Задание №3 — «NP-completeness»
Лиана Хазалия, 3 курс 2 группа
2019/04/04, 19:24:22

Задача 99-1 [NP-Complectness]

Самый длинный путь

Задан граф $G = (V, E)$ и положительное число $K \leq |V|$. Имеется ли в G простой путь (то есть путь, не проходящий дважды ни через одну вершину), состоящий не менее чем из K рёбер?

Решение.

Так как длина гамильтонова пути равна $|V| - 1$ (проходит по всем вершинам единожды, а также включает каждое из рёбер не более одного раза), то при нахождении гамильтонова пути решаем поставленную задачу для $K = |V| - 1$. То есть известная задача UHamPath суть частный случай предложенной, следовательно, предложенная NP-сложна.

Рассматриваемая задача принадлежит NP, так как для заданного графа $G = (V, E)$ сертификат имеет вид последовательности, состоящей из вершин множества $V' \subset V$, образующих простой путь, $|V'| = K + 1$, где K — количество рёбер в искомом простом пути. В алгоритме верификации проверяется, что в эту последовательность каждая вершина из V' входит единожды и что каждая пара воследовательных вершин соединена ребров. Подобная проверка выполняется за полиномиальное время.

Из того, что UHamPath $\leq_P$ LongestPath и что LongestPaht $\in NP$, следует NP-полнота предложенной задачи LongestPath.

Задача 100-10 [NP-Complectness]

Неэквивалентность регулярных выражений, не содержащих звёздочек

Заданы два не содержащие звёздочек регулярных выражения E_1 и E_2 в конечном алфавите Σ. Такое выражение определяется следующим образом:

1. *любой символ σ алфавита Σ есть не содержащее звёздочек регулярное выражение,*

2. *если e_1 и e_2 — два не содержащие звёздочек регулярных выражения, то и слова $e_1 e_2$ и $(e_1 \vee e_2)$ также не содержащие звёздочек регулярные выражения.*

Верно ли, что E_1 и E_2 представляют различные языки в алфавите Σ? (Язык, представляемый символом $\sigma \in \Sigma$, если $\{\sigma\}$, а если e_1 и e_2 представляют соответственно языки L_1 и L_2, то $e_1 e_2$ представляет язык $\{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$, а $(e_1 \vee e_2)$ представляет язык $L_1 \cup L_2$.)

Задача 7 [NP-ISSUES]

Так как задача о трёхмерном сочетании является NP-полной, естественно ожидать, что аналогичная задача о четырёхмерном сочетании будет хотя бы не менее сложной. Определим четырехмерное сочетание следующим образом: для заданных множеств W, X, Y и Z, каждое из которых имеет размер n, и набора C упорядоченных четверок в форме (w_i, x_j, y_k, z_l) существуют ли n четверок из C, среди которых никакие два не имеют общих элементов?
Докажите, что задача о четырехмерном сочетании является NP-полной.

Решение. (не оттуда, не туда) Пусть есть 4-дольный граф $G(V, E)$ на $4n$ вершинах (в каждой доли n вершин), в котором можно выделить m подграфов K_4. Далее отождествим каждую 4-клику, у которой нет двух вершин из одной доли, с новой вершиной, таким образом получим новый граф G'. Новые две вершины инцидентны тогда и только тогда, когда у подграфов, с которыми они были отождествлены, пересечение множеств вершин не пусто.

Если в таком новом графе G' существует независимое множество вершин мощности n, то существует и решение у нашей задачи, потому что выделив n вершин в G', не имеющих общих ребер, выделили n 4-клик исходного графа G, у которых нет общих элементов и у которых по одной вершине в каждой из четырёх доль в силу проведенного ранее отождествления. А значит, нашли решение исходной задачи. Если же независимого множества можности n не существует, то какие бы n 4-клик с вершинами в попарно различных долях ни были бы выбраны в исходном графе, какое-то из попарных пересечений множеств вершин не пусто, так как соответствующее множество вершин в G' не является независимым.

По решению полученной задачи о поиске независимого множества в графе G' легко восстановить разбиение исходного множества на четверки, элементы которых принадлежат попарно различным долям, а также нет общих.

Задача 16 [NP-ISSUES]

Рассмотрим задачу характеристики множества по размерам его пересечений с другими множествами. Имеется конечное множество U размера n, а также набор $A_1, \dots, A_m$ подмножеств U. Также заданы числа $c_1, \dots, c_m$. Вопрос звучит так: существует ли такое множество $X \subset U$, что для всех $i = 1, 2, \dots, m$ мощность $X \cap A_i$ равна c_i? Назовем его задачей выведения пересечений с входными данными U, $\{A_i\}$ и $\{c_i\}$.
Докажите, что задача выведения пересечений является NP-полной.

Решение.

Рассмотрим задачу Hitting Set: дано множество $A = \{A_i\}_{i=\overline{1,m}}$ подмножеств множества U и число $k \in \mathbb{Z}^+$, существует ли такое подмножество $X \subset U$, что $|X| \leq k$ и что для любого $i = \overline{1,m}$ выполнено $|A_i \cap X| = 1$?

Лемма. Задача Hitting Set NP-полна.

Чтобы доказать, что принадлежность классу NP, необходимо доказать, что существует верификатор такой, что при наличии действительного сертификата c его можно проверить за полиномиальное время. Пусть имеется верификатор для HittingSet, который для входа (U, A, k, c), где U — множество, а A — множество подмножеств U, $k \in \mathbb{Z}^+$, переводит сертификат в некоторое множество, проверяет, что это множество действительно подмножество множества U, что его мощность не превышает k, что для каждого подмножества $A_i \in A$ выполнено $|A_i \cap X| = 1$. Все перечисленные операции могут быть проверены за время, полиномиально зависящее от входных параметров. Таким образом, задача Hitting Set лежит в NP.

Для доказательства, что Hitting Set является NP полной, необходимо доказать, что уже известная NP-полная задача полиномиально сводима к Hitting Set. Возьмём известную NP-полную задачу VertexCover, которая говорит существует или нет вершинное покрытие мощности k. Пусть умеем решать задачу VertexCover для входных (G, k), где G — некоторый граф, $k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть множество вершин графа G суть множество U исходной задачи, а каждое ребро — подмножество мощности 2, содержащее элементы, соответствующие вершинам, которым оно инцидентно. Если в исходной задаче существует вершинное покрытие мощности k, то для каждого ребра выбрано ровно по одной вершине, ему инцидентной, что в терминах задачи HittingSet значит, что для каждого двухэлементного подмножества в множестве X ровно один из элементов. В противном случае, если не нашлось вершинного покрытия мощности k, то для какого-либо ребра нельзя выбрать лишь одну из вершин, а, следовательно, для двухэлементного множества выбрать один элемент ему принадлежащий, который будет в множестве X.

□

Теперь задача HittingSet для входа (U, A, X, k) суть частный случай исходной задачи для (U, A, X, C, k), где $C = \{c_i\}_{i=\overline{1,m}}, \forall\, i\, c_i = 1$. Следовательно, исходная задача NP-сложна. Тем не менее, задача лежит в NP, так как сертификат может быть проверен за полиномиальное время.