeable par rapport à la distance b (distance entre le conducteur cylindrique et le plan). On applique une différence de potentiel U_{10} entre le conducteur cylindrique et le plan. On appelle $\frac{Q}{L}$ la charge linéique prise par le conducteur cylindrique. Le milieu est le vide.

1. Déterminez le champ \vec{E} et le potentiel V en chaque point de l'espace en considérant le conducteur cylindrique seul.
2. Calculez la charge surfacique au point P , P étant l'intersection du plan avec la droite passant par le centre du conducteur cylindrique et perpendiculaire au plan.
3. Calculez la capacité linéique entre le conducteur cylindrique et le plan (relation (1.2.6)).
4. Calculez la force linéique exercée sur le conducteur cylindrique.

Réponses

1. A l'extérieur : $\vec{E}(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \frac{1}{\rho} \vec{u}_\rho$ et $V(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \ln \frac{1}{\rho} + \text{Cste}$
 A l'intérieur : $\vec{E} = 0$ et $V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \ln \frac{1}{R} + \text{Cste}$
 Sur le conducteur : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \frac{1}{R} \vec{u}_\rho$ et $V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L} \right) \ln \frac{1}{R} + \text{Cste}$
2. $\sigma = \frac{-1}{\pi} \left(\frac{Q}{L} \right) \frac{1}{b}$
3. $\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2b}{R}}$
4. $\frac{F}{L} = \frac{-\pi\epsilon_0 U_{10}^2}{b \ln^2 \frac{2b}{R}}$

Exercice 2 - Etablissez les relations (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) et (1.2.4).

Exercice 3 - Une différence de potentiel de 50 kV est appliquée entre deux cylindres conducteurs illimités, coaxiaux, de rayons 5 mm et 100 mm respectivement, placés dans l'air.

1. Y a-t-il danger de disruption ($E_{d(\text{air})} = 3.10^6 \text{ V/m}$) ?
2. Si l'armature intérieure est couverte d'une couche de 10 mm d'épaisseur d'un isolant ayant une permittivité relative 7,5 et un champ disruptif de quelques 10 MV/m, une disruption est-elle à craindre ?

Réponses

1. Oui
2. Non

Exercice 4 - On considère un système formé de trois conducteurs disposés comme l'indique la figure 1.4.1(a). Le conducteur 0 est une plaque plane illimitée d'épaisseur d_0 , et les conducteurs 1 et 2 sont des cylindres illimités dont les axes sont parallèles à la plaque et dans un plan perpendiculaire à celle-ci. Le milieu entre les conducteurs 1 et 0 est un diélectrique de permittivité ϵ' et le milieu entre les conducteurs 0 et 2 un diélectrique de permittivité ϵ'' . Initialement le système n'est pas chargé. La plaque 0 restant isolée, on applique une différence de potentiel U_{12} entre les conducteurs 1 et 2.

1. Que vaut la différence de potentiel U_{10} entre les conducteurs 1 et 0 ?
2. Que vaudrait-elle si les conducteurs étaient disposés comme l'indique la figure 1.4.1(b) ?

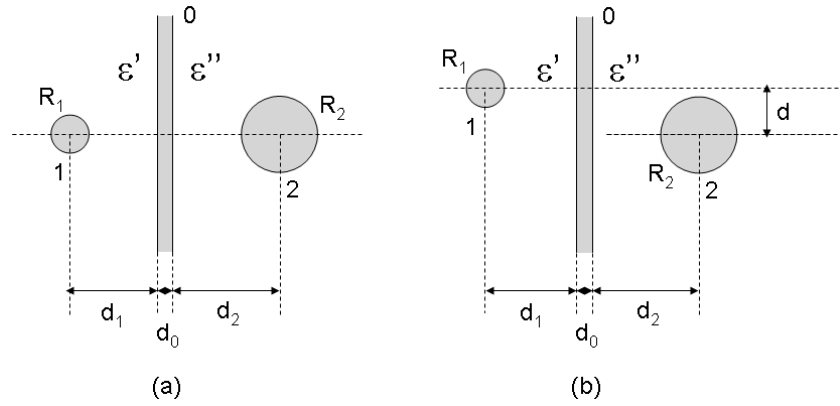


FIGURE 1.4.1 – Exercice 4

Réponses

1. $U_{10} = U_{12} \left(1 + \frac{\epsilon' \ln \left[(d_2/R_2) + \sqrt{(d_2/R_2)^2 - 1} \right]}{\epsilon'' \ln \left[(d_1/R_1) + \sqrt{(d_1/R_1)^2 - 1} \right]} \right)^{-1}$
2. Reste inchangée

Exercice 5 - Calculez la charge surfacique en tout point du plan du système présenté à la figure 1.4.2.

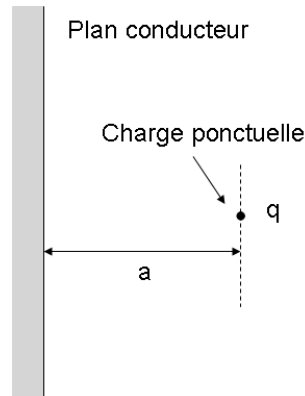


FIGURE 1.4.2 – Exercice 5

Réponse

$\sigma = -\frac{aq}{2\pi(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ en ayant choisi l'origine du repère sur le plan et l'axe x dirigé vers la charge q.

Exercice 6 - Etablissez l'expression analytique des forces linéiques qui s'exercent entre deux conducteurs cylindriques, parallèles, illimités et de rayons identiques R lorsqu'une différence de potentiel U leur est appliquée et en supposant que la distance d entre les deux conducteurs est très grande par rapport à leur rayon. Donnez la direction et le sens de chacune de ces deux forces. Que devient cette expression si la distance d n'est plus nécessairement très grande par rapport à R ?

Réponses

$$|F| = \frac{U^2 \pi \epsilon_0}{2d \ln^2 \frac{d}{R}}, \text{ forces d'attraction } (d \gg R).$$

$$|F| = \frac{U^2 \pi \epsilon_0}{4R \left(\frac{d}{2R} + \sqrt{\left(\frac{d}{2R} \right)^2 - 1} \right) \ln^2 \left(\frac{d}{2R} + \sqrt{\left(\frac{d}{2R} \right)^2 - 1} \right)} \left(1 + \frac{d}{2R} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2R} \right)^2 - 1}} \right), \text{ forces d'attraction (cas général).}$$

Exercice 7 - Soit une sphère isolante uniformément chargée (charge totale Q , rayon R) située à une distance h d'un plan infini conducteur (voir figure 1.4.3) et soit D , la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan. Donnez l'expression analytique de la charge surfacique $\sigma(x)$ le long de l'axe Ox appartenant au plan conducteur et passant par le point P , point de percée de D avec le plan.

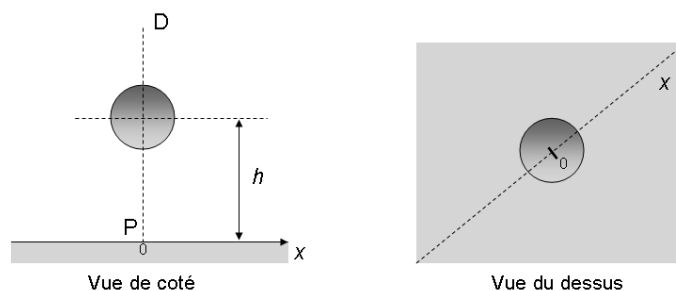


FIGURE 1.4.3 – Exercice 7

Réponse

$$\sigma = \frac{-Qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 8 - Deux conducteurs cylindriques illimités 1 et 2, de rayon R , parallèles entre eux et parallèles à un plan conducteur 0, sont disposés comme l'indique la figure 1.4.4. Le plan a une charge totale nulle, et les conducteurs 1 et 2 portent des charges linéiques uniformément réparties, égales respectivement à $\frac{Q}{L}$ et $-\frac{Q}{L}$. Que vaut la charge surfacique au point P ?

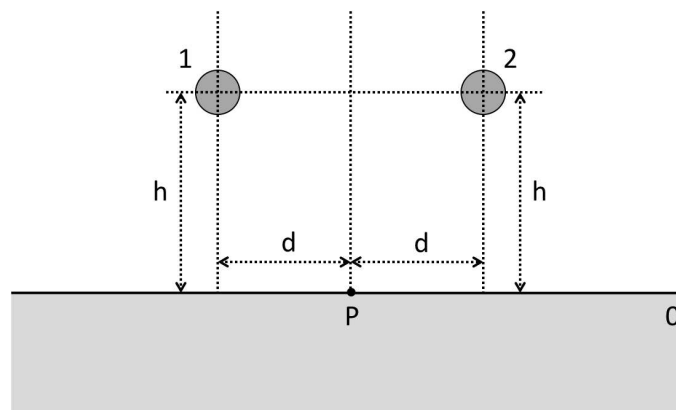


FIGURE 1.4.4 – Exercice 8

Réponse

$$\sigma = 0$$

Exercice 9 - On considère un système formé de trois conducteurs disposés comme l'indique la figure 1.4.5. Le conducteur 0 est une plaque plane illimitée d'épaisseur d_0 , et les conducteurs 1 et 2 sont des cylindres illimités

de rayons R_1 et R_2 . Le milieu entre les conducteurs 1 et 0 et entre les conducteurs 0 et 2 est un diélectrique de permittivité ϵ . Les conducteurs 1 et 2 sont situés à une distance d_1 de la plaque. Quelle condition faut-il appliquer entre R_1 et R_2 afin d'avoir une capacité effective linéique $\frac{C_{12}}{L}$ entre les conducteurs 1 et 2 qui vaut la moitié de la capacité partielle $\frac{C_{10}}{L}$ (entre les conducteurs 1 et 0)? Expliquez. Pour rappel, la capacité linéique entre un plan conducteur et un conducteur cylindrique illimité est donnée par (b est la distance entre le plan et le conducteur illimité de rayon R) :

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{R} + \sqrt{\left(\frac{b}{R}\right)^2 - 1}\right)}$$

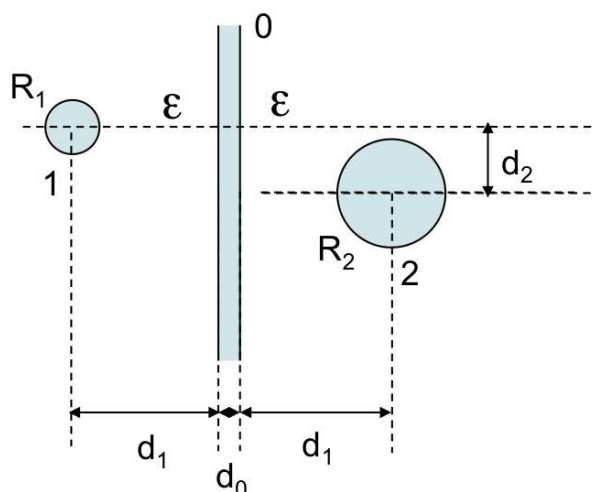


FIGURE 1.4.5 – Exercice 9

Réponse

$$R_1 = R_2$$

Exercice 10 - On considère un système composé de deux conducteurs cylindriques illimités parallèles et de rayon R baignant dans un diélectrique de permittivité ϵ (figure 1.4.6). Si la distance entre les conducteurs vaut x , on sait que la capacité linéique est donnée par :

$$\frac{C}{L} = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left[\frac{x}{2R} + \sqrt{\left(\frac{x}{2R}\right)^2 - 1}\right]}$$

Lorsque l'on applique une différence de potentiel $U = 1$ kV entre les deux conducteurs, on génère une force d'attraction linéique entre ceux-ci de $1 \mu\text{N/m}$. Sachant que $x = 2$ m, $R = 1$ cm, que vaut la permittivité relative du diélectrique utilisé? On considérera que les dimensions sont telles que $\frac{x}{2} \gg R$

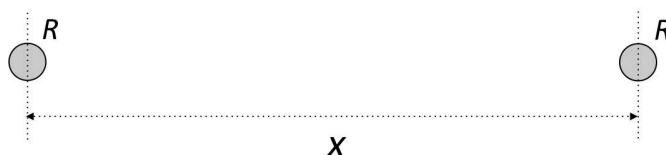


FIGURE 1.4.6 – Exercice 10

Réponse

$$\epsilon_r = 4,04$$

Exercice 11 - Un ensemble de n conducteurs cylindriques illimités, de rayon R , parallèles entre eux, espacés d'une distance d et parallèles à un plan parfaitement conducteur, est disposé comme l'indique la figure 1.4.7. On suppose R très petit par rapport à h et à d . Le plan a une charge totale nulle et les conducteurs portent des charges linéiques uniformément réparties, toutes égales à $\frac{Q}{L}$. Le milieu est le vide.

1. Que vaut le champ électrique au point P, pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la section du conducteur 3 au plan ?
2. Que vaut la charge surfacique en P ?

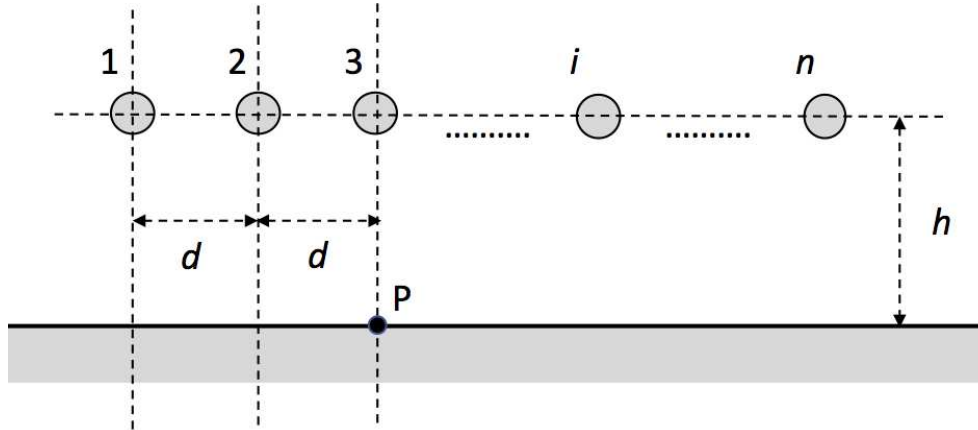


FIGURE 1.4.7 – Exercice 11

Réponses

1. $\vec{E} = \frac{-h}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L}\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-3)^2 d^2 + h^2}\right) \vec{u}_y$
2. $\sigma = \frac{-h}{\pi} \left(\frac{Q}{L}\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-3)^2 d^2 + h^2}$

Exercice 12 - Soit un condensateur plan parfait, dont les armatures, plongées dans le vide, ont une surface S et sont distantes de a . Calculez le travail qu'il faut effectuer contre les forces du champ pour accroître de a à b la distance des armatures :

1. lorsque celles-ci sont reliées à une source leur appliquant une différence de potentiel U ,
2. lorsque les armatures, initialement reliées à cette source, en sont isolées avant leur déplacement.

Réponses

1. $T = \frac{\epsilon_0 S}{2} \frac{b-a}{ab} U^2$
2. $T = \frac{\epsilon_0 S}{2} \frac{b-a}{a^2} U^2$

Exercice 13 - Un condensateur plan parfait, dont les armatures ont une surface utile S et sont distantes de a , le diélectrique ayant une permittivité ϵ , est soumis à une différence de potentiel U ; la force d'attraction entre les armatures est alors F . Quelle est, en fonction de F et des caractéristiques du condensateur, l'énergie emmagasinée dans ce dernier ?

Réponse

$$W = aF$$

Exercice 14 - On considère deux plaques métalliques rectangulaires horizontales, disposées comme l'indique la figure 1.4.8. On suppose que x et y sont petits par rapport à a et b , la distance y étant elle-même petite par rapport à x . Le milieu est l'air. Une différence de potentiel U est appliquée entre les deux plaques.

1. Que vaut approximativement la composante horizontale de la force s'exerçant entre les plaques ?
2. Que vaut approximativement la composante verticale de la force s'exerçant entre les plaques ?

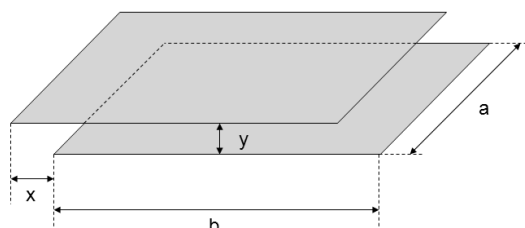


FIGURE 1.4.8 – Exercice 14

Réponses

1. $|F| = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{a}{y} U^2$
2. $|F| = \frac{1}{2} \epsilon_0 (b - x) \frac{U^2}{y^2} a$

Exercice 15 - On considère un condensateur dont les armatures présentent une symétrie de révolution autour d'un axe x , la distance d (voir figure 1.4.9) étant de 10 mm. On sait que si l'on déplace légèrement l'armature 2 le long de x en sorte que d augmente de 1 mm, la capacité du condensateur diminue de 4 pF. Évaluez la force d'attraction s'exerçant entre les armatures lorsque le condensateur est soumis à une différence de potentiel de 10 kV.

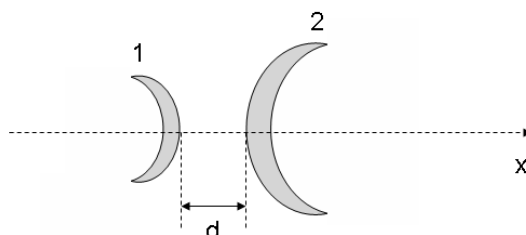


FIGURE 1.4.9 – Exercice 15

Réponse

$$F = 0,2 \text{ N}$$

Exercice 16 - On considère un électromètre de Kelvin, constitué de secteurs plans métalliques parallèles, disposés comme l'indique la figure 1.4.10. Les secteurs A et A' sont fixes ; l'ensemble des secteurs B et B' est mobile autour d'un axe perpendiculaire aux secteurs et passant par O . L'angle α étant de 0,1 rad, on sait que si une tension de 1 kV est appliquée entre $A-A'$ d'une part et $B-B'$ d'autre part, l'ensemble $B-B'$ est soumis à un couple dont le moment vaut $3,5 \mu\text{N.m}$.

1. Évaluez la valeur absolue de la variation de la capacité entre $A-A'$ d'une part, et $B-B'$ d'autre part, lorsque α augmente de 1 mrad à partir de 0,1 rad.
2. Cette capacité augmente-elle ou diminue-elle lorsque α augmente.

Réponses

1. $7 \cdot 10^{-3} \text{ pF}$
2. Diminue

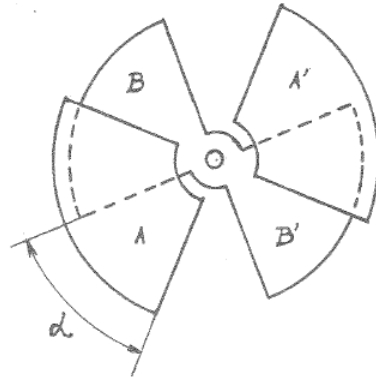


FIGURE 1.4.10 – Exercice 16

Exercice 17 - Les rectangles grisés de la figure 1.4.11 représentent des disques métalliques d'un millimètre d'épaisseur de surface égale à 25 cm^2 . Les distances d_1 et d_2 sont respectivement égales à 2 et 10 mm. Les disques métalliques 1 et 3 sont fixes tandis que le disque métallique 2 repose sans fixation sur un bloc constitué d'un diélectrique de permittivité relative $\epsilon_r = 3$; le milieu est le vide. Tous les disques sont en position horizontale par rapport au sol et pèsent chacun 10 grammes. La résistance interne de la source vaut 50Ω . Quelle est la tension E nécessaire afin de faire "décoller" le disque 2 de son socle.

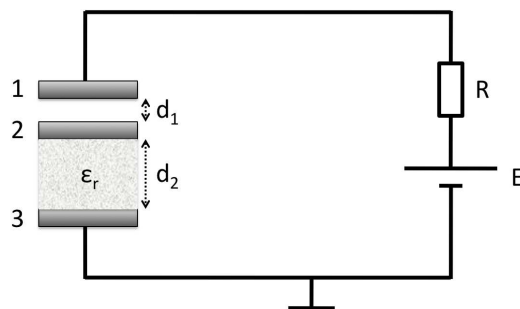


FIGURE 1.4.11 – Exercice 17

Réponse

$$E > 19,451 \text{ kV}$$

Chapitre 2

Etats stationnaires

2.1 Calcul du champ, de l'induction et des forces magnétiques

2.1.1 Rappels

Flux magnétique

Le flux magnétique à travers une surface (voir figure 2.1.1) est le flux du vecteur induction magnétique à travers cette surface :

$$\phi = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{B} dS$$

\vec{n} est le vecteur orthonormé par rapport à la surface. Le choix de sa direction fixe le sens positif du flux.

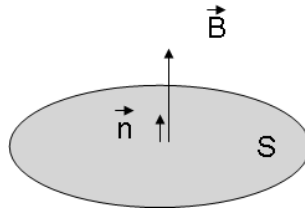


FIGURE 2.1.1 – Flux magnétique

Formule de Biot-Savart

Considérons dans un circuit électrique parcouru par un courant I_N , un élément de courant dI_N (figure 2.1.2). L'élément d'induction crée en un point P par cet élément de courant est donné par :

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} dI_N \frac{d\vec{s}_N \times \vec{u}_{NP}}{r_{NP}^2} \quad (2.1.1)$$

Equations électromagnétiques

Considérons une ensemble de trois circuits disposés comme à la figure 2.1.3. Les équations électromagnétiques associées sont :

$$\phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 + L_{13}I_3$$

$$\phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2 + L_{23}I_3$$

$$\phi_3 = L_{31}I_1 + L_{32}I_2 + L_{33}I_3$$

$\phi_{11} = L_{11}I_1$ représente la partie du flux à travers le circuit 1 provenant du courant I_1 lui-même. $\phi_{12} = L_{12}I_2$ représente la partie du flux à travers le circuit 1 provenant du circuit 2 (I_2). Notons que l'énergie magnétique pour

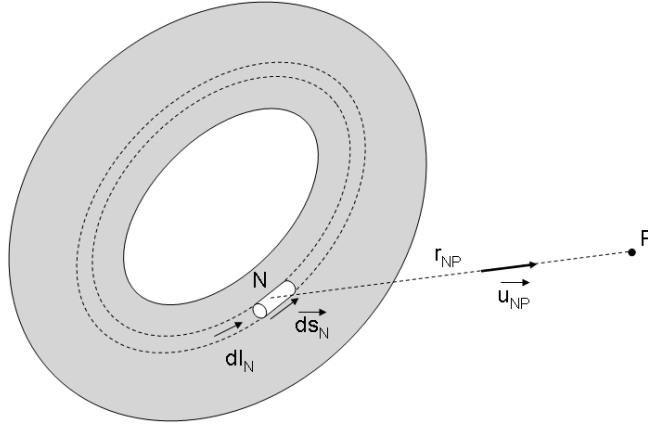


FIGURE 2.1.2 – Formule de Biot-Savart

un système formé par deux circuits s'exprime par :

$$W = \frac{1}{2}(L_{11}I_1^2 + L_{22}I_2^2 + 2L_{12}I_1I_2)$$

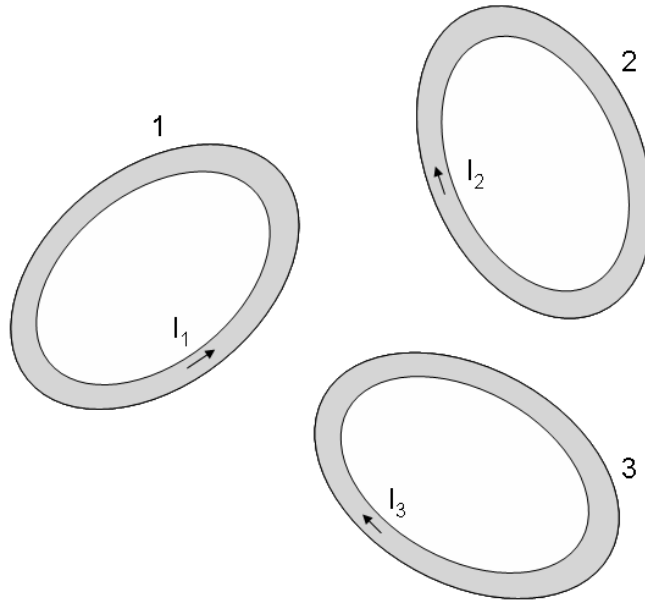


FIGURE 2.1.3 – Equations électromagnétiques

Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé quelconque est égale à l'intensité du courant réel à travers ce contour (figure 2.1.4) :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = I$$

Calcul des forces par la méthode direct

Un élément de courant dI subit de la part de tous les autres éléments de courant une force donnée par (figure

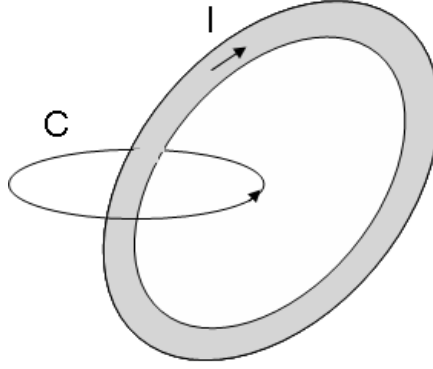


FIGURE 2.1.4 – Théorème d'Ampère

2.1.5) :

$$d\vec{F} = dI d\vec{s} \times \vec{B}$$

où \vec{B} est l'induction magnétique générée par l'ensemble des autres éléments de courant.

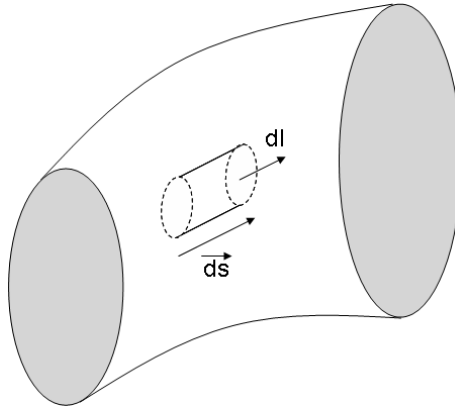


FIGURE 2.1.5 – Calcul des forces par la méthode directe

Calcul des forces par la méthode des travaux virtuels

En travaillant en analogie avec l'électrostatique (charge \leftrightarrow flux et potentiel \leftrightarrow courant), on montre que :

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_I = - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_\phi$$

Champ électrique induit dynamique et force électromotrice induite dynamique

La force magnétique qui s'exerce sur une charge, du fait que le corps auquel elle appartient se déplace à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique d'induction \vec{B} , est équivalente à la force que cette charge subirait si elle était soumise à l'action d'un champ électrique égal à \vec{E}_d régnant dans le corps. Ce champ est appelé champ électrique induit dynamique ou en abrégé champ dynamique et s'exprime par :

$$\vec{E}_d = \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1.2)$$

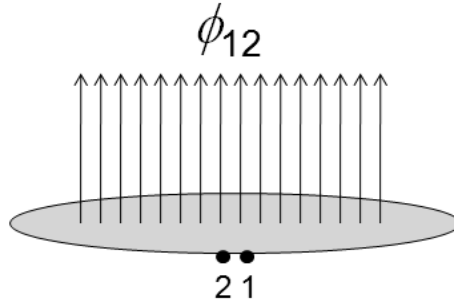
Le champ dynamique, qui tend à mettre les charges en mouvement, est une nouvelle espèce de champ électromoteur qui résulte d'actions mécaniques. On définit la force électromotrice induite dynamique entre les points 1 et 2 du conducteur par :

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_d d\vec{s}$$

Considérons maintenant une ligne de courant entière (fermée, 1 et 2 infiniment proches). Dans ce cas, une autre approche pour le calcul de la force électromotrice induite dynamique et d'utiliser la relation suivante :

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\phi_{12}}{dt}$$

où ϕ_{12} est le flux traversant le contour défini par la ligne de courant et dont le sens correspond à celui défini par le parcours 1 \rightarrow 2 (voir figure 2.1.6).

FIGURE 2.1.6 – Sens de ϕ_{12}

2.1.2 Exercices résolus

Exercice R1 - Considérons un conducteur infiniment long de rayon a parcouru par un courant d'intensité I (figure 2.1.7). Calculez le champ magnétique en tout point P de l'espace.

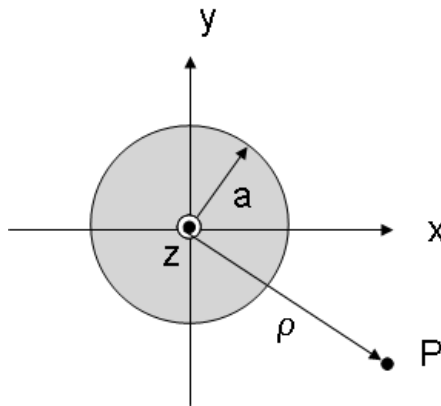


FIGURE 2.1.7 – Exercice R1 (1)

Solution

En raison de la symétrie du système, il apparaît immédiatement que la champ magnétique \vec{H} ne dépend que de la distance ρ entre le point considéré P et le centre du conducteur pris dans le plan A perpendiculaire à l'axe de celui-ci et passant par le point P . La symétrie nous permet également de conclure que l'induction magnétique, et donc le champ magnétique, sera situé dans ce même plan A perpendiculairement à l'axe joignant P et le centre du conducteur. Pour le justifier, appliquons la formule de Biot-Savart rappelée en (2.1.1) au trois cas suivants :

- Le point N situant le tube de courant élémentaire est situé dans le plan A et est au centre du conducteur comme indiqué à la figure 2.1.8(a). Au vu des vecteurs $d\vec{s}_N$ et u_{NP} , il apparaît immédiatement que \vec{H} est perpendiculaire à l'axe NP et située dans le plan A .
- Le point N situant le tube de courant élémentaire est situé dans le plan A et n'est pas au centre du conducteur. Dans ce cas, il existera toujours un autre élément de courant situé symétriquement à N_1 par rapport à l'axe joignant le centre du conducteur à P . Dès lors les deux éléments de champ magnétique $d\vec{H}_1$ et $d\vec{H}_2$

s'additionneront pour donner un vecteur $d\vec{H}$ perpendiculaire à l'axe joignant le centre du conducteur à P comme indiqué à la figure 2.1.8(b).

- Le point N situant le tube de courant élémentaire n'est pas situé dans le plan A comme indiqué à la figure 2.1.8(c). Au vu des vecteurs $d\vec{s}_N$ et u_{NP} , il apparaît immédiatement que \vec{H} est normal au plan de la feuille. Le champ magnétique est donc bien perpendiculaire à l'axe joignant le centre du conducteur au point P .

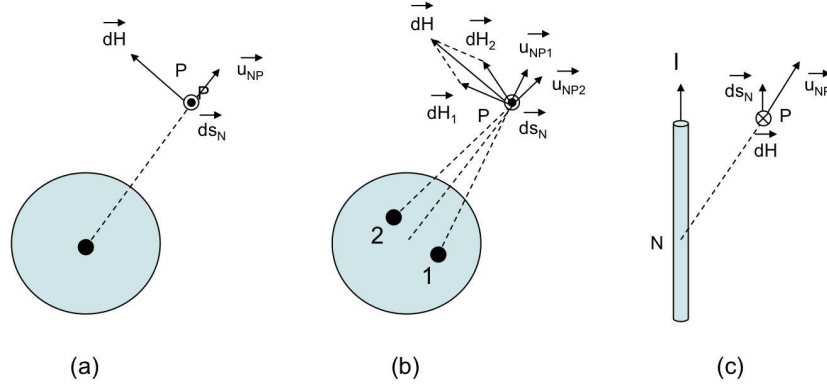


FIGURE 2.1.8 – Exercice R1 (2)

Calculons à présent la grandeur H du champ magnétique en P en utilisant le théorème d'ampère. Si le point P est situé à l'extérieur du conducteur comme indiqué à la figure 2.1.9(b) et si on choisit comme contour C le trait en pointillé, le théorème d'ampère devient :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = I$$

On a :

$$H \oint_C d\ell = I$$

puisque \vec{H} est parallèle à $d\vec{\ell}$ et H est constant le long du contour (symétrie). Dès lors :

$$H(2\pi\rho) = I$$

et finalement :

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi\rho}}$$

Si le point P est situé à l'intérieur du conducteur comme indiqué à la figure 2.1.9(a) et si on choisit comme contour C le trait en pointillé, le théorème d'ampère s'écrit :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = I_c$$

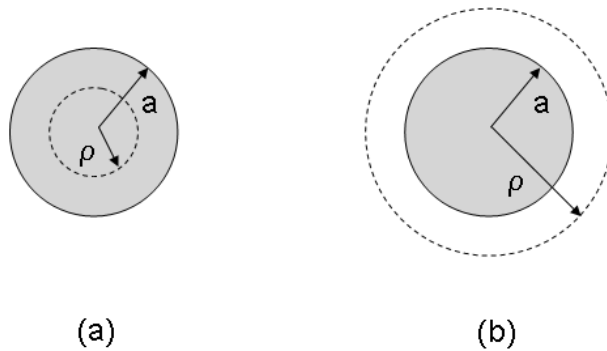


FIGURE 2.1.9 – Exercice R1 (3)

où I_C est le courant passant dans le contour C . Ce courant est ici différent du courant I passant dans l'ensemble de conducteur. Si le courant est uniformément réparti au sein du conducteur, on a :

$$I_C = \frac{\pi \rho^2}{\pi a^2} I$$

Dès lors la relation donnant H devient :

$$H \oint_C d\ell = \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 I$$

puisque, encore une fois, \vec{H} est parallèle à $d\vec{\ell}$ et H est constant le long du contour. Dès lors :

$$H(2\pi\rho) = \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 I$$

et finalement :

$$H = \left(\frac{\rho}{2\pi a^2}\right) I$$

Exercice R2 - Calculez en grandeur, direction et sens, l'induction magnétique au centre (point P) d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I (figure 2.1.10).

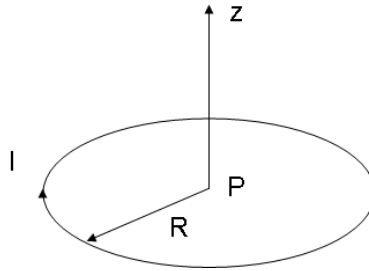


FIGURE 2.1.10 – Exercice R2 (1)

Solution

En appliquant la formule de Biot-Savart rappelée en (2.1.1), l'élément d'induction magnétique au point P s'exprime par :

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I (d\vec{s} \times \vec{u}) \frac{1}{R^2}$$

dI_N vaut en effet I puisque le système est constituée d'un simple spire. $d\vec{s}$ et \vec{u} sont indiqués à la figure 2.1.11. La relation précédente peut également s'écrire :

$$d\vec{B}(P) = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi} I ds \frac{1}{R^2}\right) \vec{u}_z$$

En intégrant sur l'ensemble de la spire :

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{R^2} \left(\int_0^{2\pi} R d\varphi \right) \vec{u}_z$$

Dès lors :

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi}{R} \vec{u}_z$$

Et finalement :

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \vec{u}_z$$

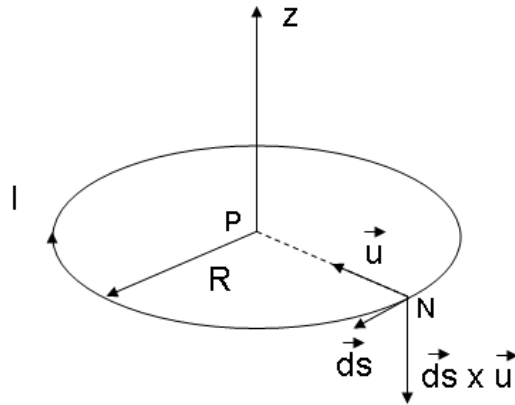


FIGURE 2.1.11 – Exercice R2 (2)

2.1.3 Exercices

Exercice 1 - On considère trois bobines 1, 2 et 3 d'inductances propres : $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 15 \text{ mH}$ et $L_3 = 5 \text{ mH}$. Les bobines 1 et 2 d'une part, les bobines 1 et 3 d'autres part, ne sont pas couplées. L'inductance mutuelle des bobines 2 et 3 est égale à 4 mH . Quels courants I_1 , I_2 et I_3 faut-il faire circuler simultanément dans les bobines pour que le flux à travers celles-ci soient, respectivement $\phi_1 = 10 \text{ mWb}$, $\phi_2 = 50 \text{ mWb}$ et $\phi_3 = 33 \text{ mWb}$?

Réponses

$I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$ et $I_3 = 5 \text{ A}$

Exercice 2 - Un fil rectiligne illimité parcouru par un courant I_1 et une spire rectangulaire parcourue par un courant I_2 sont coplanaires (figure 2.1.12) ?

1. Calculez l'inductance mutuelle L_{21} .
2. Calculez la force exercée par le fil 1 sur la spire 2 en grandeur, direction et sens.
3. Considérons maintenant que la spire se déplace à une vitesse \vec{v} dirigé vers les x positifs. Que valent le champ induit dynamique et la force électromotrice induite dynamique ?
4. Si le vecteur \vec{v} est dirigé vers les y positifs, que devient la force électromotrice induite dynamique ?
5. Si le vecteur \vec{v} est dans le plan xy selon une direction faisant un angle α avec l'axe y , que devient la force électromotrice induite dynamique ?
6. Que devient la force électromotrice induite dynamique si $I_1 = I \sqrt{2} \cos \omega t$ et si la spire reste fixe ?

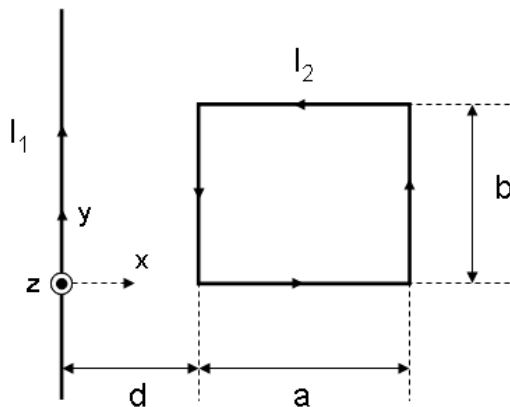


FIGURE 2.1.12 – Exercice 2

Réponses

1. $L_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{d}{a+d}$
2. $F = \frac{\mu_0 ab}{2\pi} I_1 I_2 \frac{1}{d(a+d)}$
3. $\vec{E}_d = \frac{\mu_0 I_1 v}{2\pi x} \vec{u}_y$ et $\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I_1 v}{2\pi} \frac{ab}{(a+d+vt)(d+vt)}$
4. $\mathcal{E} = 0$
5. $\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I_1 v \sin \alpha}{2\pi} \frac{ab}{(a+d+vt \sin \alpha)(d+vt \sin \alpha)}$
6. $\mathcal{E} = \frac{\mu_0 b I \sqrt{2} \omega}{2\pi} \ln \left(\frac{d}{a+d} \right) \sin \omega t$

Exercice 3 - Calculez en grandeur, direction et sens, l'induction au centre (point P) d'un ruban circulaire de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 , d'épaisseur négligeable et traversé par un courant d'intensité I (figure 2.1.13).

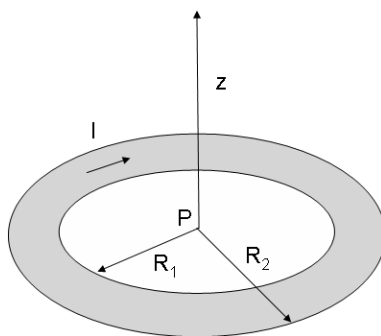


FIGURE 2.1.13 – Exercice 3

Réponses

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \vec{u}_z$$

Exercice 4 - Un fil droit est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω et de valeur efficace I et dirigé dans le sens de l'axe y (figure 2.1.14, dimensions en dm). Calculez la force électromotrice qui apparaît entre les bornes A et B de la spire.

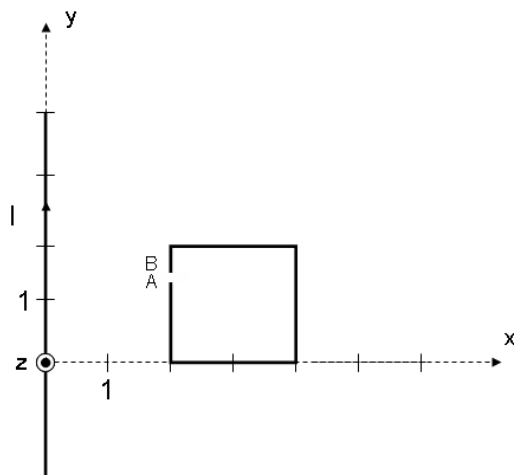


FIGURE 2.1.14 – Exercice 4

Réponses

$$\mathcal{E}_{AB} = 0,2 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln 2I \sqrt{2} \omega \cos \omega t$$

Exercice 5 - Calculez le f.e.m. $\mathcal{E}_{11'}$ de la spire rectangulaire représentée à la figure 2.1.15 en mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de son axe dans une induction magnétique uniforme B perpendiculaire à son axe. On supposera, à l'instant $t = 0$, que le plan de la spire est perpendiculaire à \vec{B} .

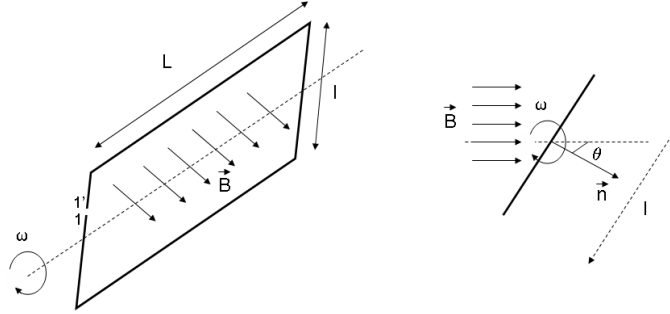


FIGURE 2.1.15 – Exercice 5

Réponses

$$\mathcal{E}_{11'} = \omega B L l \sin \omega t$$

Exercice 6 - Un conducteur rectiligne passant par le point P , filiforme et illimité est parallèle à deux autres conducteurs cylindriques, parallèles, illimités et de rayons R comme indiqué à la figure 2.1.16.

1. Calculez le champ magnétique en P pour le sens du courant constant I spécifié sur la figure.
2. Calculez en grandeur, direction et sens, la force linéique sur le conducteur passant par P lorsqu'il est parcouru par un courant constant I_2 entrant dans le plan de la figure.

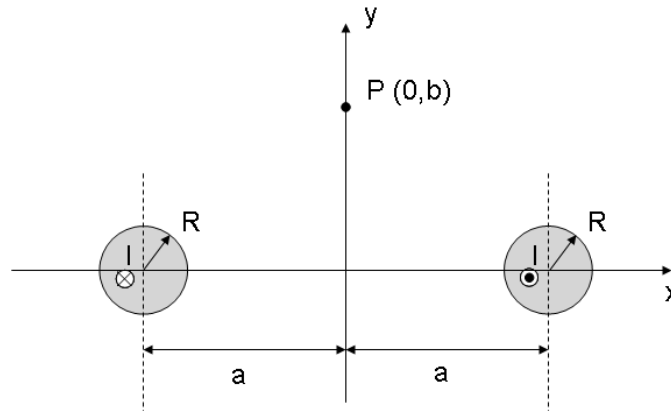


FIGURE 2.1.16 – Exercice 6

Réponses

1. $\vec{H}(P) = -\frac{Ia}{\pi(a^2+b^2)} \vec{u}_y$
2. $\frac{\vec{F}}{L} = -\mu_0 \frac{II_2 a}{\pi(a^2+b^2)} \vec{u}_x$

Exercice 7 - Deux conducteurs cylindriques parallèles illimités de rayons R sont parcourus par des courants continus égaux et de sens contraires et d'intensité I (figure 2.1.17). Calculez en grandeur, direction et sens, le champ

magnétique en tout point le long de l'axe y .

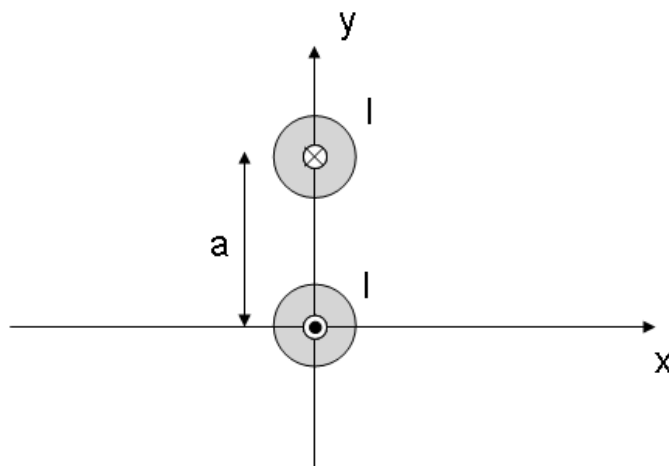


FIGURE 2.1.17 – Exercice 7

Réponse

$\vec{H}(y) = \frac{-aI}{2\pi(a-y)y} \vec{u}_x$ à l'extérieur des conducteurs

$\vec{H}(y) = -\frac{I}{2\pi} \frac{R^2+y(a-y)}{yR^2} \vec{u}_x$ à l'intérieur du conducteur supérieur

$\vec{H}(y) = -\frac{I}{2\pi} \frac{R^2+y(a-y)}{(a-y)R^2} \vec{u}_x$ à l'intérieur du conducteur inférieur

Exercice 8 - Soit un ensemble de conducteurs cylindriques, parallèles et illimités, représenté à la figure 2.1.18. Les conducteurs 1, 2 et 3 sont respectivement parcourus par des courants I_1 , I_2 et I_3 avec les sens indiqués sur la figure. d_i correspond à la distance entre le centre du conducteur i et le centre du repère.

1. Calculez le champ magnétique au centre du repère.
2. Calculez, en grandeur, la force linéique sur le conducteur filiforme et illimité passant par le centre du repère et perpendiculaire au plan de la feuille lorsqu'il est parcouru par un courant constant I sortant du plan de la figure.

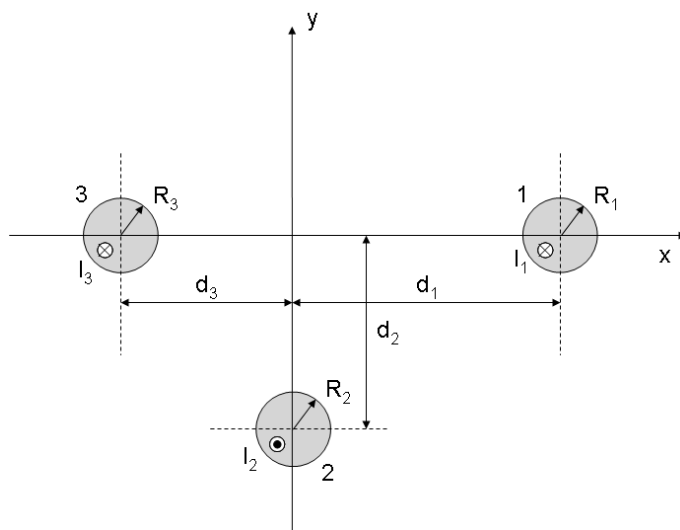


FIGURE 2.1.18 – Exercice 8

Réponses

$$1. \vec{H} = -\frac{I_2}{2\pi d_2} \vec{u}_x + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{I_1}{d_1} - \frac{I_3}{d_3} \right) \vec{u}_y$$

$$2. \frac{F}{L} = \mu_0 I \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_2^2}{d_2^2} + \frac{I_1^2}{d_1^2} + \frac{I_3^2}{d_3^2} - \frac{2I_1 I_3}{d_1 d_3}}$$

Exercice 9 - Dix spires rectangulaires infiniment longues et de largeurs respectives 2 cm, 4 cm, 8 cm, 16 cm,... et 1024 cm sont placées dans le plan Oxy avec l'axe Oy comme axe de symétrie par rapport à la largeur. Sachant que toutes les spires sont parcourues, dans le sens anti-horlogique, par le même courant d'intensité $I=3$ A, calculez le champ magnétique en grandeur et en direction au point (0,0).

Réponse

$$\vec{H} = 190,8 \text{ A/m}$$

Exercice 10 - Soit une spire se déplaçant à une vitesse \vec{v} comme indiqué à la figure 2.1.19 où la zone grisée est caractérisée par une induction magnétique uniforme \vec{B} . En dehors de cette zone grisée, l'induction magnétique est nulle partout. Les dimensions sont telles que $a < e$ et $a < d$. Que vaut la force électromotrice $\mathcal{E}_{11'}$ en fonction de la position de la spire ? Celle-ci est repérée par rapport à l'indice de son coté gauche (la figure correspond à $x = 0$). Dessinez votre résultat.

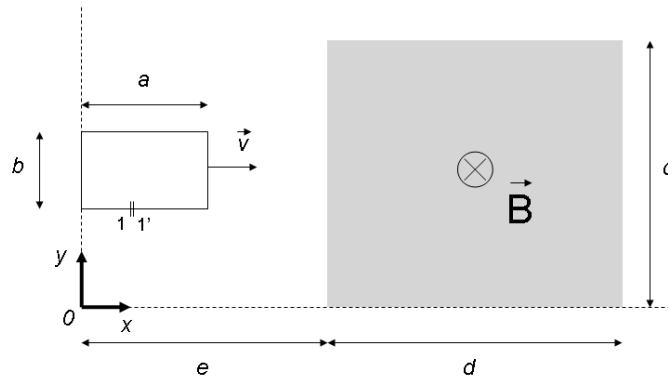


FIGURE 2.1.19 – Exercice 10

Réponse

$$0 < x < e - a \Rightarrow \mathcal{E}_{11'} = 0$$

$$e - a < x < e \Rightarrow \mathcal{E}_{11'} = -vbB$$

$$e < x < e + d - a \Rightarrow \mathcal{E}_{11'} = 0$$

$$e + d - a < x < e + d \Rightarrow \mathcal{E}_{11'} = vbB$$

$$x > e + d \Rightarrow \mathcal{E}_{11'} = 0$$

Exercice 11 - Soit une spire se déplaçant à une vitesse \vec{v} comme indiqué à la figure 2.1.20 où la zone grisée est caractérisée par une induction magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. En dehors de cette zone grisée, l'induction magnétique est nulle partout. Calculer et représenter la \mathcal{E}_{12} en fonction du temps.

Réponse

$$0 < t < \frac{b}{v} \Rightarrow \mathcal{E}_{12} = 0$$

$$\frac{b}{v} < t < \frac{3b}{2v} \Rightarrow \mathcal{E}_{12} = Bhv$$

$$\frac{3b}{2v} < t < \frac{2b}{v} \Rightarrow \mathcal{E}_{12} = 0$$

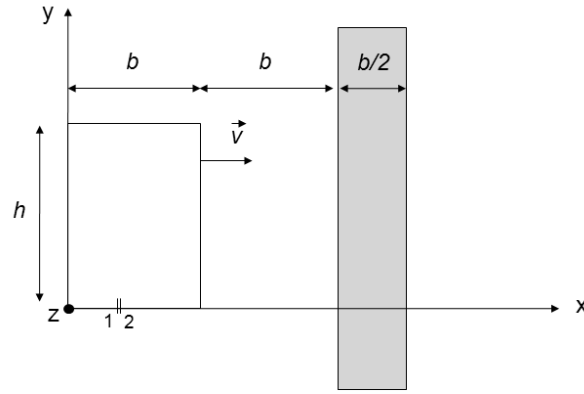


FIGURE 2.1.20 – Exercice 11

$$\frac{2b}{v} < t < \frac{5b}{2v} \Rightarrow \mathcal{E}_{12} = -Bhv$$

$$t > \frac{5b}{2v} \Rightarrow \mathcal{E}_{12} = 0$$

Exercice 12 - Un disque métallique de diamètre D tourne avec une vitesse angulaire ω dans un champ magnétique uniforme qui lui est perpendiculaire (induction B). Calculer la force électromotrice induite qui apparaît entre le centre et le bord du disque ainsi que le courant qui circulerait dans une résistance R connectée entre le centre et le bord à l'aide de balais. Réponses

$$\mathcal{E} = \frac{B\omega D^2}{8}$$

$$I = \frac{B\omega D^2}{8R}$$

Exercice 13 - Deux fils rectilignes illimités parcourus par des courants I_1 et I_3 (conducteurs 1 et 3) et une spire rectangulaire parcourue par un courant I_2 (conducteur 2) sont coplanaires. Les dimensions du système sont indiquées à la figure 2.1.21.

1. Calculez les inductances mutuelles L_{21} (entre les conducteurs 1 et 2) et L_{23} (entre les conducteurs 3 et 2)
2. Que vaut la force électromotrice induite dynamique si le conducteur 3 se déplace à une vitesse \vec{v} comme indiquée sur la figure ? Le temps $t = 0$ correspond à la disposition représentée à la figure 4.

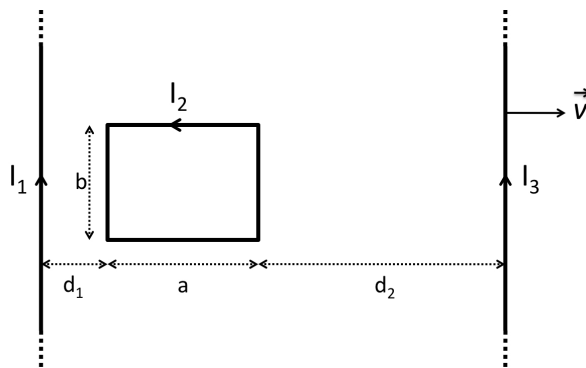


FIGURE 2.1.21 – Exercice 13

Réponses

1. $L_{21} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{d_1 + a}{d_1}$ et $L_{23} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{d_2 + a}{d_2}$
2. $\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_3 b v a}{2\pi} \frac{1}{(d_2 + vt)(d_2 + vt + a)}$

Exercice 14 - On considère trois bobines 1, 2 et 3 telles que :

- la bobine 1 est caractérisée par une inductance propre valant 1 mH et est parcourue par un courant de 1 A.
- les flux totalisés traversant les bobines 2 et 3 valent 2 mWb et 1 mWb, respectivement.
- le flux totalisé traversant la bobine 2 est identique au flux propre de la bobine 3.
- les bobines 1 et 2, d'une part, et les bobines 2 et 3, d'autre part, sont non couplées.

Que vaut le courant parcourant la bobine 3 afin que la bobine 1 soit traversée par un flux totalisé nul ?

Réponse

$$I_3 = 1 \text{ A}$$

Exercice 15 - On considère un conducteur rectiligne cylindrique illimité creux d'axe y de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e et une spire rectangulaire représentés à la figure 2.1.22 en $t = 0$. Ce conducteur est parcouru par un courant continu I dirigé selon les y positifs.

1. Calculer et dessiner le graphe du champ magnétique $H(x)$ en tout point de l'axe x .
2. Calculer la force électromotrice induite \mathcal{E}_{12} lorsque la spire se déplace verticalement à la vitesse v ($a > R_e$).

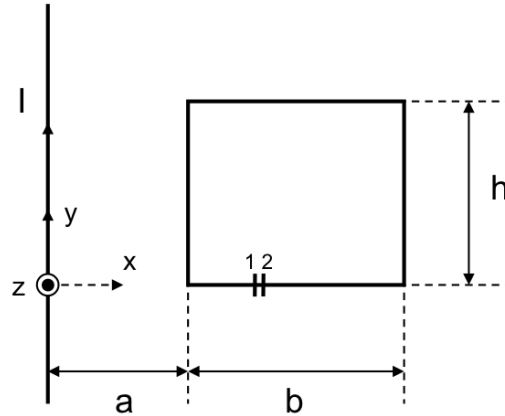


FIGURE 2.1.22 – Exercice 15

Réponses

1. $0 \leq x < R_i : H = 0, R_i \leq x \leq R_e : H = \frac{I}{2\pi(R_e^2 - R_i^2)} \frac{x^2 - R_i^2}{x}, x > R_e : H = \frac{I}{2\pi x}$
2. $\mathcal{E}_{12} = 0$

Exercice 16 - Soit un ensemble de N spires circulaires, coplanaires et concentriques tel qu'illustré à la figure 2.1.23. R_i et I_i représentent respectivement le rayon de la spire i et le courant parcourant celle-ci. Si i est impair (pair), le sens de parcours du courant s'effectue dans le sens (contraire) des aiguilles d'un montre. Quelle est la condition à imposer sur les courants et/ou les rayons afin d'obtenir une induction magnétique nulle au point P, situé au centre des spires ? Que devient-elle pour $N = 2$?

Réponses

$$\text{Condition : } \sum_{i=1}^N (-1)^i \frac{I_i}{R_i} = 0$$

$$\text{Pour } N = 2, \text{ la condition devient } \frac{I_1}{R_1} = \frac{I_2}{R_2}$$

Exercice 17 - Deux bobines 1 et 2 ont un axe commun (voir figure 2.1.24), la première étant fixe et la deuxième mobile autour de cet axe. L'inductance propre de la bobine 1 est de $60 \mu\text{H}$ et celle de la bobine 2 vaut $240 \mu\text{H}$. Soit α l'angle que fait un plan méridien lié à la bobine 2 avec un plan méridien lié à la bobine 1. On sait que, autour

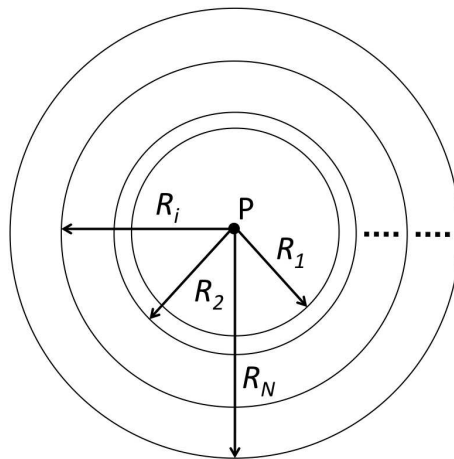


FIGURE 2.1.23 – Exercice 16

d'une valeur α_0 de α , la variation de l'inductance mutuelle des bobines est fonction de la variation de l'angle α et vaut $-90\mu\text{H}$ par degré. Si la bobine 1 est parcourue par un courant de 1 A et la bobine 2 par un courant de 5 mA, que vaut, pour $\alpha = \alpha_0$, le moment du couple exercé par la bobine 1 sur la bobine 2 ?

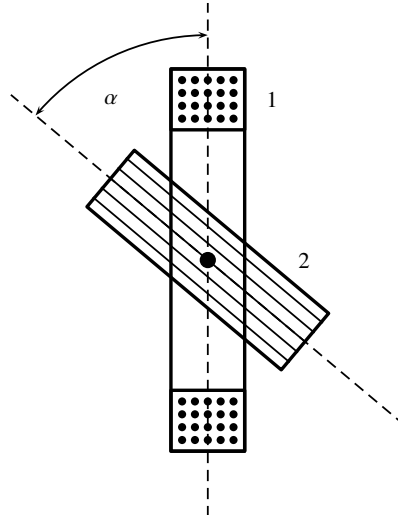


FIGURE 2.1.24 – Exercice 17

Réponse

$$C = -26.10^{-6} \text{ N.m}$$

Exercice 18 - Soient un conducteur cylindrique illimité de rayon R et une spire rectangulaire disposés comme indiqué sur la figure 2.1.25 (en $t = 0$). Le sens du courant dans le conducteur cylindrique est entrant dans le plan de la page. On déplace la spire rectangulaire à une vitesse v dans le sens indiqué sur la figure. Que vaut la force électromotrice induite dynamique générée au sein de la spire ? Justifiez.

Réponse

$$\mathcal{E} = 0$$

Exercice 19 - Soit une bobine infiniment plate composée de 10 spires de rayon R , située en $t = 0$ dans le plan xz et centrée sur l'origine des axes xyz . Cette bobine est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe z à la vitesse angulaire $\omega_r \vec{u}_z$ et est plongée dans une induction magnétique uniforme d'amplitude B et sinusoïdale de fréquence f_b . Ce champ est dirigé parallèlement au plan xy et fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe x . Calculez la force

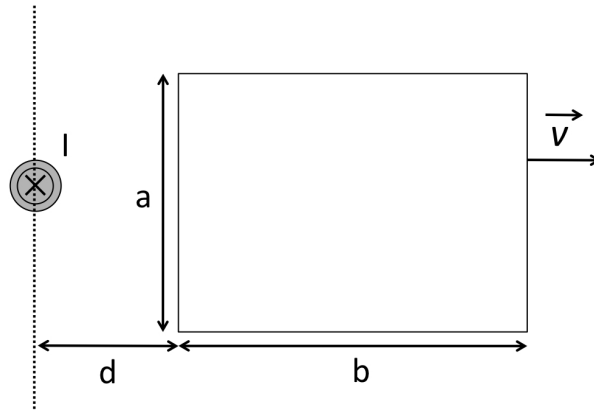


FIGURE 2.1.25 – Exercice 18

électromotrice induite dans la bobine.

Réponse

$$\mathcal{E} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi NR^2 B [\omega_r \sin \omega_b t (-\sin \omega_r t - \cos \omega_r t) + \omega_b \cos \omega_b t (-\sin \omega_r t + \cos \omega_r t)]$$

Exercice 20 - Soient deux spires circulaires disposées comme indiqué à la figure 2.1.26. Elles ont leurs centres en commun et leurs plans sont perpendiculaires. La spire 1, de rayon $R_1 = 10$ cm est incluse dans le plan xy et la spire 2, de rayon $R_2 = 30$ cm est comprise dans le plan yz . On impose un courant I_1 de 1 A dans la spire 1. On place ensuite un fil illimité dans le plan xz . Celui-ci est parcouru par un courant I et fait un angle α de 45 degrés avec l'axe x et passe par le centre des deux spires. Que doit valoir le courant I_2 parcourant la spire 2 afin que la force linéique appliquée sur le fil soit nulle au centre du repère ?

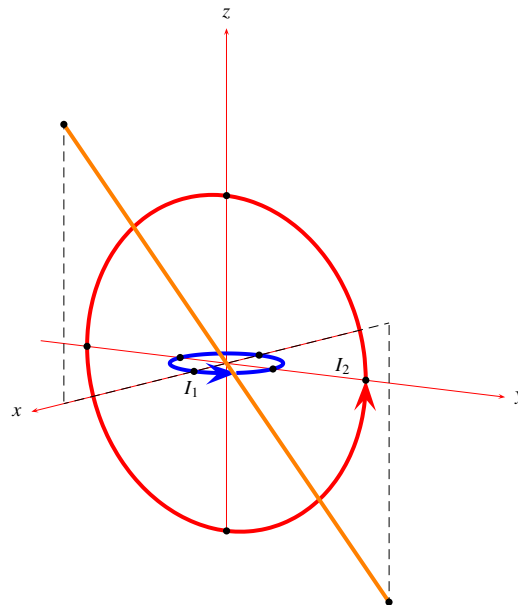


FIGURE 2.1.26 – Exercice 20

Réponse

$$I_2 = 3 \text{ A}$$

Exercice 21 - Une spire circulaire de rayon R tourne avec une vitesse angulaire ω_r comme indiqué à la figure 2.1.27. La spire est disposée dans un champ magnétique uniforme et constant, perpendiculaire (induction B) au plan formé par la spire.

1. Que vaut le champ induit dynamique \vec{E}_d en chaque point de la spire et la force électromotrice induite dynamique dans la spire ? Un point de la spire sera caractérisé par son azimuth θ (par rapport à l'axe x).
2. Considérons maintenant que l'amplitude de l'induction B varie au cours du temps selon $B(t) = B_0 \cos \omega t$. Que devient la force électromotrice induite dynamique dans la spire ?

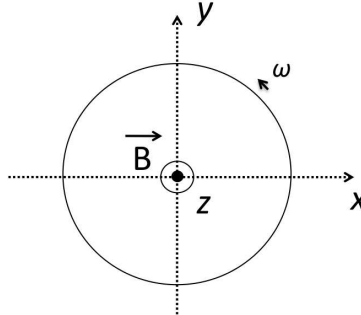


FIGURE 2.1.27 – Exercice 21

Réponses

1. $\vec{E}_d = \omega_r R B (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y)$ et $\mathcal{E} = 0$.
2. $\mathcal{E} = \pi R^2 B_0 \omega \sin \omega t$

Exercice 22 - Soit deux conducteurs cylindriques, parallèles et illimités perpendiculaires à un plan xy . Le conducteur 1 est centré au point de coordonnées $(-x_1, 0)$ (x_1 positif) et le conducteur 2 est centré au point de coordonnées $(x_2, 0)$ (x_2 positif). Les conducteurs 1 et 2 sont respectivement parcourus par des courants I_1 (sortant du plan xy) et I_2 (rentrant dans le plan xy). Les rayons des conducteurs sont inférieurs à $\min(x_1, x_2)$. Notons que $I_2 > I_1 > 0$. En quel(s) point(s) P situé(s) sur l'axe y le champ magnétique est-il aligné avec l'axe y ?

Réponse

$$y = \pm \sqrt{\frac{I_1 x_2^2 - I_2 x_1^2}{I_2 - I_1}}$$

Condition d'existence : $\frac{x_2^2}{x_1^2} > \frac{I_2}{I_1}$

Exercice 23 - Soit un ensemble de conducteurs cylindriques, parallèles et illimités, représenté à la figure 2.1.28. Les conducteurs 1, 2 et 3 sont respectivement parcourus par des courants $I_1 = 1$ A, $I_2 = 0$, et $I_3 = 3$ A avec les sens indiqués sur la figure. On donne $d_{1x} = 3$ cm, $d_{1y} = 2$ cm, $d_2 = 2,5$ cm, $d_3 = 2$ cm, $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ mm.

1. Calculez le champ magnétique au point P.
2. Calculez, en grandeur, la force linéique sur le conducteur filiforme et illimité passant par P et perpendiculaire au plan de la feuille lorsqu'il est parcouru par un courant constant $I = 1$ A sortant du plan de la figure.

Réponses

1. $\vec{H}(P) = -7,958 \vec{u}_x - 9,549 \vec{u}_y$
2. $\left| \frac{d\vec{F}}{ds} \right| = 15,620 \mu\text{N/m}$

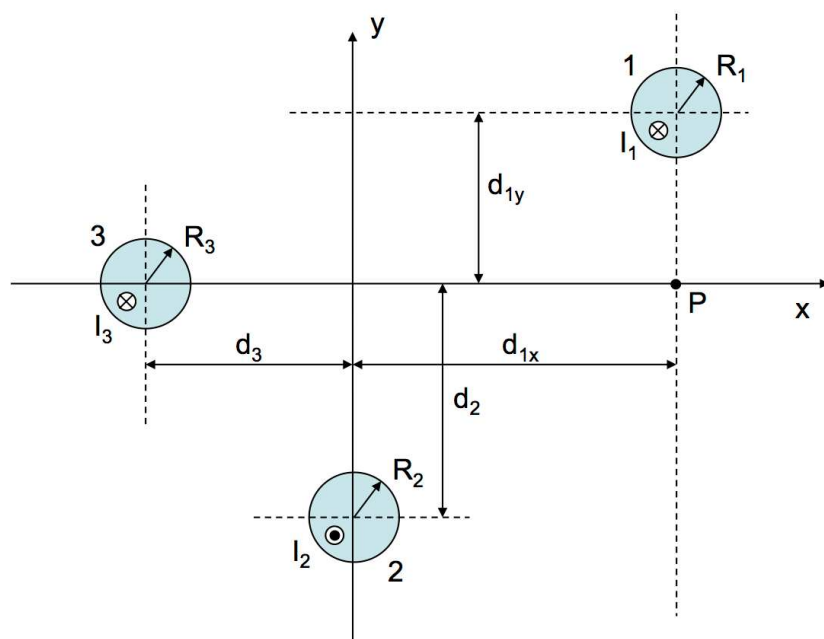


FIGURE 2.1.28 – Exercice 23

2.2 Circuits magnétiques

2.2.1 Rappels

Reluctance magnétique

La reluctance magnétique \mathcal{R} lie la différence de potentiel scalaire magnétique aux extrémités d'un tube de flux au flux traversant celui-ci (voir figure 2.2.1) :

$$\mathcal{U}_{12} = \mathcal{R}_{12}\Phi_{12}$$

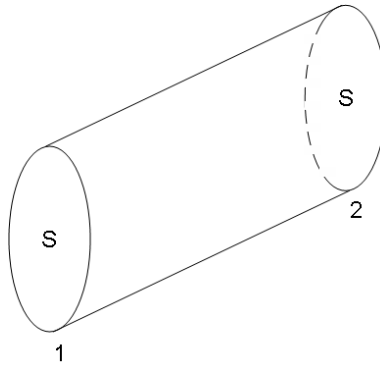


FIGURE 2.2.1 – Notion de reluctance (1)

Lorsque le champ est uniforme et le milieu homogène, la reluctance d'un tronçon de longueur ℓ et de section S vaut :

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$$

Dans ce cas, on a également que $\Phi = BS$.

Considérons une circuit magnétique entouré d'un bobine comme indiqué à la figure 2.2.2. On montre que :

$$NI = \mathcal{R}\Phi$$

où N est le nombre de spires de la bobine. Le sens du flux est déterminé par la règle du tire-bouchon. Le système

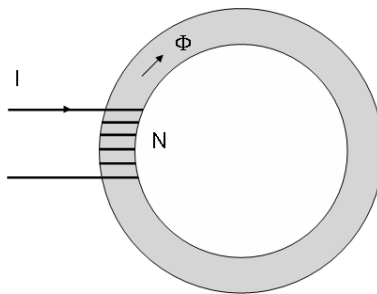


FIGURE 2.2.2 – Notion de reluctance (2)

représenté à la figure 2.2.3 donne :

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathcal{R}\Phi$$

Un système composé de trois reluctances disposées en série (figure 2.2.4) est équivalent à une reluctance donnée par :

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3$$

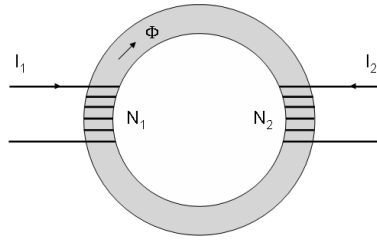


FIGURE 2.2.3 – Notion de reluctance (3)

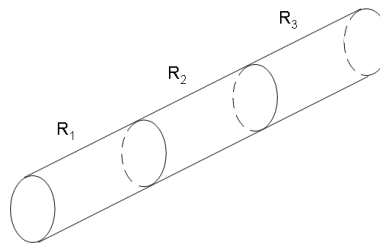


FIGURE 2.2.4 – Reluctances en série

Un système composé de trois reluctances disposées en parallèle (figure 2.2.5) est équivalent à une reluctance donnée par :

$$\mathcal{R}_{eq}^{-1} = \mathcal{R}_1^{-1} + \mathcal{R}_2^{-1} + \mathcal{R}_3^{-1}$$

Expression des inductances propres et mutuelle de deux bobines

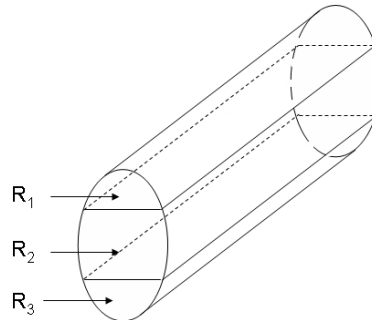


FIGURE 2.2.5 – Reluctances en parallèle

Reconsidérons le système représenté à la figure 2.2.3. Les inductances propres et mutuelle des deux bobines s'exprime par :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_1} \\ L_2 &= \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_2} \\ L_{12} &= \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{12}} \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_{1(2)}$ est la reluctance du tube de flux passant à travers la bobine 1(2) et \mathcal{R}_{12} est la reluctance du tube de flux commun aux deux bobines.

Caractéristiques B – H des tôles ordinaires et de l'hipersil

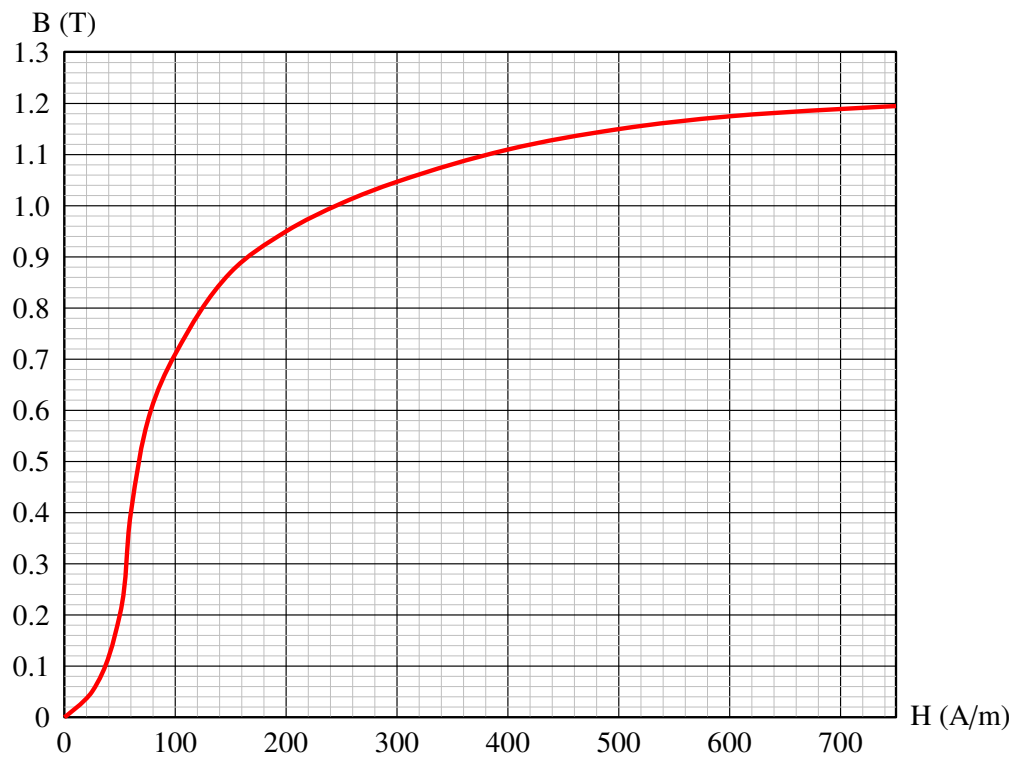


FIGURE 2.2.6 – Tôles ordinaires

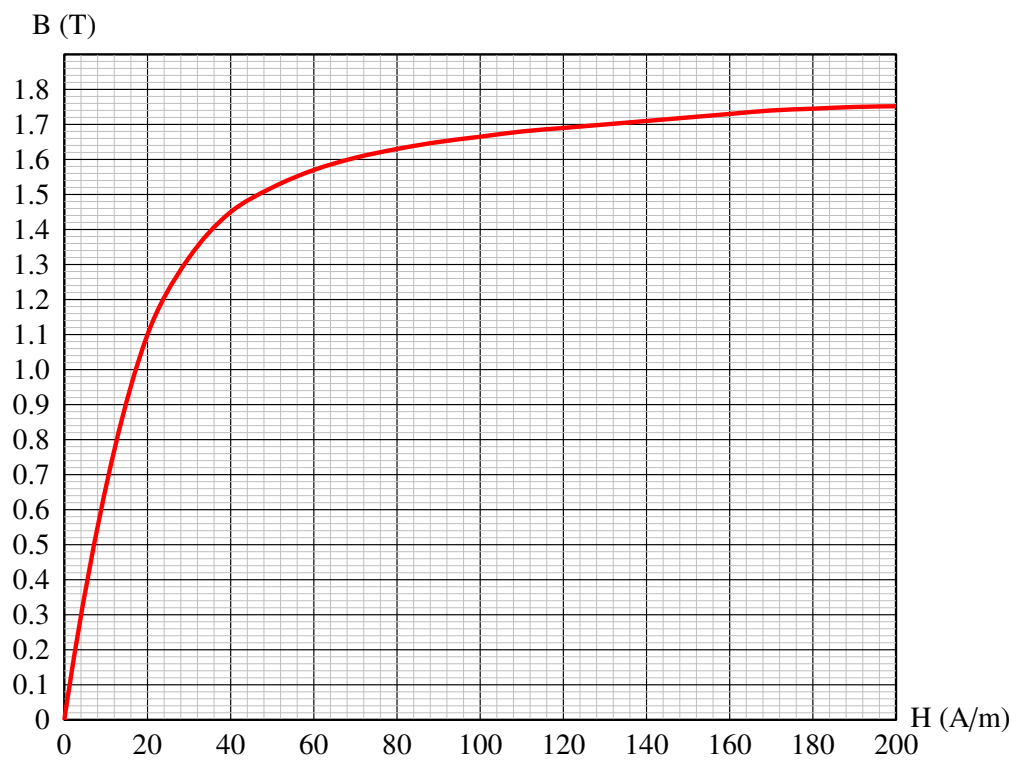


FIGURE 2.2.7 – Hipersil

2.2.2 Exercices résolus

REMARK. —

1. On fera toujours l'hypothèse que les circuits magnétiques sont parfaits (voir cours) et que le champ magnétique est uniforme dans toutes les sections du circuit.
2. Les grandeurs indiquées sur les graphiques sont données en cm.

Exercice R1 - On considère un tore circulaire, de longueur moyenne égale à 1 m, de section égale à 2 cm^2 , fait en Hiversil et portant un enroulement uniformément bobiné de 500 spires. On aménage un petit entrefer de longueur moyenne égale à x .

1. Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'induction dans le tore soit de quelque 1,6 T lorsqu'un courant de 1 A parcourt l'enroulement ?
2. Que vaut alors l'inductance propre de l'enroulement ?

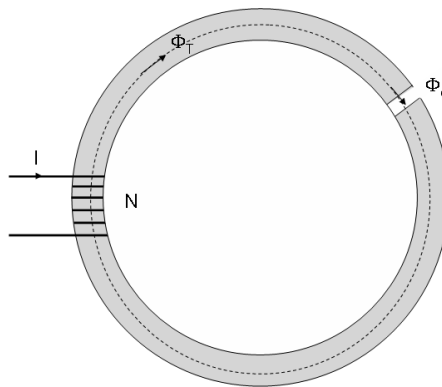


FIGURE 2.2.8 – Exercice R1

Solution

1. Considérons la figure 2.2.8. On a, en négligeant la dispersion :

$$\Phi_T = \Phi_e$$

où Φ_T et Φ_e sont les flux circulant respectivement dans le tore et l'entrefer. Dès lors :

$$B_T S_T = B_e S_e$$

où B_T et B_e sont les inductions magnétiques présentes respectivement dans le tore et l'entrefer. S_T et S_e sont les sections correspondantes. Puisque $S_T = S_e$:

$$B_T = B_e = 1,6 \text{ T}$$

Dès lors, dans l'entrefer :

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = 0,127 \cdot 10^7 \text{ A/m}$$

H_T peut être déterminé sur le graphique 2.2.7 :

$$H_T = 70 \text{ A/m}$$

Considérons le contour en pointillé. Le théorème d'Ampère devient :

$$NI = (\ell - x)H_T + xH_e$$

avec ℓ , la longueur du contour. On trouve ainsi :

$$x = 0,34 \text{ mm}$$

2. Le flux propre de la bobine s'écrit :

$$\phi_1 = L_1 I_1$$

ϕ_1 correspond au flux total passant à travers la bobine et vaut donc $N\Phi_T$. Dès lors :

$$L_1 = \frac{N\Phi_T}{I} = \frac{NB_T S_T}{I}$$

ce qui donne :

$$\boxed{L_1 = 0,16 \text{ H}}$$

Exercice R2 - Le circuit ferromagnétique représenté à la figure 2.2.9 est fait de tôles ordinaires dont les propriétés sont données à la figure 2.2.6. La colonne centrale est entourée d'une bobine de 300 spires. Évaluez le courant qu'il faut faire circuler dans cette bobine pour que son inductance propre soit de l'ordre de un henry.

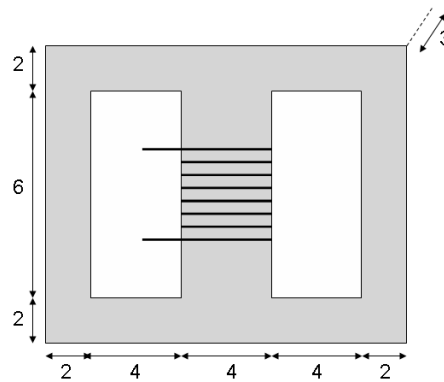


FIGURE 2.2.9 – Exercice R2 (1)

Solution

Considérons la figure 2.2.10. En raison de la conservation du flux, on a :

$$\Phi_c = \Phi_1 + \Phi_2$$

Nous avons aussi $\Phi_1 = \Phi_2$ de part la symétrie du circuit. Dès lors :

$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

où 1 et 2 désignent respectivement les parties gauche et droite du circuit. Puisque $S_1 = S_2$, on a $B_2 = B_1$, l'induction B_c dans la colonne centrale vaut également B_1 . En effet :

$$B_c S_c = B_1 S_1 + B_2 S_2 = 2B_1 S_1 = 2B_1 \frac{S_c}{2}$$

Les matériaux étant identiques pour chaque partie du circuit, on a :

$$H_c = H_1 = H_2$$

Considérons le contour en pointillé. Le théorème d'Ampère devient :

$$H_c \ell = NI$$

Dès lors avec $\ell = 30 \text{ cm}$:

$$I = \frac{H_c \ell}{N} = \frac{0,3}{300} H \quad (2.2.1)$$

On a aussi :

$$\phi_c = LI = N\Phi_c$$

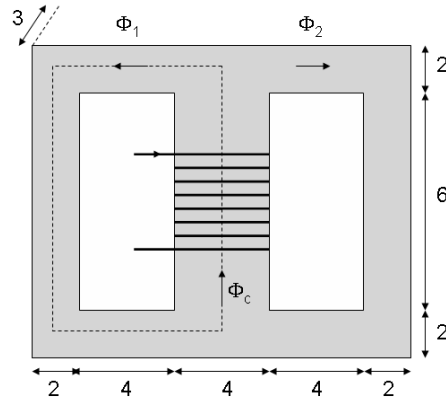


FIGURE 2.2.10 – Exercice R2 (2)

et donc

$$\Phi_c = \frac{LI}{N} = B_c S_c = \mu H_c S_c$$

ce qui donne :

$$I = \frac{N}{L} \mu H_c S_c \quad (2.2.2)$$

En comparant les relations (2.2.1) et (2.2.2), on trouve :

$$\frac{H_c \ell}{N} = \frac{N}{L} \mu H_c S_c$$

ce qui donne :

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \frac{\ell L}{N^2 S_c}$$

Le courant doit être tel que l'inductance propre de la bobine soit égale à 1 henry ($L = 1$ H). On trouve ainsi :

$$\mu_r = 2\,210,48$$

Au vu du graphe 2.2.6, deux valeurs sont possibles pour H :

$$H_c = 40 \text{ A/m ou } H_c = 400 \text{ A/m}$$

Finalement, en utilisant la relation (2.2.1), on trouve :

$$\boxed{I = 40 \text{ mA ou } I = 400 \text{ mA}}$$

Exercice R3 - Le circuit magnétique représenté à la figure 2.2.11 est en Hipersil dont les propriétés sont données à la figure 2.2.7. Les bobines identiques 11' et 22' comportent 200 spires et, seule, 11' est alimentée par un courant continu I créant dans la colonne centrale un champ magnétique supposé uniforme de 50 A/m. Calculez :

1. le courant I ,
2. l'inductance propre L_1 de la bobine 11',
3. l'inductance mutuelle des deux bobines.

Solution

1. Considérons la figure 2.2.12. En raison de la symétrie du système (22' non alimentée) et de la conservation du flux, on a :

$$\Phi_c = \Phi_1 + \Phi_2$$

avec $\Phi_1 = \Phi_2$. Dès lors :

$$B_c S_c = B_1 S_1 + B_2 S_2 = 2 B_1 S_1$$

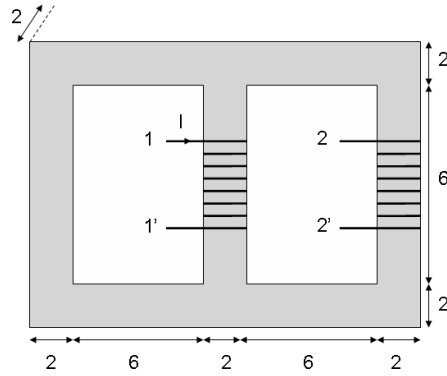


FIGURE 2.2.11 – Exercice R3 (1)

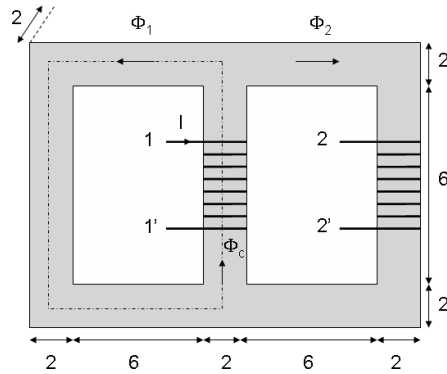


FIGURE 2.2.12 – Exercice R3 (2)

Puisque $S_1 = S_c$, on a $B_c = 2B_1$. H_c devant valoir 50 A/m, B_c vaut 1,52 T (voir graphe 2.2.7). Dès lors $B_1 = 0,76$ T et finalement :

$$H_1 = 12 \text{ A/m}$$

En appliquant le théorème d'Ampère au contour en pointillé, on trouve :

$$NI = H_c \ell_c + H_1 \ell_1 = 50 \times 8 \cdot 10^{-2} + 12 \times 24 \cdot 10^{-2}$$

ℓ_c et ℓ_1 sont respectivement les longueurs de la colonne centrale et de la partie gauche du circuit. Avec $N = 200$, on trouve ainsi :

$$I = 0,034 \text{ A}$$

2. On a :

$$\phi_c = L_1 I$$

Dès lors :

$$L_1 = \frac{\phi_c}{I} = \frac{N\Phi_c}{I} = \frac{NB_c S_c}{I}$$

et finalement

$$L_1 = 3,535 \text{ H}$$

3. D'après les équations électromagnétiques, on a :

$$\phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$$

$$\phi_2 = L_{12} I_1 + L_{22} I_2$$

Dans notre cas $\phi_1 = N\Phi_c$, $\phi_2 = N\Phi_2$, $I_1 = I$ et $I_2 = 0$. Dès lors :

$$\phi_2 = L_{12} I_1 = L_{12} I = N\Phi_2 = N\Phi_1$$

L'expression de L_{12} s'écrit donc :

$$L_{12} = \frac{N\Phi_1}{I} = \frac{NB_1 S_1}{I}$$

ce qui donne :

$$L_{12} = 1,767 \text{ H}$$

Exercice R4 - On demande de calculer la force F que la partie supérieure exerce sur la partie inférieure lorsqu'un courant parcourt l'enroulement de l'électro-aimant présenté à la figure 2.2.13.

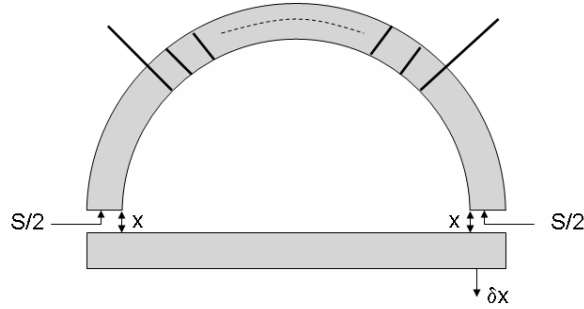


FIGURE 2.2.13 – Exercice R4

Solution

Imaginons que l'on donne à la partie inférieure un petit déplacement δx de telle manière à ce que la longueur de l'entrefer devienne $x + \delta x$, tout en ajustant le courant de façon à maintenir constant le flux dans le circuit. On a :

$$F = - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{\phi}$$

et

$$W = \frac{1}{2} \phi I = \frac{1}{2} N \Phi I$$

avec, en plus :

$$NI = \mathcal{R} \Phi$$

où \mathcal{R} est la reluctance de l'ensemble électro-aimant+tôle+entrefers (2 fois). Dès lors :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_m + 2 \frac{x}{\mu_0 \frac{S}{2}}$$

avec \mathcal{R}_m , la reluctance de l'ensemble électro-aimant+tôle. Par conséquent :

$$W = \frac{1}{2} \Phi^2 \mathcal{R} = \frac{1}{2} \Phi^2 \left(\mathcal{R}_m + \frac{4x}{\mu_0 S} \right)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} F &= - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \\ &= - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{4}{\mu_0 S} \\ &= - \frac{1}{2} \frac{B^2 S^2}{4} \frac{4}{\mu_0 S} \end{aligned}$$

Et on obtient finalement :

$$F = - \frac{1}{2} B^2 \frac{S}{\mu_0}$$

Le signe négatif signifie qu'il s'agit d'une force d'attraction.

2.2.3 Exercices

Exercice 1 - Le circuit magnétique représenté à la figure 2.2.14 est fait de tôles ordinaires dont les propriétés sont données à la figure 2.2.6. Les colonnes extrêmes sont entourées de bobines de 200 spires ($N_1 = N_3 = 200$), parcourues par deux courants I_1 et I_3 respectivement, dans les sens indiqués.

1. Évaluez les valeurs de ces courants si les champs H_1 et H_3 valent respectivement 310 A/m et 205 A/m.
2. Qu'auraient valu ces courants si, toutes autres conditions égales, la colonne centrale avait été coupée par un entrefer de 0,2 cm d'épaisseur ?

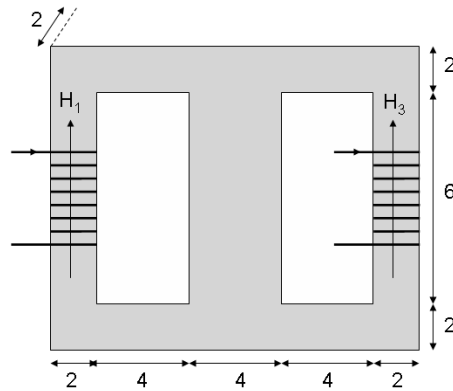


FIGURE 2.2.14 – Exercice 1

Réponses

1. $I_1 = 0,44$ A et $I_3 = 0,33$ A
2. $I_1 = 8,4$ A et $I_3 = 8,3$ A

Exercice 2 - Soit le circuit magnétique de la figure 2.2.15 constitué de tôles de 1,5 cm d'épaisseur, en hipersil (voir figure 2.2.7). La colonne centrale est entourée d'une bobine de 178 spires parcourue par un courant I . Calculez le courant I pour que l'inductance propre de la bobine soit de 1 H.

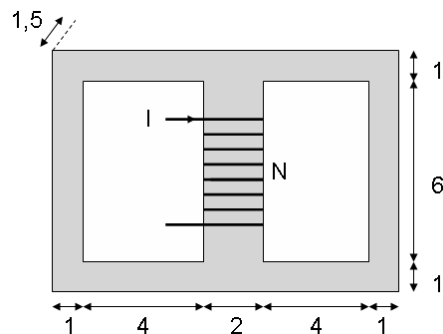


FIGURE 2.2.15 – Exercice 2

Réponse

$$I = 81 \text{ mA ou } I = 6,7 \text{ mA}$$

Exercice 3 - Soit un tore en tôles ordinaires de rayon intérieur de 25 cm et de section circulaire de diamètre 2 cm autour duquel est enroulé uniformément une bobine de 3000 spires. Sachant que le flux dans le tore vaut 346 μWb , calculez l'inductance propre de la bobine ainsi que le courant qui la traverse. Si on diminue de moitié le courant, que deviennent le flux traversant le circuit et l'inductance de la bobine.

Réponse

$L = 4,9 \text{ H}$ et $I = 0,212 \text{ A}$. Si l'on diminue de moitié le courant, $\Phi = 2,89 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ et $L = 8,2 \text{ H}$

Exercice 4 - Soit le circuit magnétique de la figure 2.2.16 constitué de tôles de 3 cm d'épaisseur, en tôles ordinaires partout sauf dans la colonne centrale qui est en hipersil (figure 2.2.7). La colonne centrale est entourée d'une bobine de 100 spires parcourue par un courant I . Sachant que l'induction magnétique dans la troisième colonne est de 0,85 T, calculez l'inductance propre de la bobine.

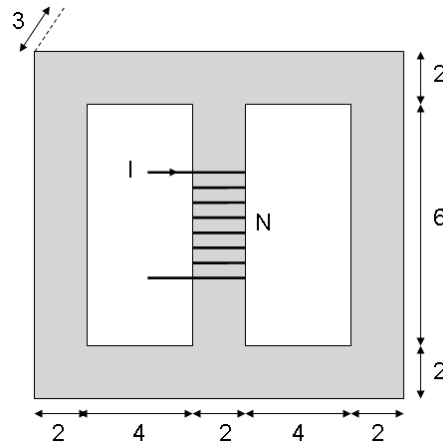


FIGURE 2.2.16 – Exercice 4

Réponse

$L = 0,25 \text{ H}$

Exercice 5 - Soit le circuit magnétique de la figure 2.2.17 constitué de tôles ordinaires de 2 cm d'épaisseur (figure 2.2.6). La colonne de droite est entourée par une bobine non alimentée constituée de 1000 spires. La colonne centrale est entourée d'une bobine de 2160 spires parcourue par un courant de 1 A. Calculer l'épaisseur de l'entrefer l_e pour que l'inductance propre de la bobine centrale soit égale à 1 H. Calculez l'inductance mutuelle entre les deux bobines.

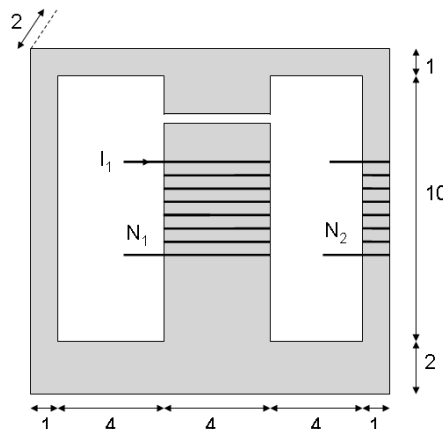


FIGURE 2.2.17 – Exercice 5

Réponse

$l_e = 4,4 \text{ mm}$ et $L_{12} = 0,232 \text{ H}$

Exercice 6 - La figure 2.2.18 représente un tore circulaire de section rectangulaire, dont la partie 1 est faite d'Hipersil, et la partie 2 de tôles ordinaires. Ce tore porte un enroulement uniformément bobiné de 1000 spires (non représenté sur la figure), parcouru par un courant tel que l'induction magnétique dans l'Hipersil soit de 1,6 T. Calculez l'inductance propre de l'enroulement pour l'état magnétique considéré du tore.

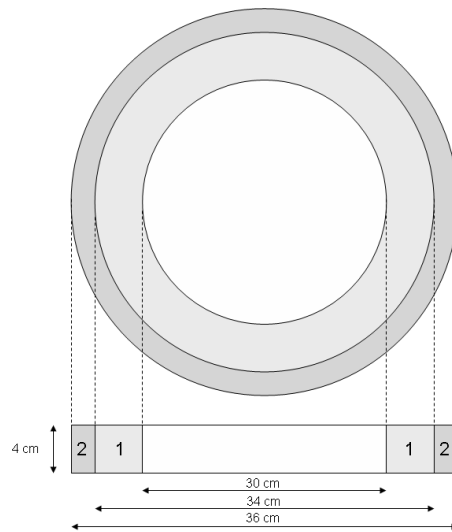


FIGURE 2.2.18 – Exercice 6

Réponse

$$L_{12} = 21 \text{ H}$$

Exercice 7 - La figure 2.2.19 donne, en centimètre, les dimensions d'un circuit magnétique, fait de tôles ordinaires dont les propriétés magnétiques sont données à la figure 2.2.6. La colonne centrale est munie de deux enroulements concentriques 1 et 2, le premier de 100 spires, le second de 1000 spires. Ces enroulements sont parcourus par des courants tels que le flux par spire à travers l'enroulement 1 soit de 0,000 4 Wb. Évaluez, pour l'état magnétique considéré :

1. les inductances propres et mutuelle des deux enroulements,
2. le courant qu'il faudrait faire circuler dans l'enroulement 2 si l'enroulement 1 était parcouru par un courant de 0,2 A

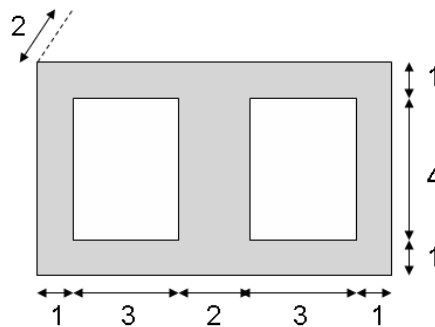


FIGURE 2.2.19 – Exercice 7

Réponses

1. $L_1 = 0,089 \text{ H}$, $L_2 = 8,9 \text{ H}$ et $L_{12} = 0,89 \text{ H}$
2. $I_2 = 25 \text{ mA}$

Exercice 8 - La colonne centrale du circuit magnétique en Hipersil représenté à la figure 2.2.20 est entourée par deux enroulements concentriques, dont l'un a 1000 spires. Évaluez le nombre de spires à donner à l'autre enroulement (non traversé par un courant) pour que, l'état magnétique du matériau correspondant à une induction de 1,6 T, l'inductance mutuelle des enroulements soit de 60 H.

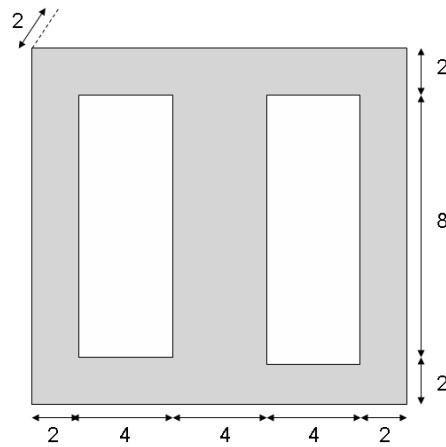


FIGURE 2.2.20 – Exercice 8

Réponse

$$N_2 = 1050$$

Exercice 9 - On considère deux demi-tores circulaires en Hipersil, séparés par du papier ($\mu_r = 1$) ayant un épaisseur de 0,1 mm (figure 2.2.21). Chaque demi-tore a une longueur moyenne de 50 cm, et une section carrée de 2 cm de côté. L'ensemble porte deux demi-enroulements uniformément répartis de 250 spires chacun, reliés en série et parcourus par un courant I tel que l'induction moyenne dans l'Hipersil soit de 1,6 T. Évaluez :

1. la valeur de I ,
2. la force minimale à exercer au moins pour arracher les demi-tores l'un de l'autre.

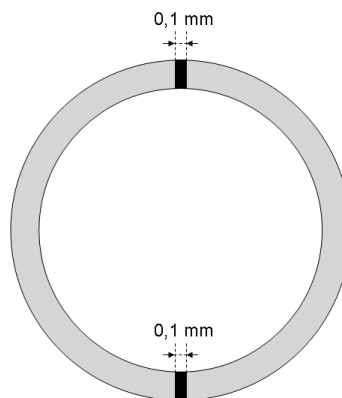


FIGURE 2.2.21 – Exercice 9

Réponses

1. $I = 0,65$ A
2. $F = 815$ N

Exercice 10 - L'électro-aimant à noyau plongeur de la figure 2.2.22 comporte un circuit magnétique et un noyau plongeur de reluctances négligeables. De plus, le contact entre la surface latérale du noyau plongeur et le circuit

magnétique est supposé suffisamment intime que pour pouvoir négliger la reluctance correspondante. La bobine est constituée de N spires parcourues par un courant I . Déterminez, en fonction des données, l'expression analytique de la force s'exerçant sur le noyau plongeur de section S pour un entrefer α . Précisez, en justifiant, sa direction et son sens.

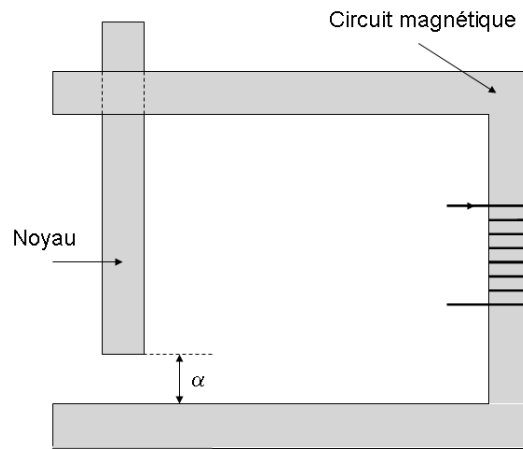


FIGURE 2.2.22 – Exercice 10

Réponse

$$F = -\frac{1}{2} \frac{N^2 I^2}{\alpha^2} \mu_0 S, \text{ force d'attraction}$$

Exercice 11 - La figure 2.2.23 montre un circuit magnétique composé d'un noyau magnétique de section S et de longueur ℓ autour duquel sont bobinés les enroulements 1 et 2. Calculez les inductance L_1 , L_2 et L_{12} si $I_1 = 1$ A, $I_2 = 0$ A, $S = 1$ cm², $\ell = 25$ cm, $N_1 = 100$, $N_2 = 50$ et $B = 1,6$ T en tout point du circuit. On négligera la dispersion.

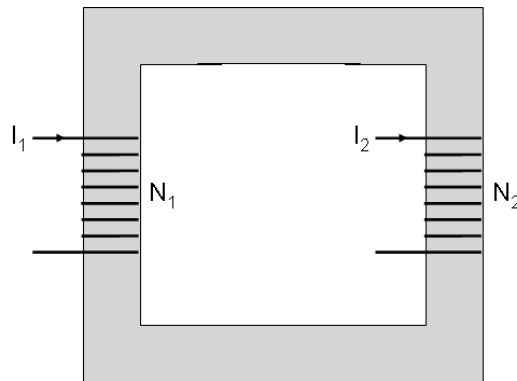


FIGURE 2.2.23 – Exercice 11

Réponse

$$L_1 = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ H}, L_2 = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ H} \text{ et } L_{12} = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ H}.$$

Exercice 12 - Soit le circuit magnétique de la figure 2.2.24 constitué d'Hipersil de 2 cm d'épaisseur. La colonne centrale est entourée d'une bobine de 500 spires. Sachant que le champ magnétique dans la colonne de gauche du circuit vaut 130 A/m, que vaut l'inductance propre de la bobine ?

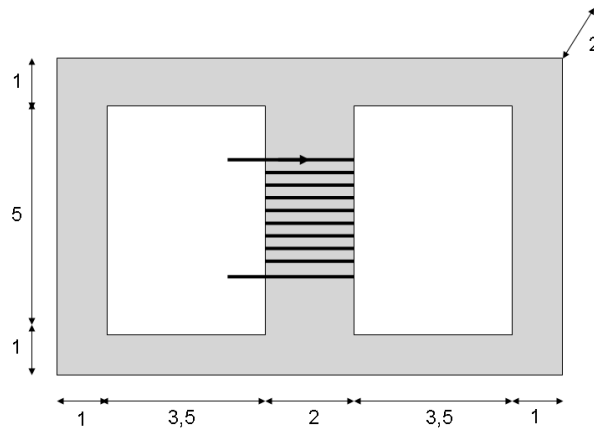


FIGURE 2.2.24 – Exercice 12

Réponse

$$L = 5,94 \text{ H}$$

Exercice 13 - Soit le circuit magnétique de la figure 2.2.25 constitué de tôles ordinaires de 3 cm d'épaisseur. La première colonne est entourée d'une bobine de 1000 spires parcourue par un courant de 0,13 A. Sachant que l'induction magnétique dans la troisième colonne est de 0,3 T, calculer l'inductance propre de la bobine.

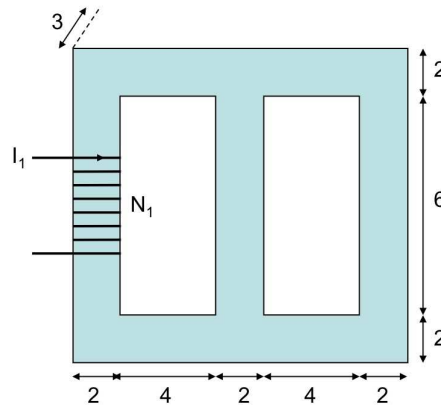


FIGURE 2.2.25 – Exercice 13

Réponse

$$L = 5,4 \text{ H}$$

Exercice 14 - Le circuit magnétique décrit à la figure 2.2.26 (dimensions en cm) est constitué de tôles ordinaires. Une bobine 1-1' entoure la colonne centrale et est traversée par un courant continu I . Une deuxième bobine est placée autour de la colonne de droite et n'est traversée par aucun courant. Que vaut la force électromotrice aux bornes de la deuxième bobine ? Expliquez.

Réponse

$$\mathcal{E} = 0$$

Exercice 15 - Le circuit magnétique décrit à la figure 2.2.27 (dimensions en cm) est constitué de tôles ordinaires. Une bobine constituée de N spires entoure la colonne centrale et est traversée par un courant continu I . Les colonnes de gauche et de droite sont toutes deux entrecoupées d'un entrefer d'épaisseur e . Sachant que $e = 3 \text{ mm}$, $N = 100$ et que le rapport NI/B_c vaut $2,5 \cdot 10^3 \text{ A/T}$ (B_c représente l'induction magnétique dans la colonne centrale),

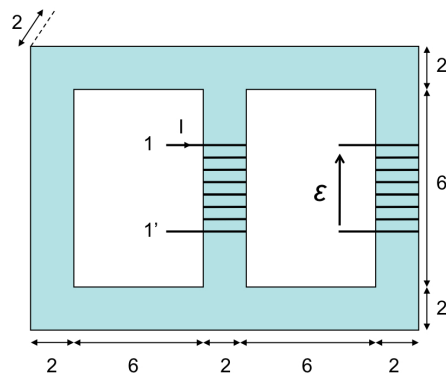


FIGURE 2.2.26 – Exercice 14

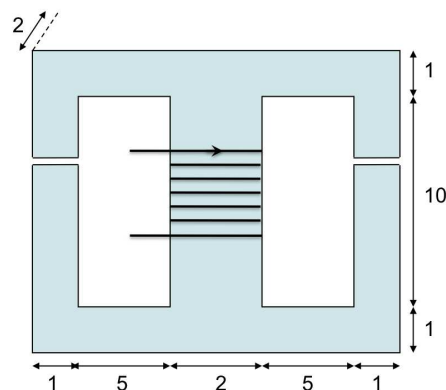


FIGURE 2.2.27 – Exercice 15

que vaut la perméabilité relative du matériau en tout point du circuit ?

Réponse

$$\mu_r = 2,45 \cdot 10^3$$

Exercice 16 - Calculer les inductances L_1 et L_{12} si $I_1 = 1$ A, $I_2 = 0$, $N_1 = 144$ et $N_2 = 1000$ pour le circuit magnétique de la figure 2.2.28 (dimensions en cm) constitué de tôles ordinaires de 2 cm d'épaisseur.

Réponses

$$L_1 = 0,129 \text{ H et } L_{12} = 0,448 \text{ H}$$

Exercice 17 - On considère le circuit magnétique représenté à la figure 2.2.29. Ce circuit est constitué de deux demi-tores circulaires ($R_1 = 10$ cm et $R_2 = 11$ cm) de section également circulaire. Le demi-tore supérieur est en tôles ordinaires tandis que la partie inférieure est en Hipersil. Les deux demi-tores sont séparés par un entrefer constitué de papier pour lequel on considère $\mu_r = 1$. L'ensemble porte deux demi-enroulements uniformément répartis de 500 spires chacun, reliés en série de façon concordante (les flux propres générés par les bobines parcourent le circuit magnétique dans le même sens) et parcourus par un courant $I = 1$ A. Quelle est l'épaisseur de l'entrefer telle que l'induction dans l'Hipersil vaut 1,1 T. On néglige la dispersion.

Réponse

$$\ell = 0,496 \text{ mm}$$

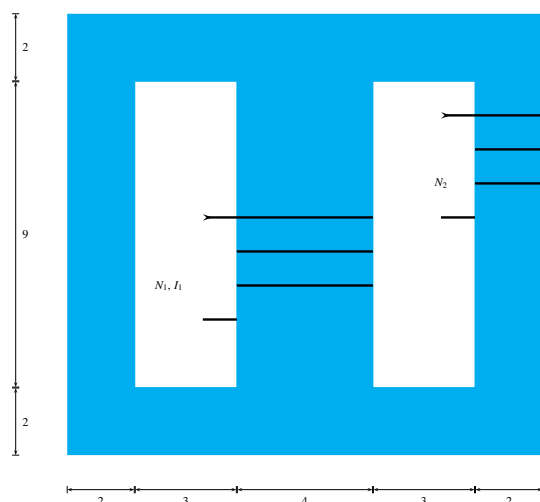


FIGURE 2.2.28 – Exercice 16

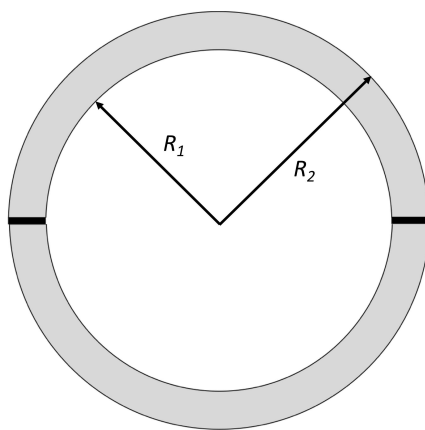


FIGURE 2.2.29 – Exercice 17

Exercice 18 - Soit le circuit magnétique (épaisseur : 2 cm) de la figure 2.2.30 constitué de tôles ordinaires. Les dimensions sont données en centimètres. Les colonnes de droite et de gauche sont entourées de bobines identiques d'inductance propre $L_{11} = 1$ H, constituées de 100 spires et traversées par un courant I . L'état magnétique du système est tel que le champ magnétique dans la colonne centrale est de 250 A/m. On néglige la dispersion. Que vaut le courant I ?

Réponse

$$I = 0,325 \text{ A}$$

Exercice 19 - Soit deux demi-tores identiques constitués d'hipersil, de rayon moyen $R = 5$ cm et de section circulaire (rayon $r = 1$ cm). Les demi-tores sont placés l'un contre l'autre comme indiqué à la figure 2.2.31. Le demi-tore de droite est entouré d'une bobine alimentée par un circuit dont l'équivalent de Thévenin est tel que $E_0 = 1$ V et $R_0 = 1 \Omega$. On néglige la dispersion.

1. De quelle distance doit-on éloigner les deux demi-tores pour obtenir un champ magnétique de 50 A/m dans le circuit magnétique et une inductance propre de la bobine égale à 0,9488 H ?
2. Que devient l'inductance propre de la bobine lorsque les deux demi-tores sont placés l'un contre l'autre ? On considère que l'hipersil a atteint son induction de saturation (1,8 T) lorsque le champ magnétique est supérieur à 250 A/m.

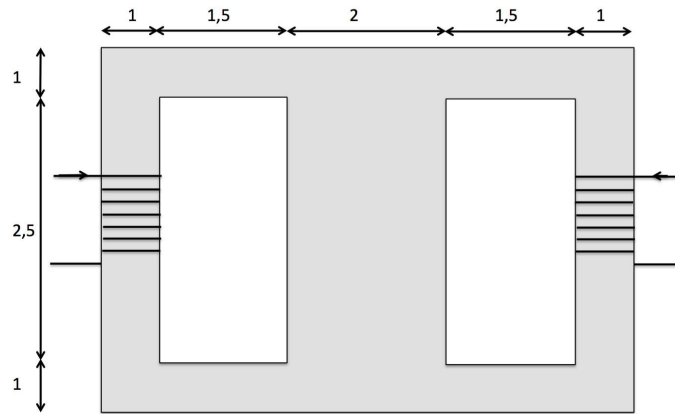


FIGURE 2.2.30 – Exercice 18

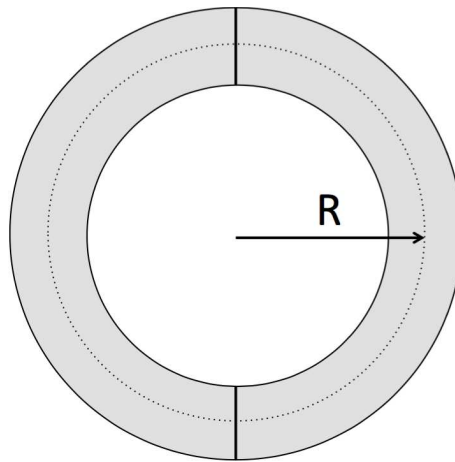


FIGURE 2.2.31 – Exercice 19

Réponses

1. 0,826 mm
2. $L = 1,131 \text{ H}$

Exercice 20 - Soit un tore magnétique en tôles ordinaires de rayon moyen égal à 10 cm et caractérisé par une section transversale de 1 cm^2 . On y enroule une première bobine ayant 100 spires par mètre et uniformément bobinée sur le tore.

1. Que vaut l'inductance propre de cette bobine lorsque $I = 4 \text{ A}$?
2. On enroule ensuite une deuxième bobine de 10 spires non parcourue par un courant qui entoure jointivement la première sur une longueur de 2 cm. Que vaut alors l'inductance mutuelle entre ces deux bobines ?

Réponses

1. $L = 1,764 \text{ mH}$
2. $L_{21} = 0,28 \text{ mH}$

2.3 Circuits résistifs

2.3.1 Rappels

Equation d'une branche

La figure 2.3.1 rappelle l'équation associée à une branche composée d'une source et d'une résistance et parcourue par une courant I .

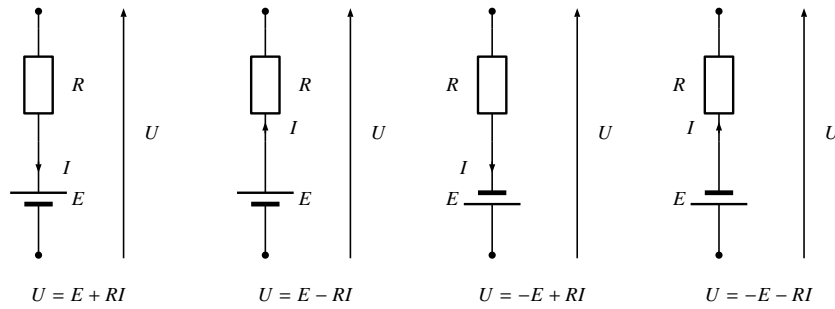


FIGURE 2.3.1 – Equation d'une branche

Puissance d'une branche

Considérons la figure 2.3.2. La puissance de la branche 12 s'exprime par :

$$P_{12} = U_{12}I_{12}$$

Si P_{12} est positif, la branche est réceptrice. Dans le cas contraire, elle est génératrice. Si la branche est uniquement constituée d'une résistance (pas de source), le puissance s'écrit :

$$P_{12} = RI_{12}^2$$

Si la branche est uniquement constituée d'une source, $U_{12} = E$. Dès lors si $I_{12} < 0$, $P_{12} < 0$ et la source fournit de l'énergie. Dans le cas contraire, la source reçoit de l'énergie (recharge d'une batterie par exemple).

Association de résistances

Considérons trois résistances R_1 , R_2 et R_3 . Si elles sont disposées en série, la résistance équivalente R s'écrit :

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Si elles sont disposées en parallèle, la résistance équivalente devient :

$$R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}$$

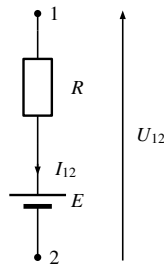


FIGURE 2.3.2 – Puissance d'une branche

Diviseur de tension

Considérons la figure 2.3.3. On montre que :

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

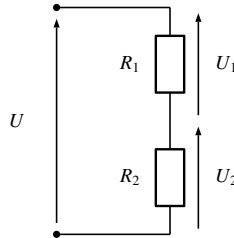


FIGURE 2.3.3 – Diviseur de tension

Diviseur de courant

Considérons la figure 2.3.4. On montre que :

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

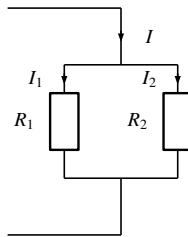


FIGURE 2.3.4 – Diviseur de courant

Equations de Kirchhoff

Equations de première espèce - La somme algébrique des courants qui partent d'un noeud (ou qui y aboutissent) est nulle. Ainsi pour l'exemple de la figure 2.3.5, on a pour le noeud 1 :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Equations de seconde espèce - Le long d'une maille, la somme algébrique des différences de potentiel successives est nulle. Ainsi pour l'exemple de la figure 2.3.5, on obtient pour la maille en pointillé :

$$E + U_1 + U_2 = 0$$

c'est à dire :

$$E - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

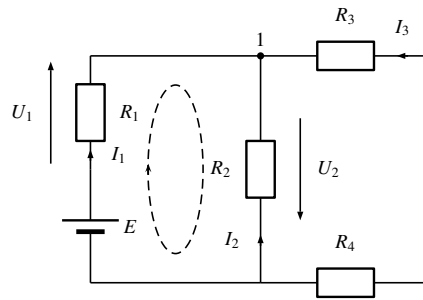


FIGURE 2.3.5 – Equations de Kirchhoff : exemple

2.3.2 Exercices résolus

Exercice R1 - Dans le montage représenté à la figure 2.3.6, V est un voltmètre (de résistance R_v) et G un galvanomètre (de résistance R_g). Sachant que la tension indiquée par le voltmètre est 1,5 V, calculez l'intensité du courant circulant dans le galvanomètre. On donne :

$$R_g = 1000 \, \Omega$$

$$R_p = 100 \, \Omega$$

$$R_s = 0,5 \, \text{M}\Omega$$

$$R_v = 1500 \, \Omega$$

Solution

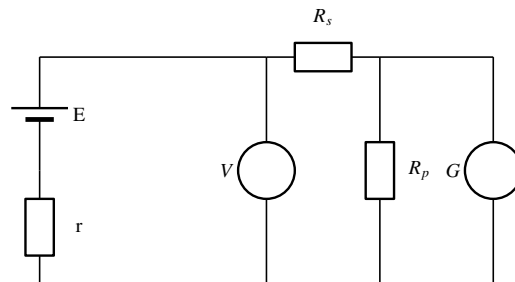


FIGURE 2.3.6 – Exercice R1 (1)

Redessignons le circuit comme à la figure 2.3.7. La tension U est celle mesurée à l'aide du voltmètre. On demande de calculer I_G . Pour ce faire, considérons uniquement la partie du circuit représentée à la figure 2.3.8 où

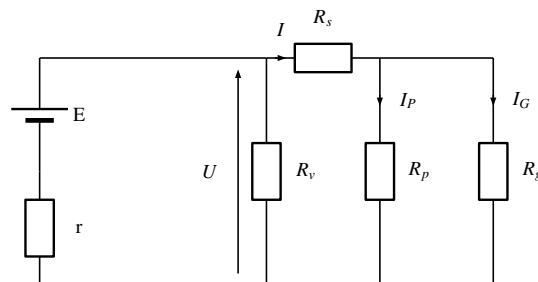


FIGURE 2.3.7 – Exercice R1 (2)

R_{pg} est la mise en parallèle de R_p et R_g :

$$R_{pg} = \frac{R_p R_g}{R_p + R_g}$$

R_s et R_{pg} sont en série et on trouve :

$$U = (R_s + R_{pg})I$$

Dès lors :

$$I = \frac{U}{R_s + R_{pg}} = 2,99 \cdot 10^{-6} \, \text{A}$$

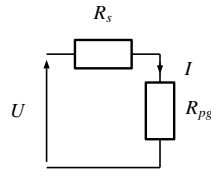


FIGURE 2.3.8 – Exercice R1 (3)

Le courant I se divise en I_G et I_P . En appliquant la relation du diviseur de courant, on trouve :

$$I_G = \frac{R_p}{R_p + R_g} I$$

ce qui donne :

$$I_G = 272 \text{ nA}$$

Exercice R2 - Considérons le circuit représenté à la figure 2.3.9 dans lequel M est un moteur parcouru par un courant I_M valant 15 A.

1. Calculez le courant I_1 .
2. Calculez la puissance du moteur M.

On donne :

$$R_1 = 0,12 \, \Omega$$

$$E_1 = 220 \text{ V}$$

$$R_2 = 0,1 \, \Omega$$

$$E_2 = 219,5 \text{ V}$$

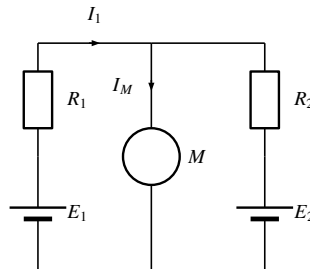


FIGURE 2.3.9 – Exercice R2 (1)

Solution

1. D'après la loi des noeuds, le courant dans la branche $R_2 - E_2$ vaut $I_1 - I_M$ (voir figure 2.3.10). Ecrivons maintenant l'équation de la maille dessinée en pointillé :

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_M)$$

ou encore :

$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_M$$

On trouve ainsi pour le courant I_1 :

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2 + R_2 I_M}{R_1 + R_2}$$

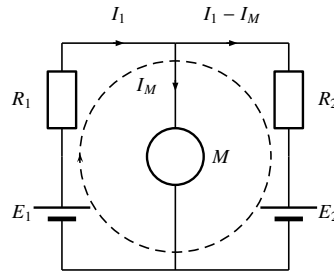


FIGURE 2.3.10 – Exercice R2 (2)

c'est à dire :

$$I_1 = 9,09 \text{ A}$$

2. Considérons la partie du circuit décrite à la figure 2.3.11. La puissance du moteur P_{12} s'écrit :

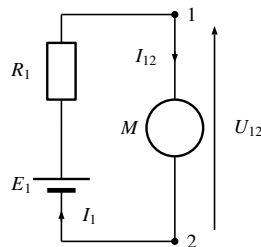


FIGURE 2.3.11 – Exercice R2 (3)

$$P_{12} = U_{12}I_{12}$$

avec :

$$I_{12} = I_M = 15 \text{ A}$$

$$U_{12} = E_1 - R_1 I_1 = 218,91 \text{ V}$$

ce qui donne :

$$P_{12} = 3,284 \text{ kW}$$

2.3.3 Exercices

Exercice 1 - Calculez la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R_4 du circuit représenté à la figure 2.3.12. On donne :

$$R_1 = 0,5 \Omega$$

$$R_2 = 5 \Omega$$

$$R_3 = 2,6 \Omega$$

$$R_4 = 6 \Omega$$

$$R_5 = 4 \Omega$$

$$E = 6 \text{ V}$$

Réponse

$$P = 0,96 \text{ W}$$

Exercice 2 - Une différence de potentiel continue U_{16} de 110 V étant appliquée au circuit représenté à la figure 2.3.13, calculez les courants I_{34} , I_{23} , I_{35} , I_{45} et I_{24} . On donne :

$$R_1 = 10 \Omega$$

$$R_2 = 22 \Omega$$

$$R_3 = 55 \Omega$$

$$R_4 = 100 \Omega$$

$$R_5 = 10 \Omega$$

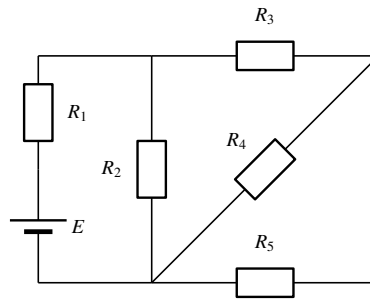


FIGURE 2.3.12 – Exercice 1

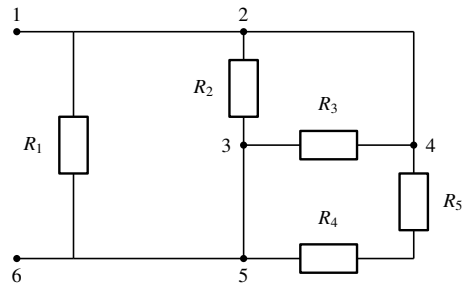


FIGURE 2.3.13 – Exercice 2

Réponse

$I_{34} = -2 \text{ A}$, $I_{23} = 5 \text{ A}$, $I_{35} = 7 \text{ A}$, $I_{45} = 1 \text{ A}$ et $I_{24} = 3 \text{ A}$

Exercice 3 - Calculez ce que vaut, en régime, l'énergie emmagasinée dans le condensateur représenté à la figure 2.3.14. On donne :

$$R_1 = 3 \Omega$$

$$R_2 = 7 \Omega$$

$$R_3 = 20 \Omega$$

$$R_4 = 10 \Omega$$

$$R_5 = 0,5 \Omega$$

$$E = 8 \text{ V}$$

$$C = 0,2 \mu\text{F}$$

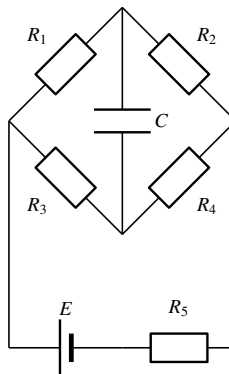


FIGURE 2.3.14 – Exercice 3

Réponse

$$\mathcal{E}_C = 0,756 \mu\text{J}$$

Exercice 4 - Dans le réseau représenté à la figure 2.3.15, G est une génératrice à courant continu, qui débite un courant de $I = 10$ A.

1. Calculez la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R_2 .
2. La force électromotrice fonctionne-t-elle en générateur ou en récepteur ? Quelle est, en valeur absolue, sa puissance ?
3. Quelle est, en valeur absolue, la puissance de la génératrice G ?

On donne :

$$R_1 = 1 \, \Omega$$

$$R_2 = 5 \, \Omega$$

$$E = 110 \, \text{V}$$

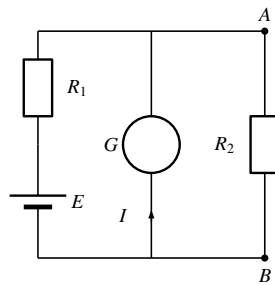


FIGURE 2.3.15 – Exercice 4

Réponses

1. $P = 2 \, \text{kW}$
2. Générateur, $|P| = 1,1 \, \text{kW}$
3. $|P| = 1 \, \text{kW}$

Exercice 5 - Dans le réseau représenté à la figure 2.3.16, G est une génératrice débitant un courant I_0 . Pour quelle gamme de valeurs de I_0 , la branche AB se comporte-t-elle comme un générateur ? On donne :

$$R_1 = 1 \, \Omega$$

$$R_2 = 9 \, \Omega$$

$$E = 225 \, \text{V}$$

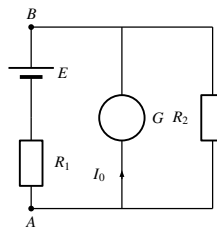


FIGURE 2.3.16 – Exercice 5

Réponse

$$-225 \, \text{A} < I_0 < 25 \, \text{A}$$

Exercice 6 - On sait que les machines A et B du réseau représenté à la figure 2.3.17 sont parcourues par des courants continus de $I_A = 5$ A et $I_B = 10$ A.

1. Que vaut le courant I_{21} ?
2. Que vaut la puissance de la branche 12 ?

3. Celle-ci se comporte-t-elle comme un générateur ou un récepteur ?

4. La machine A est-elle un générateur ou un récepteur ?

On donne :

$$R_1 = 97 \, \Omega$$

$$R_2 = 2 \, \Omega$$

$$R_3 = 5 \, \Omega$$

$$R_4 = 1 \, \Omega$$

$$E_1 = 100 \, \text{V}$$

$$E_2 = 50 \, \text{V}$$

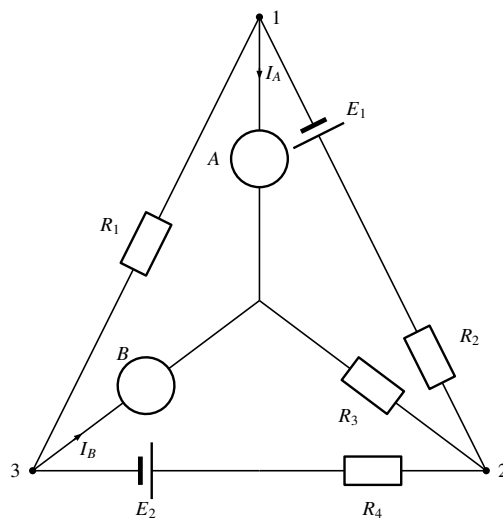


FIGURE 2.3.17 – Exercice 6

Réponses

1. $I_{21} = 4,5 \text{ A}$
2. $P_{12} = 490,5 \text{ W}$
3. Récepteur
4. Générateur

Exercice 7 - On connecte une résistance R aux bornes d'une source de force électromotrice constante E et de résistance interne r . Que doit valoir R pour que la puissance dissipée dans cette résistance soit maximale ?

Réponse

$$R = r$$

Exercice 8 - Dans le dispositif représenté à la figure 2.3.18, V est un voltmètre, de résistance R_v ; les résistances R_a et R_b constituent un diviseur de tension. On applique une tension continue U_e entre les bornes 1 et 2 ; soit U_s la tension apparaissant entre les bornes 3 et 4, et k le rapport $\frac{U_s}{U_e}$.

1. Calculez la valeur k_0 de k lorsque l'interrupteur INT est ouvert.
2. Calculez la valeur k_f de k lorsque cet interrupteur est fermé (mettre k_f sous la forme du produit de k_0 par un facteur).
3. Que doit valoir au moins R_c pour que k_f diffère de moins de 0,1% de k_0 ?

Réponses

1. $k_0 = \frac{R_b}{R_a + R_b}$
2. $k_f = k_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{R_c} \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}}$

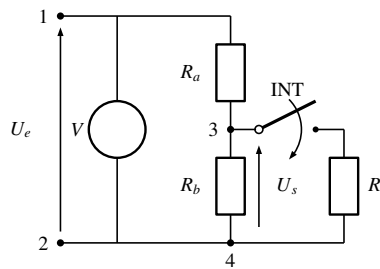


FIGURE 2.3.18 – Exercice 8

$$3. R_c = 1000 \frac{R_d R_b}{R_d + R_b}$$

Exercice 9 - Le dispositif représenté à la figure 2.3.19, dans lequel A est un ampèremètre de résistance R_1 est traversé par un courant I donné. Montrez que l'on peut donner à E une valeur telle que la différence de potentiel entre 1 et 2 soit nulle.

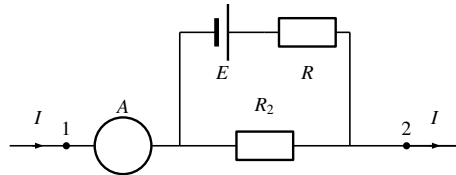


FIGURE 2.3.19 – Exercice 9

Réponse

$$E = \frac{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{R_2} I$$

Exercice 10 - Deux génératrices à courant continu A et B ayant chacune une résistance interne de $0,1 \Omega$, sont reliées par deux câbles de 900 mètres de long et de résistance linéique égale à $93,2 \mu\Omega/\text{m}$ (figure 2.3.20). A 400 m de A est connecté un moteur, C, qui dérive un courant de 150 A ; à 700 m de A, un autre moteur, D, dérive un courant de 100 A. Les forces électromotrices e A et B étant de 230 V et 220 V respectivement, calculez les courants débités par ces deux génératrices et la puissance absorbée par le moteur D.

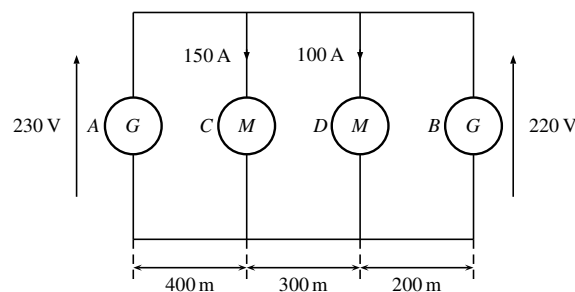


FIGURE 2.3.20 – Exercice 10

Réponse

$$I_A = 143,3 \text{ A}, I_B = 106,7 \text{ A et } P = 20,54 \text{ kW}$$

Exercice 11 - Ecrire les équations qui permettraient de calculer les courants I_1 , I_2 et I_3 du réseau représenté à la figure 2.3.21. On donne :

$$R_1 = 1 \, \Omega$$

$$R_4 = 100 \, \Omega$$

$$E_1 = 220 \, \text{V}$$

$$R_2 = 3 \, \Omega$$

$$R_5 = 150 \, \Omega$$

$$E_2 = 240 \, \text{V}$$

$$R_3 = 2 \, \Omega$$

$$R_6 = 200 \, \Omega$$

$$E_3 = 210 \, \text{V}$$

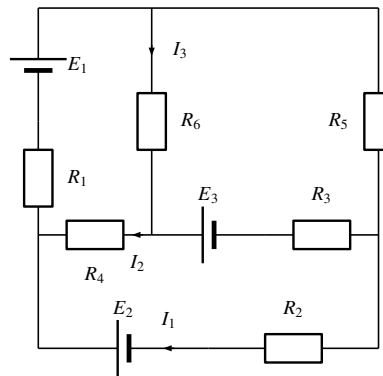


FIGURE 2.3.21 – Exercice 11

Réponse

$$220 = I_1 + 101I_2 + 200I_3$$

$$210 = 150I_1 + 152I_2 - 352I_3$$

$$30 = 3I_1 - 102I_2 + 2I_3$$

Exercice 12 - Déterminez la puissance fournie par la branche AB du réseau représenté à la figure 2.3.22. On donne :

$$R_1 = 2 \, \Omega$$

$$R_4 = 4 \, \Omega$$

$$R_7 = 2 \, \Omega$$

$$E_2 = 50 \, \text{V}$$

$$R_2 = 2 \, \Omega$$

$$R_5 = 10 \, \Omega$$

$$R_8 = 5 \, \Omega$$

$$R_3 = 4 \, \Omega$$

$$R_6 = 5 \, \Omega$$

$$E_1 = 100 \, \text{V}$$

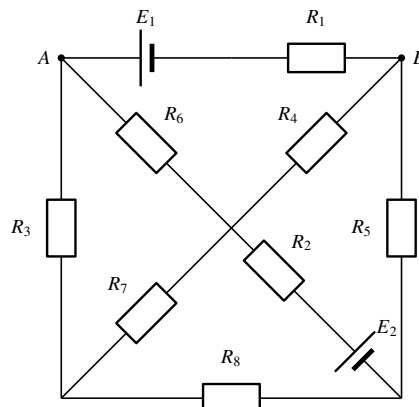


FIGURE 2.3.22 – Exercice 12

Réponse

$$P = 945,45 \text{ W}$$

Exercice 13 - Calculez la résistance en courant continu, du conducteur représenté en perspective à la figure 2.3.23, le courant entrant par le face cylindrique de rayon R_i et sortant par l'autre face cylindrique, ces deux faces étant équipotentielles. Le matériau est homogène et a une résistivité ρ .

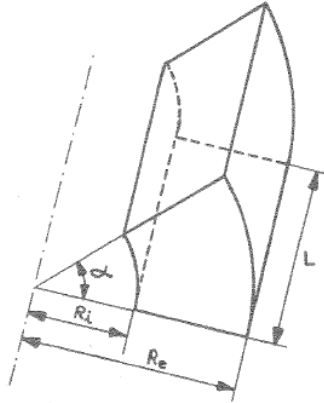


FIGURE 2.3.23 – Exercice 13

Réponse

$$R = \frac{1}{\alpha} \frac{\rho}{L} \ln \frac{R_e}{R_i}$$

Exercice 14 - Dans le réseau de la figure 2.3.24, I_0 est une source de courant continu débitant un courant de 3 A. La branche AB se comporte-t-elle comme un générateur ? Calculer la puissance absorbée par la résistance de 5Ω .

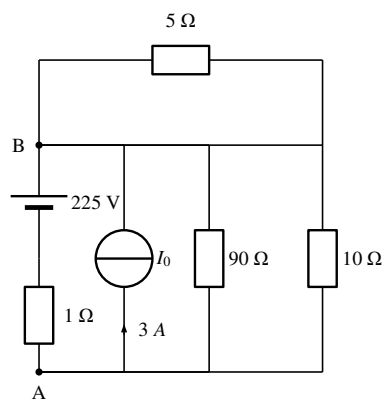


FIGURE 2.3.24 – Exercice 14

Réponses

1. Générateur
2. $P = 0 \text{ W}$

Exercice 15 - Soit le conducteur homogène en cuivre ($\rho = 17.10^{-9} \Omega\text{m}$) dessiné en coupe à la figure 2.3.25 (dimensions en cm) dans le plan xy , son épaisseur selon z étant de 2 cm.

1. Calculer la valeur exacte de sa résistance si le courant stationnaire est injecté selon le sens des flèches.
2. Calculer l'erreur commise sur le calcul de la résistance si l'approximation par la loi $R = \frac{\rho \ell}{S}$ est utilisée. ℓ est ici la longueur moyenne du conducteur.

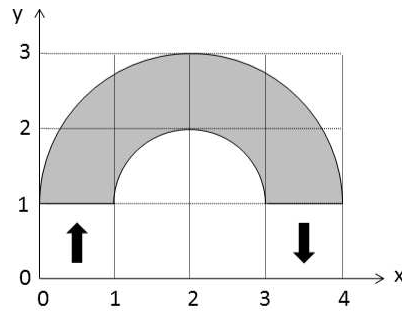


FIGURE 2.3.25 – Exercice 15

Réponses

1. $R = 3,85 \cdot 10^{-6} \Omega$
2. 3,9 %

Exercice 16 - On sait que la machine A du réseau représenté à la figure 2.3.26 est parcourue par un courant continu I_A . Se comporte-t-elle comme un générateur ou un récepteur ? Pour le justifier, calculez sa puissance. On donne $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 10 \text{ V}$, $I_A = 1 \text{ A}$, $R_2 = R_5 = 1 \Omega$ et $R_1 = R_3 = R_4 = 0,5 \Omega$.

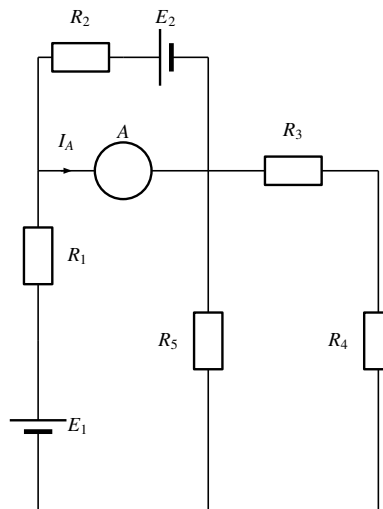


FIGURE 2.3.26 – Exercice 16

Réponse

$$P_A = 14,5 \text{ W}$$

Exercice 17 - On sait que la machine A du réseau représenté à la figure 2.3.27 est parcourue par un courant continu I_A . On donne $E_1 = 10 \text{ V}$, $I_A = 1 \text{ A}$, $C_3 = 2 \mu\text{F}$ et $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$. Quelle condition doit-on imposer à la source de courant afin que la machine soit génératrice ?

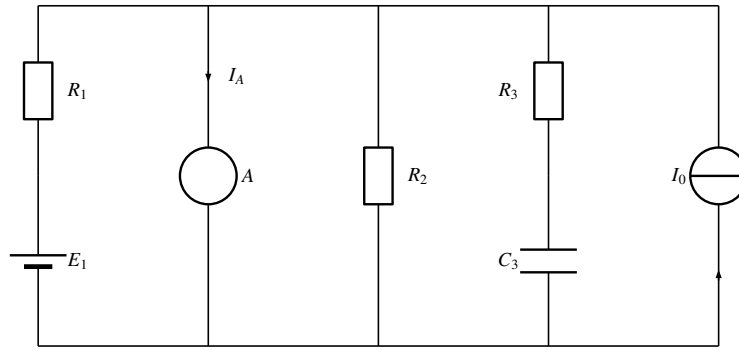


FIGURE 2.3.27 – Exercice 17

Réponse

$$I_0 < -9 \text{ A}$$

Exercice 18 - Le circuit de la figure 2.3.28 contient un voltmètre V et un ampèremètre A . Sachant que l'on a mesuré expérimentalement une tension de 3 V avec le voltmètre, que vaut la tension E et que donne l'ampèremètre ?

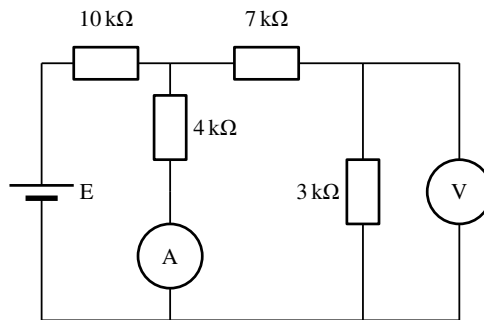


FIGURE 2.3.28 – Exercice 18

Réponses

$$E = 45 \text{ V} \text{ et le courant indiqué par l'ampèremètre vaut } 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Exercice 19 - Soit le circuit représenté à la figure 2.3.29. A est un ampèremètre idéal (résistance interne nulle) et R est une résistance variable. Que doit valoir R afin que l'ampèremètre mesure un courant de 2,5 A. On donne $E_1 = 30 \text{ V}$, $E_2 = 10 \text{ V}$ et $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$.

Réponse

$$R = 0,5 \Omega$$

Exercice 20 - Soit le circuit représenté à la figure 2.3.30. On applique une différence de potentiel E_{AB} entre les points A et B. Que vaut, en régime, la puissance dissipée dans la résistance R_3 . On donne $R_3 = 10 \Omega$, $E_{AB} = 1 \text{ V}$ et $I = 1 \text{ A}$.

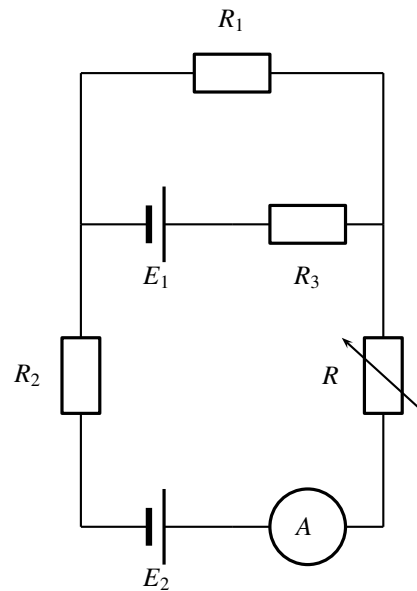


FIGURE 2.3.29 – Exercice 19

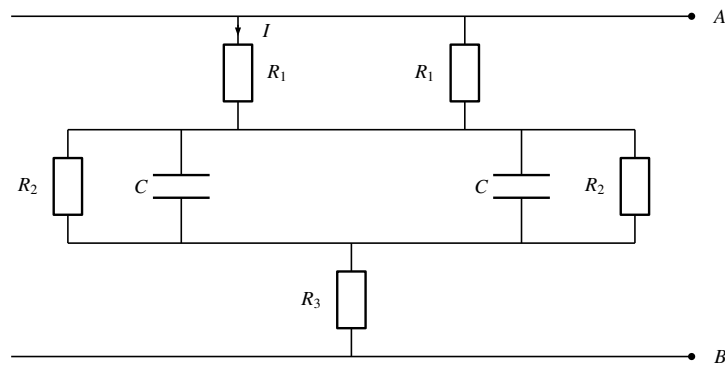


FIGURE 2.3.30 – Exercice 20

Réponse

$$P_3 = 40 \text{ W}$$

Exercice 21 - On sait que la machine M du circuit représenté à la figure 2.3.31 est parcourue par un courant continu de $I_M = 1 \text{ A}$. On donne $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \Omega$, $E_1 = 1 \text{ V}$, $E_2 = 2 \text{ V}$, $E_3 = 3 \text{ V}$ et $E_4 = 2 \text{ V}$. Calculez la puissance de la branche contenant la machine M . La machine est-elle un générateur ou un récepteur ?

Réponse

$$P_M = 0,5 \text{ W (récepteur)}$$

Exercice 22 - Un fil de cuivre ($\rho = 17 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{cm}$) d'axe z et de longueur 1 km a une section circulaire dont le rayon (en mm) varie de manière exponentielle selon la relation $r(z) = \exp\left(\frac{z}{z_0}\right)$ où z_0 vaut 500 m . Calculez le courant traversant ce conducteur selon l'axe z lorsque l'on applique une différence de potentiel de 100 V entre ses extrémités.

Réponse

$$I = 75,3 \text{ A}$$

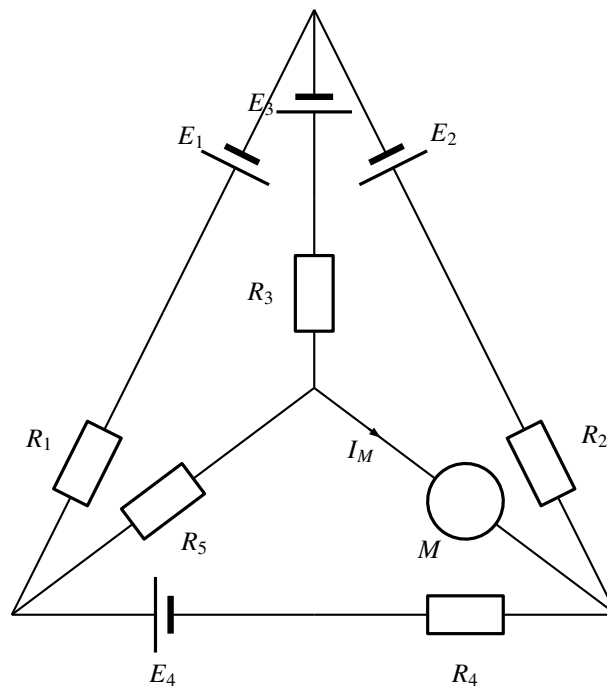


FIGURE 2.3.31 – Exercice 21

Exercice 23 - Un diviseur de tension est constitué de deux résistances R_1 et R_2 en série connectées à une source de tension continue idéale de 15 V. Sachant que l'on a mesuré une tension de 10 V aux bornes de R_2 et un courant sortant de la source de 1 mA, calculez R_1 et R_2 .

Réponse

$$R_1 = 5 \cdot 10^3 \, \Omega \text{ et } R_2 = 10^4 \, \Omega$$

Exercice 24 - Un conducteur sphérique de rayon $R_1 = 1 \text{ cm}$ est entouré par un isolant en téflon ($\epsilon_r = 2,1$, $\rho = 1 \cdot 10^{18} \, \Omega \cdot \text{cm}$) sphérique de rayon $R_2 = 75 \text{ cm}$ dont la face externe est métallisée. Si on applique une différence de potentiel de 1 kV entre le conducteur central et la face externe de l'isolant, calculez le courant qui traverse l'isolant.

Réponse

$$I = 1,274 \cdot 10^{-14} \text{ A}$$

Exercice 25 - On sait que la machine M du circuit représenté à la figure 2.3.32 est parcourue par un courant continu de $I_M = 1 \text{ A}$. On donne $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \, \Omega$, $E_1 = 1 \text{ V}$ et $E_2 = 2 \text{ V}$.

1. Calculez la puissance de la branche R_2 - E_2 .
2. La machine est-elle un générateur ou un récepteur ?

Réponses

1. $P = -0,84 \text{ W}$
2. Générateur

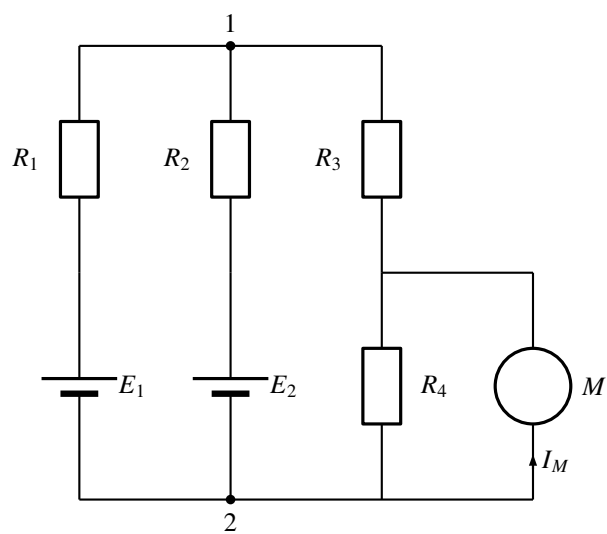


FIGURE 2.3.32 – Exercice 25

2.4 Schémas équivalents de Thévenin et Norton

2.4.1 Rappels

Théorème de Thévenin

Un réseau linéaire quelconque à 2 bornes 1 et 2 se comporte, vis-à-vis d'une résistance R , comme s'il se réduisait à une simple branche comportant en série (figure 2.4.1) :

- une force électromotrice E_0 , égale à la tension U_{12} existant entre les bornes 1 et 2 avant l'insertion de la résistance R (tension à vide).
- Une résistance R_0 égale à la résistance entre 1 et 2 du réseau dans lequel les forces électromotrices seraient remplacées par des court-circuits et les sources de courant par des circuits ouverts.

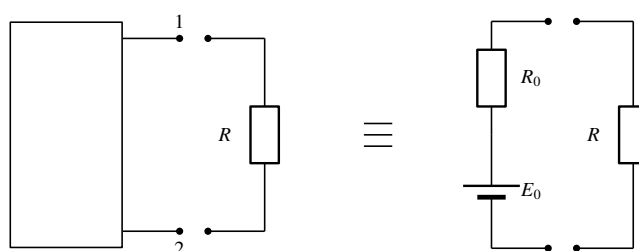


FIGURE 2.4.1 – Théorème de Thévenin

Théorème de Norton

Un bipôle 12 est équivalent à une source de courant idéale I_0 en parallèle avec une résistance R_0 (figure 2.4.2) avec :

- I_0 le courant de court-circuit de dipôle, c'est à dire, le courant I_{12} qui passerait dans le fil qui relierait les bornes 1 et 2.
- R_0 est égale à la résistance entre 1 et 2 du réseau dans lequel les forces électromotrices seraient remplacées par des court-circuits et les sources de courant par des circuits ouverts.

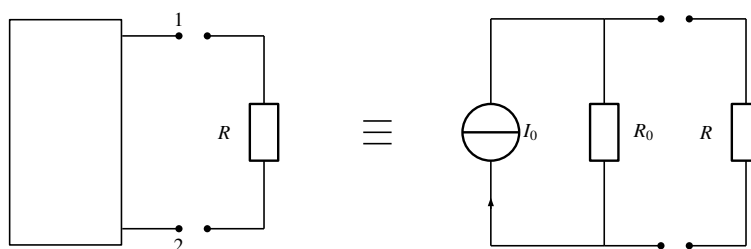


FIGURE 2.4.2 – Théorème de Norton

REMARK.— On montre que

$$E_0 = R_0 I_0$$

2.4.2 Exercices résolus

Exercice R1 - Déterminez le schéma équivalent de Thévenin du biporte de la figure 2.4.3 en fonction des données. En déduire le schéma équivalent de Norton. On connecte aux bornes 1 et 2 une branche comprenant une seule résistance R' . Que vaut le courant traversant cette résistance si $R = 2\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R' = 5\ \Omega$, $I = 1\ \text{A}$ et $E_1 = 10\ \text{V}$?

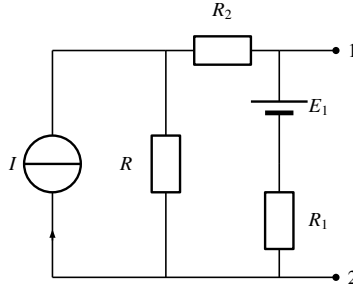


FIGURE 2.4.3 – Exercice R1 (1)

Solution

La résistance R_0 du circuit équivalent de Thévenin est égale à la résistance équivalente entre les bornes 1 et 2 du circuit après avoir remplacé les forces électromotrices par des court-circuits et les sources de courant par des circuits ouverts. Le circuit devient donc celui de la figure 2.4.4.

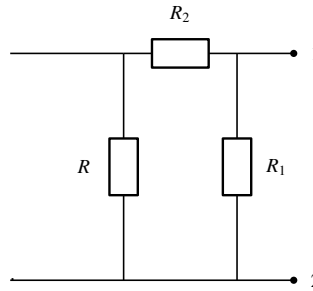


FIGURE 2.4.4 – Exercice R1 (2)

Il apparaît que R_0 correspond à la mise en parallèle de R_1 avec la mise en série de R et R_2 :

$$R_0 = \frac{(R + R_2)R_1}{R_1 + R_2 + R}$$

c'est à dire :

$$R_0 = \frac{RR_1 + R_1R_2}{R_1 + R_2 + R}$$

La tension E_0 du circuit équivalent de Thévenin est égale à la tension U_{12} (tension à vide). Considérons le circuit de la figure 2.4.5 où les valeurs des courants dans les différentes branches sont indiquées (loi des noeuds).

L'équation de la maille en pointillé donne :

$$-E_1 = -R(I - I_1) + R_2I_1 + R_1I_1 = -RI + (R_1 + R_2 + R)I_1$$

ce qui donne :

$$I_1 = \frac{-E_1 + RI}{R_1 + R_2 + R}$$

La tension E_0 s'écrit :

$$E_0 = E_1 + R_1I_1$$

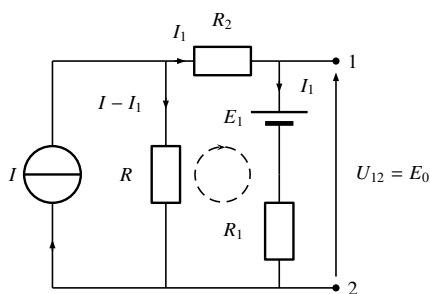


FIGURE 2.4.5 – Exercice R1 (3)

Après quelques opérations élémentaires, on trouve, en considérant l'expression de I_1 :

$$E_0 = \frac{(R_2 + R)E_1 + RR_1I}{R_1 + R_2 + R}$$

Pour calculer I_0 , on peut utiliser la relation :

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0}$$

ce qui donne, en tenant compte de l'expression de R_0 :

$$I_0 = \frac{(R_2 + R)E_1 + RR_1I}{RR_1 + R_1R_2}$$

On connecte maintenant une résistance R' aux bornes 1 et 2. Le système est équivalent au circuit de la figure 2.4.6.

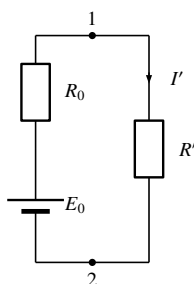


FIGURE 2.4.6 – Exercice R1 (4)

L'équation de la maille de ce circuit s'écrit :

$$E_0 = R'I' + R_0I'$$

Le courant I' recherché s'exprime donc par :

$$I' = \frac{E_0}{R_0 + R'}$$

c'est à dire :

$$I' = 1,45 \text{ A}$$

Exercice R2 - Déterminez le schéma équivalent de Thévenin (en régime) du circuit de la figure 2.4.7 où les sources de tension et de courant sont continues. En déduire le schéma équivalent de Norton.

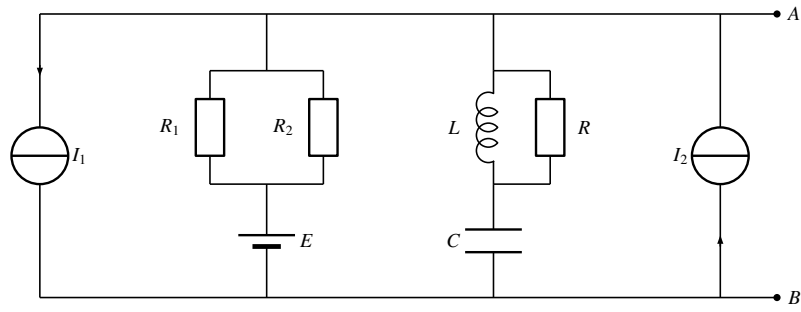


FIGURE 2.4.7 – Exercice R2 (1)

Solution

En régime continu, les capacités sont équivalentes à des circuits ouverts et les inductances à des court-circuits. Dès lors, la branche comprenant la capacité et l'inductance ne joue plus aucun rôle et le circuit devient celui de la figure 2.4.8 où R_{12} remplace la mise en parallèle de R_1 et R_2 :

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

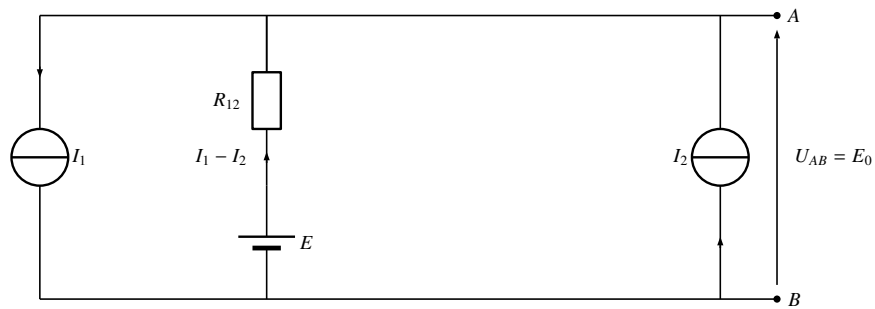


FIGURE 2.4.8 – Exercice R2 (2)

La tension E_0 du circuit équivalent de Thévenin est égale à la tension U_{AB} (tension à vide). Le courant circulant dans la branche $E - R_{12}$ valant $I_1 - I_2$, la tension E_0 s'écrit :

$$E_0 = E - R_{12}(I_1 - I_2)$$

c'est à dire :

$$E_0 = E - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}(I_1 - I_2)$$

La résistance R_0 du circuit équivalent de Thévenin est égale à la résistance équivalente entre les bornes A et B du circuit après avoir remplacé les forces électromotrices par des court-circuits et les sources de courant par des circuits ouverts. Le circuit devient donc celui de la figure 2.4.9. Il apparaît immédiatement que $R_0 = R_{12}$ et dès lors :

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le courant I_0 du circuit équivalent de Norton est le courant de court-circuit passant entre les bornes A et B . Il se calcule donc à partir de la figure 2.4.10.

Le courant circulant dans la branche $E - R_{12}$ vaut maintenant $I_1 - I_2 + I_0$. Considérons la maille en pointillé, on a :

$$E = R_{12}(I_1 - I_2 + I_0)$$

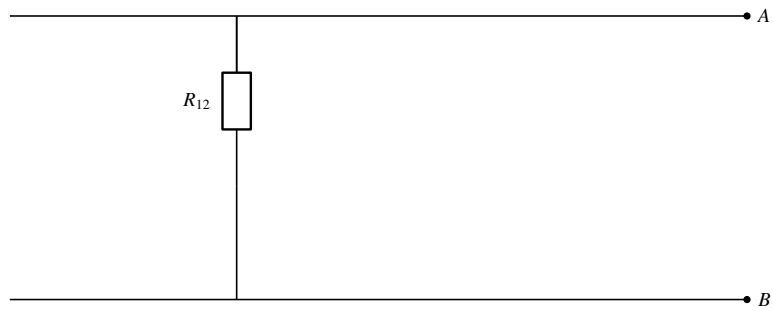


FIGURE 2.4.9 – Exercice R2 (3)

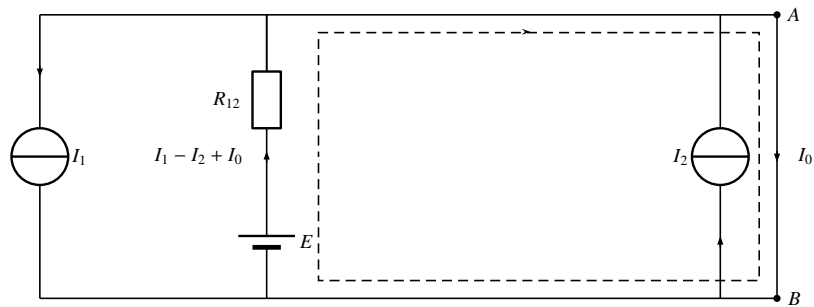


FIGURE 2.4.10 – Exercice R2 (4)

On trouve alors :

$$I_0 = \frac{E + R_{12}(I_2 - I_1)}{R_{12}} E$$

ce qui donne finalement :

$$I_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} E + I_2 - I_1$$

REMARK.– Pour calculer I_0 , on aurait également pu utiliser la relation :

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0}$$

2.4.3 Exercices

Exercice 1 - Considérez le dispositif de la figure 2.4.11.

1. Calculez la tension à vide U_{AB} du réseau.
2. Calculez le courant de court-circuit I_{AB} (A et B reliés par un fil non résistif).
3. En déduire les schémas équivalents de Thévenin et Norton.
4. On connecte une résistance de $5\ \Omega$ entre A et B . Calculez à partir des schémas équivalents le courant dans cette résistance.
5. Calculez la puissance de la source de courant dans le cas 4.

On donne

$$R = 1\ \Omega$$

$$E = 110\ \text{V}$$

$$I = 10\ \text{A}$$

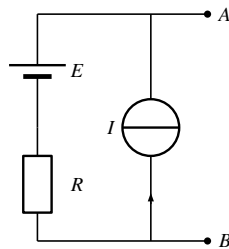


FIGURE 2.4.11 – Exercice 1

Réponses

1. $U_{vide} = 120\ \text{V}$
2. $I_{cc} = 120\ \text{A}$
3. $E_0 = 120\ \text{V}$, $I_0 = 120\ \text{A}$, $R_0 = 1\ \Omega$
4. $I = 20\ \text{A}$
5. $P_{12} = -1\ \text{kW}$

Exercice 2 - Appliquant le théorème de Thévenin, calculez le courant I circulant dans la résistance R du circuit représenté à la figure 2.4.12.

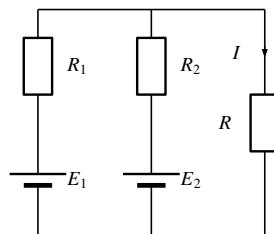


FIGURE 2.4.12 – Exercice 2

Réponse

$$I = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2}$$

Exercice 3 - Calculez les schéma équivalent de Thévenin et de Norton entre les bornes A et B du circuit représenté à la figure 2.4.13.

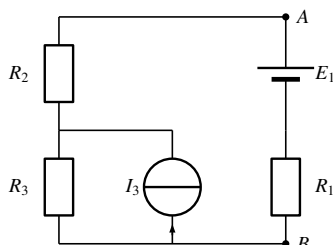


FIGURE 2.4.13 – Exercice 3

Réponse

$$E_0 = \frac{(R_2 + R_3)E_1 + R_1 R_3 I_3}{R_1 + R_2 + R_3}, R_0 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ et } I_0 = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3} E_1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_3$$

Exercice 4 - Déterminez et représentez les schémas équivalents de Thévenin et de Norton entre les bornes A et B du circuit (en régime) de la figure 2.4.14.

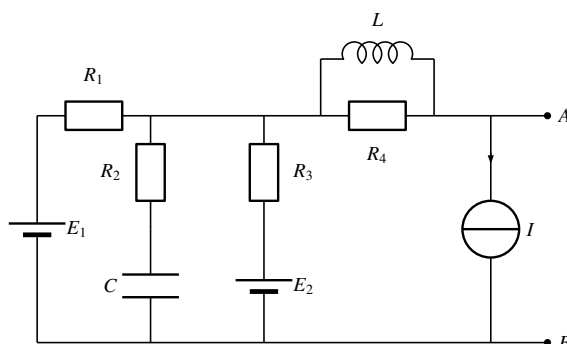


FIGURE 2.4.14 – Exercice 4

Réponse

$$E_0 = \frac{R_1 E_2 + R_3 E_1 - R_1 R_3 I}{R_1 + R_3}, R_0 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \text{ et } I_0 = \frac{E_2}{R_3} + \frac{E_1}{R_1} - I$$

Exercice 5 - Etablissez le schéma équivalent de Thévenin du biporte AB (figure 2.4.15). Si $I_1 = 1 \text{ A}$ et $R_1 = R_2 = 2R_3 = 10 \Omega$, que vaut le courant qui circulerait dans une résistance de 16Ω ?

Réponse

$$E_0 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} I_1, R_0 = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ et } I = 100 \text{ mA}$$

Exercice 6 - Calculez, en régime, le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit de la fi-

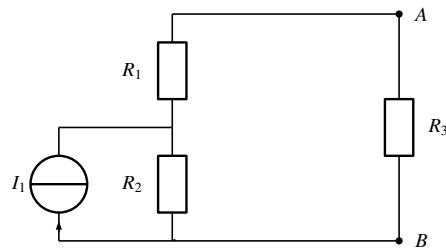


FIGURE 2.4.15 – Exercice 5

Figure 2.4.16. Les éléments valent respectivement $R_1 = 1\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 5\ \Omega$, $E_1 = 20\text{ V}$ et $E_5 = 10\text{ V}$. On connecte la branche représentée à la figure 2.4.17 aux bornes A et B du circuit. Sachant que $I' = 2\text{ A}$ et $R' = 1,6\ \Omega$, que vaut la puissance dissipée par la résistance R' ?

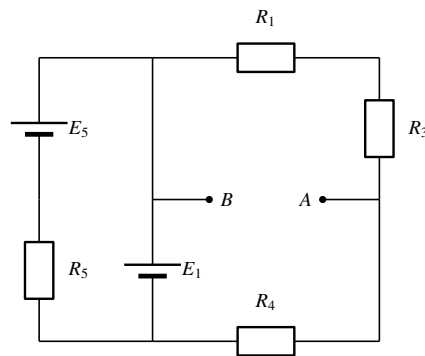


FIGURE 2.4.16 – Exercice 6 (1)

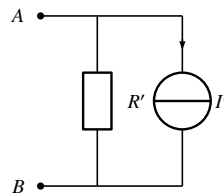


FIGURE 2.4.17 – Exercice 6 (2)

Réponse

$E_0 = -12\text{ V}$, $R_0 = 2,4\ \Omega$ et $P = 28,224\text{ W}$

Exercice 7 - Soit le circuit de la figure 2.4.18 où :

$$R_1 = 7\text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 100\ \Omega$$

$$R_3 = 100\text{ k}\Omega$$

$$E_1 = 10\text{ V}$$

$$I_3 = -500\text{ mA}$$

1. Calculez analytiquement et numériquement le schéma équivalent de Norton entre les bornes A et B .
2. Calculez le courant qui traverse une résistance de $10\text{ k}\Omega$ connectée aux bornes A et B du circuit.

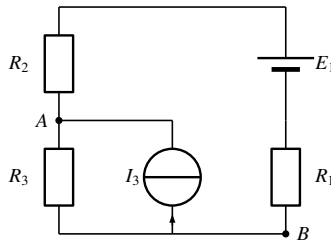


FIGURE 2.4.18 – Exercice 7

Réponses

1. $R_0 = 6629,3 \, \Omega$ et $I_0 = -0,499 \, \text{A}$
2. $I = -198,8 \, \text{mA}$

Exercice 8 - Considérez le circuit représenté à la figure 2.4.19(a) :

1. Calculez, en régime, le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B . Les éléments valent respectivement $R_1 = R = 1 \, \Omega$, $R_2 = 5 \, \Omega$, $R_4 = 4 \, \Omega$, $R_5 = 5 \, \Omega$, $C = 1 \, \mu\text{F}$, $E_1 = 20 \, \text{V}$, $E_2 = 10 \, \text{V}$ et $I = 1 \, \text{A}$.
2. On connecte ensuite le dipôle représenté à la figure 2.4.19(b) aux bornes A et B . A partir du schéma équivalent de Thévenin calculé, que vaut le courant passant par la résistance R' si $R' = 10 \, \Omega$ et $I' = 3 \, \text{A}$?

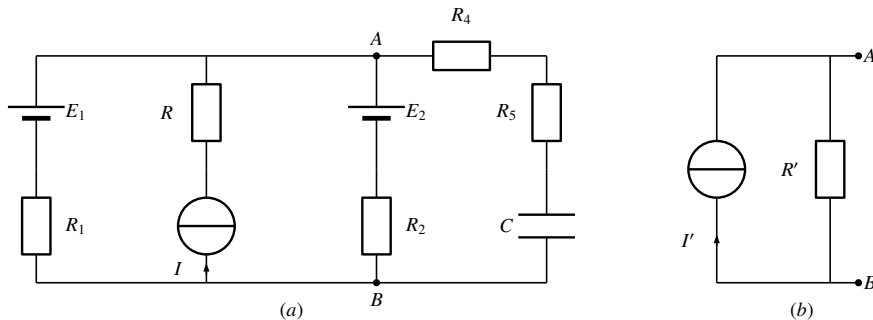


FIGURE 2.4.19 – Exercice 8

Réponses

1. $R_0 = \frac{5}{6} \, \Omega$ et $E_0 = 19,16 \, \text{V}$
2. $I_{R'} = 2 \, \text{A}$

Exercice 9 - Soient le circuit de la figure 2.4.20(a) et son schéma équivalent de Norton représenté à la figure 2.4.20(b). Sans calculer le schéma équivalent de Norton, que deviennent I_0 et R_0 lorsque la résistance R_1 est diminuée de moitié ? Justifiez.

Réponse

R_0 et I_0 restent inchangés.

Exercice 10 - Considérez le biporte AB représenté à la figure 2.4.21.

1. Déterminez son schéma équivalent de Thévenin.

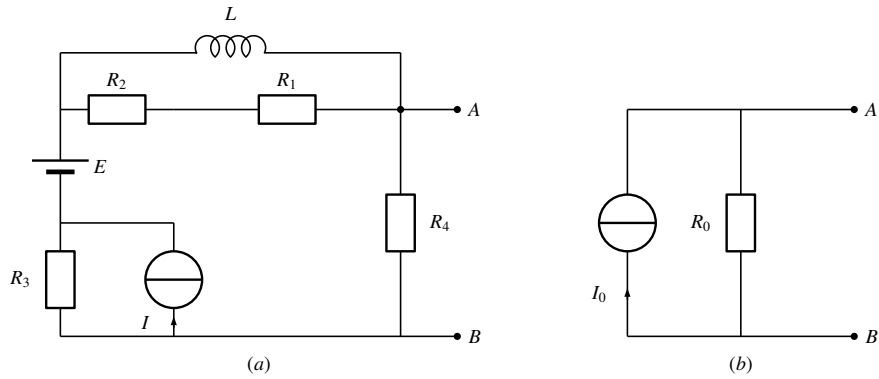


FIGURE 2.4.20 – Exercice 9

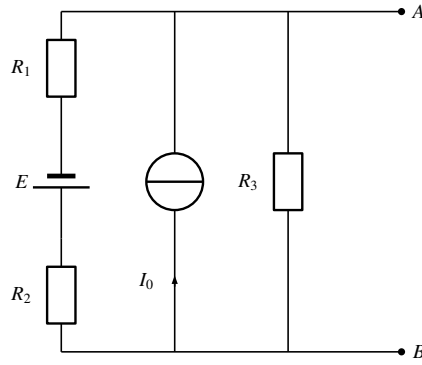


FIGURE 2.4.21 – Exercice 10

2. Si $E = 1 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$ et $I_0 = 1 \text{ A}$, que vaut le courant qui circulerait dans un fil non résistif connecté entre les bornes A et B ?

Réponses

1. $R_0 = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ et $E_0 = -E + \frac{(R_1 + R_2)(E + R_3 I_0)}{R_1 + R_2 + R_3}$
2. $I = 0,95 \text{ A}$

Exercice 11 - Calculez, en régime, le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit de la figure 2.4.22(a). On connecte ensuite le dipôle représenté à la figure 2.4.22(b) aux bornes A et B. A partir du schéma équivalent de Thévenin calculé, donnez l'expression en régime de la charge Q prise par la capacité C' ?

Réponses

$$R_0 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$E_0 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I$$

$$Q = C' \left[\frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} (R_2 R_3 E + R_1 R_2 R_3 I) \right]$$

Exercice 12 - De par le théorème de Thévenin, le biporte A-B représenté à la figure 2.4.23 est équivalent à une source de tension E_0 en série avec une résistance R_0 . On donne $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_2 = 30 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 3 \mu\text{F}$ et $R_4 = 10 \Omega$. Que doivent valoir R_2 et R_3 afin d'obtenir $R_0 = 1 \Omega$ et $E_0 = 10 \text{ V}$.

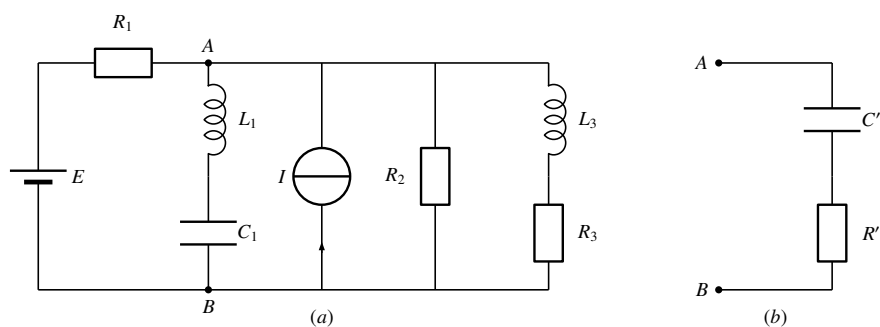


FIGURE 2.4.22 – Exercice 11

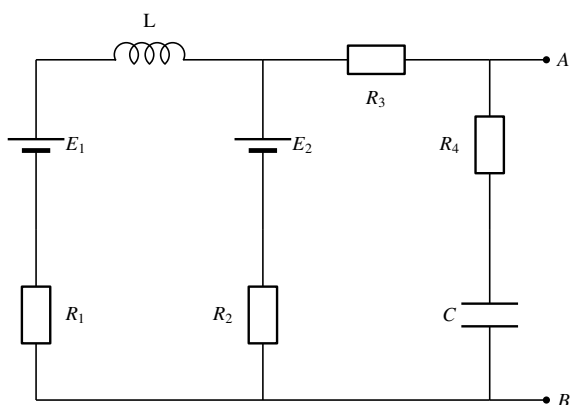


FIGURE 2.4.23 – Exercice 12

Réponse

$R_2 = 4 \Omega$ et $R_3 = 0,2 \Omega$.

Exercice 13 - Déterminez l'équivalent (en régime) de Thévenin du biporte A-B décrit à la figure 2.4.24. Si $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 5 \text{ V}$, $I = 2 \text{ A}$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 3 \mu\text{F}$ et $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \Omega$, que vaut l'énergie emmagasinée dans une capacité $C' = 1 \mu\text{F}$ connectée entre les bornes A et B ?

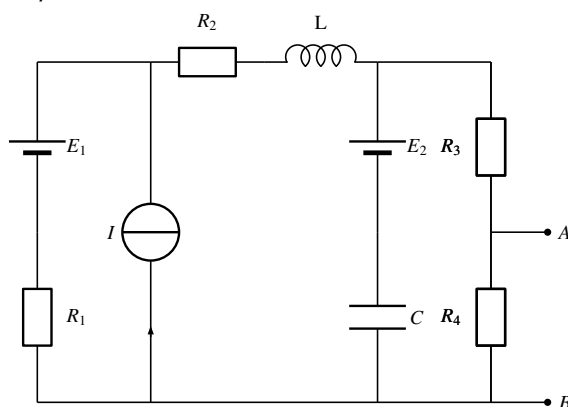


FIGURE 2.4.24 – Exercice 13

Réponses

$$R_0 = \frac{(R_1 + R_2 + R_3)R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \text{ et } E_0 = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}(E_1 + R_1 I).$$

$$\mathcal{E}_C = 4,5 \mu\text{J}$$

Exercice 14 - Calculez le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes 1 et 2 du circuit représenté à la figure 2.4.25. On donne $E_1 = 10 \text{ V}$, $I_0 = 1 \text{ A}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $L_1 = 10 \text{ mH}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$ et $R_4 = 5 \Omega$.

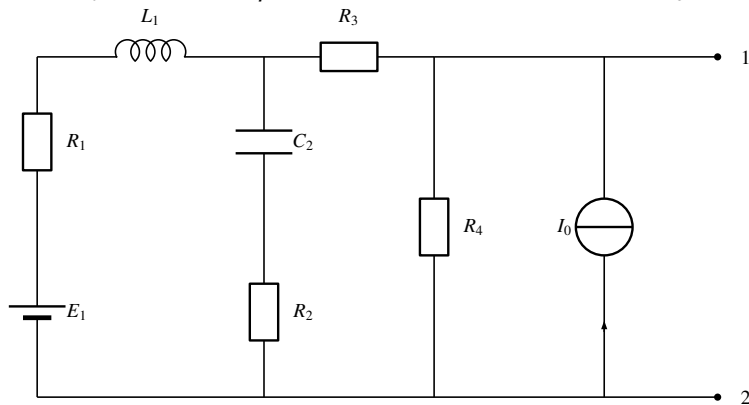


FIGURE 2.4.25 – Exercice 14

Réponse

$$R_0 = 2,5 \Omega \text{ et } E_0 = 7,5 \text{ V.}$$

Exercice 15 - Soit le circuit représenté à la figure 2.4.26(a). On donne $E_1 = 2 \text{ V}$, $E_4 = 1 \text{ V}$, $C_3 = 1 \mu\text{F}$, $L_4 = 10 \text{ mH}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 5 \Omega$.

1. Calculez le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit.
2. On connecte ensuite aux bornes A et B le circuit représenté à la figure 2.4.26(b) où M est une machine traversée par un courant I_M . A partir du schéma équivalent de Thévenin calculé, déterminez si la machine M est réceptrice ou génératrice. On donne $R' = 1 \Omega$ et $I_M = 1 \text{ A}$.

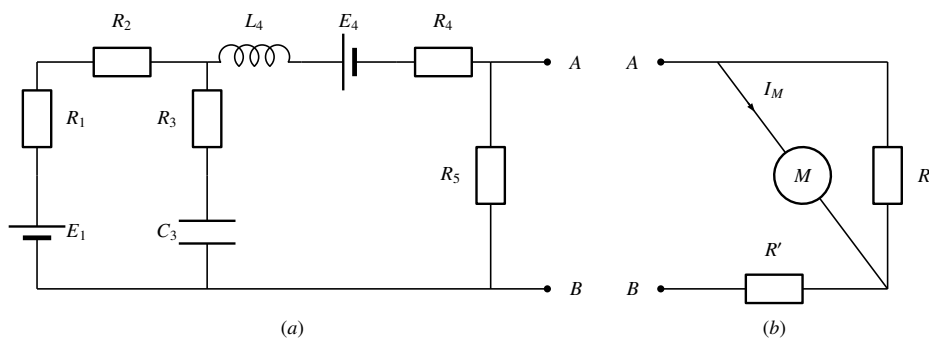


FIGURE 2.4.26 – Exercice 15

Réponses

1. $R_0 = 3,75 \Omega$ et $E_0 = 0,25 \text{ V}$.
2. La machine M est génératrice.

Exercice 16 - Soit le circuit représenté à la figure 2.4.27. On donne $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \Omega$, $C_3 = 2 \mu\text{F}$, $L_2 = 1 \text{ mH}$, $E = 10 \text{ V}$ et $I = 1 \text{ A}$. Calculez le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit (en régime). On connecte ensuite un capacité $C = 1 \mu\text{F}$ aux bornes A et B. A l'aide du schéma équivalent de Thévenin, déterminez l'énergie emmagasinée dans la capacité.

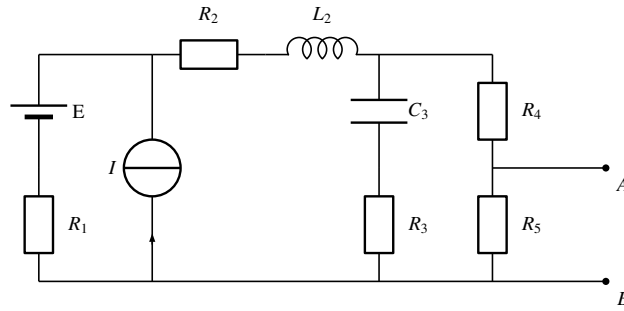


FIGURE 2.4.27 – Exercice 16

Réponse

$R_0 = 0,75 \Omega$, $E_0 = 2,75 \text{ V}$ et $\mathcal{E} = 3,78 \mu\text{J}$.

Exercice 17 - Calculez, en régime, le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit de la figure 2.4.28(a). On connecte ensuite le dipôle représenté à la figure 2.4.28(b) aux bornes A et B. A partir du schéma équivalent de Thévenin calculé, donnez l'expression en régime du courant traversant la résistance R' ? On donne $R_1 = R_2 = R_3 = R' = 5 \Omega$, $E = 10 \text{ V}$, $L_1 = L' = 10 \text{ mH}$, $C_1 = C_3 = 1 \mu\text{F}$ et $I = 1 \text{ A}$

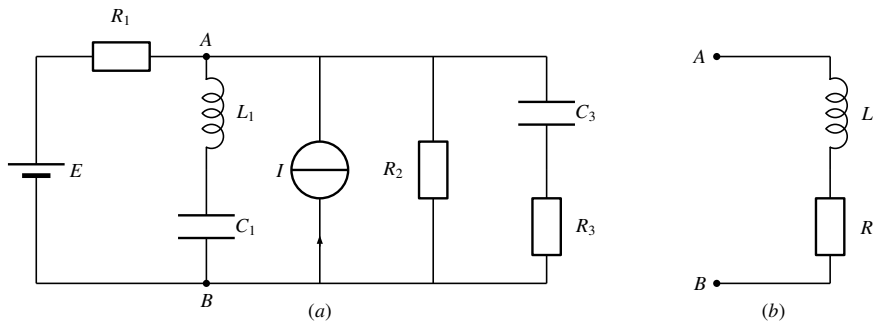


FIGURE 2.4.28 – Exercice 17

Réponse

$E_{\text{th}} = 7,5 \text{ V}$, $R_{\text{th}} = 2,5 \Omega$ et $I = 1 \text{ A}$.

Exercice 18 - Calculez, en régime, le schéma équivalent de Norton entre les bornes A et B du circuit de la figure 2.4.29 où la tension E vaut 10 V . On connecte ensuite le dipôle représenté à la figure 2.4.30 aux bornes A et B. A partir du schéma équivalent de Norton, calculez la valeur du courant I . Toutes les résistances valent 1Ω , les capacités $1 \mu\text{F}$ et les inductances 1 mH .

Réponse

$I_N = \frac{30}{7} \text{ A}$, $R_N = 1,75 \Omega$ et $I = 2,07 \text{ A}$.

Exercice 19 - Calculez, en régime, le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit de la figure 2.4.31(a). Les éléments valent respectivement $R_1 = R_3 = R_4 = 1 \Omega$, $C_2 = 1 \mu\text{F}$, $E_1 = E_2 = 2 \text{ V}$ et $E_3 = 1 \text{ V}$. On connecte ensuite le dipôle représenté à la figure 2.4.31(b) aux bornes A et B. A partir du schéma équivalent de Thévenin calculé, que vaut l'énergie emmagasinée dans la capacité C (initialement non chargée) si $R = 2 \Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$?

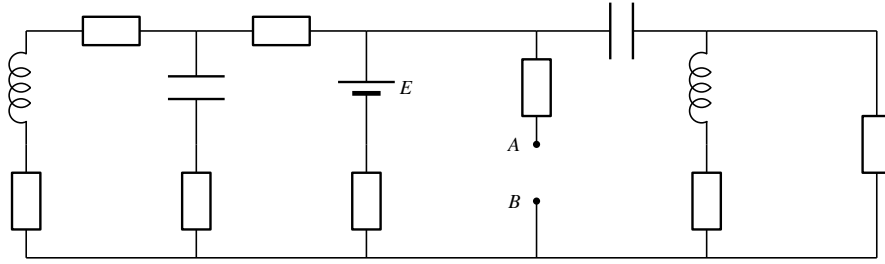


FIGURE 2.4.29 – Exercice 18

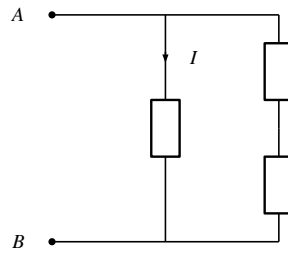


FIGURE 2.4.30 – Exercice 18

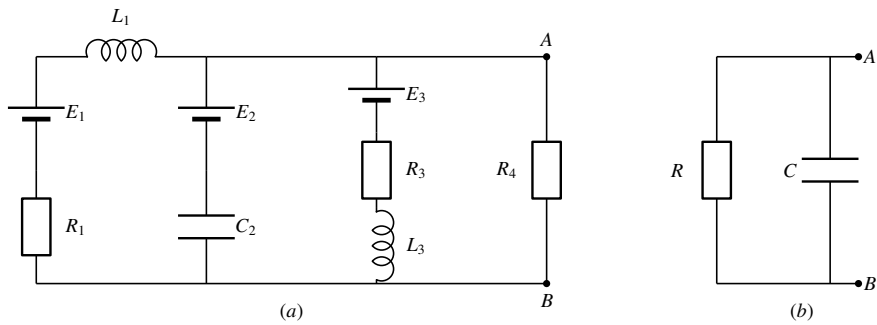


FIGURE 2.4.31 – Exercice 19

Réponse

$$E_{\text{th}} = 1 \text{ V}, R_{\text{th}} = \frac{1}{3} \Omega \text{ et } \mathcal{E} = 3,67 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

Exercice 20 - Soit le circuit représenté à la figure 2.4.32. On donne $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \Omega$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $L_4 = 1 \text{ mH}$ et $I = 1 \text{ A}$. Calculez le schéma équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit (en régime). On connecte ensuite une capacité $C = 1 \mu\text{F}$ aux bornes A et B. A l'aide du schéma équivalent de Thévenin, déterminez l'énergie emmagasinée dans la capacité.

Réponse

$$E_{\text{th}} = \frac{1}{3} \text{ V}, R_{\text{th}} = \frac{1}{3} \Omega \text{ et } \mathcal{E} = 0,056 \mu\text{J.}$$

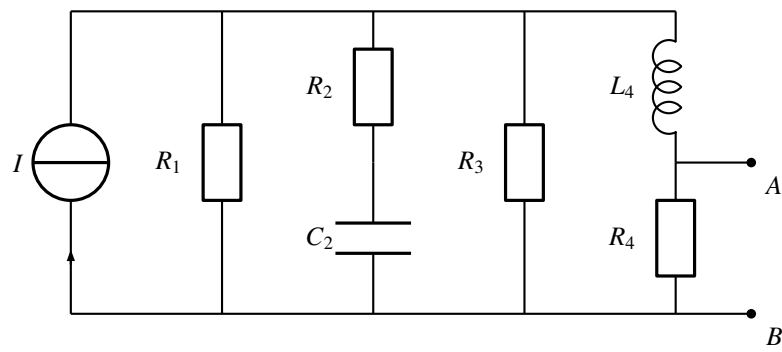


FIGURE 2.4.32 – Exercice 20

Chapitre 3

Etats variables

3.1 Résolution de circuits en mode transitoire

3.1.1 Rappels

Equation temporelle d'une branche

Considérons la branche représentée à la figure 3.1.1. L'équation temporelle de la branche s'écrit :

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

avec

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

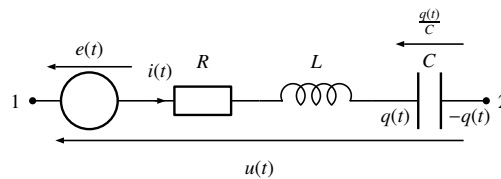


FIGURE 3.1.1 – Equation temporelle d'une branche

Considérons maintenant la branche de la figure 3.1.2 où une inductance est couplée à un autre circuit. On a :

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_{12} \frac{di'(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

avec

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

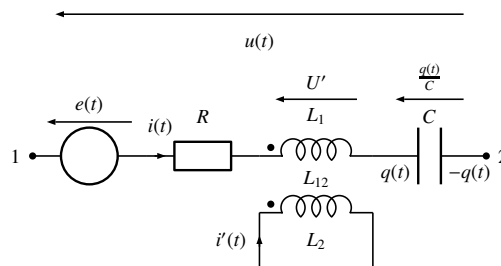


FIGURE 3.1.2 – Equation temporelle d'une branche comprenant une inductance couplée à un autre circuit

Les bornes pointées sur le circuit nous renseignent sur le signe (positif ici) à choisir pour le terme $L_{12} \frac{di'(t)}{dt}$. Si le courant $i'(t)$ entre par la borne pointée inférieure, il génèrera une tension supplémentaire U' dans la branche 12 dirigée vers la borne pointée supérieure, comme indiqué sur la figure 3.1.2. Si les bornes pointées sont celles de la figure 3.1.3, l'équation de la branche devient :

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} - L_{12} \frac{di'(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

En effet, la tension U' générée n'est plus dirigée vers la borne pointée supérieure puisque le courant $i'(t)$ n'entre pas par la borne pointée inférieure.

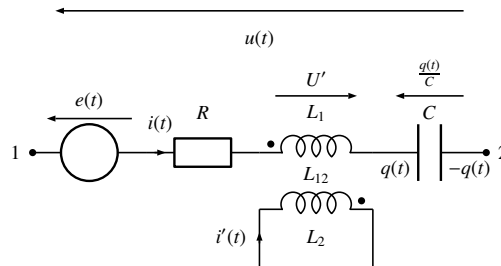


FIGURE 3.1.3 – Equation temporelle d'une branche comprenant une inductance couplée à un autre circuit

Transformée de Laplace

Pour rappel, on trouve au tableau 3.1.1 les transformations de Laplace les plus utilisées dans le cadre des exercices.

$f(t)$	$F(p)$
C	C/p
$dx(t)/dt$	$pX(p) - x(0)$
$Ae^{-\alpha t}$	$A/(p + \alpha)$

TABLE 3.1.1 – Rappel de certaines transformées de Laplace

3.1.2 Exercices résolus

Exercice R1 - L'interrupteur du circuit représenté sur la figure 3.1.4 est fermé depuis un temps infini. A l'instant $t = 0$, on l'ouvre :

1. Ecrivez le système d'équations différentielles qui permettrait de calculer i_2 et u_c .
2. Prenez la transformée de Laplace du système et précisez les conditions initiales.
3. Calculez les valeurs de régime de i_2 et u_c .

Solution

1. En $t = 0$, on ouvre l'interrupteur et seule la maille de droite est à prendre en compte. Le circuit à considérer est donc celui de la figure 3.1.5. Ecrivons l'équation temporelle de la maille en pointillé :

$$E_2 - u_c(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + L \frac{di_2(t)}{dt} \quad (3.1.1)$$

On a aussi :

$$i_2(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad u_c(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (3.1.2)$$

et dès lors :

$$i_2(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad (3.1.3)$$

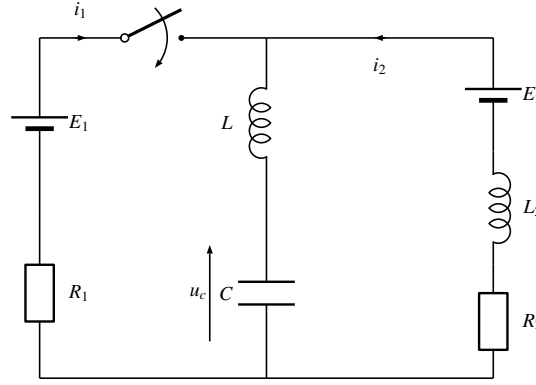


FIGURE 3.1.4 – Exercice R1 (1)

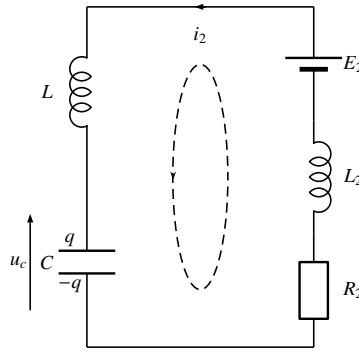


FIGURE 3.1.5 – Exercice R1 (2)

Les relations (3.1.1) et (3.1.3) forment un système d'équations permettant de calculer i_2 et U_c .

2. La transformée de Laplace du système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{E_2}{p} - U_c(p) = (R_2 + pL_2 + pL)I_2(p) - (L_2 + L)i_2(0) \\ I_2(p) = pCU_c(p) - Cu_c(0) \end{cases}$$

Il reste à calculer les conditions initiales $i_2(0)$ et $u_c(0)$. Avant l'instant $t = 0$, l'interrupteur était fermé depuis un temps infini. On est donc en régime permanent et le circuit à considérer est celui de la figure 3.1.6 obtenu à partir de l'ensemble du circuit de la figure 3.1.4 où la capacité a été remplacée par un circuit ouvert et les inductances par des court-circuits.

L'équation de la maille en pointillé s'écrit :

$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_2)i_1(0)$$

Dès lors :

$$i_1(0) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

et

$$i_2(0) = -i_1(0) = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}$$

La tension $u_c(0)$ recherchée correspond à la tension aux bornes de la branche $E_2 - R_2$. Elle s'exprime donc par :

$$u_c(0) = E_2 - R_2 i_2(0)$$

On a finalement :

$$u_c(0) = E_2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2}(E_1 - E_2)$$

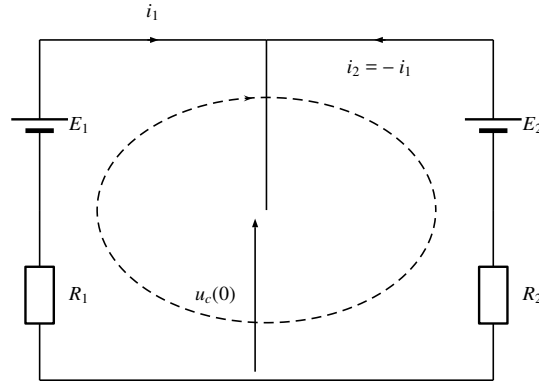


FIGURE 3.1.6 – Exercice R1 (3)

3. En régime, après l'ouverture de l'interrupteur, la capacité C du circuit 3.1.5 devient un circuit ouvert et les inductances deviennent des court-circuits (figure 3.1.7). Dès lors, il vient que $i_2 = 0$ et $u_c = E_2$.

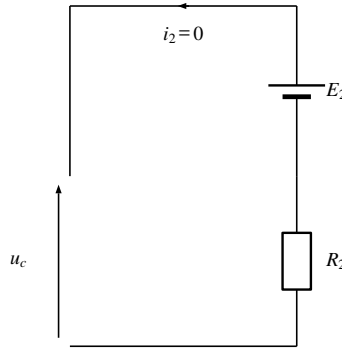


FIGURE 3.1.7 – Exercice R1 (4)

Exercice R2 - Une résistance ($R - \ell$) et une bobine ($L - r$) sont alimentées à partir de l'instant $t = 0$ par une générateur d'onde carrée de fréquence 100 Hz (figure 3.1.8). Déterminez l'expression analytique du courant i (supposé nul à l'instant $t = 0$) dans les intervalles de temps 0-5 ms et 5-10 ms. Calculez i et représentez le schématiquement en fonction du temps. On donne :

$$R = 90 \, \Omega$$

$$r = 10 \, \Omega$$

$$L = 9,5 \, \text{mH}$$

$$\ell = 0,5 \, \text{mH}$$

Solution

Entre 0 et 5 ms

Entre 0 et 5 ms, $e(t) = 10 \, \text{V}$. Dès lors l'équation temporelle de l'unique maille du circuit s'écrit :

$$e(t) = Ri(t) + \ell \frac{di(t)}{dt} + L \frac{di(t)}{dt} + ri(t) = (R + r)i(t) + (L + \ell) \frac{di(t)}{dt} = 10$$

La transformée de Laplace correspondante donne :

$$\frac{10}{p} = (R + r)I(p) + (L + \ell)[pI(p) - i(0)]$$

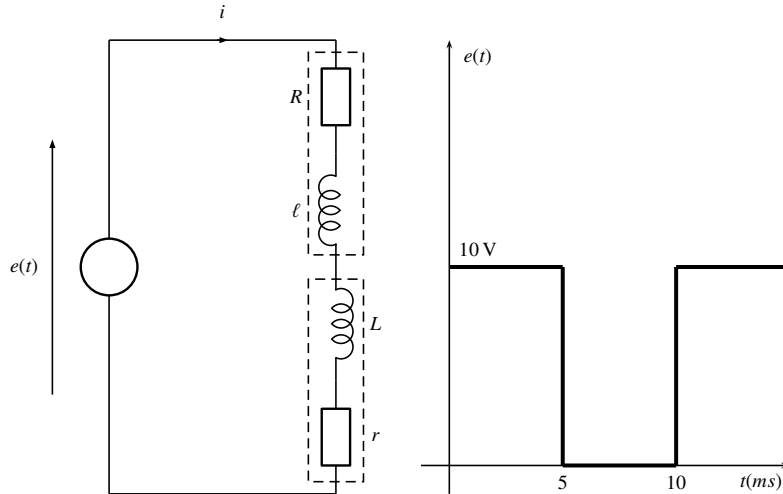


FIGURE 3.1.8 – Exercice R2 (1)

Puisque $i(0) = 0$:

$$\frac{10}{p} = [R + r + p(L + \ell)]I(p)$$

et :

$$I(p) = \frac{10}{p[R + r + p(L + \ell)]}$$

Posons :

$$I(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{R + r + p(L + \ell)}$$

En mettant au même dénominateur, on obtient :

$$10 = A(R + r) + p[B + A(L + \ell)]$$

et on trouve :

$$A = 0,1 \quad \text{et} \quad B = -0,001$$

Dès lors :

$$I(p) = \frac{0,1}{p} + \frac{-0,001}{100 + 10^{-2}p} = \frac{0,1}{p} - \frac{0,1}{10^4 + p}$$

En calculant la transformée de Laplace inverse, on trouve :

$$i(t) = 0,1 - 0,1e^{-10000t}$$

c'est à dire :

$$\boxed{i(t) = 0,1 \left(1 - e^{-10000t}\right)} \quad (3.1.4)$$

En particulier pour $t = 5 \text{ ms}$, on a $i = 0,1 \text{ A}$.

Entre 5 et 10 ms

Entre 5 et 10 ms, $e(t) = 0 \text{ V}$. Dès lors l'équation temporelle de l'unique maille du circuit s'écrit :

$$e(t) = Ri(t) + \ell \frac{di(t)}{dt} + L \frac{di(t)}{dt} + ri(t) = (R + r)i(t) + (L + \ell) \frac{di(t)}{dt} = 0$$

la transformée de Laplace correspondante donne :

$$\frac{10}{p} = (R + r)I(p) + p(L + \ell)I(p) - (L + \ell)i(5 \text{ ms})$$

Les conditions initiales sont, en effet, celles obtenues pour $t = 5$ ms. Le terme $i(5 \text{ ms})$ se calcule à partir de l'équation (3.1.4). En utilisant les valeurs numériques, la relation précédente devient :

$$0 = (100 + 0,01p)I(p) - 0,001$$

c'est à dire :

$$I(p) = \frac{0,001}{100 + 0,01p} = \frac{0,1}{10000 + p}$$

Le calcul de la transformée de Laplace inverse donne :

$$i(t) = 0,1e^{-10000t'}$$

En utilisant le même repère temporel que celui utilisé pour la période 0-5 ms, on obtient finalement ($t' = t - 5$ ms) :

$$i(t) = 0,1e^{-10000(t-5 \text{ ms})}$$

L'évolution temporelle de $i(t)$ est représentée à la figure 3.1.9.

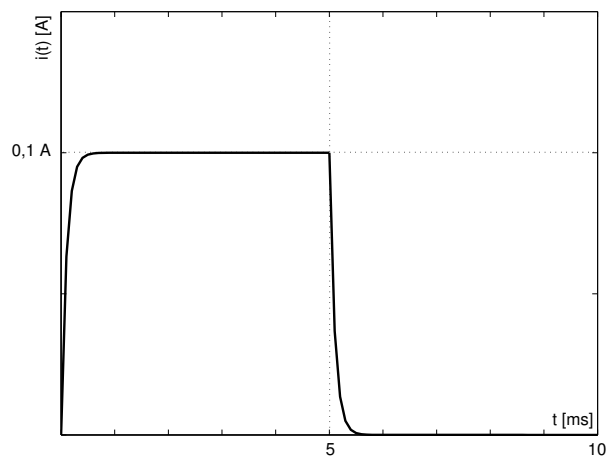


FIGURE 3.1.9 – Exercice R2 (2)

3.1.3 Exercices

Exercice 1 - La figure 3.1.10 représente un circuit constitué par une source de force électromotrice $E = 12 \text{ V}$ et de résistance interne $R_s = 0,1 \Omega$, d'un interrupteur, d'une ligne de résistance totale égale à $R = 3 \Omega$ et d'une bobine d'un relais, laquelle est caractérisée par une résistance $R_b = 50 \Omega$ et une inductance de $L = 2,5 \text{ H}$. Le relais ne s'enclenche qu'à partir du moment où le courant dans la bobine atteint quelque $0,05 \text{ A}$. Combien de temps s'écoule-t-il entre la fermeture de l'interrupteur et l'enclenchement du relais ?

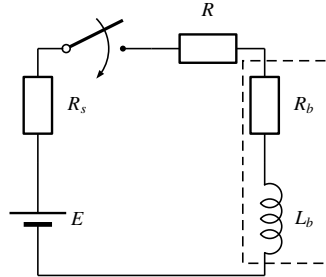


FIGURE 3.1.10 – Exercice 1

Réponses

$$t = 11 \text{ ms}$$

Exercice 2 - L'interrupteur du circuit représenté sur la figure 3.1.11 est initialement ouvert. Le condensateur parfait C est non chargé. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1. Que vaudra en régime la tension U_c au bornes du condensateur C ?
2. Calculez la transformée de Laplace de la tension $u_c(t)$.

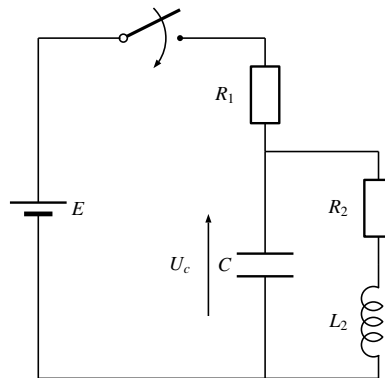


FIGURE 3.1.11 – Exercice 2

Réponses

1. $U_c = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$
2. $U_c(p) = \frac{R_2 + pL_2}{p^2 L_2 C R_1 + p(C R_1 R_2 + L_2) + R_1 + R_2} \frac{E}{p}$

Exercice 3 - L'interrupteur du circuit représenté sur la figure 3.1.12 est initialement fermé depuis un temps infini. A l'instant $t = 0$, on l'ouvre :

1. Déterminez, en justifiant, les conditions initiales.

2. Ecrire un système d'équations qui permettrait de calculer les transformées de Laplace des courants i_1 et i_2 . Mettre ces équations sous la forme $A(p)I_1(p) + B(p)I_2(p) = C(p)$.
3. Quelle est la valeur de régime de i_2 ?

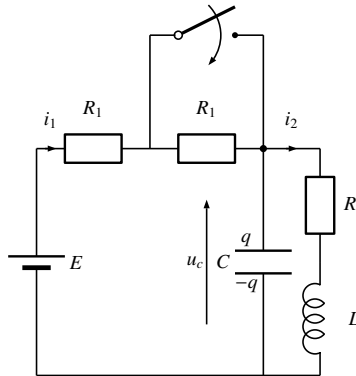


FIGURE 3.1.12 – Exercice 3

Réponses

1. $i_1(0) = i_2(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}$, $u_c(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$ et $q(0) = \frac{CR_2}{R_1 + R_2}E$
2. $\frac{E}{p} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = (2R_1 + \frac{1}{pC})I_1(p) - \frac{1}{pC}I_2(p)$, $\frac{E}{p} \frac{pL + R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{1}{pC}I_1(p) + (R_2 + pL + \frac{1}{pC})I_2(p)$
3. $i_2 = \frac{E}{2R_1 + R_2}$

Exercice 4 - L'interrupteur du circuit représenté sur la figure 3.1.13 est fermé depuis un temps infini. A l'instant $t = 0$, on l'ouvre. Ecrire, en tenant compte des conditions initiales, le système d'équations qui permettrait de déterminer les transformées de Laplace de i_1 , i_2 et u_c . Mettre le système sous forme matricielle. Que valent, en régime, i_2 et u_c ?

Réponse

$$\begin{pmatrix} R + R_1 + pL_1 & pL_{12} & 0 \\ pL_{12} & R_2 + pL_2 & -1 \\ 0 & 1 & pC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ U_c(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{p} + L_1 \frac{E}{R} \\ L_{12} \frac{E}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$i_2 = 0$ A et $u_c = 0$ V en régime

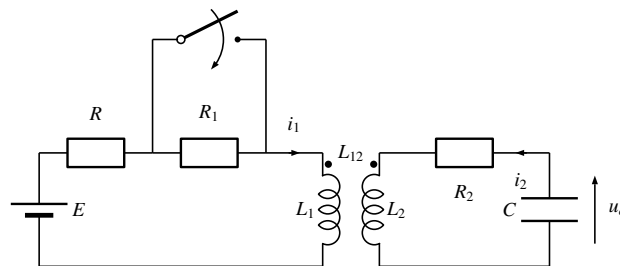


FIGURE 3.1.13 – Exercice 4

Exercice 5 - L'interrupteur du circuit représenté sur la figure 3.1.14 est ouvert depuis un temps infini.

1. Calculez les courants i_1 et i_2 et la tension aux bornes de C_1 .
2. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Ecrire le système d'équations qui permettrait de trouver les transformées de Laplace de i_1 et i_2 .
3. Calculez la valeur de régime des courants i_1 et i_2 .

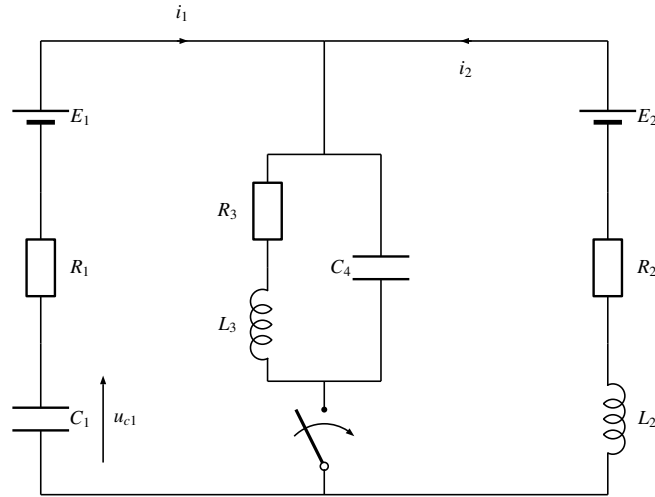


FIGURE 3.1.14 – Exercice 5

Réponses

1. $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$ et $u_{c1}(0) = E_2 - E_1$
2.
$$\begin{cases} \frac{E_1}{p} = -U_{c1}(p) + R_1 I_1(p) + (R_3 + pL_3)I_3(p) \\ \frac{E_2}{p} = U_{c4}(p) + (R_2 + pL_2)I_2 \\ 0 = -U_{c4}(p) + (R_3 + pL_3)I_3 \\ C_1(E_2 - E_1) = pC_1 U_{c1}(p) + I_1(p) \\ 0 = I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) - pC_4 U_{c4}(p) \end{cases}$$
3. $i_1 = 0$ et $i_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_3}$

Exercice 6 - En $t = 0$, on ouvre l'interrupteur du circuit représenté à la figure 3.1.15.

1. Calculez l'évolution du courant $i_1(t)$.
2. Donnez l'expression de la tension $u_{AB}(t)$.

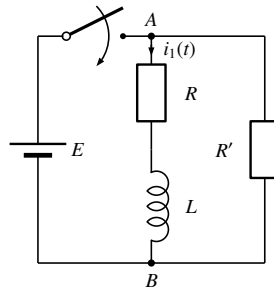


FIGURE 3.1.15 – Exercice 6

Réponses

$$1. i_1(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R+R'}{L}t}$$

$$2. u_{AB}(t) = E \left(1 - \frac{R+R'}{R}\right) e^{-\frac{R+R'}{L}t}$$

Exercice 7 - Le circuit de la figure 3.1.16 est soumis à une tension $e(t)$ produite par la source de tension G . La capacité C étant supposée initialement non chargée, on demande de calculer l'expression analytique de la tension $u(t)$ pour tout t .

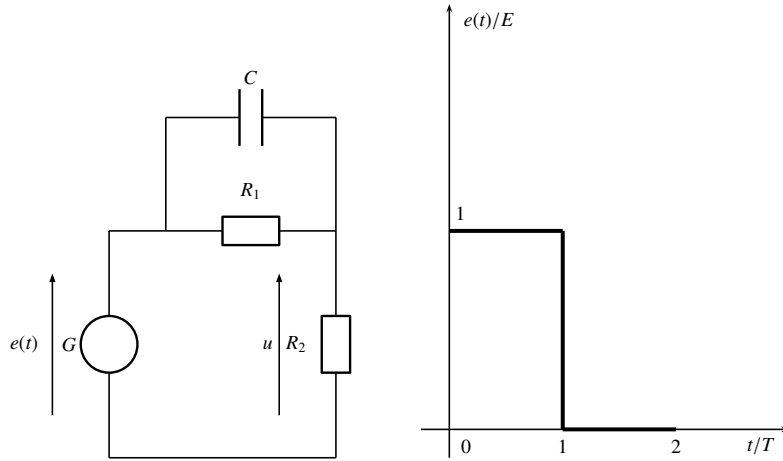


FIGURE 3.1.16 – Exercice 7

Réponses

$$u(t) = E \frac{R_2}{R_1+R_2} + E \frac{R_1}{R_1+R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} \text{ pour } 0 < t < T$$

$$u(t) = \frac{q(T)}{C} e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}(t-T)} \text{ pour } T < t < 2T \text{ avec } q(T) = E \frac{CR_1}{R_1+R_2} \left(e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}T} - 1 \right)$$

Exercice 8 - Dans le circuit de la figure 3.1.17, l'interrupteur K est ouvert depuis un temps infini et le condensateur C' est initialement non chargé. En $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer le système d'équations qui permettrait d'obtenir les transformées de Laplace des courants $i(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$;
2. Déterminer la tension aux bornes de la capacité C' en régime.

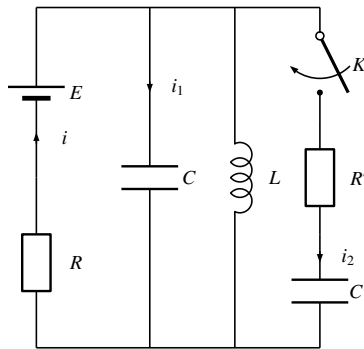


FIGURE 3.1.17 – Exercice 8

Réponses

$$1. \begin{cases} \frac{E}{p} = RI(p) + \frac{1}{pC}I_1(p) \\ 0 = pLI(p) + (-\frac{1}{pC} - pL)I_1(p) - pLI_2(p) - L\frac{E}{R} \\ 0 = -pLI(p) + pLI_1(p) + (R' + \frac{1}{pC'} + pL)I_2(p) + L\frac{E}{R} \end{cases}$$

$$2. u_c = 0$$

Exercice 9 - Dans le circuit de la figure 3.1.18, les interrupteurs K_1 et K_2 sont ouverts depuis un temps infini et la capacité est initialement non chargée. En $t = 0$, on ferme l'interrupteur K_1 pendant 4 s. Ensuite, en $t = 10$ s on ferme l'interrupteur K_2 . Sachant $R = 2 \text{ M}\Omega$, $E = 10 \text{ V}$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ et $L = 40 \text{ mH}$, calculez et dessinez l'évolution de la tension aux bornes de la capacité pour $t \geq 0$.

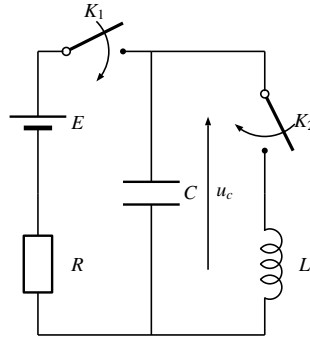


FIGURE 3.1.18 – Exercice 9

Réponse

$$0 < t < 4 \text{ s} \Rightarrow u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$4 < t < 10 \text{ s} \Rightarrow u_c(t) = E(1 - e^{-2})$$

$$t > 10 \text{ s} \Rightarrow u_c(t) = E(1 - e^{-2})\cos[5000(t - 10)]$$

Exercice 10 - Soit le circuit de la figure 3.1.19 où l'interrupteur K est fermé en $t = 0$ et la capacité C est initialement non chargée. Déterminez l'expression analytique $u_R(t)$ après fermeture de l'interrupteur lorsque $u(t) = 1 - 0,5t$ et $RC = 1 \text{ s}$.

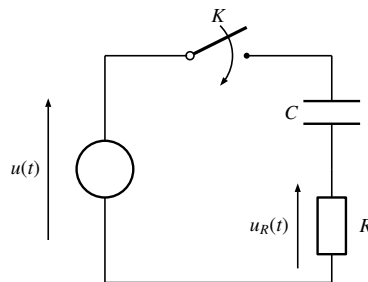


FIGURE 3.1.19 – Exercice 10

Réponse

$$u_R(t) = 1,5 e^{-t} - 0,5.$$

Exercice 11 - Soit le circuit de la figure 3.1.20 où l'interrupteur K est initialement ouvert et la capacité C_1 est initialement non chargée.

1. K étant ouvert, déterminer l'équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit.
2. En $t = 0$, on ferme K , déterminer l'expression de la tension $u_{AB}(t)$. Ce problème est beaucoup plus simple à résoudre en utilisant le résultat de l'étape 1.
3. En $t = 30 \mu s$, on ouvre K , déterminer l'expression de la tension $u_{AB}(t)$

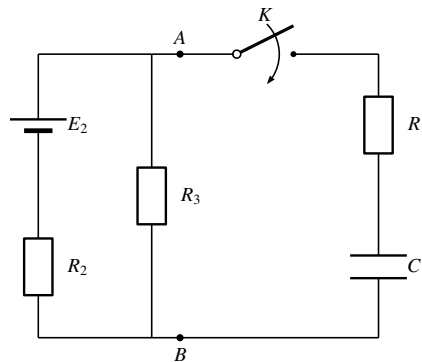


FIGURE 3.1.20 – Exercice 11

Réponses

1. $R_0 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ et $E_0 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_2$
2. $u_{AB}(t) = E_0 \left(1 - \frac{R_0}{R_0 + R_1} e^{-\frac{t}{C(R_0 + R_1)}} \right)$
3. $u_{AB}(t) = E_0$

Exercice 12 - Soit le circuit de la figure 3.1.21 où l'interrupteur K est initialement ouvert et l'inductance L est initialement non traversée par un courant.

1. K étant ouvert, déterminer l'équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit.
2. En $t = 0$, on ferme K , déterminer l'expression de la tension $u_{AB}(t)$. Ce problème est beaucoup plus simple à résoudre en utilisant le résultat de l'étape 1.

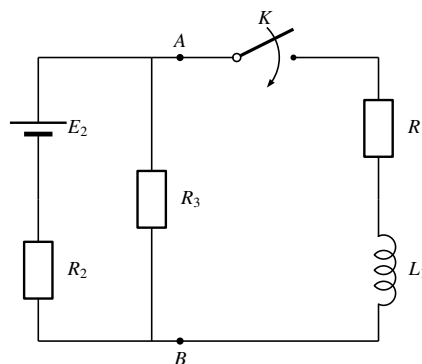


FIGURE 3.1.21 – Exercice 12

Réponses

1. $R_0 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ et $E_0 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_2$
2. $u_{AB}(t) = \frac{E_0}{R_0 + R_1} \left(R_1 + R_0 e^{-\frac{R_0 + R_1}{L_1} t} \right)$

Exercice 13 - Soit le circuit de la figure 3.1.19 où l'interrupteur K est fermé en $t = 0$ et la capacité C est initialement non chargée. Déterminer l'expression analytique de la tension $u_R(t)$ après fermeture de l'interrupteur lorsque $u(t) = 0,2t$ pour $0 \leq t < T = 5\tau$ et $u(t) = 1$ V pour $t \geq T$ ($\tau = RC = 1$ s).

Réponse

$$u_R(t) = 0,2(1 - e^{-t}) \text{ pour } 0 \leq t < T$$

$$u_R(t) = 0,2 e^{-(t-5)} \text{ pour } t \geq T$$

Exercice 14 - La figure 3.1.22 représente un circuit constitué d'une source E , d'une résistance R , d'un interrupteur et d'une inductance L . En $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Calculez l'expression du courant $i(t)$ ($\forall t$).
2. Si $R = 1 \Omega$, pour quelle valeur de l'inductance L obtient-on un courant $i(t)$ valant la moitié de sa valeur de régime après un temps de 1 ms ?

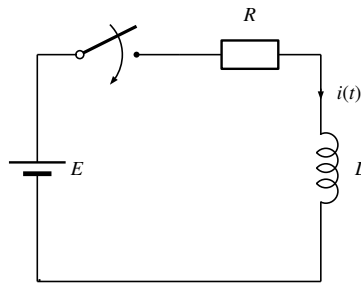


FIGURE 3.1.22 – Exercice 14

Réponses

1. $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$
2. $L = 1,44$ mH

Exercice 15 - Soit le circuit représenté à la figure 3.1.23. La capacité est initialement non chargée. Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur S_1 . A quel instant t' , le courant passant dans R_1 est égal au courant passant dans R_2 ($i_1(t') = i_2(t')$) ? On donne $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ et $E = 10$ V.

Réponse

$$t' = 6,9 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Exercice 16 - Soit le circuit de la figure 3.1.24. L'interrupteur est ouvert depuis un temps infini. On le ferme en $t = 0$.

1. Déterminez un système d'équations (deux équations, deux inconnues) qui permettrait de calculer les transformées de Laplace de $i_1(t)$ et $i_2(t)$, en faisant apparaître les conditions initiales.

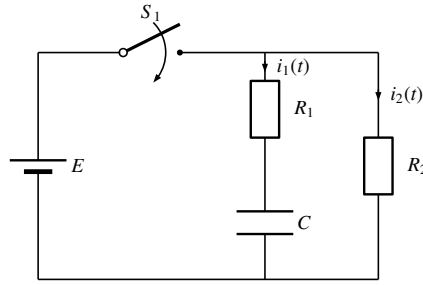


FIGURE 3.1.23 – Exercice 15

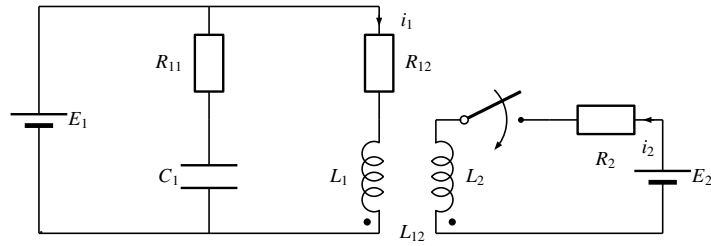


FIGURE 3.1.24 – Exercice 16

2. Que valent i_1 et i_2 en régime ?

Réponses

1. $\frac{E_1}{p} = (R_{12} + pL_1)I_1(p) + pL_{12}I_2(p) - \frac{L_1}{R_{12}}E_1$, $\frac{E_2}{p} = pL_{12}I_1(p) + (R_2 + pL_2)I_2(p) - \frac{L_{12}}{R_{12}}E_1$
2. $i_1 = \frac{E_1}{R_{12}}$ A et $i_2 = \frac{E_2}{E_2}$ A

Exercice 17 - Soit le circuit de la figure 3.1.25 alimenté par une tension en forme de rampe ($e(t) = 2t$). L'interrupteur K est initialement ouvert et la capacité C_1 est initialement non chargée. En $t = 0$, on ferme K , déterminer l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes de C_1 .

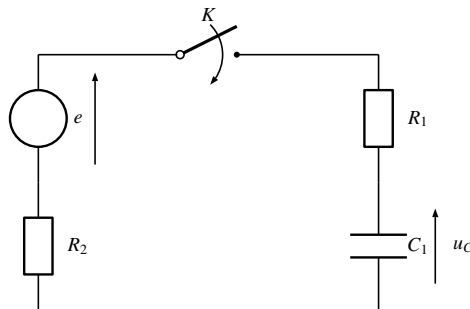


FIGURE 3.1.25 – Exercice 17

Réponse

$$u_C(t) = 2\tau \left(\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \text{ pour } t > 0 \text{ et avec } \tau = (R_1 + R_2)C_1$$

Exercice 18 - Soit le circuit de la figure 3.1.26 où l'interrupteur K est initialement ouvert, l'inductance L est initialement non traversée par un courant et la source $e(t)$ est triangulaire de durée T et d'amplitude maximale V_0 .

1. K étant ouvert, déterminer l'équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit.
2. En $t = 0$, on ferme K . Déterminer l'expression de la tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance L . Ce problème est beaucoup plus simple à résoudre en utilisant le résultat de l'étape 1 et par la transformée de Laplace.

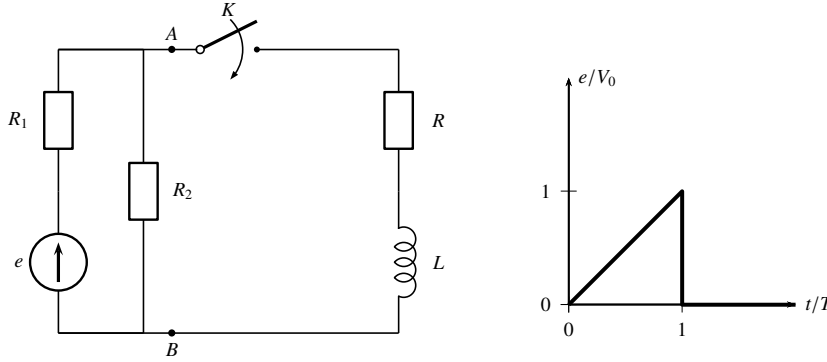


FIGURE 3.1.26 – Exercice 18

Réponses

1. $e_{th} = \frac{R_2}{R_1+R_2}e(t)$ et $R_{th} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$
2. $u_L(t) = u_{L1}(t) + u_{L2}(t) + u_{L3}(t)$ avec :
 $u_{L1}(t) = \frac{LR_2}{R_1+R_2} \frac{V_0}{T} \frac{1}{R'} \left(1 - e^{-\frac{R'}{L}t}\right)$ définie sur $t > 0$
 $u_{L2}(t) = -\frac{LR_2}{R_1+R_2} \frac{V_0}{T} \frac{1}{R'} \left(1 - e^{-\frac{R'}{L}(t-T)}\right)$ pour $t > T$ et $u_{L2}(t) = 0$ pour $t < T$
 $u_{L3}(t) = -\frac{R_2}{R_1+R_2} V_0 e^{-\frac{R'}{L}(t-T)}$ pour $t > T$ et $u_{L3}(t) = 0$ pour $t < T$
 $R' = R_{th} + R$

3.2 Résolution de circuits en régime sinusoïdal

3.2.1 Rappels

Substitut complexe

Soit une fonction sinusoïdale $x(t)$:

$$x(t) = X \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_x) = \operatorname{Re} \left[X \sqrt{2} e^{j(\omega t + \theta_x)} \right]$$

Si $x(t)$ représente un courant ou une tension, X en est la valeur efficace. Le substitut complexe tel qu'utilisé dans les exercices s'exprime par :

$$\underline{X} = X e^{j\theta_x}$$

Déphasage de la tension sur le courant

Soient une tension et un courant :

$$\underline{U} = U e^{j\theta_u} \quad \underline{I} = I e^{j\theta_i}$$

Le déphasage φ de la tension sur le courant s'écrit (voir figure 3.2.1) :

$$\varphi = \theta_u - \theta_i$$

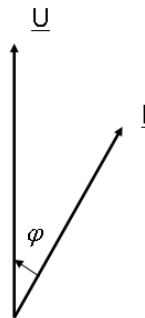


FIGURE 3.2.1 – Déphasage de la tension sur le courant

Si l'on dit qu'une tension \underline{U}_1 est en avant de φ sur une tension \underline{U}_2 , cela signifie (voir figure 3.2.2) :

$$\underline{U}_1 = e^{j\varphi} \underline{U}_2$$

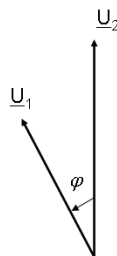


FIGURE 3.2.2 – \underline{U}_1 est en avant de φ sur \underline{U}_2

Equation d'une branche en régime sinusoïdal

Considérons la branche représentée à la figure 3.2.3. L'équation complexe de la branche s'écrit :

$$\underline{U} = \underline{E} + R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$$

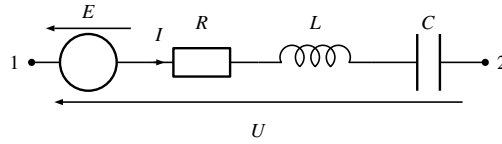


FIGURE 3.2.3 – Equation complexe d'une branche en régime sinusoïdale

Puissance complexe

La puissance complexe de la branche de la figure 3.2.4 s'exprime par :

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$$

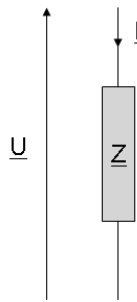


FIGURE 3.2.4 – Puissance complexe

Les puissances active (P) et réactive (S) s'écrivent :

$$P = \text{Re}[\underline{S}] = UI \cos \varphi \quad Q = \text{Im}[\underline{S}] = UI \sin \varphi$$

avec

$$\varphi = \theta_u - \theta_i$$

3.2.2 Exercices résolus

Exercice R1 - On considère le réseau représenté à la figure 3.2.5 dans lequel e est une force électromotrice sinusoïdale de valeur efficace 210 V et de fréquence 50 Hz. On donne :

$$R = 4 \, \Omega \quad R_1 = 1 \, \Omega \quad \omega L_1 = 3 \, \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = 1 \, \Omega$$

On demande :

1. la valeur efficace du courant i_1 ,
2. son déphasage sur le courant i_2 ,
3. les puissances active et réactive de la source.

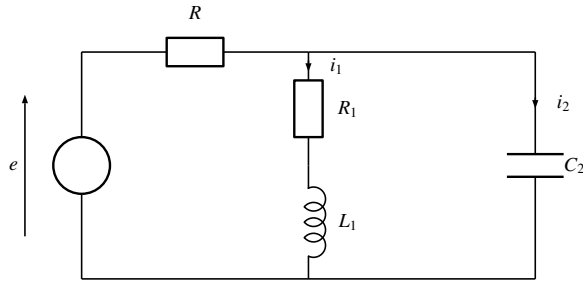


FIGURE 3.2.5 – Exercice R1 (1)

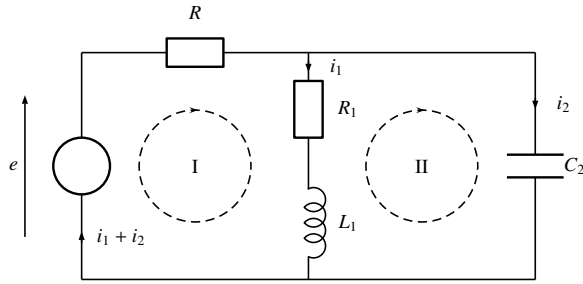


FIGURE 3.2.6 – Exercice R1 (2)

Solution

1. Considérons les mailles I et II indiquées sur la figure 3.2.6 et écrivons les équations :

$$\begin{array}{ll} \text{Maille I} & \underline{E} = R(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 \\ \text{Maille II} & 0 = -(R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + \frac{1}{j\omega C_2} \underline{I}_2 \end{array}$$

La deuxième équation donne \underline{I}_2 en fonction de \underline{I}_1 :

$$\underline{I}_2 = [j\omega R_1 C_2 - \omega^2 L_1 C_2] \underline{I}_1$$

c'est à dire, après avoir pris en compte les données numériques :

$$\underline{I}_2 = (j - 3) \underline{I}_1$$

En injectant cette dernière relation dans l'équation de la maille I, on obtient :

$$\underline{E} = (-7 + 7j) \underline{I}_1$$

On trouve ainsi :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{-7 + 7j} = \frac{210}{-7 + 7j} = 21,21 e^{-j135^\circ}$$

La valeur efficace vaut alors :

$$\boxed{I_1 = 21,21 \text{ A}}$$

2. On a :

$$\underline{I}_2 = (j - 3) \underline{I}_1 = 210 \frac{j - 3}{-7 + 7j} = 67,08 e^{j26,57^\circ}$$

Dès lors, le déphasage demandé vaut :

$$\Delta\varphi = \theta_{i1} - \theta_{i2} = -135 - 26,57^\circ$$

ce qui donne :

$$\boxed{\Delta\varphi = -161,57^\circ}$$

3. La puissance complexe de la source vaut (voir figure 3.2.7) :

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

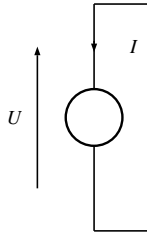


FIGURE 3.2.7 – Exercice R1 (3)

On a :

$$\underline{U} = \underline{E} \quad \underline{I} = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

Le calcul de $\underline{I}_1 + \underline{I}_2$ donne $47,43 e^{j18,43^\circ}$. Dès lors :

$$\underline{S} = 210 \times (-47,43 e^{-j18,43^\circ})$$

Et on trouve finalement :

$$P = \operatorname{Re}[\underline{S}] = -9450 \text{ W}$$

et

$$Q = \operatorname{Im}[\underline{S}] = 3150 \text{ vars}$$

Exercice R2 - Les forces électromotrices du circuit de la figure 3.2.8 sont sinusoïdales de même fréquence 50 Hz et de valeurs efficaces respectivement égales à 220 V et 210 V. e_2 est déphasé de 30° en arrière sur e_1 .

1. Ecrivez les équations qui permettraient de calculer les valeurs complexes des courants i_1 et i_2 .
2. Les solutions de ce système sont $\underline{I}_1 = 2,368 e^{j2^\circ}$ et $\underline{I}_2 = 2,21 e^{j166,7^\circ}$ (pour une phase initiale de e_1 nulle). Représentez \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{E}_1 et \underline{E}_2 dans le plan complexe.
3. Calculez les puissances active et réactive de la branche 11' et 22'.

On donne :

$$R_1 = 10 \Omega$$

$$L_2 = 0,1 \text{ H}$$

$$R = 50 \Omega$$

$$C = 10 \mu\text{F}$$

$$L_1 = 0,05 \text{ H}$$

Solution

1. Considérons les mailles I et II indiquées sur la figure 3.2.9 et écrivons en les équations :

$$\text{Maille I} \quad \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_2$$

$$\text{Maille II} \quad \underline{E}_2 = R(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \frac{1}{j\omega C}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + j\omega L_2 \underline{I}_2$$

c'est à dire :

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_2$$

et

$$\underline{E}_2 = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I}_1 + \left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2 \right) \underline{I}_2$$

2. La figure 3.2.10 représente \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{E}_1 et \underline{E}_2 sur le plan complexe.

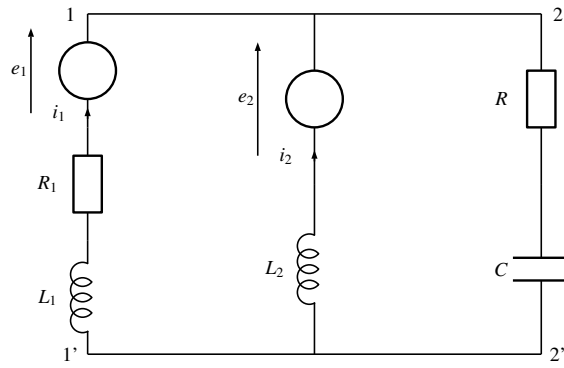


FIGURE 3.2.8 – Exercice R2 (1)

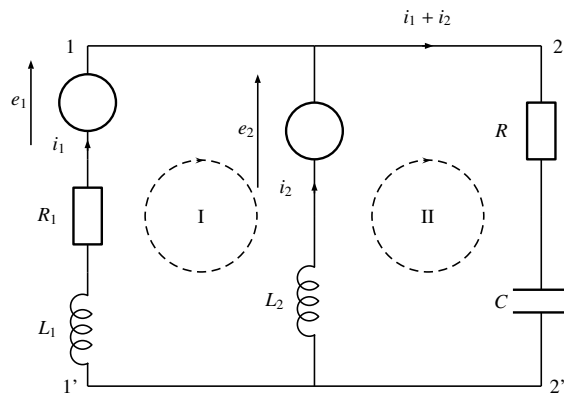


FIGURE 3.2.9 – Exercice R2 (2)

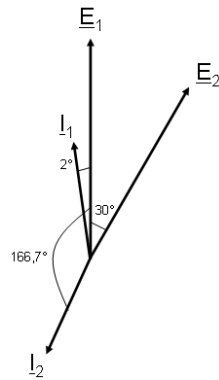


FIGURE 3.2.10 – Exercice R2 (3)

3. La puissance complexe de la branche 11' s'exprime par (figure 3.2.11) :

$$\underline{S}_{11'} = \underline{U}_{11'} \underline{I}_{11'}^*$$

avec, en tenant compte des valeurs numériques :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{11'} &= \underline{E}_1 + (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_{11'} \\ &= \underline{E}_1 - (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 \\ &= 201,24 e^{-j10,88^\circ} \end{aligned}$$

et

$$\underline{I}_{11'} = -\underline{I}_1 = -2,368 e^{j2^\circ}$$

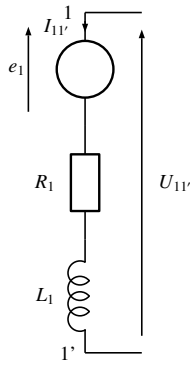


FIGURE 3.2.11 – Exercice R2 (4)

Dès lors :

$$P_{11'} = \operatorname{Re}[\underline{S}] = \operatorname{Re}\left[201,24 e^{-j10,88^\circ} \times (-2,368) e^{-j2^\circ}\right]$$

ce qui donne :

$$P_{11'} = -464,57 \text{ W}$$

Le calcul de la puissance réactive donne :

$$Q_{11'} = \operatorname{Im}[\underline{S}] = \operatorname{Im}\left[201,24 e^{-j10,88^\circ} \times (-2,368) e^{-j2^\circ}\right]$$

ce qui donne :

$$Q_{11'} = 106,23 \text{ vars}$$

La puissance complexe de la branche 22' s'exprime par (figure 3.2.12) :

$$\underline{S}_{22'} = \underline{U}_{22'} \underline{I}_{22'}^*$$

avec, en tenant compte des valeurs numériques :

$$\underline{U}_{22'} = \underline{U}_{11'} = 201,24 e^{-j10,88^\circ}$$

et

$$\underline{I}_{22'} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0,63 e^{j69,94^\circ}$$

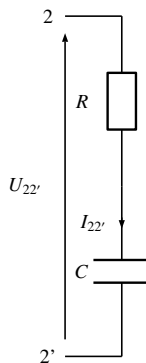


FIGURE 3.2.12 – Exercice R2 (5)

On trouve dès lors :

$$P_{22'} = 19,82 \text{ W}$$

et

$$Q_{22'} = -121,43 \text{ vars}$$

3.2.3 Exercices

Exercice 1 - Deux alternateurs (figure 3.2.13), fournissant des forces électromotrices sinusoïdales de fréquence 50 Hz, sont connectés en parallèle et alimentent une charge constituée d'une résistance R . Soit e_1 et e_2 les forces électromotrices de ces alternateurs, et L_1 et L_2 leurs inductances propres de dispersion (les résistances internes sont négligeables). On sait que e_1 a pour valeur efficace 220 V et que e_2 a pour valeur efficace 219,5 V et est déphasé de $2,5^\circ$ en arrière sur e_1 . D'autre part : $R = 9 \Omega$, $L_1 = 10$ mH et $L_2 = 8$ mH. On demande :

1. la valeur efficace du courant i dans la charge et les déphasages de ce courant sur e_1 et sur e_2 ,
2. la valeur efficace de la tension aux bornes de la charge et la puissance active de cette dernière.

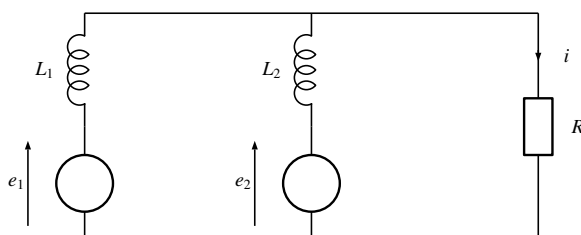


FIGURE 3.2.13 – Exercice 1

Réponses

1. $I = 24,09$ A, déphasage sur e_1 : $-10,18^\circ$, déphasage sur e_2 : $-7,68^\circ$
2. $U = 216,81$ V et $P = 5223$ W

Exercice 2 - L'interrupteur K du montage représenté à la figure 3.2.14 est fermé depuis un temps infini en position 1. A l'instant choisi comme instant zéro, on ferme l'interrupteur K en position 2. Que vaut la transformée de Laplace du courant i ? Mettre cette transformée sous la forme du quotient de deux polynômes en p . On donne :

$$e_0(t) = E_0 \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_0)$$

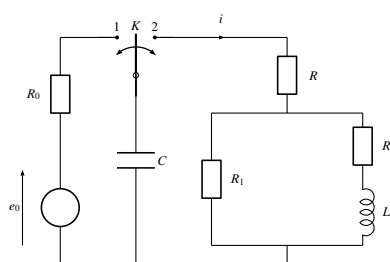


FIGURE 3.2.14 – Exercice 2

Réponse

$$I(p) = \frac{CE_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1+(\omega CR_0)^2}} \cos[\theta_0 - \arctan(\omega CR_0)] \frac{pL_2 + R_1 + R_2}{p^2(L_2 RC + L_2 R_1 C) + p(L_2 + RR_1 C + RR_2 C + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}$$

Exercice 3 - Les forces électromotrices de la figure 3.2.15 sont sinusoïdales de même fréquence 50 Hz et de même valeur efficace 220 V. e_1 est déphasé de 45° en arrière sur e_2 .

1. Donnez les expressions de \underline{E}_1 et \underline{E}_2 .
2. Ecrivez les équations qui permettraient de calculer les valeurs complexes des courants i_1 , i_2 et i_6 .

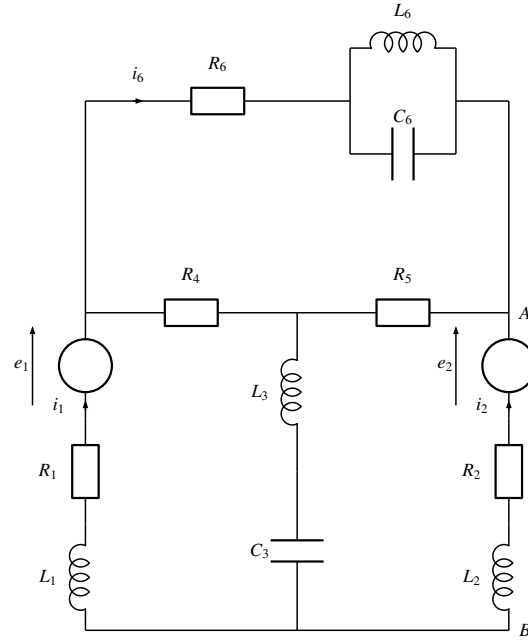


FIGURE 3.2.15 – Exercice 3

3. Soient $\underline{L}_2 = 1 + 2j$ (pour une phase initiale de e_1 nulle), $R_2 = 10 \Omega$ et $L_2 = 0,1 \text{ H}$. Calculez les puissances active et réactive de la branche AB .

Réponses

1. $\underline{E}_2 = 220$ et $\underline{E}_1 = 220 e^{-j45^\circ}$
2.
$$\begin{cases} \underline{E}_1 = (R_1 + R_4 + j\omega(L_1 + L_3) + \frac{1}{j\omega C_3})\underline{I}_1 + (j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3})\underline{I}_2 - R_4 \underline{I}_6 \\ 0 = -R_4 \underline{I}_1 + R_5 \underline{I}_2 + (R_4 + R_5 + R_6 + \frac{j\omega L_6}{1 - \omega^2 L_6 C_6})\underline{I}_6 \\ \underline{E}_2 = (j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3})\underline{I}_1 + (R_2 + R_5 + j\omega(L_2 + L_3) + \frac{1}{j\omega C_3})\underline{I}_2 + R_5 \underline{I}_6 \end{cases}$$
3. $P = -417,42 \text{ W}$ et $Q = 313,18 \text{ vars}$

Exercice 4 - Les forces électromotrices de la figure 3.2.16 sont sinusoïdales de même fréquence. On suppose connus : $\underline{E}_1, \underline{E}_3, \omega, R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, L_3, L_{23}$ et C_3 . Ecrivez un système d'équations qui permettrait de calculer les valeurs complexes \underline{I}_1 et \underline{I}_3 .

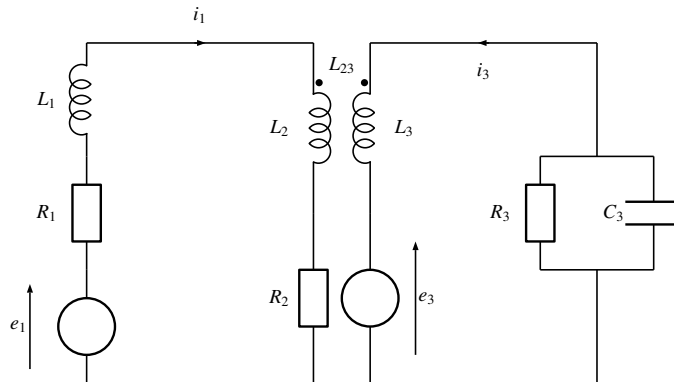


FIGURE 3.2.16 – Exercice 4

Réponse

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)]\underline{I}_1 + j\omega L_{23}\underline{I}_3 \\ -\underline{E}_3 = \left[\frac{R_3}{1+\omega^2 R_3^2 C_3^2} + j\left(\omega L_3 - \frac{\omega R_3^2 C_3}{1+\omega^2 R_3^2 C_3^2} \right) \right] \underline{I}_3 + j\omega L_{23}\underline{I}_1 \end{cases}$$

Exercice 5 - Les forces électromotrices de la figure 3.2.17 sont sinusoïdales de même fréquence. On suppose connus : \underline{E}_1 , \underline{E}_3 , f , R_1 , R_2 , R_3 , L_1 et C_3 .

1. Ecrivez le système d'équations qui permettrait de calculer les valeurs complexes \underline{I}_1 et \underline{I}_3 .
2. Supposons que $\underline{E}_3 = 220 \text{ V}$, $R_3 = 1000 \Omega$, $C_3 = 1 \mu\text{F}$, $f = 50 \text{ Hz}$ et que la résolution du système d'équations du point 1 ait donné : $\underline{I}_1 = -0,2 + 0,2j$ et $\underline{I}_3 = 0,2 - 0,3j$ (en ampères).
 - (a) Calculez la puissance complexe de la branche $e_3 - R_3 - C_3$. En déduire les puissances active et réactive.
 - (b) Calculez les valeurs efficaces de i_1 et de i_3 .
 - (c) Calculez, en grandeur et en signe, le déphasage de i_1 par rapport à i_3 .

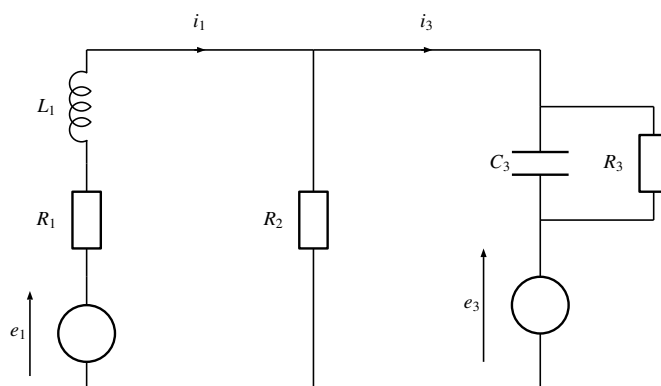


FIGURE 3.2.17 – Exercice 5

Réponses

1.
$$\begin{cases} \underline{E}_1 = (R_1 + R_2 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - R_2\underline{I}_3 \\ \underline{E}_3 = R_2\underline{I}_1 - \left(R_2 + \frac{R_3}{1+j\omega R_3 C_3} \right) \underline{I}_3 \end{cases}$$
2. (a) $P = 162,07 \text{ W}$ et $Q = 28,78 \text{ vars}$
 (b) $I_1 = 0,28 \text{ A}$ et $I_3 = 0,36 \text{ A}$
 (c) $\Delta\varphi = 191,31^\circ$

Exercice 6 - La tension e_1 du circuit représenté à la figure 3.2.18 est sinusoïdale de fréquence 1000 Hz et de valeur efficace 20 V . Les éléments valent respectivement $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $L_{12} = 5 \text{ mH}$, $R_2 = 10 \Omega$ et $C_2 = 1 \mu\text{F}$.

1. Déterminez le déphasage de i_1 sur i_2 .
2. Calculez la puissance complexe de la branche $R_2 - C_2$. En déduire les puissances active et réactive ainsi que le $\cos \varphi$ de cette branche ;

Réponses

1. $\Delta\varphi = -163,71^\circ$
2. $\underline{S} = 3,13 \cdot 10^{-3} - 4,99 \cdot 10^{-2}j$, $P = 3,13 \cdot 10^{-3} \text{ W}$, $Q = -4,99 \cdot 10^{-2} \text{ vars}$ et $\cos \varphi = 6,28 \cdot 10^{-2}$

Exercice 7 - On enclenche au temps $t = 0$ l'interrupteur du circuit représenté à la figure 3.2.19. On donne $e(t) = E \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_u)$. Déterminez l'évolution du courant $i(t)$.

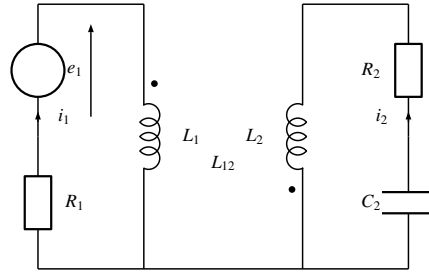


FIGURE 3.2.18 – Exercice 6

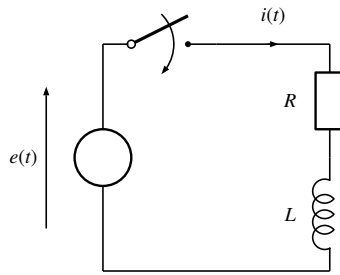


FIGURE 3.2.19 – Exercice 7

Réponse

$$i(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[\cos(\omega t + \theta_u - \arctan \omega \tau) - \cos(\theta_u - \arctan \omega \tau) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Exercice 8 - Soit le circuit indiqué à la figure 3.2.20. Les tensions e_1 , e_2 et e_3 sont sinusoïdales de fréquence 150 Hz et de valeur efficace 20 V. e_2 est déphasé de 60° en arrière par rapport à e_1 et e_3 est déphasé de 15° en arrière par rapport à e_2 . Les éléments valent respectivement $R_2 = 10\Omega$, $R_1 = 50\Omega$, $L_3 = 10\text{mH}$ et $C_1 = 10\mu\text{F}$.

1. Etablissez un système d'équations qui permet de trouver \underline{I}_1 et \underline{I}_2 ;
2. Calculez \underline{I}_1 et \underline{I}_2 ;
3. Déterminez le déphasage de i_1 sur i_2 ;
4. Calculez la puissance complexe de la branche AB (branche centrale).

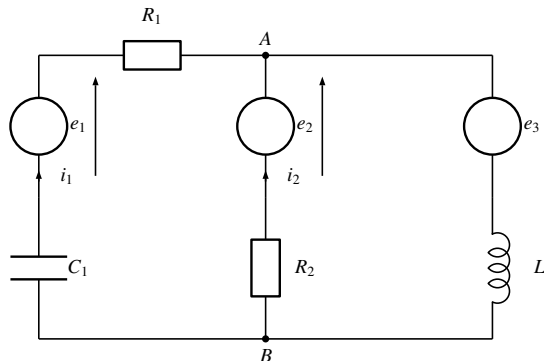


FIGURE 3.2.20 – Exercice 8

Réponses

1. $\begin{cases} \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})\underline{I}_1 - R_2\underline{I}_2 \\ \underline{E}_2 - \underline{E}_3 = (R_2 + j\omega L_3)\underline{I}_2 + j\omega L_3\underline{I}_1 \end{cases}$
2. $\underline{I}_1 = 0,1822 e^{j111,27^\circ}$ et $\underline{I}_2 = 0,5049 e^{-j21,11^\circ}$
3. $\Delta\varphi = 132,38^\circ$
4. $\underline{S}_{AB} = 8,2701 e^{j129,95^\circ}$

Exercice 9 - Déterminez les puissances active et réactive de la source e_2 , sachant que les deux tensions valent 220 V et que e_2 est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ en avant sur e_1 (figure 3.2.21).

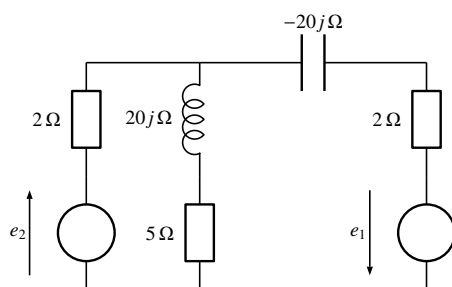


FIGURE 3.2.21 – Exercice 9

Réponse

$P = -3099,3 \text{ W}$ et $Q = -129,9 \text{ vars}$

Exercice 10 - Dans le réseau de la figure 3.2.22, e_1 , e_2 et e_3 sont des forces électromotrices sinusoïdales de fréquence 50 Hz, de valeurs efficaces égales à 220 V ; e_2 est déphasé de $\frac{2\pi}{3}$ en arrière sur e_1 et e_3 est déphasé de $\frac{2\pi}{3}$ en arrière sur e_2 . De plus $R = 5 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $L = 64 \text{ mH}$ et $C = 318 \mu\text{F}$. On demande de déterminer :

1. la valeur efficace du courant i ,
2. les puissances active et réactive fournies par la source e_1 ,
3. les puissances active et réactive reçues par la branche AB.

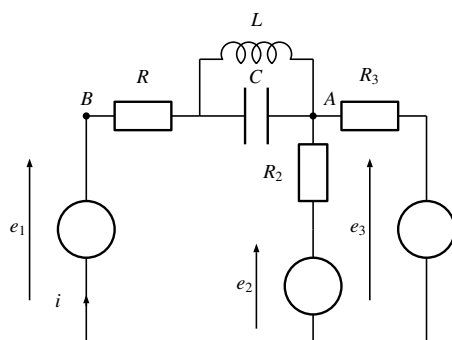


FIGURE 3.2.22 – Exercice 10

Réponses

1. $I_1 = 12,65 \text{ A}$
2. $P = 2033,73 \text{ W}$ et $Q = -1899,78 \text{ vars}$

3. $P = 800,5 \text{ W}$ et $Q = -3201,06 \text{ vars}$

Exercice 11 - Dans le réseau de la figure 3.2.23, les forces électromotrices e_1 et e_2 sont sinusoïdales et de fréquence 1000 Hz. e_1 a pour valeur efficace 50 V et e_2 , 5 V. e_2 est déphasé de 45° en arrière sur e_1 . On demande d'établir les équations qui permettraient de calculer les valeurs complexes des courants i_1 , i_2 et i_4 . On donne :

$$R_1 = 20 \Omega$$

$$R_2 = 10 \Omega$$

$$R_3 = 1000 \Omega$$

$$R_5 = 30 \Omega$$

$$R_6 = 500 \Omega$$

$$C_4 = 1 \mu\text{F}$$

$$L_5 = 0,2 \text{ H}$$

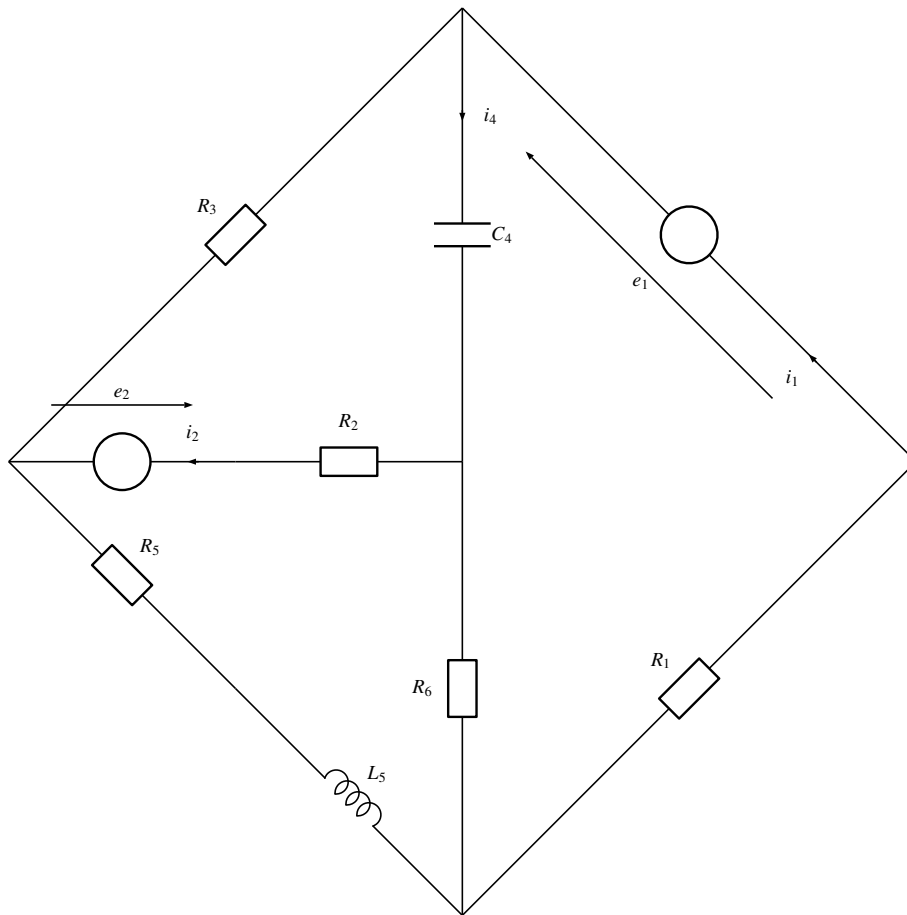


FIGURE 3.2.23 – Exercice 11

Réponse

$$\begin{cases} -R_3 \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2 + \left(R_3 - \frac{j}{\omega C_4}\right) \underline{I}_4 = -\underline{E}_2 \\ -(R_5 + j\omega L_5) \underline{I}_1 - (R_2 + R_5 + R_6 + j\omega L_5) \underline{I}_2 + (R_5 + R_6 + j\omega L_5) \underline{I}_4 = \underline{E}_2 \\ R_1 \underline{I}_1 - R_6 \underline{I}_2 + \left(R_6 - \frac{j}{\omega C_4}\right) \underline{I}_4 = \underline{E}_1 \end{cases}$$

Exercice 12 - Soit le circuit représenté à la figure 3.2.24 où l'interrupteur K est ouvert en $t = 0$. Déterminez l'expression analytique du courant $i(t)$ après ouverture de l'interrupteur lorsque $u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_u)$.

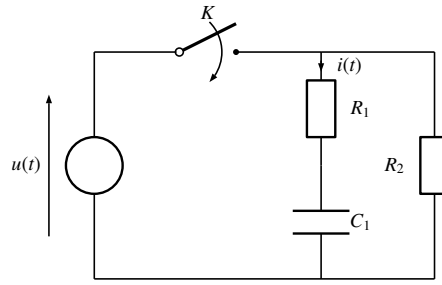


FIGURE 3.2.24 – Exercice 12

Réponses

$$i(t) = \frac{U\sqrt{2}}{(R_1+R_2)\sqrt{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2}} \cos\left(\theta_u - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{-1}{\omega R_1 C_1}\right)\right) e^{\frac{-t}{(R_1+R_2)C_1}}$$

Exercice 13 - Soit le circuit de la figure 3.2.25 où l'interrupteur K est fermé en $t = 0$. Déterminez l'expression analytique du courant $i(t)$ après fermeture de l'interrupteur lorsque $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_u)$.

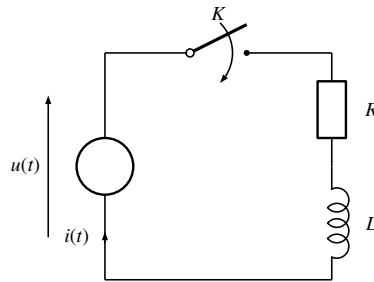


FIGURE 3.2.25 – Exercice 13

Réponse

$$i(t) = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[\cos\left(\omega t + \theta_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) - \cos\left(\theta_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

Exercice 14 - Considérez le circuit de la figure 3.2.26.

1. La force électromotrice est sinusoïdale de fréquence f et de valeur efficace E . On suppose que L_1 , R , C_1 et C_2 sont connus. Considérons tout d'abord l'interrupteur fermé (il l'est depuis un temps infini), écrivez le système d'équations qui permettrait de calculer les valeurs complexes \underline{I}_1 et \underline{I}_2 .
2. Supposons $E = 100$ V, $f = 75$ Hz, $L_1 = 10$ mH, $R = 1$ k Ω , $C_1 = 10$ μ F, $C_2 = 20$ μ F et que la résolution du système d'équations du point 1 ait donné $\underline{I}_1 = 0,0658 + 0,0046j$ et $\underline{I}_2 = 0,0436 + 0,3219j$ (en ampères).
 - (a) Calculez la puissance complexe de la branche $L_1 - C_1$. En déduire les puissances active et réactive.
 - (b) Calculez les valeurs efficaces de i_1 et de i_2 .
 - (c) Calculez, en grandeur et en signe, le déphasage de i_1 par rapport à i_2 .
3. Supposons que l'on ouvre l'interrupteur à l'instant $t = 0$, donnez un système d'équation en p qui permettrait de calculer l'expression analytique du courant $i(t)$. Quelles sont les conditions initiales à prendre en compte ? Donnez-en les valeurs. On donne $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$.

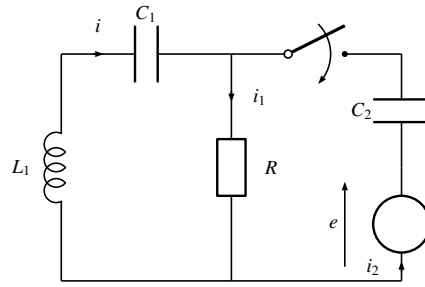


FIGURE 3.2.26 – Exercice 14

Réponses

1.
$$\begin{cases} 0 = (j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R)I_1 - (j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1})I_2 \\ E = RI_1 + \frac{1}{j\omega C_2}I_2 \end{cases}$$
2. (a) $\underline{S} = 0 - 20,9926j$, $P = 0$ W et $Q = -20,9926$ Vars
 (b) $I_1 = 0,0660$ A_{eff} et $I_2 = 0,3219$ A_{eff}
 (c) $\Delta\phi = -78,2875^\circ$
3.
$$\begin{cases} Li(0) = (R + pL)I(p) - U_{C_1}(p) \\ Cu_{C_1}(0) = I(p) + pC_1U_{C_1}(p) \end{cases}$$

 où u_{C_1} est la tension aux bornes de la capacité C_1 , prise dans les sens \rightarrow . Les conditions initiales sont :
 $i(0) = 0,0314$ A et $u_{C_1}(0) = 95,2234$ V.

Exercice 15 - Les forces électromotrices de la figure 3.2.27 sont sinusoïdales de fréquences identiques. Que vaut le déphasage de la tension u sur le courant i ? Justifiez brièvement votre réponse.

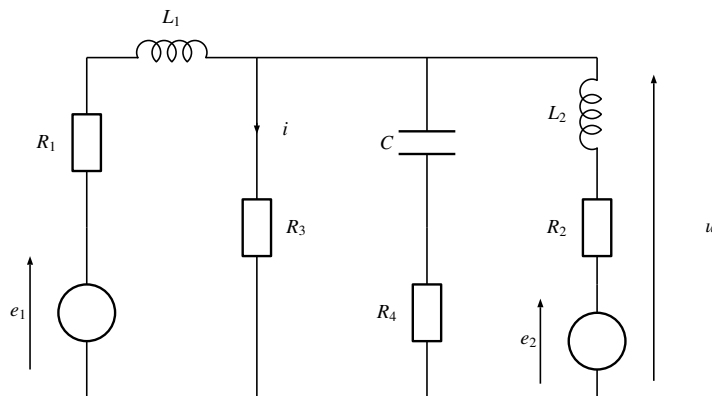


FIGURE 3.2.27 – Exercice 15

Réponse

$\Delta\phi = 0$ car $u(t) = R_3 i(t)$ avec R_3 réel.

Exercice 16 - Soit un circuit RC série alimenté par une tension sinusoïdale. Si \underline{V}_e , \underline{V}_c , \underline{V}_r et \underline{I} sont respectivement les substituts complexes des tensions à l'entrée du circuit, aux bornes de C , aux bornes de R et du courant, quelle(s) affirmation(s) suivante(s) est (sont) toujours vraie(s)? Justifier.

1. Le courant \underline{I} est en avance sur la tension \underline{V}_e
2. Le courant \underline{I} est en retard sur la tension \underline{V}_c

3. Le courant \underline{I} est en phase avec la tension \underline{V}_r
4. Le quotient $\underline{V}_c/\underline{V}_e$ est un filtre passe-bas
5. Le quotient $\underline{V}_c/\underline{V}_e$ est un filtre passe-haut
6. Le quotient $\underline{V}_c/\underline{V}_r$ est un intégrateur

Réponses

1, 3, 4 et 6

Exercice 17 - Soit un circuit RL série alimenté par une tension sinusoïdale. Si \underline{V}_e , \underline{V}_L , \underline{V}_R et \underline{I} sont respectivement les substituts complexes des tensions à l'entrée du circuit, aux bornes de L , aux bornes de R et du courant, quelle(s) affirmation(s) suivante(s) est (sont) toujours vraie(s) ? Justifier.

1. Le courant \underline{I} est en avance sur la tension \underline{V}_e
2. Le courant \underline{I} est en retard sur la tension \underline{V}_L
3. Le courant \underline{I} est en phase avec la tension \underline{V}_R
4. Le quotient $\underline{V}_L/\underline{V}_e$ est un filtre passe-bas
5. Le quotient $\underline{V}_R/\underline{V}_e$ est un filtre passe-haut
6. Le quotient $\underline{V}_L/\underline{V}_R$ est un dérivateur

Réponses

2, 3 et 6

Exercice 18 - Soit le circuit de la figure 3.2.28 alimenté par une tension cosinusoidale de phase initiale nulle et de 50 Hz. L'interrupteur K est initialement ouvert et la capacité C_1 est initialement non chargée.

1. K étant ouvert, déterminer l'équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit.
2. En $t = 0$, on ferme K , déterminer l'expression de la tension $u_{CB}(t)$. Ce problème est beaucoup plus simple à résoudre en utilisant le résultat de l'étape 1.

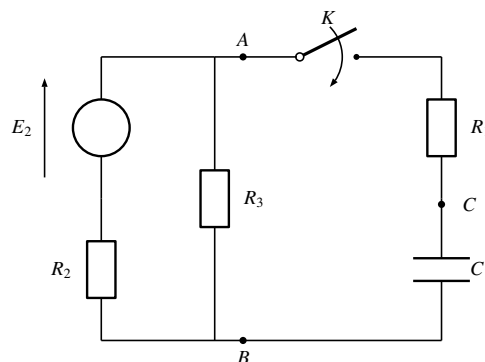


FIGURE 3.2.28 – Exercice 13

Réponses

1. $R_0 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ et $\underline{E}_0 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \underline{E}_2$
2. $u_{CB}(t) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{E_2 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \left[\cos(\omega t - \arctan \omega \tau) - \cos(\arctan \omega \tau) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$ avec $\tau = (R_1 + R_0)C_1$ et $\omega = 100\pi$.

Exercice 19 - Soit le circuit indiqué à la figure 3.2.29. Les tensions e_1 , e_2 et e_3 sont sinusoïdales de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 220 V. e_2 est déphasé de 45° en arrière par rapport à e_1 et e_3 est déphasé de 25° en arrière par rapport à e_2 . Les éléments valent respectivement $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $L = 10\text{mH}$ et $C = 10\mu\text{F}$. Montrer

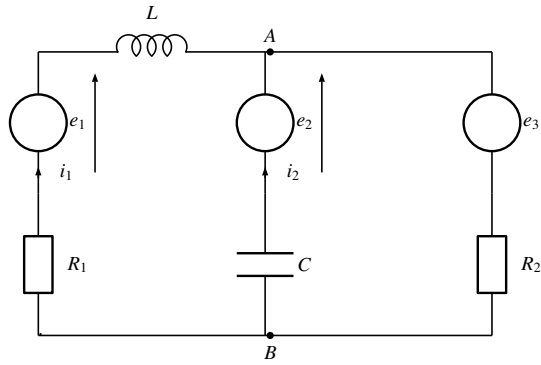


FIGURE 3.2.29 – Exercice 19

que $\underline{L}_1 = 2,3 + 3,5j$ et $\underline{L}_2 = 0,4 - 0,2j$ (référence e_1). Déterminer le déphasage de i_1 sur i_2 et calculer la puissance complexe de la branche AB (branche centrale).

Réponse

$$\Delta\phi = 83,26^\circ \text{ et } \underline{S}_{AB} = -93,34 - 32,55j.$$

Exercice 20 - La figure 3.2.30 représente un circuit constitué par une source de force électromotrice $E = 16 \text{ V}$ et de résistance interne $R_s = 1,4 \Omega$, d'un interrupteur et d'une bobine d'un relais caractérisée par une inductance $L = 3 \text{ H}$. Le relais ne s'enclenche qu'à partir du moment où le courant dans la bobine atteint $0,05 \text{ A}$. On donne aussi $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$ and $R_4 = 3 \Omega$.

1. Combien de temps s'écoule-t-il entre la fermeture de l'interrupteur et l'enclenchement du relais ?
2. On remplace maintenant la source continue par une source sinusoïdale de fréquence 50 Hz décrite par :

$$e(t) = 220\sqrt{2} \cos \omega t \quad (3.2.1)$$

En supposant que l'interrupteur est fermé depuis un temps infini, donnez l'expression de $i(t)$, le courant passant dans la résistance R_1 . Que vaut la puissance complexe de la branche A-B contenant l'inductance ?

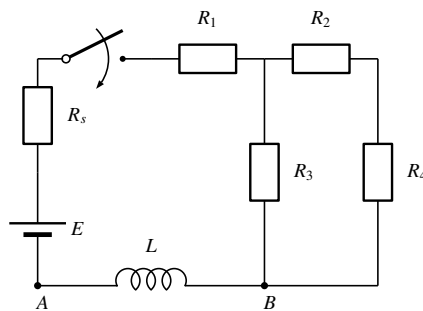


FIGURE 3.2.30 – Exercice 20

Réponses

1. $t = 9,49 \text{ ms}$
2. $i(t) = 0,329 \cos(100\pi t - 89,51^\circ)$ et $\underline{S}_{AB} = 51,166j$.

Exercice 21 - Un circuit RC série est alimenté par une tension sinusoïdale de 1 V et de fréquence 1 kHz ($R = 10 \Omega$ et $C = 7 \text{ nF}$). Calculer le déphasage du courant sur la tension.

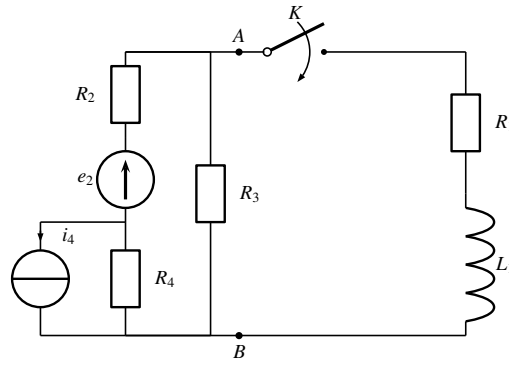


FIGURE 3.2.31 – Exercice 22

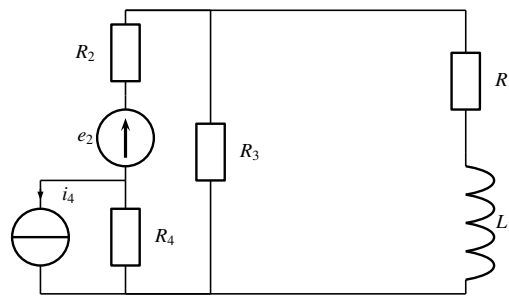


FIGURE 3.2.32 – Exercice 23

Réponse

$$\Delta\phi = 89,97^\circ.$$

Exercice 22 - Soit le circuit de la figure 3.2.31 où l'interrupteur K est initialement ouvert, l'inductance L_1 est initialement non traversée par un courant et les sources $i_4(t)$ et $e_2(t)$ sont sinusoïdales de même fréquence.

1. K étant ouvert, déterminer l'équivalent de Thévenin (\underline{E}_T et R_T) entre les bornes A et B du circuit.
2. Calculer les valeurs de \underline{E}_T et R_T pour $E_2 = 10$ V, $I_4 = 1$ A tous deux de fréquence 1 kHz et si i_4 est déphasé de 30 degrés en retard sur e_2 . On sait aussi que $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\ \Omega$ et $L_1 = 1$ mH.
3. En $t = 0$, on ferme K . Déterminer l'expression de la tension $u_{AB}(t)$. Ce problème est beaucoup plus simple à résoudre en utilisant le résultat de l'étape 1.

Réponses

1. $\underline{E}_T = \frac{R_3}{R_2+R_3+R_4} (\underline{E}_2 - R_4 \underline{I}_4)$ et $R_T = \frac{R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$
2. $\underline{E}_T = 1,7255 e^{j75^\circ}$ et $R_T = \frac{20}{3}\ \Omega$
3. $u_{AB}(t) = E_T \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_T)$

$$- \frac{R_T E_T \sqrt{2}}{\sqrt{(R_T + R_1)^2 + \omega^2 L_1^2}} \left(\cos(\omega t + \theta_T - \arctan \frac{\omega L_1}{R_T + R_1}) - \cos(\theta_T - \arctan \frac{\omega L_1}{R_T + R_1}) e^{-\frac{(R_T + R_1)t}{L_1}} \right)$$
 avec $\underline{E}_T = E_T e^{j\theta_T}$.

Exercice 23 - Soit le circuit de la figure 3.2.32 où les sources $i_4(t)$ et $e_2(t)$ sont sinusoïdales de même fréquence. Calculer la valeur numérique de la puissance complexe de la branche \underline{Z}_1 si \underline{Z}_1 est la mise en série de R_1 et L_1 pour $E_2 = 10$ V, $I_4 = 1$ A tous deux de fréquence 1 kHz et si i_4 est déphasé de 30 degrés en retard sur e_2 . On sait aussi que $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\ \Omega$ et $L_1 = 1$ mH.

Réponse

$$\underline{S}_1 = 0,0939 + 0,0590j$$

Exercice 24 - Soit une tension alternative triangulaire de valeur de crête E et de période T (voir figure 3.2.33).

1. Calculer le facteur de forme.
2. Calculer le facteur de crête.

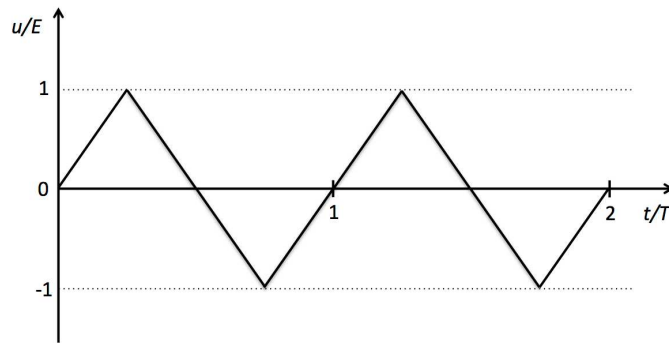


FIGURE 3.2.33 – Exercice 24

Réponses

1. Facteur de forme : $\frac{2}{\sqrt{3}}$
2. Facteur de crête : $\sqrt{3}$

Exercice 25 - Soit une partie d'un circuit opérant en régime sinusoïdal représentée à la figure 3.2.34. Les inductances propres des deux bobines sont données par L_1 et L_2 . L_{12} représente l'inductance mutuelle. Soit $u_{1(2)}$, la différence de potentiel entre les bornes de l'inductance 1(2) égale à $u_{11} + u_{12}(u_{22} + u_{21})$ où $u_{11}(u_{22})$ et $u_{12}(u_{21})$ sont respectivement les composantes dues aux flux propre et mutuel généré par la présence de la bobine 2(1). Par mesure, on trouve que la tension u_{21} est en avance sur la tension u_{12} par un angle θ . Quel est le déphasage du courant i_1 par rapport au courant i_2 ? Justifiez.

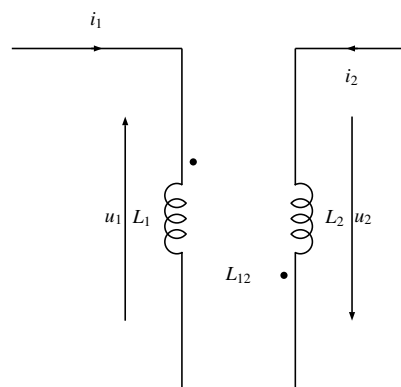


FIGURE 3.2.34 – Exercice 25

Réponse

$$\theta + \pi$$

Exercice 26 - Soit le circuit de la figure 3.2.35 opérant en régime sinusoïdal.

1. Ecrivez sous forme matricielle un système d'équations permettant de déterminer les courants i_1 , i_3 et i_4 .
2. Les valeurs efficaces de e_1 , e_2 et e_4 sont égales à 220 V. e_2 est déphasé de 10 degrés en arrière sur e_1 et e_3 est déphasé de 20 degrés en avant par rapport à e_1 . En utilisant la phase de e_1 comme phase de référence, on trouve (en ampère) $\underline{I}_1 = 1 + j$, $\underline{I}_3 = 3 + 3j$ et $\underline{I}_4 = 4 + 4j$. Si $R_2 = 10 \Omega$, $C_2 = 10 \mu\text{F}$ et la fréquence est de 50 Hz, calculez les puissances active et réactive de la branche $C_2 - R_2 - e_2$.

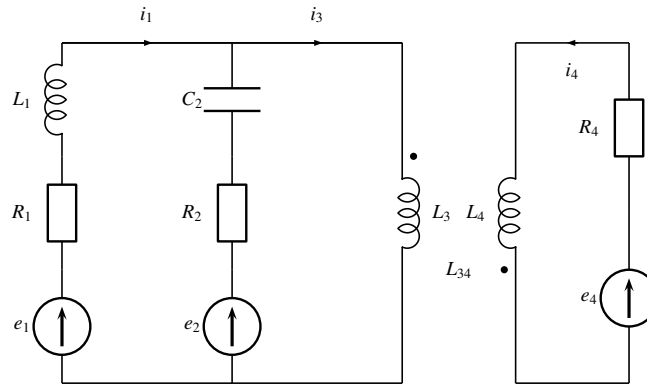


FIGURE 3.2.35 – Exercice 26

Réponses

1.

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2} & -\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & 0 \\ -\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & R_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_2} & -j\omega L_{34} \\ 0 & -j\omega L_{34} & R_4 + j\omega L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ \underline{E}_2 \\ \underline{E}_4 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

2. $P = -276,9 \text{ W}$ et $Q = -2036,8 \text{ Vars}$

Exercice 27 - Soit le circuit de la figure 3.2.36 opérant en régime sinusoïdal (fréquence : 50 Hz). Les valeurs efficaces de e_1 et e_2 sont égales à 220 V. e_2 est déphasé de 20 degrés en avant par rapport à e_1 . On donne $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$ et $L_3 = 2 \text{ mH}$.

1. Déterminez un système d'équations qui permettrait de calculer les substituts complexes de i_1 et i_2 .
2. Soient $\underline{I}_1 = 11,012 - 0,375j \text{ A}$ et $\underline{I}_2 = -10,968 + 0,314j \text{ A}$. Calculez la puissance complexe de la branche $L_3 - R_3$. Que vaut le déphasage du courant sur la tension dans cette même branche ?

Réponses

1. $\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) \underline{I}_1 + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) \underline{I}_2$, $-\underline{E}_2 = \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) \underline{I}_1 + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_3 + j\omega C_3\right) \underline{I}_2$
2. $\Delta\phi = -3,59^\circ$

Exercice 28 - Soit le circuit de la figure 3.2.37 où l'interrupteur K est initialement ouvert, l'inductance L_1 est initialement non traversée par un courant et les sources $i_4(t)$ et $e_2(t)$ sont sinusoïdales de même fréquence. Données : $\underline{E}_2 = 10 + 10j \text{ V}$, $\underline{I}_4 = 1 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$, $L_1 = 1 \text{ mH}$ et $f = 1 \text{ kHz}$.

1. K étant ouvert, déterminer l'équivalent de Thévenin entre les bornes A et B du circuit (analytiquement et numériquement).

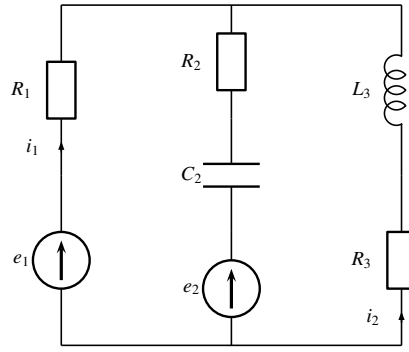


FIGURE 3.2.36 – Exercice 27

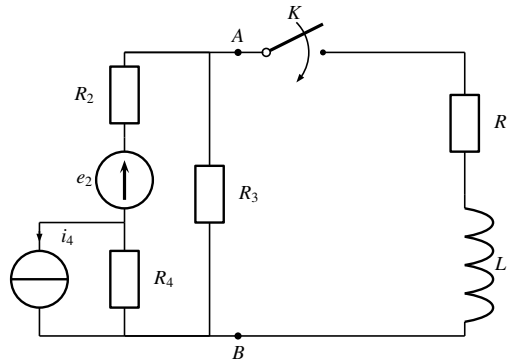


FIGURE 3.2.37 – Exercice 28

2. En $t = 0$, on ferme K , déterminer l'expression du courant traversant l'inductance L_1 . Ce problème est beaucoup plus simple à résoudre en utilisant le résultat de l'étape 1.

Réponses

1. $\underline{E}_{th} = \frac{R_3}{R_2+R_3+R_4} (\underline{E}_2 - R_4 \underline{I}_4) = \frac{10}{3} e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ V}$, $R_{th} = \frac{R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{20}{3} \Omega$
2. $i(t) = \frac{E_{th} \sqrt{2}}{\sqrt{(R_{th}+R_1)^2 + \omega^2 L_1^2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan \omega \tau\right) + K_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $K_1 = -\frac{E_{th} \sqrt{2}}{\sqrt{(R_{th}+R_1)^2 + \omega^2 L_1^2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \omega \tau\right)$ et $\tau = \frac{L_1}{R_{th}+R_1}$

Exercice 29 - Soit le circuit de la figure 3.2.38 avec $e(t) = E \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta)$. L'interrupteur $INT1$ ($INT2$) est fermé(ouvert) depuis un temps infini. En $t = 0$, on ouvre l'interrupteur $INT1$ et ferme l'interrupteur $INT2$ simultanément. Donnez un système d'équation permettant de trouver la transformée de Laplace du courant $i(t)$. Les conditions initiales éventuelles doivent être exprimées en fonction des données du problème (R, L, C, E, θ et ω).

Réponse

$(R + pL)I(p) - U_C(p) = 0$, $I(p) + pCU_C(p) = Cu_C(0)$ avec $U_C(p)$ la transformée de Laplace de la tension aux bornes de la capacité et $u_C(0) = \frac{E \sqrt{2}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cos(\theta - \arctan(\omega RC))$.

Exercice 30 - Soit le circuit de la figure 3.2.39 avec $e(t) = E \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta)$. L'interrupteur INT est fermé depuis un temps infini. On l'ouvre en $t = 0$. Donnez l'évolution de $i(t)$ pour $t > 0$. On suppose R, L, E et θ connus. Quelle(s) condition(s) doit-on imposer à la source de tension pour avoir $i(t) = 0 \quad \forall t > 0$?

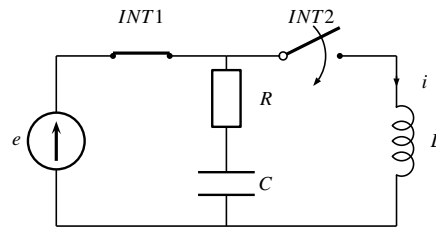


FIGURE 3.2.38 – Exercice 29

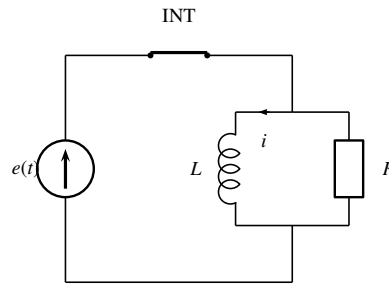


FIGURE 3.2.39 – Exercice 30

Réponse

$$i(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\omega L} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ condition : } \theta = k\pi \text{ (} k \text{ entier).}$$

Exercice 31 - Soit le circuit de la figure 3.2.40 avec $e(t) = E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $E_0 = 2 \text{ V}$, $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$, $R = 10 \Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$. L'interrupteur est fermé depuis un temps infini. On l'ouvre en $t = 0$. Donnez l'évolution de $i(t)$ pour $t > 0$.

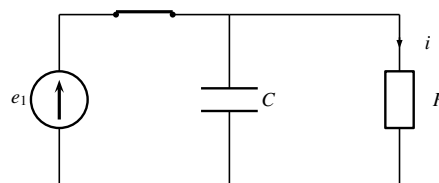


FIGURE 3.2.40 – Exercice 31

Réponse

$$i(t) = 0$$