Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики

УЧЕБНЫЙ ЦЕНТР ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ФТФ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Группа Р3111 К работе допущен________

Студент Ляо Ихун Работа выпола 13.12.2020 08:12

Преподаватель Сорокина Елена Константиновна Отчет принят___________

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №5

1. Цель работы.
   1) Определение момента инерции различных твердых тел методом крутильных колебаний
   2) Проверка справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера
2. Задачи, решаемые при выполнении работы.
   1) Измерение модуля кручения пружины
   2) Определение моментов инерции различных тел и сравнение их с табличными значениями
3. Объект исследования.

   Период колебания движения крутильной пружины.
4. Метод экспериментального исследования.

   Управлящая переменная

5. Рабочие формулы и исходные данные.

Для изучения динамики вращения твердых тел используется понятие момента инерции. Момент инерции тела — мера инертности твердых тел при вращательном движении. Момент инерции аналогичен массе при поступательном движении, которая характеризует свойства объекта сохранять свою скорость или сопротивляться ее изменению. Моментом инерции тела (системы тел) относительно данной оси называется скалярная физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^{\,2}. \tag{1}$$

В случае непрерывного распределении массы по объему для вычисления момента инерции используется не суммирование, а интегрирование по всему объему тела V:

$$I = \int_V r^2 dm. \tag{2}$$

Момент инерции зависит от распределения массы в пределах объема тела и является аддитивной величиной, т.е. полный момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции всех частей этого тела относительно той же оси.

Для нахождения момента инерции в определенных ситуациях удобно использовать теорему Гюйгенса-Штейнера, которая формулируется следующим образом: если момент инерции тела относительно некоторой оси вращения, проходящей через центр масс, имеет значение I_c, то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии a от первой и параллельной ей, он будет равен

$$I = I_c + ma^2, \tag{3}$$

где m - масса тела.

Для проверки теоремы Гюйгенса-Штейнера в данной лабораторной работе есть возможность менять расстояние a для случая расположения грузов на штанге и для сплошного диска.

Экспериментальное определение момента инерции может быть выполнено с помощью крутильных колебаний — периодического процесса, в котором тело вращается вокруг некоторой неподвижной оси под действием упругих сил. В данной экспериментальной установке используется механическая система, которая создает крутильные колебания с помощью спиральной пружины. На ось вращения, которая жестко соединена с пружиной, можно устанавливать различные тела (диск, шар, цилиндр).

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела записывается в следующем виде:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}, \tag{4}$$

где $\vec{M}$ - суммарный момент всех сил, действующих на тело, I - момент инерции тела, $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение тела. Очевидно, что уравнение (4) может быть спроектировано на любую выбранную ось вращения.

Чтобы вывести систему из положения равновесия нужно повернуть исследуемое тело на некоторый угол φ_0. Тогда спиральная пружина также закручивается на этот угол. Пружина создает возвращающий момент силы $\vec{M}$, который стремится вернуть систему в состояние равновесия. Таким образом возникают крутильные слабо затухающие колебания. В данной установке можно пренебречь трением в системе, поэтому можно считать, что потерь энергии нет.

В случае упругого закручивания спиральной пружины момент возвращающий момент силы M прямо пропорционален углу φ:

$$M = -k \cdot \varphi. \tag{5}$$

С учетом (4) и $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ уравнение (5) примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{I}\varphi = 0, \tag{6}$$

где k - коэффициент пропорциональности, называемый модулем кручения. Значение k определяется параметрами самой пружины (ее геометрическими размерами и материалом).

Дифференциальное уравнение (6) является уравнением гармонических колебаний с собственной частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$. Его общим решением является функция

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \theta_0), \tag{7}$$

где φ_0 - амплитуда колебаний, θ_0 - начальная фаза колебаний, обе величины определяются из начальных условий. Период колебаний можно определить как

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}, \tag{8}$$

откуда можно получить значение момента инерции системы

$$I = \frac{T^2 k}{4\pi^2}. \tag{9}$$

Численное значение модуля кручения k можно определить экспериментально путем измерения внешнего момента сил $\vec{M}$ и угла поворота штанги φ. Для этого необходимо приложить внешнюю силу $\vec{F}$, величину которой можно определить с помощью динамометра, и измерить угол φ. С учетом $M = r \cdot F$, где r - расстояние от оси вращения до точки приложения силы, получим для модуля кручения

$$k = \left|\frac{M}{\varphi}\right| = \left|\frac{r \cdot F}{\varphi}\right|. \tag{10}$$

Так как исследуемое тело является частью механической системы «тело + штанга», то для того, чтобы получить именно момент инерции тела I_0, нужно вычесть из значения I момент инерции самой штанги I_{rod} (который вычисляется отдельно)

$$I_0 = I - I_{rod} \tag{11}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	*Наименование*	*Тип прибора*	*Используемый диапазон*	*Погрешность прибора*
1	Цифровой счетчик	-	-	-
2	*Динаметр*	-	-	-

7. Схема установки

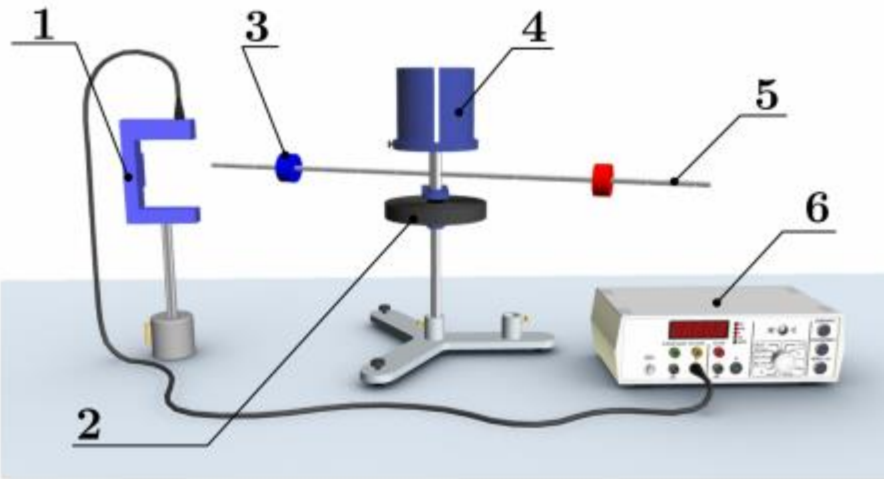


Рис. 1. Схема установки: фотодатчик (1), крутильная пружина (2), груз на стержне (3), объект (4), стержень (5), хронометр (6).

1 - Фотодатчик
2 - Крутильная пружина
3 - Масса на стержне
4 - Исследуемое тело
5 - Стержень
6 - Счетчик

Восстанавл. момент
пружины: 0.028 Нм/рад
Полый цилиндр (металл):
90x90 мм; 425 г
Плотный цилиндр (дерево):
90x90 мм; 425 г
Подставка цилиндрическая:
D=100 мм; 122 г
Стержень:
L=620 мм; 135 г
Гири: 260 г each
Тонкий диск:
D=320 мм; 495 г;
отверстия: 8 (через 40 мм)
Деревянный диск:
220x15 мм; 425 г; I=0.51 кг*м2
Деревянный шар:
D=146 мм; 1190 г; I=0.51 кг*м2

8. Результаты прямых измерений и их обработки

Таблица 1: Определение модуля кручения пружины

Плечо r, см	10	15	20	25	30
Сила F, Н	0,88	0,58	0,44	0,36	0,3
Модуль кручения k, Н*м/рад	0,028	0,028	0,028	0,029	0,029
$k = (0{,}028 \pm 0{,}0005)\ \text{Н} * \frac{\text{м}}{\text{рад}};\ \varepsilon_x = 1{,}8\%; \text{а} = 0{,}95$					

Таблица 2: Определение момента инерции штанги

a, см	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	$< T >, \text{с}$	$a^2, \text{м}^2$	$T^2, \text{с}^2$
5	2806,1	2807,3	2822,1	2811,8	2,5*10^{-3}	7,9
10	3706,9	3702,9	3647,2	3685,7	10,0*10^{-3}	13,6
15	4729,3	4797,9	4772,2	4766,5	22,5*10^{-3}	22,7
20	5985,5	5995,6	5907,9	5963	40,0*10^{-3}	35,6
25	7269,4	7218,6	7139,7	7209,2	63,0*10^{-3}	52,0
30	8533,7	8510,2	8483,8	8509,2	90,0*10^{-3}	72,4

1) Для 2.3. В материале положим что $T^2 = ba^2 + T_0^2$ и использую МНК:

   b=$\frac{\sum(a_i^2-\overline{a^2})(T_i^2-\overline{T^2})}{\sum(a_i^2-\overline{a^2})^2}$=736 $\frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}$

   T_0^2 =6 с^2

   $\sum {d_i}^2 = \sum((T_i^2 - (T_0^2 + ba^2))\hat{}2) = 0{,}038\ \ c^4$

   D=$\sum(a^2 - \overline{a^2})^2$ *=0.0056* м^4

   С D и d_i *мы можем найти абсолютные погрешности*

   T_0^2: $\Delta_{T_0^2} = 0.13\ c^4$*и b:*$\Delta_b = 2{,}6\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}$*(верность а=0,95).*

   Получается: $T^2 = 736a^2 + 6$

   Видим что точки совпадают около линии.Значит отчки имеют линейный вид.

2) Для 4:

   с формул (12)(13):

   $m = \frac{kb}{8\pi^2} = 0{,}261\ \text{кг}$

   Полученная m только больше чем масса в ИНФО на 1 г

   Момент инерции штанги:

   $I_{rod} = \frac{kT_0^2}{4\pi^2} = 0{,}004\ \text{кг} * \text{м}^2$

Таблица 3: Теорема Гюйгенса-Штейнера для диска №1

a, см	T_1, c	T_2, c	T_3, c	$< T >, \text{с}$	$a^2, \text{м}$	$T^2, \text{с}^2$
14	5660,0	5658,8	5740,0	5686,3	2,0*10^{-2}	32,3
10	4860,3	4850,4	4935,9	4882,2	1,0*10^{-2}	23,8
6	4234,8	4298,6	4274,2	4269,2	3,6*10^{-3}	18,2

2	3949,8	3926,8	3919,2	3931,9	4,0*10^{-4}	15,5

Способ как в таблице 2, здесь просто покажу результат.

$T^2 = 879a^2 + 15$

m=0.312 кг

I =0,01 $кг * м^2$

Собственный момент инерции:I_0=0,01-0,004=0,006 $кг * м^2$

Таблица 4: Моменты инерции других тел

Объект	T_1, c	T_2, c	T_3, c	<T>, с	$I, кг * м^2$
Сплошной диск	3148,7	3093,4	3088,8	3110,3	0,003
Полнный цилиндр	2630,3	2640,1	2597,5	2622,6	0,001
Сплошной цилиндр	2778,8	2767,0	2780,6	2775,5	0,001
Шар	3134,5	3093,3	3131,1	3119,6	0,003

Таблица 5:Моменты инерций всех тел с помощью приложении 5

Штанга	Диск 1	Диск 2	Цилиндр 1	Цилиндр 2	Шар
$0{,}004\ кг * м^2$	$0{,}006\ кг * м^2$	$0{,}003\ кг * м^2$	$0{,}002\ кг * м^2$	$0{,}002\ кг * м^2$	$0{,}003\ кг * м^2$

9. Расчет погрешностей измерений

1) Погрешность k:

Среднее значение коэффициент k:$\bar{k} = \frac{\sum k_i}{5} = 0{,}028$ Н*м/рад

СКО:$S_{\bar{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - \bar{k})^2}{n(n-1)}} = 0{,}0002\ Н * м/рад$

Доверительный интервал случайной погрешности:

$\Delta_{\bar{k}} = t_{a,n} S_{\bar{x}} = 0{,}0005$ Н*м/рад

Здесть погрешность прибора очень маленькая, не считаем.Получается:

Относительная погрешность:$\varepsilon_x = \frac{0{,}0005}{0{,}028} * 100\% = 1{,}8\%$

Результат:

$k = (0{,}028 \pm 0{,}0005)\ Н * \frac{м}{рад};\ \varepsilon_x = 1{,}8\%; а = 0{,}95$

2) *Погрешность* I_{rod}*:*

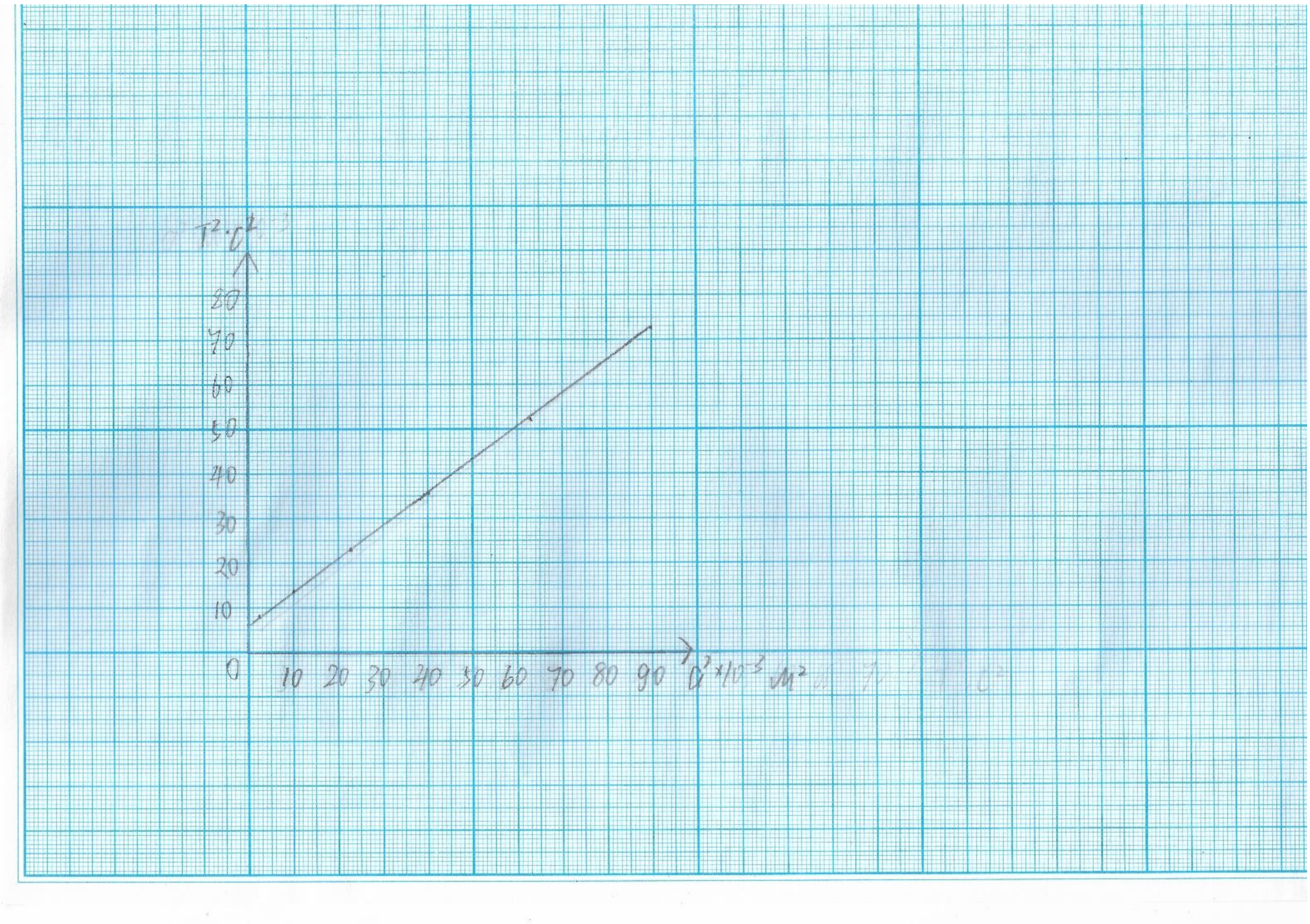
абсолютная погрешность:$\Delta_{I_{rod}} = \left|\frac{k}{4\pi^2}\Delta_{T_0^2}\right| = 0{,}00009\ кг * м^2$

относительная погрешность:$\varepsilon_{I_{rod}} = \frac{\Delta_{I_{rod}}}{I_{rod}} * 100\% = 2{,}3\%.$

Относительная погрешность меньше чем 5%, значит что нормально.Погрешность не большая.

3) Для 8

10. Графики



11. Окончательные результаты.

Из таблицы 1: $k = (0{,}028 \pm 0{,}0005)\ \text{Н} * \frac{\text{м}}{\text{рад}};\ \varepsilon_x = 1{,}8\%; \text{а} = 0{,}95$

Из таблицы 2: $T^2 = 736a^2 + 6$

Из таблицы 3: $T^2 = 879a^2 + 15$

Момент инерции всех дел:

Штанга	Диск 1	Диск 2	Цилиндр 1	Цилиндр 2	Шар
$0{,}004\ \text{кг} * \text{м}^2$	$0{,}006\ \text{кг} * \text{м}^2$	$0{,}003\ \text{кг} * \text{м}^2$	$0{,}002\ \text{кг} * \text{м}^2$	$0{,}002\ \text{кг} * \text{м}^2$	$0{,}003\ \text{кг} * \text{м}^2$

12. Вывод и анализ результатов:

Моменты инерции экспериментальных совпадают моменты инерции всех тел. Теорема Гойгенса-Штейнера правильна.Одновременно, односительные погрешнсти все меньше чем 5%, значит отчет верен.

13. Дополнтительные задачи

1) Момéнт инéрции — скалярная физическая величина, мера инерции во вращательном движении вокруг оси.Единица: $кг * м^2$

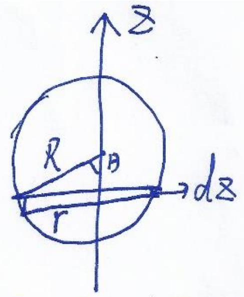
2) Масса тела, форма тала, расположение массы тела.

3) Минимальный интервал времени, через который происходит повторение движения тела

4) периодического процесса, в котором тело вращается вокруг некоторой неподвижной оси под действием упругих сил

5) Момент инершии и значение модуля кручения.

6) ?



$r = R\sin\theta$; $z = -R\cos\theta$; $dz = R\sin\theta\, d\theta$; $dm = \rho\pi r^2 dz$
$= \rho\pi R^3 \sin^3\theta\, d\theta$

$dI = \frac{1}{2} dm\, r^2 = \frac{1}{2}\pi\rho R^5 \sin^5\theta\, d\theta$;

$I_z = \int dI = \frac{1}{2}\pi\rho R^5 \int_0^\pi \sin^5\theta\, d\theta$

$= -\frac{1}{2}\pi\rho R^5 \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)^2\, d(\cos\theta)$

$= \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{24}{60} mR^2 = \frac{2}{5} mR^2$

7)

8) если момент инерции тела относительно некоторой оси вращения, проходящей через центр масс, имеет значение Ic, то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии a от первой и параллельной ей, он будет равен $I = I_0 + ma^2$ где m - масса тела

9) Вал колодца