非寿险精算排版编撰初步意见（Chapter 3）

庄源

2023/08/21

张老师下午好：

这次给到您的是 Chapter 3 的统稿结果。我能先改的就先改了，因此您可以看到这一章的修改意见不多。从参考教材上来看，这一章的内容大多参考 2010 版《非寿险精算》书籍。车俊彦还在写作中参考了 *Loss Models: from Data to Decisions* 以及 ASM 的 Manual，为书籍增色不少。

本章内容在 Nonlifeadjustment.tex 中，运行时编译 main.tex 即可，使用 XeLaTeX。

这一章是非寿险精算中用到统计知识最多的一章，图和叙述都有一些不妥之处，比较难改。我进行了如下统稿工作，请您知悉：

- 让模板支持郑同学 LaTeX 代码；
- 更改所有的期望算子、方差算子和微分算子，使其变为正体；
- 将引言、例题、定义、定理和习题装入专属环境中，并为例题自动编号；
- 重绘所有与贝叶斯先验、后验分布有关的图片；
- 使用 nicematrix 宏包对马尔科夫链转移矩阵进行重排版；
- 更改图、表格式，使用 multirow 宏包对原稿表 3.1、3.2、3.4 和 3.5 进行修改，对原稿表 3.8 的字体调小处理。

本章中，请老师着重看一下排版以后的 3.3 “基于贝叶斯方法的经验费率测算”，这对应了原稿中的第 3 节。这里我改了很多小错误，有些地方近乎重写，所以就不放在后面的错误修正中了。但是我仍觉得这一部分有知识点缺漏，还有些我无法定夺的地方，请您优先查看：

- **$f(x\,|\,\theta)$ 应该被称为“条件概率密度函数”还是“似然函数”？** 我学贝叶斯这么多年来，一直叫它“似然函数”。从统计角度来说，这代表了样本提供的新信息，所以叫“似然函数”很合适。从概率角度来说，这也可以代表在确定了 θ 以后，损失 X 的分布，叫“概率密度”也有据可依。所以我在这里有

些难以定夺。

- **这一部分是否应该再加上后验预测分布和贝叶斯保费的有关内容？**这里，车同学的写作思路是：先叙述条件概率密度函数和先验分布，使用贝叶斯公式计算后验分布后选取适当的损失函数估计参数。但是，在得到后验分布后，还可以将其带到条件概率密度函数中，利用全概率公式计算“下一年”或“下一次”损失变量的无条件概率分布。这个无条件概率分布即为后验预测分布。对后验预测分布进行研究，可以得到贝叶斯保费（即后验预测分布的均值）和一些与概率有关的结论。

$$f(x_{n+1} \mid x_1, ..., x_n) = \int f(x_{n+1} \mid \theta)\pi(\theta \mid x_1, ..., x_n)\mathrm{d}\theta$$

本章的章名为“非寿险费率校正”，所以教材讲解最终应该归结到损失分布上。仅仅讲到后验分布和参数的贝叶斯估计无法体现“费率校正”的最终目的。鉴于车同学在这里已经写了共轭先验，我想，可以在 3.3.1 补充后验预测分布和贝叶斯保费的初步介绍，并在对应的“条件概率分布-共轭先验”组合中说明对应的后验预测分布形式[1]。

- 排版后稿子的 3.3.1，“贝叶斯方法与数理统计方法的一个基本区别在于：贝叶斯方法将参数看作是一个随机变量的取值”中“数理统计方法”**是否应该注明是概率学派**，改为“数理统计方法（概率学派）”？
- **排版后稿子的 3.3.1，下面的文字是否可以删掉？**因为跟之前的内容已经重复了，只是离散和连续的区别。

贝叶斯估计方法在第一个阶段可求出未知参数 θ 的后验分布，其理论依据就是贝叶斯公式，原理如下：

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

其中 $P(B_i)$ 为先验概率，而 $P(B_i \mid A)$ 则为后验概率，它是在事件 A 已经发生的情况下根据叶斯公式计算出来的。

[1] 如：①Poisson 分布的共轭先验为 Gamma 分布，后验预测分布为负二项分布；
②正态分布中 μ 的共轭先验为正态分布，后验预测分布还是正态分布；
③伯努利分布的共轭先验为 Beta 分布，后验预测分布还是伯努利分布；
④指数分布这里有点复杂，如果形式是 $f(x \mid \Theta) = \frac{1}{\Theta}e^{-x/\Theta}$，则共轭先验是逆 Gamma，后验预测分布是双参数帕累托；如果形式是 $\lambda e^{-\lambda x}$，则共轭先验是 Gamma，后验预测分布是 Lomax 分布。
⑤负二项分布的共轭先验是 Beta 分布，后验预测分布是 Beta-负二项分布。

- 3.3 节的最后一个自然段(页码 77),请老师帮忙修改,这块我觉得有点奇怪。“由于这两个困难，贝叶斯方法并不实用。”，那我们还拿这么大篇幅写贝叶斯干嘛？所以我觉得这里写的有点不得体。

下面是建议需要修改的内容，公式大体上没有问题。下面所称“原稿”，即微信中传输的“非寿险第四章原稿.pdf”。

- （已修正）存在某些错误，全部修正：
    - 原稿第 2 面，“经验费率的介绍”，去掉“的”。
    - 原稿第 4 面，去掉“所谓的”。
    - 原稿第 4 面，例 2 中的英文句号应改为中文句号。
    - 调整了原稿第 9 面表 1 的排版。
    - 调整了原稿第 19 面例题中表的排版。
- （未修正）
    - 原稿第二面第一节写得可能有些令读者疑惑。既然咱们这章叫做“非寿险费率校正”，是否应该在第 1 节开宗明义地写出为什么要校正？而不是先给出一个令人困惑的“经验费率”的概念。所以，应该把这个概念挪到后面去。我来重新写一下，方便表达我的意思。您可以看看哪一个更好：

> 精算师在定价工作中，需要根据不断积累与更新的历史数据调整产品费率。举例来说， 随着医疗科技的进步，某医疗保险产品的赔付率不断攀升，精算师就需要提高产品费率水平，以应对未来潜在的赔付压力。同时，针对不同的客户群体及其赔付数据，精算师可以调整对应的费率水平，从而发挥保险定价的“奖惩机制”。运用经验数据调整费率的精算思想由来已久，可追溯到 20 世纪初美国雇主保险中针对不同雇主索赔经验的费率调整。
>
> 精算师根据个体风险的损失数据或新的损失数据，对原先厘定的费率作校正后所形成的新费率被称为经验费率。经验费率的产生源于风险的异质性，理论依据是信度理论。

-
    - 原稿第 2 面的第二和第三自然段都用寿险来做例子，但在《非寿险精算》书中举寿险的例子会不会不合适？
    - 原稿第 2 面第二节“基于古典信度的经验费率测算”的内容在江璐嘉学姐那一章中也有出现。车俊彦写得详细一些，但两部分的内容非常相似，甚至连例题都差不多，需要做“保留哪个”的选择。如果根本要删掉“基于古典信度的经验费率测算”，后面五条修改建议就可以不用管。
    - 原稿第 2 面第二节“基本原理是考虑到”语句不通。同一句中“适当考虑后验样本对参数估计的影响”可以不写。建议改为“该理论考虑到后

验样本集的随机波动性，赋予后验样本可信度权重。”

- 原稿第 2 面第二节“根据样本的容量是否满足理论上的条件”，可改为“根据样本的容量大小”。
- 原稿第 3 面，“在完全信度样本数量 n 的情况下，在 1－α 的置信水平下”，有两个“在 XX 下”，语义有些重复。可改为“样本数不低于完全信度样本数量 n 时，在 1－α 的置信水平下”。
- 原稿第 3 面，“其往往还需要利用其他信息，如其他保险公司的信息或本公司其他险种的信息”。这里的“其”指代不清；“其他”改为“其它”。
- 原稿第 3 面，“的时候”改为“时”。
- 原稿第 17 面，这里写到 Bühlmann 方法是让下面的量最小：

$$Q=\mathrm{E}\left\{\left[\mathrm{E}(X_{n+1}\mid \boldsymbol{X})-\beta_0-\sum_{j=1}^{n}\beta_j X_j\right]^2\right\}$$

其实我们在推导的时候，一般是让下面这个量最小：

$$Q=\mathrm{E}\left\{\left[\mu_{n+1}(\theta)-\beta_0-\sum_{j=1}^{n}\beta_j X_j\right]^2\right\}$$

其实，让两个式子最小是等价的，但多数精算教材都用的 $\mu_{n+1}(\theta)$ 这一种。请张老师定夺。

- 原稿第 18 面，这里写到：“经过整理便可以得到 Bühlmann 信度保费的计算公式”

$$\mathrm{E}(X_{n+1})=\hat{\beta}_0+\sum_{j=1}^{n}\hat{\beta}_j X_j=Z\bar{X}+(1-Z)\mu$$

这个公式直接从线性组合跳到了信度加权，但中间有好多好多东西都略过了。从逻辑上看，这个公式推导不直观（中间还略过了一大堆步骤），初学的时候很容易会被带到沟里面去。这里我建议有两种解决方法

①照抄《非寿险精算》2010 版的这段话，不做任何解释：

这里的 β_i 是观测值 x_i 在在线性函数中的权重，$i=1, 2, \cdots, n$。由于观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的风险特征相同，所以可令 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n$，这时 $\beta+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=\beta+n\beta_1\bar{x}$，若记 $z=n\beta_1$，则将来损失的可信性估计为 $\beta+z\bar{x}$。

式中的 β 和 z 可以通过求均方损失函数 $L(\beta,z)=E((\beta+z\bar{x}-\mu(\theta))^2)$ 的极小值点得到。经过简单的计算可知，当

$$\begin{cases}\beta=(1-z)\mu \\ z=\dfrac{n}{n+\nu/a}\end{cases} \tag{4.3.12}$$

时，$L(\beta, z)$ 达到极小。

用这样计算得到 $\beta+z\bar{x}=(1-z)\mu+z\bar{x}$ 作为将来损失的估计而厘定的保费，称为 Bühlmann 信度保费（Bühlmann Credibility Premium）。这里的 z 就是信度因子，度量观测值的可信性程度。在非寿险精算实务中，μ 的估计值可以理解为不同风险水平下的损失观测值的总平均，$\bar{x}$ 则是某一特定风险水平下的损失观测值的平均，Bühlmann 信度估计用它们的加权平均作为这一特定风险水平下将来损失的估计值。

②彻底做推导。可以采取《非寿险精算》2010 版的定理 4-3 和例 4-4（第 134-137 面）的推导方式，也可以采取孙佳美《非寿险精算理论与实验》5.4 节（159-162 面）的推导方式。

- 原稿第 19 面，“每一组都有 n 个数据”。应不应该把每组数据个数不同的情况写进书中？这在《非寿险精算》2010 版中有涉及。
- 原稿第 23 面，Bühlmann 和 Bühlmann-Straub 模型的根本区别不在于各风险观测组数据量是否相同。Bühlmann 模型也可以适用于各风险观测组数据量不相同的情形下。见《非寿险精算》2010 版第 132 面。我觉得 Bühlmann-Straub 可以进行加权处理，Bühlmann 模型是 Bühlmann-Straub 的一种特例。老师怎么认为？
- Bühlmann-Straub 是可以用半参数模型进行估计的，这里老师觉得放不放半参数估计？
- 原稿第 23 面，“在 NCD 系统中，没有赔案记录的投保人的续保保费打的折扣大，而有赔案记录的投保人的续保保费打的折扣小，直止不打 折扣，缴纳全额保费。”有些口语化。
- 原稿第 25 面-26 面大多借鉴 2010 年版《非寿险精算》，但叙述非常口语化。
- NCD 中，是否要讲转移和平稳分布？其实这两个是很重要的考点，出题也不会太难为考生（毕竟就是矩阵乘法和解线性方程组）。请张老师定夺。
- 习题和书中讲解的考点并不能完全对上。如习题第 1/4/7 题，本章的讲

解文字中并没有出现后验预测分布和贝叶斯保费的概念，在这里让考生求解后验预测分布是不太好的。同理，第 15 题需要用到马尔科夫链中的 Chapman-Kolmogorov 方程，这个在正文里面也没有讲。我的建议又回到了那个老问题，需要老师决定一下，到底要不要考预测分布、贝叶斯保费和 NCD 中的状态转移、平稳分布。