Задание №3 — «NP-completeness»
Лиана Хазалия, 3 курс 2 группа
2019/04/04, 21:59:26

Задача 99-1 [NP-Complectness]

Самый длинный путь

Задан граф $G = (V, E)$ и положительное число $K \leq |V|$. Имеется ли в G простой путь (то есть путь, не проходящий дважды ни через одну вершину), состоящий не менее чем из K рёбер?

Решение.

Так как длина гамильтонова пути равна $|V| - 1$ (проходит по всем вершинам единожды, а также включает каждое из рёбер не более одного раза), то при нахождении гамильтонова пути решаем поставленную задачу для $K = |V| - 1$. То есть известная задача UHamPath суть частный случай предложенной, следовательно, предложенная NP-сложна.

Рассматриваемая задача принадлежит NP, так как для заданного графа $G = (V, E)$ сертификат имеет вид последовательности, состоящей из вершин множества $V' \subset V$, образующих простой путь, $|V'| = K + 1$, где K — количество рёбер в искомом простом пути. В алгоритме верификации проверяется, что в эту последовательность каждая вершина из V' входит единожды и что каждая пара воследовательных вершин соединена ребров. Подобная проверка выполняется за полиномиальное время.

Из того, что UHamPath $\leq_P$ LongestPath и что LongestPaht $\in NP$, следует NP-полнота предложенной задачи LongestPath.

Задача 100-10 [NP-Complectness]

Неэквивалентность регулярных выражений, не содержащих звёздочек

Заданы два не содержащие звёздочек регулярных выражения E_1 и E_2 в конечном алфавите Σ. Такое выражение определяется следующим образом:

1. *любой символ σ алфавита Σ есть не содержащее звёздочек регулярное выражение,*
2. *если e_1 и e_2 — два не содержащие звёздочек регулярных выражения, то и слова $e_1 e_2$ и $(e_1 \vee e_2)$ также не содержащие звёздочек регулярные выражения.*

Верно ли, что E_1 и E_2 представляют различные языки в алфавите Σ? (Язык, представляемый символом $\sigma \in \Sigma$, если $\{\sigma\}$, а если e_1 и e_2 представляют соответственно языки L_1 и L_2, то $e_1 e_2$ представляет язык $\{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$, а $(e_1 \vee e_2)$ представляет язык $L_1 \cup L_2$.)

Задача 7 [NP-ISSUES]

Так как задача о трёхмерном сочетании является NP-полной, естественно ожидать, что аналогичная задача о четырёхмерном сочетании будет хотя бы не менее сложной. Определим четырехмерное сочетание следующим образом: для заданных множеств W, X, Y и Z, каждое из которых имеет размер n, и набора C упорядоченных четверок в форме (w_i, x_j, y_k, z_l) существуют ли n четверок из C, среди которых никакие два не имеют общих элементов?
Докажите, что задача о четырехмерном сочетании является NP-полной.

Решение.

Покажем, что редложенная задача 4-dim matching NP-сложна, доказав 3-dim matching $\leq_P$ 4-dim matching. Алгоритм приведения начинается с экземпляра задачи 3-dim matching. Пусть дано множество $M_3 \subseteq W \times X \times Y$, где W, X и Y — непересекающиеся множества, содержащие одинаковое число элементов q. Четвертое множество Z мощности q берется так, чтобы пересечение с любым из уже имеющихся было пусто. Задаём некоторое биективное соответствие между множествами Y и Z. Каждая четверка — существовавшая ранее тройка, к которой добавлена четвёртая координата, которой присвоено значение элемента множества Z, который соответствует элементу множества Y в третьей координате взятой тройки в ранее заданной биекции.

Покажем, что проведенное преобразование является сведением. Во-первых, предположим, что для множества четвёрок $M_4 \subseteq W \cup X \cup Y \cup Z$ существует такое подмножество $M_4' \subseteq M_4$ и $|M_4'| = q$, что любой элемент множества $W \cup X \cup Y \cup Z$ принадлежит ровно одной из четверок множества M_4'. Тогда верно и утверждение, что любой элемент множества $W \cup X \cup Y$ принадлежит ровно одной из троек множества $M_3' \subseteq M_3$, которое получено удалением четвертой координаты в каждой четверке. Проведём и обратные рассуждения. Предположим, что нет решения у задачи 4-dim matching. Тогда как минимум один из элементов $W \cup X \cup Y$ не покрыт или покрыт с повторами, так как не покрыть (или покрыть с повторами) элементы множества Z значит не покрыть (или покрыть с повторами) и элементы множества Y, так как между ними имеется биекция.

Чтобы показать, что задача 4-dim matching лежит в NP, воспользуемся множеством $M_4 \subseteq W \cup X \cup Y \cup Z$ в качестве сертификата. Проверить, лежит ли каждый элемент из множества $W \cup X \cup Y \cup Z$ в ровно одной из четверок множества M_4 можно в тесение полиномиального времени.

Задача 16 [NP-ISSUES]

Рассмотрим задачу характеристики множества по размерам его пересечений с другими множествами. Имеется конечное множество U размера n, а также набор $A_1, \ldots, A_m$ подмножеств U. Также заданы числа $c_1, \ldots, c_m$. Вопрос звучит так: существует ли такое множество $X \subset U$, что для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ мощность $X \cap A_i$ равна c_i? Назовем его задачей выведения пересечений с входными данными U, $\{A_i\}$ и $\{c_i\}$.
Докажите, что задача выведения пересечений является NP-полной.

Решение.
Рассмотрим задачу 3-dim Mathing: дано множество $M \subseteq W \times X \times Y$, где W, X и Y — непересекающиеся множества, содержащие одинаковое число элементов q. Верно ли, что M содержит трёхмерное сочетание, то есть подмножество $M' \subseteq M$, такое, что $|M'| = q$ и никакие два разных элемента M' не имеют ни одной равной координаты?

Сначала докажем, что задача NP-сложна, по причине сводимости к ней 3-dim Matching. Пусть дан экземпляр задачи 3-dim Matching: некоторые непересекающиеся множества W, X, Y мощности $q \in \mathbb{N}$ и некоторое множество $M \subseteq W \times X \times Y$. Пусть множество U исходной задачи суть множество

Чтобы доказать, что принадлежность классу NP, необходимо доказать, что существует верификатор такой, что при наличии действительного сертификата c его можно проверить за полиномиальное время. Пусть имеется верификатор для HittingSet, который для входа (U, A, k, c), где U — множество, а A — множество подмножеств U, $k \in \mathbb{Z}^+$, переводит сертификат в некоторое множество, проверяет, что это множество действительно подмножество множества U, что его мощность не превышает k, что для каждого подмножества $A_i \in A$ выполнено $|A_i \cap X| = 1$. Все перечисленные операции могут быть проверены за время, полиномиально зависящее от входных параметров. Таким образом, задача Hitting Set лежит в NP.

Для доказательства, что Hitting Set является NP полной, необходимо доказать, что уже известная NP-полная задача полиномиально сводима к Hitting Set. Возьмём известную NP-полную задачу VertexCover, которая говорит существует или нет вершинное покрытие мощности k. Пусть умеем решать задачу VertexCover для входных (G, k), где G — некоторый граф, $k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть множество вершин графа G суть множество U исходной задачи, а каждое ребро — подмножество мощности 2, содержащее элементы, соответствующие вершинам, которым оно инцидентно. Если в исходной задаче существует вершинное покрытие мощности k, то для каждого ребра выбрано ровно по одной вершине, ему инцидентной, что в терминах задачи HittingSet значит, что для каждого двухэлементного подмножества в множестве X ровно один из элементов. В противном случае, если не нашлось вершинного покрытия мощности k, то для какого-либо ребра нельзя выбрать лишь одну из вершин, а, следовательно, для двухэлементного множества выбрать один элемент ему принадлежащий, который будет в множестве X.

□

Теперь задача HittingSet для входа (U, A, X, k) суть частный случай исходной задачи для (U, A, X, C, k), где $C = \{c_i\}_{i=\overline{1,m}}, \forall\, i\, c_i = 1$. Следовательно, исходная задача NP-сложна. Тем не менее, задача лежит в NP, так как сертификат может быть проверен за полиномиальное время.