数学建模（1） 建模介绍

赵亮

2021年6月

讲师介绍

- 赵亮
- 2008年毕业于清华大学数学系
- 2017年获得纽约城市大学博士学位
- 现居于纽约
- 热爱数学
- 科研经历丰富

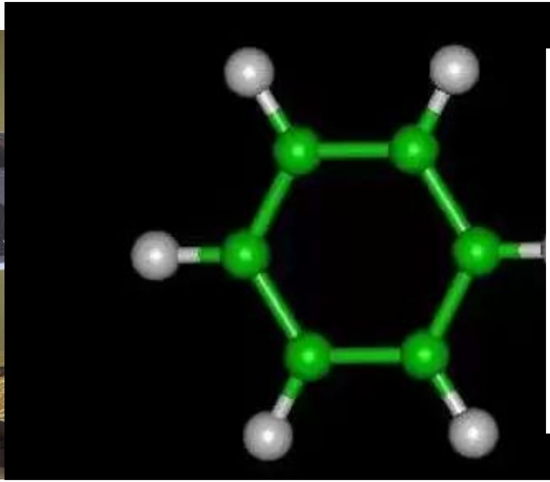
内容

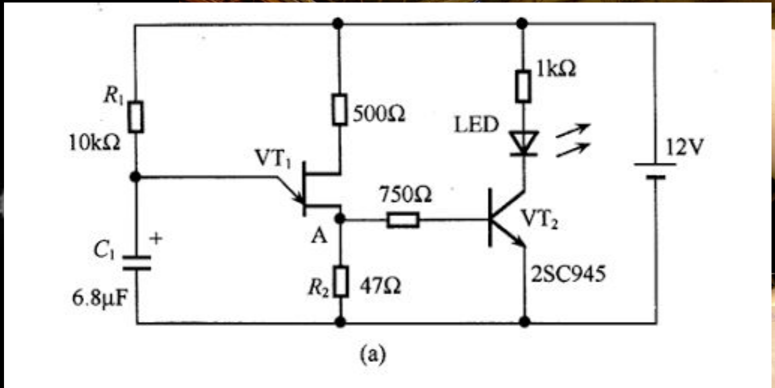
- 从现实对象到数学模型
- 数学建模实例
- 怎样学习数学建模
- 课程介绍

从现实对象到数学模型

现实中的模型

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型替代物。模型集中反映了人们对原型所需要的那一部分特征。





(a)

数学中的模型

考虑一个航行问题：长江从宜昌经过1500公里流到上海。一艘船从宜昌经过60小时开到上海，从上海返回宜昌用了100小时，假设船的速度和水流的速度均为常数。请问船速是多少？

解：假设船的速度为x km/h, 水流的速度为 y km/h, 根据 路程 = 速度 * 时间 得到方程

$1500 = (x + y) * 60$

$1500 = (x - y) * 100$

解方程得到 x = 20, y = 5. 由此可得船的速度为20 km/h.

航行问题建立数学模型的基本步骤

- 做出简化假设:船速、水速为常数
- 用符号表示有关量:x - 船速，y - 水速
- 用物理定律列出数学式子:二元一次方程
- 求解得到答案: $x = 20, y = 5$
- 回答原问题:平均船速为20 km/h.

数学模型和数学建模

数学模型:

对于一个现实对象，为了一个特定目的，根据其内在规律，作出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学表述。

数学建模:

建立数学模型的全过程 - 表述、求解、解释、检验等

将数学工具和计算机作为认识世界的工具

- 电子计算机的飞速发展
- 数学以空前的广度和深度向各个领域渗透
  - 工程技术
  - 数据分析
  - 社会科学
  - 金融

数学建模作为用数学方法解决实际问题的第一步，越来越受到人们的重视。

数学建模示例

椅子能在不平的地面上放稳吗

问题分析：

- 通常情况椅子只能三只脚着地，第四只脚悬空
- 当位置改变时，悬空脚的高度一般会随之变化

模型假设

- 四条腿一样长，每只椅脚与地面上的一个点接触，四只椅脚连线呈正方形
- 地面高度连续变化
- 地面相对平坦，使得椅子在任意位置上都至少有三只脚着地

如何将这个问题转化为一个数学问题？

模型构造

模型假设

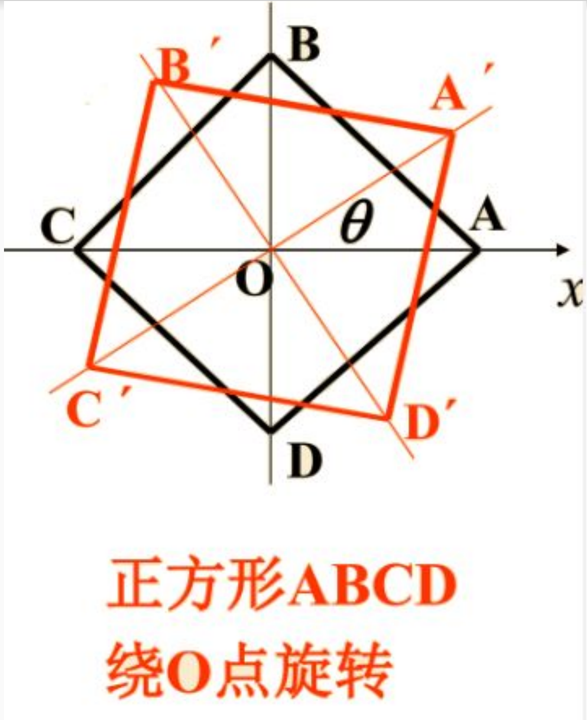
- 四条腿一样长，每只椅脚与地面上的一个点接触，四只椅脚连线呈正方形
- 地面高度连续变化
- 地面相对平坦，使得椅子在任意位置上都至少有三只脚着地

让我们用数学的符号和语言将椅子四只脚的位置和它 们与地面的关系表示出来。

- 用正方形的四个 顶点ABCD来表示椅脚的位置
- 以正方形的中心O点为原点建立坐标系

- 设OA与x轴正方向的距离 为θ
- 每个椅脚与地面的距离分 别是一个关于θ的函数

- 设A、C两脚与地面的距离之和 为f(θ)，B、D两脚与地面的距离之和 为g(θ)



模型探索

我们如何将下列事实用数学语言表述为f(θ) 和 g(θ) 的性质？

- 椅子在任意位置至少三只脚着地

f(θ) 和 g(θ) 至少有一个为零。f(θ)g(θ)=0.

- 地面为连续曲面

f(θ) 和 g(θ) 都是连续函数。

- 希望找出一点使得椅子能 够放稳

f(θ) = 0， g(θ) = 0.（其实只需要f(θ) = g(θ)）

将现实问题转化为数学问题

椅子能在不平的地面上放稳吗?

$\Rightarrow$

已知$f(\theta)$, $g(\theta)$为连续函数. 对任意θ, $f(\theta)g(\theta)=0$. 证明:存在θ_0使得$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

如何证明这个结论?

模型求解

提示：利用连续函数的性质，如果存在θ_1使得$h(\theta_1)>0$，并且存在θ_2使得$h(\theta_2)<0$，则必然存在θ_0使得$h(\theta_0)=0$.

- 不妨假设$g(0)=0$，$f(0)>0$.
- 将椅子旋转90度，根据对称性得到$f(\pi/2)=0$，$g(\pi/2)>0$
- 令$h(\theta)=f(\theta) - g(\theta)$, 则 $h(0) > 0$, $h(\pi/2) < 0$
- 因为$f(\theta)$和$g(\theta)$都是连续函数，所以$h(\theta)$也是连续函数
- 因此必然存在θ_0使得$h(\theta_0)=0$.
- 因此，椅子在不平的地面上也存在放稳的可能。

思考

建模的关键：

- 将椅脚与地面之间的距离表示为关于夹角θ的函数。
- 巧妙利用连续函数的性质

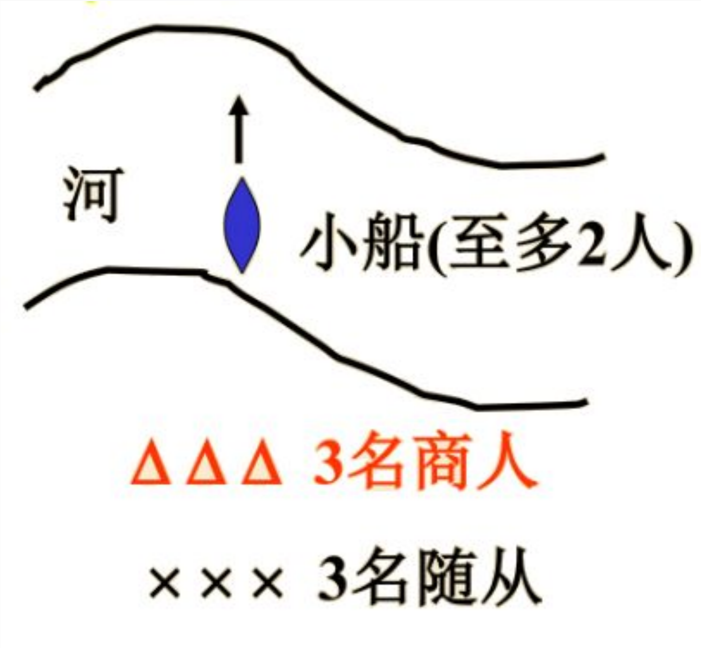
所有的假设条件都是必要的吗？

结论分析：

- 存在性 vs. 构造性
- 结论的拓展

商人们怎样安全过河

三名商人与三名随从通过摆渡过河。小船一次只能载两人。随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货。商人们如何才能安全过河？



模型构造

这是一个多步骤的决策过程

- 每一步:决定上船的人员
- 要求:任何一岸上随从的人数都不能多于商人的数量
- 最终要求全部人员过河

模型探索

- x_k : 第k次渡河前此岸的商人数
- y_k : 第k次渡河前此岸的随从数
- u_k: 第k次渡河时渡船上的商人数
- v_k: 第k次渡河时渡船上的随从数

这四个数量之间有什么关系？

- Given x_k, y_k, u_k, v_k, how to calculate x_{k+1} y_{k+1}?
- If k is even, $x_{k+1} = x_k + u_k$, $y_{k+1} = y_k + v_k$.
- If k is odd, $x_{k+1} = x_k - u_k$, $y_{k+1} = y_k - v_k$.

If $0 < x_k < 3$, then $x_k = y_k$.

这四个数量需要满足哪些条件？

- $0 < u_k + v_k <= 2$ (the boat has capacity 2)
- If $x_k > 0$, then $x_k >= y_k$ (number of merchants cannot be less than number of servants)
- If $3 - x_k > 0$, then $3 - x_k >= 3 - y_k$ (If $x_k < 3$, $x_k <= y_k$)
- $0 <= x_k <= 3$, $0 <= y_k <= 3$

模型探索

- x_k: 第k次渡河前此岸的商人数
- y_k: 第k次渡河前此岸的随从数
- u_k: 第k次渡河时渡船上的商人数
- v_k: 第k次渡河时渡船上的随从数

这四个数量之间有什么关系？

- K odd: $x_{k+1} = x_k + u_k$, $y_{k+1} = y_k + v_k$
- K even: $x_{k+1} = x_k - u_k$, $y_{k+1} = y_k - v_k$

这四个数量需要满足哪些条件？

- $0 \le x_k \le 3$, $0 \le y_k \le 3$
- $0 \le u_k + v_k \le 2$
- $x_k > y_k$ if $x_k > 0$
- $3 - x_k > 3 - y_k$ if $x_k < 3$

将问题转化为数学问题

商人和随从能否安全渡河？ ⇒

求合理的$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n)$, 使得在满足转移律的情况下形成$x_n = y_n = 0$.

这个数学问题如何求解？

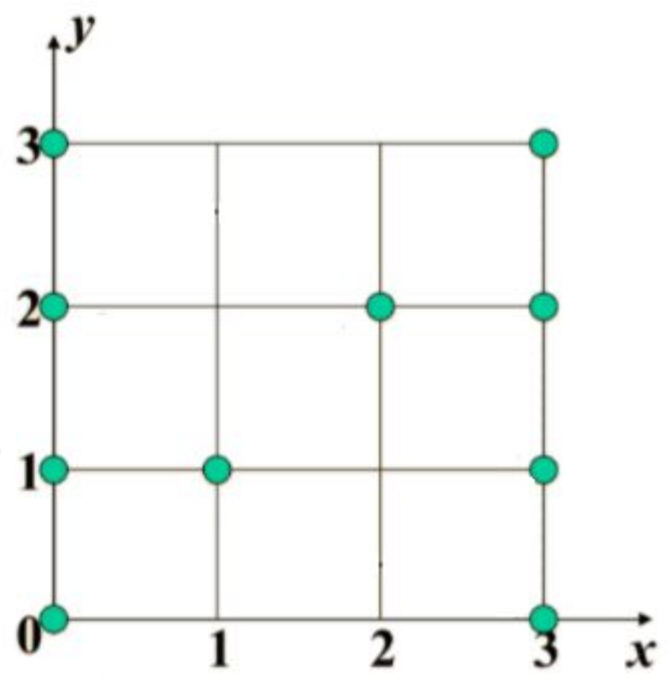
- 能否进行穷举？如何穷举？
- 有没有更好的方法？

图解法

允许的状态：10个绿色格点
允许决策：移动1-2格
K为奇数：只能向左下方移动
k为偶数：只能向右上方移动

状态(x_k, y_k)：16个格点

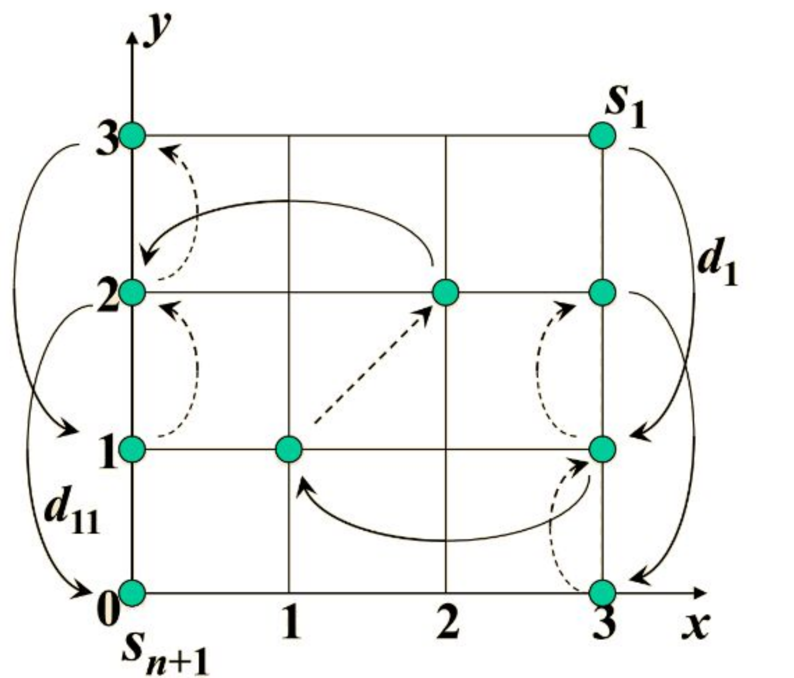
- 初始点(x_1, y_1)在哪里？
- 如果$u_1=1, v_1 = 0$，那么(x_2, y_2)会在哪里？
- 如果$u_1=0, v_1 = 1$，那么(x_2, y_2)会在哪里？
- 如果$u_1=1, v_1 = 1$，那么(x_2, y_2)会在哪里？
- 为什么(1, 3)这个状态是不被允许的？
- 为什么(2, 0)这个状态是不被允许的？
- 哪一些点是安全的点？
- 哪一些点是不安全的？
- 最终目标是哪个点？



图解法

状态(x_k, y_k)：16个格点

- 允许的状态：10个绿色格点
- 允许决策：移动1-2格
- K为奇数：只能向左下方移动
- k为偶数：只能向右上方移动



思考

建模的关键：将智力游戏转化为多部决策过程

- 如何有效利用计算机进行求解？
- 如何将解法推广到更多的人或更大的船？
- 这个解法能否解决其他问题？

怎样学习数学建模

学习数学建模

- 数学建模是技术与艺术的结合
- 磨练参与者思维深度与广度
- 锻炼参与者研究与实践的能力
- 从学习、分析、评价、改进前人的模型开始
- 亲自动手，认真作几个项目

美国高中数学建模竞赛(HiMCM)

- 美国高中生数学建模竞赛(HiMCM)是美国数学及应用联合会(COMAP)主办的一项国际性的数学竞赛活动
- 网址：https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/index.html
- 竞赛始于1999年，每年11月份举行，6月份开放注册
- 每队参赛选手将使用应用数学相关的知识来解决现实中的实际问题
- 为学生提供在作为团队成员竞赛中发挥特长的机会，从而激发和改善他们解决问题和写作的能力

美国高中数学建模竞赛(HiMCM)

- 团队人数：2-4 名
- 使用英语进行写作
- 比赛费用：$100/team
- 比赛题量：1题，从Problem A和Problem B中任选一道进行答题
- 比赛题型：来源实际生活场景的问答题，用一定的数学模型解答后，形成一篇论文提交
- 评分方式：根据文章的逻辑思维、解决问题方法的有效性、可行性和创新性等对论文进行评分

为什么要参与数学建模竞赛

- 了解数学的意义与用途
- 锻炼逻辑思维与量化思维
- 体验研究式学习
- 提高编程能力
- 接触科技论文的写作

课程安排

每次以一个专题为主，介绍常见数学模型以及建模相关技能

- 初等模型：方程组，不等式
- 优化模型：找到问题的最优解
- 微分方程模型：研究数量随时间的变化
- 博弈论模型：探索多方博弈的最优方案
- 概率模型：研究具有随机性的问题
- 统计与机器学习模型：通过分析数据来找到规律
- 图模型：解决几何问题

课程安排

- 编程语言入门:学习使用Python写一些简单的程序，了解科学运算库
- 研究型学习的方法与技巧
- 科技论文写作指导
- 用LaTex生成数学公式和符号
- 图表的制作与展示
- 优秀论文赏析

课程计划（暂定）

2021年夏季学期课程规划-HiMCM数学建模

讲次	日期	星期	时间	课程内容	课时
1	6/5/2021	六	9:00 - 11:00	试听课	2
2	6/6/2021	日	9:00 - 11:00	Python语言入门	2
3	6/12/2021	六	9:00 - 11:00	初等模型	2
4	6/13/2021	日	9:00 - 11:00	优化模型	2
5	6/19/2021	六	9:00 - 11:00	数学语言写作指导	2
6	6/20/2021	日	9:00 - 11:00	博弈论模型	2
7	6/26/2021	六	9:00 - 11:00	概率模型	2
8	6/27/2021	日	9:00 - 11:00	统计模型	2

课程计划（暂定）

9	6/30/2021	三	9:00 - 11:00	科技论文的阅读与写作	2
10	7/1/2021	四	9:00 - 11:00	机器学习模型 （一）	2
11	7/2/2021	五	9:00 - 11:00	机器学习模型 （二）	2
12	7/3/2021	六	9:00 - 11:00	数据可视化	2
13	7/4/2021	日	9:00 - 11:00	微分方程模型	2
14	7/5/2021	一	9:00 - 11:00	图模型	2
15	7/6/2021	二	9:00 - 11:00	优秀论文赏析	2
16	7/7/2021	三	9:00 - 11:00	建模实例练习	2
17	7/8/2021	四	9:00 - 11:00	待定	2
18	7/9/2021	五	9:00 - 11:00	待定	2
Total					**36**

思考问题

1. 深圳一共有多少辆汽车？
2. 中国一共养殖了多少头牛？
3. 需要多少乒乓球可以装满一架波音747飞机？
4. 长方形的椅子能在不平的地面上放稳吗？