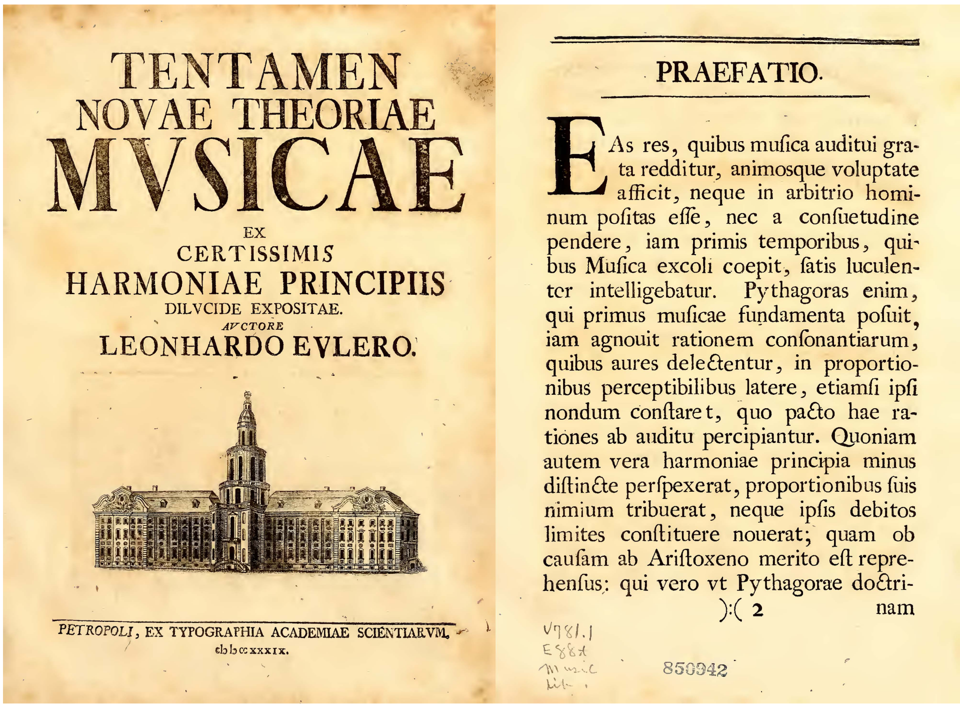
被遗忘的数学奇书：欧拉如何用数学重构音乐

引言

提到数学，就不得不提到一个人——他就是欧拉（Leonhard Euler）。这位被誉为广大数学爱好者称之为神的传奇人物，是公认的有史以来最伟大的数学家之一。他的贡献几乎覆盖了数学的所有领域，从微积分到数论、从拓扑到图论，都留下了他的足迹。更令人惊叹的是，即便在晚年双目失明的情况下，他依然凭借惊人的心算能力和记忆力，持续产出大量成果，成为史上最多产的数学家之一。然而，鲜有人知道，欧拉不仅在数学上大放异彩，他还涉足了音乐理论研究。

1739年，欧拉撰写了《尝试音乐新理论》（*Tentamen novae theoriae musicae*），试图将音乐理论纳入数学的体系之中。然而，这本书并未得到足够的关注，即便在外网相关资料也寥寥无几，中文世界则几乎是一片空白。幸运的是，17th Century Math的版主——一位独立研究者，将这本书从拉丁文翻译成了英文，使得普通读者也能一窥这部奇书的内容。


TENTAMEN
NOVAE THEORIAE
MVSICAE
EX
CERTISSIMIS
HARMONIAE PRINCIPIIS
DILVCIDE EXPOSITAE.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO.

PETROPOLI, EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
cIↄIↄccxxxix.

PRAEFATIO.

EAs res, quibus muſica auditui grata redditur, animosque voluptate afficit, neque in arbitrio hominum poſitas eſſe, nec a conſuetudine pendere, iam primis temporibus, quibus Muſica excoli coepit, ſatis luculenter intelligebatur. Pythagoras enim, qui primus muſicae fundamenta poſuit, iam agnouit rationem conſonantiarum, quibus aures delectentur, in proportionibus perceptibilibus latere, etiamſi ipſi nondum conſtaret, quo pacto hae rationes ab auditu percipiantur. Quoniam autem vera harmoniae principia minus diſtincte perſpexerat, proportionibus ſuis nimium tribuerat, neque ipſis debitos limites conſtituere nouerat; quam ob cauſam ab Ariſtoxeno merito eſt reprehenſus: qui vero vt Pythagorae doctrinam

):(2

正如大家所知，音乐与数学的结合并不新鲜。从毕达哥拉斯发现音程与弦长比例的关系、中国的“三分损益法”，再到中世纪对音阶的研究和十二平均律的计算，数学一直为音乐提供精准的理论基础。文艺复兴以来，随着理性主义的崛起，越来越多的数学家和音乐家认为，音乐和自然科学一样，可以用简洁优雅的数学语言加以描述。欧拉正是这些探索者之一。他从古希腊哲学到巴洛克音乐汲取灵感，从数学角度研究音阶、音程与和声，并以发现的规律为基础，提出了由理论推导而来的新音乐体系，它平衡、修正各种律法的不协和处，扩展了和声的可能性，同时也包含了对写作方法的指导。

由于本人水平有限，对音乐和数学都仅停留在普通爱好者的阶段，因此本文只能粗略探讨《尝试音乐新理论》的部分内容，主要还是猎奇，满足一下好奇心。希望本文能够抛砖引玉，吸引更多中文互联网的读者关注这本奇书，挖掘其中的奥妙。

书籍简介

虽然本文仅关注书中几个简单的、有趣的点，但考虑到中文互联网对该书的介绍几乎为零，这里还是对该书的大致结构先做一个介绍。该书目录结构如下：

- **第1章** 关于声音与听觉，第1页
- **第2章** 关于美感与和声的原则，第26页
- **第3章** 关于音乐的总体研究，第44页
- **第4章** 关于和声音程，第56页
- **第5章** 关于和声音程的连续性，第76页
- **第6章** 关于和声音程的序列，第90页
- **第7章** 关于各种音程的通用名称，第102页
- **第8章** 关于音乐的音阶类型，第113页
- **第9章** 关于自然-半音阶音阶，第132页
- **第10章** 关于其他更复杂的音乐音阶，第151页
- **第11章** 关于自然-半音阶音阶中的和声音程，第165页
- **第12章** 关于自然-半音阶音阶中的调式与体系，第175页
- **第13章** 关于特定调式与体系中的作曲方法，第195页
- **第14章** 关于调式与体系的转换，第252页

我们大致可以分为以下几个部分：

1. 第一部分是第1、3章，这两章主要从概念上对声音、音乐等进行了研究，有助于我们了解背景知识；
2. 第二部分是第2、4、7章，这里主要研究音程和谐度这个问题；
3. 第三部分是第5、6章，这里开始从更大的层面研究，从单个和弦扩展到完整的音乐作品；
4. 第四部分是第8、9、10章，这里欧拉使用数学方法生成音阶；
5. 第五部分是第11、12、13、14章，这里欧拉基于前面的理论基础构建一个新的音乐理论体系，并给出了调律、写作等方面的指导意见；

虽然这本300页的书对于欧拉著作的总量而言微不足道，但伟人的思想碎片就足够普通人研究个一年半载了。本文我们就来看看，巴洛克时期的欧拉如何用数学来解释音乐理论。

和谐与愉悦的数学原理

本篇内容主要对应原书第二章和第四章的内容。首先，我们明确：欧拉的音乐理论体系关注的维度只有两个——**音高**和**持续时间（节奏）**。虽然音量等因素也会影响音乐效果，并具备一定的规律，但欧拉认为音量具有较强的主观性与随意性，因此未将其纳入体系之中。

这让我想起了B站up主王乐乐乐游在一个视频中对“织体”的定义。他提到，所谓织体，就是当不能对音色进行控制的时候，如何仅通过音的组织来勾勒出丰富的音响。如果考虑到巴赫时期羽管键琴对音量控制的极大局限性，我们可以说，是音高和节奏构成了音乐的**骨架**，而音色和音量则是音乐的**血肉**。欧拉的研究目标就是抛开“血肉”，专注于这个音乐的“骨架”。

和谐：隐藏在音符中的秩序

> “音乐中的所有愉悦都源于对比率的感知，这些比率存在于多个数字之间，因为时间的持续也可以用数字来表示。” ——欧拉

在调性音乐体系中，音乐是否“好听”，从和声层面来看，至少涉及两个核心因素：一是和声本身的**协和程度**，二是和声之间的**连接过渡**。我们暂时仅关注前者。我们知道，不同音程的和谐程度差异显著，例如纯五度较为和谐，而小二度或大七度则较为刺耳。同时，不同和弦的听感也各有特点：例如大三和弦（C-E-G）因其稳定性显得悦耳，而减七和弦（B-D-F-A♭）则张力十足。欧拉认为，和谐的本质是一种隐藏在声音中的“**秩序**”带来的愉悦感。这种秩序并非纯粹的主观感受，也不是特定文化独有现象，而是一种可以用数学描述的、普适的客观规律。

这种理论并非欧拉首创，而是源远流长。读者若具备一定乐理基础，对该理论应有所了解。例如，当两个音的频率比为2:1时（即一个音的频率是另一个音的两倍），它们构成了八度音。这种比例关系非常简单，因此人类对这种声音的秩序感知最为清晰。同样，频率比为3:2（即纯五度）也被认为和谐，因为这也是一种简单的数学关系。总体来说，和谐的声音听起来悦耳，是因为它们的频率之间存在**简单明确的整数比例关系**。比例越简单，听感越和谐；比例越复杂（如趋向无理数），听感则越刺耳。

欧拉进一步指出，和谐和愉悦是相关的，但并不等同。欧拉在书中写到：

> 因此可以看出，让人感到愉悦与引发欢笑并非同一回事，而令人感到悲伤与令人不悦也并非对立。关于其中的道理，我们已在某种程度上解释过了：凡是能让我们感知到秩序的事物，都会让人感到愉悦。而其中，那些秩序更简单、更容易理解的事物，会引发欢乐；而那些秩序较为复杂、不易被察觉的事物，往往让人感到悲伤。

可见，这里欧拉的“愉悦”并不仅指欢乐，而是指“打动人心”、“令人喜欢”、“感到美”。总的来说，和谐的音使人欢乐，不和谐的音使人悲伤，前提是它们都遵循秩序，只是感知秩序的难易程度不同。而毫无秩序的音符则令人生厌，正如欧拉所说：

> 如果我们无法在某些事物中感知到秩序，我们会感到愉悦的程度会减弱；如果完全察觉不到任何秩序，那么我们对所呈现的事物将再也不会感到喜爱。而如果我们不仅无法察觉到秩序，反而发现某些事物完全违背了理性，甚至扰乱了原本可能存在的秩序，那么我们将会对此感到厌恶，甚至几乎会带着痛苦来感知这些事物。

不过，当20世纪调性音乐发展到极致后，勋伯格提出了无调性音乐体系，打破了以上被人们奉为圭臬的规律。但这就不是我们要探讨的了。

当然，欧拉作为数学家不仅要进行概念的探讨，他在书中提出了一种**度量不和谐度的公式**，可以用来衡量任何和弦的和谐程度。具体公式如下：

$$E(n) = 1 + \sum_{k=1}^{r} a_k(p_k - 1)$$

其中：

- $E(n)$ 表示不和谐度，n是比率的最小公倍数。
- n 被分解为质因数的形式：$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$，其中 p_k 为不同的质数，$a_k \geq 1$。

我们可以举两个例子：

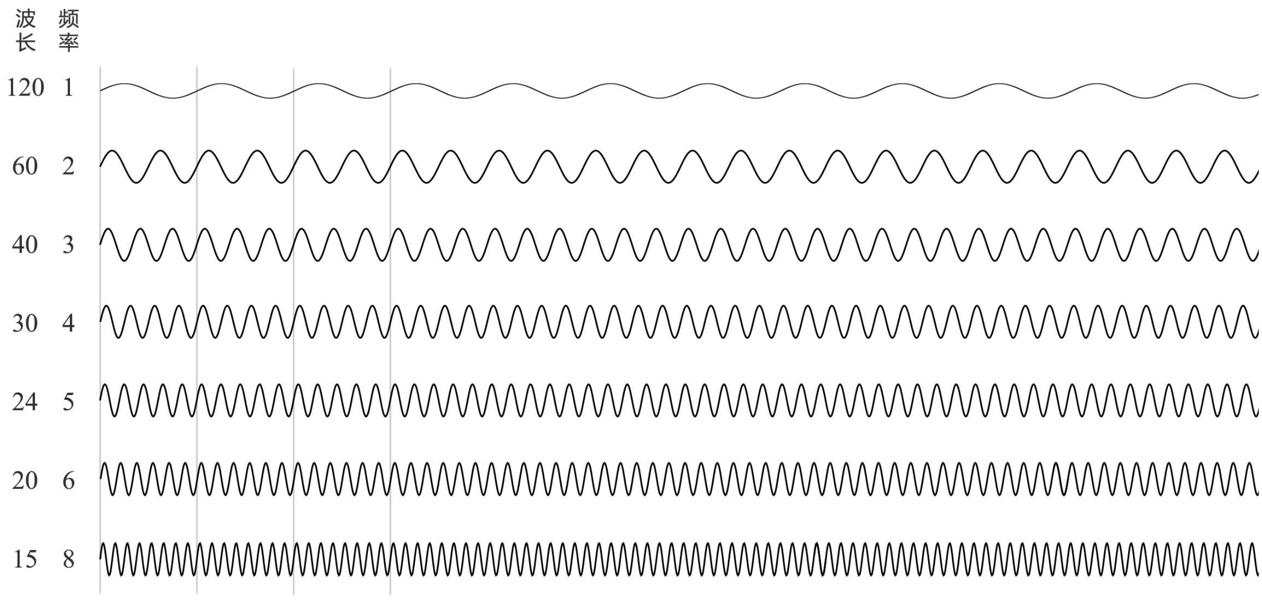
1. **纯五度**：比率为 $3:2$。
   - 最小公倍数：$\mathrm{LCM}(3,2) = 6$。
   - 质因数分解：$6 = 2^1 \cdot 3^1$。
   - 计算：$E(6) = 1 + 1 \cdot (2-1) + 1 \cdot (3-1) = 1 + 1 + 2 = 4$。
2. **纯三度**：比率为 $5:4$。
   - 最小公倍数：$\mathrm{LCM}(5,4) = 20$。
   - 质因数分解：$20 = 2^2 \cdot 5^1$。
   - 计算：$E(20) = 1 + 2 \cdot (2-1) + 1 \cdot (5-1) = 1 + 2 + 4 = 7$。

我们可以使用python实现这个算法，这里就不做展示了，感兴趣的读者可以到Github中下载查看代码。读者可以自行运行验证。

最小公倍数与不和谐度

我们已经知道，比例越简单，听感越和谐。那么，如何量化这种“简单程度”呢？假设比例已化为最简互质的形式。我们可能会直观地认为，分子分母的和可以反映其复杂度。例如，$1/2$的分子分母和为$1+2=3$，$1/3$的和为$1+3=4$，$9/11$的和为$9+11=20$。显然，比例越复杂，分子分母的和就越高。类似地，也可以用分子分母的乘积替代求和。

然而，欧拉首先计算了另一个更具扩展性和物理意义的指标：**最小公倍数（LCM）**。这种方法的第一个优势在于，它不仅适用于两个音的频率比，还可以轻松扩展到多个音的情况，并且与声音的物理本质紧密相关。声音本质上是波的振动。假设两个音的频率比为$2:3$，可以类比为两个球在跳动：第一个球每3秒跳一次，第二个球每2秒跳一次（注意周期长度和频率成反比），那么它们会在多久后同时落地？答案是6秒，即它们频率比的最小公倍数。由此可知，**最小公倍数正是描述多个音的波形在多长时间单位内“对齐”的一个量化指标**。为直观理解，我们可以优化欧拉在书中给出的图片：



更复杂的例子如$4:5:6$，对应的最小公倍数为60，意味着三个音的波形需要60个单位时间才能完全对齐一次。我猜想原理可能是：音波的相位在此期间大部分时间都是错开的，并且每个区间错开的程度不同，因而这60个单位时间内，声音波形都是不一样的，复合后呈现出复杂、不规律的形状。事实上，对于复合的音波函数，这个60就是它的周期（与周期成正比，具体值需要通过频率计算）。

质因数分解与不和谐度

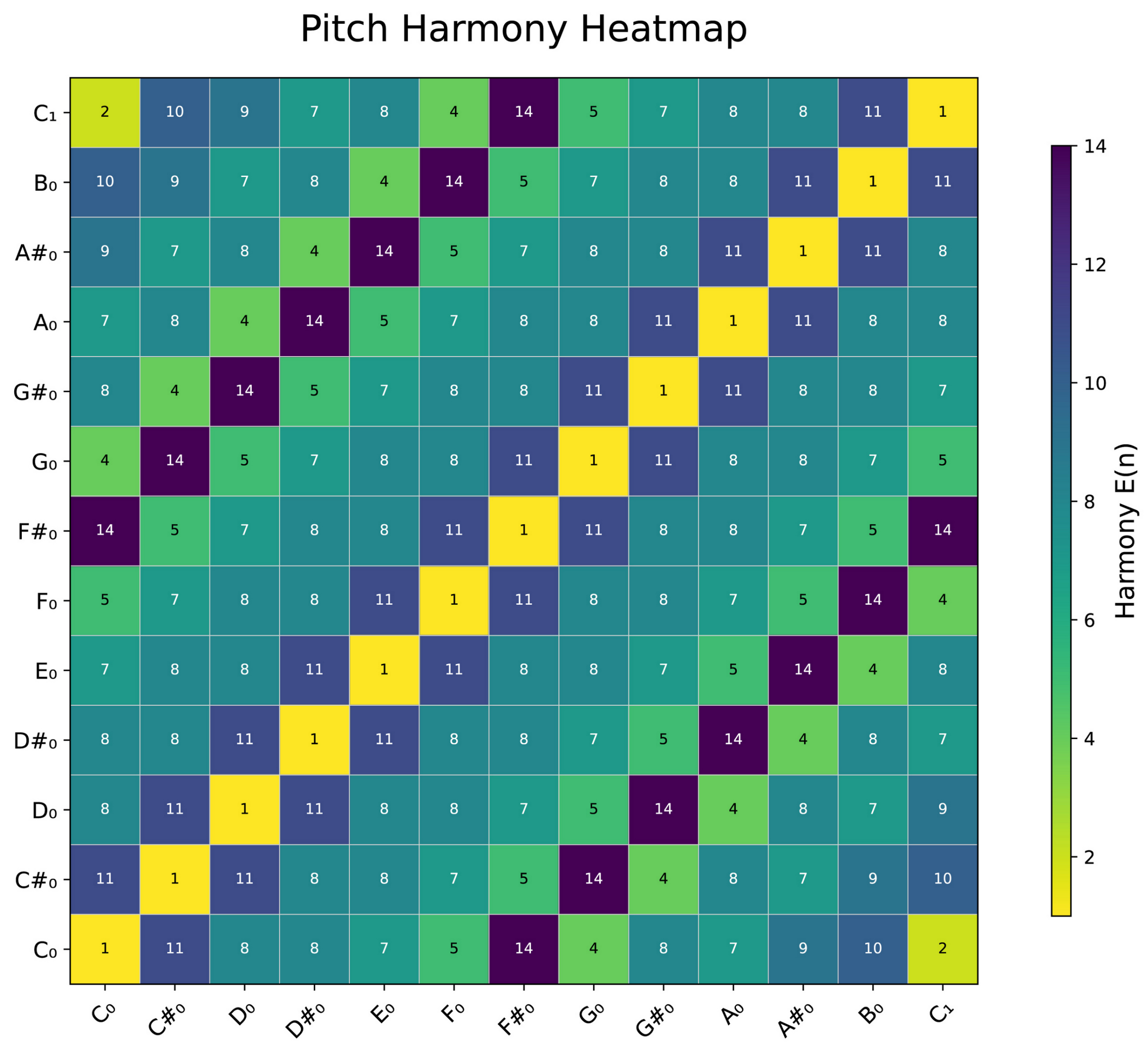
那么，是不是通过最小公倍数，我们就可以衡量和弦的不和谐度了呢？答案是不行，欧拉认为，还需要进行质因数分解。一个数的质因数分解反映了其构造的基本成分。质数可以看作是整数的“基本单位”，通过它们的组合能唯一地构造出任意整数。因此，质因数分解能清晰地刻画出一个数的复杂性。此外，欧拉认为，小的质因数更为简单，因而在公式中的求和项 $\sum_{k=1}^{r} a_k(p_k-1)$ 中乘以了这个质因数本身，这使得较大的质因数能显著提高得分。这本质上是对最小公倍数的质因数分解进行“加权处理”。总的来说，不和谐度取决于两个方面：质因数的数量，和质因数的大小。

音程不和谐度的可视化

将各个音程的近似比例代入后，我们可以得到下表：

名称	近似比率	最小公倍数 (n)	质因数分解	次数 E(n)
纯一度（Unison）	1:1	1	-	1
小二度（Minor Second）	16:15	240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	11
大二度（Major Second）	9:8	72	$2^3 \cdot 3^2$	8
小三度（Minor Third）	6:5	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	8
大三度（Major Third）	5:4	20	$2^2 \cdot 5$	7
纯四度（Perfect Fourth）	4:3	12	$2^2 \cdot 3$	5
增四度（Tritone）	45:32	1440	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	14
减五度（Diminished Fifth）	64:45	2880	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$	15
纯五度（Perfect Fifth）	3:2	6	$2 \cdot 3$	4
小六度（Minor Sixth）	8:5	40	$2^3 \cdot 5$	8
大六度（Major Sixth）	5:3	15	$3 \cdot 5$	7
小七度（Minor Seventh）	9:5	45	$3^2 \cdot 5$	9
大七度（Major Seventh）	15:8	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	10
纯八度（Octave）	2:1	2	2	2

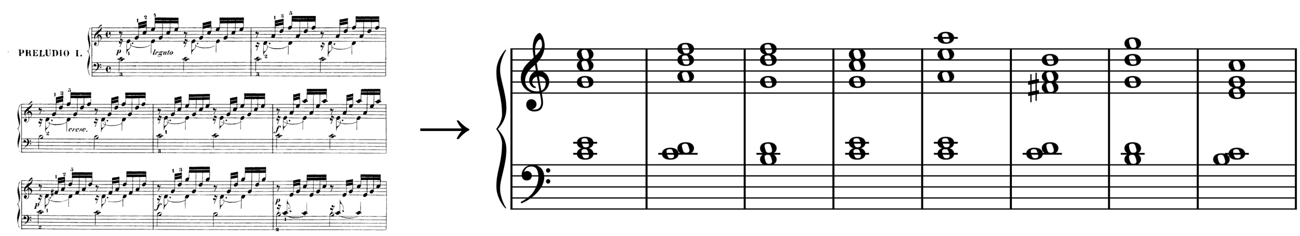
我们可以可视化为一张热图：



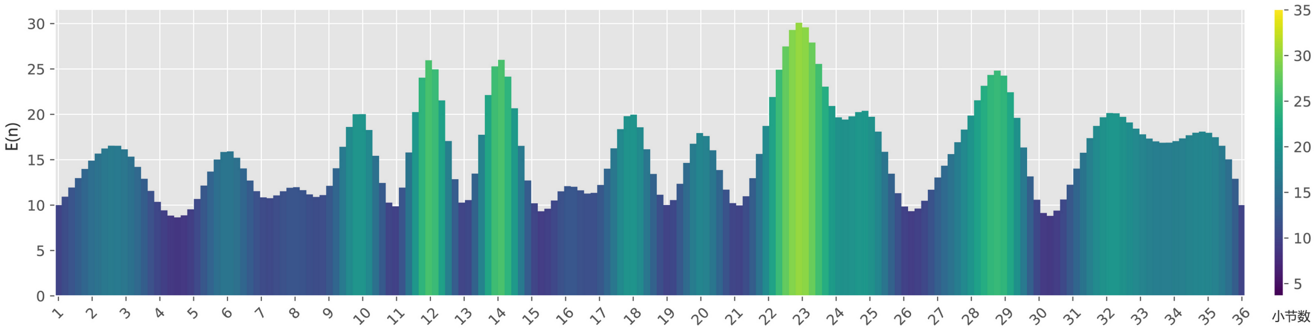
可以看到，图中的结果和我们的经验是基本吻合的，单音不和谐度为1，因而最和谐；属音、下属音相对较和谐；小二度、七度等较不和谐。增四度的值比想象中大一些，不过也合情合理，这个音中国古代称之为变徵之音，这个音能打破五音调式，表达悲伤、感叹、忧郁或其他复杂情感。注意这个表仅基于近似比率，仅供参考。

和声不和谐度的可视化

前面已经提到，欧拉的算法是可以扩展到多个音的和弦的。下面我们就以经典的巴赫《C大调前奏曲》为例进行处理。首先将分解和弦还原为柱式和弦：



接下来使用python代码对和弦进行分析，最终得到下面的图（进行了插值以保证平滑）：



从中我们可以明显看到不和谐度的变化规律，音乐像是呼吸一般跌宕起伏，在一张一弛中不断发展。这使得我们能够从另一个侧面理解传统乐理的底层逻辑。

> 以上两张图的生成代码可以在Github获取。

这里读者可能会问，在和声的T-S-D-T的变化中，如果各个和弦都仅使用正三和弦原位，不和谐度都一样，那音乐的发展从何体现？这就是接下来的内容了，即和声连接的不和谐度。

欧拉在第四章对和声理论进行了进一步的研究，这里不再涉及，感兴趣的读者可以自行阅读。此外，欧拉还在第五、六章研究了和声连接的理论，他将对单个和弦的量化方法推广到和弦序列，从而对音乐整体的和谐程度进行分析。这部分也不再涉及。

难以协调的音阶——欧拉的新音乐体系

这一节主要对应原书第八章的内容。对音乐只要有基本了的读者应该都知道一些常见的音阶，例如大调音阶、小调音阶、Dorian音阶、半音阶、五声音阶等，它们有不同的方法生成，例如中国的三分损益法，古希腊的五度相生律，后来的纯律、十二平均律等。

最早的生成音阶的方法总是基于简单比例的原则，例如2:1是八度，3:2是五度等。但随着不断地推演，音阶显示出一个恼人的性质：如果要保证音程的纯粹，则无论怎么推，音阶都无法闭合；如果要保证音阶闭合，则比例总是有一些偏差。例如三分损益法，其原理是通过将弦长按三分之一增减，来推导相邻音的频率关系：将弦长减少三分之一（损三分）得到五度音，再将弦长增加三分之一（益三分）得到四度音。以此反复操作，推导出十二个音。但经过多次迭代后，这十二律无法完全闭合，与现代的十二平均律相比存在微小误差（即“音差”）。同时，如果使用十二平均律，则五度也不再是3:2，而是接近但不相同的一个比例。

这就导致了一个几乎无解的权衡问题，音律学家们只能不断微调音律，使其至少符合听觉的美感。不过，我们先暂时抛开这个权衡的问题，来看看欧拉是如何使用数学方法生成音阶的。

如何切开八度

首先，欧拉确定了一个原则：就是首先通过1:2直接确定八度的位置，其他音符都落在八度内，这是一个基本的前提。欧拉将八度范围内的所有音符通过数学“指数”（Exponens）来表示，公式如下：

$$2^m A$$

其中：

- A 是一个奇数，由多个质数 3 和 5 的乘积构成，即$A = 3^a 5^b$。当然也可以添加7等数字进行尝试
- 2^m 是二进制幂，它的作用是将生成的音扩展到其他八度，例如生成一个G，则通过乘以2^m将其扩展为所有八度上的G。这里m要保证在人耳的听觉范围内

下面，我们来看一下完整的计算过程：

---

1. 输入：a, b

2. 计算$A = 3^a \times 5^b$
3. 找出 A 的所有正整数因数 $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，包括1和它自己，共$n$个
4. 假设最低音为$E = 2^m$，八度音为2^{m+1}
5. 从1开始遍历m，对于每个m：
    - 遍历A的所有因数，对于第i个因数d_i，找到一个正整数m_i，使得$E \leq 2^{m_i} \times d_i < 2E$
    - 此时，该因数对应的频率为$f_i = 2^{m_i} \times d_i$
    - 如果发现有d_i无法放缩到$[E, 2E)$中，则该m无效，尝试下一个m
6. 最终，我们得到n个频率的比例，加上八度音$2E$，我们的音阶共推出$n+1$个音
7. 最后进行其他处理，保证比例互质等

> 注1：如果你确信浮点运算不会出错，可以直接定m为1，使用小数计算，最后统一放缩恢复为整数，免去遍历步骤。
>
> 注2：可以扩展$A = 3^a 5^b 7^c 11^d \cdots$进行音阶生成，保证底数为质数

下面以$a = 1, b = 1$的情况进行说明。首先，计算出$A = 3^1 \times 5^1 = 3 \times 5 = 15$，分解因式得$\{1, 3, 5, 15\}$。经过计算发现，我们可以找到$m = 3$，使得：

因数 d_i	**计算** $2^{m_i} \times d_i$	**范围**$[2^m, 2 \cdot 2^m]$	**最终频率**
1	$2^3 \times 1 = 8$	$[8, 16]$	8
3	$2^1 \times 3 = 6$，缩放得 $6 \times 2^1 = 12$	$[8, 16]$	12
5	$2^1 \times 5 = 10$	$[8, 16]$	10
15	$2^0 \times 15 = 15$	$[8, 16]$	15

加上八度音16，经过排序、化简步骤，我们最后得到音阶8 : 10 : 12 : 15 : 16，即C-E-G-B-C'。对这些音继续使用2的幂进行缩放，则可以得到各个八度上的相同音。这样我们就构造出了一个音阶。这个算法我已经写好了一个python版本，读者可以到Github上下载并验证。

欧拉在书中列出了一个表格，他使用17组a, b构造了17组音阶，如下：

Mode	a	b	音阶比例	音阶
I	0	0	1 : 2	F-F
II	1	0	2 : 3 : 4	F-C-F
III	0	1	4 : 5 : 8	F-A-F
IV	2	0	8 : 9 : 12 : 16	F-G-C-F
V	1	1	8 : 10 : 12 : 15 : 16	F-A-C-E-F
VI	0	2	16 : 20 : 25 : 32	F-A-C♯-F
VII	3	0	16 : 18 : 24 : 27 : 32	F-G-C-D-F
VIII	2	1	32 : 36 : 40 : 45 : 48 : 60 : 64	F-G-A-B-C-E-F
IX	1	2	54 : 75 : 80 : 96 : 100 : 120 : 128	F-G♯-A-C-C♯-E-F
X	0	3	64 : 80 : 100 : 125 : 128	F-A-C♯-F*-F
XI	4	0	64 : 72 : 81 : 96 : 108 : 128	F-G-A*-C-D-F
XII	3	1	128 : 135 : 144 : 160 : 180 : 192 : 216 : 240 : 256	F-F♯-G-A-B-C-D-E-F
XIII	2	2	128 : 144 : 150 : 160 : 180 : 192 : 200 : 225 : 240 : 256	F-G-A-B-C-C♯-D♯-E-F
XIV	1	3	256 : 300 : 320 : 375 : 384 : 400 : 480 : 500 : 512	F-G♯-A-B*-C-C♯-E-F*-F
XV	0	4	512 : 625 : 640 : 800 : 1000 : 1024	F-A*-A-C♯-F*-F
XVI	5	0	128 : 144 : 162 : 1922 : 216 : 243 : 256	F-G-A*-C-D-E*-F
XVII	4	1	256 : 270 : 288 : 320 : 324 : 360 : 384 : 405 : 432 : 480 : 512	F-F♯-G-A-A*-B-C-C♯*-D-E-F

> **注**：欧拉的原著似乎是使用H代表B，B代表B♭。

欧拉的新音乐体系

在第九章，欧拉提出了第18种音阶；在第10章又探讨了更多复杂的音阶。欧拉还给出了一个可行的调音步骤。总的来说，这些生成的音阶有一部分可以和现有的音阶大致吻合，但部分音的频率会有一些极小的偏差，这便是对音阶的修正。但是，哪些修正是好的呢？这里至少有两个规则：首先是美感，音阶应符合人的生理心理规律，使人感到美；第二个则是可操作性，音乐毕竟需要乐器演奏，如果一个音阶难以演奏、难以转调、难以配和声，那么它就仅能存在于理论层面。

> “许多音乐家认为真正的音乐应建立在音程的均等性上，而不是音程比例的简单性。因此，他们毫不犹豫地将八度音程分为12个相等的部分，并根据这一划分确立了习惯使用的12个音。在这一体系中，他们愈加确信所有音程都变得相等，因此任何音乐作品都可以无须更改地在所有所谓的调式中演奏，并能够从原调轻松转调至任何其他调式。在这一观点上，他们并没有错。然而，他们没有意识到，这种方式实际上消除了调式中的和声特性。”
> ——欧拉

而欧拉的野心就是通过数学方法生成这样一些音阶：它首先和旧有的音阶大致兼容，保证听感使人愉悦，同时对特殊情况进行修正——通过加入一些微分音使一些和弦更加纯粹、和谐。然后，使用数学方法对这些音节的音程、和声、调律、转调等进行研究，形成一套完整的乐理体系，它完全基于数学。这正是该书第八章之后的内容。这里需要说明，这个乐理体系只是说明哪些写作是不合理的，并解释令人愉悦的音乐的原理，也能为写作提供一些原则的指导，但它并不

能通过计算创作出一部音乐作品。同时，这个体系并不明确规定和谐、不和谐的边界，是开放性的。因而，这套理论实际并不打压作曲家的创造性。