Mengen

Zahlenmengen

$\mathbb{N}: 0, 1, 2$ $\quad \mathbb{Z}: -1, -2, -3$ $\quad \mathbb{Q}: \frac{-1}{2}, \frac{6}{19}$

$\mathbb{R}: \sqrt[3]{8}, e, \pi$ $\quad \mathbb{C}: \sqrt{-7}, i$

Operationen

Teilmenge
$\{c; d\} \subset \mathbb{A}$

Schnittmenge
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$

Vereinigungsmenge
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$

Produktmenge
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(c, a); (c, b); (d, a); (d, b); (e, a); (e, b)\}$

Potenzmenge
$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\} = \{\{\emptyset\}; \{c\}; \{d\}; \{e\}; \{c; d\}; \{c; e\}; \{d; e\}; \{c; d; e\}\}$

Potenzgesetze

$\boxed{a^0 = 1}$ $\quad \boxed{a^{-r} = \frac{1}{a^r}}$ $\quad \boxed{a^{r+s} = a^r \cdot a^s}$ $\quad \boxed{a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}}$

$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$ $\quad \boxed{(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r}$

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}}$ $\quad \boxed{(a^r)^s = a^{r \cdot s}}$

Bool'sche Algebra

Operationen

Negation

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implikation

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Normalformen

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Konjunktive Normalform (Minterme)
$(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee$
$(A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Disjunktive Normalform (Maxterme)
$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \overline{C}) \wedge$
$(\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$

Tautologie/Kontradiktion

Tautologie

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
0	1	1
1	0	1

Implikation

A	$\overline{A}$	$A \wedge \overline{A}$
0	1	0
1	0	0

Eine Tautologie ist eine immer wahre Aussage
Eine Kontradiktion ist eine immer falsche Aussage

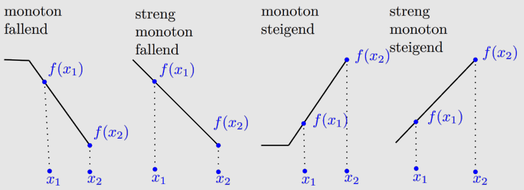
Funktionen

Werte- und Definitionsbereich

Definitionsbereich:
Zahlenbereich für x, den die Funktion annehmen <u>darf</u>
Wertebereich:
Zahlenbereich für y, den die Funktion annehmen <u>kann</u>

Monotonie

monoton steigend $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
streng monoton steigend $f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend $f(x_1) \geqslant f(x_2)$
streng monoton steigend $f(x_1) > f(x_2)$



Symmetrie

Punktsymmetrie
$f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie
$f(x) = f(-x)$

Beispiel: $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

$$f(-x) = -f(x)$$
$$(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -(x^4 + 2x^2 + 1)$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 = -x^4 - 2x^2 + 1$$
$$\Rightarrow f(-x) \neq -f(x), \text{keine PS}$$

$$f(x) = f(-x)$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 = (-x)^4 + 2(-x)^2 + 1$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - 1$$
$$\Rightarrow f(x) = f(-x), \text{AS}$$

Nullstellen

Funktion gleich 0 setzen ($f(x) = 0$) und nach x auflösen
pq-Formel (quad. NF nötig)
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
abc-Formel
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Umkehrfunktion

$f(x) : y = \frac{1}{2}x + 2$

$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad | -2 \ | \cdot 2$
$x = 2y - 4$
Vertauschen von x und y:
$f^{-1}(x) = 2x - 4$

Funktionen sind umkehrbar, wenn

- im Definitionsbereich streng monoton fallen oder steigen
- jede Parallele nur einmal die x-Achse schneidet
- $\mathbb{D}^{-1} = \mathbb{W} \qquad \mathbb{W}^{-1} = \mathbb{D}$

Koeffizienteneinfluss für quad. Funktion

$f(x) = ax^2 + bx + c$
a - Richtung der Öffnung, Streckung/Stauchung
b - Verschiebung in des Scheitelpunkts (in x und y)

	Δx	Δy
$b+1$	$-\frac{1}{2}a$	$\frac{2b+1}{4a}$
$b-1$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{2b-1}{4a}$

c - Schnittpunkt mit der y-Achse

Beweise

direkt

Möglich wenn ein Zwischenschritt zur Lösung führt.
$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

$a^2 < b^2 \overset{:a}{\underset{:b}{\Longleftrightarrow}} a < \frac{b^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} < \frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{b}} < b$
$\Leftrightarrow a < b < a < b \Leftrightarrow a < b$

$\blacksquare$

indirekt (Kontraposition)

Umdrehen der 'Vergleichszeichen'; linke Seite so umstellen, sodass rechte Seite entsteht
$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

$\boxed{a \geqslant b \Rightarrow a^2 \geqslant b^2}$

$a \geqslant b \qquad | -b$
$a - b \geqslant 0 \qquad | \cdot (a+b)$
$(a-b) \cdot (a+b) \geqslant 0 \qquad | \text{ 3. BF}$
$a^2 - b^2 \geqslant 0 \qquad | + b^2$
$a^2 \geqslant b^2$ $\blacksquare$

Widerspruch

Umdrehen der 'Vergleichszeichen' einer Seite, linke Seite so umstellen, sodass rechte Seite entsteht
$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

$\boxed{a^2 < b^2 \Rightarrow a \geqslant b}$

$a^2 < b^2 \qquad | -b^2$
$a^2 - b^2 < 0 \qquad | \text{ 3. BF}$
$(a+b)(a-b) < 0 \qquad | : (a+b)$
$a - b < 0 \qquad | +b$
$a < b$

$\boxed{a < b \neq a \geqslant b}$

$\blacksquare$

Induktion

1. Basisschritt $n = 1$ berechnen (wenn unwahr, endet der Beweis)
2. Induktionsannahme $n = k$
3. Induktionsschritt $n = k + 1$

Binome

Binomische Formeln

$n = 2$
1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^2 = a^2 - b^2$

$n = 3$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n = 4$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Symmetrie und Regeln

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{n+k}, \forall n > 0 \wedge 0 \leqslant k < n$$

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Komplexe Zahlen

Arithmetik

Addition/Subtraktion

$$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) \pm (b \pm d)\, i$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 &= (a+bi) \cdot (c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= ac - bd + (ad+bc)i \end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned} \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} &= \frac{a+bi}{c+di} \\ &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \end{aligned}$$

Formen

Allgemeine Form

$\underline{z} = a + b \cdot i$

Trigonometrische Form

$\underline{z} = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Euler (Polar) Form

$\underline{z} = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

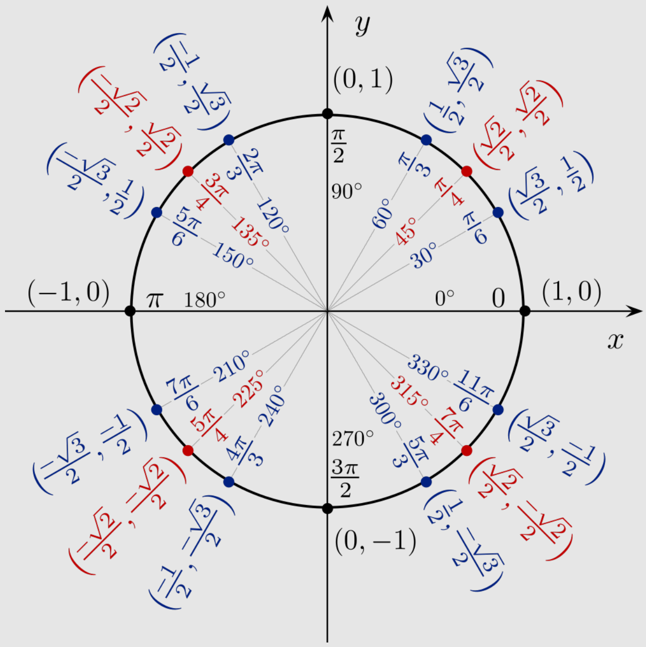
Betrag

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, a < 0 \wedge b \geqslant 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi, a < 0 \wedge b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

Einheitskreis



(sin, cos)

Schwingungen

Äquivalente Behandlung zu komplexen Zahlen

$r \equiv A$

Überlagerung (komplexe Amplitude)

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ &= r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)) + r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \end{aligned}$$

Ergebnis ist in allg. Form

Überlagerung (Amplitude / Phasenwinkel)

komplexe Amplitude in Euler Form überführen.
- Betrag entspricht der Amplitude A
- Phasenwinkel entspricht Wert auf Einheitskreis

Vektorenrechnung

Arithmetik

Addition

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{pmatrix}$$

Subtraktion

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x-b_x\\a_y-b_y\\a_z-b_z\end{pmatrix}$$

Multiplikation

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\cdot b_x\\a_y\cdot b_y\\a_z\cdot b_z\end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a}\circ\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

Senkrechte (orthogonale) Vektoren

$\vec{a}\circ\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

Kreuzprodukt

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\\a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\\a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms

$A=|\vec{c}|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}$

Spatprodukt (Koplanarität)

$$V=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Wenn $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$, dann
- sind die Vektoren linear abhängig
- liegen die Vektoren auf einer Ebene (komplanar)
- sind sie keine Basisvektoren

Berechnung für eine fehlende Koordinate über Determinante

$$\det V=a_x\cdot(b_y\cdot c_z-b_z\cdot c_y)-a_y(b_x\cdot c_z-b_z\cdot c_x)$$
$$+a_z(b_x\cdot c_y-b_y\cdot c_z)=0$$

- Umstellen nach gesuchter Koordinate
- Wert ausrechnen

Spatprodukt (Volumina)

Volumen von Prisma bzw. Spat

$V=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Volumen einer Pyramide (Quadrat, Rechteck, Parallelogramm als Grundfläche)

$V=\frac{1}{3}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Volumen dreiseitige Pyramide

$V=\frac{1}{6}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Orthogonalprojektion

$$\vec{u}_{\vec{v}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\,\vec{v}\,\|^2}\vec{v}\quad\text{(Vektor }\vec{u}\text{ abgebildet auf }\vec{v}\text{)}$$

Richtungswinkel

$$\cos\alpha_x=\frac{\vec{a}_x}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$
$$\cos\alpha_y=\frac{\vec{a}_y}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$
$$\cos\alpha_z=\frac{\vec{a}_z}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Betragsgleichungen

1. Fallunterscheidung für jeden Betrag der Gleichung führen

$$|f(x)|=\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\-(f(x))<0\end{cases}$$

2. nach Variable auflösen
3. Schnittmenge der Ergebnisse bilden (prüfen der Wahrheitswerte)

Beispiel

$x+3-2x-1>1$	$x+3\geqslant 0$	$-2x-1\geqslant 0$
$-(x+3)-2x-1>1$	$x+3<0$	$-2x-1<0$
$x+3-(-2x-1)>1$	$x+3\geqslant 0$	$-2x-1<0$
$(x+3)-(-2x-1)>1$	$x+3<0$	$-2x-1\geqslant 0$
$x<1$	$x\geqslant -3\quad\|w$	$x\leqslant -\frac{1}{2}\quad\|w$
$x<-\frac{5}{3}$	$x<-3\quad\|w$	$x\leqslant -\frac{1}{2}\quad\|f$
$x>-1$	$x\geqslant -3\quad\|f$	$x>-\frac{1}{2}\quad\|w$
$x>-3$	$x<-3\quad\|f$	$x>-\frac{1}{2}\quad\|f$