УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Теория вероятностей и математическая статистика

Практическое занятие 1. Случайные события

Понятие	Описание/Определение	Пример
Испытание	опыт, эксперимент	Игральный кубик или монету бросают один или несколько раз
Элементарное событие	появление или не появление того или иного исхода испытания	Выпадение герба при бросании монеты
Пространство элементарных событий	это множество (конечное или бесконечное), каждому элементу которого соответствует один исход испытания	При бросании игральной кости пространство элементарных событий представляет собой шестиэлементное множество {1, 2, 3 ,4, 5, 6}
Случайное событие	подмножество пространства элементарных событий. Иначе – это событие, которое в результате данного испытания может произойти, а может не произойти	Появление четного числа при бросании игрального кубика

Понятие	Описание/Определение	Пример
Достоверное событие	событие, которое обязательно произойдет в данном испытании. Иначе, подмножество пространства элементарных событий достоверного события совпадает с пространством элементарных событий	Выпадение герба или решетки при бросании монеты
Невозможное событие	событие, которое точно не произойдет в данном испытании. Подмножество элементарных событий невозможного события – пустое множество	Выпадение десятки при бросании игрального кубика
Несовместные события	два случайных события, которые в данном испытании не могут произойти одновременно	При однократном бросании монеты одновременное выпадение орла и решки

Понятие	Описание/Определение	Пример
Факториал натурального числа *n*	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$	$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
Перестановка *n* элементов	Любой способ расставить *n* элементов в определенном порядке. Число таких способов равно *n!*	Очередь из 4-х человек можно составить 4!=24 способами
Размещение из *n* элементов по *k*	Размещение из *n* элементов по *k* – любое упорядоченное k-элементное подмножество *n*-элементного множества $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ или $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$	Выбрать двоих дежурных из четверых, один из которых назначен ответственным, можно $\frac{4!}{2!} = 12$ способами
Сочетание из *n* элементов по *k*	Сочетание из *n* элементов по *k* – любое k-элементное подмножество *n*-элементного множества $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	Выбрать двоих дежурных из четверых можно $\frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = 6$

Формула классической вероятности

Пусть производится испытание, в котором возможно n исходов, причем исходы попарно несовместны (не могут происходить одновременно) и равновозможны. Пусть А - случайное событие данного испытания. Тогда вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(A)=\frac{k}{n},$$

где k – число исходов, благоприятствующих событию А в данном испытании, n - общее число исходов, возможных в данном испытании.

Замечание.

Так как $k \leq n$, то вероятность события А - это число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq p(A) \leq 1$. При этом вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события равна 0.

Классическая схема вычисления вероятностей

Задача. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение

Обозначим через A событие: «набрана нужная цифра». Абонент мог набрать любую из десяти цифр, поэтому общее число элементарных исходов равно десяти. Эти исходы несовместны и равновероятны. Применяя формулу классической вероятности, отнесем число исходов благоприятствующих событию A (нужная цифра лишь одна) к общему числу возможных исходов (десять) и получим искомую вероятность $P(A) = 0,1$.

Классическая схема вычисления вероятностей

Найти вероятность того, что в наудачу написанном двузначном числе цифры разные.

Из 90 двузначных чисел 9 имеют одинаковые цифры, т. е. $n = 90$, $m = 90 - 9 = 81$. Следовательно, $p = \frac{81}{90} = 0.9$.

Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры и набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

$m = 1$, $n = 10 \cdot 10 = 100$.

$p = 0{,}01$

Размещения и перестановки

Задача. На пяти карточках проставлена одна из цифр: 1; 2; 3; 4; 5 . Случайным образом и без возвращения одну за другой выбирают три карточки и располагают их в ряд слева направо в порядке поступления.

а) Сколько различных трехзначных чисел появится при таком выборе?

б) Найти вероятность события *A* : « В числе, не содержится цифра 3 ».

Решение.

а) Любые два трехзначных числа могут отличаться друг от друга либо порядком указанных на карточках цифр, либо хотя бы одной цифрой. Таким образом и по определению, и по схеме выбора элементов рассматриваемый опыт приводит к размещениям. Число таких размещений вычисляется по формуле $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

б) Применим классическую схему вычисления вероятностей. Числа, не содержащие цифры три, есть размещения из четырех цифр 1;2;4;5 по три, а число таких размещений равно $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Общее число всевозможных размещений $A_5^3 = 60$

Итак, $P(A) = N(A)/N(\Omega) = 24/60 = 0,4$.

Правило умножения

Чтобы найти число комбинаций предметов двух типов, нужно число предметов первого типа умножить на число предметов второго типа. Если число предметов первого типа равно m, а число предметов второго типа равно n, то число их комбинаций равно $m \cdot n$.

Если проводится эксперимент, состоящий из n испытаний, и число исходов в каждом испытании равно m. Тогда число комбинаций этих исходов равно m^n. То есть данный эксперимент имеет m^n исходов.

При подбрасывании монеты 2 раза имеем $2^2 = 4$ исхода.
При подбрасывании монеты 3 раза имеем $2^3 = 8$ исходов.
При подбрасывании кубика 2 раза имеем $6^2 = 36$ исходов.
При подбрасывании кубика 3 раза имеем $6^3 = 216$ исходов.

Правило сложения

Правило сложения. Если из некоторого конечного множества первый элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, а второй элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, то хотя бы один из этих элементов (a_1или a_2) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Правила умножения и сложения справедливы для любого конечного числа (два и более) выбираемых элементов.

Перестановки

Задача. Шесть книг, из которых две книги одного автора, а остальные различных авторов, ставят на полку в случайном порядке. Найти вероятность того, что две имеющиеся книги одного автора окажутся первыми в ряду.

Решение.

Применяем классическую схему вычисления вероятностей. Пространство элементарных событий представляет собой множество всевозможных перестановок книг на полке. Число таких перестановок вычисляется по формуле $P_6 = N(\Omega) = 6! = 720$. Соединения, благоприятствующие указанному в примере событию, представляют собой перестановки двух книг одного автора на первых двух местах за которыми следуют всевозможные перестановки из четырех оставшихся книг на четырех последующих местах. Число таких соединений вычисляется по правилу умножения и равно $N(A) = 2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$.

Отсюда, $P(A) = N(A)/N(\Omega) = 48/720 = 1/15.$

Размещения и перестановки

Задача. Дано шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что: а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки; б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются шесть карточек и располагаются в ряд в порядке появления.

○ а) Из шести данных букв можно составить $n = A_6^3 = 120$ трехбуквенных «слов» (НИЛ, ОЛЯ, ОНИ, ЛЯМ, МИЛ и т. д.). Слово ЛОМ при этом появится лишь один раз, т. е. $m = 1$. Поэтому вероятность появления слова ЛОМ (событие A) равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

б) Шестибуквенные «слова» отличаются друг от друга лишь порядком расположения букв (НОЛМИЯ, ЯНОЛИМ, ОЛНИЯМ и т. д.). Их число равно числу перестановок из 6 букв, т. е. $n = P_6 = 6!$. Очевидно, что $m = 1$. Тогда вероятность появления слова МОЛНИЯ (событие B) равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$. ●

Размещения с повторениями

Пусть некоторый опыт состоит в случайном выборе *k* элементов из множества, содержащего *n* элементов. Выбор организован таким образом, что каждый выбранный элемент возвращается обратно, так что при следующем выборе может быть взят как новый элемент, так и прежний. В дальнейшем отобранные элементы упорядочиваются либо в порядке поступления, либо по указанному в решаемой задаче правилу. Полученное таким образом соединение называют **размещением с повторениями**. Одно размещение с повторениями может отличаться от другого элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из *n* элементов по *k* с повторениями обозначается $\bar{A}_n^k$

и находится по следующей формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

При выводе данной формулы использовался комбинаторный принцип умножения *k* множеств, каждое из которых содержит *n* элементов.

Размещения с повторениями

Задача. Из телефонной книги случайным образом выбирают номер телефона абонента. Считая, что любой номер телефона состоит из семи цифр и может начинаться с любой из десяти цифр, найти вероятность того, что все цифры выбранного номера телефона различные.

Решение. Применяем классическую схему вычисления вероятностей. Общее число семизначных номеров посчитывается как число размещений с повторениями из десяти по семь, т. е. $N(\Omega) = \bar{A}_{10}^{7} = 10^7$.

Если все цифры номера различны, то такие номера отличаются либо порядком цифр, либо хотя бы одной цифрой. Соединение такого типа является размещением из десяти по семь, а число всех таких размещений равно $N(A) = A_{10}^{7} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Итак, $P(A) = N(A)/N(\Omega) = A_{10}^{7}/\bar{A}_{10}^{7} \approx 0,06$.

Сочетания

Задача. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия для контроля. Найти вероятность события *A* = { в полученной выборке ровно одно изделие бракованное }.

Пронумеруем изделия числами от 1 до 10 , и пусть множество номеров *C* = {1, 2, . . . , 7} соответствует годным изделиям, а множество номеров *D* = {8, 9, 10} — бракованным изделиям. Согласно описанию эксперимента производится выбор трех изделий (причем порядок их появления не существенен) из множества *E* = *C* ∪ *D* , содержащего 10 изделий. Поэтому пространство элементарных исходов представляет собой множество сочетаний из 10 по 3 , содержащее $N(\Omega) = C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ элементов. Событию *A* благоприятствуют только такие исходы (тройки изделий), в которых два изделия годные (принадлежат множеству *C*), а ровно одно бракованное (принадлежит множеству *D*). Применяя правило умножения, получим, что число всех таких исходов равно

$$N(A) = C_7^2 \cdot C_3^1 = 63$$

Используя формулу вычисления в классической схеме, получим окончательно

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

Сочетания

Задача. В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 будут черными?

❍ Выбрать 5 шаров из 20 можно C_{20}^5 различными способами (все выборки — неупорядоченные подмножества, состоящие из 5 элементов), т. е. $n = C_{20}^5$. Определим число случаев, благоприятствующих событию B — «среди 5 вынутых шаров 3 будут черными». Число способов выбрать 3 черных шара из 8, находящихся в урне, равно C_8^3. Каждому такому выбору соответствует C_{12}^2 способов выбора 2-х белых шаров из 12 белых в урне. Следовательно, по основному правилу комбинаторики (правилу умножения), имеем: $m = C_8^3 \cdot C_{12}^2$. По формуле (1.3) находим, что $P(B) = \dfrac{C_8^3 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^5} \approx 0{,}24$. ●

Сочетания

Задача. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

○ Сначала заметим, что число способов выбрать 3 карандаша из 12 имеющихся в наличии равно $n = C_{12}^3 = 220$.

а) Выбрать 3 синих карандаша из 5 можно C_5^3 способами; 3 красных из имеющихся 4 можно выбрать C_4^3 способами; 3 зеленых из 3 зеленых — C_3^3 способами.

По правилу сложения общее число m случаев, благоприятствующих событию $A = \{$три карандаша, вынутых из коробки, одного цвета$\}$, равно $m = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

Сочетания

Задача. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

б) Пусть событие B = {три вынутых карандаша разных цветов}. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события B, по правилу умножения равно $m = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

в) Пусть событие C = {из трех выбранных карандашей 2 синих и 1 зеленый}. Выбрать 2 синих карандаша из имеющихся 5 синих можно C_5^2 способами, а 1 зеленый из имеющихся 3 зеленых — C_3^1 способами. Отсюда по правилу умножения имеем: $m = C_5^2 \cdot C_3^1 = 30$. Поэтому $P(\mathrm{C}) = \frac{m}{n} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$.

Сочетания с повторениями

В данной схеме случайный выбор *k* элементов из множества, содержащего *n* элементов, организован таким образом, что каждый выбранный элемент возвращается обратно, так что при каждом следующем выборе может быть взят как новый элемент, так и любой ранее выбранный. Полученное таким образом соединение называют **сочетанием с повторениями**. Одно сочетание с повторениями отличается от другого хотя бы одним элементом или числом повторений элемента. Число всех сочетаний с повторениями из *n* элементов по *k* обозначается $\bar{C}_n^k$ и находится по следующей формуле:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Действительно, в соответствии со схемой с возвращением и упорядочиванием, используя правило умножения, получим, что число упорядоченных соединений длиной *k* равно $n(n + 1)(n + 2) \cdot \cdots \cdot (n + k - 1)$. Разделив данное число на $k!$ и домножив числитель и знаменатель полученной дроби на $(n - 1)!$, найдем число сочетаний с повторениями в указанном выше виде

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot (n+k-1)}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Сочетания с повторениями

Задача. В кондитерской продается десять видов пирожных. Какова вероятность того, что покупатель, выбивший чек на три пирожных, заказал три пирожных разного вида?

Число всевозможных наборов из трех пирожных по смыслу решаемой задачи находится по формуле расчета всех сочетаний из 10 элементов по 3 с повторениями: $\bar{C}_{10}^3 = C_{12}^3 = 220$. Число наборов из трех пирожных разного вида равно числу сочетаний из десяти элементов по три: $C_{10}^3 = 120$.

По формуле вычисления вероятности события в классической схеме получим:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{120}{220} = \frac{6}{11}.$$

Сочетания с повторениями

Задача. В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки: а) одинаковы, б) различны?

❍ Выбрать 4 открытки 6 видов можно $\overline{C_6^4} = 126$ способами, т. е. $n = 126$.

а) Пусть событие A = {продано 4 одинаковые открытки}. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события A, равно числу видов открыток, т. е. $m = 6$. Поэтому

$$P(A) = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}.$$

б) Пусть событие B = {проданы 4 различные открытки}. Выбрать 4 открытки из 6 можно $C_6^4 = 15$ способами, т. е. $m = 15$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}.$$ ●

Перестановки с повторениями

В схеме упорядоченных разбиений множество, содержащее n элементов, разбивается на k упорядоченных подмножеств так, что первое подмножество содержит n_1 элементов первого типа, второе — n_2 элементов второго типа и т. д., а последнее — n_k элементов k -того типа, причем $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Каждое такое разбиение образует соединение из n элементов, которое называют **перестановкой с повторениями**. Число всех перестановок с повторениями называется **полиноминальным коэффициентом**, обозначается $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по следующей формуле:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Действительно, в соответствии со схемой разбиения множества на упорядоченную конечную систему подмножеств и, используя правило умножения, получим, что число таких соединений длиной n находится с помощью следующих преобразований:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \cdots \cdot C_{n_k}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \cdots \cdot \frac{n_k!}{0! \cdot n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Перестановки с повторениями

Задача. Десять мужчин, среди которых Петров и Иванов, размещаются в гостинице в два трехместных и один четырехместный номер. Сколько способов их размещения существует? Какова вероятность события *A* , состоящего в том, что Петров и Иванов попадут в четырехместный номер?

Число всех способов размещения по формуле расчета полиномиальных коэффициентов равно $P_{10}(4,3,3) = \frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!} = 4200$. Далее, если Петров и Иванов уже размещены в четырехместном номере, то оставшиеся восемь мужчин должны разместиться в двух трехместных номерах и на двух оставшихся местах в четырехместном номере. По той же самой формуле число таких вариантов равно

$P_8(2,3,3) = \frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = 560$. Отсюда, по формуле вычисления вероятности события в классической схеме получим

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{560}{4200} = \frac{2}{15} .$$

Формула геометрической вероятности

Пусть событие А – попадание точки в заданную область. Вероятность события А есть отношение меры области (длины, площади, объема) к мере пространства элементарных событий.

Геометрическая схема вычисления вероятности

Задача. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых равны пяти и десяти. Найти вероятность того, что точка, брошенная в больший круг, попадет в кольцо между двумя окружностями.

Мера множества A равна площади кольца и находится по формуле $\mu(A) = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$. Мера пространства элементарных событий равна площади большого круга $\mu(\Omega) = \pi 10^2 = 100\pi$. Отсюда, искомая вероятность вычисляется по формуле геометрической вероятности и равна:

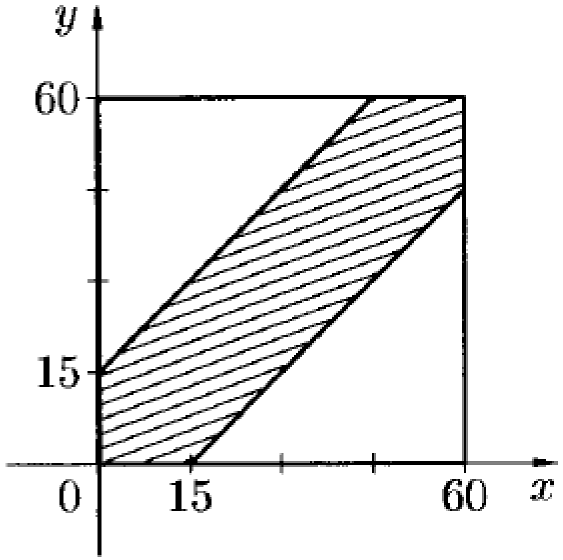
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{75\pi}{100\pi} = 0,75.$$

Геометрическая схема вычисления вероятности

Задача. (Задача о встрече.) Два человека договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

❍ Пусть x — время прихода первого, а y — второго. Возможные значения x и y: $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), которые на плоскости Oxy определяют квадрат со стороной, равной 60. Точки этого квадрата изображают время встречающихся

Тогда $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$; все исходы Ω равновозможны, так как лица приходят наудачу. Событие A — лица встретятся — произойдет, если разность между моментами их прихода будет не более 15 мин (по модулю), т. е. $A = \{(x, y) : |y - x| \leqslant 15\}$. Неравенство $|y - x| \leqslant 15$, т. е. $x - 15 \leqslant y \leqslant x + 15$ определяет область, заштрихованную на рис. 9, т. е. точки полосы есть исходы, благоприятствующие встрече. Искомая вероятность определяется по формуле



$$P(A) = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16} \approx 0{,}44.$$

Геометрическая схема вычисления вероятности

Задание. *Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма x + y не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0.09.*

Используем геометрическое определение вероятности. Сделаем схематический чертеж. Берем числа x, y из квадрата 1×1.

Сумма $x+y\le 1$ эквивалентно условию $y\le 1-x$ - область ниже прямой.

Произведение $yx\ge 0,09$ эквивалентно условию $y\ge \dfrac{0,09}{x}$ - область выше гиперболы.

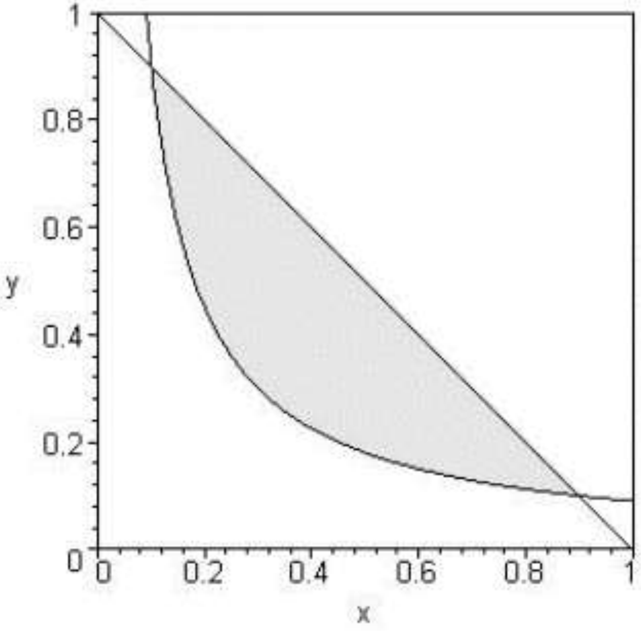
Таким образом, вероятность p равна отношению площади закрашенной фигуры (в которой выполняются условия) к площади всей фигуры (квадрата):

$$p=\frac{S_{фиг.}}{S_{квад.}}$$

Площадь квадрата $S_{квад.}=1*1=1$. Площадь закрашенной области можно найти с помощью интеграла.

$$S_{фиг.}=\int_{0,1}^{0,9}\left(1-x-\frac{0,09}{x}\right)dx=\left(x-0,5x^2-0,09\ln x\right)\Big|_{0,1}^{0,9}=$$

$$=\left(0,9-0,5\cdot 0,9^2-0,09\ln 0,9\right)-\left(0,1-0,5\cdot 0,1^2-0,09\ln 0,1\right)\approx 0,202.$$



Тогда вероятность

$$p=\frac{S_{фиг.}}{S_{квад.}}=\frac{0,202}{1}=0,202.$$

Ответ: 0,202.

Условная вероятность

Пусть A и B — два события, рассматриваемые в данном опыте. Наступление одного события (скажем, A) может влиять на возможность наступления другого (B). *Для характеристики зависимости одних событий от других* вводится понятие условной вероятности.

Условной вероятностью *события B при условии реализации события A называется отношение вероятности произведения событий A и B к вероятности события A, т.е.*

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A) \neq 0.$$ Другое обозначение: $$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$$

Вероятность $P(B)$, в отличие от условной, называется *безусловной вероятностью*.

Условная вероятность

Задача. В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее последовательно вынимают два шара. Какова вероятность того, что 2-ой шар окажется белым при условии, что 1-ый шар был черным?

Решим задачу двумя способами.

1. Пусть A — 1-й шар черный, B — 2-й шар белый. Так как событие A произошло, то в урне осталось 8 шаров, из которых 2 белых. Поэтому $P(B|A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

2. Очевидно, что $P(A) = \frac{7}{9}$.

Находим $P(AB)$: $n = 9 \cdot 8 = 72$ — общее число исходов (появление двух шаров). Событию AB благоприятствуют $m = C_2^1 \cdot C_7^1 = 14$ исходов. Поэтому $P(AB) = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}$. Следовательно, $P(B|A) = \frac{7}{36} : \frac{7}{9} = \frac{1}{4}$. ●

Вероятность произведения двух событий

Вероятность произведения двух событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)\,; P(A) > 0, P(B) > 0.$$

Доказательство. Данные формулы непосредственно следуют из определения условной вероятности.

Применяя правило умножения индуктивно получают **формулу умножения вероятностей для системы событий** в следующем виде:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1}}(A_n).$$

Вероятность произведения двух событий

Задача. На семи карточках написаны буквы **к**, **к**, **о**, **о**, **о**, **т**, **т**. Из них последовательно выбираются три карточки и кладутся слева направо. Найдем вероятность того, что образуется слово «**кот**» (событие A).
Воспользуемся формулой умножения вероятностей и введем события:
A_1 ={на первой вынутой карточке написана буква **к**},
A_2 ={ на второй — буква **о**},
A_3 ={ на третьей — буква **т**}.
Тогда событие A представляет собой произведение событий $A_1A_2A_3$ и находится по формуле умножения вероятностей для трех событий

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3).$$

В соответствии с классической схемой, безусловная вероятность P (A1) определяется как отношение числа карточек, на которых написана буква **к**, к общему числу карточек, т. е. $P(A_1) = 2/7$. Далее, если событие A_1 произошло, то у нас осталось шесть карточек и на трех из них написана буква **о**. По- этому $P_A1(A_2) = 1/2$. Наконец, если произошли события A_1 и A_2 , то из пяти оставшихся карточек на двух написана буква **т**, и значит $P_{A_1A_2}(A_3) = 2/5$. Окончательно получаем $P(A) = P(A_1A_2A_3) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{35}$.

Вероятность произведения двух событий

Задача. В коробке находится 4 белых. 3 синих и 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 1-й шар будет белым, 2-й — синим, 3-й — черным?

❍ Введем следующие события: A_1 — первым вытащили белый шар, A_2 — вторым — синий, A_3 — третьим — черный. Тогда интересующее нас событие A представится в виде $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По правилу умножения вероятностей $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2)$. Но $P(A_1) = \frac{4}{9}$; $P(A_2|A_1) = \frac{3}{8}$, так как шаров осталось 8, а число благоприятных случаев для события A_2 равно 3; $P(A_3|A_1 \cdot A_2) = \frac{2}{7}$, так как уже два шара (белый и синий) вытащены. Следовательно, $P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21} \approx 0{,}05$. ●

Формула полной вероятности

Одним из следствий совместного применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса. Напомним, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если $A_i \cdot A_j = \varnothing, i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Систему таких событий называют также *разбиением*.

Теорема. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу.

Тогда для любого, наблюдаемого в опыте, события A имеет место

формула полной вероятности.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Формула полной вероятности

Задача. Частица пролетает мимо трех счетчиков, причем она может попасть в каждый из них с вероятностями 0*,* 3 , 0*,* 2 и 0*,* 4 . Если частица попадает в первый счетчик, то она регистрируется с вероятностью 0*,* 6 , во второй — с вероятностью 0*,* 5 и в третий — с вероятностью 0*,* 55. Найти вероятность того, что частица будет зарегистрирована (событие *A*).

В данном случае вероятность первой гипотезы $P(H_1)$ равна 0*,* 3 , вероятность второй $P(H_2)$ равна 0*,* 2 и вероятность третьей $P(H_3)$ равна 0*,* 4 . Три указанные гипотезы несовместны, однако они не составляют полной группы событий. Необходимо добавить гипотезу H_4 , заключающуюся в том, что частица не попадет ни в один из счетчиков. Так как вероятности всех ги- потез в сумме дают единицу, то $P(H_4) = 0,1$. Условные вероятности события *A* при выполнении каждой гипотезы равны: $P_H1(A) = 0,6$, $P_H2(A) = 0,5$, $P_H3(A) = 0,55$ и $P_H4(A) = 0$. По формуле полной вероятности получим

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,55 + 0,1 \cdot 0 = 0,5.$$

Формула полной вероятности

Задача. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из I цеха и 60% — из II цеха. В I цехе производится 90% стандартных деталей, а во II — 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется стандартной.

◐ Взятие детали можно разбить на два этапа. Первый — это выбор цеха. Имеется две гипотезы: H_1 — деталь изготовлена I цехом, H_2 — II цехом. Второй этап — взятие детали. Событие A - взятая наудачу деталь стандартна. Очевидно, события H_1 и H_2 образуют полную группу, $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$. Числа 0,90 и 0.95 являются условными вероятностями события A при условии гипотез H_1 и H_2 соответственно, т.е. $P(A|H_1) = 0{,}90$ и $P(A|H_2) = 0.95$. По формуле (1.30) находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}90 + 0{,}6 \cdot 0{,}95 = 0{,}93.$$ ●

Формула Байеса

Следствием формулы полной вероятности является формула Байеса или *теорема гипотез*. Она позволяет переоценить вероятности гипотез H_i, принятых до опыта и называемых *априорными* («a priori», доопытные, лат.) *по результатам уже проведенного опыта*, т. е. найти условные вероятности $P(H_i|A)$, которые называют *апостериорными* («a posteriori», послеопытные).

Теорема. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_k $(k = \overline{1, n})$ при условии, что событие A произошло, задается формулой

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)},$$

где $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$ — формула полной вероятности

Формула Байеса

Задача. Три завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50% , второй — 20% и третий — 30% всей продукции. Первый завод допускает 1% брака, второй — 8% и третий — 3% . Наудачу выбранное изделие оказалось бракованным (событие A). Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе.

Имеются три гипотезы: H_1 — изделие изготовлено на первом заводе,

H_2 — на втором заводе и H_3 — на третьем. По условию задачи $P(H_1) = 0,5$,

$P(H_2) = 0,2$, $P(H_3) = 0,3$, $P_H1(A) = 0,01$, $P_H2(A) = 0,08$, $P_H3(A) = 0,03$.

Условная вероятность того, что бракованное изделие изготовлено на втором заводе вычисляется по формуле Байеса следующим образом:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,08}{0,5 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,08 + 0,3 \cdot 0,03} = \frac{8}{15}.$$

Формула Байеса

Задача. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из I цеха и 60% — из II цеха. В I цехе производится 90% стандартных деталей, а во II — 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется стандартной и эта стандартная деталь изготовлена II цехом.

❍ Определим вероятность гипотезы H_2 при условии, что событие A (взятая деталь стандартна) уже произошло, т. е. $P(H_2|A)$:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}95}{0{,}93} = \frac{19}{31} \approx 0{,}613. \quad \bullet$$