Задача 99-1 [NP-Complectness]
Самый длинный путь

Задан граф $G = (V, E)$ и положительное число $K \leq |V|$. Имеется ли в G простой путь (то есть путь, не проходящий дважды ни через одну вершину), состоящий не менее чем из K рёбер?

Решение 1. К данной задаче сведём задачу о Гамильтоновом цикле: дан граф и необходимо найти цикл, проходящий через каждую вершину по одному разу. Так как Гамильтонов цикл проходит по всем вершинам единожды, а также включает в себя любое из рёбер графа не более одного раза, то при нахождении Гамильтонова цикла находим и путь максимальной длины: $|V| - 1$. То есть рассматриваемая задача содержит в качестве частного случая (при $K = |V| - 1$) известную NP-полную задачу. Следовательно, является NP-полной.

Решение 2. К данной задаче сведём задачу о Гамильтоновом цикле: дан граф и необходимо найти цикл, проходящий через каждую вершину по одному разу. Так как Гамильтонов цикл проходит по всем вершинам единожды, а также включает в себя любое из рёбер графа не более одного раза, то при нахождении Гамильтонова цикла находим и путь максимальной длины: $|V| - 1$. То есть рассматриваемая задача содержит в качестве частного случая (при $K = |V| - 1$) известную NP-полную задачу. Следовательно, является NP-полной.

По существу описано выше, но скажем подробнее. Сведение принимает на вход $G(V, E)$ для задачи о гамильтонове цикле. Найдя гамильтонов цикл в графе G ($|V|$ рёбер) получаем и простой путь длины $|V| - 1$ удалением из найденногогамильтонова цикла произвольного ребра. Данная процедура является сведением, так как в случае, если гамильтонов цикл найти удалось, удалим ребро и оставшаяся часть цикла — простой путь длины $|V| - 1$ в силу определения гамильтонова цикла, а в случае, если гамильтонова цикла нет, то покажем, что решений нет и у исходной задачи. Рассуждая от противного, предположим, что в графе G есть простой путь длины $|V| - 1$.

Задача 100-10 [NP-Complectness]
Неэквивалентность регулярных выражений, не содержащих звёздочек

Заданы два не содержащие звёздочек регулярных выражения E_1 и E_2 в конечном алфавите Σ. Такое выражение определяется следующим образом:

1. *любой символ σ алфавита Σ есть не содержащее звёздочек регулярное выражение,*
2. *если e_1 и e_2 — два не содержащие звёздочек регулярных выражения, то и слова e_1e_2 и $(e_1 \vee e_2)$ также не содержащие звёздочек регулярные выражения.*

Верно ли, что E_1 и E_2 представляют различные языки в алфавите Σ? (Язык, представляемый символом $\sigma \in \Sigma$, если $\{\sigma\}$, а если e_1 и e_2 представляют соответственно языки L_1 и L_2, то e_1e_2 представляет язык $\{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$, а $(e_1 \vee e_2)$ представляет язык $L_1 \cup L_2$.)

Задача 7 [NP-ISSUES]

Так как задача о трёхмерном сочетании является NP-полной, естественно ожидать, что аналогичная задача о четырёхмерном сочетании будет хотя бы не менее сложной. Определим четырехмерное сочетание следующим образом: для заданных множеств W, X, Y и Z, каждое из которых имеет размер n, и набора C упорядоченных четверок в форме (w_i, x_j, y_k, z_l) существуют ли n четверок из C, среди которых никакие два не имеют общих элементов?
Докажите, что задача о четырехмерном сочетании является NP-полной.

Решение. Пусть есть 4-дольный граф $G(V, E)$ на $4n$ вершинах (в каждой доли n вершин), в котором можно выделить m подграфов K_4. Далее отождествим каждую 4-клику, у которой нет двух вершин из одной доли, с новой вершиной, таким образом получим новый граф G'. Новые две вершины инцидентны тогда и только тогда, когда у подграфов, с которыми они были отождествлены, пересечение множеств вершин не пусто.

Если в таком новом графе G' существует независимое множество вершин мощности n, то существует и решение у нашей задачи, потому что выделив n вершин в G', не имеющих общих ребер, выделили n 4-клик исходного графа G, у которых нет общих элементов и у которых по одной вершине в каждой из четырёх доль в силу проведенного ранее отождествления. А значит, нашли решение исходной задачи. Если же независимого множества можности n не существует, то какие бы n 4-клик с вершинами в попарно различных долях ни были бы выбраны в исходном графе, какое-то из попарных пересечений множеств вершин не пусто, так как соответствующее множество вершин в G' не является независимым.

По решению полученной задачи о поиске независимого множества в графе G' легко восстановить разбиение исходного множества на четверки, элементы которых принадлежат попарно различным долям, а также нет общих.

Задача 16 [NP-ISSUES]

Рассмотрим задачу характеристики множества по размерам его пересечений с другими множествами. Имеется конечное множество U размера n, а также набор $A_1, \ldots, A_m$ подмножеств U. Также заданы числа $c_1, \ldots, c_m$. Вопрос звучит так: существует ли такое множество $X \subset U$, что для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ мощность $X \cap A_i$ равна c_i? Назовем его задачей выведения пересечений с входными данными U, $\{A_i\}$ и $\{c_i\}$.
Докажите, что задача выведения пересечений является NP-полной.