

# 光的分支流现象

莫梁虹

中山大学 物理学院, 广州 510275

**【摘要】** 激光以小角度照射到肥皂膜会产生光的分支流现象。通过建立波导模型和数值仿真, 我们发现光的分支流现象是激光在传播过程中对不均匀介质随机势的一种非线性响应。随机势的分布和关联长度的尺度影响了实验结果, 导致不同的光须现象。尽管如此, 通过仿真发现, 随机势对分支流现象的影响可以通过少数特征量来描述, 与随机势具体形式无关。

**【关键词】** 分支流, 波导, 高斯光束, 关联长度, RGB 重建

## 1 题目回顾

Light Whiskers 光须 When a laser beam enters a soap film at a small angle, a rapidly changing pattern of thin, branching light tracks may appear inside the film. Explain and investigate this phenomenon.

当一束激光以小角度照射肥皂膜时, 薄膜内部可能出现由细的、分岔的光轨迹构成的快速变化的图案。解释并探究此现象。

## 2 理论建模

要解释光的分支流现象, 实际上就是解释光如何在肥皂膜介质中传播。

### 2.1 基本假设

- 假设肥皂膜的相对介电常数和相对磁导率均为 1, 各向同性。
- 由于激光单色性较好, 故只考虑特定频率的电磁波。

### 2.2 原理分析

对肥皂薄膜的一块均匀体积元进行分析 (Fig. 1(a)), 空气-薄膜-空气构成了一个典型的阶跃折射率波导。

首先, 基于麦克斯韦方程组, 可以推导出描述电磁波分布的 Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 E + k_0^2 n^2(y) E = 0 \quad (S.1)$$

其中  $n(y)$  为介质的折射率, 在肥皂膜内, 折射率为

$n_{\text{soap}}$ ; 在空气中, 折射率为  $n_{\text{air}}$ 。

$$n(y) = \begin{cases} n_{\text{air}} & y > d \\ n_{\text{soap}} & 0 < y < d \\ n_{\text{air}} & y < 0 \end{cases} \quad (S.2)$$

考虑其形式解为

$$E = \Psi(x, z) G(y) \quad (S.3)$$

代入后得到

$$\partial_{yy} G + k_0^2 n^2(y) G = k_0^2 n_{\text{eff}}^2 G \quad (S.4)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi + k_0^2 n_{\text{eff}}^2 \Psi = 0 \quad (S.5)$$

其中  $n_{\text{eff}} = n_{\text{eff}}(x, z)$  为等效折射率。通过求解关于  $G$  的常微分方程方程 S.5 得到:

$$G = \begin{cases} Ae^{-\delta(y-d)} & y > d \\ A' \cos(\kappa y - \phi) & |y| < d \\ A'' e^{\delta y} & y < 0 \end{cases} \quad (S.6)$$

其中

$$\kappa^2 = k_0^2 (n_{\text{soap}}^2 - n_{\text{eff}}^2) \quad (S.7)$$

$$\delta^2 = k_0^2 (n_{\text{eff}}^2 - n_{\text{air}}^2) \quad (S.8)$$

$\delta$  为衰减率。

由此可见, 在肥皂薄膜外部的空气中, 光强呈指数衰减。换言之, 肥皂膜厚度的大尺度突变会导致激光强度的损失, 这导致了后文仿真中的粗糙度较大时不出现分支流现象, 只有入射处高强度的峰。

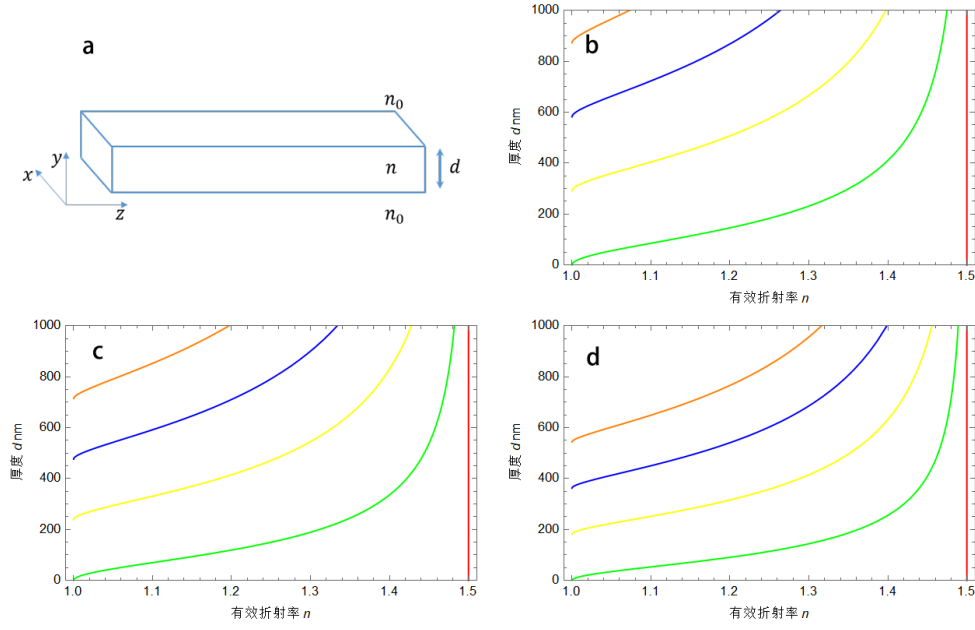


图 1 (a) 图为波导模型坐标系示意图, (b)、(c)、(d) 图分别为 650nm, 532nm, 405nm 激光对应的等效折射率关于厚度与阶数关系图

对于电磁波传播的 TE 模式, 有

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_z \quad (\text{S.9})$$

求解偏微分方程 S.5, 可得,

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \begin{cases} -\delta A \cos(\kappa d - \phi) e^{\delta(y-d)} & y > d \\ -\kappa A \sin(\kappa y - \phi) & |y| < d \\ \delta A \cos(\phi) e^{\delta y} & y < 0 \end{cases} \quad (\text{S.10})$$

根据边界条件, 由于磁场强度的切向分量连续

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (\text{S.11})$$

从上述方程可以推得

$$\frac{\kappa d}{2} = \arctan\left(\frac{\delta}{\kappa}\right) + \frac{m}{2}\pi$$

移项后整理得到肥皂膜中的色散方程

$$\kappa d + 2 \arctan\left(\frac{\delta}{\kappa}\right) - \pi(q+1) = 0 \quad (\text{S.12})$$

其中  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$  是电磁场 TE 模式的阶数。当给定厚度  $d$  和阶数  $q$  时, 可以得到该处的等效折射率  $n_{eff}$ , 波长为 532nm, 650nm, 405nm 高斯光束的前四个 TE 模式下的厚度与等效折射率的关系如图 (Fig. 1)。

根据后文肥皂膜厚度的 RGB 重建数据可以得到, 在我们的实验中, 肥皂膜的厚度很小, 集中在 400nm 附近。在这个厚度范围内, 根据图 (Fig. 1) 可知, 最多可以存在两阶模, 而更高阶的模式将被截断。

在这里我们只考虑  $q = 0$  基模, 对于电磁波传播模的阶数将在后文更详细地讨论。利用基模的等效折射率与肥皂膜的厚度关系曲线, 我们可以通过实验得到的厚度分布计算出等效折射率的分布, 以进行分支流的仿真。

### 3 数值仿真

由于高斯光束在  $x-z$  平面传播, 因此根据统计力学, 取  $x-z$  平面的有等效折射率随机势的平均值为系统的哈密顿量, 故引入平均折射率  $\bar{n} = \sqrt{\langle n_{eff}^2 \rangle}$ 。

$x, z$  方向上的电场分布  $\Psi$  所满足的电场方程可写为

$$-\nabla^2 \Psi + k_0^2(\bar{n}^2 - n_{eff}^2)\Psi = k_0^2 \bar{n}^2 \Psi \quad (\text{S.13})$$

将此式与薛定谔方程  $^2\psi + V(x, z)\psi = E\psi$  对比可以看出, 这个系统的哈密顿量为  $H = k_0^2 \bar{n}^2$ , 势

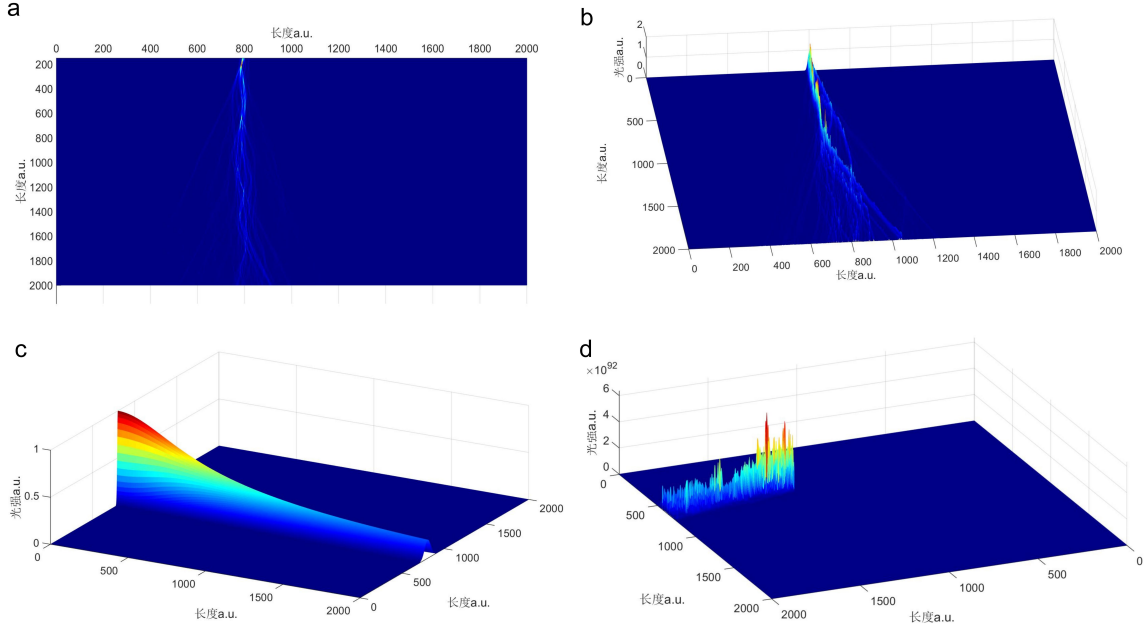


图 2 (a) 图和 (b) 图为基于后文干涉提取的厚度仿真得到的分支流, (c) 图为随机势光滑时仿真得到的光强分布, (d) 图为随机势极度粗糙时仿真得到的光强分布

函数为

$$V(x, z) = \frac{k_0}{2n_0}(n_{eff}^2 - n_0^2) \quad (S.14)$$

且势函数满足  $\langle V \rangle = 0$ 。

由于激光束是高斯单向激光, 故考虑其行波解得到

$$i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{k_0}{2n_0}(n_{eff}^2 - n_0^2) \bar{\psi} = 0 \quad (S.15)$$

当给定入射处电磁场分布 (高斯光束) 和等效折射率分布时, 就可以通过上式计算得到电场分布随  $z$  的变化规律, 即通过确定的初始条件和边界条件求解上述偏微分方程。等效折射率的随机势将在后文进行详细的讨论。利用实验测得的肥皂膜厚度分布得到的仿真结果如图 (Fig. 2)。

可以发现当随机势分布光滑且均匀时, 不出现分支流现象; 当随机势分布极度粗糙时, 只出现初始位置光强极大的峰, 也没有观察到分支流现象。

仿真得到激光分支流强度分布与实验提取的分支流强度 (Fig. 5(b)) 分布相似。

值得一提的是, 实验测得的激光束强度分布图 (Fig. 5(b)) 中, 有一些异常突起的强度波包, 而这种现象在利用光纤耦合进入肥皂膜时进行实验

时没有被观察到。经过多次实验我们发现, 这是激光散斑现象。这种强度随机分布的散斑图样, 是由激光在粗糙表面反射或激光通过不均匀媒质时产生。因为大多数物体表面对光波的波长 (以氦氖激光器为例,  $\lambda \approx 0.6 \mu\text{m}$ ) 来讲是粗糙的, 由于激光的高度相干性, 当光波从物体表面反射时, 物体上各点到适当距离的观察点的振动是相干的。因此观察点的光场是由粗糙表面上各点发出的相干子波的叠加。因为粗糙度大于光波波长, 所以物体各点发出子波到达观察点的位相是随机分布的。相干叠加结果就产生了散斑的随机强度图样——颗粒状。

## 4 实验部分

### 4.1 肥皂膜厚度测量

#### 4.1.1 白光干涉

考虑肥皂膜为一法布里波共振腔, 不同波长的光在干涉时反射光的强度不同, 且随着薄膜的厚度变化不同波长的光反射强度也随之变化, 因此通过实验可以得到肥皂膜的白光干涉彩图 (Fig. 3(a)(b))。

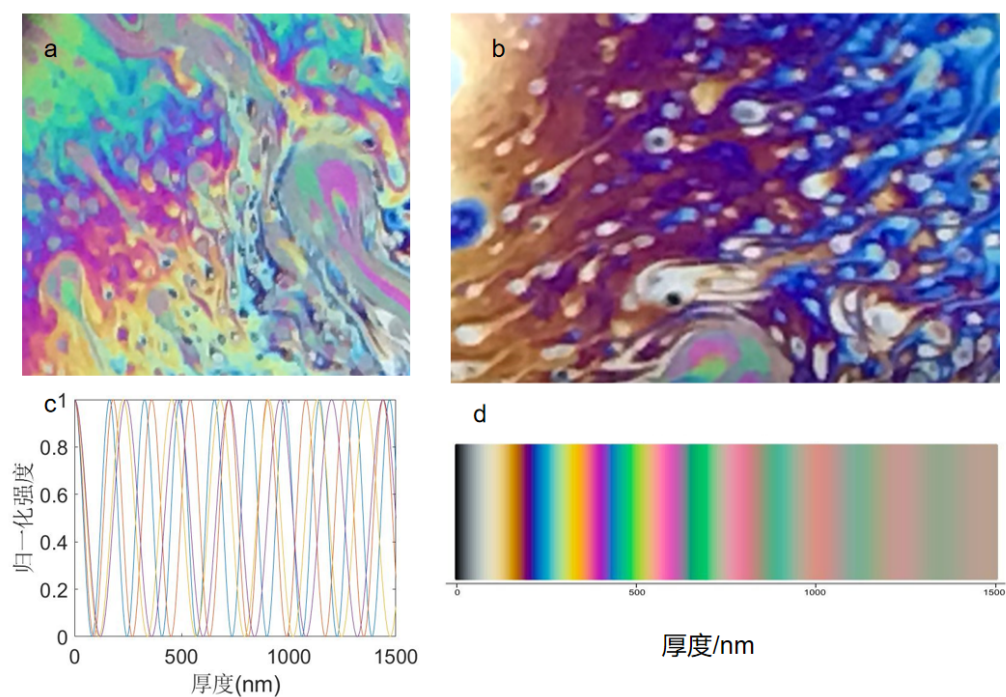


图 3 (a) 图和 (b) 图为肥皂膜白光干涉得到彩色干涉图, (c) 图为 RGB 原理分析图, (d) 图为白光干涉颜色随厚度分布图像

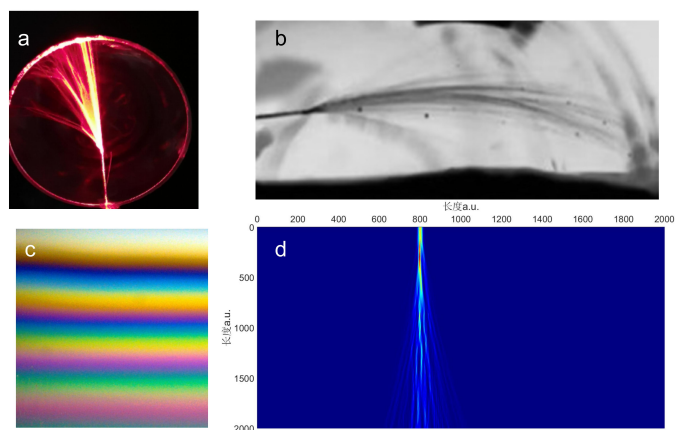


图 4 (a) 图和 (b) 图为实验中得到的“直型分支流”, (c) 图为产生“直型分支流”的薄膜厚度分布干涉图, (d) 图是平均厚度递增产生的“直型分支流”

#### 4.1.2 RGB 厚度重建

利用法布里波罗共振腔光强与肥皂膜厚度的关系,可以得到随着肥皂膜厚度改变时,不同波长的光强度的变化 (Fig. 3(c)),从而得到白光干涉时不同厚度的颜色分布图 (Fig. 3(d))。

$$I_r = I_0 \frac{4R \sin^2(\Delta)}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\Delta)} \quad (\text{S.16})$$

其中,  $\Delta$  为上下表面相干光的光程差

$$\Delta = \frac{2\pi n_{\text{soap}} d}{\lambda} \quad (\text{S.17})$$

$R$  为反射系数,根据菲涅尔公式可以表示如下

$$R = \frac{(n_{\text{soap}} - n_{\text{air}})^2}{(n_{\text{soap}} + n_{\text{air}})^2} \quad (\text{S.18})$$

利用白光干涉厚度与颜色的分布关系以及实验测得的肥皂膜白光干涉图像,我们可以得到肥皂膜的厚度分布 (Fig. 5(c)(d))。

#### 4.1.3 两种分支流现象

在实验过程中,我们发现了两种行为有明显差异的光须分支流现象,第一种是类似于树枝不断分岔的分支流现象,第二种是分散的直型分支流现象 (Fig. 4(a)(b))。

我们发现“直型放射状”的分支流现象集中在肥皂膜倾斜程度较大的地方,而类似于树枝分岔的分支流现象主要集中在肥皂膜较为平整的肥皂膜中 (这也是前面仿真利用的厚度分布所采取的实验方式)。

我们通过白光干涉实验测得肥皂膜倾斜程度较大处干涉图像 (Fig. 4(c)),基于对“直型放射状”的分支流产生处的厚度分析,我们发现这些部分的厚度分布在大尺度上呈现从上至下的厚度递增分布,而这是较为平整的肥皂膜所不具有的特征。为了验证我们的猜想,我们生成了一系列平均厚度从上至下递增的随机势进行仿真,我们都得到了激光束分散的直型分支流现象。在仿真过程,我们采取的平均厚度递增方式包括线性递增、指数递增、对数递增,均出现了直型分支流现象 (Fig. 3(d)),与实验测得的厚度仿真图像相吻合。

#### 4.1.4 周期性随机势

上述肥皂膜厚度在大尺度的递增导致了直型分支流现象的出现,我们进一步探究不同规律的随机势分布对实验现象的影响。

我们发现,在实验仿真时,当随机势周期性的尺度与激光波长相当时,不再出现分支流现象,而当周期性的尺度远远大于波长尺度时,仍然可以观察到分支流现象。当周期性尺度小于波长尺度时,肥皂膜可以视为光滑,这时不产生分支流现象,实验与理论相吻合。

## 5 两个问题

### 5.1 模的阶数对实验现象的影响

根据方程S.12可得到不同波长 (实验采用的主要是 650nm, 532nm 以及 405nm 的激光) 下等效折射率与厚度在不同阶模式下的关系。可以发现,在实验测得的肥皂膜厚度范围 (集中分布在 400nm, 但是也存在高于 600nm 的厚度分布), 基模始终存在, 未被截断, 而大于第三阶的模均被截断。

为了探究模的阶数对分支流现象的影响,我们采取了两种实验方式,第一种方式利用不同波长的激光小角度入射到肥皂膜中,观察分支流现象。第二种方式,利用油膜形成波导,而油膜的厚度比肥皂膜要大得多。

#### 5.1.1 不同波长激光对实验现象的影响及分析

根据前面的分析可知,波导横截面尺寸与波长在同一数量级,考虑肥皂薄膜厚度在 100nm 到 1000nm 之间,即可见激光与其较为匹配。可是,通过实验观测,不同波段的实验现象相差较,以下是具体分析。

实验采用了 532nm 的绿色激光, 650nm 的红色激光, 以及 405nm 的紫色激光。

实验结果发现,绿光的现象最为明显,红色激光也可以观测到现象,但是紫色激光几乎看不到光。考虑到人眼对紫光的识别能力较弱,我们通过手机进行拍摄观察,可以发现,紫光的光斑不是细长形状,而是模糊的成团形状,但是仍然无法直接观测到分支流现象。对于实验现象的分析如下:

- 1 人眼的光锥细胞对于 550nm 的绿光最为敏感,所以做实验的时候直接观测会发现绿光现象最明显。
- 2 红色激光波长较长,根据瑞利散射公式可以发现,其散射能力较弱,所以相同功率的红光和绿光,观察现象差异较大。



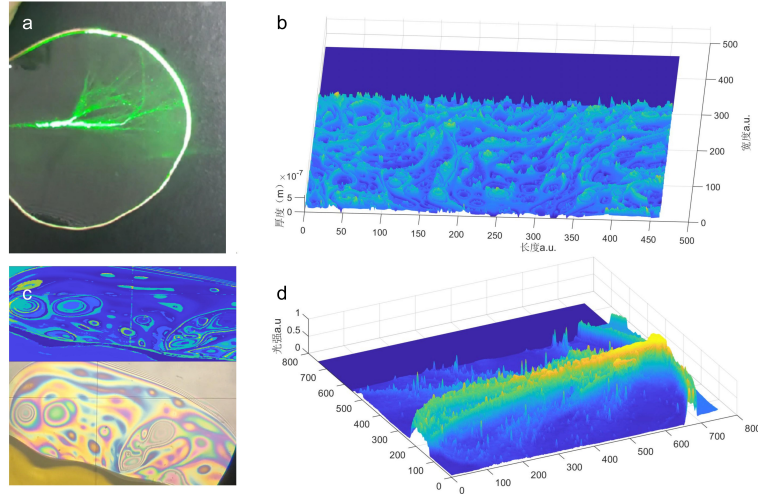


图 5 (a) 图为实验拍得光须现象, (b) 图为对光须现象进行强度提取得到的强度分布, (c) 和 (d) 为对白光干涉实验得到的干涉彩图进行厚度重建得到的图像

- 3 波长与肥皂膜厚度不匹配导致的耗散。波导中相位不匹配会导致能量衰减。
- 4 紫色激光被激发的波导模式高达四阶。除了基模外, 较多的更高模式的激光被激发。由于对于每一种模式将出现特定的分支流, 我们猜测分支流现象会随着模数的增加导致单个模式的分支流衬比度下降, 最终我们观察到的衬比度较低的分支流现象, 甚至是不出现分支流现象。由于第二种模式具有反对称的波函数, 而离开激光谐振腔的高斯光束波函数是圆对称的, 故第二种模式不被激发。对于绿色激光和红色激光, 基模仍然占主导<sup>[1]</sup>。

### 5.1.2 厚度对肥皂膜的影响

根据上述讨论可知, 改变波导的尺度会改变波导中的电磁场模式阶数, 故我们采取机油形成波导。利用激光入射时并没有发现分支流现象, 基于上述分析这个现象可以得到解释。

关于肥皂膜波导的阶数仍需后续进一步的研究。

## 5.2 如何理解随机势和关联长度?

### 5.2.1 随机势

肥皂膜出现随机势的原因是肥皂膜内存在熵和能量竞争, 导致肥皂膜的厚度发生一定程度上的涨落, 并且外界会存在不可避免的扰动, 导致

肥皂膜厚度大尺度的波动。考虑肥皂膜的厚度分布时不可避免地要考虑多个粒子的相互作用行为, 这在量子场论和多体物理中经常出现。但是我们往往不能通过求解每个粒子的薛定谔方程来得到整体的行为, 首先这是不切实际的, 再者这是没有意义的。

因此, 为了描述肥皂膜厚度的无序分布, 我们引入随机势这个概念来描述肥皂膜的厚度分布状态。根据前面肥皂膜的色散方程可以得到厚度与等效折射率之间的关系, 从而得到等效折射率分布的势函数, 即薛定谔方程 (S.13) 中的势函数项。

这也可以解释为什么外界看似微弱而又缓慢的扰动却导致了快速变化的光须分支流现象。

- 肥皂膜厚度的涨落, 如果考虑液体分子的热运动速率
- 肥皂膜厚度变化引起的等效折射率随机势的变化对光束传播产生的影响是非线性的, 因此外界微弱而又缓慢的扰动会导致快速变化的光须分支流现象。

### 5.2.2 微扰

在形式上, 外部施加的扰动是由对系统的哈密顿量的一个 (随时间相关的) 贡献来描述的<sup>[2]</sup>。

$$\hat{H}_F = \int d^d r F'_i(\mathbf{r}, t) \hat{X}'_i(\mathbf{r}) \quad (\text{S.19})$$

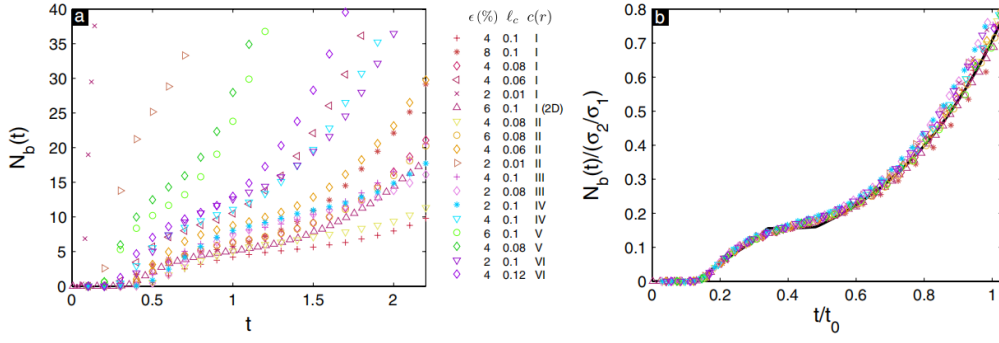


图 6 (a) 分支流分支数目在传播方向上的极大值  $N_b$  随时间变化的曲线, (b) 图 (a) 图重新标定的曲线。可以发现, 重新标定后, 所有曲线落在同一条曲线上

在这里,  $F'_i$  是广义力 (对应于广义坐标  $\hat{X}'_i(\mathbf{r})$  作用到系统的扰动), 广义力  $F'_i$  与  $\hat{X}'_i(\mathbf{r})$  的关系是难以确定的, 在  $F'_i$  很微弱的时候, 可以近似为线性关系。

### 5.2.3 关联长度

微扰产生的广义力即随机势的梯度, 为了描述随机势, 我们引入关联长度在实验和理论之间形成联系。

在给定了随机势分布之后 (即已知  $V(x, z)$  (方程 S.14)), 选取适当的数学统计函数  $g$  (后面会解释这个函数的选择不影响理论, 只要是连续的, 可积的函数)。自相关函数写为

$$c(\mathbf{r}) = \langle V(\mathbf{r}')V(\mathbf{r}'+\mathbf{r}) \rangle = \epsilon^2 g(|\mathbf{r}|/l_c) \quad (\text{S.20})$$

其中,  $\epsilon$  反映随机势的强度 (给定了随即势分布即可求出), 计算方式见下文。由此式可以看出, 给定随机势分布, 对于给定的点中间项可以求出, 可以求出关联长度, 对于每一个点, 计算得到的关联长度可能不相等, 但是关联长度会在一个范围 (基于我们考虑的是均匀随机势)。换言之, 通过给定关联长度和设置随机势强度  $\epsilon$ , 也可以生成一个随机势能分布。取定一个点之后, 计算其随机势的强度为

$$\nu_0 = \frac{\sqrt{\langle V^2 \rangle}}{2E} = 0.5 \sqrt{\frac{\langle n_{eff}^4 \rangle}{\bar{n}^4} - 1} \quad (\text{S.21})$$

随机势的关联长度描述的是在多大的尺度范围内  $V(x)$  是相关联的, 即考虑其短程有序性。用数学的方式来描述的话, 可以根据统计力学定义一个关联函数。自相关函数为

$$c(\mathbf{r}) = \langle V(\mathbf{r})V(0) \rangle = \nu_0^2 g(|\mathbf{r}|/l_c) \quad (\text{S.22})$$

其中  $g(0) = 2E$ 。

对我们实验测得的肥皂膜厚度进行分析, 得到关联长度  $l_c$  在  $0.1 \sim 0.3 \text{ mm}$  之间, 随机势强度  $\nu_0$  在  $0.03 \sim 0.04$  之间。

## 6 研究展望

### 6.1 随机势的统计特征起着关键作用

根据研究发现, 分支流的分支数目在传播方向上的极大值在不同类型的连续随机势上随着随着时间的变化都可以利用特征参数重新标定到同一条曲线上<sup>[3]</sup>。这反映了, 决定分支流分支数目在传播方向上的极大值的是随机势的统计特征, 与其具体形式无关。这对于分支流中粒子或者波对于随机势的非线性响应提供了重要的切入口。仿真实验曲线如图所示 (Fig. 6), 其中,

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial^4 c(x, y)}{\partial y^4} \Big|_{y=0} \quad (\text{S.23})$$

$$\sigma_2^2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial^6 c(x, y)}{\partial y^6} \Big|_{y=0} \quad (\text{S.24})$$

$$t_0 = \epsilon^{-2/3} l_c \quad (\text{S.25})$$

这些参数只与前面所述的关联长度  $l_c$  和随机势强度  $\epsilon$  有关, 故分支流的分支性状只与随机势的统计特征有关, 这个特点值得进一步探究。

### 6.2 波导的尺度和模的阶数

分支流现象在电子, 大气环流和海洋中曾出现, 但是这个现象不易被观测到, 关键是要得到合适的尺度。在激光分支流的波导模型中, 肥皂膜的厚度尺度与激光波长相当。我们曾尝试用油膜形成波导来进行实验, 但是没有观察到现象。正如前文所述, 厚度和波导的阶数有密切联系, 关于波导阶数对分支流现象的影响值得进一步探究。

## 7 致谢

在对光须分支流现象的研究过程中，我最想感谢 Yongjin Jing 朋友提供的宝贵建议和帮助，感激舍友对我在宿舍进行实验的包容和支持，以及部分好友在光须实验和仿真中提供的帮助。

### 参考文献

- [1] PATSYK A, SIVAN U, SEGEV M, et al. Observation of branched flow of light[J]. Nature, 2020, 583(7814): 60-65.
- [2] ALTLAND A, SIMONS B D. Condensed matter field theory[M]. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- [3] METZGER J J, FLEISCHMANN R, GEISEL T. Universal statistics of branched flows[J]. Physical review letters, 2010, 105(2): 020601.