相互作用系统中的局域不可逆性 (读书报告)

莫梁虹 *

中山大学 物理学院，广州 510275

1 引言

时间之箭，即时间的单向流动性 (不可逆性)，是一个尚未被解决甚至理解的问题。无论是经典还是量子的微观孤立体系，物理规律都有良好的时间反演对称性，而在宏观的多体系统中，则会涌现出时间之箭 (孤立系统熵永不减)，这似乎说明了时间之箭是一种统计效应，可是时间的可逆性是如何在多体的统计效应中消失的呢?

考虑一个粒子 (可以是其他元素) 之间完全相互独立的系统，由于每个粒子之间独立运动，故这个系统不存在所谓的平衡态，也就不存在时间之箭了。这个例子说明了，“相互作用”会导致时间流动的不可逆性。”相互作用“可以是相互作用力，或者简单的碰撞 (近独立子系统)。

这一点的物理图像上也可以很好想象。考虑一个经典体系，当系统内部存在相互作用时，总会存在一个刚刚好的态，使得系统里面的每一个粒子处于平衡。换句话说，系统的相互作用会促使其他初态抵达这个平衡态。一旦系统抵达这个平衡态，任何关于初态的信息都被抹除了，由于所有粒子的初态信息丢失，故系统的熵增加，达到平衡态时熵最大。

这里为什么强调经典体系呢? 这是因为在孤立的量子体系中，时间演化满足幺正性保证了初态信息不会丢失，虽然对于一些不可积的系统会存在本征态热化，但是整个系统是无法实现热化的 [1]。

但是如何量化这种相互作用导致的不可逆性呢? 文献 [2] 使用 KL 散度来量化这种不可逆性，并提出了一种将其进行 n 体相互作用分解的方法。

2 主要思路及要点总结

文献 [2] 主要

1. 提供了将多自由度相互作用系统的局域不可逆性按照 n 体相互作用进行展开的一般框架，并举例说明;
2. 运用这种分解方法研究了蜥蜴的视网膜神经元细胞在相互作用中的不可逆性，发现两体相互作用项对不可逆性贡献最大。

*邮箱: molh3@mail2.sysu.edu.cn

2.1 局域不可逆性的分解

不可逆的定义是，观察一给定轨迹 (过程)$x(t)$ 及其逆过程 $\tilde{x}(t)$, 两者在同一时刻的概率不同。我们可以用 KL 散度 D_{KL} 来定义不可逆性：

$$E \equiv D_{KL}(P[x(t)]||P[\tilde{x}(t)]) = \sum_{x(t)} P[x(t)] \log(\frac{P[x(t)]}{P[\tilde{x}(t)]}) \tag{1}$$

局域不可逆性定义为：

$$\dot{I} = \sum_{x,x'} P(x \to x') \log[\frac{P(x \to x')}{P(x' \to x)}] \tag{2}$$

其中，

$$P(x \to x') = \mathrm{P}rob(x_t = x, x_{t+1} = x')$$

由此可见，不可逆性反映的是正向时间和逆向时间分布之间的差异。

假设整个系统 x 包含多个相互作用的基本单元 $x \equiv \{x_i\}, x = 1, 2, ...N$. 那么整个系统的局域不可逆性可以改写为所有单元的贡献之和：

$$\dot{I} = \sum_{i=1}^{N} \dot{I}_i \tag{3}$$

其中

$$\dot{I}_i = \sum_{x_{-1}} \sum_{x_i, x_i'} P_i(x_i \to x_i', x_{-i}) \log[\frac{P_i(x_i \to x_i', x_{-i})}{P_i(x_i' \to x_i, x_{-i})}] \tag{4}$$

我们可以将总的不可逆性分解成每个元素的独立贡献以及相互作用贡献的部分, 即

$$\dot{I} = \dot{I}^{ind} + \dot{I}^{int} \tag{5}$$

其中，

$$\dot{I}^{ind} \equiv \sum_{x_i, x_i'} P_i(x_i \to x_i') \log[\frac{P_i(x_i \to x_i')}{P_i(x_i' \to x_i)}]$$

$$\dot{I}^{int} \equiv \dot{I} - \dot{I}^{ind} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{x_i, x_i'} P_i(x_i \to x_i') D_{KL}[P_i(x_{-i}|x_i \to x_i')||P_i(x_{-i}|x_i' \to x_i)]$$

由于 $D_{KL}[P_i(x_{-i}|x_i \to x_i')||P_i(x_{-i}|x_i' \to x_i)] \geq 0$, 故相互作用项 $\dot{I}^{int} \geq 0$, 即相互作用总是增加系统的不可逆性. 进一步，可以将相互作用导致的局域不可逆性分解为两体，三体等的相互作用贡献之和，即

$$\dot{I} = \dot{I}_{ind}^{(1)} + \dot{I}_{int}^{(2)} + \dot{I}_{int}^{(3)} + ... + \dot{I}_{int}^{(N)} \tag{6}$$

2.2 实验部分

人类对于时间之箭的感知尚未被完全理解，但是可以简单地归因于神经元细胞的复杂活动。近期实验进展使得同时记录大量的视网膜神经细胞成为可能，这为从神经元的相互作用研究局域不可逆性成为可

能。

论文同时检测了蜥蜴视网膜的 53 个神经元对外界输入信息的响应，结果发现，

1. 当视觉输入处于稳态时，不可逆性更强。

2. 考虑 2-5 体相互作用时，局域不可逆性 $\dot{I}$ 较大. 且两体项对局域不可逆性的贡献最大。

3 质疑与讨论

3.1 原理部分

原理部分文章主要给出了 n 体相互作用对局域不可逆性进行分解的方法。现在我们将 KL 散度改写为熟悉的香农熵形式.

给定 t_n 时刻的分布 P 和 t_{n+1} 时刻 Q,

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{x \in \chi} p(x) \log p(x) - \sum_{x \in \chi} p(x) \log q(x) \tag{7}$$

$$= H(P,Q) - H(P) \tag{8}$$

其中 $H(P,Q)$ 是 P 与 Q 之间的交叉熵,$H(P,P) = H(P)$。由此可见 KL 散度反映的是两种分布之间的统计距离。

因此原理部分相当于对香农熵进行 n 体相互作用的分解。由于香农熵的量子版本就是冯诺依曼纠缠熵，而我们知道，由于存在长程纠缠 [3], 对纠缠熵进行局域自由度的分解 (等价于将密度算符进行局域自由度的直积分解) 是不可能的。因此一个自然的问题是，文章对不可逆性的 n 体相互作用分解是否严格正确，还是只是一种近似处理的研究方法?

从式8可以看出，对不可逆性的 n 体相互作用分解等价于按照 n 阶互信息展开交叉熵和香农熵。对于两体互信息 $I(X,Y)$ 总是可以证明其为正值，且可以改写成 KL 散度的形式，但是对于 $n \geq 3$ 的互信息，并不能确保其正定性，更一般地，对交叉熵定义互信息也不能确保其正定性。因此, 式6分解的合理性还需要再进一步考究。更具体来说，还需要考虑该分解是否满足归一性，对称性，在量子情形下还要满足幺正演化的不变性。由于文献没有将 n 体分解的具体形式写出，故难以直接验证，一般情况下可以在具体模型中验证。

3.2 实验部分

这两个实验结果都相当反直觉。

一方面，当视觉输入处于稳态时，似乎系统处于平衡态，因此此时满足细致平衡条件。

当正规马尔可夫链 X_n(P 是 X_n 的转移矩阵) 的分布 Π 满足细致平衡时，

$$\Pi_i P_{ij} = \Pi_j P_{ji}, \quad \forall i,j \in \text{state space} \tag{9}$$

该马尔可夫链是可逆的。细致平衡在非平衡态中会被破坏，因此会导致马尔可夫链不可逆。而实验结果发现，对不可逆性贡献较大的是稳态而非非稳态。换句话说，实验表明，当系统处于平衡态时，相互作用仍然会导致系统的细致平衡被破坏。这个表述本身就与细致平衡原理相矛盾，因此，尽管视觉输入处于稳态，神经元仍然处于非稳态。

根据式8, 若系统处于平衡态，则 $P=Q$，则 $D_{KL}=0$。故尽管视觉输入处于稳态，但是整个系统仍然处于非平衡态。

另一方面，对局域不可逆性 $\dot{I}$ 按照 n 体相互作用进行分解，$\dot{I}_{int}^{(2)}$ 贡献最大。可是我们知道，两体相互作用往往有良好的解析解，而对于三体甚至更多体的相互作用，则会存在混沌现象。混沌意味着，给定不同的初态，系统的演化方式会截然不同。初态的高度依赖性自然破坏了时间的反演性。

但是从熵 (式8) 的角度来看, 这也许是合理的，对于某些系统 (如二维共形场 [**?**])，通过一些特殊的变换 (如 Rindler 变换)，可以将热力学熵转换成纠缠熵，而纠缠熵主要由短程纠缠贡献，即主要是两体的相互作用。

4 延伸讨论

根据广义相对论, 时空本质上只是一种几何结构, 时间的方向为何会与多体系统的统计属性有联系呢? 按照霍金 [4] 的观点，时间的方向定义为熵增的方向，奇妙的是这恰巧与宇宙膨胀的方向相同 (临界点前)。

更加奇妙的是，利用全息对偶，这两者之间的方向性也许能够得到更好的理解。简单来说，时空本身可能是量子态的纠缠结构。考虑量子态是一个随机态 [5], 其熵增的方向与时间演化的方向相同。

参考文献

[1] Deutsch J M. Eigenstate thermalization hypothesis[J/OL]. Reports on Progress in Physics, 2018, 81(8): 082001. DOI: 10.1088/1361-6633/aac9f1.

[2] Lynn C W, Holmes C M, Bialek W, et al. Decomposing the Local Arrow of Time in Interacting Systems[J/OL]. prl, 2022, 129(11): 118101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.118101.

[3] Chen X, Gu Z C, Wen X G. Local unitary transformation, long-range quantum entanglement, wave function renormalization, and topological order[J/OL]. prb, 2010, 82(15): 155138. DOI: 10.1103/PhysRevB.82.155138.

[4] HAWKING S W. Arrow of time in cosmology[J]. Physical Review D, 1985, 32(10): 2489.

[5] Hayden P, Nezami S, Qi X L, et al. Holographic duality from random tensor networks[J/OL]. Journal of High Energy Physics, 2016, 2016(11): 9. DOI: 10.1007/JHEP11(2016)009.