Mathematik II — Übungsblatt 1. — 10.10.23

1) Vektorkoordinaten + Betrag (Länge)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v_1} = 2\vec{a} - 3(\vec{b} + 2\vec{c}), \quad \vec{v_2} = \vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot \vec{a}$

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -19 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, |\vec{v_1}| = \sqrt{2^2 + (-19)^2 + (-6)^2 + 7^2} = 15\sqrt{2}$

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 23 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}, |\vec{v_2}| = \sqrt{(-6)^2 + 23^2 + (-10)^2 + (-9)^2} = \sqrt{746}$

2.) Orthogonalität

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wen $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, dann sind sie $\perp$. $-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -3 \Rightarrow$ nicht $\perp$

3.) Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{15}}\right) \approx 87°$

4) Auf einer Ebene & resultierende Kraft (Vektorkoordinaten, Betrag, Richtungswinkel)

$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}, \vec{F_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ Wen $(\vec{F_1} \times \vec{F_2}) \circ \vec{F_3} = 0$, dann sind sie komplanar. $\begin{pmatrix} -20 \cdot 60 - 10 \cdot 0 \\ 10 \cdot 30 - (-5) \cdot 60 \\ -5 \cdot 0 - (-20) \cdot 30 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1200 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$

$\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \begin{pmatrix} -5 + 30 + 10 \\ -20 + 0 + 10 \\ 10 + 60 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -10 \\ 80 \end{pmatrix} \quad |\vec{F_r}| = \sqrt{35^2 + (-10)^2 + 80^2} = 5\sqrt{309}$

Richtungswinkel: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{35}{5\sqrt{309}}\right) \approx 66{,}5° \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-10}{5\sqrt{309}}\right) \approx 96{,}5° \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{80}{5\sqrt{309}}\right) = 24{,}47°$

5.) Wie muss λ gewählt werden damit die 3 Vektoren komplanar sind

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ \lambda \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ Wenn $(\vec{a} \times \vec{c}) \circ \vec{b} = 0$, dann komplanar $\begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 6 - 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ \lambda \end{pmatrix} =$

$-24 \cdot (-2) + (-8) \cdot 4 + 6 \cdot \lambda = 0$

$48 + (-32) + 6 \cdot \lambda = 0 \quad | -48$

$-32 + 6 \cdot \lambda = -48 \quad | +32$

$6 \cdot \lambda = -16 \quad | :6$

$\lambda = -\frac{8}{3}$

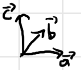
6) a)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \Rightarrow -2 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda_1 = -2$

$4 = \lambda \cdot (-1) \Rightarrow \lambda_2 = -4$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ Linear unabhängig (*wenn orthogonal (Skalarprodukt null) / kollinear, linear abhängig)

** Kreuzprodukt $\Rightarrow$ Rechtssystem? $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$

b)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 57 \Rightarrow$ Linear unabhängig

*(Wenn Ergebnis 0, dann komplanar / Linear abhängig)

c)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \Rightarrow$

$-10 = \lambda \cdot 5 \Rightarrow \lambda_1 = -2$

$-2 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda_2 = -2$

$2 = \lambda \cdot (-1) \Rightarrow \lambda_3 = -2$

$-4 = \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda_4 = -2$

$\Rightarrow$ Linear abhängig