

# 电动力学

吴粮宇

2023 年 2 月 19 日

## 目录

1	麦克斯韦方程组	6
1.1	静电现象基本理论	6
1.1.1	库仑定律	6
1.1.2	叠加原理	6
1.1.3	电场	6
1.1.4	电场的散度性质-高斯定理	6
1.1.5	电场的旋度性质-安培环路定理	7
1.1.6	电偶极子	8
1.2	静磁现象的基本理论	8
1.2.1	电流	8
1.2.2	安培定律	9
1.2.3	磁场	10
1.2.4	$\vec{B}(\vec{r})$ 的散度	10
1.2.5	$\vec{B}(\vec{r})$ 的旋度	11
1.2.6	磁偶极子	12
1.3	电磁感应定律	12
1.4	麦克斯韦方程组	13
1.4.1	第一条方程	13
1.4.2	第二条方程	13
1.4.3	第三条方程	14
1.4.4	第四条方程	14
1.4.5	总结	15
1.4.6	麦克斯韦方程组的完备性	15
1.5	介质中的麦克斯韦方程组	16
1.5.1	介质的极化及磁化	16
1.5.2	极化电荷与磁化电流	16
1.5.3	介质中的 Maxwell 方程组	18
1.5.4	本构关系	18

1.6	麦克斯韦方程组的边界条件	19
1.7	似稳电磁场	20
1.7.1	似稳场条件	20
1.7.2	似稳电路方程	21
<b>2</b>	<b>电磁场的守恒定律和对称性</b>	<b>22</b>
2.1	真空中电磁场的能量守恒定律	22
2.2	电磁场的动量守恒定律	26
2.3	电磁场的角动量和角动量流	29
2.4	介质中的电磁能量和动量守恒定律	30
2.4.1	电磁能量	30
2.4.2	电磁动量	31
<b>3</b>	<b>静电学 I-导体静电学</b>	<b>32</b>
3.1	静电问题	32
3.1.1	静电基本方程	32
3.1.2	静电条件下导体的边界条件	32
3.2	格林互易定理	33
3.3	导体系的能量、固有能和相互作用能	34
3.3.1	利用静电标势来表示静电能量	34
3.3.2	电容	35
3.3.3	固有能和相互作用能	35
3.4	静电体系的稳定性问题	37
3.4.1	汤姆孙定理	37
3.4.2	恩肖定理	37
3.5	导体表面所受的静电力	39
3.5.1	Maxwell 张量	39
3.5.2	直接计算电荷受力	39
<b>4</b>	<b>静电学 II-电介质静电学</b>	<b>40</b>
4.1	电介质边界条件	40
4.2	唯一性定理	41
4.3	镜像法	42
4.4	格林函数方法	47
4.5	本征函数展开法	48
4.5.1	轴对称的球坐标系问题 (与变量 $\phi$ 无关)	49
4.5.2	与 $z$ 无关的柱对称问题	49
4.5.3	球对称问题 (与变量 $\phi, \theta$ 无关)	49
4.6	多极矩法	53
4.7	多极矩同外场的相互作用	58

4.7.1	电偶极矩在外场中受的力	59
4.7.2	电偶极矩在外场中受的力矩	59
4.7.3	电多极矩在外场中的能量	60
4.7.4	粒子电偶极矩	62
4.8	等离子体中的静电现象	62
4.8.1	库仑屏蔽现象	62
4.8.2	等离子体振荡	64
4.9	自然界中的静电现象	64
4.9.1	大气静电现象和天体电中性	64
4.9.2	尖端放电现象	65
4.9.3	静电吸引细屑	65
<b>5</b>	<b>静磁场</b>	<b>65</b>
5.1	磁场的矢势方程和边值关系	65
5.2	静磁场的唯一性定理	67
5.3	磁场的矢势解法：二维问题	68
5.4	磁场的标量势解法	70
5.4.1	磁标势	70
5.4.2	线性磁介质中磁场问题	71
5.4.3	铁磁介质问题	74
5.5	磁多极矩展开-磁偶极子	76
5.5.1	磁多极展开及磁偶极子产生的势	76
5.5.2	磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩	78
5.5.3	微观粒子的磁偶极矩	80
5.6	静磁场与量子现象	80
5.6.1	超导现象	80
5.6.2	阿哈罗诺夫-玻姆效应 (A-B 效应)	82
5.6.3	磁单极子	83
5.7	介质的磁性	85
5.7.1	顺磁性	85
5.7.2	抗磁性	85
5.7.3	铁磁性	86
5.8	自然界的磁场	87
5.8.1	星际和恒星的磁场	87
5.8.2	地磁场	87
<b>6</b>	<b>电磁波的传播</b>	<b>88</b>
6.1	电磁波在非导电介质中的传播	88
6.2	波的偏振和偏振矢量	91

6.2.1	线偏振 . . . . .	91
6.2.2	椭圆偏振 . . . . .	92
6.2.3	圆偏振 . . . . .	92
6.3	金属的等效介电常数-Drude 模型 . . . . .	93
6.3.1	色散介质的本构关系 . . . . .	93
6.3.2	金属的有效电导率 . . . . .	94
6.3.3	金属有效介电函数 . . . . .	95
6.4	电磁波在导电介质中的传播 . . . . .	95
6.4.1	良导体在 GHz 及以下频段 . . . . .	96
6.4.2	良导体在光波段 (等离子体中的光波) . . . . .	97
6.4.3	非良导体 . . . . .	99
6.5	旋光介质中的电磁波 . . . . .	99
6.5.1	旋光介质的本构关系 . . . . .	99
6.5.2	旋光介质中的电磁波本征态 . . . . .	100
6.5.3	法拉第效应 . . . . .	101
6.6	电磁波在介质面上的反射和折射 . . . . .	102
6.6.1	电磁波边界条件 . . . . .	102
6.6.2	反射、折射的基本规律——Snell's Law . . . . .	103
6.6.3	振幅关系——Fresnel's Law(菲涅耳定律) . . . . .	104
6.6.4	反射率及透射率 . . . . .	106
6.6.5	正入射条件下反射的几点讨论 . . . . .	107
6.6.6	Brewster 角 . . . . .	107
6.7	全反射 . . . . .	108
6.7.1	全反射临界角 . . . . .	108
6.7.2	折射波 . . . . .	109
6.7.3	折射波能流 . . . . .	109
<b>7</b>	<b>波导和谐振腔</b>	<b>110</b>
7.1	波导管中的场方程和边界条件 . . . . .	110
7.1.1	边界条件 . . . . .	110
7.1.2	场方程 . . . . .	110
7.2	矩形波导 . . . . .	112
7.2.1	TE 波 . . . . .	112
7.2.2	TM 波 . . . . .	115
7.3	谐振腔 . . . . .	115
<b>8</b>	<b>电磁波的辐射</b>	<b>117</b>
8.1	势、规范、及其满足的方程 . . . . .	117
8.1.1	势的定义 . . . . .	117

8.1.2	规范条件	118
8.1.3	势所满足的方程	118
8.2	推迟势	119
8.3	多极辐射	121
8.3.1	推迟势的多极展开	121
8.3.2	电偶极辐射	121
8.3.3	磁偶极辐射	124
8.4	线型天线辐射	125
8.5	天线阵	127
<b>9</b>	<b>相对论电动力学</b>	<b>129</b>
9.1	狭义相对论的时空观	129
9.1.1	绝对时空观	129
9.1.2	绝对时空观的困难	129
9.1.3	爱因斯坦的选择	129
9.1.4	洛伦兹变换	130
9.2	物理规律协变性的数学形式	131
9.2.1	物理量按时空变换性质分类	131
9.2.2	物理量的四维时空变换	131
9.2.3	物理规律的协变性	133
9.2.4	速度及四维速度矢量	133
9.3	麦克斯韦方程的协变形式	135
9.3.1	电荷守恒定律-四维电流矢量	135
9.3.2	电磁势方程的协变形式	137
9.3.3	电磁场张量	137
9.4	电磁场的变换公式	138

# 1 麦克斯韦方程组

## 1.1 静电现象基本理论

### 1.1.1 库仑定律

真空中两点电荷之间作用力满足：

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.1.1)$$

### 1.1.2 叠加原理

① 存在多个电荷时：

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (1.1.2)$$

②  $\vec{r}'$  处一个连续带电体对  $\vec{r}$  处带电量为  $q$  的力,  $d\tau'$  为体积微元：

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\rho(\vec{r}')d\tau'}{R^3} \vec{R} \quad (\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}') \quad (1.1.3)$$

③ 两个连续带电体，带电体 1 受到带电体 2 的总的静电力：

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')d\tau d\tau'}{R^3} \vec{R} \quad (1.1.4)$$

### 1.1.3 电场

连续带电体在空间产生的电场：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3} \vec{R} \quad (1.1.5)$$

### 1.1.4 电场的散度性质—高斯定理

① 积分形式：

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1.6)$$

证明：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (1.1.7)$$

1. 闭合曲面包含电荷：

$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \Delta S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot r^2 \cdot \Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega \quad (1.1.8)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.1.9)$$

2. 闭合曲面内不包含电荷：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (1.1.10)$$

3. 线性叠加原理:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\int_{\tau} \rho(\vec{r}) \cdot d\tau}{\varepsilon_0} \quad (1.1.11)$$

② 微分形式:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int [\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})] d\tau = \frac{\int_{\tau} \rho(\vec{r}) \cdot d\tau}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (1.1.12)$$

几何理解:

判断场线在空间的分布是否存在奇点: 散度为 0 时, 场线在此处连续; 散度不为 0 时, 空间则有奇点。

P.S.:

① 直接对电场强度求散度:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}') d\tau' \left( \nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \quad (1.1.13)$$

对比可得:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{R}) \quad (1.1.14)$$

② 恩绍定理:

处于其他电荷产生的静电场中的点电荷不可能处于稳定的力学平衡态, 即静电场中的点电荷不存在稳定的力学平衡。

反证法:

假定静电场中的某点电荷处于稳定的力学平衡态, 则该点电荷偏离平衡位置时必须有一个恢复力, 且该恢复力是其他静电场产生的电场提供的, 力的方向指向平衡位置。不失一般性, 设该点电荷  $q$  为正电荷, 空间位置为  $P$  点, 则包围  $P$  点的任意小闭合曲面上由其他电荷产生的静电场电场强度  $\vec{E}$  必须指向  $P$  处。取球形的闭合曲面, 点电荷  $q$  的位置为球心, 则显然闭合曲面的电通量为负, 这要求该系统在  $P$  处有一个负的点电荷, 这与假设矛盾。因此静电场中不存在稳定的力学平衡状态。

### 1.1.5 电场的旋度性质—安培环路定理

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.1.15)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.1.16)$$

证明:

$$\textcircled{1} \nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \longrightarrow \nabla R = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\textcircled{2} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\nabla R}{R^2} = -\frac{1}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\textcircled{3} \nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \nabla r, \quad \nabla f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \nabla R$$

上式代入场的定义:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') d\tau' \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d\tau' \right] = -\nabla \varphi(\vec{r}) \quad (1.1.17)$$

积分形式:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oint \nabla \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -\oint \frac{\partial \varphi}{\partial l} \cdot dl = -\oint d\varphi = 0 \quad (1.1.18)$$

物理意义: 静电场是无旋场。

微分形式:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \times \nabla \varphi(\vec{r}) = 0 \quad (1.1.19)$$

物理意义: 静电场是保守场。

### 1.1.6 电偶极子

偶极矩:

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad (\text{方向: 由负电指向正电}) \quad (1.1.20)$$

偶极子的电势:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.1.21)$$

P.S.:

分母为  $r^3$ , 因此偶极子的电势比点电荷的电势更快地衰减。

电场强度:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{p} - 3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} \right] \quad (1.1.22)$$

P.S.:

注意:  $\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p}$

## 1.2 静磁现象的基本理论

### 1.2.1 电流

① 概念:

电流:

$$I = \left. \frac{\Delta q}{\Delta t} \right|_S \quad (1.2.1)$$

电流密度:

$$\vec{j} = \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = \frac{\rho \Delta \Omega}{\Delta t \Delta S} = \frac{\rho \Delta S \vec{v} \Delta t}{\Delta t \Delta S} = \rho \vec{v} \quad (1.2.2)$$

联系:

$$\vec{j} = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \implies I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.2.3)$$



## ② 连续性方程:

根据电荷守恒, 空间内任取一封闭曲面 S, 单位时间内流出电荷量应等于曲面 S 内总电荷在单位时间内的减少量:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau \quad (1.2.4)$$

由高斯定理:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{j} d\tau \quad (1.2.5)$$

可得:

$$\int_V \left( \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0 \quad (1.2.6)$$

由于曲面 S 是任意选取的, 所以被积函数恒为零, 即:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.2.7)$$

上式即为连续性方程。

守恒律的普遍表达形式:

$$\text{流密度的散度} + \text{数密度的变化率} = 0$$

P.S.:

在稳定电流情况下, 由于  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{j} = 0$ , 即说明电流线在空间任何一点均没有源头, 即稳恒条件下电流线是闭合无源的。

非稳恒时电流线的汇聚/发散总是伴随着电荷的积累, 亦即  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  项。

## 1.2.2 安培定律

真空中两个电流元 2 对 1 的作用力:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_1 d\tau_1 \times (\vec{j}_2 d\tau_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \quad (\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.2.8)$$

Note: 电流元之间的相互作用力不满足牛顿第三定律, 即  $d\vec{F}_{12} \neq d\vec{F}_{21}$ .

两闭合载流线圈 2 对 1 的作用力:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \quad (1.2.9)$$

由  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ :

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \left[ \frac{d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1 \cdot \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} - \frac{\vec{R}_{12} (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3} \right] \quad (1.2.10)$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} d\vec{l}_2 \oint_{l_1} \left[ d\vec{l}_1 \cdot \nabla \frac{1}{R_{12}} \right] - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\vec{R}_{12} (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3} \quad (1.2.11)$$

$$= 0 - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\vec{R}_{12} (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3} = -\vec{F}_{21} \quad (1.2.12)$$

即闭合回路之间的相互作用力满足牛顿第三定律。

### 1.2.3 磁场

类比电场，作用在电流元  $\vec{j}_1 d\tau_1$  上的力：

$$d\vec{F}_1 = \vec{j}_1 d\tau_1 \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.2.13)$$

其中  $\vec{B}(\vec{r})$  即为电流元  $\vec{j}_2 d\tau_2$  在  $\vec{r}$  处产生的磁场：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}_2 d\tau_2 \times \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3} \quad (1.2.14)$$

**Biot-Sarvart 定律：**

对于任意的电流分布  $\vec{j}(\vec{r}')$ ，其在  $\vec{r}$  处产生的磁场 ( $\vec{B}(\vec{r})$  称为磁感应强度)：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau' \times \vec{R}}{R^3} \quad (1.2.15)$$

P.S.:

对于速度为  $\vec{v}$  的电荷  $q(v \ll c)$ ：

电流密度：

$$\vec{j} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - vt\hat{x}) \quad (1.2.16)$$

在  $\vec{B}$  场中的受力：

$$\vec{F} = \int_{\tau} q\delta(\vec{r} - vt\hat{x}) d\tau \vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.2.17)$$

若空间既有磁场又有电场，则总受力 (Lorentz 力)：

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (1.2.18)$$

### 1.2.4 $\vec{B}(\vec{r})$ 的散度

① 数学补充：

$$\nabla \times (\vec{a}\psi) = (\nabla \times \vec{a})\psi + \nabla\psi \times \vec{a}$$

$\Rightarrow$  由于  $\vec{j}(\vec{r}')$  不依赖于  $\vec{r}$ ，因此  $\nabla \times \vec{j}(\vec{r}') \equiv 0$ ，于是：

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) = \nabla_R \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') + \frac{(\nabla_j \times \vec{j}(\vec{r}'))}{R} = \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \quad (1.2.19)$$

② 磁场的数学改写：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \nabla \frac{1}{R} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' \right] = \nabla \times \vec{A} \quad (1.2.20)$$

其中  $\vec{A}$  为矢势：

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad (1.2.21)$$

③ 散度性质：

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0 \quad (1.2.22)$$

### 1.2.5 $\vec{B}(\vec{r})$ 的旋度

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.2.23)$$

① 第一项:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \nabla \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \quad (1.2.24)$$

由于  $\nabla f(R) = -\nabla' f(R)$ :

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \nabla' \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) - \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \right] d\tau' \quad (1.2.25)$$

又在稳恒电流条件下:

$$\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.2.26)$$

因此:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \cdot d\vec{S}' \Big|_{r' \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.2.27)$$

(最后等于 0 是由于这里考虑电流分布在有限区域, 因此无穷远处边界的电流密度一定为零。)

② 第二项:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla^2 \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \left( \nabla^2 \frac{1}{R} \right) d\tau' \quad (1.2.28)$$

又由:

$$4\pi\delta(\vec{R}) = \nabla \cdot \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = -\nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{R} \right) = -\nabla^2 \frac{1}{R} \quad (1.2.29)$$

代入上式得:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{R}) d\tau' = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (1.2.30)$$

综上,  $\vec{B}$  的旋度:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (1.2.31)$$

积分形式:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (1.2.32)$$

### 1.2.6 磁偶极子

对于磁偶极子产生的势：

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{R} d\vec{l} \quad (1.2.33)$$

远场条件下  $r \gg r'$ ，Taylor 展开到第一阶可得：

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{(r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \quad (1.2.34)$$

代入上式后第一项贡献正比于： $\frac{1}{r} \oint d\vec{l} \equiv 0$ 。

因此：

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l} \quad (1.2.35)$$

举例：矩形线圈 (大小为  $a \times b$ )

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (xx' - y\frac{b}{2}) dx' + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} (xx' + y\frac{b}{2}) dx' \right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} yba \quad (1.2.36)$$

同理：

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} xba \quad (1.2.37)$$

综合可得：

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Iba}{4\pi r^3} (-y\hat{x} + x\hat{y}) \quad (1.2.38)$$

利用  $\vec{m} = I\vec{S} = Iab\hat{z}$  可整理得：

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.2.39)$$

由此，空间的磁场：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} \right] \quad (1.2.40)$$

## 1.3 电磁感应定律

电磁感应定律：

$$\varepsilon_{\text{感}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.3.1)$$

感生电动势的方向：“感生电流的产生是用来抵消磁通量的改变的。” (能量守恒)

磁通量的改变可以由两种机制产生：

1. 感生电动势：磁场本身发生变化。
2. 动生电动势：回路相对磁场发生变化。

## 电动势

定义：外力将单位电量的电荷在环路上驱动一周所提供的能量。

$$\text{表达式: } \varepsilon = \frac{\Delta W}{q} = \frac{\oint \vec{F}_K \cdot d\vec{l}}{q}$$

因此，可以将感生电动势改写为： $\varepsilon_{\text{感}} = \oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$  (其中  $\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_K}{q}$  与静电场具有相同量纲。)

① 感生电动势：

$$\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1.3.2)$$

利用斯托克斯定理：

$$\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}_K) \cdot d\vec{S} \quad (1.3.3)$$

由于线圈回路是任意的，因此积分曲面任意，有：

$$\nabla \times \vec{E}_K = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3.4)$$

② 动生电动势：需使用到相对论

## 1.4 麦克斯韦方程组

### 1.4.1 第一条方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.4.1)$$

普遍情况下，电场可以随时间变化，其起源有两种：

1. 源电荷的运动；
2. 总电场中含有感应电场  $\vec{E}_K$ .

对空间的总电场：

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{E}_S + \nabla \cdot \vec{E}_K = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} + 0 = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad (1.4.2)$$

### 1.4.2 第二条方程

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4.3)$$

普遍情况下，总电场的旋度：

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_S + \nabla \times \vec{E}_K = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4.4)$$

### 1.4.3 第三条方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4.5)$$

物理意义：自然界不存在磁荷，即使在物理量随时间变化时磁场线仍然连续。

P.S.:

说明此方程不与之前定律矛盾：

对第二条方程两边取散度：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow 0 = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} \quad (1.4.6)$$

因此  $\nabla \cdot \vec{B} = \text{常数}$  (与时间无关)。假设变化的电磁场是由初始静态的电磁场演化而来，则此常数为 0，与第三条方程一致。

### 1.4.4 第四条方程

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.4.7)$$

首先将环路定理写成：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{G} \quad (1.4.8)$$

两边同时取散度可以得到：

$$\nabla \cdot \vec{G} = 0 \quad (1.4.9)$$

同时为与之前定律相符， $\vec{G}$  还需满足：

1.  $\vec{G}$  在静态时回到  $\vec{j}$ ;
2. 式 (1.4.8) 需要与电荷守恒定律协调。

由第一条方程：

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \quad (1.4.10)$$

代入电荷守恒定律中：

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.4.11)$$

因此选择:  $\vec{G} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

式中  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  称为位移电流，可以理解为电流线的延续。

#### 1.4.5 总结

##### 真空中的 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (1.4.12)$$

##### 无源空间中的 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.4.13)$$

#### 1.4.6 麦克斯韦方程组的完备性

完备性指在给定初始条件和边界条件的情况下，系统的电磁场由麦克斯韦方程组唯一确定。

**Proof:**

假定初始条件和边界条件都给定的情况下方程组有两个不同的解，即  $(\vec{E}', \vec{B}')$  和  $(\vec{E}'', \vec{B}'')$ 。

令  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}'' - \vec{E}'$ ,  $\vec{\mathcal{B}} = \vec{B}'' - \vec{B}'$ ，则有：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\partial_t \vec{\mathcal{B}} \\ \nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (1.4.14)$$

由  $(\vec{E}', \vec{B}')$  和  $(\vec{E}'', \vec{B}'')$  满足同样的初始条件和边界条件，得到：

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = 0 \\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = 0 \\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \Big|_S = 0 \\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) \Big|_S = 0 \end{cases} \quad (1.4.15)$$

$$\text{标记 } W = \int \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}}^2(\vec{r}, t) \right) d\tau$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \int \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^2 + \frac{\vec{\mathcal{B}}^2}{\mu_0} \right) d\tau \right] \\
&= \int \left( \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \partial_t \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} \cdot \partial_t \vec{\mathcal{B}} \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\mu_0} \int \left[ \vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) + \vec{\mathcal{B}} \cdot (-\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right] d\tau \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \int \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}) d\tau \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \oint_S (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}) \cdot d\vec{S} = 0
\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

最后一步利用了边界条件。于是得知  $W$  是与时间无关的常数。

$t = 0$  时, 可有:

$$W|_{t=0} = \int \left( \frac{\epsilon_0}{2} \vec{\mathcal{E}}^2(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} + \frac{1}{2\mu_0} \vec{\mathcal{B}}^2(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} \right) d\tau = 0 \tag{1.4.17}$$

因此可知  $W \equiv 0$ , 即可得到  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = 0$ , 即  $\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}''(\vec{r}, t); \vec{B}'(\vec{r}, t) = \vec{B}''(\vec{r}, t)$ .  
由此, 在给定初始条件和边界条件的情况下, 麦克斯韦方程组唯一确定电磁场。

## 1.5 介质中的麦克斯韦方程组

### 1.5.1 介质的极化及磁化

极化 (磁化) 强度:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \quad \vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \tag{1.5.1}$$

低场近似下, 很多材料对电磁场呈线性响应:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B}(\vec{r}, t) \tag{1.5.2}$$

式中  $\chi_e, \chi_m$  为极化 (磁化) 率,  $\vec{E}, \vec{B}$  为介质分子在此处感受到的局域总场。

### 1.5.2 极化电荷与磁化电流

① 极化:

a) 极化电荷:

假设空间的极化强度分布为  $\vec{P}(\vec{r})$ , 在  $\vec{r}$  点附近取宏观小微观大的区域  $\tau$ , 边界为  $\vec{S}$ , 计算所含的极化总电荷  $Q_P$ :  
只有穿过  $\vec{S}$  的偶极子才有贡献, 因此区域内净电荷数:

$$dQ_P = -qn\vec{l} \cdot d\vec{S} = -\vec{P} \cdot d\vec{S} \implies Q_P = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \tag{1.5.3}$$

由 Gauss 定理:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{1.5.4}$$

$\rho_P$  称为极化电荷密度。



b) 极化电流:

考虑空间  $\Delta\Omega$  体积内一个因极化而产生的偶极子, 则极化电荷密度分布:

$$\rho_P(\vec{r}) = \rho_+ + \rho_- = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_-) \quad (1.5.5)$$

记两个极化电荷的运动速度:

$$\vec{v}_+ = \frac{d\vec{r}_+}{dt} \quad \vec{v}_- = \frac{d\vec{r}_-}{dt} \quad (1.5.6)$$

则运动引起的极化电流密度:

$$\vec{j}_P(\vec{r}) = \rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_- = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_+\vec{r}_+ + \rho_-\vec{r}_-) \quad (1.5.7)$$

针对一个偶极子的空间极化强度:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\Delta\Omega} = \frac{q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{\Delta\Omega} = \rho_+\vec{r}_+ + \rho_-\vec{r}_- \quad (1.5.8)$$

因此,

$$\vec{j}_P(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.5.9)$$

根据叠加原理, 上式在有多个偶极子存在时仍然正确。

P.S.:

验证与连续性方程一致:

$$\nabla \cdot \vec{j}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} \equiv 0 \quad (1.5.10)$$

## ② 磁化:

磁化电流: 介质被磁化后产生束缚于磁介质上的电流。

在具有磁化强度  $\vec{M}(\vec{r})$  的磁介质中选取一个宏观大小的面  $S$ , 边界为  $\oint d\vec{l}$ , 计算穿过  $S$  的总磁化电流  $I_M$ :

只需计算那些与边界较链的环流, 考虑与一段边界  $d\vec{l}$  较链的分子环流:

设每个分子环流电流为  $i$ , 线圈面积为  $\Delta\vec{s}$ , 偶极子的体密度为  $n$ 。

$d\vec{l}$  边界处对  $I_M$  的贡献:

$$dI_M = i \times n \Delta\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (1.5.11)$$

整个环路的贡献:

$$I_M = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (1.5.12)$$

又由 Stokes 定理, 以及  $I_M = \int \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$ :

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (1.5.13)$$

两边取散度得:

$$\nabla \cdot \vec{j}_m = 0 \quad (1.5.14)$$

物理意义: 磁化电流不引起电荷的积累, 因此不用考虑磁化电荷。

### 1.5.3 介质中的 Maxwell 方程组

当介质存在时，空间电荷包括自由电荷与极化电荷，则总电荷：

$$\rho_t = \rho_f + \rho_P = \rho - \nabla \cdot \vec{P} \quad (1.5.15)$$

当介质存在时，电流包括传导电流、极化电流和磁化电流，则总电流：

$$\vec{j}_t = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \quad (1.5.16)$$

在麦克斯韦方程组中，不管  $\rho$  和  $\vec{j}$  的来源如何，只要是电荷或电流，它们都将在空间激发电场或磁场。

介质存在情况下的 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \left( \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right) \end{cases} \quad (1.5.17)$$

引入两个辅助矢量，电位移矢量：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.5.18)$$

磁场强度：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.5.19)$$

则方程组可进行化简：

介质存在情况下的 Maxwell 方程 (化简后)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.5.20)$$

### 1.5.4 本构关系

① 线性介质：

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \end{cases} \quad (1.5.21)$$

式中：

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0 = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad (1.5.22)$$

代入无源空间的 Maxwell 方程组：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.5.23)$$

Note:

导体本身就是特殊的电磁介质，其本构关系就是欧姆定律： $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ 。

② 非线性介质：

a) 铁电和铁磁物质或强场情况下， $\vec{P}$  与  $\vec{E}$ 、 $\vec{M}$  与  $\vec{H}$  之间不再呈现线性关系；

b) 对于各向异性的介质，介电常数和磁导率都是对称张量，场强和感应场强之间的关系推广为：

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad B_i = \mu_{ik} H_k \quad (1.5.24)$$

## 1.6 麦克斯韦方程组的边界条件

①  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ ：

积分形式：

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_f d\tau \quad (1.6.1)$$

取两底面均平行于界面的扁平柱体：

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta \vec{S}_1 \cdot \vec{D}_1 + \Delta \vec{S}_2 \cdot \vec{D}_2 = \Delta S \cdot (\vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2) = q_f \quad (1.6.2)$$

$\Delta S \rightarrow 0$  时：

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \quad (1.6.3)$$

一般情况下， $\sigma_f = 0$ ，即无自由电荷，故 D 场的法向分量守恒。

②  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ：

同①可得：

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \implies B_{n1} = B_{n2} \quad (1.6.4)$$

即可得，B 场的法向分量连续。

③  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ：

积分形式：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_f \cdot d\vec{S} + \int \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (1.6.5)$$

假设  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  为界面上相互垂直的两个方向矢量，其与界面方向矢量  $\vec{n}$  呈右手螺旋：

$$\vec{n} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad \vec{n} \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \quad (1.6.6)$$

在界面上取一长为  $\Delta l$  (方向沿  $\vec{e}_1$ )，宽为  $h$  的矩形。

$\vec{H}$  场在整个环路上的积分：

$$\vec{H}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{H}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \left( \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \vec{j}_f \cdot \vec{e}_2 (h \cdot \Delta l) + \frac{\partial}{\partial t} (D \cdot \Delta l \cdot h) \quad (1.6.7)$$

一般情况下边界处  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$  是有限值，因此  $h \rightarrow 0$  时上式右边第 2 项为 0。

定义  $\vec{j}_f \cdot h \rightarrow \vec{\alpha}_f$  ( $h \rightarrow 0$  时)，则：

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_2 \quad (1.6.8)$$

考虑面内另一个方向：

$$\vec{e}_2 \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = -\vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_1 \quad (1.6.9)$$

将上述两式统一：

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha}_f \quad (1.6.10)$$

④  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ ：

同③，可得：

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (1.6.11)$$

故电场的切向分量连续。

## 1.7 似稳电磁场

- 位移电流远远小于传导电流
- 电磁场在考察区域内几乎同相位

### 1.7.1 似稳场条件

① 条件一：

位移电流密度：

$$\vec{J}_D = \partial_t \vec{D} \quad (1.7.1)$$

对于线性介质：

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.7.2)$$

对于传导电流：

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.7.3)$$

不失一般性，假设电场的变化是谐变的，即  $\vec{D} = \vec{D}_0 e^{-i\omega t}$ 。

由  $|\vec{J}_D| \ll |\vec{J}|$  得到：

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1 \quad (1.7.4)$$

② 条件二：

仍然假设电场的变化是谐变的，则：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.7.5)$$

电场强度  $\vec{E}$  在空间各处同相位的近似条件要求  $kl = \frac{2\pi l}{\lambda} \ll 1$ ，即

$$l \ll \lambda \quad (1.7.6)$$

式 (1.7.4) 和式 (1.7.6) 称为电磁场的似稳条件，在似稳条件下  $\vec{J}_D = 0$ ，电磁场方程变为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f \end{cases} \quad (1.7.7)$$

上式称为似稳场方程组。一般的交流电路就满足似稳场条件。

### 1.7.2 似稳电路方程

实际中的电工学设备工作频率一般不高，空间尺度也不大，属于典型的似稳电磁场系统，这类电路在工程电路分析中被称为集中参数电路。

似稳电路满足电流的连续性方程  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 。

**基尔霍夫电流定律：**

在电路中任何一个节点或任意一个闭合曲面，流入和流出的电流的代数和为 0。

**基尔霍夫电压定律：**

对于任意回路的电势差之和为 0。

例 1 一个由电感  $L$ 、电阻  $R$ 、电容  $C$  和外电源  $U$  组成的 RLC 串联电路，试推导关于该电路电容器上电荷  $Q$  满足的微分方程。

假设某一时刻该回路的电流方向为：

$$a \rightarrow L \rightarrow R \rightarrow U \rightarrow b \quad (\text{电容器上下极板分别为 } a、b)$$

该时刻电容器的  $a$  端带电荷  $-Q$ ， $b$  端带正电荷  $Q$ ， $L$  上的感应电势差：

$$\Delta\varphi_L = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2Q}{dt^2} \quad (1.7.8)$$

上式中负号代表沿回路方向电势下降，电流强度  $I = \frac{dQ}{dt}$ 。

电阻  $R$  对于回路电势变化的贡献  $\Delta\varphi_R$ ：

$$\Delta\varphi_R = -IR = -R\frac{dQ}{dt} \quad (1.7.9)$$

外电动势  $U = \phi_1 - \phi_2$ 。

电容  $C$  对于回路电势变化的贡献：

$$\phi_a - \phi_b = -\frac{Q}{C} \quad (1.7.10)$$

沿着整个回路一周后电势不变：

$$\Delta\varphi_L + \Delta\varphi_R + U + \Delta\varphi_C = 0 \quad (1.7.11)$$

代入上述电势差，上式变为：

$$U = L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (1.7.12)$$

上式即为工程电路中二阶电路的状态方程。

## 2 电磁场的守恒定律和对称性

### 2.1 真空中电磁场的能量守恒定律

考察电磁场对处于其中的带电体所作的功 (磁场对电荷不做功)：

设空间电荷分布为  $\rho$ ， $dt$  时间内移动的距离  $d\vec{l} = \vec{v}dt$ ， $\vec{v}$  为电荷体积元  $\rho d\tau$  的运动速度。

场在  $dt$  时间内对  $\rho d\tau$  所做的功：

$$\frac{dR}{dt} = \int \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau \quad (2.1.1)$$

因此带电体机械能的增加：

$$\frac{dW_m}{dt} = \int \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau \quad (2.1.2)$$

为了消去  $\vec{j}$ ，利用 Maxwell 方程组第四式：

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

因此：

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

下面试图将上式 (2.1.4) 改写成对时间、空间的全微分形式。

利用下式：

$$\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \quad (2.1.5)$$

可得：

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 \quad (2.1.6)$$

对于上式第 2 项，利用 Maxwell 方程组中第二式  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ：

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) \quad (2.1.7)$$

于是代入式 (2.1.6) 可得：

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (2.1.8)$$

令：

$$\vec{S}_P(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.1.9)$$

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (2.1.10)$$

因此最终式 (2.1.2) 可写作：

$$\frac{dW_m}{dt} = - \int \nabla \cdot \vec{S}_P d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int u d\tau = - \oint \vec{S}_P \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int u d\tau \quad (2.1.11)$$

上式进一步改写：

$$\frac{d}{dt} \left[ W_m + \int u d\tau \right] = - \oint \vec{S}_P \cdot d\vec{S} \quad (2.1.12)$$

物理意义：

在一个闭合空间内总能量的增加等于从边界流入闭合空间的  $\vec{S}_P$  (能流密度) 的大小。

$W_m$  是空间内物质的机械能量， $u(\vec{r}, t)$  描述电磁场的能量，其物理意义：

$\vec{r}$  点处  $t$  时刻电磁场的能量密度， $\vec{S}_P(\vec{r}, t)$  即为相应的能流密度，称为坡印廷矢量。

当考察区域为全空间时，由于电流和电荷分布在有限区域，无穷远边界上电磁场应为 0，故  $\vec{S}_P \equiv 0$ ，有：

$$\frac{dW_m}{dt} = -\frac{dW_{e,m}}{dt} \quad (\text{空间电磁总能量: } W_{e,m} = \int_{\infty} u(\vec{r}, t) d\tau) \quad (2.1.13)$$

上式 (2.1.13) 表明机械能与电磁场能量可以相互转化，但总和为守恒量。

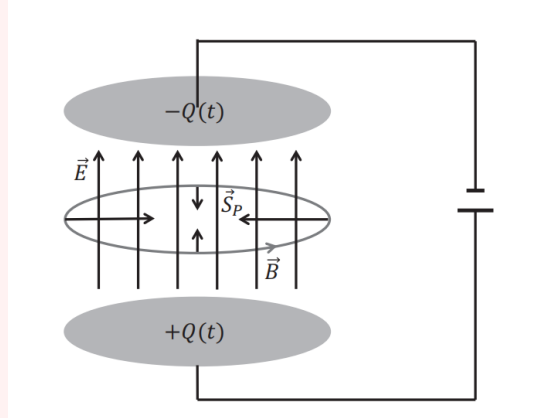
P.S.:

无源空间内无其他能量形式，因此  $W_m = 0$ ，于是式 (2.1.12) 变为：

$$\nabla \cdot \vec{S}_P(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1.14)$$

与电荷守恒的连续性方程一致，因此再一次说明电磁场是一种物质。

### 例 1 正在缓慢充电的电容器的能流



设电容器由两块圆形平板构成，半径为  $r$ ，间距为  $h$ ，其中电场  $E(t) = \frac{Q(t)}{\pi r^2 \varepsilon_0}$ ，则电容器中总能量：

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot \Omega \quad (\Omega = \pi r^2 h) \text{ 是电容器的体积} \quad (2.1.15)$$

考察能流流动情况，设  $\vec{E} = E(t)\vec{e}_z$ ，由 Maxwell 方程组第四式：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.16)$$

选取柱坐标系可得电容器内磁场：

$$\vec{B} = \frac{1}{2\pi\rho} \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t} \vec{e}_\phi \quad (2.1.17)$$

因此能流密度矢量 (方向指向电容器中心轴线)：

$$\vec{S}_P = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\varepsilon_0}{2} E \frac{\partial E}{\partial t} \rho (-\vec{e}_\rho) \quad (2.1.18)$$

对电容器侧面积分，得到流入电容器的能量：

$$\int \vec{S}_P \cdot d\vec{S} = \frac{\varepsilon_0}{2} E \frac{\partial E}{\partial t} r \cdot 2\pi r h = \pi r^2 h \varepsilon_0 E \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} W_{e,m} \quad (2.1.19)$$

恰好等于电容器中能量的增加率。因此能量不是从导线中流过来的，而是从电容器外面的空间中通过电容器侧面流进电容器的。



### 例 2 估计家用电路中电子平均定向移动速度

设电路铜导线为  $1\text{mm}^2$ ，电流强度为  $1\text{A}$ ，铜的密度为  $8.9\text{g/cm}^3$ 。

设每个铜原子贡献一个自由电子，则单位体积铜导体内自由电子个数  $n$ ：

$$n = \frac{8.9\text{g/cm}^3}{64\text{g/mol}} \times 6.022 \times 10^{23}\text{mol}^{-1} \approx 10^{29}\text{m}^{-3} \quad (2.1.20)$$

电子平均定向移动速度为：

$$v = \frac{J}{nq} = \frac{1\text{A/mm}^2}{10^{29} \times 1.6 \times 10^{-19}\text{C}} \approx 10^{-4}\text{m/s} \quad (2.1.21)$$

由此可见电路中自由电子的平均定向移动速度很慢，因此用电器所消耗的能量一定不是依赖于此速度，而是在空间中以光速传播的电磁场传递的。

### 例 3 以直流电路用电器周围的电磁场能流验算用电器的电功率 $P$ 的计算。

将用电器简化为半径为  $R$ ，长为  $d$  的圆柱，内部简化为匀强电场。

记用电器两端电压为  $U$ ，电路内电流强度为  $I$ ，忽略边缘效应，场强为  $E=U/d$ 。

在不靠近圆柱顶部或底部的外边界上，磁感应强度为  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ 。

单位时间内流进用电器的总能量：

$$-\oint \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot (-\vec{e}_\rho) 2\pi R d = \frac{U}{d} \cdot \frac{I}{2\pi R} \cdot 2\pi R d = UI \quad (2.1.22)$$

#### 例 4 估计原子核内质子之间的静电相互作用能量。

假设原子核为球形，核内质子数为  $Z$ ，中子数为  $N$ ，总核子数  $A=Z+N$ 。

将原子核看成电荷均匀而连续分布的带电球体，电荷密度为  $\rho(\vec{r}) = \frac{Ze}{4\pi R^3/3}$ ， $R$  为原子核的电荷半径。

原子核内外部的电场强度：

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{Zer}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r, & r \leq R \\ \vec{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, & r > R \end{cases} \quad (2.1.23)$$

则原子核的总静电能：

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \left( \frac{Zer}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left( \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

此外，每个质子单独存在时也有静电能：

$$W_P = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.1.25)$$

于是整个原子核内  $Z$  个质子之间相互作用的静电能：

$$W - ZW_P = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}; \quad a_c = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 1.2fm} \approx 0.72MeV \quad (2.1.26)$$

## 2.2 电磁场的动量守恒定律

带电体在磁场中受 Lorentz 力，其机械动量的变化率：

$$\frac{dG_m}{dt} = \int (\rho d\tau \vec{E} + \rho d\tau \vec{v} \times \vec{B}) = \int (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) d\tau = \int \vec{f} d\tau \quad (2.2.1)$$

利用场方程将等式右边  $\rho$  和  $\vec{j}$  消去，力密度改写为：

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \quad (2.2.2)$$

将上式改写为对时间、空间的全微分：

$$-\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (2.2.3)$$

代入 (2.2.2) 式，考虑与电场有关的项：

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) &= (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{E} \cdot \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} \right] \\ &= \nabla \cdot (\vec{E} \vec{E}) - \nabla \left( \frac{1}{2} E^2 \right) \\ &= \nabla \cdot (\vec{E} \vec{E}) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} E^2 \vec{I} \right) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

P.S.:

① 并矢运算公式:

$$\nabla \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (2.2.5)$$

② 一个恒等式:

$$\nabla \varphi = \nabla \cdot (\varphi \overleftrightarrow{T}) \quad (2.2.6)$$

磁场相关项:

$$(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + 0 = (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} = \nabla \cdot (\vec{B}\vec{B}) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} B^2 \overleftrightarrow{T} \right) \quad (2.2.7)$$

于是改写 (2.2.2) 式:

$$\vec{f} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{g} \quad (2.2.8)$$

其中:

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \overleftrightarrow{T} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}\vec{B} \quad (2.2.9)$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{S}_P \quad (2.2.10)$$

于是得到:

$$\frac{d\vec{G}_m}{dt} = -\oint d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{d}{dt} \int \vec{g} d\tau \quad (2.2.11)$$

式中显示  $\vec{g}$  即为电磁场的动量密度,  $\overleftrightarrow{T}$  是动量流密度。

对于每个动量分量, 式 (2.2.11) 可改写成:

$$\frac{dG_m^x}{dt} = -\oint d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T}_x - \frac{d}{dt} \int g_x d\tau \quad (2.2.12)$$

$\Delta\Omega$  体积内电磁场所携带的总动量:

$$\vec{G}_{e,m} = \int_{\Delta\Omega} \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau \quad (2.2.13)$$

利用式 (2.2.11) 可以讨论电磁场对物质的作用力。

对于一个放置在电磁场中的物体, 取闭合曲面恰好包围此物体, 则电磁场对闭合区域内带电体的作用总力  $\vec{F}_{em}$ :

$$\vec{F}_{em} = \frac{\partial \vec{G}_m}{\partial t} = -\oint_S d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T} - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \vec{g} d\tau \quad (2.2.14)$$

对式 (2.2.14) 的几点讨论:

① 第一项  $-\oint_S d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T}$  是电磁场单位时间内通过界面从外面传递到曲面内部的总动量, 即外部电磁场通过界面对闭合区域内物质施加的总力。 $-\vec{e}_n \cdot \overleftrightarrow{T}$  代表外部场作用在面内的场的单位面积上的应力, 故  $\overleftrightarrow{T}$  又称为麦克斯韦应力张量。

② 这些“总力”未必全部作用到区域内的物质上, 还作用到区域内的电磁场上, 引发区域内电磁场的动量的增加, 等式第二项即减去这部分的贡献。

③ 在稳态或是场随时间协变时，第二项为 0 或其时间平均值为 0，此时物质在电磁场中的受力完全由 Maxwell 张量的面积分决定。

④ 直角坐标下， $\overleftrightarrow{T}$  可以写为：

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{T} = \sum_{ij} T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \\ T_{ij} = T_{ji} = -\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j + \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.2.15)$$

⑤ 电磁场动量密度矢量  $\vec{g}$  与能流密度  $\vec{S}$  的关系：

$$c^2 \vec{g} = \vec{S} \quad (2.2.16)$$

理解：将  $\vec{S}$  简单的写作  $u\vec{c}$  时，有：

$$c\vec{g} = u \quad (2.2.17)$$

即光子满足的能量与动量的关系。

**例 1 从电磁场的动量流密度张量出发，验算在均匀静电场中点电荷的受力。**

静电场中磁感应强度为 0：

$$\overleftrightarrow{T} = -\epsilon_0 \vec{E} \vec{E} + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{T} \epsilon_0 E^2 \quad (2.2.18)$$

取点电荷的坐标为坐标原点，以坐标原点为中心，半径为  $r$  的球面上电场强度为：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (2.2.19)$$

可得：

$$-\frac{\overleftrightarrow{T}}{\epsilon_0} = \vec{E}_0 \vec{E}_0 + \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \vec{e}_r \vec{e}_r + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{E}_0 \vec{e}_r + \vec{e}_r \vec{E}_0) - \frac{\overleftrightarrow{T}}{2} \left[ E_0^2 + \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 + 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_r \right] \quad (2.2.20)$$

点电荷受到的作用力等于以电荷为中心，半径为  $r$  的球面上单位时间内流入的动量，即：

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \oint d\vec{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{T} \\ &= \epsilon_0 \oint d\sigma \vec{e}_r \cdot \left[ \vec{E}_0 \vec{E}_0 + \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \vec{e}_r \vec{e}_r + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{E}_0 \vec{e}_r + \vec{e}_r \vec{E}_0) \right] \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{2} \oint d\vec{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{T} \left[ E_0^2 + \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 + 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_r \right] \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

由  $\oint d\vec{\sigma} = 0$ ;  $\oint \frac{1}{r^n} d\vec{\sigma} = 0$  得：

$$\vec{F} = 0 + 0 + \oint \frac{qE_0 \cos\theta}{4\pi r^2} d\sigma d\vec{e}_r + \oint \frac{q}{4\pi r^2} \vec{E}_0 d\sigma - 0 - 0 - \oint \frac{qE_0 \cos\theta}{4\pi r^2} d\sigma d\vec{e}_r = \vec{E}_0 q \quad (2.2.22)$$

例 2 恒定磁场中质量为  $m$  的点电荷  $q$  以速度  $\vec{v}$  运动，带电粒子自身电场非零，求该系统的总电磁动量。

该系统电磁场总电磁动量  $\vec{p}_{em}$  为：

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{em} &= \epsilon_0 \int \vec{E} \times \vec{B} d\tau \\
 &= \epsilon_0 \int \vec{E} \times (\nabla \times \vec{A}) d\tau \\
 &= \epsilon_0 \int \left[ \nabla (\vec{A} \cdot \vec{E}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{E}) \right] d\tau \\
 &= \epsilon_0 \int \left[ \nabla \cdot ((\vec{A} \cdot \vec{E}) \vec{\nabla}) - \nabla \cdot (\vec{A} \vec{E} + \vec{E} \vec{A}) + (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{E} + (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{A} \right] d\tau \\
 &= \epsilon_0 \int \left[ \nabla \cdot ((\vec{A} \cdot \vec{E}) \vec{\nabla} - \vec{A} \vec{E} - \vec{E} \vec{A}) + 0 + \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_q) \vec{A} \right] d\tau \\
 &= q \vec{A}(\vec{r}_q)
 \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

由此可见，磁场中点电荷和磁场共同构成一个电磁系统，该系统的总动量：

$$\vec{\mathcal{P}} = m\vec{v} + \vec{p}_{em} = \vec{p} + q\vec{A} \tag{2.2.24}$$

$\mathcal{P}$  称为带电粒子在磁场中的正则动量。

### 2.3 电磁场的角动量和角动量流

用  $\vec{r}$  对式 (2.2.8) 两边作矢量乘积，得：

$$\vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times (-\nabla \cdot \vec{T} - \partial_t \vec{g}) = (\nabla \cdot \vec{T}) \times \vec{r} - \partial_t (\vec{r} \times \vec{g}) \tag{2.3.1}$$

记：

$$\vec{L}_m = \vec{r} \times \vec{f}, \quad \vec{L}_{em} = \vec{r} \times \vec{g}, \quad \vec{\nabla} = -\vec{T} \times \vec{r} \tag{2.3.2}$$

于是有电磁系统角动量守恒定律的微分形式：

$$\vec{L}_m + \nabla \cdot \vec{\nabla} = -\partial_t \vec{L}_{em} \tag{2.3.3}$$

P.S. 证明  $(\nabla \cdot \vec{T}) \times \vec{r} = \nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r})$

$$\begin{aligned}
 \left[ \nabla \cdot \left( \sum_{ij} T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \right) \times \vec{r} \right]_z &= \sum_i \partial_i (T_{ix} \vec{e}_x \times y \vec{e}_y) + \sum_i \partial_i (T_{iy} \vec{e}_y \times x \vec{e}_x) \\
 &= \sum_i \partial_i (T_{ix} y) (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + \sum_i \partial_i (T_{iy} x) (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) \\
 &= \left[ \left( \sum_i (\partial_i T_{ix}) y \right) + T_{yx} \right] (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + \left[ \left( \sum_i (\partial_i T_{iy}) x \right) + T_{xy} \right] (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) \\
 &= \left( \sum_i (\partial_i T_{ix}) \right) y \vec{e}_z - \left( \sum_i (\partial_i T_{iy}) \right) x \vec{e}_z \\
 &= \left[ (\nabla \cdot \vec{T}) \times \vec{r} \right]_z
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

## 2.4 介质中的电磁能量和动量守恒定律

### 2.4.1 电磁能量

电磁场对  $d\tau$  体积内的电荷/电流在单位时间内所作的总功为：

$$\frac{dR}{dt} = \int (\vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m) \cdot \vec{E} d\tau \quad (2.4.1)$$

分析：

①  $\vec{j}_f \cdot \vec{E}$ ：

表示电磁场对自由电荷做的功。这部分功转化成电荷运动的机械动能（电流），通常（超导除外）这些机械动能与外部环境发生交换而变成环境的热能。因此这部分功可以转化成其他能量形式且通常这种转化不可逆。

②  $(\vec{j}_p + \vec{j}_m) \cdot \vec{E}$ ：

表示电磁场对电磁介质中的束缚电荷（流）所做的功。这部分功转化成介质中电荷拉开后的弹性或者化学势能，以及这些电荷跟随电场运动时的机械动能。但这部分能量被束缚在电磁介质中，不会被环境以热能的形式拿走。而当电磁场离开介质时，这些能量又会以电磁辐射的形式重新返还给电磁场。

将电磁场和电磁介质看成一体，只考虑电磁场对第一项的贡献。

计算场对  $d\tau$  体积内的自由电荷/电流在单位时间内所作的总功：

$$\frac{dR_f}{dt} = \int \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau \quad (2.4.2)$$

利用  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  消去自由电流：

$$\vec{j}_f \cdot \vec{E} = \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} \quad (2.4.3)$$

将空间部分配分为全微分形式：

$$(\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4.4)$$

对于线性无色散介质，有本构关系：

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.4.5)$$

将式 (2.4.3) 改写成：

$$\vec{j}_f \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S}_P - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.4.6)$$

其中能流密度和能量密度：

$$\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.4.7)$$

$$u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad (2.4.8)$$

因此介质中的能量转化方程：

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau = -\oint \vec{S}_P \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V u d\tau \quad (2.4.9)$$

式中  $\int_V u d\tau$  指体积内电磁场能量及电磁介质中储存的能量， $W'$  为体积内除去上述能量后的其他能量。

### 2.4.2 电磁动量

电磁场中的力密度:

$$\vec{f}_t = (\rho_f + \rho_p) \vec{E} + (\vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m) \times \vec{B} \quad (2.4.10)$$

当电荷、电流是总电荷、总电流时，同上节可得:

$$\vec{f}_t = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}^* - \frac{\partial \vec{g}^*}{\partial t} \quad (2.4.11)$$

其中:

$$\overleftrightarrow{T}^* = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \overleftrightarrow{I} - \epsilon_0 \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} \quad (2.4.12)$$

$$\vec{g}^* = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.4.13)$$

式 (2.4.11) 以及  $\overleftrightarrow{T}^*$  和  $\vec{g}^*$  的表达式与真空中形式一样，但其中  $\vec{E}$  与  $\vec{B}$  均为电磁介质中的总场。将力密度  $\vec{f}$  分为两部分看:

$$\vec{f}_t = \vec{f} + \vec{f}' \quad (2.4.14)$$

其中

$$\vec{f} = \rho_f \vec{E} + \vec{j}_f \times \vec{B} \quad (2.4.15)$$

$$\vec{f}' = \rho_p \vec{E} + (\vec{j}_p + \vec{j}_m) \times \vec{B} \quad (2.4.16)$$

$\vec{f}$  代表场对自由电荷的带电体的作用力， $\vec{f}'$  代表场对介质的作用力。

当把电磁场与附着于其存在的介质看成一体时， $\vec{f}'$  属于内力，它帮助把一些动量储存在介质中。

因此对于线性无色散介质:

$$\rho_f \vec{E} + \vec{j}_f \times \vec{B} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}' - \frac{\partial \vec{g}'}{\partial t} \quad (2.4.17)$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}' = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \overleftrightarrow{I} - \vec{D} \vec{E} - \vec{B} \vec{H} \quad (2.4.18)$$

$$\vec{g}' = \vec{D} \times \vec{B} \quad (2.4.19)$$

此时我们将电磁介质与电磁场看作一个整体， $\vec{g}'$  中不仅包含了电磁场本身的动量，且包含了束缚在电磁介质体上的机械动量。

两种表达式的适用范围:

① 式 (2.4.11) 描述的是场对一块体积内的所有的电荷/电流的作用力，因此对于一电磁介质物体在真空中的某一电磁场中，介质物体受到的电磁场的力:

$$\vec{F} = -\oint d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T}^* + \frac{d}{dt} \int \vec{g}^* d\tau \quad (2.4.20)$$

静态或电磁场随时间简谐变化时，第二项对时间的平均值为 0，因此实际有效力:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\oint d\vec{S} \cdot \langle \overleftrightarrow{T}^* \rangle \quad (2.4.21)$$

② 式 (2.4.18,2.4.19) 适用于计算电磁场对处于介质环境中的金属导体物体的作用力。

## 3 静电学 I-导体静电学

### 3.1 静电问题

#### 3.1.1 静电基本方程

静电现象中只有静电场，满足：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

根据第二式可以引入标势  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ，代入第一式：

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\vec{r}) \nabla \varphi(\vec{r})] = -\rho(\vec{r}) \quad (3.1.2)$$

对于均匀介质内部，有  $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon$ ，则上式转化为 Poisson 方程：

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon} \quad (3.1.3)$$

#### 3.1.2 静电条件下导体的边界条件

导体内部有：

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E} \quad (3.1.4)$$

因此在静电学 (即  $\vec{j} = 0$ ) 的前提下，导体内电场强度必须处处为 0.

由  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = 0$  知：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho = 0 \quad (3.1.5)$$

即导体内部不可能有电荷分布，因此导体的电荷只能分布在表面上。

易知，静电条件下导体表面的电场的切向分量为 0，亦即，导体表面的标势处处相等。

根据 Gauss 定理，垂直电场与此处的表面电荷面密度成正比：

$$D_{\perp} = \sigma \implies E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (3.1.6)$$

总结，与导体相关的电场行为满足：

$$\begin{cases} \vec{E}_{in} = 0 & \rho_{in} = 0 \\ \vec{E}_{\parallel}^{surface} = 0 \\ \vec{E}_{\perp}^{surface} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

由于导体表面上的电荷分布和表面垂直电场均是未知量，进一步将以上关于场的边界条件转化为对势的边界条件：

$$\begin{cases} \varphi|_{Boundary} = Constant \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{Boundary} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \end{cases} \quad Q = -\varepsilon \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (3.1.8)$$

以上条件均由导体内部有自由电荷这个性质决定。

原则上导体相关静电问题就是在边界条件3.1.8下求解3.1.3, 共可能有两类问题：



- 等势问题

假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡,  $\varphi = \text{const.}$  (此时导体上的总电荷不能预先设定)

- 孤立导体问题

假设导体孤立, 则  $Q$  已知, 但此时  $\varphi$  不能预先设定。某种意义上讲,  $Q, \varphi$  是一对共轭量, 不可能同时预先设定。

### 3.2 格林互易定理

**格林互易定理:**

当  $m$  个导体上的电荷为  $q_1, q_2, \dots, q_m$  时, 它们的电势等于  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ ; 当导体上的电荷为  $q'_1, q'_2, \dots, q'_m$  时, 它们的电势等于  $\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_m$ , 那么有关系式:

$$\sum_{i=1}^m q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^m q'_i \phi_i \quad (3.2.1)$$

#### 格林定理

取一个任意的闭合曲面  $S$ , 假设  $\Phi, \Psi$  是  $S$  包围的体积  $V$  内的两个连续可微的函数。

由高斯定理:

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) d\tau = \int_S \Phi \nabla \Psi \cdot d\vec{S} \quad (3.2.2)$$

将  $\Phi, \Psi$  位置互换:

$$\int_V \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) d\tau = \int_S \Psi \nabla \Phi \cdot d\vec{S} \quad (3.2.3)$$

两式相减可得:

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) d\tau = \int_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot d\vec{S} \quad (3.2.4)$$

式 (3.2.4) 即为格林定理, 它的重要性是将任意两个标量函数的空间的性质转化为边界处的行为。

**格林互易定理的证明:**

对于包含  $m$  个导体的空间, 取无限远处为封闭曲面  $\vec{S}_0$ , 挖掉其中所有  $m$  个导体, 于是产生  $m$  个封闭曲面  $\vec{S}_i$ 。剩余的空间体积为  $V$ , 是一个多连通的闭合区域, 边界由  $\vec{S}_0$  和  $\vec{S}_i$  共同确定, 记为  $S$ 。

考虑两个状态, 其中导体上分别带有电荷  $\{q_i\}$  和  $\{q'_i\}$ , 此时对应的电势分布分别为  $\varphi(\vec{r})$ ,  $\varphi'(\vec{r})$ 。

由于电荷都分布在导体表面上, 所以在体积  $V$  内:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \varphi' = 0 \quad (3.2.5)$$

现在令  $\Psi = \varphi$ ,  $\Phi = \varphi'$ , 代入式 (3.2.4), 则式 (3.2.4) 左边为 0。

式 (3.2.4) 右边被积分项以  $r^{-3}$  在无穷远处趋于 0, 因此其对  $\vec{S}_0$  的积分 = 0。

于是有:

$$\sum_{i=1}^m \oint_{S_i} (\varphi \nabla \varphi' - \varphi' \nabla \varphi) \cdot d\vec{S}_i = 0 = \sum_{i=1}^m \oint_{S_i} \left( \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \cdot d\vec{S}_i \quad (3.2.6)$$

由于导体表面的电荷分布有:

$$\sigma_i = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_i} \quad \sigma'_i = \varepsilon \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \Big|_{S_i} \quad (3.2.7)$$

(取 + 号是因为  $\vec{S}_i$  的方向定义为垂直表面向导体内部)

导体表面是等势体，于是：

$$\phi_i = \varphi|_{S_i} \quad \phi'_i = \varphi'|_{S_i} \quad (3.2.8)$$

代入式 (3.2.6) 得：

$$\sum_i \left( \oint_{S_i} \phi_i \sigma'_i dS_i - \oint_{S_i} \phi'_i \sigma_i dS_i \right) = 0 \quad (3.2.9)$$

积分后，即得到格林互易定理：

$$\sum_{i=1}^m q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^m q'_i \phi_i \quad (3.2.10)$$

推论：

令  $q'_1 = q'_3 = q'_4 = \cdots = q'_n = 0, q_2 = q_3 = q_4 = \cdots = q_n = 0$ ，则有：

$$q'_2 \phi_2 = q_1 \phi'_1 \quad (3.2.11)$$

再令  $q_1 = q'_2$ ，则得：

$$\phi'_1 = \phi_2 \quad (3.2.12)$$

即带电  $q$  的导体 B 在不带电的导体 A 上（感应）产生的电势等于带电  $q$  的导体 A 在不带电的导体 B 上（感应）产生的电势。

**例 1** 在一个接地导体球（半径为  $R$ ）外距球心距离为  $r$  的地方放置一个带电量为  $q$  的点电荷，求在导体球上的感应电荷。

对于这个由两个导体组成的导体系统，对应电荷分布  $\{q, q_R\}$ ，电势分布为  $\{\varphi_q, 0\}$ 。

现制备另外一个电荷分布  $\{0, q'_R\}$ ，则两个导体上的电势分别为  $\left\{ \frac{q'_R}{4\pi\epsilon_0 r}, \frac{q'_R}{4\pi\epsilon_0 R} \right\}$ 。

因此，根据格林互易定理可得：

$$q \frac{1}{r} + q_R \frac{1}{R} = 0 \implies q_R = -\frac{R}{r} q \quad (3.2.13)$$

### 3.3 导体系统的能量、固有能和相互作用能

#### 3.3.1 利用静电标势来表示静电能量

假设一系列导体放置在介电常数为  $\epsilon$  的线性电介质背景中，则体系的静电总能量为：

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}) d\tau \quad (3.3.1)$$

利用  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ， $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ，上式可改写：

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \int (\nabla\varphi) \cdot \vec{D} d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\varphi \vec{D}) d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \nabla \cdot \vec{D} d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \oint \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

若考察体系总能量，则上式右边的面积分对无穷大的面进行。电荷体系分布在有限区域内的情况， $\varphi \vec{D}$  以  $r^{-3}$  形式在无穷远处趋向 0，因此面积分为 0。此外，导体上的电荷分布全部集中在导体的表面，而导体表面上的势为常数。因此，能量表达式变为：

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i \quad (3.3.3)$$

式中  $\phi_i, Q_i$  为第  $i$  个导体的势和总电荷。

### 3.3.2 电容

任意一个导体上的电势  $\phi_i$  是各个导体上的电量的线性函数：

$$\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j \quad (3.3.4)$$

式中的比例系数  $C_{ij}^{-1}$  与导体的形状和相对位置有关，其量纲是长度量纲的负一次方。反之亦然：

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j \quad (3.3.5)$$

证明：

① 只在第 1 个导体上放置单位电量的电荷，其它所有导体上不放置电荷，即电荷分布为  $\{1, \dots, 0, \dots\}$ 。

此体系达到静电平衡时，对应的电势分布为  $\{\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_j^{(1)}, \dots\}$ 。

同时记下所有导体上的面电荷分布  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots\}$ 。

② 当第 1 个导体上的电荷线性增加  $q_1$  倍时，即电荷分布为  $\{q_1, \dots, 0, \dots\}$ 。

达到静电平衡时的导体面电荷分布一定为  $\{q_1 \sigma_1, \dots, q_1 \sigma_j, \dots\}$ 。

根据线性叠加原理，对应的电势分布一定为  $\{q_1 \varphi_1^{(1)}, q_1 \varphi_2^{(1)}, \dots, q_1 \varphi_j^{(1)}, \dots\}$ 。

③ 换第二个带电体上充电  $q_2$  (其它带电体上不充电)，则得到电势分布  $\{q_2 \varphi_1^{(2)}, q_2 \varphi_2^{(2)}, \dots, q_2 \varphi_j^{(2)}, \dots\}$ 。

将这个状态与②中的状态线性叠加，得到的电荷分布状态也是静电平衡态，其对应电荷分布为  $\{q_1, q_2, \dots, 0, \dots\}$ 。

将这样的过程循环往复，我们发现对应于为  $\{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots\}$  的状态，第  $i$  个带电体上的电势为  $\phi_i = \sum_j q_j \varphi_i^{(j)}$ 。

于是问题得证，其中  $C_{ij}^{-1} = \varphi_i^{(j)}$ ，物理意义：只在第  $j$  个带电体上充单位电量时在第  $i$  个带电体上诱导的电势。

于是导体体系能量可以用电势或电荷表示：

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij}^{-1} Q_i Q_j \quad (3.3.6)$$

### 3.3.3 固有能和相互作用能

设有两个带电体 1 和 2，他们各自独立存在时在空间激发的电场分别为  $\vec{E}_1$  和  $\vec{E}_2$ 。将它们放在一起，当如下条件之一存在时：

① 两个带电体自身的尺寸远远小于它们之间的距离时；

② 一个带电体的电量及尺寸远远小于另一个带电体的电量及尺寸。

此时两个带电体上的电荷分布不因两个它们之间的相对构型的改变而产生显著变化。

空间总的电场可近似写为  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ 。

体系总能量：

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int \vec{E}^2 d\tau = \frac{\varepsilon}{2} \int E_1^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2} \int E_2^2 d\tau + \varepsilon \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau \quad (3.3.7)$$

上式右方第一和第二项表示 1 或 2 带电体单独存在时的能量  $W_1$  和  $W_2$ ，称为固有能；

第三项表示两个体系合起来之后与原来单独存在时的能量差，称为相互作用能，可写成：

$$W_{int} = \varepsilon \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau = \varepsilon \int \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 d\tau \quad (3.3.8)$$

其中  $\varphi_1, \varphi_2$  为两个带电体单独存在时空的电势分布，分别满足：

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho_1}{\varepsilon} \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho_2}{\varepsilon} \quad (3.3.9)$$

利用分部积分：

$$W_{int} = \varepsilon \int \nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \varphi_2) d\tau - \varepsilon \int \varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 d\tau = \int \varphi_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}) d\tau \quad (3.3.10)$$

若带电体自身尺寸远小于它们之间的间距， $\varphi_1$  在带电体 2 的所处的区间内近似为一常数，则

$$W_{12} \approx \varphi_1 \int_V \rho_2 d\tau = \varphi_1 q_2 \quad (3.3.11)$$

① 点电荷在外电场中：

对于一个点电荷  $q$  放置于外电场中，电荷所在位置处外电场电势为  $\varphi_{ext}(\vec{r})$ ，则个体系的相互作用能为：

$$W_{int} = q\varphi_{ext}(\vec{r}) \quad (3.3.12)$$

② 电荷系的相互作用能：

对于由一系列点电荷组成的体系，首先考虑相距为  $R$  的两个点电荷的相互作用能：

$$W_{int,12} = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1 = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (3.3.13)$$

因此相互作用能也可以写为：

$$W_{int,12} = \frac{1}{2} (q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1) \quad (3.3.14)$$

将上式推广到  $n$  个电荷组成的体系：

$$W_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha}^n q_{\alpha} \phi_{\alpha} \quad (3.3.15)$$

其中  $\phi_{\alpha}$  为除电荷  $q_{\alpha}$  之外所有其余电荷在电荷  $q_{\alpha}$  处的势之和。

### 3.4 静电体系的稳定性问题

#### 3.4.1 汤姆孙定理

假设每个导体都不动，但电荷在导体上可以自由再分布。

显然扰动必须满足约束条件：

$$\int \delta\rho_i d\tau = \delta Q_i = 0 \quad (3.4.1)$$

考虑由于电荷分布的扰动而引起的能量变化：

$$\delta W = W(\rho + \delta\rho) - W(\rho) = \varepsilon \int \vec{E} \cdot \delta\vec{E} d\tau = -\varepsilon \int \nabla\varphi \cdot \delta\vec{E} d\tau \quad (3.4.2)$$

其中  $\delta\vec{E}$  为  $\delta\rho$  所产生的电场，满足：

$$\nabla \cdot \delta\vec{E} = \frac{\delta\rho}{\varepsilon} \quad (3.4.3)$$

对式 (3.4.2) 分部积分：

$$\begin{aligned} \delta W &= -\varepsilon \int \nabla \cdot (\varphi \delta\vec{E}) d\tau + \varepsilon \int \varphi \nabla \cdot \delta\vec{E} d\tau \\ &= \int \varphi \delta\rho d\tau \\ &= \sum_i \int \varphi \delta\rho_i d\tau \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

由于约束 (3.4.1) 的存在，极值条件须引入拉格朗日不定乘子  $\lambda_i$ ：

$$\begin{aligned} 0 &= \delta W - \sum_i \lambda_i \delta Q_i \\ &= \sum_i \int \varphi(\vec{r}_i) \delta\rho_i d\tau_i - \sum_i \lambda_i \int \delta\rho_i d\tau_i \\ &= \sum_i \int [\varphi(\vec{r}_i) - \lambda_i] \delta\rho_i(\vec{r}) d\tau_i \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

由于  $\delta\rho_i(\vec{r})$  相互独立，因此上式导致：

$$\varphi(\vec{r}_i) = \lambda_i \quad (3.4.6)$$

**汤姆孙定理：**

若导体系中每个导体的位置固定不变，每一导体上放置一定量的电荷，则当电荷的分布使所有导体均为等势体时，能量到达极小值，体系处于平衡状态。

#### 3.4.2 恩肖定理

在讨论由于导体构型的变化而产生的能量改变时，我们做如下假设：

- 绝热近似：

带电体的运动速度很慢，使得每个时刻上面的电荷分布都有足够的时间达到平衡（即称为等势体）。

- 带电体之间的距离足够远，带电体的运动带来的每个导体上的电荷再分布可以忽略。

于是我们可以不考虑体系的固有能 (因为在构型发生改变时固有能不变), 只考虑相互作用能:

$$W_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha} \phi_{\alpha} \quad (3.4.7)$$

$W_{int}$  是各个导体位置  $\{\vec{r}_{\alpha}\}$  的函数, 其具有极小值的充要条件是:

$W_{int}$  对所有电荷的坐标的一阶微商必须为零, 而二阶微商必须恒大于零。

简单起见, 只考虑其中一个导体的位置发生了变化  $\vec{r}_{\alpha} \rightarrow \vec{r}_{\alpha} + \delta\vec{r}_{\alpha}$ .

则变分后第一个条件要求:

$$\nabla_{\alpha} W_{int} = 0 \implies \nabla \phi_{\alpha} = 0 \implies \vec{E}_{\alpha} = 0 \quad (3.4.8)$$

即在每个导体所在处, 由其他导体产生的电场必须相互抵消恒为 0。

假设这一个条件能够实现, 我们进一步考察这种状态的稳定性问题。

检查  $W$  在某一个“平衡位置”附近对其中一个导体位置做扰动  $\vec{r}_{\alpha} \rightarrow \vec{r}_{\alpha} + d\vec{r}_{\alpha}$ , 保留到 2 阶:

$$\begin{aligned} \delta^2 W &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial^2 W}{\partial r_{\alpha}^i \partial r_{\alpha}^j} d r_{\alpha}^i d r_{\alpha}^j \\ &= \frac{q_{\alpha}}{2} \sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial^2 \phi_{\alpha}}{\partial r_{\alpha}^i \partial r_{\alpha}^j} d r_{\alpha}^i d r_{\alpha}^j \\ &= \sum_{i,j=x,y,z} B_{i,j} d r_{\alpha}^i d r_{\alpha}^j \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

其中  $B_{i,j} = \frac{q_{\alpha}}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\alpha}}{\partial r_{\alpha}^i \partial r_{\alpha}^j}$  为一个对称矩阵。

要使得体系稳定, 应保证  $\delta^2 W$  针对任意的变动恒为正。

将  $B$  矩阵对角化, 得到一系列本征值  $b_i$ , 则:

$$\delta^2 W = \sum_{i=1,2,3} b_i (d\vec{r}_{\alpha}^i)^2 \quad (3.4.10)$$

式中  $d\vec{r}_{\alpha}^i$  对应这一本征值的本征矢量, 可以理解为这些扰动的简正模式。

要得到稳定状态, 则要求所有可能的扰动均导致能量上升, 因此所有本征值均大于 0:

$$b_i > 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.11)$$

另一方面, 考虑  $\phi_{\alpha}$ , 根据 Poisson 方程:

$$\nabla_{\alpha}^2 \phi_{\alpha} = \sum_i \frac{\partial^2 \phi_{\alpha}}{\partial r_{\alpha}^i \partial r_{\alpha}^i} \quad (3.4.12)$$

于是根据  $B_{i,j}$  矩阵的定义:

$$2 \sum_{i=1,2,3} b_i = 2Tr(B_{i,j}) = q_{\alpha} \nabla_{\alpha}^2 \phi_{\alpha} = 0 \quad (3.4.13)$$

显然, 式 (3.4.11) 和 (3.4.13) 相互矛盾, 故  $W_{int}$  不可能有极小值, 只可能存在“鞍点”类型的极值点, 因此只有静电相互作用的电荷体系不可能形成稳定状态, 任何稳定的静电体系的形成都必须有其他约束力参与。

### 3.5 导体表面所受的静电力

#### 3.5.1 Maxwell 张量

在定态或时谐场条件下，物体的受力就是 Maxwell 张量的面积分：

$$\vec{F} = - \oint d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T} \quad (3.5.1)$$

由于导体内的电场为 0，因此只有导体的外表面受力。

单位面积所受的力为：

$$\vec{F}_S = -\vec{e}_n \cdot \overleftrightarrow{T} \quad (3.5.2)$$

静电条件下，真空中的麦克斯韦张力张量为

$$\overleftrightarrow{T} = \varepsilon_0 \left( \frac{1}{2} E^2 \overleftrightarrow{I} - \vec{E} \vec{E} \right) \quad (3.5.3)$$

导体外表面的场只有法向分量，故

$$\vec{F}_S = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \vec{e}_n \quad (3.5.4)$$

可见导体表面单位面积受力的大小等于静电场的能量密度，方向指向导体外法线方向。

用面电荷表示导体表面的场：

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_n \quad (3.5.5)$$

代入式 (3.5.4) 可得：

$$\vec{F}_S = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \vec{e}_n \quad (3.5.6)$$

#### 3.5.2 直接计算电荷受力

由洛伦兹力：

$$\vec{F} = \int \rho \vec{E} d\tau \quad (3.5.7)$$

电场在导体的内外表面不连续：

$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E}_- = 0 \quad (3.5.8)$$

考虑电荷均匀地分布在一个厚度为  $l$  的过渡层中：

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & z < -l \\ \rho_0 & -l < z < 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases} \quad (3.5.9)$$

由 Gauss 定理计算电场分布：

$$E = \begin{cases} 0 & z < -l \\ \frac{\rho_0(z+l)}{\varepsilon_0} & -l < z < 0 \\ \frac{\rho_0 l}{\varepsilon_0} & z > 0 \end{cases} \quad (3.5.10)$$

则导体表面受力:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \int dS \int_{-l}^0 \rho_0 \vec{E} dz \\
 &= \int dS \int_{-l}^0 \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0^2 (z+l) \vec{e}_n dz \\
 &= \frac{1}{2\varepsilon_0} (\rho l)^2 \vec{e}_n dS
 \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

当此过渡层非常小时, 过渡层的电荷可以等价成面电荷分布:

$$\sigma = \lim_{l \rightarrow 0} (\rho l) \tag{3.5.12}$$

因此, 导体表面单位面积所受的力为:

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2\varepsilon_0} (\rho l)^2 \vec{e}_n = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \vec{e}_n \tag{3.5.13}$$

结果与利用麦克斯韦张力张量所作的计算一致。

## 4 静电学 II-电介质静电学

### 4.1 电介质边界条件

由 Maxwell 方程我们得到场在两个介质分界面的边值关系:

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \tag{4.1.1}$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \tag{4.1.2}$$

式中  $\vec{e}_n$  指垂直于界面由 2 指向 1 的单位矢量, t 指界面上两个独立方向矢量。

由  $\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi$  代入式 (4.1.1):

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f \tag{4.1.3}$$

由  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  代入式 (4.1.2):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{||}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{||}} \implies \frac{\partial (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n_{||}} = 0 \implies (\varphi_1 - \varphi_2)|_{surface} = const. \tag{4.1.4}$$

式中  $n_{||}$  为界面上的两个独立方向, 而  $const.$  为与界面上位置无关的一个常数。

由势的定义:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{4.1.5}$$

记  $h$  为 1, 2 两个点之间的距离, 当  $h \rightarrow 0$  时:

$$\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{2,n} \frac{h}{2} + E_{1,n} \frac{h}{2} = \left( \frac{E_{2,n} + E_{1,n}}{2} \right) h \tag{4.1.6}$$

显然只有在电场存在奇性时上式才不为 0, 但一般电场均不会发散, 因此:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{4.1.7}$$



## 4.2 唯一性定理

定理：

如果静电体系内存在电荷分布  $\rho(\vec{r})$  和电介质分布  $\varepsilon(\vec{r})$ ，且关系式  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  成立，则体系的电场由边界条件 (即边界上的  $\varphi$  或  $\vec{e}_n \cdot \vec{D}$ ) 唯一确定。即不可能存在两组不同的电场解，都满足同样的边界条件。

证明：

反证法：设对同一个体系存在有两个解  $\varphi'$  和  $\varphi''$ ，下面证明：

$$\vec{D}' = \vec{D}'' \quad \vec{E}' = \vec{E}'' \quad (4.2.1)$$

根据定义，这两个场要满足同样的边界条件，即在边界处有：

$$\varphi' = \varphi'' \quad \text{或者} \quad \vec{D}' \cdot \vec{e}_n = \vec{D}'' \cdot \vec{e}_n \quad (4.2.2)$$

定义函数  $\vec{Z}(\vec{r})$ ：

$$\vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'') (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.3)$$

其在边界上的积分一定为 0：

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S (\varphi' - \varphi'') (\vec{D}' - \vec{D}'') \cdot d\vec{S} \\ &= \oint \vec{Z}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \\ &= \int_V \nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) d\tau \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

对于  $\vec{Z}(\vec{r})$  的散度：

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'') (\nabla \cdot \vec{D}' - \nabla \cdot \vec{D}'') + (\nabla \varphi' - \nabla \varphi'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.5)$$

对于同一个体系：

$$\nabla \cdot \vec{D}' = \nabla \cdot \vec{D}'' = \rho \quad (4.2.6)$$

因此

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = - (\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.7)$$

将上式代入式 (4.2.4) 可得：

$$\int_V (\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') d\tau = - \int_V \nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) d\tau = 0 \quad (4.2.8)$$

由

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}' \quad \vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}'' \quad (4.2.9)$$

代入式 (4.2.8) 可得：

$$\int_V \varepsilon(\vec{r}) |\vec{E}' - \vec{E}''|^2 d\tau = 0 \quad (4.2.10)$$

由于  $\varepsilon \geq 1$ ，所以有：

$$\vec{E}' = \vec{E}'' \quad (4.2.11)$$

两个解相同，静电场是唯一的。

由  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  可知，电势  $\varphi'$  与  $\varphi''$  之间最多差一个任意常数。

P.S.:

某些介质中  $\vec{D}$  与  $\vec{E}$  之间不一定是线性的，一般  $\vec{D}$  是  $\vec{E}$  的函数。

因此只要  $\vec{D}$  是  $\vec{E}$  的单值单调递增函数，由式 (4.2.8) 可知定理仍成立。

但对铁电介质来说，上述唯一性定理不成立，因为有电滞回线存在， $\vec{D}$  与  $\vec{E}$  不再是单值的。

### 4.3 镜像法

将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的像电荷代替，适合研究空间内有源电荷的情况。

将区域内的电势看作是由区域内的电荷和处于区域外部的一些虚拟电荷共同决定：

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{image} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_{image}(\vec{r}'')d\tau''}{R} \quad (4.3.1)$$

因像电荷放在边界的外部，故有：

$$\nabla^2 \varphi_{image} \equiv 0 \quad (4.3.2)$$

因此仍有 Poisson 方程：

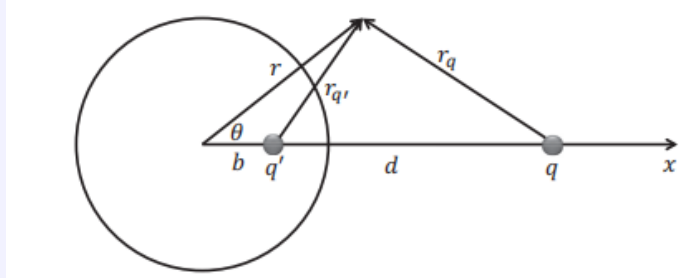
$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.3.3)$$

因此只要调整像电荷的位置和大小，使它总电势  $\varphi$  满足所给的边界条件，则找到了问题的解。

例 1 设一点电荷附近有一接地导体球面，求空间电势分布。

取球心为坐标原点，球心到点电荷  $q$  的方向为  $x$  轴。

设  $q$  的坐标为  $(d, 0, 0)$ ，球半径为  $R$ ，显然球内的电势为零。



球外空间的电势所满足的方程和边界条件：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x-d, y, z) \\ \varphi|_{r=R} = 0 \\ \varphi|_{r=\infty} = 0 \end{cases} \quad (4.3.4)$$

根据问题对称性，像电荷应在球内  $(b, 0, 0)$  处，设其电量为  $-q'$ 。

因此球外空间的试解为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right) \quad (4.3.5)$$

其中

$$r_q = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta} \quad r_{q'} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta} \quad (4.3.6)$$

试求出适当的  $b$  和  $q'$ ，使试解满足边界条件。

无穷远处的边界条件自动满足，只需考虑势在球面  $(r = R)$  上为零的边界条件。

将  $\varphi|_{r=R} = 0$  代入试解：

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta}} = 0 \quad (4.3.7)$$

即

$$q^2 (b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta) = q'^2 (d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta) \quad (4.3.8)$$

对于任意  $\theta$  值，上式均应成立：

$$\begin{cases} q^2 (b^2 + R^2) = q'^2 (d^2 + R^2) \rightarrow \theta(\text{无关项}) \\ q^2 b = q'^2 d \rightarrow \theta(\text{相关项}) \end{cases} \quad (4.3.9)$$

方程组有两组解：

$$\begin{cases} b = d \\ q' = q \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{R^2}{d} \\ q' = \frac{R}{d} q \end{cases} \quad (4.3.10)$$

只有后一组解满足要求，于是得到问题的解。

例题中问题的解为：

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2rd\cos\theta}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{d}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{d}\cos\theta}} \right), & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} \quad (4.3.11)$$

于是便可求出球面上的电荷面密度：

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= -\frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{R}{d} \right) \frac{1 - \frac{R^2}{d^2}}{\left( 1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d}\cos\theta \right)^{3/2}} \\ &= -\frac{q'}{4\pi R^2} F(\theta) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

其中

$$F(\theta) = \frac{1 - \frac{R^2}{d^2}}{\left( 1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d}\cos\theta \right)^{3/2}} \quad (4.3.13)$$

为一个角分布函数。

在两个极限条件下考虑面点荷（电场）分布：

①  $\frac{R}{d} \rightarrow 0$ ：

此时源电荷离导体球很远，对整个导体球来讲近似为均匀电场。

角分布：

$$F(\theta) = 1 + 3\frac{R}{d}\cos\theta \quad (4.3.14)$$

即导体的面电荷基本为均匀分布，但有一个因电场而产生与角度相关的调制。

②  $\frac{R}{d} \rightarrow 1$ ：

此时源电荷离导体球很近，其看到的导体表面基本上是一个无限大平面。

$$F(\theta) = \begin{cases} \infty & \cos\theta \rightarrow 1 \\ 0 & \cos\theta \rightarrow -1 \end{cases} \quad (4.3.15)$$

感应电荷只出现在靠近源电荷的一边。

对于两种情况，总感应电荷均为：

$$\int \sigma dS = \int \sigma(\theta) 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = -\frac{R}{d}q = -q' \quad (4.3.16)$$

即像电荷的大小等于导体面上的感应电荷。(agree with Green 互易定理)

导体表面单位面积受的作用力：

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \hat{r} \quad (4.3.17)$$

导体球受的总力 (根据对称性, 只有 x 分量非 0):

$$F = \oint \vec{f} \cdot \hat{x} dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R^2} \frac{\frac{R^3}{d^3}}{\left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right)^2} \quad (4.3.18)$$

同时:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{(d-b)^2} \quad (4.3.19)$$

这个力正好是点电荷 q 对像电荷 q' 的作用力; 根据牛顿第 3 定律, 点电荷受到导体上像电荷等量反向的作用力, 称为“镜像力”。

讨论:

- 当  $\frac{R}{d} \rightarrow 1$  时, 设  $d = R + \delta, \delta \rightarrow 0$ , 有:

$$b = \frac{R^2}{(R + \delta)} \approx R - \delta \quad (4.3.20)$$

$$q' = \frac{qR}{R + d} \approx q \left(1 - \frac{d}{R}\right) \approx q \quad (4.3.21)$$

- 导体球接电势  $V_0$

此时的边界条件为:

$$\varphi|_{r=R} = V_0 \quad (4.3.22)$$

此时应在原解的基础上, 再加上一个在导体表面上产生常数电势的镜像电荷。

易得该像电荷应处于导体球中心, 电量为  $q'' = 4\pi\varepsilon_0 V_0 R$ 。

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} + \frac{q''}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} \right) + \frac{V_0 R}{r} \quad (4.3.23)$$

- 导体球为孤立导体带电 Q

此时的边界条件为:

$$\varphi|_{r=R} = \text{const.}(\text{unknown}) \quad (4.3.24)$$

以及

$$-\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q \quad (4.3.25)$$

此时必须加上一个放在球心电量为 q'' 的像电荷。

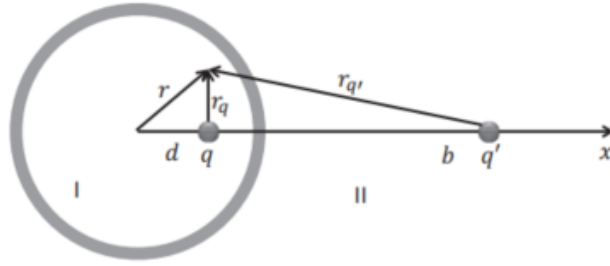
球外电势:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} + \frac{q''}{r} \right) \quad (4.3.26)$$

计算球面上的电荷:

$$Q = -\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -q' + q'' \implies q'' = Q + q' \quad (4.3.27)$$

- 点电荷  $q$  在导体球壳内，距球心  $d$  处



① 球壳接地：

球内外区域的电场及电势满足：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = \frac{-q\delta(x-d, y, z)}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \varphi_{II} = 0 \end{cases} \quad (4.3.28)$$

边界条件：

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} = 0 & r = R \\ \varphi_{II} \rightarrow 0 & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.3.29)$$

考虑球内电势，应为真实电荷  $q$  和球外的“像电荷”  $-q'$  的叠加：

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right) \quad (4.3.30)$$

可以解得：

$$q' = q \frac{R}{d}, \quad b = \frac{R^2}{d} \quad (4.3.31)$$

球壳外没有真实电荷， $r = R$  与  $r \rightarrow \infty$  的边界上电势均为 0，因此满足此边界条件的解只有：

$$\varphi_{II} = 0 \quad (4.3.32)$$

② 球壳电势为  $V_0$

边界条件：

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} = V_0 & r = R \\ \varphi_{II} \rightarrow 0 & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.3.33)$$

注意到  $\varphi = V_0$  本身就是 Poisson 方程的解。

因此 I 区域电势的最终解为：

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right) + V_0 \quad (4.3.34)$$

其满足所有的边界条件同时满足 Poisson 方程，故唯一性定理保证其正确性。

II 区域无源，电势应由处于其它区域的像电荷产生。

考虑此时的边界条件，像电荷应为处于原点的电量为  $4\pi\varepsilon_0 V_0 R$  的点电荷。

因此 II 区域电势:

$$\varphi_{II} = \frac{V_0 R}{r} \quad (4.3.35)$$

由于事实上导体球壳不是无限薄的, 而是具有内外两个界面。静电平衡时电荷分布在两个界面上, 球壳内部的电荷密度为 0。

内表面上电荷密度:

$$\begin{aligned} \sigma_{in} &= -\varepsilon_0 E_{in} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \\ &= -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{d}{R}\right)^2 - 2\frac{d}{R}\cos\theta\right]^{3/2}} \\ &= -\frac{q}{4\pi R^2} \tilde{F}(\theta) \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

总电荷可由 Gauss 定理得到:

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{in} + q \implies q_{in} = -q \quad (4.3.37)$$

外表面上电荷均匀分布, 总电量:

$$q_{out} = \oint \sigma_{out} \cdot dS = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \quad (4.3.38)$$

物理图像:

(a) 球内电荷在球壳内表面感应出等量异号的电荷即达到平衡, 再外加任何电荷都不会跑到内表面而只会留在外表面。

(b) 这些均匀分布在外表面的电荷起的作用不过是改变整个球壳的电势, 但对内电场没有丝毫影响。

(c)  $\sigma_{in}$  对应于 II 区处于 b 处的“像电荷”, 而  $\sigma_{out}$  对应于贡献  $\varphi = V_0$  的像电荷。

#### 4.4 格林函数方法

静电问题中的格林函数是在特殊边界条件下空间坐标为  $\vec{r}'$  的单位点电荷在空间  $\vec{r}$  处的静电势, 记为  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ 。

边界条件有两类:

① 在边界上的静电势:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_S = 0 \quad (4.4.1)$$

② 在边界上静电势的法线方向的导数:

$$\left( \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}') \right) \Big|_S = -\frac{1}{\varepsilon S} \quad (4.4.2)$$

式中 S 为系统外表面的面积。

第一 (二) 类边界条件对应的格林函数称为第一 (二) 类边值关系的格林函数。

易证有以下恒等式:

$$\Psi (\nabla')^2 \varphi - \varphi (\nabla')^2 \Psi = \nabla' \cdot (\Psi \nabla' \varphi - \varphi \nabla' \Psi) \quad (4.4.3)$$

令式中  $\Psi = G(\vec{r}', \vec{r})$  为格林函数,  $\varphi = \varphi(\vec{r})$  为所讨论系统在  $\vec{r}'$  处的静电势。

上式两端作积分, 左边:

$$\begin{aligned} \int \left[ G(\vec{r}', \vec{r}) (\nabla')^2 \varphi(\vec{r}') - \varphi(\vec{r}') (\nabla')^2 G(\vec{r}', \vec{r}) \right] d\tau' &= \int \left[ G(\vec{r}', \vec{r}) \left( -\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon} \right) - \varphi(\vec{r}') \left( -\frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r})}{\varepsilon} \right) \right] d\tau' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int G(\vec{r}', \vec{r}) \rho(\vec{r}') d\tau' + \frac{\varphi(\vec{r})}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

由高斯定理, 右边:

$$\oint_S \left[ G(\vec{r}', \vec{r}) (\partial_{n'} \varphi) - \varphi (\partial_{n'} G(\vec{r}', \vec{r})) \right] \Big|_{\vec{r}' \in S} dS'_n \quad (4.4.5)$$

以上两式得到:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}', \vec{r}) \rho(\vec{r}') d\tau' + \varepsilon \oint_S \left[ G(\vec{r}', \vec{r}) (\partial_{n'} \varphi) \right] \Big|_{\vec{r}' \in S} dS'_n - \varepsilon \oint_S \left[ \varphi (\partial_{n'} G(\vec{r}', \vec{r})) \right] \Big|_{\vec{r}' \in S} dS'_n \quad (4.4.6)$$

对于给定系统外表面电势的情形, 选择第一类边值关系的格林函数, 得到:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}', \vec{r}) \rho(\vec{r}') d\tau' - \varepsilon \oint_S \left[ \varphi (\partial_{n'} G(\vec{r}', \vec{r})) \right] \Big|_{\vec{r}' \in S} dS'_n \quad (4.4.7)$$

对于给定系统外表面电势法向导数的情形, 选择第二类边值关系的格林函数, 得到:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int G(\vec{r}', \vec{r}) \rho(\vec{r}') d\tau' + \varepsilon \oint_S \left[ G(\vec{r}', \vec{r}) (\partial_{n'} \varphi) \right] \Big|_{\vec{r}' \in S} dS'_n - \varepsilon \oint_S \varphi \Big|_{\vec{r}' \in S} \left( -\frac{1}{\varepsilon S} \right) dS'_n \\ &= \int G(\vec{r}', \vec{r}) \rho(\vec{r}') d\tau' + \varepsilon \oint_S \left[ G(\vec{r}', \vec{r}) (\partial_{n'} \varphi) \right] \Big|_{\vec{r}' \in S} dS'_n + \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

式中  $\bar{\varphi}$  为系统表面静电势的平均值。

## 4.5 本征函数展开法

许多问题中我们求解的空间中无源, 但其处在某一种外场中, 此时空间中电势满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.5.1)$$

根据不同的空间对称性, 我们可以选取适当的坐标系, 用分离变量法求解拉普拉斯方程的通解。

假设我们得到了这组解  $\{\varphi_n, n = 1, 2, \dots\}$ , 他们通常是正交完备的, 即:

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{n,m} \quad (4.5.2)$$

根据完备性, 我们可以将  $\varphi$  展开成这组本征态的线性叠加:

$$\varphi = \sum C_n \varphi_n \quad (4.5.3)$$

根据边界条件及本征函数的正交性来确定展开系数。

边界条件:

$$\varphi|_{\text{boundary}} = \varphi_0(\xi) \quad (4.5.4)$$

其中  $\xi$  是界面上的位置变量。

根据本征函数的正交性, 得到展开系数的表达式:

$$C_n = \langle \varphi_n | \varphi_0 \rangle = \int \varphi_n(\xi) \varphi_0(\xi) d\xi \quad (4.5.5)$$



### 4.5.1 轴对称的球坐标系问题 (与变量 $\phi$ 无关)

此时 Laplace 方程的本征解为  $r^l P_l(\cos\theta)$ ,  $r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$ , 因此通解:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \quad (4.5.6)$$

径向波函数  $r^l$  在  $r = 0$  处收敛,  $r^{-(l+1)}$  在  $r \rightarrow \infty$  时收敛。

$P_l(x)$  为 Legendre 多项式:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ \dots \end{cases} \quad (4.5.7)$$

本征函数之间满足如下正交关系:

$$\int P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d\cos\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (4.5.8)$$

### 4.5.2 与 $z$ 无关的柱对称问题

此时, Laplace 方程的本征解为  $\rho^{\pm n} e^{\pm i n \phi}$ ,  $\ln \rho$ , 1, 因此通解:

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \quad (4.5.9)$$

本征函数之间的正交性:

$$\int \cos(n\phi) \sin(n\phi) d\phi = 0 \quad (4.5.10)$$

$$\int \cos(n\phi) \cos(n'\phi) d\phi = \int \cos(n\phi) \sin(n'\phi) d\phi = 0 \quad n \neq n' \quad (4.5.11)$$

### 4.5.3 球对称问题 (与变量 $\phi, \theta$ 无关)

参考轴对称问题, 此时  $l = 0$ :

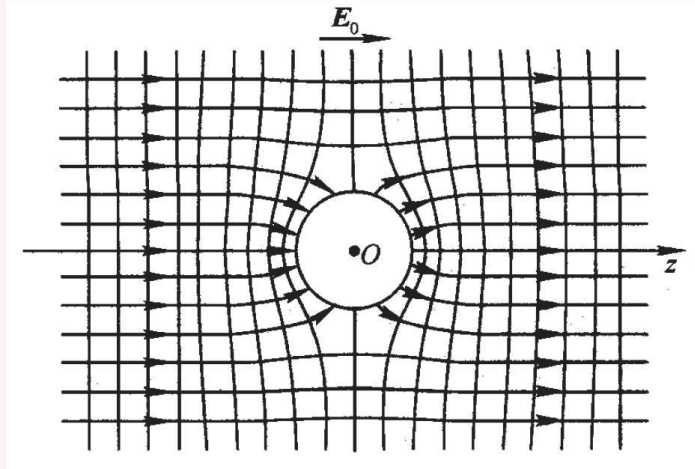
$$\varphi = A + \frac{B}{r} \quad (4.5.12)$$

例 2 一半径为  $R$  的接地导体球置于一均匀外场中，求空间场的分布。

如图，取  $\vec{E}_0$  方向为  $z$  轴，该问题绕  $z$  轴旋转对称。

球外空间没有电荷，电势在无穷远处趋向于均匀电场的电势，因此电势满足：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \varphi = 0 & r = R \\ \varphi \rightarrow -E_0 r \cos\theta & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.5.13)$$



该问题通解即为：

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta) \quad (4.5.14)$$

将试探解代入第二条边界条件，得到：

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 & l = 1 \\ A_l = 0 & l = 0, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.5.15)$$

再将试探解代入第一条边界条件，得到：

$$\left( -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \right) \cos\theta + \sum_{l \neq 1}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = 0 \quad (4.5.16)$$

再次利用  $P_l(\cos\theta)$  函数的相互正交性：

$$\begin{cases} B_1 = E_0 R^3 & l = 1 \\ B_l = 0 & l = 0, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.5.17)$$

于是我们得到最终结果：

$$\varphi = -E_0 r \cos\theta + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos\theta \quad (4.5.18)$$

注意到  $r^{-2}$  依赖关系是偶极子势的特征，因此可将式 (4.5.18) 改写为：

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \quad (4.5.19)$$

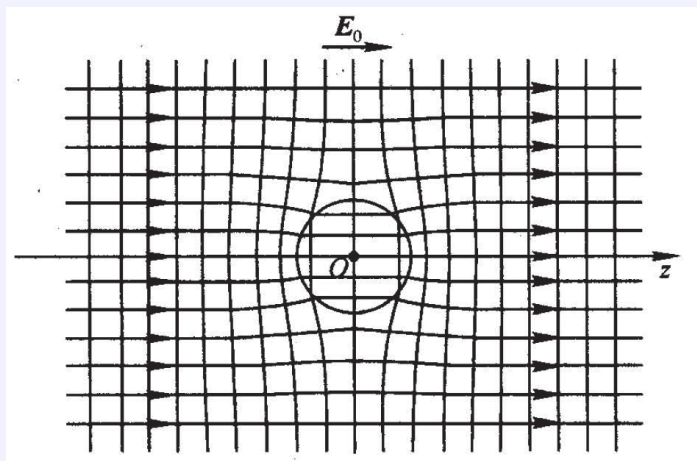
例 3 半径为  $R$ ，介电常数为  $\epsilon_2$  的均匀介质球，被置于均匀外场中，球外空间充满均匀介电常数为  $\epsilon_1$  的介质。求空间电势的分布。

如下图所示，取  $\vec{E}_0$  方向为极轴  $z$  方向，将空间分为球内和球外两个区域 (I,II)，电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ，满足方程：

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (4.5.20)$$

相应的边界条件：

$$\begin{cases} \varphi_1 \rightarrow -E_0 r \cos\theta & r \rightarrow \infty \\ \varphi_1 = \varphi_2 & r = R \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ \varphi_2 \text{ finite} & r = 0 \end{cases} \quad (4.5.21)$$



可见，本问题为三维轴对称球坐标系下的问题，选取合适本征函数展开  $\varphi_1, \varphi_2$ ：

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \quad (4.5.22)$$

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} [A'_l r^l + B'_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \quad (4.5.23)$$

由边界条件知只有  $l = 1$  项的系数非 0，故：

$$\varphi_1 = (A_1 r + B_1 r^{-2}) \cos\theta \quad (4.5.24)$$

$$\varphi_2 = (A'_1 r + B'_1 r^{-2}) \cos\theta \quad (4.5.25)$$

代入边界条件可以解得：

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 & B_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 R^3 \\ A'_1 = -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 & B'_1 = 0 \end{cases} \quad (4.5.26)$$

对例题 3 做讨论：

- 当  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$  时，介质球与环境的介电常数一样，故其对外场的响应消失。

代入发现：

$$\varphi_1 = \varphi_2 = -E_0 r \cos \theta \quad (4.5.27)$$

即空间的电场就是均匀电场。

- 球面上的束缚电荷就是球对外场的响应来源。

对比偶极子的电势：

$$\varphi_P = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad (4.5.28)$$

发现这些束缚电荷对外场的贡献相当于一个放在原点的偶极子：

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 \vec{E}_0 \quad (4.5.29)$$

- 球内的场为外场与束缚电荷产生的附加电场之和，结果为一均匀电场：

$$\vec{E}_{\text{内}} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{E}_0 \quad (4.5.30)$$

- 当  $\varepsilon_2 \rightarrow -\infty$  时，介质球内电场趋于 0，效果相当于一个导体球。

- 当  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$  (背景介质是空气)， $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ：

因介质球内的场为均匀场，故整个介质球被均匀极化，极化强度为：

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{内}} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{3}{2 + \varepsilon_r} \vec{E}_0 \quad (4.5.31)$$

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{2 + \varepsilon_r} R^3 \vec{E}_0 = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{3}{2 + \varepsilon_r} \vec{E}_0 \times \frac{4\pi R^3}{3} \quad (4.5.32)$$

上式对比可以发现，此时极化强度恰好为偶极子的电偶极距/体积：

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\frac{4\pi R^3}{3}} \quad (4.5.33)$$

因为  $\varepsilon_2 > \varepsilon_0$ ，我们发现  $\vec{E}_{\text{内}} < \vec{E}$ 。

这是因为极化电荷在球内产生电场抵消了部分外电场的贡献。这部分由极化电荷在球内产生的电场为：

$$\vec{E}_{p\text{内}} = \vec{E}_{\text{内}} - \vec{E}_0 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_2} \vec{E}_0 = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P} \quad (4.5.34)$$

这个场被称为退极场，整理后的结果：

$$\vec{E}_{\text{内}} = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P} \quad (4.5.35)$$

一般来讲，退极场可以写为：

$$\vec{E}_{\text{退}} = -\frac{L \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (4.5.36)$$

$L$  称为退极化因子，只依赖于物体的几何形状。 $L$  越大，说明退极效应越显著。

易证：对平板  $L = 1$ ，对球  $L = \frac{1}{3}$ ，对细针  $L = 0$ ，对不同长短轴的椭球  $L = 0 \sim 1$ 。

因此，介质在外场下的静电行为：

- ① 被外场极化
- ② 极化电荷在球外的贡献为偶极子
- ③ 极化电荷对球内的贡献为均匀电场，即退极场

可以看到除外加均匀电场的贡献外，还有一个偶极子的电场。这是由于导体球在电场的作用下正电荷堆积在一侧，负电荷堆积在另一侧，因此对外面的作用等效为一个偶极子，其偶极矩正比于外加电场以及球的体积。

讨论：

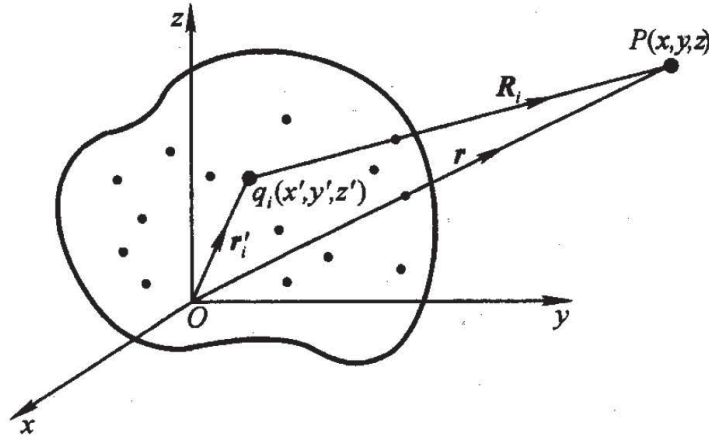
可认为偶极子的场就是这个体系对外场的散射场。外场是均匀电场，其只具有 ( $l = 1$ ) 的项 ( $-E_0 r \cos \theta$ )，因此体系的响应也就只有 ( $l = 1$ ) 的项，所以只产生偶极子。

若外场不是均匀场，而是具有更高  $l = 0$  的项，则体系的响应也一定有高  $l$  项。(唯一性定理的体现)

## 4.6 多极矩法

如图，电荷分布在有限体积  $V$  内，电荷密度为  $\rho(\vec{r}')$ ，这个体积的线度为  $l$ ，考查  $P$  点电场，点  $P$  和体积  $V$  内任一点  $O$  的距离为  $\vec{r}$ 。

多极矩法讨论在  $|\vec{r}| \gg l$  情况下的场分布。



$P$  点电势的准确解：

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{R} \quad (\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}') \quad (4.6.1)$$

由于 P 点离源较远, 有  $r' \ll r$ , 因此  $\frac{1}{R}$  可以在  $\vec{r}' = 0$  附近作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{r} + \sum_{i=x,y,z} (-r'_i) \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{1}{R} \right) \Big|_{\vec{r}'=0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left( \frac{1}{R} \right) \Big|_{\vec{r}'=0} + \cdots \\ &= \frac{1}{r} - \sum_{i=x,y,z} r'_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left( \frac{1}{r} \right) + \cdots \\ &= \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \vec{r}' \vec{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} + \cdots\end{aligned}\quad (4.6.2)$$

因此电势可展开为:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \quad (4.6.3)$$

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad Q = \int \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (4.6.4)$$

$$\varphi_1 = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \frac{1}{r} \quad \vec{p} = \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau' \quad (4.6.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' d\tau' : \nabla \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \quad (4.6.6)$$

$$\overleftrightarrow{D} = 3 \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' d\tau' \quad (4.6.7)$$

各项的物理意义:

- 第一项:

一个点电荷的势, 相当于 V 内电荷都集中在坐标原点时, 在 P 点所产生的势。

对应的电场强度:

$$\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.6.8)$$

- 第二项:

偶极子的势,  $\varphi_1 = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , 体系相应的偶极矩为  $\vec{p} = \int \rho \vec{r}' d\tau'$ 。

偶极矩的电场强度:

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\nabla \varphi_1 = \frac{3\vec{p}_r \vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.6.9)$$

- 第三项:

体系的四极矩的势,  $\overleftrightarrow{D} = 3 \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' d\tau'$  为体系的四极矩。

四极矩可以看作是由大小相等方向相反的偶极子组成的系统。

易证此时  $\overleftrightarrow{D}$  中唯一不为 0 的分量:

$$D_{zz} = 6l^2 q \quad (4.6.10)$$

一般情况下,  $\overleftrightarrow{D}$  有 9 个分量, 由于对称性其有 6 个独立分量。

$\overleftrightarrow{D}$  中还有一个隐含的不独立分量:

由于在  $\vec{r} \neq 0$  处总有  $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ ，亦即：

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} = \overleftrightarrow{\nabla} : \nabla \nabla \frac{1}{r} = 0 \quad (4.6.11)$$

上式表明，对于任意常数  $C$ ，均有：

$$C \overleftrightarrow{\nabla} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \equiv 0 \quad (4.6.12)$$

若选择此常数正比于  $\overleftrightarrow{D}$  矩阵的迹：

$$C \propto Tr \frac{\{\overleftrightarrow{D}\}}{3} = \frac{D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}}{3} \quad (4.6.13)$$

由式 (4.6.7) 和式 (4.6.12) 可知，可将  $\varphi_2$  改写为：

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \left( \overleftrightarrow{D} - \frac{Tr\{\overleftrightarrow{D}\}}{3} \overleftrightarrow{I} \right) : \nabla \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

式中：

$$\overleftrightarrow{D} = \int \left( 3\vec{r}\vec{r}' - r'^2 \overleftrightarrow{I} \right) \rho d\tau' \quad (4.6.15)$$

$\overleftrightarrow{D}$  称为约化四极矩，显然它是对称的无迹张量，即

$$\tilde{D}_{ij} = \tilde{D}_{ji} \quad \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{22} + \tilde{D}_{33} = 0 \quad (4.6.16)$$

只有 5 个独立分量。

直角坐标系中：

$$\overleftrightarrow{D} = \sum_{ij} \tilde{D}_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j, \quad \tilde{D}_{ij} = \int \rho [3x'_i x'_j - \delta_{ij} (r')^2] d\tau' \quad (4.6.17)$$

P.S. 球坐标系下：

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad r > r' \quad (4.6.18)$$

电势为：

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (4.6.19)$$

式中  $q_{lm} = \int r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') d\tau'$  称为多极矩。 $l = 0, 1, 2, \dots$  分别对应于点电荷、偶极矩、电四极矩、 $\dots$  的贡献。而它们分别有  $2l+1$  个独立分量 (不同的  $m$  值)，这些极矩所对应的“波函数”类似于原子物理中  $s, p, d, f, \dots$  轨道电子的波函数。

对于定态状态下宇称守恒的量子系统，波函数总有：

$$\Psi(-\vec{r}') = \pm \Psi(\vec{r}') \quad (4.6.20)$$

电荷密度：

$$\rho(-\vec{r}') = |\Psi(-\vec{r}')|^2 = |\Psi(\vec{r}')|^2 = \rho(\vec{r}') \quad (4.6.21)$$

对于处于定态的量子系统，其电多极矩：

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_{+\infty}^{-\infty} d(-x') \int_{+\infty}^{-\infty} d(-y') \int_{+\infty}^{-\infty} d(-z') \rho(-\vec{r}') r'^l Y_{lm}^*(\pi - \theta', \pi + \phi') \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \rho(\vec{r}') r'^l (-1)^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \\ &= (-1)^l q_{lm} \end{aligned} \quad (4.6.22)$$

于是可知：

$$(1 - (-1)^l) q_{lm} = 0 \quad (4.6.23)$$

**例 1 利用多极距展开法计算一个长度为 L 的带电棒的电势（展开到电四极距）。**

设棒的中心在坐标原点，则

$$Q = L\lambda \quad (4.6.24)$$

$$\vec{p} = \int \lambda z dz = 0 \quad (4.6.25)$$

$$D_{zz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 3\lambda z^2 dz = \frac{\lambda L^3}{4} \quad (4.6.26)$$

因此，电势为

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \frac{1}{6} D_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right] + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\lambda L}{r} + \frac{\lambda L^3}{24} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right] + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \lambda \left( \frac{L}{r} \right) + \frac{\lambda}{24} \left( \frac{L}{r} \right)^3 (3\cos^2\theta - 1) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.6.27)$$

**讨论：**

电偶极距考量的是体系是否破缺镜面反射对称性（ $x$  与  $-x$ ,  $y$  与  $-y$ ,  $z$  与  $-z$ ）；电四极距考量的是体系的  $x, y, z$  之间的对称性否被破坏 若破坏，则必有电四极距出现。



例 2 对于一个外表面方程如下的均匀带电椭球，求在该椭球远处的静电势。

外表面方程：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.6.28)$$

用  $\rho_0$  标记该椭球的电荷密度，选取椭球中心为坐标原点，椭球的总电荷为  $Q = \frac{4\pi a^2 b}{3} \rho_0$ 。

由于对称性，该椭球的电偶极矩：

$$\vec{p} = \int \rho_0 \vec{r}' d\tau' = 0 \quad (4.6.29)$$

类似地，在直角坐标系内电四极矩的矩阵元：

$$\overleftrightarrow{D}_{ij} = \int 3\rho_0 x'_i x'_j d\tau' = 0 \quad (i \neq j) \quad (4.6.30)$$

为得到对角元，首先计算积分  $\int (x')^2 d\tau', \int (y')^2 d\tau', \int (z')^2 d\tau'$ 。记  $(s')^2 = (x')^2 + (y')^2$ 。

$$\begin{aligned} \int (x')^2 d\tau' &= \int (y')^2 d\tau' = \int \frac{(x')^2 + (y')^2}{2} d\tau' = \frac{1}{2} \int (s')^2 d\tau' = \frac{1}{2} \int_{-b}^b dz' \int_0^a \sqrt{1 - \frac{(z')^2}{b^2}} (s')^2 2\pi s' ds' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b dz' 2\pi \frac{a^4}{4} \left(1 - \frac{(z')^2}{b^2}\right)^2 = \int_0^b dz' \frac{\pi}{2} a^4 \left(1 + \frac{(z')^4}{b^4} - 2\frac{(z')^2}{b^2}\right) = \frac{\pi a^4}{2} \left(b + \frac{b}{5} - \frac{2b}{3}\right) = \frac{4\pi}{15} a^4 b \end{aligned} \quad (4.6.31)$$

$$\begin{aligned} \int (z')^2 d\tau' &= \int_{-b}^b (z')^2 dz' \int_0^a \sqrt{1 - \frac{(z')^2}{b^2}} 2\pi s' ds' = \int_{-b}^b (z')^2 dz' \pi a^2 \left(1 - \frac{(z')^2}{b^2}\right) \\ &= 2\pi a^2 \int_0^b \left((z')^2 - \frac{(z')^4}{b^2}\right) dz' = 2\pi a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) b^3 = \frac{4\pi}{15} a^2 b^3 \end{aligned} \quad (4.6.32)$$

$$\rho_0 \int (x')^2 d\tau' = \rho_0 \int (y')^2 d\tau' = \rho_0 \frac{4\pi}{15} a^4 b = \frac{Q}{5} a^2; \quad \rho_0 \int (z')^2 d\tau' = \rho_0 \frac{4\pi}{15} a^2 b^3 = \frac{Q}{5} b^2 \quad (4.6.33)$$

将式 (4.6.33) 代入式 (4.6.17) 得到：

$$\tilde{D}_{xx} = \tilde{D}_{yy} = \int \rho_0 [3(x')^2 - (r')^2] d\tau' = \int \rho_0 [(x')^2 - (z')^2] d\tau' = \frac{Q}{5} (a^2 - b^2) \quad (4.6.34)$$

$$\tilde{D}_{zz} = \int \rho_0 [3(z')^2 - (r')^2] d\tau' = \int \rho_0 [2(z')^2 - 2(x')^2] d\tau' = \frac{2Q}{5} (b^2 - a^2) \quad (4.6.35)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r} &= \sum_{ij} \tilde{D}_{ij} \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \left( \tilde{D}_{zz} \partial_z^2 + \tilde{D}_{xx} \partial_x^2 + \tilde{D}_{yy} \partial_y^2 \right) \frac{1}{r} = \tilde{D}_{zz} \partial_z^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \tilde{D}_{zz} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \frac{1}{r} \\ &= \tilde{D}_{zz} \partial_z^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \tilde{D}_{zz} (-\partial_z^2) \frac{1}{r} = \frac{3}{2} \tilde{D}_{zz} \partial_z^2 \frac{1}{r} = \frac{3}{2} \tilde{D}_{zz} \partial_z \left( \frac{-z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) \\ &= \frac{3}{2} \tilde{D}_{zz} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{3}{5} Q (b^2 - a^2) \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \end{aligned} \quad (4.6.36)$$

于是得到椭球形均匀带电介质的静电势：

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 + \frac{1}{10} (b^2 - a^2) \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right] \quad (4.6.37)$$

#### 4.7 多极矩同外场的相互作用

考虑处于  $\varphi_e$  中的连续带电体 (电荷密度为  $\rho$ , 处于坐标原点附近), 则带电体与外场的相互作用能:

$$U_i = \int \rho(\vec{r}) \varphi_e(\vec{r}) d\tau \quad (4.7.1)$$

前提:

体系与源相距甚远, 以至于源的电荷密度不因体系的改变而变化。

由于  $V$  很小, 将  $\varphi_e$  在参考点附近 (即原点) 作 Taylor 展开:

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!} \vec{r} \vec{r} : \nabla \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} + \dots \quad (4.7.2)$$

代入式 (4.7.1) 得:

$$U_i = U_i^{(0)} + U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + \dots \quad (4.7.3)$$

其中

$$U_i^{(0)} = Q \varphi_e(0) \quad (4.7.4)$$

$$U_i^{(1)} = \vec{p} \cdot \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e(\vec{r}=0) \quad (4.7.5)$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} \quad (4.7.6)$$

又由于  $(\nabla^2 \varphi_e)_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{e0}$ , 而作为外源的  $\rho_{e0}$  一般分布在离  $V$  很远处, 因此在  $V$  区域内  $\rho_e = 0$ 。因此有:

$$C \overleftrightarrow{I} : \nabla \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} = C \nabla^2 \varphi_e|_{\vec{r}=0} = 0 \quad (4.7.7)$$

若选择常数  $C$  满足  $C \propto Tr \frac{\{\overleftrightarrow{D}\}}{3}$ , 则有:

$$\begin{aligned} U_i^{(2)} &= \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} \\ &= \frac{1}{6} \left[ \overleftrightarrow{D} - \frac{1}{3} Tr \{ \overleftrightarrow{D} \} \overleftrightarrow{I} \right] : \nabla \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} \\ &= \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} \\ &= -\frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \vec{E} \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

$U_i^{(0)}, U_i^{(1)}, U_i^{(2)}$  分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能。

我们发现:

- 电荷感知到外场的积分效应
- 电偶极子感知到电场
- 电四极子感受到电场的微分效应
- 多极矩随着级数的增加, 愈加能感知到外场细微的变化, 因为其本身就是结构的细微不对称给出的。

#### 4.7.1 电偶极矩在外场中受的力

设电偶极子在电场  $\vec{E}_e$  中受到电场的作用力  $\vec{F}_e$ ，方向大小未知。

假设施加外力  $\vec{F}' = -\vec{F}_e$ ，则偶极子达到平衡。

在此基础上对偶极子沿给定方向附加非常小的外力  $\delta\vec{F}' \rightarrow 0$ ，使得偶极子无限缓慢地平移  $\delta\vec{r}$ 。

将偶极子与外场看成一个体系，则该过程中外力对体系做的功：

$$\delta W' = (\vec{F}' + \delta\vec{F}') \cdot \delta\vec{r} = \vec{F}' \cdot \delta\vec{r} = -\vec{F}_e \cdot \delta\vec{r} \quad (4.7.9)$$

整个体系的能量增加：

$$\delta U = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r} + \delta\vec{r}) + \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\delta\vec{r} \cdot \nabla [\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})] \quad (4.7.10)$$

Note: 因为偶极子运动无限缓慢，故动能没有增加。

由于能量守恒，上述两式应该相等。因此电场对偶极子的作用力：

$$\vec{F}_e = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E} + \vec{p} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (4.7.11)$$

由于静电场  $\nabla \times \vec{E} = 0$ ：

$$\vec{F}_e = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E} \quad (4.7.12)$$

因此，一个电偶极子在均匀电场中不受力，只有电场非均匀时才受到电场的作用力。

#### 4.7.2 电偶极矩在外场中受的力矩

设电场对偶极子的力矩为  $\vec{M}_e$ ，则施加外力矩  $\vec{M}' = -\vec{M}_e$  将偶极矩准静态地转动一个  $\delta\vec{\theta}$ 。

外力矩作的功：

$$\vec{M}' \cdot \delta\vec{\theta} = -\vec{M}_e \cdot \delta\vec{\theta} \quad (4.7.13)$$

体系能量增加为  $\delta(-\vec{p} \cdot \vec{E})$ ，根据能量守恒：

$$-\vec{M}_e \cdot \delta\vec{\theta} = -\delta(\vec{p} \cdot \vec{E}) = -\delta\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (4.7.14)$$

因为  $\vec{p}$  的大小不变，仅改变方向，故：

$$\delta\vec{p} = \delta\vec{\theta} \times \vec{p} \quad (4.7.15)$$

于是

$$\vec{M}_e \cdot \delta\vec{\theta} = (\delta\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{E} = (\vec{p} \times \vec{E}) \cdot \delta\vec{\theta} \quad (4.7.16)$$

即

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (4.7.17)$$

因此，无论电场均匀与否，只要电偶极子的方向与此处的局域电场方向不一致，就会受到一个力矩的作用使其平行于电场。

### 4.7.3 电多极矩在外场中的能量

真空中静电场能量：

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi d\tau = \int \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{8\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau d\tau' \quad (4.7.18)$$

介质中静电场能量：

$$W = \frac{1}{2} \int \rho_f \varphi d\tau \quad (4.7.19)$$

将整个电荷系统分为内部 (i) 和外部 (e)，则：

$$W = \frac{1}{2} \int (\rho_e + \rho_i) (\varphi_e + \varphi_i) d\tau = W_e + W_i + V \quad (4.7.20)$$

式中：

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho_e \varphi_e d\tau, \quad W_i = \frac{1}{2} \int \rho_i \varphi_i d\tau, \quad V = \frac{1}{2} \int (\rho_i \varphi_e + \rho_e \varphi_i) d\tau \quad (4.7.21)$$

分别为外部电荷单独存在时的静电能、内部电荷单独存在时的静电能、内部电荷与外部电荷之间的相互作用能。

因此电荷密度为  $\rho_i(\vec{r})$  的电荷系统与外电场  $\varphi_e(\vec{r})$  相互作用的能量：

$$V = \int \rho_i \varphi_e d\tau \quad (4.7.22)$$

若电荷分布范围较小，取  $\rho_i(\vec{r})$  的中心为坐标原点，作 Taylor 展开：

$$\begin{aligned} V &= \int \rho_i \left[ \varphi_e(\vec{r})|_{\vec{r}=0} + \vec{r} \cdot \nabla \varphi_e(\vec{r})|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2} \vec{r} \vec{r} : (\nabla \nabla \varphi_e(\vec{r}))|_{\vec{r}=0} + \dots \right] d\tau \\ &= Q\varphi_e(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}_e(0) + \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : (\nabla \nabla \varphi_e(\vec{r}))|_{\vec{r}=0} + \dots \\ &= V_0 + V_1 + V_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.7.23)$$

第一项对应将电荷系统作为点电荷处理时的能量：

$$V_0 = Q\varphi_e(0) \quad (4.7.24)$$

第二项对应电偶极矩的能量：

$$V_1 = \vec{p} \cdot (\nabla \varphi_e(\vec{r}))|_{\vec{r}=0} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e(0) \quad (4.7.25)$$

第三项对应电四极矩的能量：

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : (\nabla \nabla \varphi_e(\vec{r}))|_{\vec{r}=0} \\ &= \frac{1}{6} \left[ \overleftrightarrow{D} : (\nabla \nabla \varphi_e(\vec{r}))|_{\vec{r}=0} - \overleftrightarrow{I} : (\nabla \nabla \varphi_e(\vec{r}))|_{\vec{r}=0} \int \rho_i(r')^2 d\tau' \right] \\ &= \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : (\nabla \nabla \varphi_e(\vec{r}))|_{\vec{r}=0} \\ &= -\frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \vec{E}_e(0) \end{aligned} \quad (4.7.26)$$

也可从库仑定律出发：

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \int \rho(\vec{r}) \vec{E}_e d\tau = \int \rho \left( \vec{E}_0 + \vec{r} \cdot \nabla \vec{E}_e(0) + \frac{1}{2} \vec{r} \vec{r} : \nabla \nabla \vec{E}_e(0) + \dots \right) d\tau \\
 &= \int \rho d\tau \vec{E}_e(0) + \int \rho \vec{r} d\tau \cdot \left( \vec{E}_e(0) \right) + \frac{1}{6} \int 3\rho \vec{r} \vec{r} d\tau : \left( \nabla \nabla \vec{E}_e(0) \right) + \dots \\
 &= Q \vec{E}_e(0) + \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_e(0) + \frac{1}{6} \overleftrightarrow{D} : \nabla \nabla \vec{E}_e(0) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.7.27}$$

**例 3** 某均匀气体系统处于热平衡状态，温度为  $T$ 。将每个气体分子简化为电偶极矩，在弱电场近似下试计算该气体介质的介电常量。

气体介质中每个分子在外静电场中的势能： $V = -\vec{E} \cdot \vec{p}_0$

记分子电偶极矩  $\vec{p}_0$  与外电场夹角为  $\theta$ ，根据玻尔兹曼分布律， $\theta$  方向立体角  $d\Omega$  内气体分子数密度：

$$N(\theta) d\Omega = N_0 \exp\left(-\frac{V}{kT}\right) d\Omega = N_0 \exp\left(\frac{Ep_0 \cos\theta}{kT}\right) d\Omega \tag{4.7.28}$$

$N_0$  为没有外电场存在时单位体积、单位立体角内介质气体的分子数密度，

$$\int N(\theta) d\Omega = N \implies N_0 = \frac{N}{4\pi} \tag{4.7.29}$$

$N$  为电场强度为零时系统的单位体积内分子数密度。

弱电场 (即  $Ep_0 \cos\theta \ll kT$ ) 条件下，式 (4.7.28) 可进行简化：

$$N(\theta) d\Omega = N_0 \left(1 + \frac{Ep_0 \cos\theta}{kT}\right) d\Omega \tag{4.7.30}$$

外电场  $\vec{E}$  的作用下，该气体介质极化强度  $\vec{P}$  应与  $\vec{E}$  同向：

$$\begin{aligned}
 P &= \int [N(\theta) p_0 \cos\theta] d\Omega \\
 &\approx \int \left[ N_0 \left(1 + \frac{Ep_0 \cos\theta}{kT}\right) p_0 \cos\theta \right] d\Omega \\
 &\approx \frac{4\pi N_0 p_0^2}{3kT} E = \frac{N p_0^2}{3kT} E = \chi E
 \end{aligned} \tag{4.7.31}$$

可知该气体介质的介电常量：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi = \varepsilon_0 + \frac{N p_0^2}{3kT} \tag{4.7.32}$$

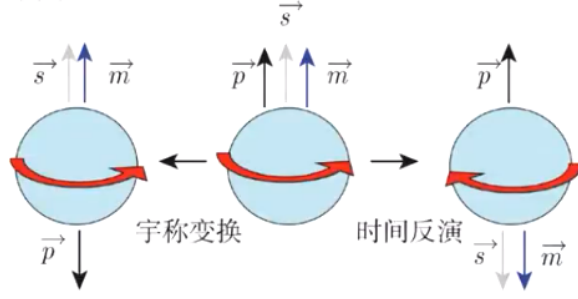
对于铁电体，记每个畴内含  $n$  个分子，总分子密度为  $N$ ，并假定在没有外电场时铁电畴分子极化方向分布杂乱，无宏观极化现象，在外电场作用下，所有铁电畴都可以自由转向。

由式 (4.7.31) 得到铁电体的相对介电常量：

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\left(\frac{N}{n}\right) (n p_0^2)}{3\varepsilon_0 kT} = 1 + n \frac{N p_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \tag{4.7.33}$$

由于  $n$  很大，因此铁电体的相对介电常量很大 (实际上铁电畴的转向不是自由的，因此铁电体的极化率远小于一般介质极化率的  $n$  倍，但仍很大)。

#### 4.7.4 粒子电偶极矩



粒子在空间取向只有一个特殊方向，即自旋  $\vec{s}$  方向，其他矢量形式的物理观测量均平行或反平行于  $\vec{s}$ 。

假设粒子磁矩和电偶极矩与  $\vec{s}$  方向相同。

宇称变换  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  前后电偶极矩  $\vec{p}$  改变方向，而磁矩和自旋方向不变，因此宇称对称性被破坏。

时间反演变换  $t \rightarrow -t$  前后，磁矩和自旋方向变化而电偶极矩  $\vec{p}$  方向不变，因此时间反演对称性被破坏。

根据 CPT 对称性 (即系统在正反粒子-宇称-时间反演变换下不变)，时间反演对称性被破坏意味着正反粒子-宇称联合变换对称性被破坏，因此粒子的电偶极矩数值给出自然界关于正反粒子-宇称变换对称性破坏的一个尺度。

基本粒子的内禀电偶极矩数值对于拓展标准模型提供了强约束，标准模型的拓展必须遵守这个约束条件。

### 4.8 等离子体中的静电现象

不失一般性，假设等离子体内只有一种正离子，每个离子带正电荷  $Ze$ ，处于热平衡态情况下正离子的数密度为  $n_{i0}$ ，自由电子的数密度为  $n_{e0}$ 。

等离子体整体呈电中性，即：

$$n_{i0}Ze + n_{e0}(-e) = 0 \quad (4.8.1)$$

#### 4.8.1 库仑屏蔽现象

将一个宏观意义上的电荷  $q$  置于等离子体内，由于电荷异性相吸，该点电荷周围会形成与  $q$  异性的电荷云，点电荷  $q$  对于远处带电粒子的作用可忽略不计。该现象称为等离子体电荷屏蔽现象。

将点电荷  $q$  的位置作为坐标原点。放入该点电荷后等离子体形成新的热平衡，系统的静电势为  $\varphi(\vec{r})$ ，电子和正离子热运动受到静电势的影响。

假设电离的电子和正离子处于相同温度，由玻尔兹曼分布，新的热平衡态下电子和离子的密度：

$$n_e = n_{e0}e^{-\frac{V_e}{kT}}, \quad n_i = n_{i0}e^{-\frac{V_i}{kT}} \quad (4.8.2)$$

$T$  为等离子温度； $V_e$  和  $V_i$  分别为单个电子和单个离子的静电势能：

$$V_e = -e\varphi(\vec{r}), \quad V_i = Ze\varphi(\vec{r}) \quad (4.8.3)$$

对于高温等离子体， $kT \gg e\varphi$ ，对式 (4.8.2) 作 Taylor 展开，近似到一阶项：

$$n_e = n_{e0} + \frac{e\varphi}{kT}n_{e0}, \quad n_i = n_{i0} - \frac{Ze\varphi}{kT}n_{i0} \quad (4.8.4)$$

代入泊松方程:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi(\vec{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} [Zen_i - en_e + q\delta(\vec{r})] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ Zen_{i0} - \frac{Z^2 e^2 \varphi}{kT} n_{i0} - en_{e0} - \frac{e^2 \varphi}{kT} n_{e0} + q\delta(\vec{r}) \right] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ -\frac{(Z+1)e^2 \varphi}{kT} n_{e0} + q\delta(\vec{r}) \right]
\end{aligned} \tag{4.8.5}$$

即

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{\lambda_D^2} \right) \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} q\delta(\vec{r}) \tag{4.8.6}$$

式中  $\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{(1+Z)e^2 n_{e0}}$ ,  $\lambda_D$  称为德拜屏蔽长度。

由于正离子质量远大于自由电子质量, 忽略电荷  $q\delta(\vec{r})$  对于正离子热运动的影响, 即取  $n_i \equiv n_{i0}$ , 则相应的德拜屏蔽长度为  $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{n_{e0} e^2}}$ .

由于系统的球对称性,  $\varphi(\vec{r})$  只是半径的函数。

当  $\vec{r} \neq 0$  时:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \varphi \implies \varphi = \frac{C}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \tag{4.8.7}$$

当  $r \rightarrow 0$  时, 可以忽略等离子体效应, 此时:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \implies C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \tag{4.8.8}$$

因此式 (4.8.7) 可写为:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \tag{4.8.9}$$

又因为:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\lambda_D^2} \right) \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \right) d\tau \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[ e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) + 2 \left( \nabla e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \right) \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \nabla^2 e^{-\frac{r}{\lambda_D}} - \frac{1}{\lambda_D^2} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{r} \right] d\tau \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int e^{-\frac{r}{\lambda_D}} [-4\pi\delta(\vec{r}) + 0 + 0 - 0] d\tau \\
&= -\frac{q}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{4.8.10}$$

因此式 (4.8.9) 是泊松方程 (4.8.6) 的解。

式 (4.8.9) 表明:

- 当  $r \ll \lambda_D$  时, 电势  $\varphi(\vec{r})$  与真空中的库仑势相同;
- 当  $r \gg \lambda_D$  时, 静电势  $\varphi(\vec{r})$  指数衰减为 0;

即这里的库仑力不再是一个长程力, 德拜屏蔽长度描述了等离子体内库仑力的有效力程。

## 4.8.2 等离子体振荡

等离子体振荡：

当等离子体受到扰动因而在局部区域电中性受到破坏时，等离子体会产生很强的局域性静电恢复力，使等离子体内的电荷密度发生振荡。

由于正离子质量远大于电子，因此在这个过程中可忽略离子运动，只考虑电子围绕平衡位置的振荡。

假设等离子体在扰动后处于自由状态的电子数密度为  $n_e = n_{e0} + n'$ ,  $n' \ll n_{e0}$ ，则等离子体内电荷密度为：

$$\rho_f = Zen_{i0} + (-e)(n_{e0} + n') = -en' \quad (4.8.11)$$

因自由电子振荡而形成的局域电流密度：

$$\vec{J} = n_e(-e)\vec{v} \quad (4.8.12)$$

由电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot (n_e(-e)\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(-en') = 0 \quad (4.8.13)$$

考虑到  $n' \ll n_{e0}$ ，上式变为：

$$n_{e0}\nabla \cdot \vec{v} + \dot{n}' = 0 \quad (4.8.14)$$

上式两边再对时间求偏导数：

$$n_{e0}\nabla \cdot \dot{\vec{v}} + \ddot{n}' = 0 \quad (4.8.15)$$

电子受到因扰动而产生宏观意义上净自由电子密度  $n'$  所对应局域性电场  $\vec{E}'$  的作用，运动方程：

$$m_e\dot{\vec{v}} = -e\vec{E}' \quad (4.8.16)$$

上式两边除以  $m_e$  后求散度：

$$\nabla \cdot \dot{\vec{v}} = -\frac{e}{m_e}\nabla \cdot \vec{E}' = \frac{n'e^2}{m_e\epsilon_0} \quad (4.8.17)$$

将上式代入式 (4.8.15) 得：

$$\frac{n_{e0}e^2}{m_e\epsilon_0}n' + \ddot{n}' = \omega_P^2 n' + \ddot{n}' = 0 \quad (4.8.18)$$

式中  $\omega_P^2 = \frac{n_{e0}e^2}{m_e\epsilon_0}$ ， $\omega_P$  称为等离子体振荡频率，由自由电子数密度  $n_{e0}$  决定。

由式 (4.8.18) 得到：

$$n' = n'(0)e^{-i\omega_P t} \quad (4.8.19)$$

上式表明等离子体在受到扰动后自由电子密度以频率  $\omega_P$  振荡。

## 4.9 自然界中的静电现象

### 4.9.1 大气静电现象和天体电中性

地球地面带负电，大气层顶部整体带正电，电场强度在地面附近约为  $100V/m$ 。

从地面到大气层顶部的电势差约为  $4 \times 10^5 V$ 。空气中极少数离子和电子使地面与大气层顶部之间形成微弱的电流。

雷暴雨：



静电的吸附和各种对流过程使云层产生静电荷。当雷雨云底部负电荷和地面感应正电荷之间的电场足够强时，空气被击穿，雷雨云中大量的负电荷流入地面。

迄今还未发现任何天体有明确的正负电荷不平衡效应。天体只要有微小的正负电荷不平衡，就会有非常大的观测效应。

#### 4.9.2 尖端放电现象

比较两个半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_1 \gg R_2$ ) 的静电势相同的导体球电场强度，电量分别为  $Q_1, Q_2$ 。

两者的电势：

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (4.9.1)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \implies \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (4.9.2)$$

球面处电场强度：

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}, \quad E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \quad (4.9.3)$$

两者之比：

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \ll 1 \quad (4.9.4)$$

因此，相同电势下大球表面电场远小于小球表面电场。同时也说明，带电导体在曲率大的表面处电场强度大，这也是尖端放电现象的起因。

雷雨天气中，避雷针相对于建筑物曲率半径更大，在建筑物顶层达到击穿电压之前，避雷针先把建筑物顶部附近积累的电荷通过电路引入大地或先行放电，从而避免建筑物顶部出现雷击现象。

#### 4.9.3 静电吸引细屑

被丝绸摩擦过的橡胶棒带正电荷，电场方向定义为  $\vec{e}_r$ ，碎纸屑被电场极化，可看成电偶极矩  $\vec{p}$ ，方向与  $\vec{E}$  相同。简单起见，仅考虑电场在  $\vec{e}_r$  方向的变化，假设带电体带正电荷，电场强度  $\vec{E} = E\vec{e}_r, E > 0$ 。

电偶极矩  $\vec{p} = p\vec{e}_r, p > 0$ 。

因为离开橡胶棒越远电场强度越小：

$$\nabla \vec{E} = \nabla E \vec{e}_r = -C \vec{e}_r \vec{e}_r, \quad C > 0 \quad (4.9.5)$$

纸屑受到作用力：

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E} = p \vec{e}_r \cdot (-C \vec{e}_r \vec{e}_r) = -(pC) \vec{e}_r \quad (4.9.6)$$

可见，纸屑受到的作用力是吸引力。

## 5 静磁场

### 5.1 磁场的矢势方程和边值关系

静磁场的基本方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

本构关系 (线性、各向同性介质中) 为  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

两个磁介质的交界面上的边值关系:

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

利用  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  可得:

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j} \quad (5.1.3)$$

由  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (5.1.4)$$

即一个矢量的方程, 每一个  $\vec{A}$  的分量场都满足泊松方程。

边值条件:

在介质分区均匀时:

$$\vec{e}_n \cdot [(\nabla \times \vec{A})_1 - (\nabla \times \vec{A})_2] = 0 \quad (5.1.5)$$

$$\vec{e}_n \times \left[ \frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \vec{A})_1 - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \vec{A})_2 \right] = \vec{\alpha}_f \quad (5.1.6)$$

式 (5.1.5) 可进一步简化为:

$$\nabla \cdot [\vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)]_{boundary} = 0 \quad (5.1.7)$$

上式表明  $\vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)_{boundary}$  为与界面位置无关的常矢量, 但其方向和大小并不能从中得到。

利用关系式:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.1.8)$$

应用到交界面的一个闭合回路上, 若  $\vec{B}$  在交界面上的值有限, 则

$$(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)_{\parallel} = 0 \implies \vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0 \quad (5.1.9)$$

即表示  $\vec{A}$  在边界的切线方向的分量是连续的。

因此, 静磁学问题中边界条件有两种设置方法:

- ① 设置在边界上的  $\vec{e}_n \times \vec{A}$  的数值;
- ② 设置在边界上的  $\vec{e}_n \times \vec{H}$  的数值;

静磁场的能量为

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

## 5.2 静磁场的唯一性定理

定理：

如果静磁体系  $V$  内存在着电流和磁介质，且关系式  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  成立，则体系内的磁场由电流和磁介质的分布及边界条件 (边界上  $\vec{A}$  或  $\vec{H}$  的切向分量) 唯一确定。

证明：

设对同一个体系存在两组不同的解：

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \mu \vec{H}' \quad (5.2.1)$$

$$\vec{B}'' = \nabla \times \vec{A}'' = \mu \vec{H}'' \quad (5.2.2)$$

则有

$$\nabla \times \vec{H}' = \nabla \times \vec{H}'' = \vec{j} \quad (5.2.3)$$

$$\vec{e}_n \times \vec{H}' \Big|_b = \vec{e}_n \times \vec{H}'' \Big|_b \quad or \quad \vec{e}_n \times \vec{A}' \Big|_b = \vec{e}_n \times \vec{A}'' \Big|_b \quad (5.2.4)$$

根据线性叠加原理，构造一个新场，令

$$\vec{B} = \vec{B}' - \vec{B}''; \quad \vec{H} = \vec{H}' - \vec{H}''; \quad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}'' \quad (5.2.5)$$

对于此场：

$$\nabla \times \vec{H} = 0; \quad \vec{e}_n \times \vec{A} \Big|_b = 0 \quad or \quad \vec{e}_n \times \vec{H} \Big|_b = 0 \quad (5.2.6)$$

计算这个场的能量：

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{2} \oint_S [(\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \vec{e}_n] dS \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

根据矢量混合积公式：

$$(\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \vec{e}_n = (\vec{e}_n \times \vec{A}) \cdot \vec{H} = (\vec{H} \times \vec{e}_n) \cdot \vec{A} \quad (5.2.8)$$

因此式 (5.2.7) 右端恒为 0，即  $U_m = 0$ ，于是：

$$\int \frac{1}{\mu} (\vec{B}' - \vec{B}'') \cdot (\vec{B}' - \vec{B}'') d\tau = 0 \quad (5.2.9)$$

由于体系的磁导率恒正，因此被积函数必须恒为零，即

$$\vec{B}' = \vec{B}'' \quad or \quad \vec{H}' = \vec{H}'' \quad (5.2.10)$$

定理得证。静磁问题中，只要  $B$  和  $H$  的关系是单调上升的，即使不是线性介质，唯一性定理仍然成立。

### 5.3 磁场的矢势解法：二维问题

二维问题中，不仅体系的边界是二维的，而且体系内的电流只沿着  $z$  轴方向流动。

根据稳定电流的条件  $\nabla \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} j_z = 0$ ，电流密度与  $z$  方向坐标无关，即：

$$\vec{j} = \vec{e}_z j(x, y) \quad (5.3.1)$$

根据静磁场矢势的定义：

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{R} \quad (5.3.2)$$

$\vec{A}$  只有  $z$  方向的分量，根据体系沿  $z$  方向的平移不变性， $\vec{A}$  只能是  $x, y$  的函数。综上

$$\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y) \quad (5.3.3)$$

于是  $\vec{A}$  所满足的方程变成一个标量方程：

$$\nabla^2 A = -\mu j_f \quad (5.3.4)$$

**例 1** 空间沿  $z$  方向有一无限长载流直导线（载有电流  $I$ ），求空间的矢势分布。

先求磁场分布，再由  $\vec{B}$  场求  $\vec{A}$  场。

由安培定理：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\rho \quad (5.3.5)$$

由 Stokes 定理：

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.3.6)$$

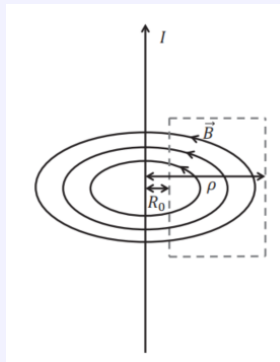
选择如图的安培环路，则

$$[A(\rho) - A(R_0)] h = -h \int_{R_0}^{\rho} B(\rho') d\rho' \quad (5.3.7)$$

积分可得：

$$A(\rho) = A(R_0) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{\rho}{R_0} \right) = \text{const.} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \quad (5.3.8)$$

式中  $\text{const.}$  取决于矢势原点的选取。



**例 2 求均匀场对应的矢势分布。**

均匀场:

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_x \quad (5.3.9)$$

考虑到均匀磁场可以是由放在无限远处的无限大载有  $z$  方向均匀面电流的金属板（平行于  $xz$  面）产生，这个问题就是 2 维问题。

设  $\vec{A} = A(x, y) \vec{e}_z$ ，根据  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ，得：

$$\partial_y A \vec{e}_x - \partial_x A \vec{e}_y = B_0 \vec{e}_x \quad (5.3.10)$$

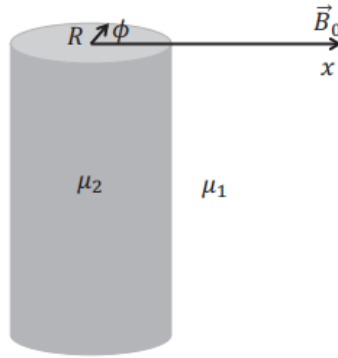
因此有：

$$A(x, y) = B_0 y = B_0 \rho \sin \theta \quad (5.3.11)$$

**例 3** 半径为  $R$  的圆柱形磁介质（磁导率为  $\mu_2$ ），放置于均匀的外磁场  $\vec{B}_0$  中，设柱外面为磁导率为  $\mu_1$  的介质。场方向与柱轴垂直，求空间的场分布。

如图所示，空间分成两个区域， $\rho > R$  的区域矢势为  $A_1(x, y) \hat{z}$ ； $\rho < R$  的区域矢势为  $A_2(x, y) \hat{z}$ ，它们均满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2 A_1 = 0 \quad \nabla^2 A_2 = 0 \quad (5.3.12)$$



在  $\rho = R$  的边界上：

$$A_1(\rho = R) = A_2(\rho = R) \quad (5.3.13)$$

又  $\vec{A} = A_1(x, y) \hat{z}$ ：

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{e}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\phi \Rightarrow \vec{n} \times (\nabla \times \vec{A}) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_z \quad (5.3.14)$$

于是边界条件：

$$\left( \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R} = -\alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \quad (5.3.15)$$

其他边界条件：

当  $\rho = 0$  时， $A_2$  有限。

当  $\rho \rightarrow \infty$  时， $A_1$  为均匀场的贡献，即：

$$A_1 = \text{const.} + B_0 y = \text{const.} + B_0 \rho \sin \phi \quad (5.3.16)$$

根据问题对称性,  $A_1, A_2$  可以展开成相应的本征函数的线性叠加:

$$\begin{cases} A_1 = g_0 + h_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \rho^n + h_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \\ A_2 = g'_0 + h'_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (g'_n \rho^n + h'_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n \rho^n + d'_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \end{cases} \quad (5.3.17)$$

根据边界条件可知:

$$\begin{cases} g_n = 0 & n = 1, 2, \dots \\ c_1 = B_0 \\ c_n = 0 & n > 1 \\ h_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h'_n = 0 & n = 1, 2, \dots \\ d'_n = 0 & n > 1 \\ h'_0 = 0 \end{cases} \quad (5.3.18)$$

以及

$$\begin{cases} g_n R^n + h_n R^{-n} = g'_n R^n + h'_n R^{-n} \\ \frac{1}{\mu_1} (n g_n R^{n-1} - n h_n R^{-n-1}) = \frac{1}{\mu_2} (n g'_n R^{n-1} - n h'_n R^{-n-1}) \end{cases} \quad (5.3.19)$$

$$\begin{cases} c_n R^n + d_n R^{-n} = c'_n R^n + d'_n R^{-n} \\ \frac{1}{\mu_1} (n c_n R^{n-1} - n d_n R^{-n-1}) = \frac{1}{\mu_2} (n c'_n R^{n-1} - n d'_n R^{-n-1}) \end{cases} \quad (5.3.20)$$

根据式 (5.3.18) 知, 当  $n > 1$  时, 式 (5.3.19) 与式 (5.3.20) 没有非平凡解, 亦即所有  $n > 1$  时的参数均为 0。

当  $n = 1$  时, 由式 (5.3.20) 可以解得:

$$d_1 = R^2 B_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad c'_1 = \frac{2B_0 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5.3.21)$$

处  $g_0 = g'_0$  外, 其余系数均为 0。

故空间矢势 (取常数为 0) 为:

$$\begin{cases} A_1 = B_0 \rho \sin \phi + B_0 R^2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{\sin \phi}{\rho} \\ A_2 = \frac{2B_0 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \rho \sin \phi \end{cases} \quad (5.3.22)$$

柱外的磁场由外磁场和介质磁化后的磁化电流在柱外产生的磁场组成, 后者完全等价于放置在原点处的一个 2 维偶极子, 柱内的场为均匀磁场, 包含了外磁场以及“退磁场”的贡献。

## 5.4 磁场的标量势解法

### 5.4.1 磁标势

若考察的空间区域无传导电流, 则有:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (5.4.1)$$

但仅有此条件还不足引入磁标势, 引入  $\varphi_m$  的充分必要条件是  $\vec{H}$  是保守场, 亦即:

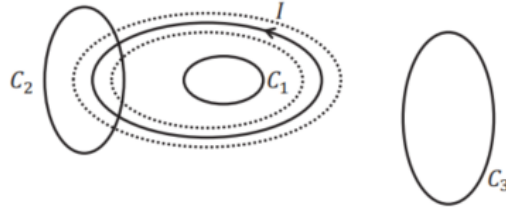
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.4.2)$$

式中  $C$  为空间中任意闭合回路。亦即  $\varphi_m$  为位置的单值函数。

对一个载流线圈，做一个轮胎状的东西将空间有电流的部分完全清除，选择  $C_1, C_2, C_3$  3 个环路。对于  $C_1, C_3$  来说，式 (5.4.2) 成立，对  $C_2$  不成立。

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (5.4.3)$$

意味值空间同一点的标势值不唯一。



为解决这个问题，引入以电流环为边界的任意曲面，并规定积分路径不允许穿过此曲面。这个以电流环为边界的任意曲面对积分路径来说是个刚性的屏障，任何闭合积分路径都无法穿过。

因此，从曲面的一侧穿过曲面到另一侧，磁标势  $\varphi_m$  是不连续的，存在大小为  $I$  的跃变，即

$$\int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = - \int_+^- \nabla \varphi_m \cdot d\vec{l} = \varphi_m^+ - \varphi_m^- = I \quad (5.4.4)$$

有时称此曲面为“磁壳”，式 (5.4.4) 为磁标势在磁壳上的边界条件。

因此，为引入磁标势，必须：

- 构造合适的“磁壳”以使得空间变成“无源”且“单连通”；
- 设置合适的边界条件

考虑磁壳某一点上下的磁标势的差，此差值即磁场沿某一路线在单连通空间由“+”积分到“-”：

$$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = - \int_+^- \nabla \varphi_m \cdot d\vec{l} = \int_-^+ \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (5.4.5)$$

另一方面，根据安培定律，这个积分的数值：

$$\int_-^+ \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (5.4.6)$$

所以在“磁壳”的上下表面磁标势有一个  $\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$  的跳跃，这就是磁标势在磁壳上的边界条件。

### 5.4.2 线性磁介质中磁场问题

对于顺磁、抗磁两种线性磁介质，本构关系  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  成立，因此定义合适磁壳之后的区域内有：

$$\vec{B} = -\mu \nabla \varphi_m \quad (5.4.7)$$

进而对于分块均匀的磁介质：

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \varphi_m) = 0 \implies \nabla^2 \varphi_m = 0 \quad (5.4.8)$$

此时磁标势  $\varphi_m$  满足和电标势  $\varphi$  完全一样的 Laplace 方程。

因此可以根据电标势的结论直接给出两块磁介质界面上的磁标势的边界条件：

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_1 = \mu_2 \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_2 \end{cases} \quad (5.4.9)$$

于是对无源的线性磁介质中的磁场问题，需在边界条件 (5.4.9) 下求解方程。解法可借鉴电场的标势问题，此时  $\vec{E}$  与  $\vec{H}$  对应。

**例 4** 真空中将一个半径为  $R$  的磁介质球（磁导率为  $\mu$ ）放置于均匀磁场 ( $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ ) 中，求空间的  $\vec{B}$  场分布。

解法借鉴上一章第四节的例 3，并做代换： $\vec{E}_0 \rightarrow \vec{H}_0, \varepsilon \rightarrow \mu$ ，得到空间磁标势分布：

$$\varphi_{m1} = -H_0 r \cos\theta + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} R^3 H_0 \frac{1}{r^2} \cos\theta \quad (5.4.10)$$

$$\varphi_{m2} = -\frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 r \cos\theta \quad (5.4.11)$$

定义

$$\vec{m} = \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} 4\pi R^3 H_0 \hat{z} \quad (5.4.12)$$

带入上式可得：

$$\varphi_{m1} = -H_0 r \cos\theta + \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (5.4.13)$$

空间的  $\vec{H}$  场可由此求出：

$$\vec{H}_1 = -\nabla \varphi_{m1} = H_0 \hat{z} - \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r}}{r^3} \quad (5.4.14)$$

$$\vec{H}_2 = -\nabla \varphi_{m2} = \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 \hat{z} \quad (5.4.15)$$

进一步可求出  $\vec{B}$  场：

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = B_0 \hat{z} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r}}{r^3} \quad (5.4.16)$$

$$\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 = \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} B_0 \hat{z} \quad (5.4.17)$$

注意到

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r}}{r^3} \quad (5.4.18)$$

正是真空中放置于原点的一个磁矩为  $\vec{m}$  的磁偶极子产生的磁感应场。

因此磁介质球被磁化后对外界表现为一个磁偶极子。

磁偶极子的磁标势和电偶极子的电标势之间有着很好的对称性：

$$\varphi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \Leftrightarrow \varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (5.4.19)$$

与静电场问题类似，磁介质球内部的  $\vec{H}$  场也是均匀磁场。

**例 5** 均匀磁介质球壳放在均匀外磁场  $\vec{H}_0$  中，外面的区域是真空，求场分布。



设介质球壳的内外半径分别为  $R, R'$ ，球壳的磁导率为  $\mu$ 。

取  $\vec{H}_0$  方向为极轴方向的球坐标系，把空间分成三个区域，三个区域都没有传导电流：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_{m1} = 0 & r > R' \\ \nabla^2 \varphi_{m2} = 0 & R' > r > R \\ \nabla^2 \varphi_{m3} = 0 & r < R \end{cases} \quad (5.4.20)$$

相应的边界条件：

$$\begin{cases} \varphi_{m1} \rightarrow -H_0 r \cos\theta & r \rightarrow \infty \\ \varphi_{m1} = \varphi_{m2}, \quad \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} = \mu_r \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} & r = R' \\ \varphi_{m2} = \varphi_{m3}, \quad \mu_r \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{m3}}{\partial r} & r = R \\ \varphi_{m3} \text{有限} & r \rightarrow 0 \end{cases} \quad (5.4.21)$$

原则上，仍应将  $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \varphi_{m3}$  展开成本征函数的叠加。

由于此时激发外场为均匀场，只有  $l = 1$  项非 0，且处理的是球状体，因此引入试解：

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \left( c_1 r + \frac{d_1}{r^2} \right) \cos\theta \\ \varphi_{m2} = \left( c_2 r + \frac{d_2}{r^2} \right) \cos\theta \\ \varphi_{m3} = \left( c_3 r + \frac{d_3}{r^2} \right) \cos\theta \end{cases} \quad (5.4.22)$$

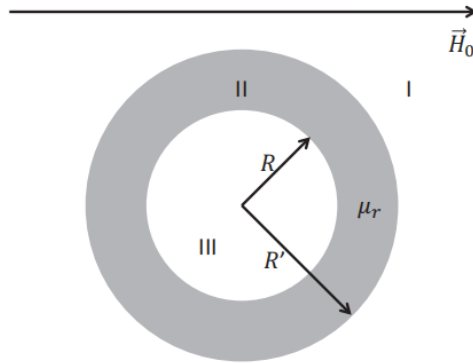
根据边界条件 (1),(4)，

$$c_1 = -H_0, \quad d_3 = 0 \quad (5.4.23)$$

根据边界条件 (2),(3) 确定系数  $d_1, c_2, d_2, c_3$ ，其中：

$$d_1 = \frac{H_0 (\mu_r - 1) (1 + 2\mu_r) (R'^3 - R^3)}{(2 + \mu_r) (1 + 2\mu_r) - 2 (\mu_r - 1)^2 \left( \frac{R}{R'} \right)^3} \quad (5.4.24)$$

$$c_3 = \frac{-9\mu_r H_0}{(2 + \mu_r) (1 + 2\mu_r) - 2 (\mu_r - 1)^2 \left( \frac{R}{R'} \right)^3} \quad (5.4.25)$$



从磁标势的结果中可以看出，球壳外的场是均匀场和偶极子场的叠加。整个球壳磁化后对外场表现为一个磁偶极矩  $4\pi d_1$  的磁偶极子。

分析极限行为：

① 在  $R \rightarrow R'$  或  $\mu_r \rightarrow 1$  时， $m = 4\pi d_1 \rightarrow 0$ ，诱导磁矩消失；

② 当  $R \rightarrow 0$  时， $m = 4\pi d_1 \rightarrow \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} 4\pi R'^3 H_0$ ；

③ 当  $\mu_r \rightarrow \infty$  时，磁偶极矩为：

$$m = 4\pi d_1 \approx 4\pi H_0 R'^3 \quad (5.4.26)$$

与  $R$  的大小无关，与一个金属球 (壳) 对外场的响应类似；

④ 球壳内的场是均匀场，其大小为  $-c_3$ 。当  $\mu_r \rightarrow \infty$  时，球壳内的磁场为：

$$\vec{H} = \frac{9\vec{H}_0}{2\mu_r \left[1 - \left(\frac{R}{R'}\right)^3\right]} \rightarrow 0 \quad (5.4.27)$$

即磁屏蔽，选择的材料  $\mu_r$  越大，壳层越厚 ( $\frac{R}{R'} \ll 1$ )，则屏蔽效果越好。

### 5.4.3 铁磁介质问题

铁磁介质为非线性介质，本构关系  $\vec{B} \neq \mu \vec{H}$ ，但  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}$  总成立，因此：

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) \quad (5.4.28)$$

若空间无传导电流且单连通，则可定义磁标势：

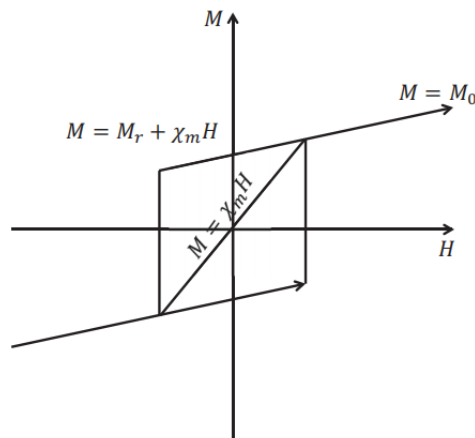
$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m \quad (5.4.29)$$

铁磁介质中， $\vec{M}$  是  $\vec{H}$  的函数，由磁滞回路决定，即  $\vec{M}$  是  $\varphi_m$  的隐函数。

因此式 (5.4.29) 变为：

$$\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}(\varphi_m) \quad (5.4.30)$$

下图为典型的铁磁介质的磁化曲线。



### ① 初始磁化过程

铁磁介质一开始处于无磁性状态，加上磁场后磁矩出现。在这个过程中

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (5.4.31)$$

### ② 饱和磁化

当  $H \rightarrow \infty$  时，铁磁介质达到饱和磁化， $\vec{M} = \vec{M}_0$ ，再加外场都不会增加磁矩的大小。

因此  $\nabla \cdot \vec{M} = \nabla \cdot \vec{M}_0(\vec{r})$  就变成了与等式左边  $\vec{H}$  无关的物理量，可以等效看作一个决定磁标势的有效的“源”。  
定义

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}_0 \quad (5.4.32)$$

这里  $\rho_m$  称为假象磁荷密度，而磁标势满足的方程为标准的 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m \quad (5.4.33)$$

此处磁荷对磁标势起的作用于电荷对电标势的作用类似。

#### 靠近剩余磁矩点时的行为：

当体系被饱和磁化后再逐渐撤掉外磁场，在一般情况下，这个过程中有近似关系：

$$\vec{M} = \vec{M}_r + \chi'_m \vec{H} \quad (5.4.34)$$

其中  $\vec{M}_r$  为剩余磁矩。将上式代入式 (5.4.32) 整理得：

$$(1 + \chi'_m) \nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}_r(\vec{r}) \implies \begin{cases} \nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu'_r} \\ \nabla \cdot \vec{M}_r(\vec{r}) = -\rho_m \end{cases} \quad (5.4.35)$$

此时的物理行为仍然是有“磁荷”作为源的 Poisson 方程，只是处于一个顺磁介质的背景中。可以说是将体系的顺磁性与饱和磁矩两样贡献分开。

$\varphi_m$  在两个磁介质交界面上的关系：

根据  $\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = -\Delta \varphi_m$ ，只要  $\vec{H}$  在边界处不发散，边界条件：

$$\varphi_{1m} = \varphi_{2m} \quad (5.4.36)$$

始终成立。考虑微分方程5.4.28对应的边界条件，有

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) - \vec{e}_n \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \quad (5.4.37)$$

对饱和磁化有

$$\left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_2 = \vec{e}_n \cdot (\vec{M}_0^1 - \vec{M}_0^2) \quad (5.4.38)$$

对靠近剩余磁矩点时有

$$\mu'_{r1} \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_1 - \mu'_{r2} \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_2 = \vec{e}_n \cdot (\vec{M}_r^1 - \vec{M}_r^2) \quad (5.4.39)$$

**例 6** 求半径为  $R$  的球形永久磁铁 (假设被饱和磁化  $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ ) 所激发的磁场。

把空间分成球内和球外两部分, 整个空间不存在传导电流, 因此球内外均可用磁标势。

球外空间, 没有磁矩因此磁荷  $\rho_m = 0$ 。

球内区域有磁矩, 但其为常数因此仍然没有磁荷。

所以  $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}$  均满足 Laplace 方程:

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0, \quad \nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \quad (5.4.40)$$

体系的边界条件

$$\begin{cases} \varphi_{m1} \rightarrow 0 & r \rightarrow \infty \\ \varphi_{m1} = \varphi_{m2} & r = R \\ \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = -\vec{e}_n \cdot \vec{M}_0 = -M_0 \cos \theta & r = R \\ \varphi_{m2} \text{有限} & r = 0 \end{cases} \quad (5.4.41)$$

## 5.5 磁多极矩展开-磁偶极子

### 5.5.1 磁多极展开及磁偶极子产生的势

在全空间问题中, 矢势  $\vec{A}$ :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad (5.5.1)$$

将  $\frac{1}{R}$  在区域  $V$  内的某一点展开成  $\vec{r}'$  的幂级数, 将展开点取在坐标原点:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2} \vec{r}' \vec{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{R} \Big|_{\vec{r}=0} + \dots \quad (5.5.2)$$

只保留前两项, 代入矢势表达式中得

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(1)} + \dots \quad (5.5.3)$$

式中

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \quad (5.5.4)$$

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int (\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \quad (5.5.5)$$

将体积  $V$  内的电流分成许多独立电流管道的叠加。因为是稳恒电流, 每个流管为闭合回路且电流为一常数  $I_i$ 。

因此在积分中做代换:

$$\vec{j}(\vec{r}') d\tau' = \sum_i I_i d\vec{l}_i \quad (5.5.6)$$

考虑第一项:

$$\vec{A}^{(0)} \propto \int \vec{j} d\tau' = \sum_i I_i \oint d\vec{l}_i \equiv 0 \quad (5.5.7)$$

原因: 电流为稳定电流。这正是自然界没有磁单极的显现。

考虑第二项:

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_i I_i \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i \quad (5.5.8)$$

对于任意形状, 由于  $d\vec{r}' = d\vec{l}_i$ :

$$\oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i = \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}' = \oint \left\{ d[(\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{r}'] - \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{r}') \right\} \quad (5.5.9)$$

闭合回路条件下上式第一项为 0, 因此得到恒等式:

$$\oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i = - \oint \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{r}') = - \oint \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{l}_i) \quad (5.5.10)$$

将式 (5.5.8) 中的积分分为两项:

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \left[ \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i + \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i \right] \quad (5.5.11)$$

将上式中的一项用式 (5.5.10) 替代, 有

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \left[ \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i - \oint \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{l}_i) \right] \quad (5.5.12)$$

利用矢量叉乘的恒等式进一步改写:

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}_i) \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.5.13)$$

式中:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint \vec{r}' \times d\vec{l}_i = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \quad (5.5.14)$$

定义为磁偶极矩。

性质:

① 对于一个小的载流闭合线圈, 其磁偶极矩:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j} d\tau' = \frac{I}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{l}' = I \vec{S} \quad (5.5.15)$$

式中  $\vec{S}$  是电流回路的面积, 方向取右手螺旋。

② 磁偶极子产生的场:

$$\vec{B}_m = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}}{r^3} \quad (5.5.16)$$

其与电偶极子  $\vec{p}$  产生的电场形式一致。

对一个磁偶极子产生的场, 在没有电流的地方 ( $r \neq 0$  处) 可以引入磁标势  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\nabla \varphi_m$ 。

磁偶极子的磁标势为:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (5.5.17)$$

与电偶极子的电标势一一对应。

因此对于磁偶极子产生的场，既可以用矢势计算，也可用磁标势计算。在无源区两种表示方式一致。

### ③ 任意形状的环形电流回路的标势

考虑离环不太远处的场，设回路中电流强度为  $I$ ，以回路为边界的任意曲面切割成许多小块，每小块边界上都有电流  $I$ ，电流的方向同大回路的电流方向相同。

因此这些小块边界上电流相加的结果仍只在大回路中流有电流  $I$ 。

对于每一小块面积对应的磁矩，大小为  $Id\vec{S}$ ，在空间产生的磁标势：

$$\Delta\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta\vec{S} \cdot \vec{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega \quad (5.5.18)$$

式中的  $R$  是  $d\vec{S}$  到观察点的位置矢量， $\Delta\Omega$  为小电流回路对观察点张开的立体角。

当每个小块电流回路的尺度足够小时，其产生的场由磁偶极子描述变为精确，整个回路所产生的磁标势严格为：

$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega \quad (5.5.19)$$

$\Omega$  是回路对观察点所张的立体角，是  $r$  的函数，磁感应强度为：

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -\mu_0 \nabla \varphi_m = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega(\vec{r}) \quad (5.5.20)$$

$\Omega$  正负的规定：

按电流的右手法则决定  $\vec{e}_n$  的面法线方向以后，若观察点在  $\vec{e}_n$  的正方向，则  $\Omega > 0$ ，反之  $\Omega < 0$ 。

由于观察点穿过电流围出的面积时，磁标势不连续。

观察点在载流面上时， $\Omega^+ = 2\pi$ ，在面积下时， $\Omega^- = -2\pi$ ，故  $\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$ 。

这个表面正是“磁壳”，必须挖掉才能使得磁标势的定义有意义。

## 5.5.2 磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩

任意电流分布情况下的体系的总磁能：

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau \quad (5.5.21)$$

假设一个载流线圈构成的磁偶极子处在由远处电流产生的静磁场  $\vec{B}_e$  中，体系的总磁能：

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A} + \vec{A}_e) \cdot (\vec{j} + \vec{j}_e) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A} \cdot \vec{j} + \vec{A}_e \cdot \vec{j}_e) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j} + \vec{A} \cdot \vec{j}_e) d\tau \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

式中  $\vec{A}, \vec{A}_e$  分别对应电流  $I, I_e$  产生的矢势。

定义前一项为体系的固有能，后一项定义为体系的相互作用能：

$$U_{int} = \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j} + \vec{A} \cdot \vec{j}_e) d\tau \quad (5.5.23)$$

根据矢量势的定义：

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad \vec{A}_e(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_e(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad (5.5.24)$$

易证：

$$\int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j}) d\tau = \int_{\infty} (\vec{A} \cdot \vec{j}_e) d\tau \quad (5.5.25)$$

因此有：

$$\begin{aligned} U_{int} &= \int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j}) d\tau = I \oint \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} = I\Phi_e = I_e\Phi \\ &= \frac{1}{2} (I\Phi_e + \Phi I_e) \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

其中

$$\Phi_e = \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} \quad \Phi = \int_{S_e} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.5.27)$$

分别为偶极子线圈中通过的外磁场的磁通量，以及源线圈中通过的磁偶极子磁场的磁通量。  
当源距离目标线圈足够远时，可将其磁场在线圈所处的空间在点附近做 Taylor 展开：

$$\vec{B}_e(\vec{r}) \approx \vec{B}_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})_{\vec{r}=0} + \dots \quad (5.5.28)$$

代入上式并保留第一项，得到相互作用能：

$$U_{B,int} = I\vec{B}_e(0) \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e \quad (5.5.29)$$

此形式与电场中的相互作用能  $U_{E,int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e$  不同。

当电偶极子在电场中发生平动或转动时，电场的固有能不变，因为偶极子以及产生外电场的电荷分布并无变化。

对于磁场体系，当磁偶极子相对外磁场的位形发生变化时，会在线圈中产生感生电动势。

根据 Faraday 电场感应定律，偶极子线圈和源线圈中产生的感生电动势分别为：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_e}{dt} \quad \varepsilon_e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.5.30)$$

偶极子线圈以及源线圈中的电流会因此改变，即“互感效应”。此过程中固有能不可能保持恒定不变。

若要求在变化过程中  $\vec{m}$  与  $\vec{B}_e$  均保持不变 (亦即  $I, I_e$  不变)，则必须由外接电动势做功抵消感生电动势的做功。

在一个变动过程中，外电源必须做的功：

$$\Delta W_\varepsilon = -\int I\varepsilon dt - \int I_e\varepsilon_e dt = \int I \frac{d\Phi_e}{dt} dt + \int I_e \frac{d\Phi}{dt} dt = I\Delta\Phi_e + I_e\Delta\Phi \quad (5.5.31)$$

式中  $\Delta\Phi_e, \Delta\Phi$  是  $\Phi_e, \Phi$  在过程中的变化。对比得：

$$\Delta W_\varepsilon = 2\Delta U_{int} \quad (5.5.32)$$

根据能量守恒考察保持电流不变条件下的磁相互作用能：

由于电流强度保持不变，体系的总能量变化包括：

① 磁场相互作用的变化：

$$\Delta U_{B,int} = \frac{1}{2} (I\Delta\Phi_e + I\Delta\Phi) \quad (5.5.33)$$

② 为保证  $I_e, I$  维持不变，目标线圈及原线圈所携带的电源必须提供  $\Delta W_\varepsilon = I\Delta\Phi_e + I_e\Delta\Phi = 2\Delta U_{B,int}$  的能量。

因此，将磁场与电源看成一体，电源中少了  $2\Delta U_{B,int}$  的能量。

因此，线圈 + 电源这个系统总的能量的变化为：

$$\Delta\tilde{U}_{int} = -\Delta U_{B,int} \quad (5.5.34)$$

系统总能量：

$$\tilde{U}_{int} = -U_{B,int} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e \quad (5.5.35)$$

与电偶极子在电场中的势能 (相互作用能) 完全一致。

仿照电偶极子在电场受力的推导，可推出磁偶极子在磁场中所受的力及力矩分别为：

$$\vec{F}_B = -\nabla\tilde{U}_{int} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B} \quad (5.5.36)$$

$$\vec{\tau}_B = \vec{e}_\theta \tau_{B\theta} = -\vec{e}_\theta \partial_\theta \tilde{U}_{int} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (5.5.37)$$

### 5.5.3 微观粒子的磁偶极矩

一个以速度  $v$  做圆周运动带电粒子的磁矩：

$$\begin{aligned} \vec{m}_L &= \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \times \vec{J}) d\tau' = \frac{1}{2} \int [\vec{r}' \times q\vec{v}(\vec{r}')\delta(\vec{r}' - \vec{r})] d\tau' \\ &= \frac{1}{2} q [\vec{r} \times \vec{v}(\vec{r})] = \frac{q}{2M} (\vec{r} \times M\vec{v}) = \frac{q}{2M} \vec{L} \end{aligned} \quad (5.5.38)$$

式中  $M$  为粒子质量， $r$  为圆周半径。

微观粒子还会带有自旋角动量  $\vec{I}_s$ ，电荷为  $q$  的微观粒子的磁矩  $\vec{m}$  与总角动量  $\vec{I}$  的关系：

$$\vec{m} = g \frac{q}{2M} \vec{I} \quad (5.5.39)$$

$g$  为朗德  $g$  因子。经典带电粒子的轨道磁矩的  $g = 1$ ，电子的  $g \approx 2$ 。

微观粒子的角动量  $I$  是量子化的。费米子的  $I$  为  $\hbar$  的半整数倍，玻色子的  $I$  为  $\hbar$  的整数倍。

磁矩为  $\vec{m}$  的微观粒子在磁场  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  中的势能：

$$V = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -g \frac{qI_z}{2M} B_z, \quad I_z = -I, -(I-1), \dots, I-1, I \quad (5.5.40)$$

即微观粒子在磁场中的能量是量子化的，共  $2I+1$  个分立的状态，能级间距正比于外磁场的磁感应强度，这种现象称为塞曼效应。

如电子 ( $I = \frac{\hbar}{2}$ ) 在外磁场  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  中有两个能级，能量分别为  $\pm \frac{e\hbar B}{2M_e} = \pm \mu_B B, \mu_B$  称为电子的玻尔磁矩。

## 5.6 静磁场与量子现象

### 5.6.1 超导现象

处于超导状态的导体称为超导体。

超导体电阻为零，具有完全抗磁性，即超导体内部磁场为零。

假定超导体中的电子处于两种状态，分别称为正常态 ( $n$ ) 和超导态 ( $s$ )。

正常电子满足欧姆定律  $\vec{J}_n = \sigma \vec{E}$ 。

超导态的电流密度为  $\vec{J}_s = n_s(-e)\vec{v}_s$ ， $n_s$  是超导态电子密度， $-e$  为电子电量。



超导体内总电流密度:

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_s \quad (5.6.1)$$

电子的运动方程:

$$m_e \dot{\vec{v}} = -e\vec{E} \quad (5.6.2)$$

得到:

$$\partial_t \vec{J}_s = -n_s e \dot{\vec{v}}_s = \frac{n_s e^2}{m_e} \vec{E} = \alpha \vec{E}; \quad \alpha = \frac{n_s e^2}{m_e} \quad (5.6.3)$$

对于恒定情形,  $\partial_t \vec{J}_s = 0$ .

结果代入上式可知, 超导体内:

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{J}_n = \sigma \vec{E} = 0, \quad \vec{J} = \vec{J}_s \quad (5.6.4)$$

即超导体内电场强度为零, 电流完全由超导电子承载, 正常态的电子无定向移动。

对式 (5.6.3) 两边求旋度:

$$\partial_t (\nabla \times \vec{J}_s) = \partial_t (-\alpha \vec{B}) \implies \nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B} + \vec{f}(\vec{r}) \quad (5.6.5)$$

取最简单情况  $\vec{f}(\vec{r}) = 0$  即得到伦敦方程:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{J}_s = \alpha \vec{E} \\ \nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B} \end{cases} \quad (5.6.6)$$

对  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$  两端求旋度, 同时  $\vec{J} = \vec{J}_s$  可得:

$$\nabla^2 \vec{B} = \alpha \mu_0 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{\alpha \mu_0}} \quad (5.6.7)$$

不失一般性, 假设超导体处于  $z > 0$  的上半空间, 磁感应强度  $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ , 简化为一维情形:

$$\frac{d^2 B(z)}{dz^2} = \frac{B(z)}{\lambda^2} \implies B(z) = B(0)e^{-\frac{z}{\lambda}} \quad (5.6.8)$$

此处舍去了发散的解  $B(z) = B(0)e^{\frac{z}{\lambda}}$ 。

可见超导体内磁感应强度指数衰减。

同样, 对  $\nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B}$  两端求旋度, 考虑到恒定条件  $\nabla \cdot \vec{J}_s = 0$ , 得到:

$$\nabla^2 \vec{J}_s = \frac{1}{\lambda^2} \vec{J}_s \quad (5.6.9)$$

类似可得, 解为:

$$\vec{J}_s = \vec{J}_0 e^{-\frac{z}{\lambda}} \quad (5.6.10)$$

由此可见, 超导体内: 无电场、无磁场、无电流。

若把超导体放入外磁场, 则外磁场在超导体表面诱发超导电流, 超导电流产生的磁场与外磁场反向, 强度相等。

若把处于正常态的导体环放入外磁场中, 降低环境温度使该环变成超导环, 然后撤去外磁场, 则环孔内磁通量保持不变且量子化。

讨论:

在超导环内围绕环孔任取一个闭合回路，环体内部无电场，即  $\vec{E} = 0$ 。

根据磁感应定律：

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.6.11)$$

因此超导体环内的磁通量是不变量。

在磁场中运动的带电粒子正则动量为：

$$\mathcal{P} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad (5.6.12)$$

超导体输运电流的载流子是库珀电子对，因此  $q = -2e$ ， $m = 2m_e$ 。

超导体库珀电子对的运动速度：

$$\vec{v} = \frac{\vec{J}_s}{n_s q} = 0 \quad (5.6.13)$$

因此库珀电子对的正则动量：

$$\mathcal{P} = q\vec{A} \quad (5.6.14)$$

超导电子对在环内沿着任意闭合回路转一周，该系统的波函数保持不变，这要求超导电子对在环内沿着环孔转一周的相位变化为  $2\pi$  的整数倍，即：

$$\frac{1}{\hbar} \oint \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar} \Phi = 2\pi n \implies \Phi = n \frac{h}{2e} \quad (5.6.15)$$

因此超导体环内的磁通量是量子化的， $\frac{h}{2e}$  称为磁通量子，数值为  $2.06783385 \times 10^{-15} \text{Wb}$ 。

### 5.6.2 阿哈罗诺夫-玻姆效应 (A-B 效应)

在电子双缝实验中的双缝中间的挡板后面放置一个无限长螺线管，在螺线管上加一定电势防止电子进入螺线管。

STEP 1. 螺线管不通电流，电子通过双缝在屏幕上产生干涉图像。

STEP 2. 螺线管通电流，此时螺线管内有匀强磁场而外部的磁感应强度仍为零。

这两个过程中螺线管外部的磁感应强度一直为零，且电子不进入管内。若电子干涉条纹有移动，则一定不是由电子与管内的磁场相互作用引起的。

实验中观测到了螺线管通电前后条纹的移动，这表明该实验中磁场的物理效应不能完全由磁感应强度描述。

该现象即称为阿哈罗诺夫-玻姆效应 (A-B 效应)。

假定电子波函数是平面波，波函数：

$$\Psi(\vec{r}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r}\right) \quad (5.6.16)$$

电子通过双缝的相位差：

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{1}{\hbar} \left( \int_{L_2} \vec{\mathcal{P}}_2 \cdot d\vec{L} - \int_{L_1} \vec{\mathcal{P}}_1 \cdot d\vec{L} \right) \\ &= \Delta\phi_0 + \frac{q}{\hbar} \left( \int_{L_2} \vec{A}_2 \cdot d\vec{L} - \int_{L_1} \vec{A}_1 \cdot d\vec{L} \right) \\ &= \Delta\phi_0 + \frac{q}{\hbar} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{L} \\ &= \Delta\phi_0 + \frac{q}{\hbar} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \Delta\phi_0 + \frac{q}{\hbar} \Phi \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

式中  $\Delta\phi_0$  是螺线管不通电流时电子通过双缝到达屏幕的相位差； $L_1$  和  $L_2$  分别是穿过第一个缝和第二个缝到达屏幕上同一位置的路径； $\Phi$  是  $L_1$  和  $L_2$  构成的闭合回路  $L$  内的磁通量。由于螺线管外无磁场， $\Phi$  就是螺线管内的磁通量。

式 (5.6.17) 表明，尽管电子没有受到螺线管内磁场的直接作用，但螺线管内磁场的变化影响了电子的相位。实验结果与理论给出的相位变化一致。

### 5.6.3 磁单极子

若存在磁荷，其产生磁场的磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (5.6.18)$$

可得到电磁场方程的新形式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} - \mu_0 \vec{J}_m \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \end{cases} \quad (5.6.19)$$

电荷为  $q$ 、磁荷为  $q_m$  的粒子在电磁场中受到的作用力为：

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + q_m \left( \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \right) \quad (5.6.20)$$

由点电荷  $q$  和点磁荷  $q_m$  组成的系统总角动量的量子化来解释电荷的量子化现象：

将点电荷  $q$  和点磁荷  $q_m$  分别固定在  $\vec{r} = 0$  和  $\vec{r}_m = a\vec{e}_z$  处，采用球坐标系。

空间任一点  $\vec{r}$  处电磁场的角动量密度为：

$$\vec{L}_{em} = \vec{r} \times \vec{g} = \vec{r} \times (\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0 q q_m}{(4\pi)^2} \frac{\vec{r} \times [\vec{r} \times (\vec{r} - a\vec{e}_z)]}{r^3 |\vec{r} - a\vec{e}_z|^3} \quad (5.6.21)$$

又

$$\vec{r} \times [\vec{r} \times (\vec{r} - a\vec{e}_z)] = -\vec{r} \times (\vec{r} \times a\vec{e}_z) = ar^2 (\vec{e}_z - \cos\theta \vec{e}_r) \quad (5.6.22)$$

代入上式，得：

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 q q_m}{(4\pi)^2} \frac{a (\vec{e}_z - \cos\theta \vec{e}_r)}{r |\vec{r} - a\vec{e}_z|^3} \quad (5.6.23)$$

根据系统轴对称性，系统的总角动量  $\vec{L}$  只有  $\vec{e}_z$  方向的分量  $L_z$ 。

$$\begin{aligned} L_z &= \int d\tau \vec{L}_{em} \cdot \vec{e}_z \\ &= \int d\tau \frac{\mu_0 q q_m}{(4\pi)^2} \frac{a (\vec{e}_z - \cos\theta \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z}{r |\vec{r} - a\vec{e}_z|^3} \\ &= \frac{\mu_0 q q_m}{(4\pi)^2} \int 2\pi \sin\theta d\theta \int r^2 dr \frac{a (1 - \cos^2\theta)}{r (r^2 - 2r\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 q q_m}{(4\pi)^2} \int 2\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^\infty \frac{x}{(x^2 - 2x\cos\theta + 1)^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned} \quad (5.6.24)$$

最后一步做代换  $x = \frac{r}{a}$ , 由此可知系统总角动量大小与电荷磁荷之间的距离  $a$  无关。  
由积分公式:

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 - 2x\cos\theta + 1)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1 + \cos\theta}{\sin^2\theta} \quad (5.6.25)$$

代入式 (5.6.24) 得到:

$$L_z = \frac{\mu_0 qq_m}{(4\pi)^2} \int 2\pi \sin^3\theta \frac{1 + \cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \frac{\mu_0 qq_m}{4\pi} \quad (5.6.26)$$

量子力学中  $L_z$  是量子化的, 只能取  $\hbar$  的整数倍, 因此:

$$\frac{\mu_0 qq_m}{4\pi} = n\hbar \implies qq_m = n \frac{2\hbar}{\mu_0} \quad (5.6.27)$$

即对应于任何给定的  $q_m$ , 点电荷  $q$  一定是  $\frac{2\hbar}{\mu_0 q_m}$  的整数倍, 即电荷是量子化的。  
上式也称为施温格电荷量子化条件。

**例** 将半径为  $R_0$  的超导体球放入匀强外磁场  $\vec{B} = \mu_0 H_0 \vec{e}_z$  中, 求超导体表面的超导电流。  
超导球内外均无电流, 因此可用磁标势描写。

内部磁感应强度  $\vec{B} = 0$ 。

由轴对称下 Laplace 方程的通解, 考虑到无穷远处的标量渐近形式:

$$\varphi = -H_0 r \cos\theta + \sum_n \frac{a_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (5.6.28)$$

球外表面处的边界上  $B_n = 0$ , 即  $-\mu_0 \partial_r \varphi|_{r=R_0} = 0$ 。代入式 (5.6.28) 中, 得到:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{H_0 R_0^3}{2}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad (5.6.29)$$

由此得到球外的磁场标量势:

$$\varphi(\vec{r}) = -H_0 r \cos\theta - \frac{H_0 R_0^3}{2r^2} \cos\theta \quad (5.6.30)$$

球外的磁场强度:

$$\vec{H} = -\nabla\varphi \quad (5.6.31)$$

由于球内的磁场强度为零, 球表面超导电流密度  $\vec{\alpha}_s$  为:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_s &= \vec{n} \times (\vec{H} - 0) \Big|_{r=R_0} = \vec{e}_r \times (-\nabla\varphi) \Big|_{r=R_0} \\ &= -\vec{e}_r \times \left[ \left( \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi \right) \left( -H_0 r \cos\theta - \frac{H_0 R_0^3}{2r^2} \cos\theta \right) \right] \Big|_{r=R_0} \\ &= 0 + \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta \left[ \frac{1}{r} \partial_\theta \left( H_0 r \cos\theta + \frac{H_0 R_0^3}{2r^2} \cos\theta \right) \right] \Big|_{r=R_0} + 0 \\ &= -\frac{3H_0}{2} \sin\theta \vec{e}_\phi \end{aligned} \quad (5.6.32)$$

式中  $\vec{n} = \vec{e}_r$ 。

## 5.7 介质的磁性

### 5.7.1 顺磁性

材料的原子或分子本身具有固有磁矩。当无外磁场时，原子或分子的热运动使得磁矩取向具有随机性，因此材料整体无磁性；当存在外磁场时，围观固有磁矩取向沿着磁场方向的分子数多于与磁场反向的分子数，从而产生沿着磁场方向附加的极化磁场。此现象即为介质的顺磁性。

将每个原子简化为磁矩为  $m = |\vec{m}|$  的磁偶极子。

磁偶极矩在外磁场中的势能：

$$V = -\mu_0 m H \cos\theta \quad (5.7.1)$$

根据玻尔兹曼分布律，与外磁场夹角为  $\theta$  的立体角  $d\Omega$  内原子数密度：

$$N(\theta)d\Omega = N_0 \exp\left(-\frac{V}{kT}\right) d\Omega = N_0 \exp\left(\frac{\mu_0 m H \cos\theta}{kT}\right) d\Omega \quad (5.7.2)$$

式中  $N_0 = \frac{N}{4\pi}$ ， $N$  为单位体积内的原子数密度。

类比电极化矢量的定义，磁偶极矩  $\vec{m}$  在外磁场中介质的磁化矢量：

$$\vec{M} = \frac{\mu_0 N m^2}{3kT} \vec{H} \quad (5.7.3)$$

于是磁化率和相对磁导率：

$$\chi_M = \frac{\mu_0 N m^2}{3kT}, \quad \mu_r = 1 + \chi_M \quad (5.7.4)$$

可见顺磁性材料的磁化率  $\chi_M$  与温度  $T$  成反比，此规律称为居里定律。

对于一般顺磁性材料，磁化率  $\chi_M$  的值在  $10^{-5} \sim 10^{-3}$ ，相对磁导率  $\mu_r \sim 1$ 。

### 5.7.2 抗磁性

原子或分子内每个电子具有轨道角动量  $\vec{I}_e$  和轨道磁矩  $\vec{m}_e$ ，处于磁感应强度  $\vec{B} = \mu_0 H \vec{e}_z$  均匀外磁场中的每个电子都受到外磁场的力矩作用。

$$\frac{d\vec{I}_e}{dt} = \dot{\vec{I}}_e = \vec{m}_e \times \vec{B} = -\frac{e}{2M_e} \vec{I}_e \times \vec{B} = \frac{eB}{2M_e} \vec{e}_z \times \vec{I}_e \quad (5.7.5)$$

$\vec{I}_e$  在直角坐标系下的投影：

$$\dot{I}_x = -\frac{eB}{2M_e} I_y, \quad \dot{I}_y = \frac{eB}{2M_e} I_x, \quad \dot{I}_z = 0 \quad (5.7.6)$$

即  $\vec{I}_z$  不随时间而变。

再对上式两边对时间求导：

$$\ddot{I}_x = -\left(\frac{eB}{2M_e}\right)^2 I_x, \quad \ddot{I}_y = -\left(\frac{eB}{2M_e}\right)^2 I_y \quad (5.7.7)$$

定义  $\omega_L = \frac{eB}{2M_e}$ ，初始相位为  $\phi_0$ ，即有

$$I_x = I_0 \cos(\omega_L t + \phi_0), \quad I_y = I_0 \sin(\omega_L t + \phi_0), \quad I_z = \text{const.} \quad (5.7.8)$$

可知，电子的轨道角动量  $\vec{I}_e$  围绕  $\vec{e}_z$  进动，角速度为  $\omega_L$ 。

此进动称为拉莫尔进动，过程中电子的轨道平面以  $\omega_L$  角速度围绕  $\vec{e}_z$  方向转动。

带负电的电子云绕  $z$  轴逆时针转动，相当于正电流绕  $z$  轴顺时针转动，因而电子做拉莫尔进动的附加磁矩方向总与磁场方向相反，即介质抗磁性的起源。

原则上各种介质材料都有这种机制导致的抗磁性。

电子拉莫尔进动的角动量：

$$\vec{I}_L = \vec{\rho} \times M_e \vec{v}_L, \quad v_L = \rho \omega_L \quad (5.7.9)$$

$\rho$  为电子到进动轴的距离，每个电子附加磁矩值：

$$\frac{e}{2M_e} I_L = \frac{e}{2M_e} \cdot (M_e \rho^2) \frac{eB}{2M_e} = \frac{e^2 \rho^2 B}{4M_e} \quad (5.7.10)$$

方向与外磁场  $\vec{B}$  相反。

对于三维空间中大量各向同性电子：

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \overline{x^2 + y^2} = \frac{2}{3} \overline{r^2} \quad (5.7.11)$$

对于由大量原子组成的介质，平均每个电子附加磁矩：

$$\vec{m} = -\frac{e^2}{4M_e} \overline{\rho^2} \vec{B} = -\frac{e^2}{4M_e} \cdot \frac{2\overline{r^2}}{3} \cdot \vec{B} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{6M_e} \vec{B} \quad (5.7.12)$$

单位体积内附加的磁矩  $\vec{\mathcal{M}}$ ：

$$\vec{\mathcal{M}} = -\left( \frac{NZe^2 \overline{r^2}}{6M_e} \right) \vec{B} = -\left( \mu_0 \frac{NZe^2 \overline{r^2}}{6M_e} \right) \vec{H} \quad (5.7.13)$$

式中  $N$  为单位体积内原子的个数， $Z$  为每个原子的电子数。

由上式得到：

$$\chi_M = -\frac{\mu_0 NZe^2 \overline{r^2}}{6M_e}, \quad \mu_r = 1 + \chi_M \quad (5.7.14)$$

对于一般抗磁性介质，磁化率  $\chi_M$  的值在  $10^{-6} \sim 10^{-5}$  量级。

### 5.7.3 铁磁性

在交换力的作用下，当相邻原子的自旋具有相同取向时，相互作用的能量低，材料内形成磁畴。

每一块磁畴内原子的自旋取向相同，尺度约为  $10^{-5} \sim 10^{-3} \text{m}$ 。

标记单个原子的磁矩为  $\vec{m}_1$ ，一个磁畴的磁矩则为  $n_0 \vec{m}_1$ 。

假定材料内所以磁畴大小相同。

考虑弱场情况，假定磁畴的磁矩方向与外磁场夹角为  $\theta$ ，外磁场磁感应强度  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ 。

磁畴在外磁场中的势能：

$$V = -\mu_0 n_0 m_1 H \cos \theta \quad (5.7.15)$$

与外磁场方向夹角为  $\theta$  的立体角  $d\Omega$  内磁畴数密度：

$$N(\theta) d\Omega = N_0 \exp\left(-\frac{V}{kT}\right) d\Omega \approx N_0 \left(1 + \frac{\mu_0 n_0 m_1 H \cos \theta}{kT}\right) d\Omega \quad (5.7.16)$$

式中  $N_0 = \frac{N}{4\pi n_0}$ ， $N$  为单位体积内的原子数密度。

上式计算利用了弱磁场条件：

$$\frac{n_0 m_1 B \cos \theta}{kT} \ll 1 \quad (5.7.17)$$

于是在弱场近似下，得到磁化强度：

$$\vec{M} = \mu_0 \frac{N}{n_0} \frac{(n_0 m_1)^2}{3kT} \vec{H} = \frac{\mu_0 n_0 N m_1^2}{3kT} \vec{H} \quad (5.7.18)$$

即铁磁性材料的磁化率  $\chi_M$  为顺磁性材料的  $n$  倍。

假定铁屑为磁矩为  $n_0 \vec{m}_1$  的小磁畴，则铁屑在外磁场中受到的作用力：

$$\vec{F} = n_0 \vec{m}_1 \cdot \nabla \vec{B} \quad (5.7.19)$$

铁磁材料处于外磁场中，与外磁场取向相同的磁畴范围随外磁场强度的增加逐步增大。磁场继续增强时，有些磁畴可能突然转向，直至整个材料统一为一个磁畴。

磁畴的大角度转向是不可逆过程，所以铁磁材料具有磁滞现象。

## 5.8 自然界的磁场

### 5.8.1 星际和恒星的磁场

太阳黑子的温度比周围环境低很多，因此“黑”，其依靠内部强磁场提供的额外磁压维持黑子内外的压力平衡。

**例** 若忽略太阳表面的普通磁场，试证明太阳黑子内部的强磁场对于黑子内表面的压强等于磁场能量密度。

假定在太阳黑子以外的磁场为零，黑子内侧局部磁场可以近似看成匀强磁场。

由于太阳黑子外面磁场很弱，可以忽略黑子外的磁场。

磁场是无源场，因此黑子内侧的磁场方向平行于黑子的界面。

若在界面上取一个面元  $d\vec{S}$ ，方向从黑子内部指向外部方向，则  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ 。

太阳黑子内部电场强度  $\vec{E} = 0$ ，黑子内部磁场对应的动量流密度张量：

$$\overleftrightarrow{T} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{\overleftrightarrow{T}}{2\mu_0} B^2 \quad (5.8.1)$$

即太阳黑子内的磁场在单位时间内通过单位截面流出的动量。

单位时间内通过黑子的界面流到外面的动量：

$$\overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{S} = \left( -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{\overleftrightarrow{T}}{2\mu_0} B^2 \right) \cdot \vec{n} dS = \left( 0 + \frac{\vec{n}}{2\mu_0} B^2 \right) dS = \vec{n} \omega dS \quad (5.8.2)$$

方向指向黑子外部。

上式表明，太阳黑子内部强磁场对于黑子界面的压强等于太阳黑子内磁场的能量密度。

### 5.8.2 地磁场

地球磁场俘获太阳风中的带电粒子形成范艾伦辐射带，其中内辐射带高能质子多，外辐射带高能电子多。

地核磁流体发电机理论：

把地核作为一个满足似稳电磁场条件的发电机。

对于运动的地核电流，电磁场强度为  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ ，传导电流  $\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 。  
似稳场方程中关于磁感应强度的旋度方程：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} = \sigma \mu (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.8.3)$$

两边求旋度，左边为：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} \quad (5.8.4)$$

右边：

$$\sigma \mu \nabla \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \sigma \mu (-\partial_t \vec{B}) + \sigma \mu \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.8.5)$$

假设地核内的导电流体电导率  $\sigma$  为常量，磁导率  $\mu = \mu_0$ ，由以上式子可得：

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta_m \nabla^2 \vec{B} \quad (5.8.6)$$

式中  $\eta_m = \frac{1}{\sigma \mu_0}$  称为导电流体的磁扩散系数。

上式描写了地核内导电流体中磁场变化规律，由于地球磁场变化很慢，可令  $\partial_t \vec{B} \approx 0$ ，代入上式：

$$\nabla^2 \vec{H} + \mu \sigma \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) = 0 \quad (5.8.7)$$

上式即为自激励发电机理论关于磁场强度的方程。

## 6 电磁波的传播

### 6.1 电磁波在非导电介质中的传播

对于无限大的无源非导电介质中的电磁波：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (6.1.1)$$

式中  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 。假定介质均匀且不考虑色散特性，则  $\varepsilon, \mu$  均为常数。

为得到关于电场的方程：

在第二条方程两边作用  $\nabla \times$ ，则：

$$-\nabla^2 \vec{E} + \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) \quad (6.1.2)$$

化简得到电场满足的方程：

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0, \quad v^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu} \quad (6.1.3)$$

类似可得到磁场满足的方程：

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0, \quad v^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu} \quad (6.1.4)$$



两式是标准的波动方程。

电磁场波动方程的试解：

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad (6.1.5)$$

$k, \omega$  之间满足关系式：

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \implies k = \pm \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (6.1.6)$$

即电磁波的色散关系。

讨论：

① 式 (6.1.5) 中的  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$  代表波动的振幅， $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$  称为振动的相位。

在给定时刻，方程：

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} \quad (6.1.7)$$

所定义的曲面上相位相等，波场  $\vec{E}, \vec{B}$  也就相同，此曲面叫做等相位面。

显然式 (6.1.7) 定义的曲面为一平面，垂直于  $\vec{k}$ ，因此式 (6.1.5) 所描述的波称为平面波。

也可能将试解 (6.1.5) 写成其他形式，如球面波或柱面波。

② 波长  $\lambda$ ：

两个相位差为  $2\pi$  的等相位面之间的距离。

$$k \cdot \lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.1.8)$$

$\vec{k}$  称为波矢。

③ 等相位面的传播速度称为波的相速度。

设  $t$  时刻等相位面在  $r$  处， $t + \Delta t$  时刻该等相位面垂直于  $\vec{k}$  运动到  $r + \Delta r$  的位置，则：

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi = \text{const.} = k \cdot (r + \Delta r) - \omega(t + \Delta t) + \varphi \quad (6.1.9)$$

则相速度：

$$v_p = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \implies v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (6.1.10)$$

上式即为平面电磁波的传播速度，与介质的性质有关。

真空中， $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$ ，因此  $v_p$  为光速：

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \quad (6.1.11)$$

介质中，波速：

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (6.1.12)$$

$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$  定义为材料的折射率。

④ 相邻两次振动之间的时间为周期  $T$ ，单位时间内的振动次数为频率  $f$ 。

确定位置处， $T$  是两个波峰之间的时间差，易得：

$$\omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.1.13)$$

振动频率:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6.1.14)$$

$\omega$  称为角 (圆) 频率,  $f$  称为线频率。

⑤ 常将平面波写为复数形式:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} \quad (6.1.15)$$

由于场量应为实数, 因此只取其实部作为物理解。

可把常数因子  $e^{i\varphi}$  并入振幅:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.1.16)$$

此时振幅为复数, 表示电磁波有相位因子。根据色散关系,  $k$  取正负均可, 则:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.1.17)$$

⑥ 波动方程在约化过程中, 由一阶微分变为了二阶微分, 因此其对应的解未必全是原始 Maxwell 方程的解。

将式 (6.1.16) 所得解代回原始 Maxwell 组中 1, 3 方程检查, 发现场量需满足:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (6.1.18)$$

这表明电磁场振动的方向与传播方向  $\vec{k}$  互相垂直, 亦即电磁波是横波。

代入方程组 2 方程检查:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \quad (6.1.19)$$

说明  $\vec{E}, \vec{B}$  之间不独立。

代入第 4 条方程可得:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\varepsilon \omega \vec{E} \implies \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\varepsilon \mu \omega \vec{E}_0 \quad (6.1.20)$$

于是得知:  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  组成右手定则, 且  $\vec{E}, \vec{B}$  之间的模量满足:

$$|E_0| = \omega \frac{|B_0|}{k} = v |B_0| = c |B_0| \quad (6.1.21)$$

最后一个等式在真空中成立。

进一步得到:

$$|E_0| = v \mu |H_0| = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon \mu}} |H_0| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} |H_0| = Z |H_0| \quad (6.1.22)$$

式中  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  称为阻抗, 具有电阻的量纲, 可描述电磁介质中电磁波传播时场量比例。

⑦ 电磁场的能流:

$$\vec{S}_P(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H}) \quad (6.1.23)$$

对能流在一个周期内做时间的平均:

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \left\langle \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H}) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}_P dt \quad (6.1.24)$$

由

$$\langle \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (6.1.25)$$

得到:

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \frac{1}{2} Z H_0^2 \hat{k} = \frac{1}{2Z} E_0^2 \hat{k} \quad (6.1.26)$$

同理, 能流密度的时间平均值:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \langle u(\vec{r}, t) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{H} \right\rangle = \frac{\varepsilon}{4} E_0^2 + \frac{\mu}{4} H_0^2 = \frac{\varepsilon}{2} E_0^2 \quad (6.1.27)$$

易证:

$$\bar{u}_E = \frac{\varepsilon}{4} E_0^2 = \frac{\mu}{4} H_0^2 = \bar{u}_B \quad (6.1.28)$$

即平面电磁波电场与磁场携带的能量相等。

比较能流密度与能流的时间均值:

$$\langle \vec{S}_P(\vec{r}) \rangle = \hat{k} \bar{u}(\vec{r}) \frac{1}{\varepsilon Z} = \hat{k} \bar{u}(\vec{r}) v = \bar{u}(\vec{r}) \vec{v} \quad (6.1.29)$$

因此, 能流即单位时间通过单位面积的能量。

平面电磁波中  $\vec{E}$  与  $\vec{B}$  同相位变化, 因此同时达到最大值, 也同时达到最小值。

## 6.2 波的偏振和偏振矢量

假定传播方向  $\vec{k} \parallel \hat{z}$ , 则电场矢量在  $xy$  平面内, 假定有 2 个相互垂直的单位矢量  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ 。

取复数场表达式后:

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{x,0} + \vec{e}_y E_{y,0} = \vec{e}_x |E_{x,0}| e^{i\phi_x} + \vec{e}_y |E_{y,0}| e^{i\phi_y} \quad (6.2.1)$$

将上式代入复数场表达式  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , 再取实部, 得:

$$E_x(z, t) = |E_{x,0}| \cos(kz - \omega t + \phi_x) \quad (6.2.2)$$

$$E_y(z, t) = |E_{y,0}| \cos(kz - \omega t + \phi_y) \quad (6.2.3)$$

### 6.2.1 线偏振

当  $\phi_x = \phi_y = \phi$  时:

$$E_x(z, t) = |E_{x,0}| \cos(kz - \omega t + \phi) \quad (6.2.4)$$

$$E_y(z, t) = |E_{y,0}| \cos(kz - \omega t + \phi) \quad (6.2.5)$$

在任意一个确定的波阵面上 (如  $z = 0$  的  $xy$  平面), 电场只在一个方向上随时间振动。

### 6.2.2 椭圆偏振

在最一般情况下，波的偏振状态都是椭圆偏振。

如  $\phi_x - \phi_y = \frac{\pi}{2}$ ,  $|E_{x,0}| > |E_{y,0}|$  则：

$$E_x(z, t) = -|E_{x,0}| \sin(kz - \omega t + \phi_y) \quad (6.2.6)$$

$$E_y(z, t) = |E_{y,0}| \cos(kz - \omega t + \phi_y) \quad (6.2.7)$$

因此  $\vec{E}$  场描绘出一个半长轴为  $|E_{x,0}|$ ，半短轴为  $|E_{y,0}|$  的椭圆。

若  $\phi_x - \phi_y \neq \frac{\pi}{2}$ ，则椭圆的对称轴产生了一个转动，但偏振状态仍然是椭圆偏振。

### 6.2.3 圆偏振

当  $|E_{x,0}| = |E_{y,0}| = A$ ,  $\phi_x - \phi_y = \pm \frac{\pi}{2}$  时，电场分量为：

$$E_x(z, t) = \mp A \sin(kz - \omega t + \phi_y) \quad (6.2.8)$$

$$E_y(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \phi_y) \quad (6.2.9)$$

此时  $\vec{E}$  场描绘出一个半径为  $A$  的圆，因此称为圆偏振。

考虑两种情况：

- 右旋圆偏振：

当  $\phi_x - \phi_y = \frac{\pi}{2}$  时，电场矢量顺时针旋转。

此时电场可重写为：

$$\vec{E}_0 = \sqrt{2} A e^{i\phi_1} \vec{e}_{right} \quad (6.2.10)$$

式中右旋偏振的单位矢量：

$$\vec{e}_{right} = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \quad (6.2.11)$$

- 左旋圆偏振：

当  $\phi_x - \phi_y = -\frac{\pi}{2}$  时，电场矢量逆时针旋转。

此时电场可重写为：

$$\vec{E}_0 = \sqrt{2} A e^{i\phi_1} \vec{e}_{left} \quad (6.2.12)$$

式中左旋偏振的单位矢量：

$$\vec{e}_{left} = \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \quad (6.2.13)$$

## 6.3 金属的等效介电常数-Drude 模型

### 6.3.1 色散介质的本构关系

对于均匀各向同性非色散的电磁介质， $\varepsilon_r, \mu_r$  均大于 0，且不依赖于频率。

这种介质对电磁场的响应是局域、瞬时的，即此处、此时的电磁扰动只会引发此处、此时的电磁响应。

一般情况下，材料的响应为：

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int \varepsilon(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \quad (6.3.1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \int \mu^{-1}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{B}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \quad (6.3.2)$$

这意味着，在任何时刻  $t'$  任何地点  $\vec{r}'$  给体系一个扰动  $\vec{E}$ ，体系都可能在时刻  $t$  地点  $\vec{r}$  产生一个响应  $\vec{D}$ 。

响应函数  $\varepsilon$  只依赖于距离差和时间差是体系的空间和时间平移不变性的要求。

通常我们忽略“空间非局域效应”，即假设体系的响应在空间上是局域的。

进一步，若考虑频率确定为  $\omega$  的电磁波在此介质中运动，设复场  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ，代入可得：

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int \varepsilon(t - t') \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t'} dt' = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (6.3.3)$$

其中

$$\varepsilon(\omega) = \int \varepsilon(t - t') e^{-i\omega(t' - t)} dt' = \int \varepsilon(\tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} d\tilde{t} \quad (6.3.4)$$

是时域响应函数的 Fourier 变换后的频域形式。

因此本构关系此时为（设所有物理量均含  $e^{-i\omega t}$  的时间变化因子）：

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) \quad (6.3.5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}) \quad (6.3.6)$$

因此无论再复杂的电磁介质，当其中的电磁波为单频时，其本构关系变成与常规电介质相同。

此时  $\varepsilon, \mu$  的数值依赖于频率值，即“色散”， $\varepsilon, \mu$  依赖于频率的电磁介质称为色散介质。

对于金属，静态时的本构关系即为欧姆定律：

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E} \quad (6.3.7)$$

当外电场随时间谐变时， $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ，电流和电位移矢量也带有时间因子，即：

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (6.3.8)$$

此时可定义频域的电导率和介电函数：

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\omega) \vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) \quad (6.3.9)$$

### 6.3.2 金属的有效电导率

一束单频的电磁波施加在等离子体中时，空间将有电场  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$  存在，电子受到电场力  $e\vec{E}$ 。电子运动时受到其他粒子的散射而丢失能量及动量。

用“弛豫时间近似”模型描述这种散射力，即散射力可写成：

$$\vec{F}_{sca} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} \quad (6.3.10)$$

物理意义：电子平均  $\tau$  时间受到一次“异种粒子”的散射而丢失其所有动量。

电子运动方程：

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \quad (6.3.11)$$

长波近似下，电子来回运动的区间内可近似认为电场不发生显著变化： $\vec{E}(\vec{r}) \sim \vec{E}_0$ 。

可预见电子在单频外场力作用下做“受迫振动”。

将试解  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$  代入式 (6.3.11) 中：

$$\vec{v}_0 = \frac{-e\vec{E}_0}{im(\omega + \frac{i}{\tau})} \quad (6.3.12)$$

因此，电子的运动速度：

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} = \frac{-e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{im(\omega + \frac{i}{\tau})} \quad (6.3.13)$$

电流密度：

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = n_e e \vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + \frac{i}{\tau})} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (6.3.14)$$

式中  $n_e$  为单位体积内的电子数目。对比式 (6.3.9) 和 (6.3.14) 可得电导率：

$$\sigma(\omega) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + \frac{i}{\tau})} \quad (6.3.15)$$

讨论：

- 当  $\omega \rightarrow 0$  时，上式回到直流情况下金属的电导率  $\sigma_c$ ，取极限可得：

$$\sigma_c = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \quad (6.3.16)$$

即弛豫时间近似下金属直流电导率的结果。

- 复数形式电导率不能只取实部，其实部、虚部都有明确的物理意义。

将复电导率写成  $\sigma(\omega) = Re(\sigma(\omega)) + iIm(\sigma(\omega))$ ，可以证明实部对应着实际的能量耗散，虚部不对应能量耗散。

- 对一般良导体  $\tau \sim 10^{-14}s$ ，因此：

(a) 在  $GHz$  以下的频段 (微波)， $\frac{1}{\tau} \gg \omega$ ，此时  $\sigma(\omega) \approx \sigma_c$ ，即有效电导率就是静态时的电导率。

理解：

电子碰到一次散射的平均时间  $\tau$  远小于电场发生变化的时间间隔  $T \sim \frac{1}{\omega}$ ，电场还没有发生显著变化电子已经与杂质碰撞了成千上万次。因此这种条件下电导率与直流时相比并无明显不同。

(b) 在可见光频段,  $\frac{1}{\tau} \ll \omega \sim 10^{15} s^{-1}$ , 此时  $\sigma(\omega) \approx i \frac{n_e e^2}{m\omega}$ 。

理解:

电子在高频电场的作用下来回运动, 还未碰到散射就已经折返。此时电子的主要行为是与电场相互交换能量(表现为电导率呈现虚部, 电场不对电流做功), 而不是与杂质碰撞耗散能量。

### 6.3.3 金属有效介电函数

单频条件下,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \nabla \times \vec{H} = [\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0] \vec{E} \quad (6.3.17)$$

交变条件下把传导电流作为金属的束缚电流来考虑, 对一个电介质:

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E} \quad (6.3.18)$$

比较可得金属的有效介电常数:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \implies \varepsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \quad (6.3.19)$$

将式 (6.3.14) 代入上式, 即得金属的有效介电常数:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}} \quad (6.3.20)$$

式中  $\omega_p$  只与金属性质有关, 叫做等离子共振频率。

式 (6.3.20) 即为 Drude 模型, 描述了良导体从直流 ( $\omega = 0$ ) 到紫外 ( $\omega > 10^{16} Hz$ ) 的整个频谱的介电行为。

$\omega_p$  描述的是自由电子气在外场下的一个集体震荡共振行为, 良导体的  $\omega_p$  大都在紫外频区。

讨论两种典型情况下的金属的介电行为:

- GHz 及以下 ( $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ ):

$$\varepsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \quad (6.3.21)$$

- 光波段 ( $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ ):

$$\varepsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad (6.3.22)$$

从光波段到 GHz,  $\varepsilon_r(\omega)$  完成了一个由负实部主导到正的虚部主导的转变。

## 6.4 电磁波在导电介质中的传播

在金属中求解如下 Maxwell 方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (6.4.1)$$

对于特定频率  $\omega$ ，所有的场量均以  $e^{-i\omega t}$  形式随时间谐变：

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)\right) = \left(\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}), \rho(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r})\right) e^{-i\omega t} \quad (6.4.2)$$

将金属中的“传导电流”吸收到电位移矢量中并利用连续性方程，可证明 Maxwell 方程针对时谐场的形式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon(\omega) \vec{E}) = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon(\omega) \vec{E} \end{cases} \quad (6.4.3)$$

对上式中第 4 式作用  $\nabla \times$ ，可得：

$$-\nabla^2 \vec{H} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu_0 \vec{H} \quad (6.4.4)$$

上式的解为平面波， $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ，时间部分仍然对应  $e^{-i\omega t}$ ，代入可得色散关系：

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\omega) \quad (6.4.5)$$

#### 6.4.1 良导体在 GHz 及以下频段

① 复波矢：

良导体在 GHz 及以下频段的有效介电常数：

$$\varepsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \quad (6.4.6)$$

将上式代入式 (6.4.5) 中得：

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \approx \sqrt{\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}} \frac{\omega}{c} = (1+i)\alpha, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_c \mu_0 \omega}{2}} \quad (6.4.7)$$

则

$$\vec{k} = (1+i)\alpha \cdot \vec{e} \quad (6.4.8)$$

其中  $\vec{e}$  为单位矢量 (传播方向)。

将式 (6.4.8) 代入式 (6.4.2)，可得电磁波在金属中的电场 (假设传播方向为  $z$  方向)：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \quad (6.4.9)$$

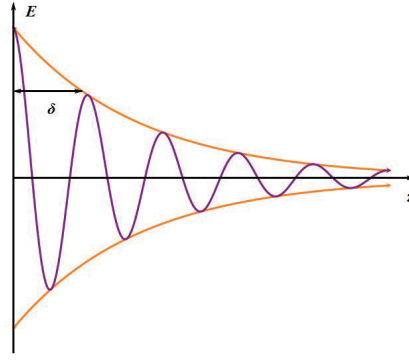
可见，此时平面波振幅沿传播方向指数衰减。

振幅衰减到  $r=0$  处的  $\frac{1}{e}$  倍的距离  $\frac{1}{\alpha}$  称为透入深度 (也叫趋肤深度)，定义为：

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_c \mu \omega}} \quad (6.4.10)$$

因此电磁波无法渗入导电介质的内部，而是在表面很快衰减掉。





对应地，金属上产生的交变电流一定也只是局域在表层薄层内。

这种衰减表示电磁波的能量有消耗。对于良导体， $\sigma_c \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ ，入射的电磁波几乎被 100% 反射回去。因此，良导体几乎不能吸收电磁波（在 GHz），可看作理想导体。

## ② 电磁场强度之间的关系

由式 (6.4.3) 第二式可得：

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{\omega \delta} (1 + i) \cdot \vec{e} \times \vec{E}_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sigma_c \mu_0}{\omega}} \vec{e} \times \vec{E}_0 \quad (6.4.11)$$

特点：

- $\vec{B}, \vec{E}$  之间有  $\frac{\pi}{4}$  的相位差，趋向导体内部时，两者均以指数形式振荡衰减。
- 良导体内部的电磁能量以磁场能形式存在：

$$U_B \sim \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 = \frac{\sigma_c}{2\omega} E_0^2 = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \left( \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \right) \gg U_E \quad (6.4.12)$$

这种趋势随着频率的减小而增大。

当  $\omega = 0$  时，磁能是电能的无限大倍，因此  $\vec{E}$  只能为 0。此时电磁场能量只以磁能的形式出现。（这与静电时金属内部不存在静电场的结果一致）

## 6.4.2 良导体在光波段（等离子体中的光波）

在光波段，金属的有效介电常数：

$$\varepsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6.4.13)$$

代入色散关系：

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \quad (6.4.14)$$

讨论：

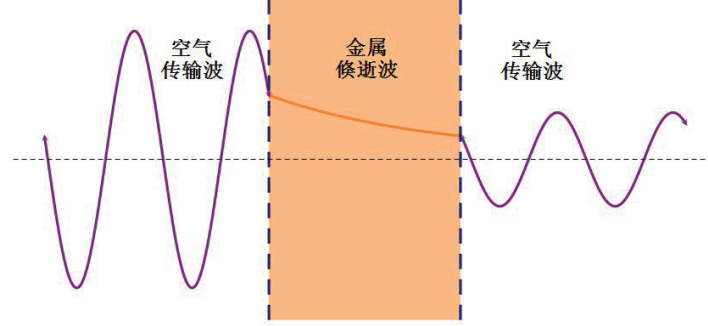
- 当  $\omega < \omega_p$  时， $k$  为纯虚数，写作  $k = \frac{i}{\delta}$ ，其中

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2 - \omega^2}} \quad (6.4.15)$$

此时金属中的电磁场是指数衰减的,

$$E \sim E_0 e^{ikr} = E_0 e^{-\frac{r}{\delta}} \quad (6.4.16)$$

这种波称为衰减波 (或叫消逝波, 倏逝波)。



当电磁波由空气入射到金属上时, 进入金属后电磁波的透入深度为  $\delta$ 。若金属为半无限大, 则电磁波完全不能通过金属, 因此将被反射回去; 若厚度有限, 则会有衰减波隧穿过去。

这里金属 ( $\epsilon_r < 0$ ) 类似于量子力学中的势垒, 电介质 ( $\epsilon_r > 0$ ) 类似于势阱。

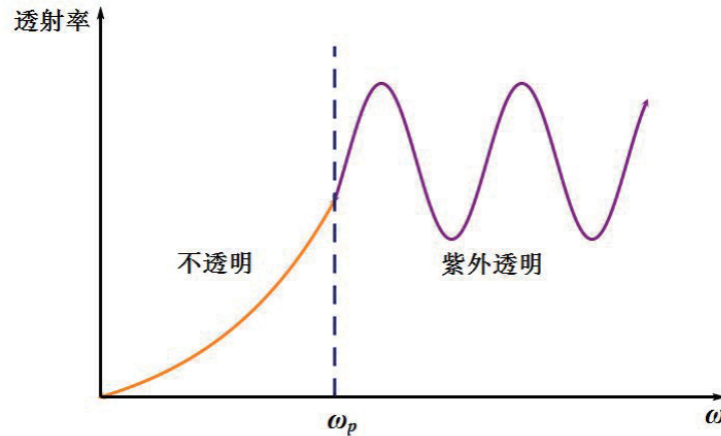
- 磁场:

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times E_0 \vec{e}_x e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\omega t} = \frac{i}{\omega \delta} E_0 \vec{e}_y e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\omega t} \quad (6.4.17)$$

磁场与电场有  $\frac{\pi}{2}$  的相位差, 这个相位的不同造成了能流形式在各种介质中的不同。

- 当  $\omega = \omega_p$  时,  $\delta \rightarrow \infty$ , 此时隧穿效应达到极值。
- 当  $\omega > \omega_p, 0 < \epsilon_r < 1, n = \sqrt{\epsilon_r} < 1$  时, 金属是比真空还要光疏的介质, 光波可以在其中传播。

$\omega = \omega_p$  定义了一个由不透明到透明的等离子共振带边, 实验上常利用此现象探测金属的等离子体共振频率。



- 金属在 GHz 和在光波段均可以很好地反射电磁波, 但机理及表现形式完全不同。前者靠金属的介电常数的虚部, 后者靠负的介电常数。

### 6.4.3 非良导体

对于导电性能不好的导电媒质，既有价带电子贡献的介电性质，又因为有少量掺杂的电荷等原因具有很小的电导率。

这种物质的复介电函数可写为：

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_r + i \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \quad (6.4.18)$$

由于电导率很小：

$$\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \ll 1 \quad (6.4.19)$$

即意味着这种物质的介电常数具有很小的虚部。将式 (6.4.18) 代入色散关系：

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)} = \beta + i\alpha \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} + i \frac{\sigma_c}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (6.4.20)$$

电磁波的解：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (6.4.21)$$

此时电磁波的传播与真空中的性质相近，只是传播过程中有少量能量耗散。

$\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)}$  即体系的有效折射率。虚部对应电磁波在体系中的耗散。

## 6.5 旋光介质中的电磁波

当对等离子介质施加静磁场时，这类介质就叫做旋光介质。

如地球附近的受地磁场影响的等离子体层，或者处于恒定磁场中的金属。

### 6.5.1 旋光介质的本构关系

考虑处于静磁场  $\vec{B}_0$  中的自由电子气对电场的响应，忽略杂质的散射项。

电子的运动方程：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0 \right) \quad (6.5.1)$$

设静磁场  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ，强度远大于电磁场中的磁场，外电场随时间谐变  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ 。

在外场的驱动下，电子的运动速度也具有  $e^{-i\omega t}$  因子。设  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$ ，则

$$\begin{aligned} -i\omega v_{0x} &= \frac{e}{m} E_{0x} + \frac{e}{m} v_{0y} B_0 \\ -i\omega v_{0y} &= \frac{e}{m} E_{0y} - \frac{e}{m} v_{0x} B_0 \\ -i\omega v_{0z} &= \frac{e}{m} E_{0z} \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

定义  $\omega_B = \frac{|e|B_0}{m} = -\frac{eB}{m} > 0$  (这里  $e < 0$ )。物理意义为，电子在垂直磁场平面内做圆周运动的圆频率。代入以上 3 式可得：

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\ v_{0y} &= \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{0y} - \omega_B E_{0x}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\ v_{0z} &= -\frac{e E_{0z}}{im\omega} \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

代入电流密度公式  $\vec{j} = n_e e \vec{v}$ , 可得:

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{n_e e^2}{m} \frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} e^{-i\omega t} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} (i\omega E_x + \omega_B E_y) \\ j_y &= \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} (i\omega E_x - \omega_B E_y) \\ j_z &= -\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i\omega} E_z \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

因此电流和电场之间的关系满足一个拓展的欧姆定律:

$$\vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} \quad (6.5.5)$$

此时电导率为一个各向异性的矩阵, 其具体形式为:

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega^2 - \omega_B^2} \begin{pmatrix} i\omega & \omega_B & 0 \\ -\omega_B & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega^2 - \omega_B^2}{i\omega} \end{pmatrix} \quad (6.5.6)$$

进一步求出介质的有效介电常数:

与时域谐变下 Maxwell 第四条方程对比,  $\nabla \times \vec{H} = -i\omega \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}$ .

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r(\omega) = I + i \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (6.5.7)$$

即一个各向异性的等效介电常数张量, 其中:

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_B}{(\omega^2 - \omega_B^2) \omega}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6.5.8)$$

可见, 当  $B_0 = 0$  时,  $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ , 体系回到各向同性的等离子体。

总结, 磁场对等离子体的影响:

- 使体系的有效介电函数变成各向异性;
- 使体系的有效介电函数的非对角元素为纯虚数。

具有类似式 (6.5.7) 的介电常数的体系通常叫做旋电材料。

若磁导率矩阵  $\overleftrightarrow{\mu}_r(\omega)$  具有类似式 (6.5.7) 形式, 则体系称为“旋磁材料”。

### 6.5.2 旋光介质中的电磁波本征态

取平面波试解  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ , 代入频域的 Maxwell 方程组, 则有

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot (\overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0) = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu_0 \vec{H}_0 \\ \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \end{cases} \quad (6.5.9)$$

作简化:

- 假设  $\omega > \omega_p \gg \omega_B$ , 故  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  都是正实数, 且  $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ ;
- $\vec{k} = k\vec{e}_z$

由第 1 式以及  $\vec{\varepsilon}_r$  的形式, 可得:

$$E_{0z} = 0 \implies \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (6.5.10)$$

因此此时电磁波仍为横波。

由第 3, 4 式可得:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 = 0 \implies k^2 \vec{E}_0 = k_0^2 \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \quad (6.5.11)$$

式中  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  为真空中的波矢。

记解为  $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$ , 代入上式得到:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 k_0^2 - k^2 & i\varepsilon_2 k_0^2 \\ -i\varepsilon_2 k_0^2 & \varepsilon_1 k_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.5.12)$$

计算得到两个本征值:

$$k_+ = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad k_- = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (6.5.13)$$

本征矢量:

$$k_+ : E_{0x} = iE_{0y} \implies \vec{E}_0^+ = E_0 \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} = E_0 \vec{e}_{right} \quad (6.5.14)$$

$$k_- : E_{0x} = -iE_{0y} \implies \vec{E}_0^- = E_0 \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} = E_0 \vec{e}_{left} \quad (6.5.15)$$

因此, 此种材料中沿  $z$  轴传播的电磁波的本征态非线偏振, 而是左右旋圆偏振。

且这两个本征态的色散关系不同。

对于右旋光:

$$v_{right} = \frac{\omega}{k_+} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad (6.5.16)$$

对于左旋光:

$$v_{left} = \frac{\omega}{k_-} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} \quad (6.5.17)$$

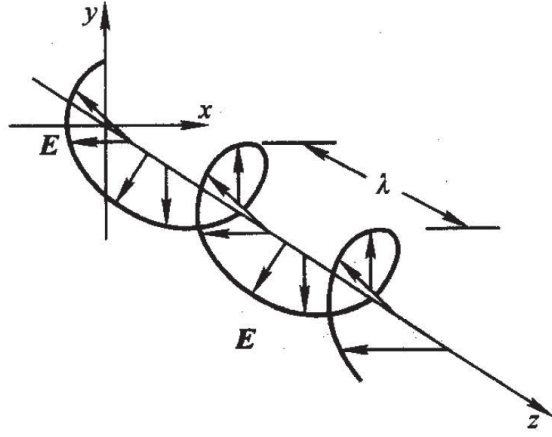
因此, 在介质中沿着磁场方向传播时, 左旋光速度比右旋光快。

### 6.5.3 法拉第效应

当一个线偏振波由各向同性的空间进入各向异性的等离子体中时:

由于线偏振波可以分解为两个等幅的左、右旋圆偏振波, 而且两者波速不等, 因此: 电磁波的偏振面在等离子体中以前进方向为轴不断地旋转。

这种效应称为法拉第旋光效应。



设进入 Faraday 介质之前在真空中传播的线偏振电磁波为：

$$\vec{e}_x E_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{e}_{right} + \vec{e}_{left}) e^{i(k_0 z - \omega t)} \quad (6.5.18)$$

进入 Faraday 介质后，假设旋光体系对左右旋光的透射率相同，则电磁波变为：

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{right} e^{ik_+ z} + \vec{e}_{left} e^{ik_- z}) e^{-i\omega t} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{right} e^{i\Delta k \frac{z}{2}} + \vec{e}_{left} e^{-i\Delta k \frac{z}{2}}) e^{i(\bar{k}z - \omega t)} \\ &= \frac{E_0}{2} \left[ (e^{-i\Delta k \frac{z}{2}} + e^{i\Delta k \frac{z}{2}}) \vec{e}_x + i (e^{-i\Delta k \frac{z}{2}} - e^{i\Delta k \frac{z}{2}}) \vec{e}_y \right] e^{i\bar{k}z} e^{-i\omega t} \\ &= E_0 \left[ \cos \frac{\Delta k \cdot z}{2} \vec{e}_x + \sin \frac{\Delta k \cdot z}{2} \vec{e}_y \right] e^{i\bar{k}z} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (6.5.19)$$

式中  $\Delta k = k_+ - k_-$ ,  $\bar{k} = \frac{k_+ + k_-}{2}$ 。

因此电磁波在旋光介质中的电矢量一边传播一边旋转。

假设 Faraday 介质的厚度为  $d$ ，则从 Faraday 介质中出来时重新变为线偏振，偏振方向为：

$$\vec{E} \parallel \cos \left( \frac{\Delta k \cdot d}{2} \right) \vec{e}_x + \sin \left( \frac{\Delta k \cdot d}{2} \right) \vec{e}_y \quad (6.5.20)$$

与入射光比较偏振方向旋转了角度：

$$\Delta\phi = \Delta k \cdot \frac{d}{2} \approx k_0 d \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon_1}} \quad (6.5.21)$$

此即著名的 Faraday 旋光效应，后一约等式由  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$  得到。

由于  $\varepsilon_2 \propto \omega_B$ ，因此这个偏振转角正比与外磁场  $B$  及旋光介质的厚度  $d$ 。

讨论：

在各向同性的介质中，沿  $x, y$  方向偏振的光波的  $\vec{k}$  矢量相同，即状态简并，因此这种介质中左右旋电磁波同样状态简并。

于是我们既可以用线偏振的光波作为基展开任意偏振的波，也可以用左右旋光作为基。

## 6.6 电磁波在介质面上的反射和折射

### 6.6.1 电磁波边界条件

界面上电磁场满足边值条件：

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1(\vec{r}, t) - \vec{E}_2(\vec{r}, t)) \Big|_b = 0 \quad \vec{n} \times (\vec{H}_1(\vec{r}, t) - \vec{H}_2(\vec{r}, t)) \Big|_b = 0 \quad (6.6.1)$$

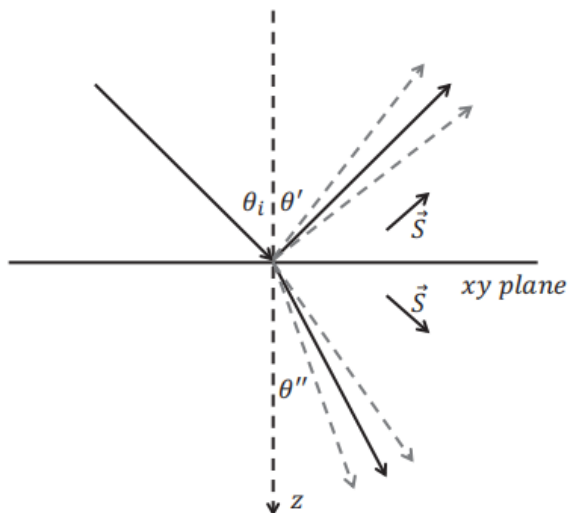
由上述边界条件，可以推导出决定电磁波的界面上行为的两大定律。

### 6.6.2 反射、折射的基本规律——Snell's Law

若交界面为一平面，取作  $Oxy$  面。考虑一单色平面波入射到交界面上，电场：

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.6.2)$$

则电场切向分量在交界面上时时相等要求反射波、折射波也一定携带相同的时间因子  $e^{-i\omega t}$ 。



**理解：**

介质分子在外电磁波的作用下以频率  $\omega$  做受迫振动，这种受迫振动是反射、折射波的来源。故反射、折射波一定也是以此频率振动，这其实是我们所处的世界的时间平移不变性的体现。

假设介质 1 和 2 都是均匀各向同性的，则其中的电磁通解为平面波，因此，反射、折射波可以写为所有频率为  $\omega$  的沿不同方向传播的平面波的叠加：

$$\text{反射波} \quad \vec{E}_r = \sum_{\vec{k}'} \vec{E}_0'(\vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.6.3)$$

$$\text{折射波} \quad \vec{E}_d = \sum_{\vec{k}''} \vec{E}_0''(\vec{k}'') e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.6.4)$$

其中波矢应和频率满足色散关系：

$$k' = \frac{\omega}{c} \cdot n_1 \quad k'' = \frac{\omega}{c} \cdot n_2 \quad (6.6.5)$$

式中  $n_i = \sqrt{\epsilon_{ri} \cdot \mu_{ri}}$  为第  $i$  个体系的折射率。

电磁场在交界面上处处相等要求：

反射/折射波在  $xy$  平面内具有相同的空间波动行为，即带有相同的因子  $e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$ 。

**理解：**

体系在界面上的平移不变性。考虑界面上的任意两点在外场激励下的震动，其唯一的不同就是外场的相位有不同，因此这两点的振动差  $e^{ik_{\parallel} \Delta r}$ ，因此响应的反射/折射波也差同样的相位。

因此 (6.6.3) 与 (6.6.4) 式中反射、折射波的展开式中只有一支平面波满足要求, 即:

$$\vec{k}'_{\parallel} = \vec{k}''_{\parallel} = \vec{k}_{\parallel} \quad (6.6.6)$$

于是可得  $z$  方向上的  $\vec{k}$  矢量:

$$k'_z = \pm \sqrt{k'^2 - k_{\parallel}^2} \quad k''_z = \pm \sqrt{k''^2 - k_{\parallel}^2} \quad (6.6.7)$$

根据因果关系, 反射波及折射波的能量都应当离开界面。

在常规介质中波矢的方向与能量传播的方向同方向:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \parallel \hat{k} \quad (6.6.8)$$

因此式 (6.6.7) 中  $k'_z$  应取负根,  $k''_z$  应取正根。

由: 时间平移不变性、界面空间平移不变性、因果关系, 可总结出反射、折射的基本规律:

- 反射波、折射波的频率与入射波频率相等:  $\omega' = \omega'' = \omega$
- 根据式 (6.6.6), 若  $k_y = 0$ , 则必有  $k'_y = k''_y = 0$ 。

即入射线、反射线和折射线在同一平面内。这个由入射波  $\vec{k}$  矢量与交界面垂直方向构成的平面定义为入射面。

- $k'_z, k''_z$  的正负号由因果关系确定。
- $k_x = k'_x \implies k \sin \theta = k' \sin \theta'$

由于入射波与反射波在同一种介质中,  $k = k'$ , 因此  $\theta = \theta'$ , 即入射角等于反射角。

- $k_x = k''_x \implies k \sin \theta = k'' \sin \theta''$

由式 (6.6.5) 得:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (6.6.9)$$

即折射定律 (Snell's Law)。

### 6.6.3 振幅关系——Fresnel's Law(菲涅耳定律)

对沿  $\vec{k}$  方向传播的具有任意偏振状态的平面电磁波, 总可以将其分解成两个偏振方向相互垂直的电磁波的叠加。

#### ① S 波/TE(横电) 波

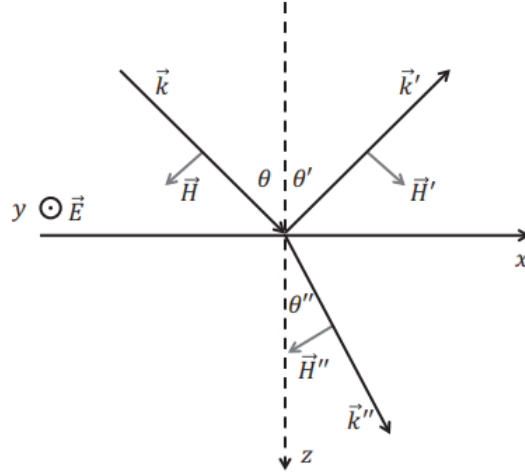
入射波的电场垂直于入射面, 入射、反射、以及折射波的电场可写成:

$$\text{入射波} \quad \vec{E}_i = \hat{y} E_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (6.6.10)$$

$$\text{反射波} \quad \vec{E}_r = \hat{y} E'_0 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \quad (6.6.11)$$

$$\text{折射波} \quad \vec{E}_t = \hat{y} E''_0 e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)} \quad (6.6.12)$$





由 Maxwell 方程，磁场可写为：

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} (\hat{k} \times \vec{E}) \quad Z = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (6.6.13)$$

因此，入射、反射以及折射波的磁场：

$$\vec{H}_i = \frac{E_0}{Z_1} \frac{k_x \hat{z} - k_z \hat{x}}{k} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (6.6.14)$$

$$\vec{H}_r = \frac{E'_0}{Z_1} \frac{k_x \hat{z} + k_z \hat{x}}{k} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \quad (6.6.15)$$

$$\vec{H}_t = \frac{E''_0}{Z_2} \frac{k_x \hat{z} - k_z \hat{x}}{k''} e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)} \quad (6.6.16)$$

在交界面上 ( $z = 0$ )  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  的切向值相等，则：

$$E_0 + E'_0 = E''_0 \quad (6.6.17)$$

$$\frac{k_z}{Z_1 k} E_0 - \frac{k_z}{Z_1 k} E'_0 = \frac{k''_z}{Z_2 k''} E''_0 \quad (6.6.18)$$

又由：

$$k_z = k \cos \theta \quad k''_z = k'' \cos \theta'' \quad (6.6.19)$$

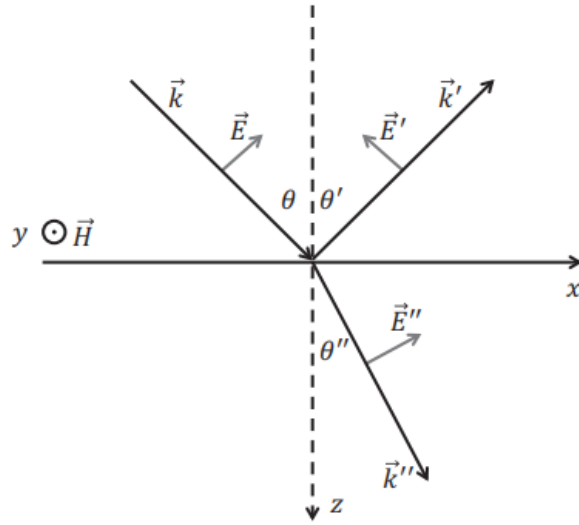
解联立方程可得：

$$E'_0 = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0 \quad (6.6.20)$$

$$E''_0 = \frac{2 Z_2 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0 \quad (6.6.21)$$

## ② P 波/TM(横磁) 波

磁场垂直于入射面，此时先考虑磁场比较方便。



$$\text{入射波} \quad \vec{H}_i = \hat{y} H_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (6.6.22)$$

$$\text{反射波} \quad \vec{H}_r = \hat{y} H'_0 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \quad (6.6.23)$$

$$\text{折射波} \quad \vec{H}_t = \hat{y} H''_0 e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)} \quad (6.6.24)$$

由 Maxwell 方程，电场可由下式求得：

$$\vec{E} = -Z (\hat{k} \times \vec{H}) \quad (6.6.25)$$

由边界条件可以得到：

$$H'_0 = \frac{Z_1 \cos \theta - Z_2 \cos \theta''}{Z_1 \cos \theta + Z_2 \cos \theta''} H_0 \quad (6.6.26)$$

$$H''_0 = \frac{2Z_1 \cos \theta}{Z_1 \cos \theta + Z_2 \cos \theta''} H_0 \quad (6.6.27)$$

式 (6.6.20)(6.6.21)(6.6.26)(6.6.27) 称为菲涅耳公式。

特殊情况下 ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ )，回到菲涅耳早期基于以太理论导出的光学折/反射振幅关系式。这有力地论证了光是电磁波。

#### 6.6.4 反射率及透射率

反射率：反射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比。

无论 S 波或 P 波，反射波和入射波处于同一媒质中，阻抗值相同，入射角与反射角也相等。

因此，反射率就是反射场与入射场振幅比例的模的平方：

$$R = \frac{\langle \vec{S}_r \rangle \cdot \hat{z}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{z}} = \begin{cases} \frac{|E'_0|^2 \cos \theta' / Z_1}{|E_0|^2 \cos \theta / Z_1} = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2 & \text{S wave} \\ \frac{Z_1 |H'_0|^2 \cos \theta'}{Z_1 |H_0|^2 \cos \theta'} = \left| \frac{H'_0}{H_0} \right|^2 & \text{P wave} \end{cases} \quad (6.6.28)$$

将四条菲涅耳公式分别代入上式可得 S, P 两种偏振情况的反射率：

$$R_S = \left| \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} \right|^2 \quad (6.6.29)$$

$$R_P = \left| \frac{Z_2 \cos \theta'' - Z_1 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta'' + Z_1 \cos \theta} \right|^2 \quad (6.6.30)$$

同理，透射率定义：

$$T = \frac{\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{z}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{z}} = \begin{cases} \frac{|E_0''|^2 \cos \theta'' / Z_2}{|E_0|^2 \cos \theta / Z_1} & \text{S wave} \\ \frac{Z_2 |H_0''|^2 \cos \theta''}{Z_1 |H_0|^2 \cos \theta} & \text{P wave} \end{cases} \quad (6.6.31)$$

### 6.6.5 正入射条件下反射的几点讨论

- 正入射条件下，无论 S 波还是 P 波，反射率均为：

$$R = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2 \quad (6.6.32)$$

当介质没有磁性时， $Z_r = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{n}$ ，此时：

$$R = \left| \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right|^2 \quad (6.6.33)$$

- 假设  $Z_1 = Z_0$ ，定义相对阻抗：

$$Z = \frac{Z_2}{Z_0} = \frac{\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (6.6.34)$$

对于 S 波，可定义反射系数：

$$r_s = \frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{E'_0}{E_0} \quad (6.6.35)$$

它描述了反射波与入射波的振幅（带相位）的比值。

### 6.6.6 Brewster 角

对常规介质，在可见光频段磁导率接近于  $\mu_0$ 。

令  $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$ ，则此时折射系数与阻抗满足：

$$Z_r = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{n} \quad (6.6.36)$$

由折射定律：

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (6.6.37)$$

对于两种偏振光，代入反射率的表达式：

$$R_S = \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} \quad (6.6.38)$$

$$R_P = \frac{\tan^2(\theta - \theta'')}{\tan^2(\theta + \theta'')} \quad (6.6.39)$$

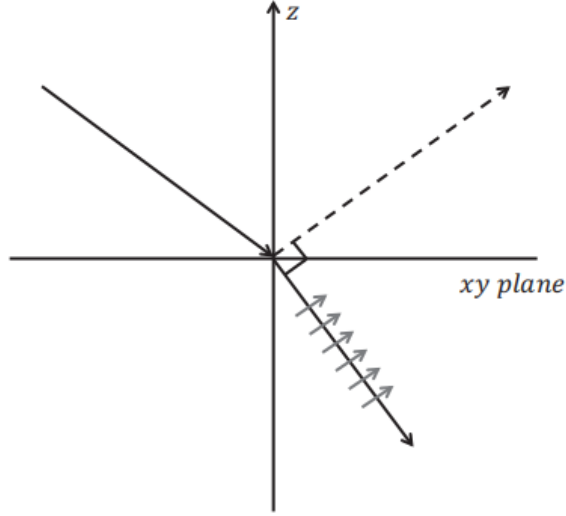
对 P 波反射率，注意到当：

$$\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2} \quad (6.6.40)$$

反射率为 0，即  $R_P = 0$ 。

即：

当反射波与折射波相互垂直时，P 极化电磁波完全不被反射！



满足式 (6.6.40) 的入射角称为布鲁斯特角，满足：

$$\theta_B = \tan^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (6.6.41)$$

理解：

当 P 偏振电磁波入射到介质表面上时，在介质内部驱动介质分子来回振荡，这产生了如上图所示的电偶极子振荡。它们的重新辐射效应产生了折射波和反射波。

当入射角等于 Brewster Angle 时，反射波垂直于折射波，因为要满足横波条件，故在与反射波矢垂直方向运动的介质分子不可能辐射出反射波，此时介质对电磁波完全透明。

## 6.7 全反射

### 6.7.1 全反射临界角

考虑电磁波从光密介质 (折射率为  $n_1$ ) 入射到光疏介质中 (折射率为  $n_2 < n_1$ )。

由折射定律  $\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{n_2}{n_1}$  可得：

$$\sin\theta'' = \sin\theta \frac{n_1}{n_2} > \sin\theta \quad (6.7.1)$$

当入射角从  $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ， $\sin\theta''$  从 0 变到一个比 1 大的数。

因此当

$$\theta = \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (6.7.2)$$

时， $\sin\theta'' = 1$ 。

当入射角  $\theta > \theta_c$  时，折射角将为一虚数，失去几何上作为角度的直观解释。

写回原始的波矢之间的关系，由式 (6.6.19) 得：

$$\begin{aligned}\cos\theta'' &= \frac{k_z''}{k''} = \frac{\sqrt{k''^2 - k_x^2}}{k''} = \frac{\sqrt{(k_0 n_2)^2 - (k_0 n_1 \sin\theta)^2}}{k_0 n_2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin\theta\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right)^2}\end{aligned}\quad (6.7.3)$$

当  $\theta > \theta_c$  时，上式为纯虚数，记为  $i\alpha$ ，其中

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right)^2 - 1} \quad (6.7.4)$$

代入菲涅耳公式得：

$$E'_{0S} = \frac{Z_2 \cos\theta - i\alpha Z_1}{Z_2 \cos\theta + i\alpha Z_1} E_{0S} \quad (6.7.5)$$

$$H'_{0P} = \frac{Z_1 \cos\theta - i\alpha Z_2}{Z_1 \cos\theta + i\alpha Z_2} H_{0P} \quad (6.7.6)$$

可见，

$$R_S = R_P = 1 \quad (6.7.7)$$

即电磁波发生全反射，因此称  $\theta_c$  为全反射临界角。

S, P 两种偏振的反射波的相位未必相同。因此当一支沿任意方向线偏振的电磁波以大于临界角的入射角被介质全反射时，其偏振图案原则上是椭圆偏振。

### 6.7.2 折射波

在发生全反射时，介质 2 中的电磁波并不为零。(为满足边值关系)

考虑 S 波，由于：

$$k_z'' = in_2 k_0 \alpha = i\beta, \quad k_x'' = k_x \quad (6.7.8)$$

故折射波电场为：

$$\vec{E}_t = \hat{y} E_0'' e^{-\beta z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (6.7.9)$$

上式表示折射波将沿 z 方向衰减，沿 x 方向传播。

可见，电场不仅沿着界面方向传播，而且被限制在表面附近，所以称这种全反射的折射波为表面波。

### 6.7.3 折射波能流

考虑 S 波，可根据式 (6.7.9) 求出介质中磁场：

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}''}{\mu\omega} \times \vec{E}'' = \frac{E_0''}{\mu\omega} (k_x z - i\beta x) e^{-\beta z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (6.7.10)$$

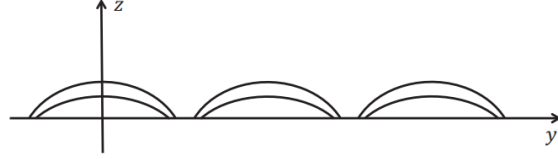
设  $E_0''$  为实数，可分别求得能流的法向分量  $S_{Pz}$  和切向分量  $S_{Px}$ ：

$$S_{Px} = \frac{(E_0'')^2 k_x}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \cos^2(k_x x - \omega t) \quad (6.7.11)$$

$$S_{Pz} = -\frac{(E_0'')^2 \beta}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \sin(k_x x - \omega t) \cos(k_x x - \omega t) \quad (6.7.12)$$

讨论：

- 在界面的法线方向上能流以频率  $2\omega$  作振动，在第二种介质中， $S_{Pz}$  对时间的平均值为零，即平均来说没有能量流入介质 2 中。
- 界面切线方向的能流  $S_{Px}$  对时间的平均值不为零，而是等于常数，它表示在  $x$  方向仍有能流。
- 根据  $S_{Px}$  和  $S_{Pz}$  的表达式知道能流的大致走向如下图。可见，在半个周期内电磁能量进入第二种介质，在另半个周期内能量重新释放出来变成反射波能量。



## 7 波导和谐振腔

### 7.1 波导管中的场方程和边界条件

波导管是一无限长的中空金属管，其截面可以是任意形状，但通常波导管在传播方向是均匀的。电磁场在波导管中只能在管内且沿着管的轴线方向传播。

#### 7.1.1 边界条件

由于良导体的  $\sigma_c$  非常大，将真实导体简化为理想导体，即：

金属体内没有电磁波，但在表面上有面电荷  $\sigma$ ，面电流分布  $\vec{J}$ 。

得到理想金属的边界条件：

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (7.1.1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \sigma \quad \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (7.1.2)$$

式中场量均为在金属表面上（介质一侧）测到的。

#### 7.1.2 场方程

研究截面为任意形状的、单连通的、且沿长度方向都相同的直波导管的情形。

若波导管中无源，且是真空，则波导中的电磁场满足波动方程：

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (7.1.3)$$

选择波导管的长度方向为  $z$  轴。

由于波导管沿  $z$  轴均匀，因此场量对  $z$  的依赖一定为  $e^{ik_z z}$ ，同时时间轴的均匀性保证时间依赖关系总是  $e^{-i\omega t}$ 。

设解为：

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0(x, y) \\ \vec{B}_0(x, y) \end{pmatrix} e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (7.1.4)$$

代入方程 (7.1.3) 得:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.1.5)$$

式中

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad k_c^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (7.1.6)$$

由于式 (7.1.5) 是从 Maxwell 方程推出的 2 次方程。检查原始 Maxwell 方程组时, 发现不同的场分量之间并不独立。

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  的  $x, y$  方向上分量公式:

$$\partial_y E_{0z} - ik_z E_{0y} = ik_0 c B_{0x} \quad (7.1.7)$$

$$ik_z E_{0x} - \partial_x E_{0z} = ik_0 c B_{0y} \quad (7.1.8)$$

$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  的  $x, y$  方向上分量公式:

$$\partial_y B_{0z} - ik_z B_{0y} = i \frac{k_0}{c} E_{0x} \quad (7.1.9)$$

$$ik_z B_{0x} - \partial_x B_{0z} = i \frac{k_0}{c} E_{0y} \quad (7.1.10)$$

利用上面四个方程可以将场的横向分量用纵向分量来表示:

$$\begin{cases} E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} [k_0 \partial_y (c B_{0z}) + k_z \partial_x E_{0z}] \\ E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} [k_0 \partial_y (c B_{0z}) - k_z \partial_x E_{0z}] \\ c B_{0x} = -\frac{i}{k_c^2} [k_0 \partial_y E_{0z} - k_z \partial_x (c B_{0z})] \\ c B_{0y} = \frac{i}{k_c^2} [k_0 \partial_y E_{0z} + k_z \partial_x (c B_{0z})] \end{cases} \quad (7.1.11)$$

上式可见, 6 个场分量只有 2 个是独立变量。

另外,  $E_{0y}$  和  $B_{0x}$  有很好的对称性, 而  $E_{0x}$  和  $B_{0y}$  也有很好的对称性。

因此只需在边界条件 (7.1.1) 下计算  $E_{0z}, B_{0z}$  所满足的方程:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \begin{pmatrix} \vec{E}_{0z}(x, y) \\ \vec{B}_{0z}(x, y) \end{pmatrix} = 0 \quad (7.1.12)$$

然后利用式 (7.1.11) 推出所有的场量形式。

### 波的模式 (偏振)

由式 (7.1.12) 可知, 当  $B_{0z} = 0, E_{0z} = 0$  时, 有:

$$E_{0x} = E_{0y} = 0 \quad B_{0x} = B_{0y} = 0 \quad (7.1.13)$$

因此非平庸解不存在, 即意味着波导管内不可能传播横电磁波 (TEM 波), 或者类似真空中的平面波。

可见波导中波的解  $B_{0z}$  和  $E_{0z}$  不能同时为 0。

下面考虑两个独立的情形:

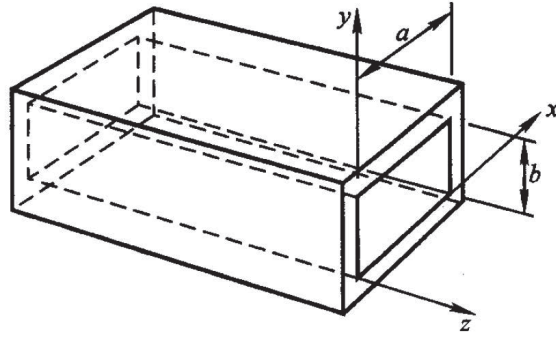
- $B_{0z} \neq 0$  而  $E_{0z} = 0 \rightarrow$  横电波 (TE 波)
- $B_{0z} = 0$  而  $E_{0z} \neq 0 \rightarrow$  横磁波 (TM 波)

这与真空中电磁波的两种偏振状态非常类似。

## 7.2 矩形波导

矩形波导是指横截面为矩形的波导。

设波导管壁为理想导体，分别考虑 TE 和 TM 两种偏振方式的波的传输行为。



### 7.2.1 TE 波

首先求出轴向分量  $B_{0z}$ ，此时方程：

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) B_{0z} = 0 \quad (7.2.1)$$

考虑理想导体边界条件 (7.1.1)：

$$E_{0x}|_{y=0,b} = E_{0y}|_{y=0,b} = B_{0x}|_{y=0,b} = B_{0y}|_{y=0,b} = 0 \quad (7.2.2)$$

根据式 (7.1.11)，在 TE 波的条件：

$$\begin{aligned} E_{0x} &= \frac{i}{k_c^2} c k_0 \partial_y B_{0z} \\ E_{0y} &= -\frac{i}{k_c^2} c k_0 \partial_x B_{0z} \\ B_{0x} &= \frac{i}{k_c^2} k_z \partial_x B_{0z} \\ B_{0y} &= \frac{i}{k_c^2} k_z \partial_y B_{0z} \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

因此式 (7.2.2) 可转化为对  $B_{0z}$  的边界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{0z} \Big|_{x=0,a} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} B_{0z} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (7.2.4)$$

由分离变量法，式 (7.2.1) 的通解：

$$B_{0z} = B_0 (\sin k_x x, \cos k_x x) \cdot (\sin k_y y, \cos k_y y) \quad (7.2.5)$$



其中

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (7.2.6)$$

再由边值条件 (7.2.4) 可得, 满足上述方程和边界条件的解为:

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (7.2.7)$$

$$k_c^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (7.2.8)$$

式中  $m, n$  为正整数或零。

将上两式代入式 (7.2.3) 得到  $\vec{E}, \vec{B}$  的全部分量:

$$\begin{cases} E_x = -i \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = i \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = 0 \\ B_x = -i \frac{m\pi}{a} \frac{k_z}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_y = -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases} \quad (7.2.9)$$

讨论:

- 色散关系:

式 (7.2.7), (7.2.8) 说明不是 (7.2.1) 中所有的  $k_c^2$  都可以给出符合边界条件的解, 只有某些特定的值才被允许。

计算波导管中传播模式对应的频率与波矢之间的关系:

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{ck_c}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad \omega_c = cK_c \quad (7.2.10)$$

- 截止频率:

(a)  $\omega < \omega_c$  时:

$k_z$  为纯虚数。

波导类似一个光波段下的金属, 电磁波不能在其中传播, 这种模式称为衰减波。

(b)  $\omega > \omega_c$  时:

$k_z$  为实数。

波导类似一个常规电介质。电磁波可以传播, 这种模式称为传播模式。

可根据电介质中电磁波传播的色散关系  $k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ , 定义波导的有效介电常数:

$$\epsilon_r = 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \quad (7.2.11)$$

(c)  $\omega_c$  给出电磁波能够传播的最低频率, 因此称为截止频率。

- 模式：

$m, n$  取不同的数值对应了波的不同模式，因为波在波导内传播时  $xy$  平面的电磁场图案保持不变。

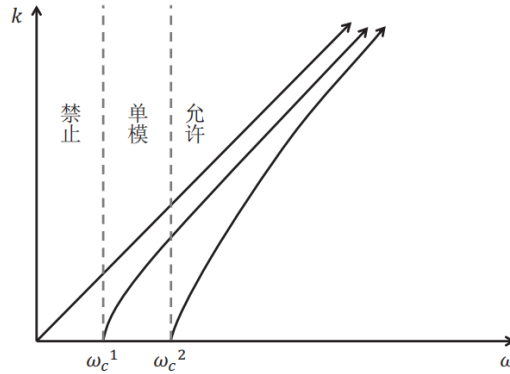
通常人们根据  $\omega_c$  的大小来标记模式的高低。

对 TE 模式来说， $m, n$  不能全部为 0。

当  $a < b$  时，TE 模的最低阶模式为  $TE_{01}$  (又记  $H_{01}$ ，称为基模)；

当  $a > b$  时基模为  $H_{10}$ 。

在基模和第一高阶模的截止频率之间，波只能以一种模式存在，如下图。



- 物理图像：

考察最常用的波型  $H_{10}$  波的场分布，由式 (7.2.9) 得：

$$\begin{cases} E_y = i \frac{ck_0}{k_c} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_x = -i \frac{k_z}{k_c} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases} \quad (7.2.12)$$

电场只有  $y$  方向分量，因此在  $y = 0, b$ ，两个边界自动满足边值条件。

为使得在  $x = 0, a$  亦满足边值条件， $E_y$  的大小必须沿  $a$  边正弦变化，中间强两边弱，形成了波长为  $2a$  的驻波。

每个模式都可以展开成几个对称的斜入射的平面波的线性叠加。

如对于  $TE_{10}$  模式，其波场 (7.2.12) 完全等价于一支波矢为  $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$  的平面波和另一支波矢为  $\vec{k} = -k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$  的平面波的叠加，即：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^+ e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \vec{E}_0^- e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)} \quad k_x = \frac{\pi}{a} \quad (7.2.13)$$

将斜入射的电磁波进行合适的线性叠加之后的波可以满足波导管的边界条件，故可以传播。这种线性叠加后的波不是常规意义下的横波。

- 能流：

由式 (7.2.9)，可见横向场分量 ( $E_x, E_y, B_x, B_y$ ) 之间无相位差，而与纵向场分量  $B_z$  之间有  $\frac{\pi}{2}$  的相位差。

这说明波导中能流的时间平均值只能沿  $z$  轴非 0。

### 7.2.2 TM 波

先此时要求出轴向分量  $E_{0z}$ ，其满足的方程为式 (7.1.12)，对应的边界条件：

$$E_{0z}|_{x=0,a} = 0 \quad E_{0z}|_{x=0,b} = 0 \quad (7.2.14)$$

因此，满足上述边界的本征值问题的解：

$$E_{0z} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (7.2.15)$$

$$k_c^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (7.2.16)$$

上述两式代入式 (7.1.11) 可得横向分量。

TM 波场：

$$\begin{cases} E_x = i \frac{m\pi}{a} \frac{k_z}{k_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = i \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k_c^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_x = -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_0}{ck_c^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_y = i \frac{m\pi}{a} \frac{k_0}{ck_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z = 0 \end{cases} \quad (7.2.17)$$

对于 TM 波， $m, n$  均不能为 0，否则  $E_{0z} \equiv 0$ 。

因此对于 TM 波，基模为  $TM_{11}$  模式。

因此对同样一个波导，其 TM 波的截止频率一定高于 TE 波的截止频率。

### 7.3 谐振腔

谐振腔是由理想导体所围成的封闭腔体。

腔中单色场满足如下方程：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad \nabla \times \vec{B} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E} \quad (7.3.2)$$

边界上电磁场满足边值条件：

$$\vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \quad \vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.3.3)$$

将一个尺寸为  $a \times b \times d$  的长方体谐振腔看作一个截面为  $a \times b$  的长度为  $d$  的空腔波导两端加上 PEC 端面。

不加端面时，空腔中的电磁波一定为波导中的电磁本征态。

取定一个模式，如  $TE_{mn}$  模式，则谐振腔中的电磁场的一个分量：

$$B_z = \left[ B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_z z} \right] e^{-i\omega t} \quad (7.3.4)$$

其他分量可以相应导出。

加上 PEC 端面后，端面对电磁波进行反射，因此波导内的场现在由两部分叠加而成：  
一是沿着  $z$  方向传播的前进波；二是沿着  $-z$  方向的反射波。  
因此一般来说：

$$B_z = \left[ B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_z z} + B'_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_z z} \right] e^{-i\omega t} \quad (7.3.5)$$

$B_0, B'_0$  两个系数应由在新加上的两个端面上的边界条件决定：

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times \vec{E} \Big|_{z=0,d} = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{B} \Big|_{z=0,d} = 0 \end{cases} \implies B_z|_{z=0,d} = 0 \quad (7.3.6)$$

在  $z = 0$  处的边界条件要求：

$$B'_0 = -B_0 \quad (7.3.7)$$

$z = d$  处的边界条件要求：

$$B_z|_{z=d} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (7.3.8)$$

故有：

$$\sin k_z d = 0 \quad (7.3.9)$$

因此， $k_z$  为：

$$k_z = \frac{p\pi}{d} \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (7.3.10)$$

注意到  $E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_y B_{0z}$ ,  $E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_x B_{0z}$ ，发现另一个边界条件  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$  在  $z = 0$  和  $z = d$  处自动满足。  
得到矩形谐振腔内场的空间部分为：

$$\begin{cases} B_{0x} = -2iB_0 \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{d} \frac{1}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0y} = -2iB_0 \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{d} \frac{1}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0z} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0x} = 2B_0 \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0y} = -2B_0 \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (7.3.11)$$

讨论：

- 磁场表达式和电场表达式之间相差一个因子  $i$ ，这表明电场和磁场在时间上存在着  $\frac{\pi}{2}$  的相位差。  
这种形式的波与等离子体中的具有虚波矢的电磁波行为类似，可以预计，这里面平均没有能流。
- 由于  $k_z = \frac{p\pi}{d}$ ，且  $k_z^2 = k_0^2 = k_c^2$ ，于是得：

$$k_0^2 = k_c^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \quad (7.3.12)$$

所以，谐振腔允许存在的谐振频率和波长分别为：

$$\omega = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \quad (7.3.13)$$

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}}} \quad (7.3.14)$$

- 谐振腔中的场用三个脚标  $m, n, p$  标记，每一组  $(m, n, p)$  的值决定一种振荡模式。

对 E 波记为  $E_{mnp}$ ，H 波记为  $H_{mnp}$ ，且  $E_{mnp}$  和  $H_{mnp}$  中的脚标可以取各种组合，使得谐振频率相等，但场的分布不同，此时说  $E_{mnp}$  和  $H_{mnp}$  是简并的。

另外，在针对某一个方向写出的 TM 模式可能是另外一个方向的 TM 模式。

由式 (7.3.11) 可以看出，对 TE 模式， $p$  不能为 0，否则谐振腔中的电磁场全部为 0。

对 TM 模式的共振腔模分析发现， $p$  可以为 0，但  $m, n$  都不能为 0。

因此，综合 TE, TM 的分析结果，谐振腔中  $m, n, p$  三个指标中只能有一个不是 0。

故谐振腔的最低价模式为 (110), (101) 或者 (011)。

- 在共振腔中加一个源，激发各个频率的波。当在腔壁凿一些小孔，或是将个别腔壁换成不是完全透射的，这时电磁波就会从这些地方耦合出去。因为共振腔中只允许分立的模式存在，发射出去的电磁波就具有很好的选频性能，且辐射强度很高。另外电磁谐振腔也可以用到其它微波系统中，做选频，放大等功能。
- 一个立方状的谐振腔，其能允许的最低阶的腔模式为  $TE_{011}$ ，对应的波长为  $\lambda = \sqrt{2}a$ 。

这就意味着，对常规的谐振腔，要想实现某一个波长的谐振功能，其尺度必须大于某一个特定的大小。若要实现一个较长波的频率，谐振腔就要做的很大，对我们实际应用不利。应用电磁特异介质改变腔壁的反射性能，我们可以改变腔的谐振条件，从而打破这一尺度限制。

## 8 电磁波的辐射

### 8.1 势、规范、及其满足的方程

#### 8.1.1 势的定义

对于确定的电荷分布  $\rho(\vec{r}, t)$  和电流分布  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ，求它的辐射电磁场就是求解 Maxwell 方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (8.1.1)$$

根据第三式，可定义矢势  $\vec{A}$ ：

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (8.1.2)$$

将其代入第二式，可得：

$$\nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \quad (8.1.3)$$

因此可定义标势，满足：

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\nabla \varphi \implies \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla \varphi \quad (8.1.4)$$

### 8.1.2 规范条件

式 (8.1.2) 与 (8.1.4) 所定义的势并不唯一。

给定任意一个标量函数  $\Lambda(\vec{r})$ ，由此定义一对新的标势和矢势：

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \quad (8.1.5)$$

将上式代入式 (8.1.2) 与 (8.1.4)，发现  $\{\vec{A}', \varphi'\}$  给出与  $\{\vec{A}, \varphi\}$  完全一样的  $\vec{E}, \vec{B}$  场。

经典电动力学范畴内， $\vec{E}, \vec{B}$  对应真实的物理场， $\{\vec{A}, \varphi\}$  并不对应真实的物理场。

因此对于同样的物理体系， $\{\vec{A}, \varphi\}$  的选择并不唯一，必须在某一个条件的约束下才可能为唯一确定下来。这个条件称为规范条件。

通常使用的规范是库仑规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (8.1.6)$$

和洛伦兹规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (8.1.7)$$

洛伦兹规范在静电静磁条件下与库仑规范一致。

### 8.1.3 势所满足的方程

将式 (8.1.2) 与 (8.1.4) 代入 Maxwell 方程中的第一式和第四式，得到对势的方程：

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (8.1.8)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (8.1.9)$$

利用 Lorentz 规范条件可将其化简成相当对称而标准的有源波动方程的形式：

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (8.1.10)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (8.1.11)$$

因此，首先根据源的情况求解上两式得到势，然后再由势求出电磁场。

## 8.2 推迟势

由于  $\vec{A}$  和  $\varphi$  满足同样的方程, 因此只需讨论一个标量方程:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad (8.2.1)$$

求解上述方程的标准方法是定义一个格林函数, 满足:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (8.2.2)$$

这个函数即为, 在  $t'$  时刻在  $\vec{r}'$  处做一个单位强度的扰动时, 空间所激发的场。

定义  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', T = t - t'$ , 当格林函数已知后, 对任意的电荷分布, 其电势可以表示为:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\vec{R}, T) \rho(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \quad (8.2.3)$$

下面求解格林函数, 利用 Fourier 变换可得:

$$G(\vec{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega T} d\vec{k} d\omega \quad (8.2.4)$$

$$\delta(\vec{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega T} d\vec{k} d\omega \quad (8.2.5)$$

代入 (8.2.2) 可解得  $(\vec{k}, \omega)$  空间的格林函数的解为:

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - k_0^2} \quad (8.2.6)$$

式中

$$k_0^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \quad (8.2.7)$$

因此, 将 (8.2.6) 带回 (8.2.4) 可得  $(\vec{R}, T)$  空间的格林函数:

$$G(\vec{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega T}}{k^2 - k_0^2} d\vec{k} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int G(\vec{R}, \omega) d\omega \quad (8.2.8)$$

求解上式积分, 先计算对  $k$  的积分:

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{k^2 - k_0^2} d\vec{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{ikR \cos \theta}}{k^2 - k_0^2} k^2 dk \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 i R} \int_0^\infty \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{k^2 - k_0^2} k dk \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 i R} \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{k}{k^2 - k_0^2} \right) \cdot (e^{ikR} - e^{-ikR}) dk \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^2 i R} \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right) \cdot (e^{ikR} - e^{-ikR}) dk \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^2 i R} \times \left\{ \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right) e^{ikR} dk - \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right) e^{-ikR} dk \right\} \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

上式积分中有奇点，若想得到收敛的结果，必须假设  $k_0$  具有一个很小的虚部。

根据“因果关系”，在正常介质中这个虚部必须为正。

“因果关系”要求电磁波在介质中向前传播（能流的方向）时应当产生焦耳热从而使得能量被耗散。

而  $k_0$  是介质中向前传播的波矢，假设  $k_0 = \text{Re}(k_0) + i\delta$ ，则

$$e^{ik_0 r} e^{-i\omega t} = e^{i\text{Re}(k_0)r} e^{-\delta r} e^{-i\omega t} \quad (8.2.10)$$

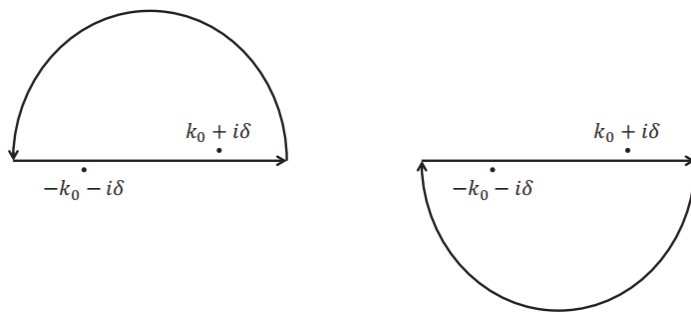
因此  $\delta$  一定为正。

Note:

- 这里考虑的就是在实轴上的全积分，不是主轴积分 (P)，因此一定要选择合适的路径；
- 由式 (8.2.7) 可知，当处于一定介质中时（如空气），因为介质的  $\varepsilon, \mu$  一定因为耗散而有虚部，则  $k_0$  一定带有虚部！即是真空，也会因为涨落而对电磁波有耗散。因此给  $k_0$  一个小的虚部不仅是数学的要求，还是物理的必然！

对上面的两个积分分别选择如图所示的闭合回路，将被积函数解析延拓到复平面，则利用留数定理容易推出

$$G(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{4(2\pi)^2 i R} e^{ik_0 R} \times 2\pi i - \frac{1}{4(2\pi)^2 i R} e^{ik_0 R} \times (-2\pi i) = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \quad (8.2.11)$$



在式 (8.2.11) 中加入时间振荡因子  $e^{-i\omega T}$ ，则发现这个解对应这样一个单频波  $\frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R e^{-i\omega T}}$ 。

物理意义：一个点源的“出射波”，即从源点向外发射的球面波。

显然这是符合“因果关系”的解。若选择  $k_0$  的虚部为负，则结果为不符合因果关系的“会聚波”。

进而将式 (8.2.11) 代入式 (8.2.8) 可得最终的格林函数：

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{R} \delta\left(\frac{R}{c} - T\right) \rho(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{[\rho]}{R} d\tau' \quad (8.2.12)$$

式中方括号  $[\ ]$  表示  $t' = t - \frac{R}{c}$ ，同理可得：

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{R} d\tau' \quad (8.2.13)$$

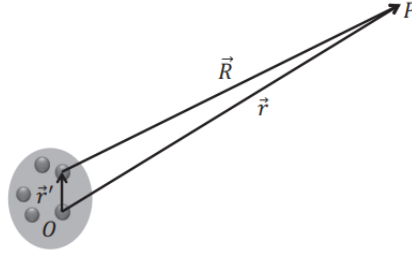
注意到  $\varphi, \vec{A}$  的表达式在形式上与静态时的解一致，只是在动态时  $t$  时刻的辐射场是由此时刻前的一个时刻的扰动贡献的，而这个推迟的时间正是从源到观测点光信号传播所需的时间。

这即为推迟势，物理依据是因果关系。



## 8.3 多极辐射

### 8.3.1 推迟势的多极展开



讨论远离源的场，即  $r \gg l$ ， $l$  为源的线度。

将  $\vec{R}$  在  $\vec{r}$  处展开为级数，即：

$$\frac{[\rho]}{R} = \frac{[\rho]}{R} \Big|_{R=r} + (\vec{R} - \vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \left( \frac{[\rho]}{R} \right) \Big|_{R=r} + \dots = \frac{[\rho]_0}{r} - \vec{r} \cdot \nabla \frac{[\rho]_0}{r} + \dots \quad (8.3.1)$$

式中  $[\rho]_0$  表示  $\rho(\vec{r}, t - \frac{r}{c})$ ，后面省略脚标 0。

同理：

$$\frac{[\vec{j}]}{R} = \frac{[\vec{j}]}{r} - \vec{r} \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} + \dots \quad (8.3.2)$$

故

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int \frac{[\rho]}{r} d\tau' - \int \vec{r} \cdot \nabla \frac{[\rho]}{r} d\tau' + \dots \right) \quad (8.3.3)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' - \int \vec{r} \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' + \dots \right) \quad (8.3.4)$$

### 8.3.2 电偶极辐射

$\varphi$  展开式中的第一项：

$$\varphi_0 = \int \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int [\rho] d\tau' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.3.5)$$

$Q$  是系统的总电荷量，一般情况下不随时间变化，没有辐射。

第二项：

$$\varphi_1 = - \int \vec{r} \cdot \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau' = - \nabla \cdot \frac{[\vec{p}]}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.3.6)$$

式中  $[\vec{p}] = \int \vec{r} [\rho] d\tau'$ ，表示系统总的电偶极矩。

$\vec{A}$  展开式中的第一项：

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int [\vec{v}\rho] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \sum_i q_i \vec{v}_i \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \left[ \sum_i q_i \vec{r}_i \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} [\vec{p}] \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

因此电偶极矩系统所产生的  $\vec{A}$  和  $\varphi$  为式 (8.3.6) 和 (8.3.7)。

考虑单频的辐射源：

$$\rho(\vec{r}', t') = \rho(\vec{r}')e^{-i\omega t'}; \quad \vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega t'} \quad (8.3.8)$$

联系  $\vec{B}$  与  $\vec{A}$  的公式，得到电偶极辐射场中的磁场部分为：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \quad (8.3.9)$$

电场也可以由势推出。但在无源区，电场可以更简单地由磁场导出：

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \quad (8.3.10)$$

分析：

$$\nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} = (\nabla \times [\vec{p}]) \frac{1}{r} + \left[ \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times [\vec{p}] \right] \quad (8.3.11)$$

考虑第一项，由于  $[\vec{p}] = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} e^{\frac{i\omega r}{c}}$ ，则微分运算可以代换成：

$$\nabla \leftrightarrow i\frac{\omega}{c} \vec{e}_r = ik\vec{e}_r \quad (8.3.12)$$

再考虑第二项，因为  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ ，最终式 (8.3.11) 变为：

$$i\frac{\omega}{c} \left( \vec{e}_r \times [\vec{p}] \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \vec{e}_r \times [\vec{p}] \frac{1}{r} \right) \quad (8.3.13)$$

因此， $\frac{\omega}{c}$  和  $\frac{1}{r}$  的比较决定了哪一项大，哪一项小。

下面分三个区域讨论。

- 近区：

$r \ll \lambda$ ，但仍满足  $r \gg l$ 。

此时公式 (8.3.9) 和 (8.3.10) 中的旋度算子只要对分母运算即可。

因为每对分母运算一次得到一个  $\frac{1}{r}$  因子，而对分子运算得到一个  $\frac{1}{\lambda}$  因子，显然  $\frac{1}{r}$  比  $\frac{1}{\lambda}$  贡献大。

于是得到近区的场强：

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r^2} \vec{e}_r \times [\vec{p}] \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot [\vec{p}]) - [\vec{p}]] \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

此时电场和静态时的电偶极子的电场形式上完全一样，只不过时间上推迟了一个辐射时间。

- 远区：

$r \gg l$ ，而且  $r \gg \lambda$ 。

此时式 (8.3.11) 第一项远大于第二项。

因此在计算电磁场时，只需计算  $\nabla$  算子作用到  $[\vec{p}]$  上即可，无需计算其作用到  $\frac{1}{r}$  上。这等价于做代换 (8.3.12)。

因此，远区场强的公式：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi cr} \vec{e}_r \times [\vec{p}] \\ \vec{E} &= -\frac{\omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{p}])\end{aligned}\quad (8.3.15)$$

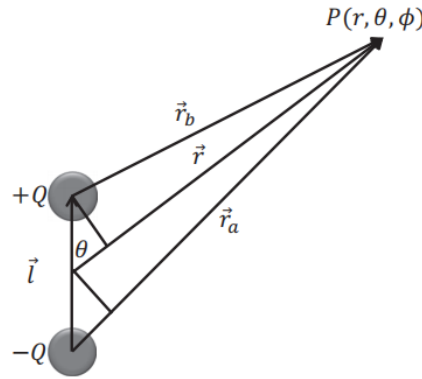
• 中间区域：

$r \gg l$ ，但  $r \approx \lambda$ 。

这时必须同时保留对分母运算的项和对分子运算的项。

这是因为对两者运算得到的因子  $\frac{1}{r}$  和  $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\lambda}$  是同数量级。

例如图所示，两个金属小球分别带电荷  $+Q$  和  $-Q$ ，它们之间距离为  $l$ ，两小球的电荷的数值和符号同步地周期性变化，这就是所谓的赫兹振子。试分析赫兹振子辐射场的能流特点。



取球坐标系， $+Q$  和  $-Q$  处在  $z$  轴上，设  $Q = Q_0 e^{-i\omega t'}$ ，则体系的电偶极矩为：

$$\vec{p} = lQ\vec{e}_z = lQ_0 e^{-i\omega t'} \vec{e}_z = p_0 e^{-i\omega t'} \vec{e}_z \quad (8.3.16)$$

将它们代入偶极辐射的远区公式，有

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi cr} \sin\theta e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} (-\vec{e}_\phi) \\ \vec{E} = -\vec{e}_r \times (c\vec{B}) = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin\theta e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} (-\vec{e}_\theta) \end{cases} \quad (8.3.17)$$

由上式可知，场正比于  $\frac{1}{r}$ ，电场只有  $\vec{e}_\theta$  方向分量，磁场只有  $\vec{e}_\phi$  方向分量，且  $cB_\phi = E_\theta$ 。辐射场在偶极矩方向上为零。辐射能流的平均值为：

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} (\vec{E} \times \vec{B}^*) = \frac{c}{2\mu_0} |B|^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \vec{e}_r \quad (8.3.18)$$

讨论：

- 辐射能流的特点：正比于  $\frac{1}{r^2}$ ，偶极矩的平方， $\omega$  的四次方；
- 这说明辐射能力在低频时较弱，而在高频时高；

- 辐射能流正比于  $\frac{1}{r^2}$  是一个稳定辐射问题的必然要求，如若不然，则必然在空间产生能量积累，从而辐射问题不稳定。也正因为如此，辐射能流在某一个特定的立体角组成的通道内保持相同。

讨论辐射问题时，常用角分布的概念来描述体系向空间不同方向辐射能量的情况，其定义为：

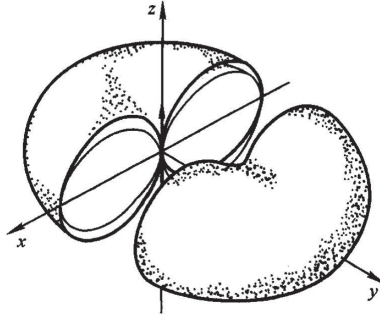
$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\langle \vec{S}_P \rangle \cdot d\vec{S}}{d\Omega} = \frac{\langle \vec{S}_P \rangle \cdot r^2 d\Omega}{d\Omega} = \langle \vec{S}_P \rangle \cdot r^2 \quad (8.3.19)$$

这表示在  $\theta, \phi$  方向单位立体角内的平均辐射能流。

此时：

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \sin^2 \theta \quad (8.3.20)$$

辐射角分布的情况如下图，在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的方向辐射最强，在  $\theta = 0$  或  $\pi$  的方向无辐射。



### 8.3.3 磁偶极辐射

考虑  $\vec{A}_2$  项：

在远场 ( $r \gg \lambda$ ) 及单频条件下，只保留  $\nabla$  对推迟势的作用，则：

$$\begin{aligned} \vec{A}_2 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \left( i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r \right) \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' \\ &= -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi r^2 c} \vec{r} \cdot \int \vec{r}' [\vec{j}] d\tau' \\ &= -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \left[ \int (\vec{r}' \vec{j} + \vec{j} \vec{r}') d\tau' + \int (\vec{r}' \vec{j} - \vec{j} \vec{r}') d\tau' \right] \end{aligned} \quad (8.3.21)$$

上式 [] 中第一项在静磁条件下为 0，当电流随时间谐变时，其为电四极子的贡献。

第二项可改写为：

$$\begin{aligned} \vec{A}_m &= -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \cdot (\vec{r}' \vec{j} - \vec{j} \vec{r}') d\tau' \\ &= -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{r}') d\tau' \\ &= \frac{i\mu_0 \omega}{4\pi r^2 c} \vec{r} \times [\vec{m}] \end{aligned} \quad (8.3.22)$$

即为磁偶极子的贡献。

其它多极展开式中没有磁偶极子的贡献。因此，磁偶极辐射所对应的矢势即为式 (8.3.22)，标势为 0。

带入势和场的关系，即可求出磁偶极子的  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$ ：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}_m = i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r \times \vec{A}_m = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c^2 r}\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{m}]) \\ \vec{E} = -\vec{e}_r \times (c\vec{B}) = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi cr}\vec{e}_r \times [\vec{m}] \end{cases} \quad (8.3.23)$$

## 8.4 线型天线辐射

线型天线是最典型最常见的天线结构，它具有较强的辐射能力和较好的辐射方向性。

考虑输入到天线中的信号随时间作简谐变化，则天线中的电流线密度一定也随时间作简谐变化。

假设天线由理想导体组成，则电流只在导体表面且满足  $\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$ 。

进一步考虑磁场，满足波动方程：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{H} = 0 \quad (8.4.1)$$

其解一定是  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  的线性组合 ( $\vec{k}$  可以取模为  $k = \frac{\omega}{c}$  的所有值)。

当天线很细时，可以只考虑  $\vec{k} = \pm k\hat{z}$  的两支波的贡献，故  $\vec{H}$  以及  $\vec{J}$  的形式一定只是  $e^{i(\pm kz - \omega t)}$  的线性组合。

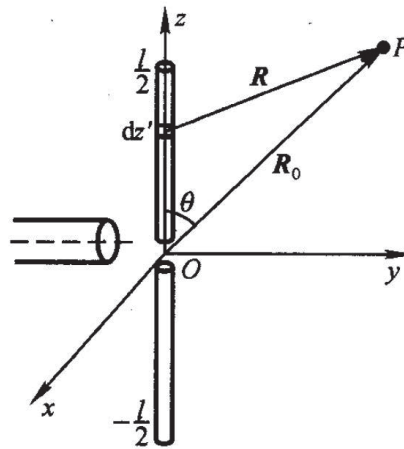
设信号沿天线的中点输入，取此点为坐标的原点，电流对此点是对称的，在天线的两端点 ( $z = \pm \frac{l}{2}$ ) 处电流为 0。故电流分布：

$$I(z', t') = I_0 e^{-i\omega t'} \sin \left[ k \left( \frac{l}{2} - |z'| \right) \right] \quad (8.4.2)$$

便可计算矢势  $\vec{A}$ ：

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\sin \left( \frac{kl}{2} - k|z'| \right)}{R} dz' \quad (8.4.3)$$

如图，图中  $\vec{R}_0$  记为  $\vec{r}$ ：



$$R \approx r - z' \cos \theta \quad (8.4.4)$$

将上式代入式 (8.4.3)，在远场条件 ( $r \gg z', r \gg \lambda$ ) 下得：

$$\begin{aligned} A_z &\approx \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z'|\right) e^{-ikz'\cos\theta} dz' \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k r} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta} \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

由  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  求得  $\vec{B}$ 。考虑远场时作代换  $\nabla \leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r$ ，则：

$$\vec{B} = ik\vec{e}_r \times \vec{A} = -ikA_z \sin\theta \vec{e}_\phi \quad (8.4.6)$$

电场容易求得：

$$\vec{E} = -\hat{k} \times (c\vec{B}) = -ickA_z \sin\theta \vec{e}_\theta \quad (8.4.7)$$

由  $\vec{E}, \vec{B}$  即可求出辐射能流：

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}^*) = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta} \right]^2 \vec{e}_r \quad (8.4.8)$$

平均角分布：

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \left\langle \frac{\vec{S}_P \cdot d\vec{S}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta} \right]^2 \quad (8.4.9)$$

它依赖于  $\frac{kl}{2}$  的值。

讨论：

- 当天线长度远小于波长时， $kl \ll 1$ ，可以将上式展开得：

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2} \frac{(kl)^4 \sin^2\theta}{64} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} \sin^2\theta \times \left( \frac{I_0 l^2}{4c} \right)^2 \quad (8.4.10)$$

对比发现，此时天线等价于一个电偶极子，强度为  $p = \frac{I_0 l^2}{4c}$ 。

显然对于短天线，天线越长，辐射能力越大。

- 当天线再增长到  $kl \ll 1$  条件不满足时，天线的辐射能力随  $kl$  做周期性振荡。

通常人们将信号发生器与天线中间空隙的两端分别相连，给定一个定幅的输入信号，测量被反射回来的信号强度 (S11)，显然这个量越小，说明辐射出去的功率越强，因此 S11 的极小值就标示着天线辐射的一个极大值。

研究发现，当  $\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  时，天线的辐射能力达到极值。特别是半波电线 ( $l = \frac{\lambda}{2}$ ) 辐射能力最强。

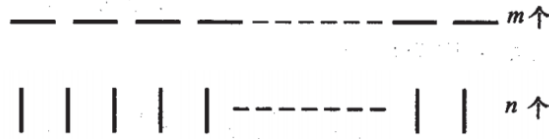
- 随着  $\frac{l}{\lambda}$  的增大，辐射图案与偶极子辐射图案有了明显的区别，开始有分叉出现，并开始朝天线方向集中。真正有用的天线就是既有很好的辐射效率 (S11 极小)，又有很好的辐射图案的半波天线。

## 8.5 天线阵

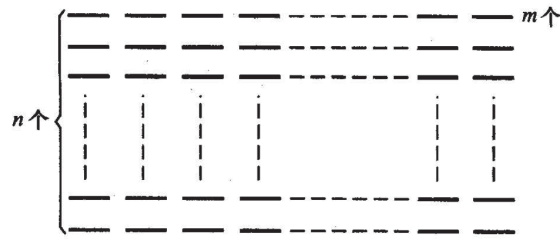
天线最重要的两个品质是辐射图案和辐射效率。

虽然半波天线的辐射效率比较高，但它在  $\phi$  角上没有任何的定向性，在  $\theta$  角上有一定的定向性，但不是很好。在实际应用中，为了获得更好的辐射方向性，我们常把一系列天线排布成天线阵，利用干涉效应来获得较好的方向性。最常用的是把半波天线当作基元天线列阵。

惯常的排布有两种：一种是线性排列，另一种是横向排列，如下图：

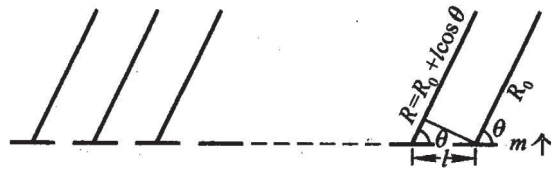


还有  $m \times n$  方阵，如下图。



讨论在线性排列的情况下，它的辐射方向性同单一的半波天线有什么不同：

如下图， $m$  个半波天线线性排列，它们所激发的场到达远处某点的路程不同，使得它们间有相位差，从而发生干涉使辐射具有方向性。



每个天线与其邻近的天线之间的路程差为  $acos\theta$ ，( $a$  为两天线间的距离)，若第一个天线的辐射场为：

$$\vec{E}_1 = \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \quad (8.5.1)$$

则第二个半波天线的辐射场为：

$$\vec{E}_2 = \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \quad (8.5.2)$$

由于  $R_2 \approx R_1 + acos\theta$ ，在远场条件下 ( $R \gg \lambda$ )，有：

$$\vec{E}_2 \approx \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_1}}{R_1} e^{ikacos\theta} = \vec{E}_1 e^{ikacos\theta} \quad (8.5.3)$$

定义  $\alpha = kacos\theta$ ，则同理可得第三个半波天线的场为：

$$\vec{E}_3 \approx \vec{E}_1 e^{i2\alpha} \quad (8.5.4)$$

依此类推， $m$  个半波天线产生的总场为：

$$\vec{E}_{total} = \sum_{N=0}^{m-1} \vec{E}_1 e^{iN\alpha} = \vec{E}_1 \frac{1 - e^{im\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \quad (8.5.5)$$

可见它的辐射角分布比单个半波天线的角分布多了一个因子：

$$f(\alpha) = \left| \frac{1 - e^{imk\alpha\cos\theta}}{1 - e^{ik\alpha\cos\theta}} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{m}{2}k\alpha\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}k\alpha\cos\theta\right)} \quad (8.5.6)$$

因此总的辐射角分布：

$$f_{total}(\theta, \phi) = f_{single}(\theta, \phi) \cdot f(\alpha) \quad (8.5.7)$$

即在原有的单个天线的角分布的图案基础上加上一个干涉后的“形状因子”。

讨论：

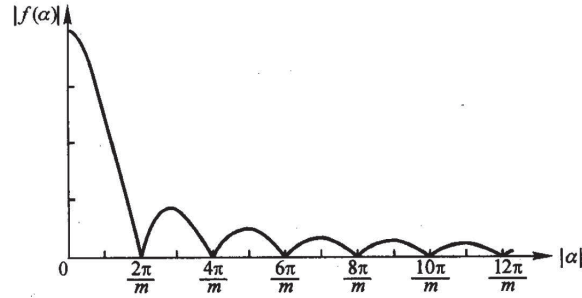
- 当  $\alpha = 0$  时  $f(\alpha)$  有极大值，值为  $f(0) = m^2$ 。

这说明向前传播的方向仍然是体系辐射最强的方向，而且辐射能力增强了  $m^2$  倍。

理解：因为干涉相应使得此方向的所有天线都是相干叠加，场的振幅增强了  $m$  倍，功率增强  $m^2$  倍。

- 当  $\alpha = \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{(m-1)2\pi}{m}$  时有极小值，分布情况如下图。

两个极小之间有个极大值，但高阶的极大值急剧减少。



- 主极大在  $\alpha = 0$  处，第一个极小在  $\alpha = \frac{2\pi}{m}$  处，即  $k\alpha\cos\theta = \frac{2\pi}{m}$  处。

若令  $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ ，则  $k\alpha\sin\psi = \frac{2\pi}{m}$ 。

$m$  很大时主极大峰所处的角度范围为：

$$|\psi| \leq \sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{mka}\right) \approx \frac{\lambda}{ma} \quad (8.5.8)$$

可见， $m$  大则  $\psi$  角度小，这表示  $\theta$  的方向性很强。



## 9 相对论电动力学

### 9.1 狭义相对论的时空观

#### 9.1.1 绝对时空观

- 相对性原理：

物理世界的规律是通过时间和空间坐标来描述的，而物理规律本身应当与（惯性）坐标系的选取无关，这就是说，在不同的惯坐标系中，物理规律表述的形式始终保持不变。

- 力学规律：

牛顿力学的基本方程：

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (9.1.1)$$

- 伽利略变换：

两个相对运动的惯性坐标系  $S$  和  $S'$  之间由伽利略变换联系起来：

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (9.1.2)$$

将式 (9.1.2) 代入 (9.1.1) 发现力学规律在不同的坐标系中保持相同，因此，牛顿力学，伽利略变换与相对性原理和谐统一。

#### 9.1.2 绝对时空观的困难

电磁波的运动速度  $c$  是在哪个坐标系中测得的？

迈克耳孙、莫雷的干涉实验测量了不同条件下测量点相对于以太系的运动速度。然而实验测不到任何的以太漂移速度。

换言之，在任何惯性坐标系中测得的光速是同一个常数  $c$ ，与传播方向无关，与光源运动的速度无关。

这个结果揭示了描述电磁规律的麦克斯韦方程组，与伽利略变换以及相对性原理不和谐。

#### 9.1.3 爱因斯坦的选择

爱因斯坦提出两条基本假设：

- 相对性原理：自然规律在不同惯性系中的表达式相同。
- 光速不变原理：

光速与光源的运动无关，与光的传播方向无关，在不同的惯性系中观察到的真空中的光速相同。

在这个基础上，Maxwell 方程组在所有坐标系下都保持不变。

#### 9.1.4 洛伦兹变换

考虑在  $t = t' = 0$  时,  $S$  与  $S'$  重合,  $S'$  系相对于  $S$  系沿  $x$  轴以速度  $\vec{v}$  运动。

假设此时从原点发射一束光波, 光沿各方向的传播方向都是  $c$ 。

所以  $t$  时刻  $S$  系中光到达的位置满足:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (9.1.3)$$

存在两事件:

- 1 发射  $(0,0,0,0)$
- 2 接收  $(x,y,z,t)$

在  $S'$  看来, 同样的事件应该用如下时空点描述:

- 1 发射  $(0,0,0,0)$
- 2 接收  $(x', y', z', t')$

根据光速不变原理, 变换后的  $(x', y', z', t')$  必须满足:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (9.1.4)$$

基于变换后满足式 (9.1.3) 和 (9.1.4) 这个基本约束。

洛伦兹提出如下 (线性) 时空变换:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (9.1.5)$$

此时在  $S'$  系中观测事件传播的速度仍为  $c$ , 而且是各向同性的。

引入一个由三维实空间和虚的时间轴构成的四维空间 (闵可夫斯基空间), 一个时空点在这个空间中的表示为:

$$x_\mu = (x, y, z, ict) \quad (9.1.6)$$

则 Lorentz 变换可以写成:

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{爱因斯坦求和约定}) \quad (9.1.7)$$

变换矩阵:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (9.1.8)$$

其中  $\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 。

易证  $\alpha$  是正交矩阵, 即:

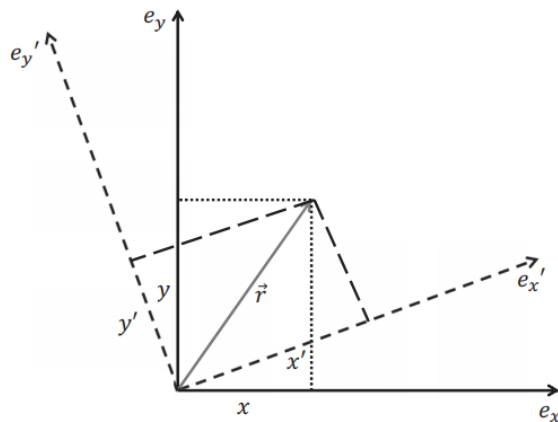
$$\alpha \cdot \alpha^T = I \quad \alpha^{-1} = \alpha^T \quad (9.1.9)$$

## 9.2 物理规律协变性的数学形式

相对性原理要求物理规律在不同的惯性坐标系下保持不变，而不同惯性系之间的物理量之间的关系由洛伦兹变换给出，这就要求描述物理规律的方程形式一定要在 Lorentz 变换下保持不变。

### 9.2.1 物理量按时空变换性质分类

考虑三维空间中的一个纯坐标转动变换下，比如将坐标系以  $z$  轴为转轴转动  $\theta$  角度，如下图所示。



- 任意一点到原点的空间距离  $r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$  在变换下保持不变，这就是一个标量。
  - 位置矢量  $\vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$  经过坐标旋转变换后变成  $\vec{r}' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ 。
- $\{x_1, x_2, x_3\}$  与  $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$  两组数之间的变换关系：

$$x'_i = T_{ij}x_j \quad (9.2.1)$$

其中，转动矩阵的形式为：

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.2.2)$$

易证，所有三维空间的矢量的三个分量都满足上述变换关系。

把满足式 (9.2.1) 变换关系的三个数组成的物理量叫做矢量。

- 同理，二阶张量中的 9 个元素在坐标变换下满足：

$$D'_{ij} = T_{il}T_{jk}D_{lk} \quad (9.2.3)$$

### 9.2.2 物理量的四维时空变换

将上面对三维坐标变换的定义推广到四维时空变换。

- 标量:

一个 Lorentz 变换下保持不变的物理量叫做标量。

正交性质 (9.1.9) 显示, 四维矢量的标积是个变换不变量:

$$x'_\mu x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu k} x_\nu x_k = \delta_{\nu k} x_\nu x_k = x_\nu x_\nu \quad (9.2.4)$$

因此这是个“四维标量”。

通常将两个时空点之间的四维距离叫做间隔:

$$\Delta s^2 = -\Delta x_\mu \Delta x_\mu = (c\Delta t)^2 - |\Delta \vec{r}|^2 \quad (9.2.5)$$

它描述的是两个事件之间的时空间隔, 是个不依赖于惯性系的“标量”。

在相对论时空观中, 时间空间耦合在一起, 单独讨论两个事件的时间和空间间隔都没有意义。

- 矢量 (一阶张量):

定义一个由四个数量定义的集合  $\{V_x, V_y, V_z, V_4\}$ , 若这些量在 Lorentz 变换下满足与四维坐标一样的变换关系:

$$V'_\mu = \alpha_{\mu\nu} V_\nu \quad (9.2.6)$$

则这样的集合称为一个四维矢量 (或一阶张量)。

- 二阶张量:

若一物理量用  $4 \times 4$  矩阵  $T_{\mu\nu}$  表示, 在坐标变换下  $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$  下, 其变换关系为:

$$T'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu k} \alpha_{\nu l} T_{kl} \quad (9.2.7)$$

则称此物理量为二阶张量。

- 例子:

①  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  的变换行为为一阶张量:

由于:

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \implies x_\nu = (\alpha^{-1})_{\nu\mu} x'_\mu = (\alpha^T)_{\nu\mu} x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\mu \quad (9.2.8)$$

因此,

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (9.2.9)$$

上式显示  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right\} = \left\{ \nabla, -i \frac{\partial_t}{c} \right\}$  就是一个四维矢量。

② 任意两个四维矢量的标积为四维标量:

比如四维间隔就是两个 (四维时空位置) 矢量的标积。

同理，因为  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  是一个矢量，故有：

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \alpha_{\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square^2 \quad (9.2.10)$$

即  $\square^2$  算符为四维不变量。

由此推知，若  $A_\mu$  为四维矢量，则此矢量的四维散度  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu$  为一不变量，即：

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \alpha_{\mu\beta} A_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\nu \quad (9.2.11)$$

### 9.2.3 物理规律的协变性

相对性原理要求，物理规律在任何一个惯性参考系内都是相同的，这就意味着在坐标变换下，表示物理规律的等式的形式应保持不变。

如果等式两边的物理量是由同阶的张量构成的，那么这种形式的方程一定满足相对性原理，我们称这种形式的方程式为协变式。

例如，某一物理规律可表示为如下形式：

$$A_\mu = B_\mu \quad (9.2.12)$$

式中  $A_\mu, B_\mu$  分别代表  $S$  系中这一物理过程的不同物理量。当把它变换到  $S'$  系时，由于  $A_\mu, B_\mu$  都是一阶张量（即矢量），其变换规律分别为：

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu \quad (9.2.13)$$

$$B'_\mu = \alpha_{\mu\nu} B_\nu \quad (9.2.14)$$

故：

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu = \alpha_{\mu\nu} B_\nu = B'_\mu \quad (9.2.15)$$

由此可见，要判断规律是否满足相对性原理，只要看其物理方程是否为 Lorentz 协变。

反之，在我们构造任何新规律时，原则上都应当使其满足 Lorentz 协变。

### 9.2.4 速度及四维速度矢量

假定在  $S$  系中考察一个物体的运动，其速度的定义是  $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 。

现在假定  $S'$  系相对  $S$  系以速度  $v$  沿着  $x$  轴运动，则在  $S'$  系中同一粒子的速度定义为  $\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ 。

因为在相对论时空观中，时间和空间是一起变换的，由 Lorentz 公式得：

$$\begin{cases} dx' = (dx - vdt)\gamma_v \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v \end{cases} \quad (9.2.16)$$

用上面第 4 个方程除前 3 个，得：

$$\begin{cases} u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx - vdt)\gamma_v}{\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \quad (9.2.17)$$

上式决定了两个参考系中速度的变换，即相对论中的速度合成法则。

在极限  $v \ll c$  的情况下（同时要求  $|\vec{u}| \ll c$ ），可将分母展开，上式变成经典力学中速度的矢量合成法则，即

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad (9.2.18)$$

可知：

- 水波和电磁波都是波，换一个坐标系观测水波，其速度变化甚至变为 0，但电磁波却从来不变。

原因是水波的运动  $u \ll c$ ，而电磁波的速度  $u = c$ 。

将  $\vec{u} = c\hat{x}$  带入式 (9.2.17)，发现：

$$\vec{u}' = u'_x \hat{x}; \quad u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} \equiv c \quad (9.2.19)$$

当且仅当我们考察的“物质”的运动速度为光速时，无论如何换坐标系都不能改变其运动速度的观测值！

- 可否改变坐标系运动速度  $v$ ，使得原本低速运动的粒子在另一个坐标系的运动速度“超”光速？（否）

即使我们以光速反向运动，根据式 (9.2.17) 发现：

$$u'_x = u_x + \frac{c}{1 + \frac{cu_x}{c^2}} = c \quad (9.2.20)$$

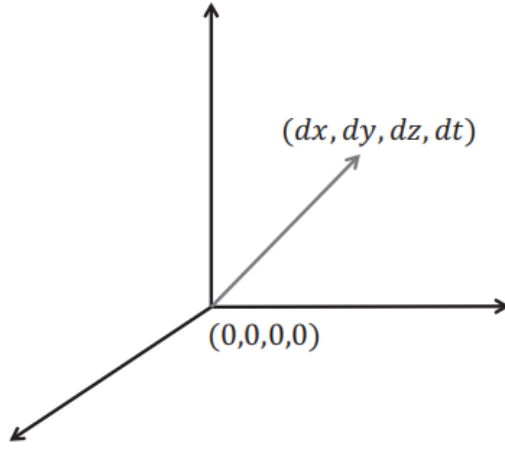
而当坐标系速度小于光速时，粒子速度也必然小于光速。也就是说，我们最多能使得粒子的相对运动速度达到光速，而不能超过光速！

注意到速度的变换公式不满足四维矢量的变换公式，这是因为三维空间速度的定义不是相对论协变的。

如下图所示，在  $S$  系中测量粒子运动的速度，须定义两个事件：粒子在  $t = 0$  时刻在原点（时空坐标  $(0,0,0,0)$ ），粒子在  $dt$  时刻在  $d\vec{r}$  这一点（时空坐标  $(dx, dy, dz, dt)$ ）。

三维速度的定义是  $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ，式中分子是三维矢量，很容易推广到四维协变形式  $x_\mu = \{\vec{r}, ict\}$ 。

但分母上： $dt$  不是一个四维标量！其不同惯性系中测量值不同！



为了解决这个问题，我们知道两个事件之间的四维时空间隔：

$$(ds)^2 = -dx_\mu dx_\mu = (cdt)^2 - d\vec{r} \cdot d\vec{r} \quad (9.2.21)$$

是一个标量，其在不同惯性系中的测量值不变。可以据此定义一个具有时间量纲的标量用来替代  $dt$ ：

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta_u^2} \quad (9.2.22)$$

考察  $d\tau$  的物理意义：

注意到其与坐标系无关，因此我们可以选取与粒子一起运动的坐标系来测量它。

此时有  $\beta_u^2 = 0$ ，因此得到  $d\tau = dt$ 。故  $d\tau$  的物理意义：

在粒子静止的坐标系中测量的两个事件之间的时间差。通常我们也把  $d\tau$  称作“固有时”。

对两个事件的时间间隔  $dt$ ，在与粒子相对运动的坐标系中测到的值为：

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} = \gamma_u d\tau \quad (9.2.23)$$

这个时间间隔值比与运动粒子相对静止的坐标系中测得的“固有时”增大了  $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}}$  倍，即所谓“运动时钟变慢”效应。（这里的运动时钟指的是在与粒子相对运动的坐标系中的“时钟”）。

既然“固有时”是个与坐标变换无关的具有时间量纲的标量，我们可据此定义一个四维矢量（四维速度）：

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_u \{\vec{u}, ic\} \quad (9.2.24)$$

它显然是在 Lorentz 变换下协变的。这个四维矢量中三维空间部分与三维速度矢量相关。

因为运动的时钟测得的时间不是固有时，需做修正，此即为  $\gamma_u$  的来源。

## 9.3 麦克斯韦方程的协变形式

### 9.3.1 电荷守恒定律-四维电流矢量

电荷密度和电流密度之间满足连续性方程：

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9.3.1)$$

此方程是在某一个坐标系 (记为  $S$  系) 下写出的, 在  $S'$  系中  $\vec{j}, \rho$  都应相应变化为  $\vec{j}', \rho'$ 。

由相对性原理, 式 (9.3.1) 的方程形式应在洛伦兹变换下不变。

因为  $\left\{ \vec{\nabla}, -i\frac{\partial_t}{c} \right\}$  构成一个四维矢量, 假如

$$J_\mu = (\vec{j}, ic\rho) \quad (9.3.2)$$

也构成一个四维矢量, 则 (9.3.1) 式可以写成相对论不变的形式:

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \quad (9.3.3)$$

式中  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  记为  $\partial_\mu$ 。

下面证明  $(\vec{j}, ic\rho)$  确实构成一个四维矢量。

实验显示, 电荷是洛伦兹不变量, 亦即: 一个带电体在任意一个惯性系下测得的电荷量均相同。

设在  $S$  系中有一个体积元  $\Delta\Omega$ , 其中电荷以速度  $u$  沿  $x$  方向运动。

体积元  $\Delta\Omega$  中的总电荷为  $\Delta Q = \rho\Delta\Omega$ , 其中  $\rho$  为  $S$  系中测量的电荷密度。

在与电荷相对静止的参考系  $S_0$  中, 电荷速度为零, 电荷密度为  $\rho_0$ , 相应的体积元为  $\Delta\Omega_0$ 。

根据电荷的洛伦兹不变性:

$$\rho\Delta\Omega = \rho_0\Delta\Omega_0 \quad (9.3.4)$$

由于  $S_0$  相对于  $S$  系以速度  $\vec{u}$  运动, 则两个坐标系的时空微元的变换关系为:

$$\begin{cases} \Delta x_0 = (\Delta x - u\Delta t) \gamma_u \\ \Delta y_0 = \Delta y \\ \Delta z_0 = \Delta z \\ \Delta t_0 = \left( \Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2} \right) \gamma_u \end{cases} \quad (9.3.5)$$

在  $S$  系中测量运动物体的“长度”时必须同时进行, 亦即,  $\Delta t = 0$ 。

将其代入上式, 发现两个参考系之间的体积元的关系为:

$$\Delta\Omega_0 = dx_0 dy_0 dz_0 = \gamma_u dx dy dz = \gamma_u \Delta\Omega \quad (9.3.6)$$

同一个带电微元, 其体积在相对其运动的坐标系中测量时 ( $d\Omega$ ) 比静止坐标系测量出的结果  $d\Omega_0$  小, 即所谓“运动物体长度收缩”。

将 (9.3.6) 代入 (9.3.4), 则得:

$$\rho = \rho_0 \gamma_u \quad (9.3.7)$$

将上式代入电流密度的表达式发现:

$$\vec{j} = \rho \vec{u} = \rho_0 \gamma_u \vec{u} \quad (9.3.8)$$

由于  $\rho_0$  为四维不变量, 式 (9.3.8) 显示:

$$(\vec{j}, ic\rho) = \rho_0 (\gamma_u \vec{u}, ic\gamma_u) = \rho_0 u_\mu \quad (9.3.9)$$

正好构成一个正比于四维速度的四维矢量, 因此电流守恒定律是满足相对论协变性要求的。



### 9.3.2 电磁势方程的协变形式

在洛伦兹规范条件下，电磁势方程为：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_0 \vec{j} \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{pmatrix} \quad (9.3.10)$$

式中  $\vec{A}$  和  $\varphi$  应满足洛伦兹条件：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (9.3.11)$$

若定义一个四维矢量：

$$A_\mu = \left( \vec{A}, i \frac{\varphi}{c} \right) \quad (9.3.12)$$

则式 (9.3.10) 的电磁势方程可以写为：

$$\square^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu \quad (9.3.13)$$

洛伦兹条件可以写为：

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (9.3.14)$$

式 (9.3.13) 显示：

若要求 Maxwell 方程在 Lorentz 变换下协变，则  $A_\mu$  一定是一个四维矢量，称为四维势。

这意味着矢势  $\vec{A}$  和标势  $\varphi$  在不同的坐标下会相互耦合在一起。

### 9.3.3 电磁场张量

讨论用场强表示的麦克斯韦方程的协变形式：

电磁场强度  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$  可以用电磁势  $\vec{A}$  和  $\varphi$  表示，即：

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (9.3.15)$$

电磁场强  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$  不是四维矢量。注意到  $(\vec{\nabla}, \partial(ict))$  构成四维矢量， $(\vec{A}, i \frac{\varphi}{c})$  也构成四维矢量，显然上式右边是两个四维矢量， $\partial_\mu A_\nu$  之间的数学运算。

排除降阶的缩并运算（左边不是标量）、只能是升阶的并矢运算。再考虑到对称性，发现等式右边只能是一个反对称的二阶张量。综合上述分析，可定义：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (9.3.16)$$

$F_{\mu\nu}$  是四维二阶反对称张量，满足  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ，称为电磁场张量。

直接结算可得其具体形式：

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.3.17)$$

利用  $F_{\mu\nu}$  和  $J_\mu$ , 可以把麦克斯韦方程组中的两个非齐次方程:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}\quad (9.3.18)$$

合并写为一个一阶的 Lorentz 协变的形式:

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 J_\nu \quad (9.3.19)$$

易证:

$$\nu = 4 \text{ 的结果对应 } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

$$\text{而 } \nu = 1, 2, 3 \text{ 的结果对应 } \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}.$$

同理, 可把两个齐次方程:

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad (9.3.20)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.3.21)$$

合并写成:

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \quad \mu \neq \nu \neq \alpha \quad (9.3.22)$$

式 (9.3.19) 和式 (9.3.22) 即是协变形式的麦克斯韦方程组。

## 9.4 电磁场的变换公式

下面考虑电磁场 (由反对称电磁张量  $F_{\mu\nu}$  表示) 在不同惯性系下的变换关系。

因为  $F_{\mu\nu}$  是二阶张量, 故不同参考系中的  $F_{\mu\nu}$  间的变换关系为:

$$F'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\beta} \alpha_{\nu\gamma} F_{\beta\gamma} \quad (9.4.1)$$

根据 Lorentz 变换把式 (9.4.1) 具体写成分量的形式, 则为

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2) \\ B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma\left(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3\right) \\ B'_3 = \gamma\left(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2\right) \end{cases} \quad (9.4.2)$$

若我们把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解, 则式 (9.4.2) 可表示为:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)_{\perp} \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\right)_{\perp} \end{cases} \quad (9.4.3)$$

上述场变换方程式自动给出了 Lorentz 力以及动生电动势的物理解释。

动生电动势是指一段运动导体切割磁力线产生的电动势。在实验室坐标系下观测，体系只有静磁场，当一个导线以速度  $\vec{v}$  切割磁力线时，在导线静止的坐标系中产生了新的电场：

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma (\vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \approx (\vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \quad (9.4.4)$$

后一个等式在低速下成立。因此导线中的电荷会受到这个电场的作用力，这就是动生电场（电动势）的来源。

而导线中的电荷受到的力  $\vec{F}' \approx q (\vec{v} \times \vec{B})_{\perp}$ ，就是 Lorentz 力的来源。

**例题 试求匀速运动的点电荷的场。**

设  $S$  系为实验室坐标系，其中点电荷以速度  $\vec{v}$  沿  $x$  轴运动。

此坐标系中既有电场，又有磁场，不方便求解。

另设  $S'$  系，其原点固定在点电荷  $q$  上跟着点电荷一起运动。

在  $S'$  系中点电荷是静止的，只有电场没有磁场，其场为：

$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}'}{r'^3} \quad \vec{B}'(\vec{r}', t') = 0 \quad (9.4.5)$$

随后将  $S'$  系中的电磁场利用变换公式变换到  $S$  系。

因为  $S$  系相对  $S'$  系沿  $x$  轴以速度  $-v$  运动，则由式 (9.4.2) 得  $S$  系中的场强：

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma (E'_y + vB'_z) \\ E_z = \gamma (E'_z - vB'_y) \\ B_x = B'_x \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \left( \vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp} \right) \end{cases} \quad (9.4.6)$$

由于  $\vec{B}' = 0$ ，故

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx'}{r'^3} \\ E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{qy'}{r'^3} \\ E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{qz'}{r'^3} \\ B_x = 0 \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp} \end{cases} \quad (9.4.7)$$

现须把  $S'$  系中的  $\vec{r}', t'$  用  $S$  系中的  $\vec{r}, t$  来表示，因为我们要知道的是在  $S$  系中的某一个时空点地场强。

为此，设  $t = 0$  时点电荷  $q$  正好与  $S$  系的原点重合，并且我们在这一时刻测量空间的场，于是，根据洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = -\gamma \frac{\beta x}{c} \end{cases} \quad (9.4.8)$$

将式 (9.4.8) 代入式 (9.4.7) 即可得最终结果。

$s'$  系中  $\vec{r}'$  可表示成:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = [(\gamma x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \quad (9.4.9)$$

这样,  $S$  系中在  $\vec{r}$  这一点的电场强度为:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma q \vec{r}'}{[(\gamma x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{[(r \cos\theta)^2 + (1 - \beta^2)(r \sin\theta)^2]^{\frac{3}{2}} \gamma^2} \\ &= \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (9.4.10)$$

式中  $\theta$  是  $\vec{r}$  与  $\vec{v}$  的夹角。由式 (9.4.7) 可得磁感应强度:

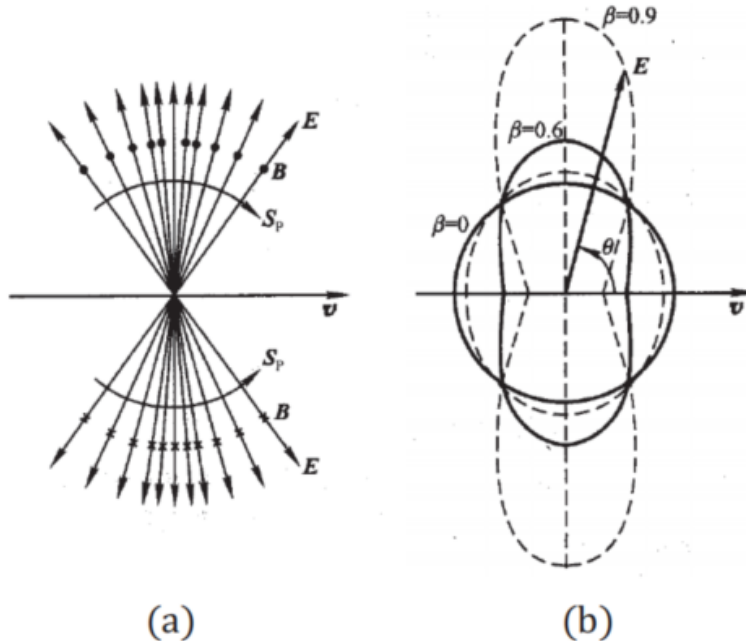
$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \quad (9.4.11)$$

可见, 匀速运动的点电荷的场的特点:

- 电场方向仍是沿着径向, 但强度分布不再是球对称, 而受制于一个与  $\theta$  及运动速度  $v$  有关的角度分布函数:

$$F_\beta(\theta) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (9.4.12)$$

$\theta = 0$  处场最弱,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处场最强, 场向着垂直于速度方向的平面集中, 如下图 (a) 所示, 集中的程度与点电荷运动速度有关。当  $v \rightarrow c$  时, 场基本上集中分布在垂直于  $\vec{v}$  的平面内。下图 (b) 画出了三种不同  $\beta$  值的分布情况。



- 能流分布为:

$$\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H} = \varepsilon_0 \left[ \vec{v} E^2 - \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \right] \quad (9.4.13)$$

注意到  $\vec{E} \parallel \hat{r}$ , 容易计算得知:

$$\vec{S}_P \cdot \hat{r} \propto [E^2 (\vec{v} \cdot \hat{r}) - E^2 (\vec{v} \cdot \hat{r})] = 0 \quad (9.4.14)$$

这说明没有能流沿着径向方向辐射出去。从上图也可直接看出, 能流是在以电荷为中心的球面上流动。

- 虽然能量并不沿着  $\vec{r}$  方向辐射出去, 但在实验室系看, 能流仍在做定向流, 只伴随着电荷一起运动。要理解这个问题, 只需要将时间加上即可。