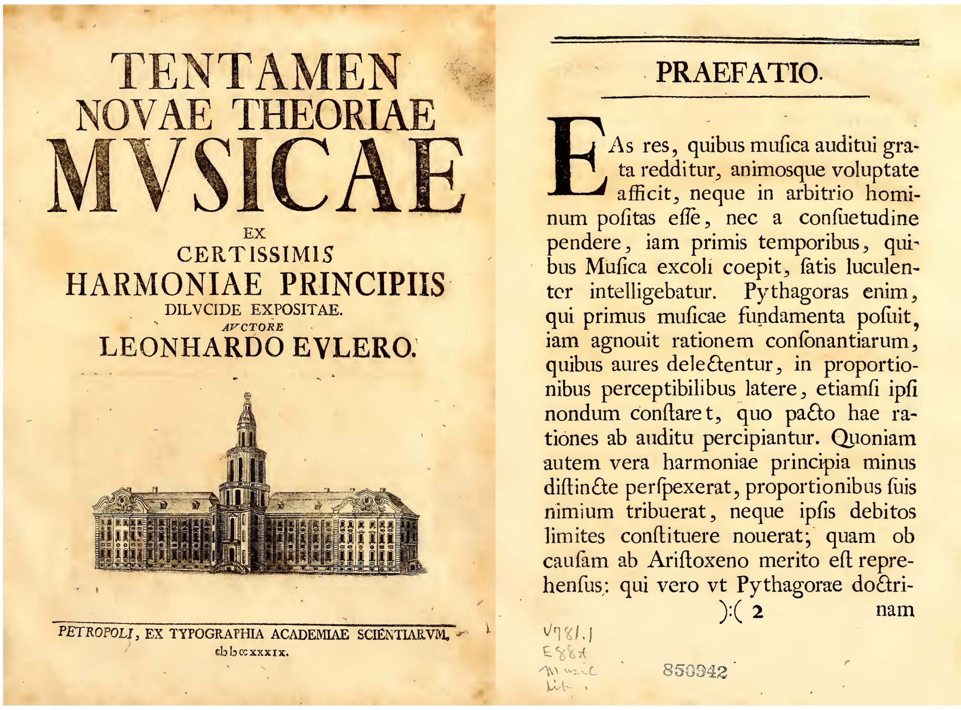
被遗忘的数学奇书：欧拉如何用数学解释音乐？《尝试音乐新理论》(Tentamen novae theoriae musicae) 介绍

1. 引言

只要是对数学有兴趣的人，一定都知道这个如雷贯耳的名字——欧拉（Leonhard Euler）。这位上帝公式$e^{i\pi}+1=0$的推导者，被广大数学爱好者称之为神的传奇人物，是公认的有史以来最伟大的数学家之一。他的贡献不仅覆盖了数学的几乎所有领域，还对物理学、工程学、经济学等进行了研究。你几乎能在各个科目中找到以欧拉命名的公式。

> 图：路德维希·凡·欧拉在进行乐理研究（bushi）

然而，鲜有人知道，欧拉还涉足了音乐理论的研究。1739年，欧拉（32岁）撰写了《尝试新音乐理论：基于确凿的和声原理的清晰阐述》（*Tentamen Novae Theoriae Musicae Ex Certissimis Harmoniae Principiis Dilucide Expositae*），试图将音乐理论纳入数学的体系之中。然而，这本书并未得到足够的关注，即便在外网相关资料也寥寥无几，中文世界则几乎是一片空白。幸运的是，仍有部分学术论文对该书进行了研究，[17th Century Math]的版主——一位独立研究者，还将这本书从拉丁文翻译成了英文，使得普通读者也能一窥这部奇书的内容。拉丁文原版则可以从[这个网站]下载。本文也许是中文互联网第一篇较全面对该书进行介绍的文章。


TENTAMEN
NOVAE THEORIAE
MVSICAE
EX
CERTISSIMIS
HARMONIAE PRINCIPIIS
DILVCIDE EXPOSITAE.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO.

PETROPOLI, EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
cIↄIↄccxxxix.

PRAEFATIO.

EAs res, quibus muſica auditui grata redditur, animosque voluptate afficit, neque in arbitrio hominum poſitas eſſe, nec a conſuetudine pendere, iam primis temporibus, quibus Muſica excoli coepit, ſatis luculenter intelligebatur. Pythagoras enim, qui primus muſicae fundamenta poſuit, iam agnouit rationem conſonantiarum, quibus aures delectentur, in proportionibus perceptibilibus latere, etiamſi ipſi nondum conſtaret, quo pacto hae rationes ab auditu percipiantur. Quoniam autem vera harmoniae principia minus diſtincte perſpexerat, proportionibus ſuis nimium tribuerat, neque ipſis debitos limites conſtituere nouerat; quam ob cauſam ab Ariſtoxeno merito eſt reprehenſus: qui vero vt Pythagorae doctrinam

):(2

音乐与数学的结合由来已久，从毕达哥拉斯发现音程与弦长比例、中国的“三分损益法”，到十二平均律的计算，数学始终为音乐提供理论基础。文艺复兴后，理性主义兴起，数学家与音乐家尝试用数学语言描述音乐。欧拉亦是其中一员，他从古希腊哲学和巴洛克音乐汲取灵感，用数学研究音阶、音程与和声，提出平衡各种律法的新体系，数学化地描述和声与调式，同时也包含了对写作方法的指导。

由于本人水平有限，对音乐和数学都仅停留在普通爱好者的阶段，因此本文只能粗略探讨《尝试音乐新理论》的部分内容，主要还是猎奇，满足一下好奇心。希望本文能够抛砖引玉，吸引更多中文互联网的读者关注这本奇书，挖掘其中的奥妙。

> 如果您想要更好的阅读体验，可以到[这个网页]阅读。走之前记得留个赞和收藏哦~

2. 书籍简介

虽然本文仅关注书中几个简单的、有趣的点，但考虑到中文互联网对该书的介绍几乎为零，这里还是对该书的大致结构先做一个介绍。该书目录结构如下（页码按拉丁文原版）：

- **第10章** 关于其他更复杂的音乐音阶，第151页
- **第11章** 关于自然-半音阶音阶中的和声音程，第165页
- **第12章** 关于自然-半音阶音阶中的调式与体系，第175页
- **第13章** 关于特定调式与体系中的作曲方法，第195页
- **第14章** 关于调式与体系的转换，第252页

我认为大致可以分为以下几个部分：

1. 第一部分是第1、3章，这两章主要从概念上对声音、音乐等进行了研究，有助于我们了解背景知识；
2. 第二部分是第2、4、7章，这里主要研究音程和谐度这个问题；
3. 第三部分是第5、6章，这里开始从更大的层面研究，从单个和弦扩展到完整的音乐作品；
4. 第四部分是第8、9、10章，这里欧拉使用数学方法生成音阶；
5. 第五部分是第11、12、13、14章，这里欧拉基于前面的理论基础构建一个新的音乐理论体系，并给出了调律、写作等方面的指导意见；

这本书虽然仅有300页，相较于欧拉著作的总量而言可谓微不足道，但其中蕴含的精妙思想也足够普通人潜心研究一年半载。本文将带领读者一同感受，巴洛克时期的欧拉是如何通过数学来阐释音乐理论的。

3. 和谐与愉悦的数学原理

本篇内容主要对应原书第二章和第四章的内容。首先，我们明确：欧拉的音乐理论体系关注的维度只有两个——**音高**和**持续时间（节奏）**。虽然音量等因素也会影响音乐效果，并具备一定的规律，但欧拉认为音量具有较强的主观性与随意性，因此未将其纳入体系之中。

这让我想起了B站up主王乐乐乐游在一个视频中对“织体”的定义。他提到，所谓织体，就是当不能对音色进行控制的时候，如何仅通过音的组织来勾勒出丰富的音响。如果考虑到巴赫时期羽管键琴对音量控制的极大局限性，我们可以说，是音高和节奏构成了音乐的**骨架**，而音色和音量则是音乐的**血肉**。欧拉的研究目标就是抛开“血肉”，专注于这个音乐的“骨架”。

3.1 和谐：隐藏在音符中的秩序

> 音乐中的所有愉悦都源于对比率的感知，这些比率存在于多个数字之间，因为时间的持续也可以用数字来表示。
> ——欧拉

在调性音乐体系中，音乐是否“好听”，从和声层面来看，至少涉及两个核心因素：一是和声本身的**协和程度**，二是和声之间的**连接过渡**。我们暂时仅关注前者。我们知道，不同音程的和谐程度差异显著，例如纯五度较为和谐，而小二度或大七度则较为刺耳。同时，不同和弦的听感也各有特点：例如大三和弦（C-E-G）因其稳定性显得悦耳，而减七和弦（B-D-F-A♭）则张力十足。欧拉认为，和谐的本质是一种隐藏在声音中的“**秩序**”带来的愉悦感。这种秩序并非纯粹的主观感受，也不是特定文化独有现象，而是一种可以用数学描述的、普适的客观规律。

这种理论并非欧拉首创，而是源远流长。读者若具备一定乐理基础，对该理论应有所了解。例如，当两个音的频率比为2:1时（即一个音的频率是另一个音的两倍），它们构成了八度音。这种比例关系非常简单，因此人类对这种声音的秩序感知最为清晰。同样，频率比为3:2（即纯五度）也被认为和谐，因为这也是一种简单的数学关系。总体来说，和谐的声音听起来悦耳，是因为它们的频率之间存在**简单明确的整数比例关系**。比例越简单，听感越和谐；比例越复杂（如趋向无理数），听感则越刺耳。

欧拉进一步指出，和谐和愉悦是相关的，但并不等同。欧拉在书中写到：

> 因此可以看出，让人感到愉悦与引发欢笑并非同一回事，而令人感到悲伤与令人不悦也并非对立。关于其中的道理，我们已在某种程度上解释过了：凡是能让我们感知到秩序的事物，都会让人感到愉悦。而其中，那些秩序更简单、更容易理解的事物，会引发欢乐；而那些秩序较为复杂、不易被察觉的事物，往往让人感到悲伤。

可见，这里欧拉的“愉悦”并不仅指欢乐，而是指“打动人心”、“令人喜欢”、“感到美”。总的来说，和谐的音使人欢乐，不和谐的音使人悲伤，前提是它们都遵循秩序，只是感知秩序的难易程度不同。而毫无秩序的音符则令人生厌，正如欧拉所说：

> 如果我们无法在某些事物中感知到秩序，我们会感到愉悦的程度会减弱；如果完全察觉不到任何秩序，那么我们对所呈现的事物将再也不会感到喜爱。而如果我们不仅无法察觉到秩序，反而发现某些事物完全违背了理性，甚至扰乱了原本可能存在的秩序，那么我们将会对此感到厌恶，甚至几乎会带着痛苦来感知这些事物。

不过，当20世纪调性音乐发展到极致后，勋伯格提出了无调性音乐体系，打破了以上被人们奉为圭臬的规律。但这就不是我们要探讨的了。

当然，欧拉作为数学家不可能止步于概念的探讨，他在书中提出了一种**度量不和谐度的公式**，可以用来衡量任何和弦的和谐程度。具体公式如下：

$$E(n) = 1 + \sum_{k=1}^{r} a_k(p_k - 1)$$

其中：

- $E(n)$ 表示不和谐度，n是频率比率的最小公倍数。
- n 被分解为质因数的形式：$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$，其中 p_k 为不同的质数，$a_k \geq 1$。

我们可以举两个例子：

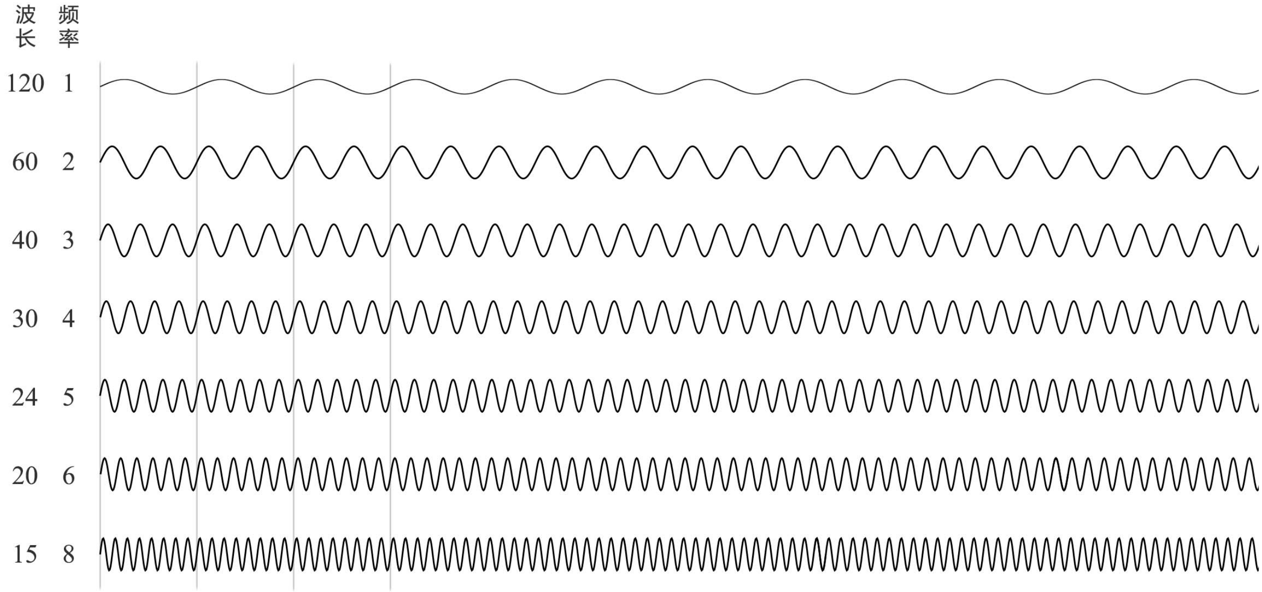
1. **纯五度**：比率为 $3:2$。
   - 最小公倍数：$\mathrm{LCM}(3, 2) = 6$。
   - 质因数分解：$6 = 2^1 \cdot 3^1$。
   - 计算：$E(6) = 1 + 1 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (3 - 1) = 1 + 1 + 2 = 4$。
2. **纯三度**：比率为 $5:4$。
   - 最小公倍数：$\mathrm{LCM}(5, 4) = 20$。
   - 质因数分解：$20 = 2^2 \cdot 5^1$。
   - 计算：$E(20) = 1 + 2 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (5 - 1) = 1 + 2 + 4 = 7$。

我们可以使用python实现这个算法，这里就不做展示了，感兴趣的读者可以到Github仓库中下载查看代码。读者可以自行运行验证。

3.1.1 猜想：欧拉不和谐度公式的物理原理

我们已经知道，比例越简单，听感越和谐。那么，如何量化这种“简单程度”呢？假设比例已化为最简互质的形式。比如，我们可能会直观地认为，分子分母的和可以反映其复杂度。例如，$1/2$的分子分母和为$1 + 2 = 3$，$1/3$的和为$1 + 3 = 4$，$9/11$的和为$9 + 11 = 20$。显然，比例越复杂，分子分母的和就越高。类似地，也可以用分子分母的乘积替代求和。不过这种简单的方法当然难以让我们满意。

欧拉则首先计算了另一个更具扩展性和物理意义的指标：**最小公倍数（LCM）**。这种方法的第一个优势在于，它不仅适用于两个音的频率比，还可以轻松扩展到多个音的情况。然后再进行**质因数分解**，并根据质因数的个数的大小进行计算。那么，为什么是最小公倍数和质因数分解呢？我猜想首先可能和音波的“错位程度”有关。当音波产生错位时，就有可能产生一些不规律的“尖峰”或零点，这些可能就是不和谐感的来源；其次，也可能和泛音列的重合程度有关，对于频率比为$a:b$的两个音波，它们的频率正比于$\mathrm{LCM}(a, b)$的泛音是重合的，泛音重合越多，则音程可能更和谐。总的来说：如果两个音频率之间的周期在很长时间后才“重合”一次，那么在更短时间内会频繁出现干涉、拍频或复杂的过渡；质因数越多、越大，可能对应更多的剧烈扰动因素，需要更长时间“同步”或“对齐”。 当然，这只是一些简单的猜想，实际上欧拉的这个公式在今天看来也是有问题的。



3.1.2 欧拉不和谐度公式的局限性

人类对和弦和谐程度，或者任意声音的刺耳程度的认识也是循序渐进的。最早人们仅使用整数比例的简单程度进行度量，早期学者也会用“声波在时域/空域上更容易同步叠加”来解释。然而，这只是一个相当粗略的认识，后来的研究如谐振理论及其后续的听觉生理学、以及20世纪的心理声学实验表明，不协和感与“拍频”、内耳基底膜频带重叠、听觉掩蔽以及谐波间的“相互扰动”都有关系。

在现代听觉科学中，对“不和谐度”最常见、最基础的量化指标之一是“拍频粗糙度”。当两个或多个频率接近但不相同的声源同时响起时，耳蜗内会产生周期性交织/干涉，造成拍频。拍频在一定范围内（约 20–40 Hz 左右）常被主观感知为“粗糙”或刺耳。具体量化方法如Plomp 和 Levelt 提出的音程协和度理论。

事实上，很多涉及视觉、听觉的理论是需要和生理学、心理学结合才能解释的。例如人眼对不同颜色的敏感度不同（参见：光谱光视效率曲线），人耳对不同频率声音的响度感受不同（参见：等响曲线）。以上两个曲线的具体形状甚至和地域、民族有一定关系。因此，欧拉试图用初等数学对不和谐度现象进行描述，在现在看来的确有很大局限性。此外，欧拉将音色、响度等排除在外，也降低了这个理论的通用性——它只能解释和弦，无法拓展到任何声音。

当然，伟大的欧拉也并非没有意识到这一点：

> 我并不否认（稍后我也会证明），通过练习和反复聆听，我们确实可以逐渐喜欢上那些最初让我们感到不悦的乐曲，反之亦然。然而，这一所谓的“充足理由原则”并未因此被推翻。因为我们不仅需要从对象本身中探寻其为何让我们喜爱或厌恶的原因，还需要考虑感官是如何将对象的形象传递给心灵的，同时还要关注心灵对所呈现的形象所作出的主要判断。由于这些因素在人与人之间可能会有所不同，甚至同一个人在不同时期也可能发生变化，因此，同一事物能让某些人喜欢，却让另一些人感到厌恶，这并不令人意外。 ——欧拉

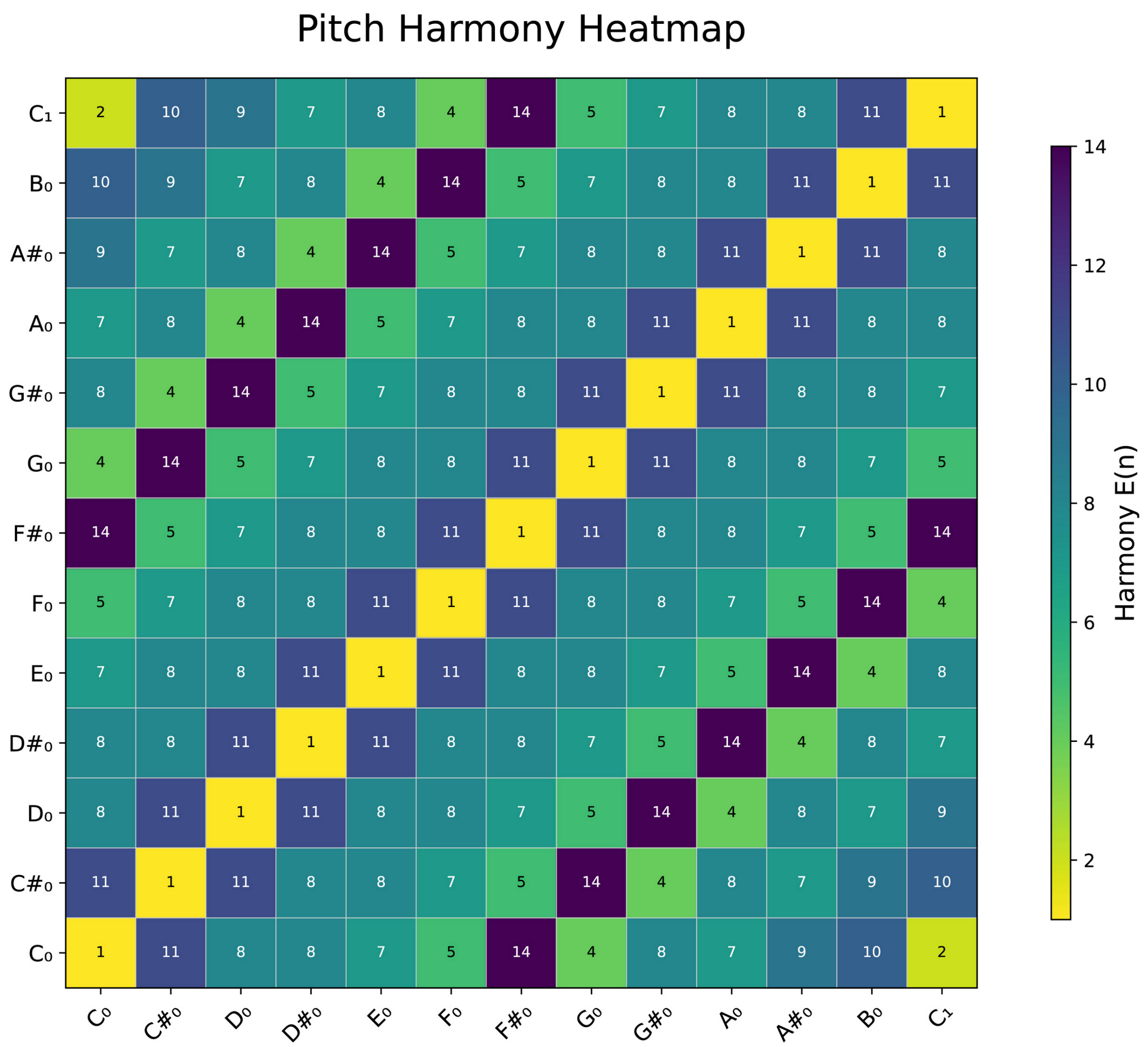
也许他只是希望抓住问题的主要矛盾，给出大致符合的框架吧。欧拉向来以强大的数感闻名，他能提出这样一个简洁且有很大解释力的公式，实在令世人佩服。

3.2 音程不和谐度的可视化

将各个音程的近似比例代入后，我们可以得到下表：

名称	近似比率	最小公倍数 (n)	质因数分解	次数 E(n)
纯一度（Unison）	1:1	1	-	1
小二度（Minor Second）	16:15	240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	11
大二度（Major Second）	9:8	72	$2^3 \cdot 3^2$	8
小三度（Minor Third）	6:5	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	8
大三度（Major Third）	5:4	20	$2^2 \cdot 5$	7
纯四度（Perfect Fourth）	4:3	12	$2^2 \cdot 3$	5
增四度（Tritone）	45:32	1440	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	14
纯五度（Perfect Fifth）	3:2	6	$2 \cdot 3$	4
小六度（Minor Sixth）	8:5	40	$2^3 \cdot 5$	8
大六度（Major Sixth）	5:3	15	$3 \cdot 5$	7
小七度（Minor Seventh）	16:9	144	$2^4 \cdot 3^2$	9
大七度（Major Seventh）	15:8	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	10
纯八度（Octave）	2:1	2	2	2

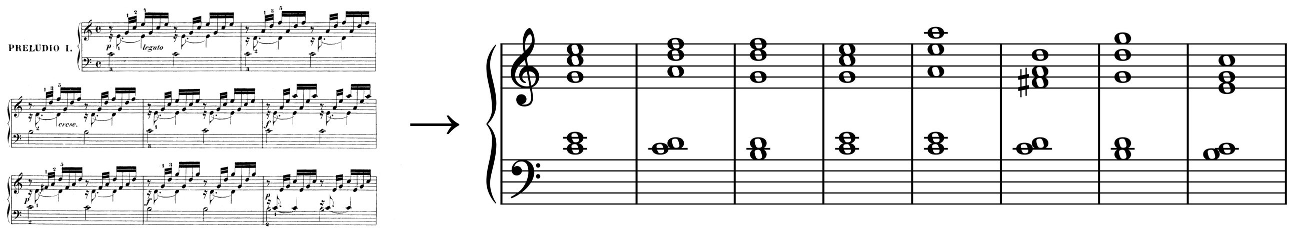
我们可以可视化为一张热图：



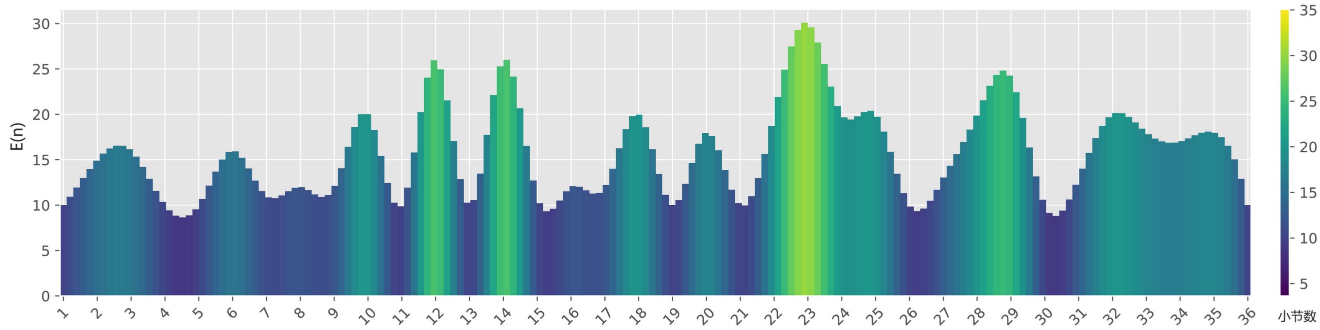
可以看到，图中的结果和我们的经验是基本吻合的，单音不和谐度为1，因而最和谐；属音、下属音相对较和谐；小二度、七度等较不和谐。增四度的值比想象中大一些，不过也合情合理，这个音中国古代称之为变徵之音，这个音能打破五音调式，表达悲伤、感叹、忧郁或其他复杂情感。注意这个表仅基于近似比率，仅供参考。

3.3 和声不和谐度的可视化

前面已经提到，欧拉的算法是可以扩展到多个音的和弦的。下面我们就以经典的巴赫《C大调前奏曲》为例进行处理。首先将分解和弦还原为柱式和弦：



接下来使用python代码对和弦进行分析，最终得到下面的图（进行了插值以保证平滑）：



从中我们可以明显看到不和谐度的变化规律，音乐像是呼吸一般跌宕起伏，在一张一弛中不断发展。这使得我们能够从另一个侧面理解传统乐理的底层逻辑。

> 以上两张图的生成代码可以在Github仓库中获取。

这里读者可能会问，在和声的T-S-D-T的变化中，如果各个和弦都仅使用正三和弦原位，不和谐度都一样，那音乐的发展从何体现？这就是接下来的内容了，即和声连接的不和谐度。

欧拉在第四章对和声理论进行了进一步的研究，这里不再涉及，感兴趣的读者可以自行阅读。此外，欧拉还在第五、六章研究了和声连接的理论，他将对单个和弦的量化方法推广到和弦序列，从而对音乐整体的和谐程度进行分析。这部分也不再涉及。

4. 难以协调的音阶——欧拉的新音乐体系

这一节主要对应原书第八章的内容。对音乐只要有基本了解的读者应该都知道一些常见的音阶，例如大调音阶、小调音阶、Dorian音阶、半音阶、五声音阶等，它们由不同的方法生成，例如中国的三分损益法，古希腊的五度相生律，后来的纯律、十二平均律等。

最早的生成音阶的方法总是基于简单比例的原则，例如$2:1$是八度，$3:2$是五度等。但随着不断地推演，音阶显示出一个恼人的性质：如果要保证音程的纯粹，则无论怎么推，音阶都无法闭合；如果要保证音阶闭合，则比例总是有一些偏差。例如三分损益法，其原理是通过将弦长按三分之一增减，来推导相邻音的频率关系：将弦长减少三分之一（损三分）得到五度音，再将弦长增加三分之一（益三分）得到四度音。以此反复操作，推导出十二个音。但经过多次迭代后，这十二律无法完全闭合，与现代的十二平均律相比存在微小误差（即“音差”）。同时，如果使用十二平均律，则五度也不再是3:2，而是接近但不相同的一个比例。

这就导致了一个几乎无解的权衡问题，音律学家们只能不断微调音律，使其至少符合听觉的美感。下面，我们来看看欧拉是如何使用数学方法生成音阶的。

4.1 如何切开八度

首先，欧拉确定了一个原则：就是首先通过1:2直接确定八度的位置，其他音符都落在八度内，这是一个基本的前提。欧拉将八度范围内的所有音符通过数学“指数”（Exponens）来表示，公式如下：

$$2^m A$$

其中：

- A 是一个奇数，由多个质数 3 和 5 的乘积构成，即$A = 3^a 5^b$。当然也可以添加7等数字进行尝试。每一个(a, b)组合对应一种音阶。
- 2^m 是二进制幂，它的作用是将生成的音扩展到其他八度，例如生成一个G，则通过乘以2^m将其扩展为所有八度上的G。这里m要保证在人耳的听觉范围内

下面是完整的计算过程：

1. 输入：a, b
2. 计算$A = 3^a \times 5^b$
3. 找出 A 的所有正整数因数 $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，包括1和它自己，共$n$个，此时第一个数一定是1
4. 对A的所有因数使用2^m进行缩放，使其落入$[1, 2)$之间
5. 最终，我们得到n个频率的比例，加上八度音2，我们的音阶共推出$n+1$个音
6. 进行排序和缩放，使比例重新变为互质的整数

> **注**1：由于担心浮点运算有偏差，因此实际代码实现步骤有所不同
>
> **注**2：理论上可以扩展$A = 3^a 5^b 7^c 11^d \cdots$进行音阶生成，保证底数为质数，但实际不使用

下面以$a = 1, b = 1$的情况进行说明。首先，计算出$A = 3^1 \times 5^1 = 3 \times 5 = 15$，分解因式得$\{1, 3, 5, 15\}$。经过计算发现：

因数 d_i	缩放到$[1, 2)$	整数缩放因子	最终频率
1	$2^0 \times 1 = 1$	8	8
3	$2^{-1} \times 3 = 3/2$	8	12
5	$2^{-2} \times 5 = 5/4$	8	10
15	$2^{-3} \times 15 = 15/8$	8	15

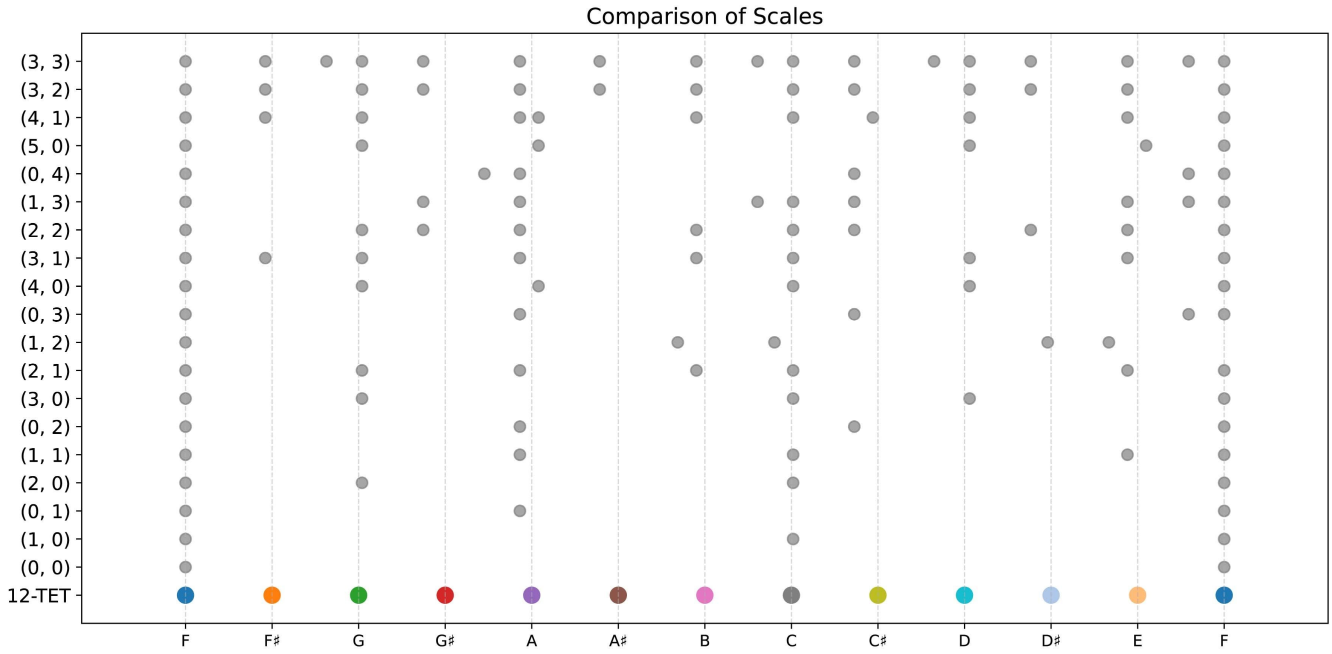
加上八度音16，经过排序、化简步骤，我们最后得到音阶$8:10:12:15:16$，即C-E-G-B-C'。对这些音继续使用2的幂进行缩放，则可以得到各个八度上的同名音。这样我们就构造出了一个音阶。这个算法已有一个python版本，读者可以到Github仓库下载并验证。

欧拉在书中列出了一个表格，他使用17组a, b构造了17组音阶，如下：

Mode	a	b	音阶比例	音阶
I	0	0	1 : 2	F-F
II	1	0	2 : 3 : 4	F-C-F
III	0	1	4 : 5 : 8	F-A-F
IV	2	0	8 : 9 : 12 : 16	F-G-C-F
V	1	1	8 : 10 : 12 : 15 : 16	F-A-C-E-F
VI	0	2	16 : 20 : 25 : 32	F-A-C♯-F
VII	3	0	16 : 18 : 24 : 27 : 32	F-G-C-D-F
VIII	2	1	32 : 36 : 40 : 45 : 48 : 60 : 64	F-G-A-B-C-E-F
IX	1	2	54 : 75 : 80 : 96 : 100 : 120 : 128	F-G♯-A-C-C♯-E-F
X	0	3	64 : 80 : 100 : 125 : 128	F-A-C♯-F*-F
XI	4	0	64 : 72 : 81 : 96 : 108 : 128	F-G-A*-C-D-F
XII	3	1	128 : 135 : 144 : 160 : 180 : 192 : 216 : 240 : 256	F-F♯-G-A-B-C-D-E-F
XIII	2	2	128 : 144 : 150 : 160 : 180 : 192 : 200 : 225 : 240 : 256	F-G-A-B-C-C♯-D♯-E-F
XIV	1	3	256 : 300 : 320 : 375 : 384 : 400 : 480 : 500 : 512	F-G♯-A-B*-C-C♯-E-F*-F
XV	0	4	512 : 625 : 640 : 800 : 1000 : 1024	F-A*-A-C♯-F*-F
XVI	5	0	128 : 144 : 162 : 1922 : 216 : 243 : 256	F-G-A*-C-D-E*-F
XVII	4	1	256 : 270 : 288 : 320 : 324 : 360 : 384 : 405 : 432 : 480 : 512	F-F♯-G-A-A*-B-C-C♯*-D-E-F

> **注**1：欧拉的原著应该是使用H代表B，B代表B♭。
>
> **注**2：F*表示和F很接近的一个微分音

所有这些音阶可以可视化为下面的图表，纵坐标形式为(a, b)，读者可以轻松看出频率的偏差：



4.2 欧拉的新音乐体系

在第九章，欧拉提出了第18种音阶；在第10章又探讨了更多复杂的音阶。欧拉还给出了一个可行的调音步骤。总的来说，这些生成的音阶有一部分可以和现有的音阶大致吻合，但部分音的频率会有一些极小的偏差，这便是对音阶的修正。但是，哪些修正是好的呢？这里至少有两个规则：首先是美感，音阶应符合人的生理心理规律，使人感到美；第二个则是可操作性，音乐毕竟需要乐器演奏，如果一个音阶难以演奏、难以转调、难以配和声，那么它就仅能存在于理论层面。

> 许多音乐家认为真正的音乐应建立在音程的均等性上，而不是音程比例的简单性。因此，他们毫不犹豫地将八度音程分为12个相等的部分，并根据这一划分确立了习惯使用的12个音。在这一体系中，他们愈加确信所有音程都变得相等，因此任何音乐作品都可以无须更改地在所有所谓的调式中演奏，并能够从原调轻松转调至任何其他调式。在这一观点上，他们并没有错。然而，他们没有意识到，这种方式实际上消除了调式中的和声特性。 ——欧拉

而欧拉的野心就是找到生成一系列音阶方法：它们首先和旧有的音阶大致兼容，保证听感使人愉悦，同时对特殊情况进行修正——通过加入一些微分音使一些和弦更加纯粹、和谐。然后，使用数学方法对这些音节的音程、和声、调律、转调等进行研究，形成一套完整的乐理体系，它完全基于数学。这正是该书第八章之后的内容。这里需要说明，这个乐理体系只是说明哪些写作是不合理的，并解释令人愉悦的音乐的原理，也能为写作提供一些原则的指导，但它并不能通过计算创作出一部音乐作品。同时，这个体系并不明确规定和谐、不和谐的边界，是开放性的。因而，这套理论实际并不打压作曲家的创造性。

> **注**：这里并不是“生成一个音阶”，而是找到“生成一系列音阶的方法”，使该体系包含多种调式，且能够互相转换。

4.2.1 自然半音-半音音阶 (diatonic-chromatic)

> 我们将第十八种音阶称作“自然半音-半音音阶”，这一命名的依据显然来自其指数形式 $2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$，因为它是“自然半音音阶”指数 $2^m \cdot 3^3 \cdot 5$ 和“半音音阶”指数 $2^m \cdot 3^2 \cdot 5^2$ 的最小公倍数，因此结合了这两种音阶。由此我们可以推测，这种音阶可能会与当前音乐家普遍接受的音阶相符，因为音乐家也曾将这种音阶视为由古代的自然半音与半音结合而成。 ——欧拉

简单来说，“自然半音-半音音阶”就是通过公式$2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$生成的音阶，使用上面我给出的python程序，可以得到如下结果：

```
计算 A = 3^3 * 5^2 * 7^0 * 11^0 = 675
A 的因数: [1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675]
生成音阶: 512:540:576:600:640:675:720:768:800:864:900:960:1024
音阶数（不含八度音）: 12
```

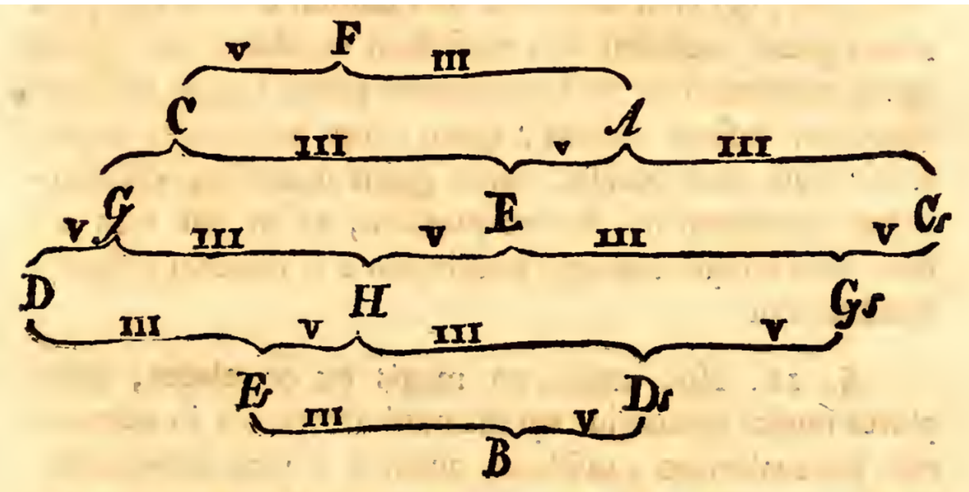
我们假定以$A = 440\text{Hz}$为基准音，则可以得到以下表格：

音名	自然半音-半音音阶频率 (Hz)	十二平均律频率 (Hz)	差异（Hz）	差异（音分）
A	440.0000	440.0000	0.0000	0.0000
A♯	464.0625	466.1638	2.1013	7.8213
B	495.0000	493.8833	-1.1167	-3.9100
C	515.6250	523.2511	7.6261	25.4176
C♯	550.0000	554.3653	4.3653	13.6863
D	580.0781	587.3295	7.2514	21.5076
D♯	618.7500	622.2540	3.5040	9.7763
E	660.0000	659.2551	-0.7449	-1.9550
F	687.5000	698.4565	10.9565	27.3726
F♯	742.5000	739.9888	-2.5112	-5.8650
G	773.4375	783.9909	10.5534	23.4626
G♯	825.0000	830.6094	5.6094	11.7313
A	880.0000	880.0000	0.0000	0.0000

上图 (Comparison of scales) 对$a = 3, b = 2$的情况做了可视化，读者可以回去查看。一般而言，差异超过20音分就能感觉到明显的差异了。欧拉认为，这个音阶在微调一些微分音后可以使用。

> 因此，现行的八度划分方式已经通过实践达到了极致的完善，若想使其更加完美，仅需进行一个修正：将用字母 B 标记的音稍微降低一个微分音（即大半音和小半音的差异）。通过这一修正，就可以得到一种最完美的音阶，最适合用于和声的形成。至于音阶包含的音数，这种音阶将包含与和声需求完全一致的音数，且不多也不少。此外，这些音之间的关系完全符合和声的规律所决定的比例。 ——欧拉
>
> **注**：这里的B指B♭

4.2.2 自然半音-半音音阶的调律



> 因此，具备如此敏锐听觉的人可以按照以下顺序对乐器进行调音。首先根据具体情况确定音 F，并用此音作为基础获得所有标记为同样字母的音高。接着，找到音 F 的纯五度 C 和大三度 A，由此可以通过前述第一条的要求确定其余所有同字母标记的音高。然后，从音 C 得到其纯五度 G 和大三度 E，这个音 E 同时也是音 A 的纯五度；并从音 A 得到其大三度 C♯。接着，从音 G 得到其纯五度 D 和大三度 B，从音 E 得到其大三度 G♯，这个音 G♯ 同时也是音 C♯ 的纯五度。然后，从音 B 得到其纯五度 F♯ 和大三度 D♯，或者也可以从音 G♯ 得到音 D♯。最后，从音 D♯ 的纯五度找到音 B。以这种方法，通过重复八度音程，整个乐器就可以被正确地调节完成。
>
> 整个调音过程可以通过附加的图表更加清晰地理解。由于音 E、B、G♯、F♯ 和 D♯ 都可以通过纯五度和大三度双重方式确定，因此在调节乐器时可以获得不小的助益，因为一旦出现错误，可以立即发现并加以纠正。

以上为欧拉书中原话，应该讲得比较清楚了，这里不再解释。图中最右侧如C, G, D右下角的蛇形符号是“s”，代表升号。

4.2.3 新音乐体系

欧拉试图在剩余的章节构建他的新音乐体系。例如在第十一章中，欧拉对该体系内的协和音、和弦等进行归纳，并按不和谐度进行分类，还结合实际对不同类的和弦进行了使用方面的解释；在第十二章中，欧拉描述了转调，他将转调前后的音阶整合到$2^n \cdot 3^a \cdot 5^b$中，并指出转调在 $2^n \cdot 3^3 \cdot 5^2$ 内为纯净转调，超出但在 $2^n \cdot 3^7 \cdot 5^2$ 内为不纯转调，超出此范围则非法；在第十三章中，欧拉用巨量的篇幅对作曲方法进行了探讨。这些内容过于庞杂，已经超出了我短期内进行学习的能力，这里就不再涉及。这里再次感叹欧拉的伟大！有人云，天才与普通人的差距，比普通人和狗的差距还大，此话诚不欺我！

> 即便单一体系内的变化再丰富，若长时间坚持同一体系，难免会让人感到厌倦而非愉悦。因为音乐不仅需要声音与和声的和谐美感，还要求多样性。因此，听觉对象需要不断变化。 ——欧拉

5. 结语

欧拉的《尝试音乐新理论》是一部横跨数学与音乐的奇书，它不仅展现了欧拉作为数学家的深厚功力，也体现了他对艺术的敏锐感知力。欧拉使用简单的初等运算将音乐统一于秩序与美感中，令人叹为观止。

欧拉一生著作颇丰，根据我的了解，前几年，整理了100多年才整理完的欧拉全集出版了，里面应该会包含此书。我相信这本书中还藏着许多智慧的宝藏供世人挖掘。当然，我们不应该认为，有了这本“上古卷轴”就能颠覆、革新现有的体系。乐理与数学的结合早已是一个较成熟的领域，音乐和数学也在欧拉之后有了长足的发展，我们已经能够更精确的描述音乐现象，例如用群论对音阶进行描述。但能够发现古人的思想碎片，感受古人的智慧本就是令人激动且有意义的，不是吗？

参考文献

[1] Sándor26, J. (2009). Euler and music. A forgotten arithmetic function by Euler. Gao Mingzhe Some new Hilbert type inequalities and applications....... 4 Song-Zhimin, Dou-Xiangkai and Yin Li On some new inequalities for the Gamma function....... 14 Mihály Bencze, 17(1), 265-271.

[2] Pesic, P. (2013). Euler's Musical Mathematics. Mathematical Intelligencer, 35(2).

[3] Archibald, R. C. (1924). Mathematicians and music. The American Mathematical Monthly, 31(1), 1-25.

[4] Euler, L. (1739). Tentamen novae theoriae musicae: Ex certissimis harmoniae principiis dilucide exposita. Petropoli: Ex Typographia Academiae Scientiarum.

[5] Plomp, R., & Levelt, W. J. (1965). Tonal consonance and critical bandwidth. Journal of the Acoustical Society of America, 38, 548-560.