Задание №3 — «NP-completeness»
Лиана Хазалия, 3 курс 2 группа
2019/03/30, 03:10:23

Задача 99-1 [NP-Complectness]
Самый длинный путь

Задан граф $G = (V, E)$ и положительное число $K \leq |V|$. Имеется ли в G простой путь (то есть путь, не проходящий дважды ни через одну вершину), состоящий не менее чем из K рёбер?

Решение 1. Пусть дан граф и необходимо найти цикл, проходящий через каждую вершину по одному разу. Так как Гамильтонов цикл проходит по всем вершинам единожды, а также включает в себя любое из рёбер графа не более одного раза, то при нахождении Гамильтонова цикла находим и путь максимальной длины: $|V|-1$. То есть рассматриваемая задача содержит в качестве частного случая (при $K = |V| - 1$) известную NP-полную задачу. Следовательно, является NP-сложной. Однако задача лежит в NP, а, следовательно, NP-полна, так как проверяющую функцию для сертификата, который для данной задачи суть гамильтонов путь в графе, работает за полиномиальное время.

Решение 2. (сведение) К данной задаче сведём задачу о Гамильтоновом пути в ориентированном графе. Пусть дан ориентированный граф G, по нему строим новый неориентированный граф G': а именно (1) каждую вершину графа G отождествим с тремя новыми в графе G', причём эти три образуют цепь, у которой отличаем вершину-начало и вершину-конец, (2) каждом ориентированному ребру графа G сопоставим ребро такое, что оно исходит из вершины-конца и входит в вершину-начало соответствующих вершинам исходного графа цепей. Таким образом, если в полученном графе G' имеется гамильтонов путь, то и в ориентированном графе G имеется ориентированный гамильтонов путь. И наоборот, если пути нет в G', то и в G ориентированного пути не существует. Цепи в графе G' и такое их соединение искусственно переносят структуру ориентированного графа на неориентированный.

Теперь докажем, что задача о гамильтоновом пути в ориентированном графе NP-полна. Сведём к неё задачу об ориентированном гамильтоновом цикле. Пусть дан ориентированный граф $G(V, E)$, по нему построим новый граф $G'(V', E')$: выберем какую-либо из вершин $\vartheta \in V$ графа G, в G' добавим ещё одну вершину υ, а далее распределим ребра, инцидентные вершине ϑ графа G так, что вершине ϑ' графа G' инцедентны только исходящие ребра вершины ϑ, а все входящие с сохренением всех инцедентностей вершинам в графе G' входят в вершину υ.

Так если в G' был ориентированный гамильтонов цикл, то в G', очевидно, будет ориентированный гамильтонов путь. Если в полученном графе G' есть ориентированный гамильтонов путь, то в графе G имеется ориентированный гамильтонов цикл, потому что путь в G' имеет начало в ϑ', а конец в υ, а в графе G ребра обеих инцедентны ϑ. Задача о поиске ориентированного цикла в качестве подзадачи содержит NP полную о нахождении цикла в неориентированном графе, следовательно, NP-сложна. Но сертификат (ориентированный гамильтонов цикл в G) можно проверить за полиномиальное время. Отсюда она лежит в NPC.

Так доказано, что исходная задача NP-сложна. Однако задача лежит в NP, а, следовательно, NP-полна, так как проверяющую функцию для сертификата, который для данной задачи суть гамильтонов путь в графе, работает за полиномиальное время.

Задача 100-10 [NP-Complectness]
Неэквивалентность регулярных выражений, не содержащих звёздочек

Заданы два не содержащие звёздочек регулярных выражения E_1 и E_2 в конечном алфавите Σ. Такое выражение определяется следующим образом:

1. *любой символ σ алфавита Σ есть не содержащее звёздочек регулярное выражение,*

2. *если e_1 и e_2 — два не содержащие звёздочек регулярных выражения, то и слова e_1e_2 и $(e_1 \vee e_2)$ также не содержащие звёздочек регулярные выражения.*

Верно ли, что E_1 и E_2 представляют различные языки в алфавите Σ? (Язык, представляемый символом $\sigma \in \Sigma$, если $\{\sigma\}$, а если e_1 и e_2 представляют соответственно языки L_1 и L_2, то e_1e_2 представляет язык $\{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$, а $(e_1 \vee e_2)$ представляет язык $L_1 \cup L_2$.)

Задача 7 [NP-ISSUES]

Так как задача о трёхмерном сочетании является NP-полной, естественно ожидать, что аналогичная задача о четырёхмерном сочетании будет хотя бы не менее сложной. Определим четырехмерное сочетание следующим образом: для заданных множеств W, X, Y и Z, каждое из которых имеет размер n, и набора C упорядоченных четверок в форме (w_i, x_j, y_k, z_l) существуют ли n четверок из C, среди которых никакие два не имеют общих элементов?
Докажите, что задача о четырехмерном сочетании является NP-полной.

Решение. (не оттуда, не туда) Пусть есть 4-дольный граф $G(V, E)$ на $4n$ вершинах (в каждой доли n вершин), в котором можно выделить m подграфов K_4. Далее отождествим каждую 4-клику, у которой нет двух вершин из одной доли, с новой вершиной, таким образом получим новый граф G'. Новые две вершины инцидентны тогда и только тогда, когда у подграфов, с которыми они были отождествлены, пересечение множеств вершин не пусто.

Если в таком новом графе G' существует независимое множество вершин мощности n, то существует и решение у нашей задачи, потому что выделив n вершин в G', не имеющих общих ребер, выделили n 4-клик исходного графа G, у которых нет общих элементов и у которых по одной вершине в каждой из четырёх доль в силу проведенного ранее отождествления. А значит, нашли решение исходной задачи. Если же независимого множества можности n не существует, то какие бы n 4-клик с вершинами в попарно различных долях ни были бы выбраны в исходном графе, какое-то из попарных пересечений множеств вершин не пусто, так как соответствующее множество вершин в G' не является независимым.

По решению полученной задачи о поиске независимого множества в графе G' легко восстановить разбиение исходного множества на четверки, элементы которых принадлежат попарно различным долям, а также нет общих.

Задача 16 [NP-ISSUES]

Рассмотрим задачу характеристики множества по размерам его пересечений с другими множествами. Имеется конечное множество U размера n, а также набор $A_1, \ldots, A_m$ подмножеств U. Также заданы числа $c_1, \ldots, c_m$. Вопрос звучит так: существует ли такое множество $X \subset U$, что для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ мощность $X \cap A_i$ равна c_i? Назовем его задачей выведения пересечений с входными данными U, $\{A_i\}$ и $\{c_i\}$.
Докажите, что задача выведения пересечений является NP-полной.

Решение. К данной задаче сведём 3-SAT. Пусть даны литералы $x_1, \ldots, x_n$. Далее имеем список дизъюнктов, каждый из которых содержит по 3 литерала. Каждому литералу и его отрицанию поставим в соответствие элементы множества U некоторой инъективной функцией f. Пусть количество дизъюнктов в данном списке равно m, тогда в рассматриваемой задаче имеем m подмножеств $\{A_i\}_{i=\overline{1,m}}$ множества U, где для всякого $i = \overline{1,m}$ множество A_i состоит ровно из 3 элементов, соответствующих литералам в i-ом дизъюнкте.

Пусть существуют такие значения литералов, для которых коньюнкция исходных дизъюнктов истинна. Будем считать, что такой набор задаёт множество X, пересечения подмножеств с которым рассматриваем: элемент $f(x_i) \in X$, если $x_i = 1$, в случае $x_i = 0$ элемент $f(\overline{x_i}) \in X$. Число $c_i = 1$ для множества A_i суть количество литералов, обращающихся в истину при подстановке значений, в i-ом дизъюнкте.

Теперь, если для исходного набора дизъюнктов существует набор значений литералов, при котором формула выполнена, то и для полученного набора подмножеств $\{A_i\}_{i=\overline{1,m}}$ существует такое множество $X \subset U$, что для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ мощность $X \cap A_i$ равна c_i, где c_i — количество литералов, которые обращаются в истину в i-ом дизъюнкте $(1 \leq c_i \leq 3)$. Если же исходная формула тождественно равна нулю, то нельзя выбрать множество X так, чтобы пересечение с каким-то из A_i было мощности c_i, где c_i. То если наличие решения у 3-SAT свидетельствует о наличии решения поставленной при $|A_i| = 3$ для $i = \overline{1, m}$ и какого-то набора c_i $(c_i \in \mathbb{Z}^+)$.