

从物理学史看数学在物理学中的有效性

莫梁虹

中山大学 物理学院, 广州 510275

【摘要】 数学在物理学中的有效性一直很让人着迷, 因为每一次物理学史上的范式革命都呈现了物理图像背后深刻的数学结构。从物理学家的角度来看, 那些对数学之美异常敏锐的物理学家在整个科学史发展的往往起着颠覆性的作用。但是在物理学研究中仅停留在数学天马行空的理论推导中会导致严重的弊端, 物理学归根结底仍需要实验作为支撑。

【关键词】 物理图像, 数学结构

1 缘起

在一次物理学史课后讨论中, 李志兵老师曾提出了关于物理学革命的一种观点。他猜想, 在未来, 可能会发生一次物理学的大革命, 基础物理学研究的工具不再是数学, 而是计算机。曼诺迪诺在《费曼的彩虹》^[1]一书中提到费曼也曾经说过类似的话, “忘了弦理论吧, 别再想着用数学来解决量子色动力学。计算机, 这才是解决方法。计算机才是未来的趋势。”

这使我产生了疑惑, 我一直深信着, 自然法则是用最优美的方程去书写的, 未曾试想过离开了数学的物理研究。为了研究数学和物理的关系, 我对物理学史作了进一步的了解, 由此产生了这篇文章。

2 数学在物理学中的作用

数学和物理学的关系似乎经常被物理学家津津乐道, 从费曼的巴比伦人和希腊人的类比, 到维格纳的《数学在自然科学中不合理的有效性》, 再到徐一鸿的《数学在基础物理中的有效性》, 至今仍然没有一个令人满意的回答。

费曼曾说过, 如果上帝没有创造数学, 那物理学家大概晚一周就能创造出来。在费曼看来, 物理学家可以发明任何他们需要的东西, 包括他们需要的所有数学。数学作为自然科学描述的语言, 似乎真的能够在迫切需要的时候被发明出来, 正如牛顿和莱布尼兹创造了微积分。费曼认为数学只是物理中的一种工具, 但是开门的钥匙不只一把,

我们总可以用尽量少的数学对现象作出解释。费曼最著名的工作之一就是费曼图, 他几乎不用数学形象地解释了量子场论中各种粒子的相互作用。因此, 在他看来, 物理学完全可以独立于数学而发展。

费曼的想法其实代表了那个年代大多数物理学家的思想, 可是这是正确的吗? 数学仅是作为一种工具存在于物理理论中吗?

在作出回答之前, 我们先来看看法拉第和麦克斯韦的故事。

2.1 法拉第和麦克斯韦的故事

由于家境贫困, 法拉第从小就辍学了, 这就导致了他数学功底很薄弱。但是, 所幸的是, 他的实验能力很强。据不完全统计, 法拉第是物理学史上最勤快的一名实验科学家了, 虽然他的实验涉猎范围极广, 但是突出的成就是在电磁学领域。他在1831年到1854年的23年间所有实验被汇编成三卷本, 取名为《电学的实验研究》。由于他的数学功底不足, 他对于实验规律的描述只能基于他想象到的符号或图像, 比如说描述相互作用的法拉第力线, 比如说描述变化的磁场产生的电紧张状态。他首次引入了场的思想, 突破了前人超距作用的观点。但是由于没有数学语言定量的描述和推理, 法拉第的结论仍然处于较为含糊的状态, 尤其是对电紧张状态的定义。

这个时候, 麦克斯韦登场了。麦克斯韦从小就经历良好的数学教育, 在他十五岁那年, 他撰写的圆锥曲线论文还在皇家会议上被宣读。十八世纪

的欧洲，盛行着定量描述的科学方法，麦克斯韦敏锐地注意到电磁学领域仍然是定量描述的荒芜之地。万幸的是，他听从了汤姆森的建议，研读了法拉第的《电学的实验研究》，这第一步奠定了他后来的成功。其实当时在欧洲有很多科学家在研究电磁学现象的量化描述，但是大都跟随超距作用的思想，视“场”为洪水猛兽。不久之后，麦克斯韦给出了电紧张状态的精确定义，同时预测了电磁波的存在。更为重要的是，在麦克斯韦的第三篇论文中，他提出了麦克斯韦方程组，正是这篇文章在历史上第一次清晰地阐明了场论的概念基础——能量储存在场中。“场”可谓是物理学中最重要的概念之一，从电磁场，到广义相对论，再到规范场论，都是基于场的思想。麦克斯韦将“场”的概念从模糊的物理图像量化为数学描述，使得其具有可以延伸和推广的可能性。

法拉第天赋异禀的物理直觉，在物理学发展中具有至高的地位。但是物理直觉是物理的全部内容吗？如果没有认识到电磁场的行为与微分方程和矢量分析的数学结构之间的联系，单靠法拉第型物理学家可以建立出电磁场理论吗？

2.2 算术和数学

物理和数学的关系最迷人之处就在于，物理学家为描述现实世界创造出来的理论竟然与数学家以纯粹思考构造出来的数学结构殊途同归，这是不可思议的。

按照徐一鸿和维格纳的观点，数学不是作为一种工具而存在于物理理论之中。作为工具的那一部分，是算术，即针对具体的物理情景进行计算。徐一鸿教授说，“一位够聪明的物理学家（暂时定义成显然比我更聪明的某人）在有限时间内，遵循大致上直截了当的逻辑，却无法完成的那种研究就是数学（至于有限时间是多长，就让各位去烦恼）；其他的都是算术。举例来说，我可能可以掌握勒让德方程解的性质，因此所有这些勒让德方程的性质绝对都是算术。另一方面，从高维球面有意义的映射到低维球面的所有可能性只有三种，亦即 $S_3 \rightarrow S_2$ $S_7 \rightarrow S_4$ $S_{15} \rightarrow S_8$ ，这是我所谓的数学。至于称某项理论是数学还是算术，某种程度上依赖于我们看待的观点。如果能认识到勒让德多项式和旋转群的表示有关，就表示我们对旋转群的结构性质有一些理解。简而言之，我将数学联系

到结构的或整体的理解，而算术则和计算有关。”^[2]

因此，将条件式陈述应用到我们感兴趣的特定条件上，只是算术；而通过数学概念和数学结构建构物理体系的那部分，才是数学。比如说，量子力学的希尔伯特空间是复希尔伯特空间，对于非专业者或者 19 世纪以前的物理学家而言，这既不自然也不简洁，但是它却是表述量子力学形式系统的必要条件。这正是因为复希尔伯特空间的数学结构反映的规律与物理现象是一致的。

3 物理直觉和数学的共性

前面的讨论也启发了我们对于物理直觉或者物理图像的进一步认识。无论是法拉第“力线”还是复希尔伯特空间，这都不是单靠对生活的观察能直接推得的。这些概念被提出的时候经历了无数的反对，但是至今看来，这确实是正确的。如果我们因为数学过于抽象而视数学为洪水猛兽，那么我们与当年“场”和量子力学的反对者无异。但问题在于，我们的直觉很有可能是错误的。杨振宁先生在他的回忆录中《我的学习和科研经历》^[3]曾提到这一点。杨振宁没有学过高中物理，为了参加西南联大的入学考试，他借了一本高中物理教科书，闭门自学了几个星期。在这段时间里他发现自己适合研读物理，因此在联大时他选择了物理系。令他记忆犹新的是，那时他在教科书上了解到，圆周运动加速的方向是向心的，而不是沿着切线方向的。最初他觉得这与他的直觉感受不同，仔细考虑了一两天以后才了解，原来速度是一个矢量，它不仅有大小的而且是有方向的。他在回忆录中评论说：“这个故事给了我很大的启发：‘每个人在每个时刻都有一些直觉，这些直觉多半是正确的，可是也有一些需要修正，需要加入一些新的观念，变成新的较正确的直觉。我从而了解到：一方面直觉非常重要，可是另一方面又要能及时吸取新的观念修正自己的直觉。’”

正确的物理直觉和数学理论一样，都不是一蹴而就的，都是要基于大胆地想象，经历严格的逻辑考验的。数学是为了有技巧地运用概念和规则而发明的学科，是先验的逻辑体系。而物理学家是寻找现实世界的规律的学科。这两者的发展和突破都离不开人大胆地想象，也许正是这一点共性，导致了“数学在物理学中的有效性”。

被杨振宁称为 20 世纪物理学三个主旋律的量子化、对称性、相位因子无一不体现了“物理图像背后丰富的数学结构”。

量子化这个概念早在普朗克拟合实验曲线之前就已经隐藏在了物理学的数学结构里面了，比如说统计力学中相空间的相格，还有驻波的模式是离散的。

物理学中的对称性最奇妙的一点非诺特定理莫属了，每一个对称性都对应着一个守恒量。时间反演不变性对应着能量守恒，空间平移不变性对应着动量守恒。不仅如此，群论在物理学中的广泛应用也对称性体现了最深刻的物理背后总藏着最奇妙的数学。

不管是电磁波的相位因子还是量子力学波函数的相位因子，都有其神奇之处，前者影响了能量的分布，后者决定了电荷守恒。

这三个主旋律都难以基于对物质世界的观察而得到，更多地需要物理学家大胆的猜想，再向现实世界寻求响应。

杨振宁先生在悼念陈省身先生的文章中写道：“回想起我们的生平，觉得我们两人当初似乎是在爬同一座大山，自不同的山麓开始，沿着不同的途径，却没有认识到我们攀登的竟是同一高峰。”^[4] 陈先生是数学界的大家，他将几何、代数、分析和拓扑联系在一起，推动了微分几何这一数学分支的发展。杨振宁先生此般感慨是因为他发现物理学中的规范场论与微分几何的纤维丛有很大的关系。规范势是主丛上的联络，规范场强是主丛上的曲率，物质场是伴丛上的截面等。物理学家为描述真实世界规律的理论又一次与数学理论殊途同归了。

4 物理对数学的影响

数学和物理总是相互促进的，出于对称性的考虑，这一部分谈论一下物理对数学的影响。虽然大部分物理学家都把数学（算术）当作工具来使用，但是不可避免会出现工具不够用的情况，这个时候物理学家总是直接或者间接地促进了数学的某个领域的发展。最经典的例子非狄拉克函数莫属了。狄拉克在研究海森堡和薛定谔的量子力学描述时改变了一些数学规则。他在计算过程中大量使用了一种让数学家感到恐惧的数学函数，它的

图像含有一个相当尖锐的峰，无限细也无限高。他认为这个函数肯定是正统数学里面的一部分，理由很简单，因为他很好用，而且时推导结果总是正确的。二十年后的事实证明狄拉克是正确的，这个“狄拉克函数”促进了数学泛函分析的发展。

5 两类物理学家

有一次狄拉克曾被问道关于物理核心信念的问题，他走向了黑板并写下，“自然的法则应该用优美的方程去描述”。^[5] 史蒂文·温伯格对他曾评论：“狄拉克告诉学物理的学生不要烦恼方程的物理意义，而要关注方程的美。这个建议只对那些于数学纯粹之美非常敏锐的物理学家才有用，他们可以仰赖它寻找前进的方向。”^[6]

这类对于数学纯粹之美非常敏锐的物理家不多，但是他们的名字我们耳熟能详。最著名的爱因斯坦，爱因斯坦曾说，要用“自然”的方法拓展潜藏在既定基础理论背后的数学结构。具体地说，爱因斯坦发现了麦克斯韦方程组不满足伽利略不变性，这个理论缺陷是致命的。由此他重新审视了牛顿力学体系和电磁场理论，经过数年努力构建了相对论。运用微分几何构建起来的相对论数学结构优美而简洁，这深深地吸引了狄拉克。在广义相对论问世之前狄拉克曾自学了一部分黎曼几何，但是他当时误认为曲面几何“与真实事件”毫无关联。广义相对论的问世无疑深刻影响了狄拉克。

狄拉克和麦克斯韦一样，在大学期间修读了数学，但是在这之前他还修读了工程学。这两门专业对狄拉克的影响在他后期的物理研究中可见一斑：大胆的想象、严密的逻辑推导与真实世界的结合反映了自然的真相。他根据对称性预测正电子和磁单极子的存在，前者得到实验的证实，但是后者仍然困难重重。值得一提的是，狄拉克关于磁单极子的证明第一次将拓扑学引入物理学中。虽然寻找磁单极子的实验尚未成功，但是这背后丰富的数学结构总是引人遐想。对于数学严谨的追求，使得他无法接受量子场论中利用重整化来处理无穷发散的问题，这导致他后期研究有些偏离主流，他说，“... 如果你对积分范围作了截断，你便引入了一个非相对论的情况，并且破坏了相对论不变性。如果代价只是破坏了相对论不变性，量子电动力学仍可以在一个合理的数学架构。然而比起背

离基本的数学原则忽视发散，相对论不变性的破坏问题还要小的多。”这个问题正如磁单极子一样，孰对孰错还待未来揭晓。

另外一类物理学家的研究方法是正统的物理学研究方法：在实验中找问题。这样的物理学大家数量相当众多，在此也不必举例了。但是，值得思考的是，物理学每一次范式革命的主角都是第一类物理学家。是不是因为深究物理规律背后的数学结构可以让物理学家处于高屋建瓴的位置来审视整个理论呢？这个问题爱因斯坦也思考过，因此他提出了利用数学结构发展物理理论的物理学研究方法（即有别于传统研究方法）。

这种方法在现代理论物理学中已经大量运用，但也导致了一些难以调和的问题。为了使量子力学和相对论相一致，数学越来越多地进入物理领域。大量的物理学家以纯数学为指导来发展自己的理论，这导致物理学充斥着天马行空的想法，却没有人能够提出验证它们的实验。如果一个物理概念无法被任何实验观测到，那么它就只有形而上学上的意义，而不具备科学上的意义。

6 写在最后的话

这篇文章我写了又删写了又删，每当我尝试对这个问题作出回答时，我又产生了更多的疑惑，但是我始终选择用这个问题作为物理学史的课程论题，是因为我相信这个问题是有价值的，尽管我可能不能给出一个好的答案。可能这个问题太宏大了，是我现在仍不能承受之重。但是在对这个问题否定又否定的思考中，我真正明白了爱因斯坦所说的话：“这个世界最不可理解之处在于，它竟然可以被理解。”我比以往更深刻地认识到数学和物理之间的关系，物理的目的在于寻找这个世界运行的规律，但是规律的描述绝不依赖于语言。如果仅仅把数学视为一种语言是片面的，把数学视作计算工具也是片面的。数学概念和数学结构在构建物理理论的过程中也起着至关重要的作用。

不可否认的是，数学为物理提供了实现大一统的数学结构，由不同的物理问题推出来的规律可能具有更广泛的普适性，因为这个定律背后的数学结构是普适的，正如前面所述的对称性导出的守恒律。

过度沉迷于数学的物理研究方法是不可取的，

物理学归根结底要经历真实世界的考证。如果一个物理概念无法被任何实验观测到，那么它就只有形而上学上的意义，而不具备科学上的意义。

对物理系学生最重要的一点启示是，不要轻视数学在物理学中的作用，但是也不要过于沉迷于数学推导。很多时候物理规律会与数学之美殊途同归。

参考文献

- [1] 曼罗迪诺陈雅云. 费曼的彩虹: 物理大师的最后 24 堂课 a search for beauty in physics and in life[M]. [出版地不详]: 费曼的彩虹: 物理大师的最后 24 堂课 a search for beauty in physics and in life, 2007.
- [2] 徐一鸿, 周樹匡, 等. 數學在基礎物理中的有效性威格納之後三十年[J]. 2014.
- [3] 杨振宁. 我的学习与研究经历[J]. 物理, 2012, 41(001): 1-8.
- [4] 杨振宁, 翁帆. 《晨曦集》[J]. 中国出版, 2018, No.435(10): 85-85.
- [5] POLKINGHORNE J. Belief in god in an age of science[M]. [S.l.]: Yale University Press, 1998.
- [6] FARMELO G. The strangest man: the hidden life of paul dirac, quantum genius[M]. [S.l.]: Faber & Faber, 2009.