第五章算法实现题

学号：2209060322　　姓名：梁桐　　班级：计算机 2203

5-4

5-4　运动员最佳配对问题。

问题描述：羽毛球队有男女运动员各 n 人。给定 2 个 $n \times n$ 矩阵 P 和 Q。$P[i][j]$是男运动员 i 和女运动员 j 配对组成混合双打的男运动员竞赛优势；$Q[i][j]$是女运动员 i 和男运动员 j 配合的女运动员竞赛优势。由于技术配合和心理状态等各种因素影响，$P[i][j]$不一定等于 $Q[j][i]$。男运动员 i 和女运动员 j 配对组成混合双打的男女双方竞赛优势为 $P[i][j] \times Q[j][i]$。设计一个算法，计算男女运动员最佳配对法，使各组男女双方竞赛优势的总和达到最大。

算法设计：设计一个算法，对于给定的男女运动员竞赛优势，计算男女运动员最佳配对法，使各组男女双方竞赛优势的总和达到最大。

数据输入：由文件 input.txt 给出输入数据。第一行有 1 个正整数 n（$1 \leqslant n \leqslant 20$）。接下来的 $2n$ 行，每行 n 个数。前 n 行是 p，后 n 行是 q。

结果输出：将计算的男女双方竞赛优势的总和的最大值输出到文件 output.txt。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output.txt
3	52
10 2 3	
2 3 4	
3 4 5	
2 2 2	
3 5 3	
4 5 1	

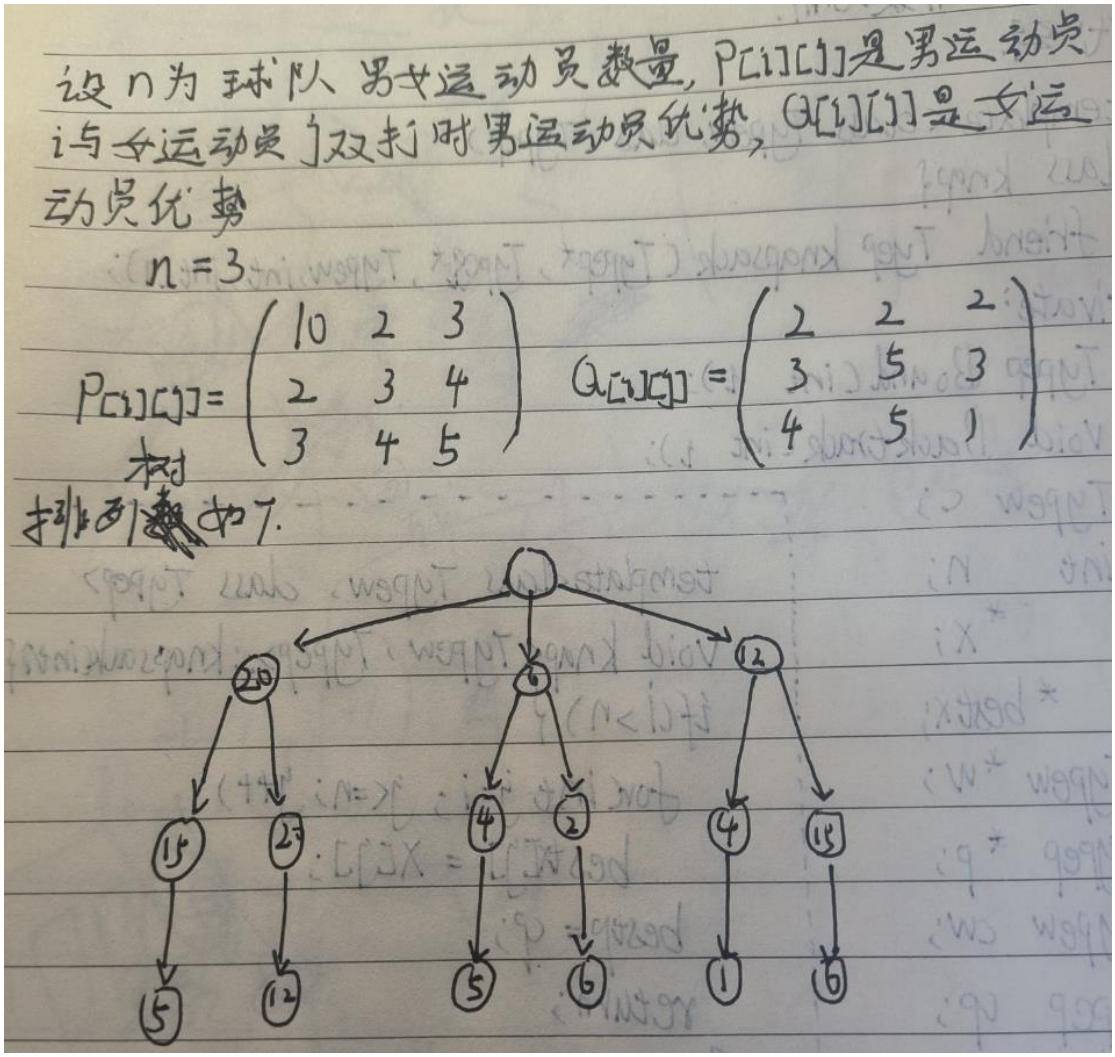
解题思路：

在处理男女人员搭配问题时，以羽毛球队为例，存在男女运动员的匹配安排。鉴于运动员不可重复选择这一条件，此问题的解空间树为排列树，据此可运用排列树回溯法模板进行算法设计。

设 n 为羽毛球队男女运动员的数量，其中，P[i][j]表示男运动员 i 与女运动员 j 配对组成混合双打时男运动员的竞赛优势，Q[i][j]表示女运动员 i 与男运动员 j 配合时女运动员的竞赛优势。

本题采用男运动员选择女运动员的方法构建排列树，以 G 表示女运动员，排列树的层数与男运动员相对应。

关于剪枝函数，在人员尚未完全选定之时，无法确定最终结果是否优于最优解，故在回溯过程中无需剪枝函数进行剪枝。仅当某一分支运行至叶子结点时，才需判断可行解与最优解的关系，以考虑是否更新最优解。输出结果应为包含运动员编号的集合，以 x[i]表示。初始数组存放原始编号，经算法处理后，输出符合最优值的编号。



代码：

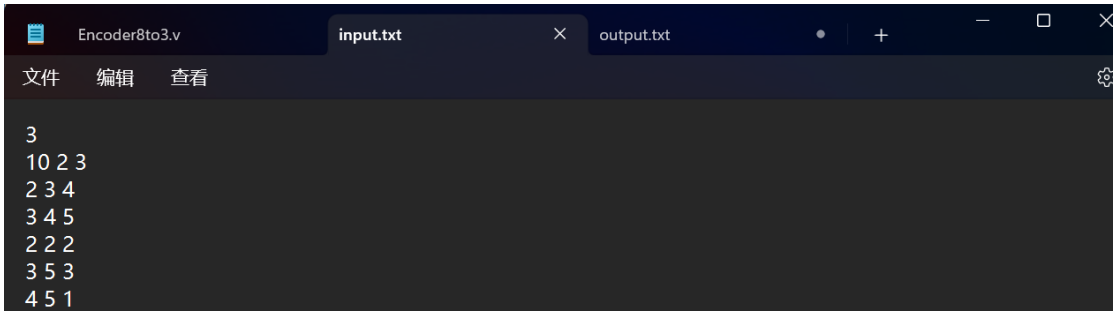
```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

// 判断是否为一个完整解
int isCompleteSolution(int c[], int K) {
    int i, flag;
    int arr[21] = {0};

    // 统计每个位置出现的次数
    for (i = 1; i <= K; i++) {
        arr[c[i]] += 1;
    }

    // 检查是否每个位置恰好出现一次
    for (i = 1, flag = 1; i <= K; i++) {
        if (arr[i]!= 1) {
```

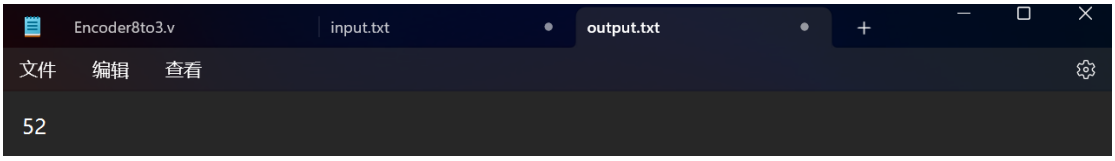
```
                flag = 0;
                break;
            }
        }

        return flag;
}

// 判断是否为部分解
int isPartialSolution(int c[], int K) {
        int i, flag;
        int arr[21] = {0};

        // 统计每个位置出现的次数
        for (i = 1; i <= K; i++) {
            arr[c[i]] += 1;
        }

        // 检查是否存在重复出现的位置或未出现的位置
        for (i = 1, flag = 0; i <= K; i++) {
            if (arr[i] > 1) {
                flag = 0;
                break;
            } else if (arr[i] == 0) {
                flag = 1;
            }
        }

        return flag;
}

// 计算给定解情况下男女运动员竞赛优势的总和
int calculateTotalAdvantage(int c[], int f[21][21], int K) {
        int i, totalAdvantage = 0;

        // 累加每个配对的竞赛优势
        for (i = 1; i <= K; i++) {
            totalAdvantage += f[i][c[i]];
        }

        return totalAdvantage;
}

int main() {
```

```
    int i, j;
    int N;
    FILE *inputFile, *outputFile;

    // 打开输入文件
    inputFile = fopen("input.txt", "r");
    if (inputFile == NULL) {
        printf("无法打开输入文件 input.txt\n");
        return 1;
    }

    // 读取输入文件中的 n
    fscanf(inputFile, "%d", &N);

    int p[21][21], q[21][21], f[21][21];
    // p 记录男运动员的竞赛优势、q 记录女运动员的、f 是男女运动员匹配后的。数组下标从 1 开始。

    // 读取男运动员竞赛优势数据
    for (i = 1; i <= N; i++) {
        for (j = 1; j <= N; j++) {
            fscanf(inputFile, "%d", &(p[i][j]));
        }
    }

    // 读取女运动员竞赛优势数据并计算匹配后的优势
    for (i = 1; i <= N; i++) {
        for (j = 1; j <= N; j++) {
            fscanf(inputFile, "%d", &(q[i][j]));
            f[j][i] = q[i][j] * p[j][i];
        }
    }

    fclose(inputFile);

    int combination[21] = {0};
    // 用于记录男女队员的匹配，combination【i】中的 i 代表男队员、combination【i】代表女队员

    int k = 1, currentAdvantage = 0, optimalAdvantage = 0;
    //k 为队员编号，currentAdvantage 是当前解的优势值，optimalAdvantage 是最优的优势值

    // 回溯搜索过程
```

```
    while (k >= 1 && k <= N) {
        while (combination[k] <= N) {
            combination[k]++;

            // 如果是完整解，计算优势并更新最优解
            if (isCompleteSolution(combination, N)) {
                currentAdvantage = calculateTotalAdvantage(combination, f, N);
                if (currentAdvantage > optimalAdvantage) {
                    optimalAdvantage = currentAdvantage;
                }
                break;
            } else if (isPartialSolution(combination, N)) {
                k++;
            }
        }

        combination[k] = 0;
        k--;
    }

    // 打开输出文件
    outputFile = fopen("output.txt", "w");
    if (outputFile == NULL) {
        printf("无法打开输出文件 output.txt\n");
        return 1;
    }

    // 将最优优势值输出到文件
    fprintf(outputFile, "%d", optimalAdvantage);

    fclose(outputFile);

    return 0;
}
```

运行结果：





5-6

5-6　无和集问题。

问题描述：设 S 是正整数集合。S 是一个无和集，当且仅当 $x, y \in S$ 蕴含 $x+y \notin S$。对于任意正整数 k，如果可将 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 划分为 n 个无和子集 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，则称正整数 k 是 n 可分的。记 $F(n)=\max\{k \mid k$ 是 n 可分的$\}$。试设计一个算法，对任意给定的 n，计算 $F(n)$的值。

算法设计：对任意给定的 n，计算 $F(n)$的值。

数据输入：由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行有 1 个正整数 n。

结果输出：将计算的 $F(n)$的值以及 $\{1, 2, \cdots, F(n)\}$的一个 n 划分输出到文件 output.txt。文件的第 1 行是 $F(n)$的值。接下来的 n 行，每行是一个无和子集 S_i。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output.txt
2	8
	1 2 4 8
	3 5 6 7

解题思路：

整体思路

该算法的核心思想是通过深度优先搜索（DFS）的方式，逐步尝试将整数依次划分到不同的无和子集中，不断探索所有可能的划分组合，以找到能将整数集合 {1, 2,..., k} 划分成 n 个无和子集的最大的 k 值（即 F(n)）以及对应的一种划分方案。

无和子集：

无和子集是指集合中的任意两个元素之和不属于该集合本身。例如，若集合 S = {1, 3, 5}，对于集合 S 中的任意两个元素，如 1 + 3 = 4，4 不属于集合 S；1 + 5 = 6，6 不属于集合 S；3 + 5 = 8，8 不属于集合 S，所以 S 是一个无和子集。在算法中，始终要保证划分出来

的每个子集都满足这一性质。
1. 初始化阶段
在 main 函数中，首先从输入文件 input.txt 读取正整数 n，这个 n 代表要将整数集合划分成的无和子集的个数。然后将用于记录最大可划分值的变量 maxDivisibleValue 初始化为 0，并对存储划分中间状态的二维数组 subsetArray 进行初始化，即将每个子集的元素个数（subsetArray[i][0]）初始化为 0，表示每个子集初始时为空集。
2. 深度优先搜索（DFS）阶段 exploreDivisions 函数
该函数是整个算法的核心，通过递归调用实现深度优先搜索，不断尝试不同的划分可能性。每次调用 exploreDivisions 函数时，传入一个当前要处理的整数 currentNumber。
判断是否找到更优划分：在函数开始处，首先检查当前要处理的整数 currentNumber 是否大于已记录的最大可划分值 maxDivisibleValue。如果是，这意味着找到了一个可能更好的划分情况，因为已经能够将更多的整数成功划分到无和子集中了。此时，就将当前 subsetArray 数组中存储的划分方案复制到 finalResult 数组中，以保存当前最优结果，并更新 maxDivisibleValue 为 currentNumber。
尝试划分到各个子集：接下来，通过一个循环遍历所有的无和子集（个数由 n 即 numSubsets 确定）。对于每个子集：
添加当前整数尝试：先将当前整数 currentNumber 尝试添加到该子集（将其赋值给 subsetArray[i][subsetArray[i][0] + 1]），这相当于在当前划分方案中考虑将 currentNumber 放入这个子集。
判断添加是否可行：然后调用 canAddToSubset 函数来判断这种添加是否可行，即添加后该子集是否依然保持无和集的性质。如果 canAddToSubset 函数返回 1，表示添加是可行的。
继续探索后续划分：若添加可行，就将该子集的元素个数加一（subsetArray[i][0] += 1），然后递归调用 exploreDivisions 函数继续尝试下一个整数（currentNumber + 1），这意味着基于当前的划分情况（已经将 currentNumber 成功添加到某个子集），继续探索后续整数的划分可能性，形成深度优先搜索的递归过程。
回溯操作：在递归调用返回后，需要进行回溯操作，将该子集的元素个数减一（subsetArray[i][0]--），这是因为在递归调用过程中可能已经尝试了多种后续划分情况，现在要回到之前的状态，以便尝试其他可能的添加方式或子集组合。例如，可能之前将 currentNumber 放入了这个子集并继续探索了后续情况，但现在要尝试将 currentNumber 放入其他子集或者改变当前子集的其他元素组合，所以要恢复到添加 currentNumber 之前的子集状态。
移除添加的整数（若不可行）：如果 canAddToSubset 函数返回 0，表示添加当前整数到该子集不可行，那么就将刚才添加的元素（subsetArray[i][subsetArray[i][0] + 1]）重置为 0，以便进行下一轮尝试，即继续考虑将 currentNumber 放入其他子集或者等待下一次循环重新尝试这个子集。

代码：

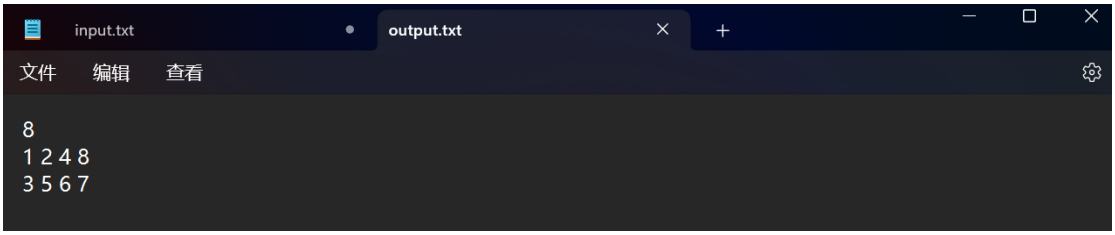
```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define MAX_SIZE 100
```

```
// 用于存储划分过程中各子集信息的二维数组
int subsetArray[MAX_SIZE][MAX_SIZE];
// 用于保存最终有效划分结果的二维数组
int finalResult[MAX_SIZE][MAX_SIZE];
int numSubsets;
int maxDivisibleValue;

// 判断给定整数是否能添加到指定子集而保持无和集性质
int canAddToSubset(int numToAdd, int subsetIndex) {
    int i, j;
    for (i = 1; i <= subsetArray[subsetIndex][0]; i++) {
        for (j = i + 1; j <= subsetArray[subsetIndex][0]; j++) {
            if (subsetArray[subsetIndex][i] + subsetArray[subsetIndex][j] ==
numToAdd) {
                return 0;
            }
        }
    }
    return 1;
}

// 深度优先搜索函数，用于探索所有可能的划分组合
void exploreDivisions(int currentNumber) {
    int i;

    if (currentNumber > maxDivisibleValue) {
        // 将当前有效的划分复制到最终结果数组
        for (i = 0; i < numSubsets; i++) {
            for (int j = 0; j <= subsetArray[i][0]; j++) {
                finalResult[i][j] = subsetArray[i][j];
            }
        }
        maxDivisibleValue = currentNumber;
    }

    for (i = 0; i < numSubsets; i++) {
        subsetArray[i][subsetArray[i][0] + 1] = currentNumber;
        if (canAddToSubset(currentNumber, i)) {
            subsetArray[i][0]++;
            exploreDivisions(currentNumber + 1);
            subsetArray[i][0]--;
        }
        subsetArray[i][subsetArray[i][0] + 1] = 0;
    }
```

```
}

// 将计算结果输出到 output.txt 文件
void outputResults() {
    FILE *outputFile;
    int i, j;

    outputFile = fopen("output.txt", "w");
    if (outputFile == NULL) {
        printf("无法打开 output.txt 文件进行写入操作。\n");
        exit(1);
    }

    // 输出 F(n)的值
    fprintf(outputFile, "%d\n", maxDivisibleValue - 1);

    // 输出每个无和子集
    for (i = 0; i < numSubsets; i++) {
        for (j = 1; j <= finalResult[i][0]; j++) {
            fprintf(outputFile, "%d ", finalResult[i][j]);
        }
        fprintf(outputFile, "\n");
    }

    fclose(outputFile);
}

int main() {
    FILE *inputFile;
    int i;

    // 从 input.txt 文件读取子集数量
    inputFile = fopen("input.txt", "r");
    if (inputFile == NULL) {
        printf("无法打开 input.txt 文件进行读取操作。\n");
        exit(1);
    }
    fscanf(inputFile, "%d", &numSubsets);
    fclose(inputFile);

    maxDivisibleValue = 0;
    // 初始化 subsetArray 数组
    for (i = 0; i < numSubsets; i++) {
        subsetArray[i][0] = 0;
```

```
    }

    exploreDivisions(1);
    outputResults();

    return 0;
}
```

运行结果：



5-13

5-13 工作分配问题。

问题描述：设有 n 件工作分配给 n 个人。将工作 i 分配给第 j 个人所需的费用为 c_{ij}。试设计一个算法，为每个人都分配 1 件不同的工作，并使总费用达到最小。

算法设计：设计一个算法，对于给定的工作费用，计算最佳工作分配方案，使总费用达到最小。

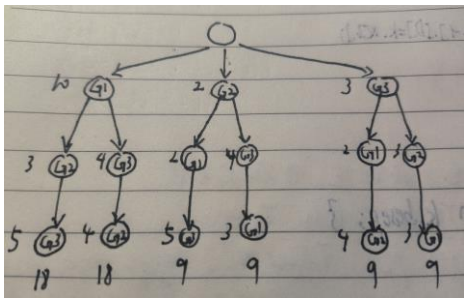
数据输入：由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行有 1 个正整数 n（$1 \leqslant n \leqslant 20$）。接下来的 n 行，每行 n 个数，表示工作费用。

结果输出：将计算的最小总费用输出到文件 output.txt。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output.txt
3	9
10 2 3	
2 3 4	
3 4 5	

算法思想：

以 exploreAssignments 函数实现深度优先搜索，其参数 jobIndex 表示当前正在处理的工作序号。
递归终止条件：当 jobIndex 大于等于工作数量 numJobs 时，意味着已经尝试完了所有工作的分配可能性，到达了搜索树的叶子节点。此时，比较当前搜索路径下得到的总费用 currentCost 和已记录的最小总费用 minCost，如果 currentCost 小于 minCost，则更新 minCost 的值。
搜索分支扩展：对于每个工作（由 jobIndex 确定），遍历所有人（由 personIndex 遍历 numJobs 个人），判断如果某个人还没有被分配工作（通过 !assigned[personIndex] 判断），则进行如下操作：
将当前工作分配给该人，即将 assigned[personIndex] 设为 true，并更新当前总费用 currentCost，增加该工作分配给此人产生的费用（通过 currentCost += costMatrix[jobIndex][personIndex]）。
接着判断当前总费用是否小于最小总费用，如果是，则继续向下一个工作（通过调用 exploreAssignments(wa, jobIndex + 1) 对下一个工作进行分配搜索）进行深度优先搜索，探索该分配方案下后续工作分配的可能性。
如果在当前分支搜索完后发现没有得到比 minCost 更小的总费用，就需要进行回溯操作。回溯时，将刚才分配工作的人的状态还原为未分配（即 assigned[personIndex] 设为 false），并从当前总费用中减去刚才分配工作给此人增加的费用（通过 currentCost -= costMatrix[jobIndex][personIndex]），以便尝试其他可能的分配分支。



代码：

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <limits>

// 定义一个较大的常量用于初始化最小费用值
const int MAX_INT_VALUE = std::numeric_limits<int>::max();

// 工作分配结构体，用于存储相关数据
struct WorkAssignment {
    int numJobs;  // 工作数量
    int costMatrix[20][20];  // 存储工作分配给每个人的费用矩阵
    int minCost;  // 记录找到的最小总费用
    int currentCost;  // 记录搜索过程中的当前总费用
    bool assigned[20];  // 标记每个人是否已被分配工作
```

```
    WorkAssignment() : numJobs(0), minCost(MAX_INT_VALUE), currentCost(0) {
        for (int i = 0; i < 20; i++) {
            for (int j = 0; j < 20; j++) {
                costMatrix[i][j] = 0;
            }
            assigned[i] = false;
        }
    }
};

// 深度优先搜索函数，用于遍历所有可能的工作分配方案
void exploreAssignments(WorkAssignment& wa, int jobIndex) {
    if (jobIndex >= wa.numJobs) {
        // 到达叶子节点，比较并更新最小总费用
        if (wa.minCost > wa.currentCost) {
            wa.minCost = wa.currentCost;
        }
        return;
    }

    for (int personIndex = 0; personIndex < wa.numJobs; personIndex++) {
        if (!wa.assigned[personIndex]) {
            // 分配工作给当前人
            wa.assigned[personIndex] = true;
            wa.currentCost += wa.costMatrix[jobIndex][personIndex];

            // 如果当前费用小于最小费用，继续搜索下一个工作分配
            if (wa.currentCost < wa.minCost) {
                exploreAssignments(wa, jobIndex + 1);
            }

            // 回溯，撤销本次分配
            wa.assigned[personIndex] = false;
            wa.currentCost -= wa.costMatrix[jobIndex][personIndex];
        }
    }
}

int main() {
    WorkAssignment workAssignment;

    // 从文件读取输入数据
    std::ifstream inputFile("input.txt");
```

```
    if (!inputFile) {
        std::cerr << "无法打开输入文件 input.txt" << std::endl;
        return 1;
    }

    // 读取工作数量
    inputFile >> workAssignment.numJobs;

    // 读取工作费用矩阵
    for (int i = 0; i < workAssignment.numJobs; i++) {
        for (int j = 0; j < workAssignment.numJobs; j++) {
            inputFile >> workAssignment.costMatrix[i][j];
        }
    }
    inputFile.close();

    // 开始深度优先搜索
    exploreAssignments(workAssignment, 0);

    // 将结果输出到文件
    std::ofstream outputFile("output.txt");
    if (!outputFile) {
        std::cerr << "无法打开输出文件 output.txt" << std::endl;
        return 1;
    }
    outputFile << workAssignment.minCost << std::endl;
    outputFile.close();

    return 0;
}
```

运行结果：