

被遗忘的数学奇书：欧拉如何用数学解释音乐？《尝试音乐新理论》(Tentamen novae theoriae musicae) 介绍

被遗忘的数学奇书：欧拉如何用数学解释音乐？《尝试音乐新理论》(Tentamen novae theoriae musicae) 介绍

1. 引言
2. 书籍简介
3. 和谐与愉悦的数学原理
 - 3.1 和谐：隐藏在音符中的秩序
 - 3.1.1 最小公倍数与不和谐度
 - 3.1.2 质因数分解与不和谐度
 - 3.2 音程不和谐度的可视化
 - 3.3 和声不和谐度的可视化
4. 难以协调的音阶——欧拉的新音乐体系
 - 4.1 如何切开八度
 - 4.2 欧拉的新音乐体系
 - 4.2.1 自然半音-半音音阶 (diatonic-chromatic)
 - 4.2.2 自然半音-半音音阶的调律
 - 4.2.3 新音乐体系
5. 结语

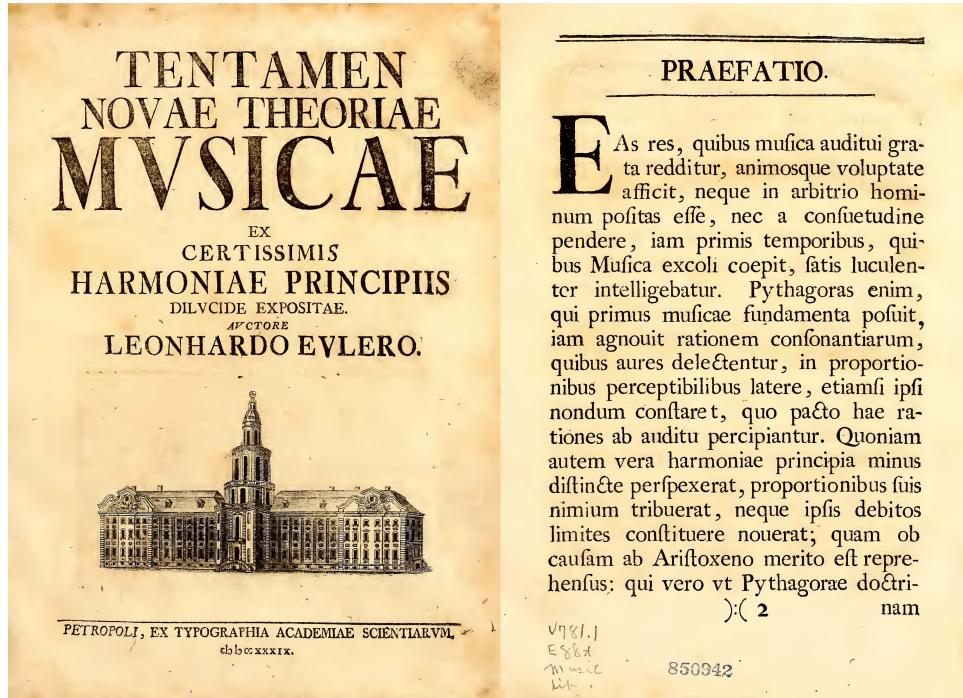
1. 引言

只要是对数学有兴趣的人，一定都知道这个如雷贯耳的名字——欧拉 (Leonhard Euler)。这位上帝公式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 的推导者，被誉为广大数学爱好者称之为神的传奇人物，是公认的有史以来最伟大的数学家之一。他的贡献不仅覆盖了数学的几乎所有领域，还对物理学、工程学、经济学等进行了研究。你几乎能在各个科目中找到以欧拉命名的公式。



图：路德维希·凡·欧拉在进行乐理研究 (bushi)

然而，鲜有人知道，欧拉还涉足了音乐理论的研究。1739年，欧拉（32岁）撰写了《尝试新音乐理论：基于确凿的和声原理的清晰阐述》（*Tentamen Novae Theoriae Musicae Ex Certissimis Harmoniae Principiis Dilucide Expositae*），试图将音乐理论纳入数学的体系之中。然而，这本书并未得到足够的关注，即便在外网相关资料也寥寥无几，中文世界则几乎是一片空白。幸运的是，仍有部分学术论文对该书进行了研究，[17th Century Math](#)的版主——一位独立研究者，还将这本书从拉丁文翻译成了英文，使得普通读者也能一窥这部奇书的内容。拉丁文原版则可以从[这个网站](#)下载。本文也许是中文互联网第一篇较全面对该书进行介绍的文章。



音乐与数学的结合由来已久，从毕达哥拉斯发现音程与弦长比例、中国的“三分损益法”，到十二平均律的计算，数学始终为音乐提供理论基础。文艺复兴后，理性主义兴起，数学家与音乐家尝试用数学语言描述音乐。欧拉亦是其中一员，他从古希腊哲学和巴洛克音乐汲取灵感，用数学研究音阶、音程与和声，提出平衡各种律法的新体系，数学化地描述和声与调式，同时也包含了对写作方法的指导。

由于本人水平有限，对音乐和数学都仅停留在普通爱好者的阶段，因此本文只能粗略探讨《尝试音乐新理论》的部分内容，主要还是猎奇，满足一下好奇心。希望本文能够抛砖引玉，吸引更多中文互联网的读者关注这本奇书，挖掘其中的奥妙。

如果您想要更好的阅读体验，可以到[这个网页](#)阅读。走之前记得留个赞和收藏哦~

2. 书籍简介

虽然本文仅关注书中几个简单的、有趣的点，但考虑到中文互联网对该书的介绍几乎为零，这里还是对该书的大致结构先做一个介绍。该书目录结构如下（页码按拉丁文原版）：

- 第1章 关于声音与听觉，第1页
- 第2章 关于美感与和声的原则，第26页
- 第3章 关于音乐的总体研究，第44页
- 第4章 关于和声音程，第56页
- 第5章 关于和声音程的连续性，第76页
- 第6章 关于和声音程的序列，第90页
- 第7章 关于各种音程的通用名称，第102页
- 第8章 关于音乐的音阶类型，第113页
- 第9章 关于自然-半音阶音阶，第132页

- 第10章 关于其他更复杂的音乐音阶，第151页
 - 第11章 关于自然-半音阶音阶中的和声音程，第165页
 - 第12章 关于自然-半音阶音阶中的调式与体系，第175页
 - 第13章 关于特定调式与体系中的作曲方法，第195页
 - 第14章 关于调式与体系的转换，第252页
-

我认为大致可以分为以下几个部分：

1. 第一部分是第1、3章，这两章主要从概念上对声音、音乐等进行了研究，有助于我们了解背景知识；
2. 第二部分是第2、4、7章，这里主要研究音程和谐度这个问题；
3. 第三部分是第5、6章，这里开始从更大的层面研究，从单个和弦扩展到完整的音乐作品；
4. 第四部分是第8、9、10章，这里欧拉使用数学方法生成音阶；
5. 第五部分是第11、12、13、14章，这里欧拉基于前面的理论基础构建一个新的音乐理论体系，并给出了调律、写作等方面的指导意见；

这本书虽然仅有300页，相较于欧拉著作的总量而言可谓微不足道，但其中蕴含的精妙思想也足够普通人潜心研究一年半载。本文将带领读者一同感受，巴洛克时期的欧拉是如何通过数学来阐释音乐理论的。

3. 和谐与愉悦的数学原理

本篇内容主要对应原书第二章和第四章的内容。首先，我们明确：欧拉的音乐理论体系关注的维度只有两个——**音高**和**持续时间（节奏）**。虽然音量等因素也会影响音乐效果，并具备一定的规律，但欧拉认为音量具有较强的主观性与随意性，因此未将其纳入体系之中。

这让我想起了B站up主[王乐乐乐游](#)在一个视频中对“织体”的定义。他提到，所谓织体，就是当不能对音色进行控制的时候，如何仅通过音的组织来勾勒出丰富的音响。如果考虑到巴赫时期羽管键琴对音量控制的极大局限性，我们可以说，是音高和节奏构成了音乐的**骨架**，而音色和音量则是音乐的**血肉**。欧拉的研究目标就是抛开“血肉”，专注于这个音乐的“骨架”。

3.1 和谐：隐藏在音符中的秩序

音乐中的所有愉悦都源于对比率的感知，这些比率存在于多个数字之间，因为时间的持续也可以用数字来表示。
——欧拉

在调性音乐体系中，音乐是否“好听”，从和声层面来看，至少涉及两个核心因素：一是和声本身的**协和程度**，二是和声之间的**连接过渡**。我们暂时仅关注前者。我们知道，不同音程的和谐程度差异显著，例如纯五度较为和谐，而小二度或大七度则较为刺耳。同时，不同和弦的听感也各有特点：例如大三和弦（C-E-G）因其稳定性显得悦耳，而减七和弦（B-D-F-A_b）则张力十足。欧拉认为，和谐的本质是一种隐藏在声音中的“**秩序**”带来的愉悦感。这种秩序并非纯粹的主观感受，也不是特定文化独有现象，而是一种可以用数学描述的、普适的客观规律。

这种理论并非欧拉首创，而是源远流长。读者若具备一定乐理基础，对该理论应有所了解。例如，当两个音的频率比为2:1时（即一个音的频率是另一个音的两倍），它们构成了八度音。这种比例关系非常简单，因此人类对这种声音的秩序感知最为清晰。同样，频率比为3:2（即纯五度）也被认为和谐，因为这也是一种简单的数学关系。总体来说，和谐的声音听起来悦耳，是因为它们的频率之间存在**简单明确的整数比例关系**。比例越简单，听感越和谐；比例越复杂（如趋向无理数），听感则越刺耳。

欧拉进一步指出，和谐和愉悦是相关的，但并不等同。欧拉在书中写到：

因此可以看出，让人感到愉悦与引发欢笑并非同一回事，而令人感到悲伤与令人不悦也并非对立。关于其中的道理，我们已在某种程度上解释过了：凡是能让我们感知到秩序的事物，都会让人感到愉悦。而其中，那些秩序更简单、更容易理解的事物，会引发欢乐；而那些秩序较为复杂、不易被察觉的事物，往往让人感到悲伤。

可见，这里欧拉的“愉悦”并不仅指欢乐，而是指“打动人心”、“令人喜欢”、“感到美”。总的来说，和谐的音使人欢乐，不和谐的音使人悲伤，前提是它们都遵循秩序，只是感知秩序的难易程度不同。而毫无秩序的音符则令人生厌，正如欧拉所说：

如果我们无法在某些事物中感知到秩序，我们会感到愉悦的程度会减弱；如果完全察觉不到任何秩序，那么我们对所呈现的事物将再也不会感到喜爱。而如果我们不仅无法察觉到秩序，反而发现某些事物完全违背了理性，甚至扰乱了原本可能存在的秩序，那么我们将会对此感到厌恶，甚至几乎会带着痛苦来感知这些事物。

不过，当20世纪调性音乐发展到极致后，勋伯格提出了无调性音乐体系，打破了以上被人们奉为圭臬的规律。但这就不是我们要探讨的了。

当然，欧拉作为数学家不可能止步于概念的探讨，他在书中提出了一种**度量不和谐度的公式**，可以用来衡量任何和弦的和谐程度。具体公式如下：

$$E(n) = 1 + \sum_{k=1}^r a_k(p_k - 1)$$

其中：

- $E(n)$ 表示不和谐度， n 是频率比率的最小公倍数。
- n 被分解为质因数的形式： $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ ，其中 p_k 为不同的质数， $a_k \geq 1$ 。

我们可以举两个例子：

1. 纯五度：比率为 3 : 2。

- 最小公倍数： $\text{LCM}(3, 2) = 6$ 。
- 质因数分解： $6 = 2^1 \cdot 3^1$ 。
- 计算： $E(6) = 1 + 1 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (3 - 1) = 1 + 1 + 2 = 4$ 。

2. 纯三度：比率为 5 : 4。

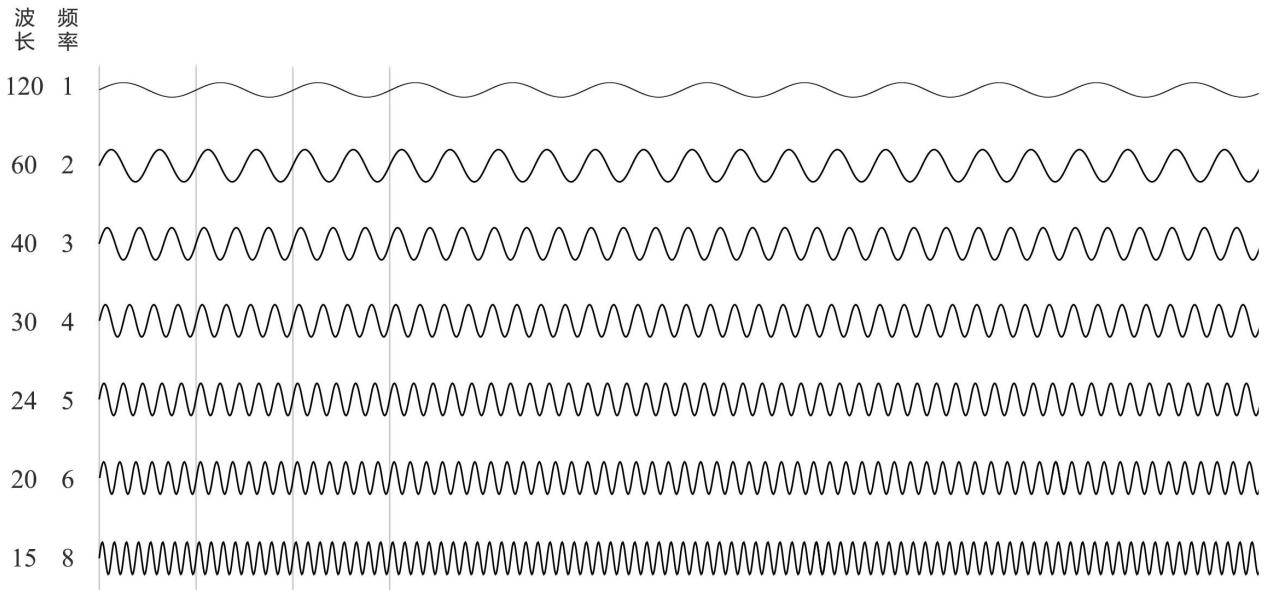
- 最小公倍数： $\text{LCM}(5, 4) = 20$ 。
- 质因数分解： $20 = 2^2 \cdot 5^1$ 。
- 计算： $E(20) = 1 + 2 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (5 - 1) = 1 + 2 + 4 = 7$ 。

我们可以使用python实现这个算法，这里就不做展示了，感兴趣的读者可以到[Github仓库](#)中下载查看代码。读者可以自行运行验证。

3.1.1 最小公倍数与不和谐度

我们已经知道，比例越简单，听感越和谐。那么，如何量化这种“简单程度”呢？假设比例已化为最简互质的形式。我们可能会直观地认为，分子分母的和可以反映其复杂度。例如， $1/2$ 的分子分母和为 $1 + 2 = 3$ ， $1/3$ 的和为 $1 + 3 = 4$ ， $9/11$ 的和为 $9 + 11 = 20$ 。显然，比例越复杂，分子分母的和就越高。类似地，也可以用分子分母的乘积替代求和。

然而，欧拉首先计算了另一个更具扩展性和物理意义的指标：**最小公倍数（LCM）**。这种方法的第一个优势在于，它不仅适用于两个音的频率比，还可以轻松扩展到多个音的情况，并且与声音的物理本质紧密相关。下面我给一个不一定正确的猜想：声音本质上是波的振动。假设两个音的频率比为 $2 : 3$ ，可以类比为两个球在跳动：第一个球每3秒跳一次，第二个球每2秒跳一次（注意周期长度和频率成反比），那么它们会在多久后同时落地？答案是6秒，即它们频率比的最小公倍数。由此可知，**最小公倍数正是描述多个音的波形在多长时间单位内“对齐”的一个量化指标**。为直观理解，我们可以优化欧拉在书中给出的图片：



更复杂的例子如 $4 : 5 : 6$ ，对应的最小公倍数为60，意味着三个音的波形需要60个单位时间才能完全对齐一次。我猜想原理可能是：音波的相位在此期间大部分时间都是错开的，并且每个区间错开的程度不同，因而这60个单位时间内，声音波形都是不一样的，复合后的波形呈现出复杂、不规律的形状。事实上，对于复合的音波函数，这个60就是它的周期（60与周期成正比，具体值需要通过频率计算）。

3.1.2 质因数分解与不和谐度

那么，是不是通过最小公倍数，我们就可以衡量和弦的不和谐度了呢？答案是不行，欧拉认为，还需要进行质因数分解（是否有对声学较熟悉的读者能够给出物理层面的解释）。一个数的质因数分解反映了其构造的基本成分。质数可以看作是整数的“基本单位”，通过它们的组合能唯一地构造出任意整数。因此，质因数分解能清晰地刻画出一个数的复杂性。此外，欧拉认为，小的质因数更为简单，因而在公式中的求和项 $\sum_{k=1}^r a_k(p_k - 1)$ 中乘以了这个质因数本身，这使得较大的质因数能显著提高得分。这本质上是对最小公倍数的质因数分解进行“加权处理”。总的来说，不和谐度取决于两个方面：质因数的数量，和质因数的大小。

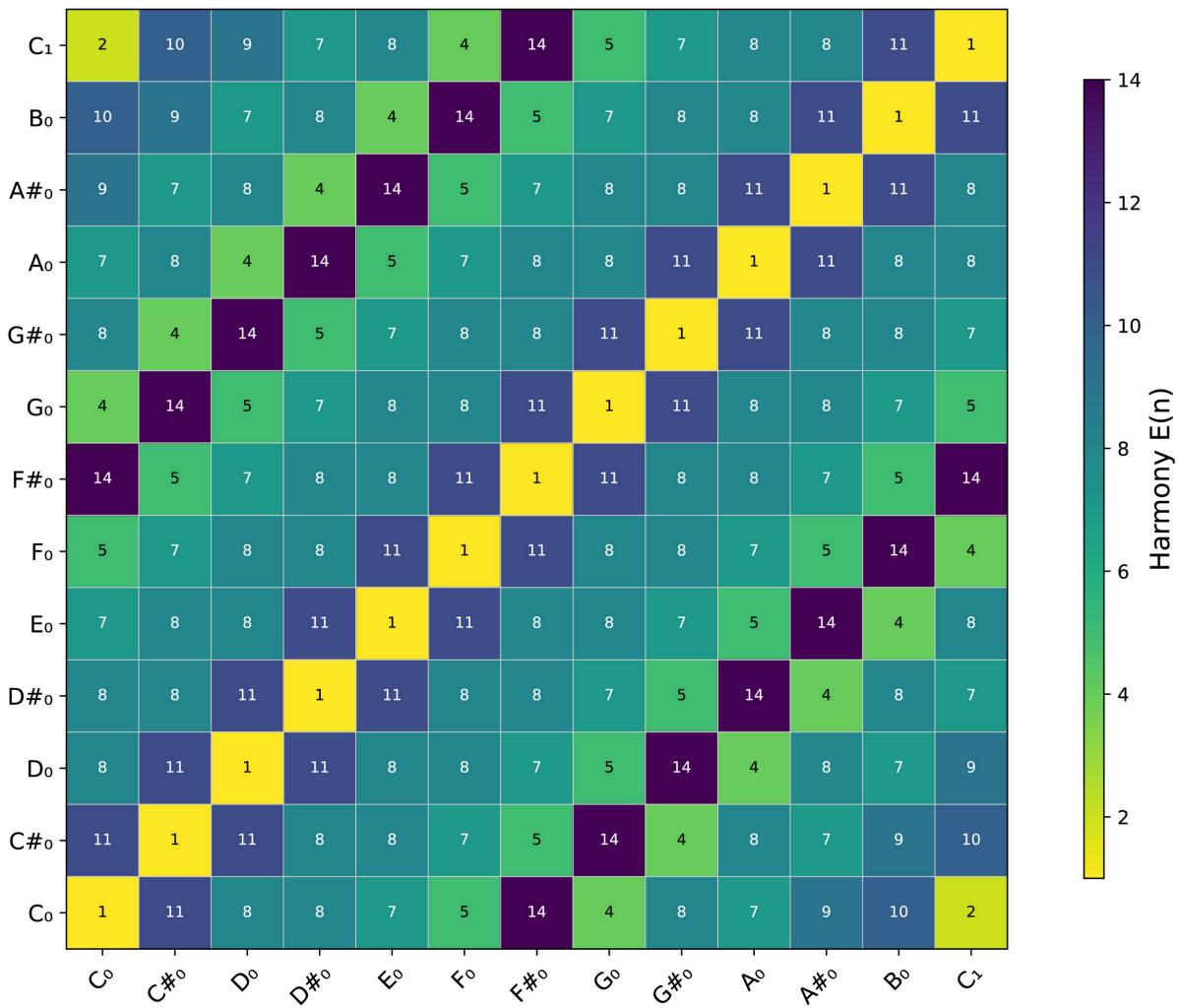
3.2 音程不和谐度的可视化

将各个音程的近似比例代入后，我们可以得到下表：

名称	近似比率	最小公倍数 (n)	质因数分解	次数 E(n)
纯一度 (Unison)	1:1	1	-	1
小二度 (Minor Second)	16:15	240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	11
大二度 (Major Second)	9:8	72	$2^3 \cdot 3^2$	8
小三度 (Minor Third)	6:5	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	8
大三度 (Major Third)	5:4	20	$2^2 \cdot 5$	7
纯四度 (Perfect Fourth)	4:3	12	$2^2 \cdot 3$	5
增四度 (Tritone)	45:32	1440	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	14
减五度 (Diminished Fifth)	64:45	2880	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$	15
纯五度 (Perfect Fifth)	3:2	6	$2 \cdot 3$	4
小六度 (Minor Sixth)	8:5	40	$2^3 \cdot 5$	8
大六度 (Major Sixth)	5:3	15	$3 \cdot 5$	7
小七度 (Minor Seventh)	9:5	45	$3^2 \cdot 5$	9
大七度 (Major Seventh)	15:8	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	10
纯八度 (Octave)	2:1	2	2	2

我们可以可视化为一张热图：

Pitch Harmony Heatmap



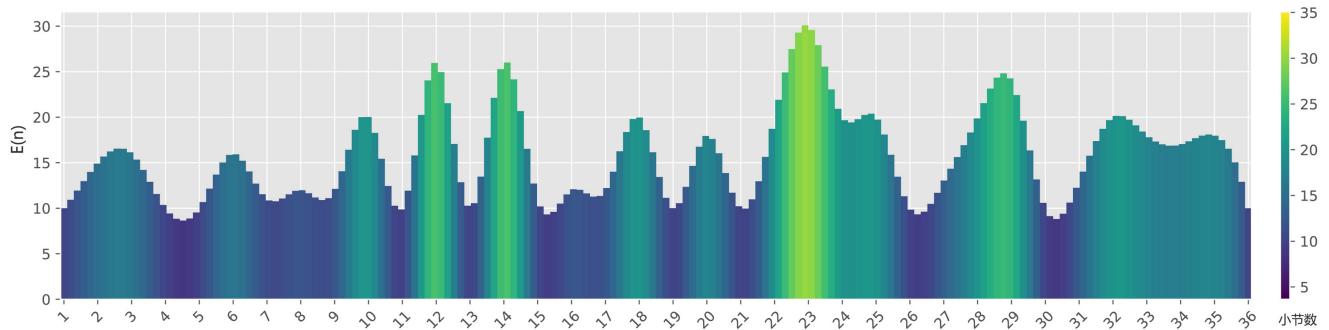
可以看到，图中的结果和我们的经验是基本吻合的，单音不和谐度为1，因而最和谐；属音、下属音相对较和谐；小二度、七度等较不和谐。增四度的值比想象中大一些，不过也合情合理，这个音中国古代称之为变徵之音，这个音能打破五音调式，表达悲伤、感叹、忧郁或其他复杂情感。注意这个表仅基于近似比率，仅供参考。

3.3 和声不和谐度的可视化

前面已经提到，欧拉的算法是可以扩展到多个音的和弦的。下面我们就以经典的巴赫《C大调前奏曲》为例进行处理。首先将分解和弦还原为柱式和弦：

The diagram shows a musical score for Bach's Prelude I followed by a transformation arrow pointing to a simplified chord progression. The score consists of two staves of sixteenth-note patterns. The transformed version shows the chords in a column format: G, G.

接下来使用python代码对和弦进行分析，最终得到下面的图（进行了插值以保证平滑）：



从中我们可以明显看到不和谐度的变化规律，音乐像是呼吸一般跌宕起伏，在一弛一张中不断发展。这使得我们能够从另一个侧面理解传统乐理的底层逻辑。

以上两张图的生成代码可以在[Github仓库](#)中获取。

这里读者可能会问，在和声的T-S-D-T的变化中，如果各个和弦都仅使用正三和弦原位，不和谐度都一样，那音乐的发展从何体现？这就是接下来的内容了，即和声连接的不和谐度。

欧拉在第四章对和声理论进行了进一步的研究，这里不再涉及，感兴趣的读者可以自行阅读。此外，欧拉还在第五、六章研究了和声连接的理论，他将对单个和弦的量化方法推广到和弦序列，从而对音乐整体的和谐程度进行分析。这部分也不再涉及。

4. 难以协调的音阶——欧拉的新音乐体系

这一节主要对应原书第八章的内容。对音乐只要有基本了解的读者应该都知道一些常见的音阶，例如大调音阶、小调音阶、Dorian音阶、半音阶、五声音阶等，它们由不同的方法生成，例如中国的三分损益法，古希腊的五度相生律，后来的纯律、十二平均律等。

最早的生成音阶的方法总是基于简单比例的原则，例如 $2:1$ 是八度， $3:2$ 是五度等。但随着不断地推演，音阶显示出一个恼人的性质：如果要保证音程的纯粹，则无论怎么推，音阶都无法闭合；如果要保证音阶闭合，则比例总是有一些偏差。例如三分损益法，其原理是通过将弦长按三分之一增减，来推导相邻音的频率关系：将弦长减少三分之一（损三分）得到五度音，再将弦长增加三分之一（益三分）得到四度音。以此反复操作，推导出十二个音。但经过多次迭代后，这十二律无法完全闭合，与现代的十二平均律相比存在微小误差（即“音差”）。同时，如果使用十二平均律，则五度也不再是 $3:2$ ，而是接近但不相同的一个比例。

这就导致了一个几乎无解的权衡问题，音律学家们只能不断微调音律，使其至少符合听觉的美感。下面，我们来看看欧拉是如何使用数学方法生成音阶的。

4.1 如何切开八度

首先，欧拉确定了一个原则：就是首先通过 $1:2$ 直接确定八度的位置，其他音符都落在八度内，这是一个基本的前提。欧拉将八度范围内的所有音符通过数学“指数”（Exponens）来表示，公式如下：

$$2^m A$$

其中：

- A 是一个奇数，由多个质数 3 和 5 的乘积构成，即 $A = 3^a 5^b$ 。当然也可以添加 7 等数字进行尝试。每一个 (a, b) 组合对应一种音阶。
- 2^m 是二进制幂，它的作用是将生成的音扩展到其他八度，例如生成一个 G，则通过乘以 2^m 将其扩展为所有八度上的 G。这里 m 要保证在人耳的听觉范围内

下面是完整的计算过程：

1. 输入: a, b
2. 计算 $A = 3^a \times 5^b$
3. 找出 A 的所有正整数因数 $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, 包括1和它自己, 共 n 个, 此时第一个数一定是1
4. 对 A 的所有因数使用 2^m 进行缩放, 使其落入 $[1, 2)$ 之间
5. 最终, 我们得到 n 个频率的比例, 加上八度音2, 我们的音阶共推出 $n + 1$ 个音
6. 进行排序和缩放, 使比例重新变为互质的整数

注1: 由于担心浮点运算有偏差, 因此实际代码实现步骤有所不同

注2: 理论上可以扩展 $A = 3^a 5^b 7^c 11^d \dots$ 进行音阶生成, 保证底数为质数, 但实际不使用

下面以 $a = 1, b = 1$ 的情况进行说明。首先, 计算出 $A = 3^1 \times 5^1 = 3 \times 5 = 15$, 分解因式得 $\{1, 3, 5, 15\}$ 。经过计算发现, 我们可以找到 $m = 3$, 使得:

因数 d_i	缩放到 $[1, 2)$	整数缩放因子	最终频率
1	$2^0 \times 1 = 1$	8	8
3	$2^{-1} \times 3 = 3/2$	8	12
5	$2^{-2} \times 5 = 5/4$	8	10
15	$2^{-3} \times 15 = 15/8$	8	15

加上八度音16, 经过排序、化简步骤, 我们最后得到音阶 $8 : 10 : 12 : 15 : 16$, 即 C-E-G-B-C'。对这些音继续使用2的幂进行缩放, 则可以得到各个八度上的同名音。这样我们就构造出了一个音阶。这个算法我已经写好了一个python版本, 读者可以到[Github仓库](#)下载并验证。

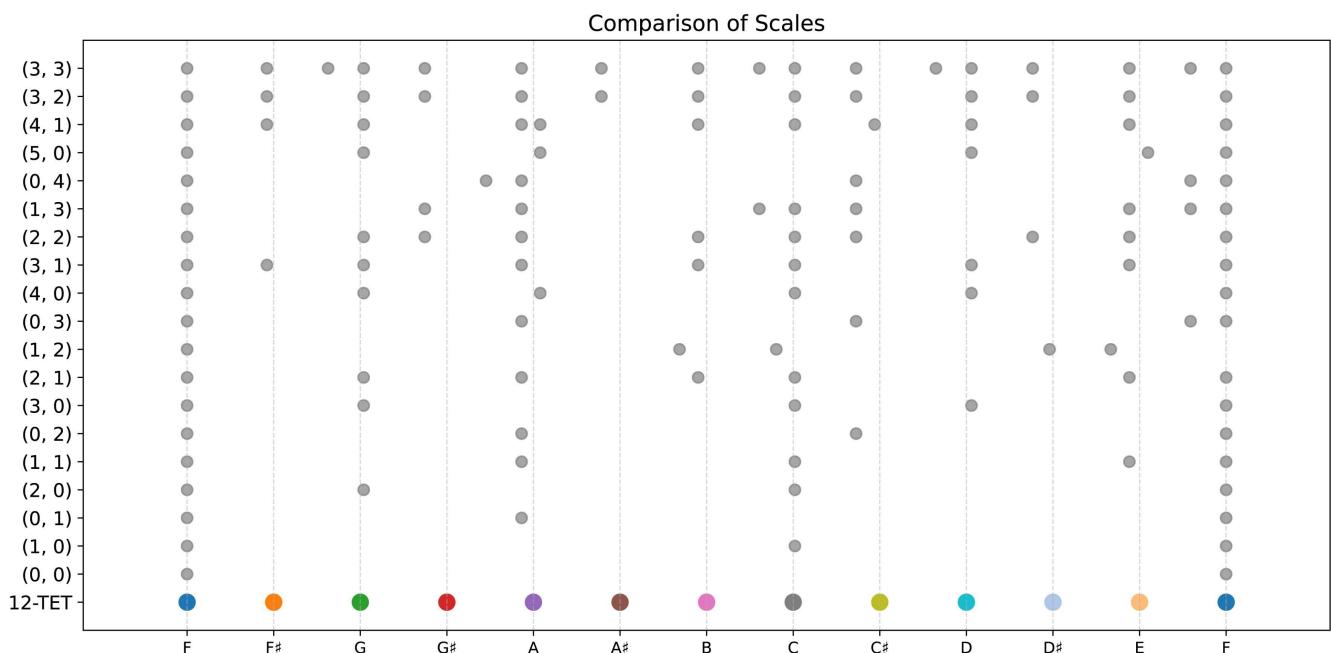
欧拉在书中列出了一个表格, 他使用17组 a, b 构造了17组音阶, 如下:

Mode	a	b	音阶比例	音阶
I	0	0	1 : 2	F-F
II	1	0	2 : 3 : 4	F-C-F
III	0	1	4 : 5 : 8	F-A-F
IV	2	0	8 : 9 : 12 : 16	F-G-C-F
V	1	1	8 : 10 : 12 : 15 : 16	F-A-C-E-F
VI	0	2	16 : 20 : 25 : 32	F-A-C♯-F
VII	3	0	16 : 18 : 24 : 27 : 32	F-G-C-D-F
VIII	2	1	32 : 36 : 40 : 45 : 48 : 60 : 64	F-G-A-B-C-E-F
IX	1	2	54 : 75 : 80 : 96 : 100 : 120 : 128	F-G♯-A-C-C♯-E-F
X	0	3	64 : 80 : 100 : 125 : 128	F-A-C♯-F*-F
XI	4	0	64 : 72 : 81 : 96 : 108 : 128	F-G-A*-C-D-F
XII	3	1	128 : 135 : 144 : 160 : 180 : 192 : 216 : 240 : 256	F-F♯-G-A-B-C-D-E-F
XIII	2	2	128 : 144 : 150 : 160 : 180 : 192 : 200 : 225 : 240 : 256	F-G-A-B-C-C♯-D♯-E-F
XIV	1	3	256 : 300 : 320 : 375 : 384 : 400 : 480 : 500 : 512	F-G♯-A-B*-C-C♯-E-F*-F
XV	0	4	512 : 625 : 640 : 800 : 1000 : 1024	F-A*-A-C♯-F*-F
XVI	5	0	128 : 144 : 162 : 1922 : 216 : 243 : 256	F-G-A*-C-D-E*-F
XVII	4	1	256 : 270 : 288 : 320 : 324 : 360 : 384 : 405 : 432 : 480 : 512	F-F♯-G-A-A*-B-C-C♯*-D-E-F

注1：欧拉的原著应该是使用H代表B， B代表B♭。

注2：F*表示和F很接近的一个微分音

所有这些音阶可以可视化为下面的图表，纵坐标形式为(a, b)，读者可以轻松看出频率的偏差：



4.2 欧拉的新音乐体系

在第九章，欧拉提出了第18种音阶；在第10章又探讨了更多复杂的音阶。欧拉还给出了一个可行的调音步骤。总的来说，这些生成的音阶有一部分可以和现有的音阶大致吻合，但部分音的频率会有一些极小的偏差，这便是对音阶的修正。但是，哪些修正好的呢？这里至少有两个规则：首先是美感，音阶应符合人的生理心理规律，使人感到美；第二个则是可操作性，音乐毕竟需要乐器演奏，如果一个音阶难以演奏、难以转调、难以配和声，那么它就仅能存在于理论层面。

许多音乐家认为真正的音乐应建立在音程的均等性上，而不是音程比例的简单性。因此，他们毫不犹豫地将八度音程分为12个相等的部分，并根据这一划分确立了习惯使用的12个音。在这一体系中，他们愈加确信所有音程都变得相等，因此任何音乐作品都可以无须更改地在所有所谓的调式中演奏，并能够从原调轻松转调至任何其他调式。在这一观点上，他们并没有错。然而，他们没有意识到，这种方式实际上消除了调式中的和声特性。——欧拉

而欧拉的野心就是找到生成一系列音阶方法：它们首先和旧有的音阶大致兼容，保证听感使人愉悦，同时对特殊情况进行修正——通过加入一些微分音使一些和弦更加纯粹、和谐。然后，使用数学方法对这些音节的音程、和声、调律、转调等进行研究，形成一套完整的乐理体系，它完全基于数学。这正是该书第八章之后的内容。这里需要说明，这个乐理体系只是说明哪些写作是不合理的，并解释令人愉悦的音乐的原理，也能为写作提供一些原则的指导，但它并不能通过计算创作出一部音乐作品。同时，这个体系并不明确规定和谐、不和谐的边界，是开放性的。因而，这套理论实际并不打压作曲家的创造性。

注：这里并不是“生成一个音阶”，而是找到“生成一系列音阶的方法”，使该体系包含多种调式，且能够转调。

4.2.1 自然半音-半音音阶 (diatonic-chromatic)

我们将第十八种音阶称作“自然半音-半音音阶”，这一命名的依据显然来自其指数形式 $2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$ ，因为它是“自然半音音阶”指数 $2^m \cdot 3^3 \cdot 5$ 和“半音音阶”指数 $2^m \cdot 3^2 \cdot 5^2$ 的最小公倍数，因此结合了这两种音阶。由此我们可以推测，这种音阶可能会与当前音乐家普遍接受的音阶相符，因为音乐家也曾将这种音阶视为由古代的自然半音与半音结合而成。——欧拉

简单来说，“自然半音-半音音阶”就是通过公式 $2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$ 生成的音阶，使用上面我给出的python程序，可以得到如下结果：

- 1 计算 $A = 3^3 * 5^2 * 7^0 * 11^0 = 675$
- 2 A 的因数: [1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675]
- 3 生成音阶: 512:540:576:600:640:675:720:768:800:864:900:960:1024
- 4 音阶数 (不含八度音) : 12

我们假定以 $A = 440\text{Hz}$ 为基准音, 则可以得到以下表格:

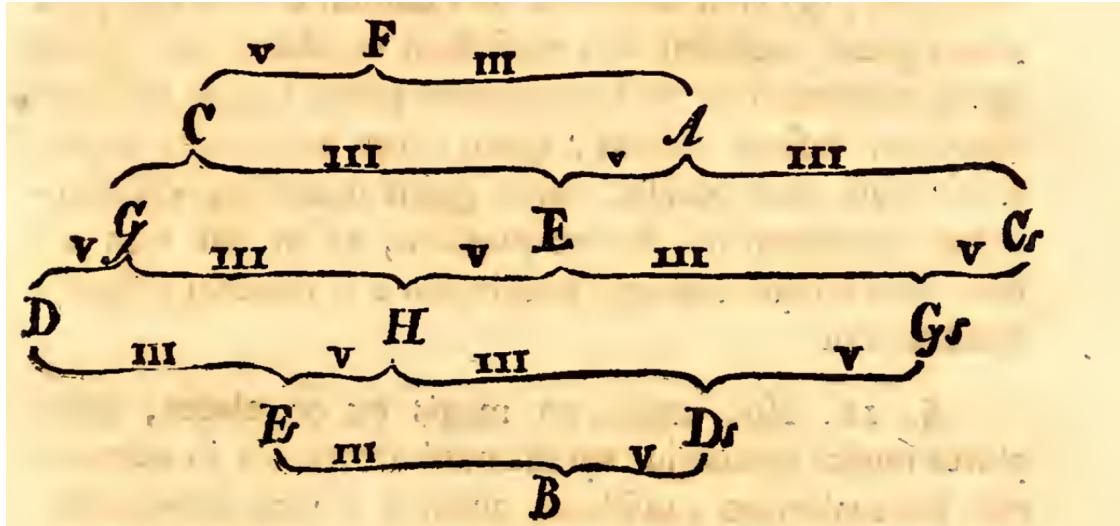
音名	自然半音-半音音阶频率 (Hz)	十二平均律频率 (Hz)	差异 (Hz)	差异 (音分)
A	440.0000	440.0000	0.0000	0.0000
A♯	464.0625	466.1638	2.1013	7.8213
B	495.0000	493.8833	-1.1167	-3.9100
C	515.6250	523.2511	7.6261	25.4176
C♯	550.0000	554.3653	4.3653	13.6863
D	580.0781	587.3295	7.2514	21.5076
D♯	618.7500	622.2540	3.5040	9.7763
E	660.0000	659.2551	-0.7449	-1.9550
F	687.5000	698.4565	10.9565	27.3726
F♯	742.5000	739.9888	-2.5112	-5.8650
G	773.4375	783.9909	10.5534	23.4626
G♯	825.0000	830.6094	5.6094	11.7313
A	880.0000	880.0000	0.0000	0.0000

上图 (Comparison of scales) 对 $a = 3, b = 2$ 的情况做了可视化, 读者可以回去查看。一般而言, 差异超过20音分就能感觉到明显的差异了。欧拉认为, 这个音阶在微调一些微分音后可以使用。

因此, 现行的八度划分方式已经通过实践达到了极致的完善, 若想使其更加完美, 仅需进行一个修正: 将用字母B标记的音稍微降低一个微分音 (即大半音和小半音的差异)。通过这一修正, 就可以得到一种最完美的音阶, 最适合用于和声的形成。至于音阶包含的音数, 这种音阶将包含与和声需求完全一致的音数, 且不多也不少。此外, 这些音之间的关系完全符合和声的规律所决定的比例。 —— 欧拉

注: 这里的B指B♭

4.2.2 自然半音-半音音阶的调律



因此，具备如此敏锐听觉的人可以按照以下顺序对乐器进行调音。首先根据具体情况确定音 F，并用此音作为基础获得所有标记为同样字母的音高。接着，找到音 F 的纯五度 C 和大三度 A，由此可以通过前述第一条的要求确定其余所有同字母标记的音高。然后，从音 C 得到其纯五度 G 和大三度 E，这个音 E 同时也是音 A 的纯五度；并从音 A 得到其大三度 C♯。接着，从音 G 得到其纯五度 D 和大三度 B，从音 E 得到其大三度 G♯，这个音 G♯ 同时也是音 C♯ 的纯五度。然后，从音 B 得到其纯五度 F♯ 和大三度 D♯，或者也可以从音 G♯ 得到音 D♯。最后，从音 D♯ 的纯五度找到音 B。以这种方法，通过重复八度音程，整个乐器就可以被正确地调节完成。

整个调音过程可以通过附加的图表更加清晰地理解。由于音 E、B、G♯、F♯ 和 D♯ 都可以通过纯五度和大三度双重方式确定，因此在调节乐器时可以获得不小的助益，因为一旦出现错误，可以立即发现并加以纠正。

以上为欧拉书中原话，应该讲得比较清楚了，这里不再解释。图中最右侧如 C, G, D 右下角的蛇形符号是“s”，代表升号。

4.2.3 新音乐体系

欧拉试图在剩余的章节构建他的新音乐体系。例如在第十一章中，欧拉对该体系内的协和音、和弦等进行归纳，并按不和谐度进行分类，还结合实际对不同类的和弦进行了使用方面的解释；在第十二章中，欧拉描述了转调，他将转调前后的音阶整合到 $2^n \cdot 3^a \cdot 5^b$ 中，并指出转调在 $2^n \cdot 3^3 \cdot 5^2$ 内为纯净转调，超出但在 $2^n \cdot 3^7 \cdot 5^2$ 内为不纯转调，超出此范围则非法；在第十三章中，欧拉用巨量的篇幅对作曲方法进行了探讨。这些内容过于庞杂，已经超出了我短期内进行学习的能力，这里就不再涉及。这里再次感叹欧拉的伟大！有人云，天才与普通人的差距，比普通人和狗的差距还大，此话诚不欺我！

即便单一体系内的变化再丰富，若长时间坚持同一体系，难免会让人感到厌倦而非愉悦。因为音乐不仅需要声音与和声的和谐美感，还要求多样性。因此，听觉对象需要不断变化。 —— 欧拉

5. 结语

欧拉的《尝试音乐新理论》是一部横跨数学与音乐的奇书，它不仅展现了欧拉作为数学家的深厚功力，也体现了他对艺术的敏锐感知力。欧拉使用简单的初等运算将音乐统一于秩序与美感中，令人叹为观止。

欧拉一生著作颇丰，根据我的了解，前几年，整理了100多年才整理完的欧拉全集出版了，里面应该会包含此书。我相信这本书中还藏着许多智慧的宝藏供世人挖掘。当然，我们不应该认为，有了这本“上古卷轴”就能颠覆、革新现有的体系。乐理与数学的结合早已是一个较成熟的领域，音乐和数学也在欧拉之后有了长足的发展，我们已经能够更精确的描述音乐现象，例如用群论对音阶进行描述。但能够发现古人的思想碎片，感受古人的智慧本就是令人激动且有意义的，不是吗？

