УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 4. ***Системы случайных величин***

Системы случайных величин

При изучении случайных явлений часто приходится иметь дело с двумя, тремя и большим числом случайных величин. Совместное рассмотрение нескольких случайных величин приводит к системам случайных величин. Так, точка попадания снаряда характеризуется системой (X, Y) двух случайных величин: абсциссой X и ординатой Y;

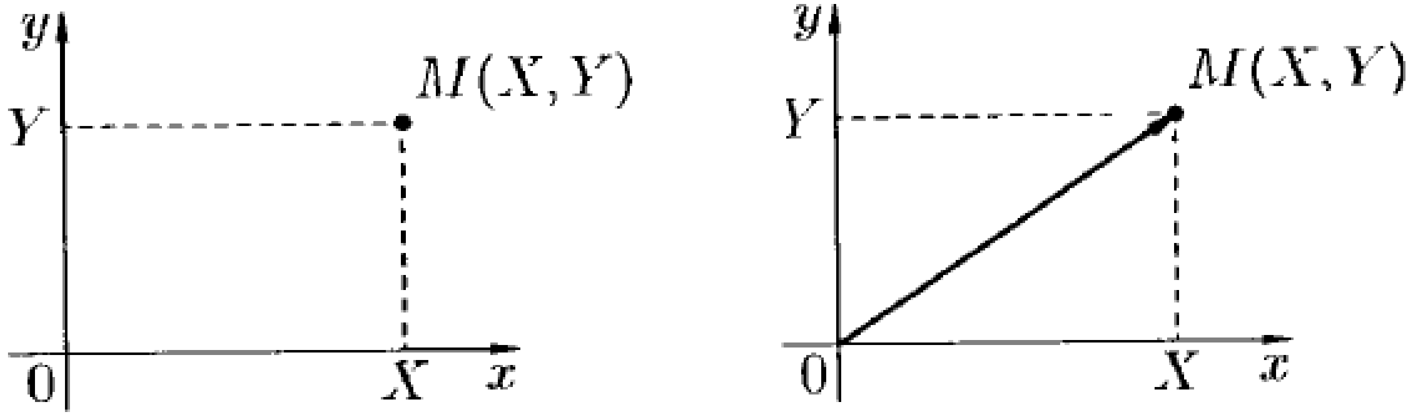
Упорядоченный набор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных величин X_i $(i = \overline{1, n})$, заданных на одном и том же ПЭС Ω, называется *n-мерной случайной величиной* или *системой n случайных величин*.

Одномерные с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются *компонентами* или *составляющими* n-мерной с. в. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Их удобно рассматривать как координаты случайной точки или случайного вектора $\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в пространстве n измерений.

Системы случайных величин

Упорядоченная пара (X, Y) двух случайных величин X и Y называется *двумерной случайной величиной* или *системой двух одномерных случайных величин* X и Y.

Систему (X, Y) можно изобразить *случайной точкой* $M(X, Y)$ или *случайным вектором* OM



Система (X, Y) есть функция элементарного события: $(X, Y) = \varphi(w)$. Каждому элементарному событию w ставится в соответствие два действительных числа x и y (или x_1 и x_2) — значения X и Y (или X_1 и X_2) в данном опыте. В этом случае вектор $\bar{x} = (x_1, x_2)$ называется *реализацией* случайного вектора $\bar{X} = (X_1, X_2)$.

Системы случайных величин

Системы случайных величин могут быть *дискретными*, *непрерывными* и *смешанными* в зависимости от типа случайных величин, образующих систему. В первом случае компоненты этих случайных систем дискретны, во втором — непрерывны. в третьем — разных типов.

Полной характеристикой системы (X, Y) является ее *закон распределения вероятностей*, указывающий область возможных значений системы случайных величин и вероятности этих значений. Как и для отдельных случайных величин закон распределения системы может иметь разные формы (таблица, функция распределения. плотность, ...).

Так, закон распределения дискретной двумерной с. в. $(X. Y)$ можно задать формулой

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \qquad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$$

Системы случайных величин

или в форме таблицы с двойным входом:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	$\dots$	p_{nm}

Причем, сумма всех вероятностей p_{ij}, как сумма вероятностей полной группы несовместных событий $\{X = x_i, Y = y_j\}$, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Системы случайных величин

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, *можно найти законы распределения каждой из компонент* (обратное, вообще говоря, неверно). Так, $p_{x_1} = P\{X = x_1\} = p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{1m}$, что следует из теоремы сложения несовместных событий $\{X = x_1, Y = y_1\}$, $\{X = x_1, Y = y_2\}$, ..., $\{X = x_1, Y = y_m\}$. Аналогично можно найти

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Функция распределения двумерной случайной величины

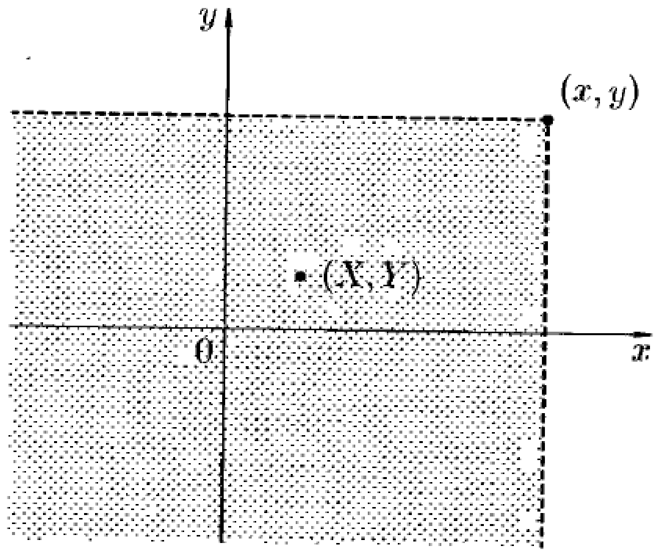
Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется функция $F(x, y)$, которая для любых действительных чисел x и y равна вероятности совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$.

Таким образом, по определению

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$

(событие $\{X < x, Y < y\}$ означает произведение событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$).

Геометрически функция $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y), лежащий левее и ниже ее



Свойства функции распределения двумерной случайной величины

1. Функция распределения $F(x, y)$ ограничена, т. е.

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1.$$

2. $F(x, y)$ не убывает по каждому из своих аргументов при фиксированном другом, т. е.

$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1) \quad \text{при} \quad y_2 > y_1.$$

3. Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, то функция распределения $F(x, y)$ равна нулю, т. е.

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

Свойства функции распределения двумерной случайной величины

4. Если оба аргумента обращаются в $+\infty$, то $F(x, y)$ равна 1, т. е.

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

5. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, то функция распределения системы случайных величин становится функцией распределения с. в., соответствующей другому элементу, т. е.

$$F(x, +\infty) = F_1(x) = F_X(x), \quad F(+\infty, y) = F_2(y) = F_Y(y). \tag{3.4}$$

6. $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому из своих аргументов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x, y) = F(x_0, y), \quad \lim_{y \to y_0 - 0} F(x, y) = F(x, y_0).$$

Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины

Двумерная случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x, y)$ есть непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $F''_{xy}(x, y)$.

Плотностью распределения вероятностей (или *совместной плотностью*) непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная производная ее функции распределения.

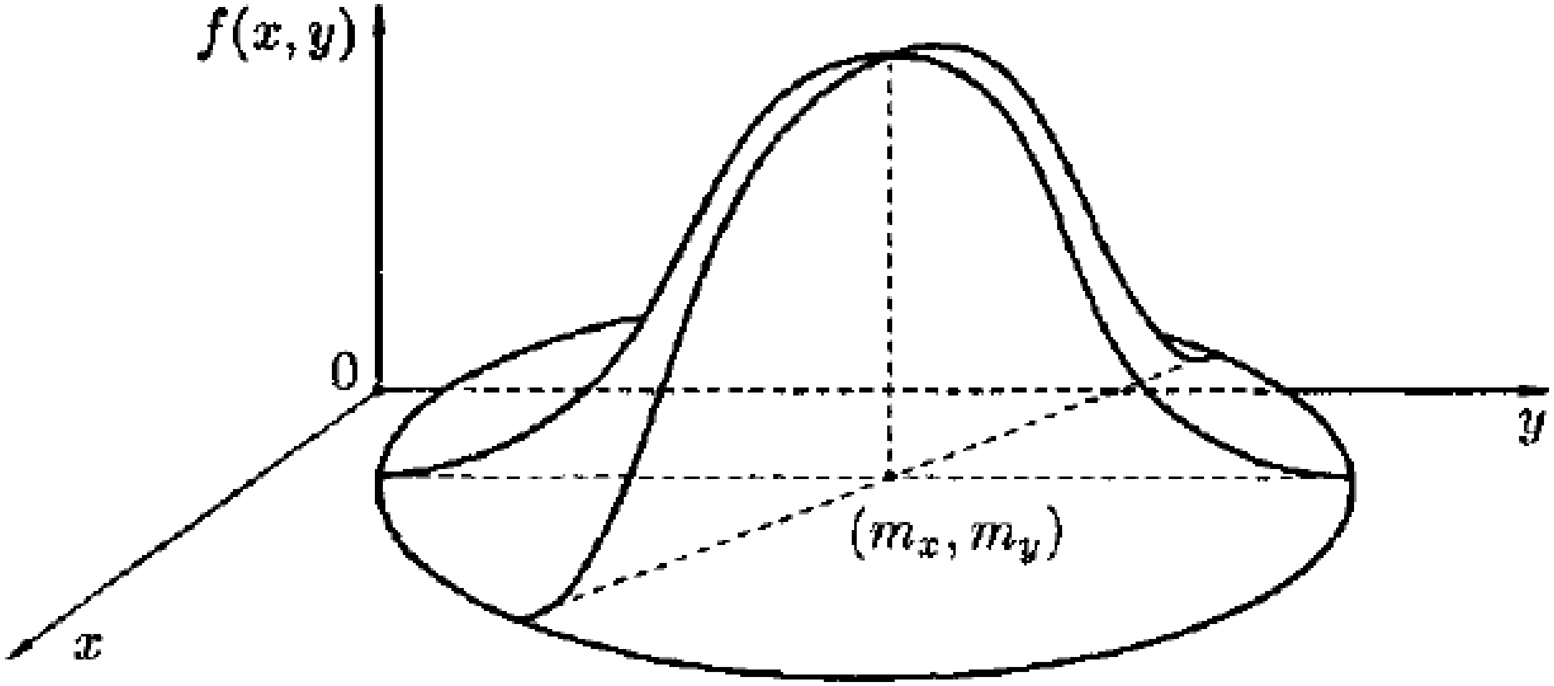
Обозначается совместная плотность системы двух непрерывных случайных величин (X, Y) через $f(x, y)$ (или $p(x, y)$).

Таким образом, по определению

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$

Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины

Геометрически плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) представляет собой некоторую поверхность, называемую *поверхностью распределения*



Свойства плотности распределения вероятностей двумерной случайной величины

1. Плотность распределения двумерной случайной величины неотрицательна, т. е.

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

2. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по области D, т. е.

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dx dy. \tag{3.8}$$

3. Функция распределения двумерной случайной величины может быть выражена через ее плотность распределения по формуле:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)\, du dv. \tag{3.9}$$

Свойства плотности распределения вероятностей двумерной случайной величины

4. Условие нормировки: двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности двумерной с. в. равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$$

5. Плотности распределения одномерных составляющих X и Y могут быть найдены по формулам:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = f_1(x) = f_x(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = f_2(y) = f_y(y). \qquad (3.10)$$

Числовые характеристики двумерной случайной величины

Математическим ожиданием двумерной с. в. (X,Y) называется совокупность двух м. о. MX и MY, определяемых равенствами:

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad MY = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij},$$

если (X,Y) — дискретная система с. в. (здесь $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$)

и

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dxdy, \quad MY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dxdy,$$

если (X,Y) — непрерывная система с. в. (здесь $f(x,y)$ — плотность распределения системы).

Числовые характеристики двумерной случайной величины

Дисперсией системы с. в. (X, Y) называется совокупность двух дисперсий DX и DY, определяемых равенствами:

$$DX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)^2 p_{ij}, \quad DY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - m_y)^2 p_{ij},$$

если (X, Y) — дискретная система с. в. и

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x, y)\,dxdy, \quad DY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)^2 f(x, y)\,dxdy,$$

если (X, Y) — непрерывная система с. в.

Ковариация

Корреляционным моментом (или *ковариацией*) двух случайных величин X и Y называется м. о. произведения отклонений этих с. в. от их м. о. и обозначается через K_{XY} или $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Таким образом, по определению

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y) = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$$

При этом: если (X, Y) — дискретная двумерная с. в., то ковариация вычисляется по формуле

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij};$$

если (X, Y) — непрерывная двумерная с. в., то

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y)\, dx dy$$

Ковариация

Ковариацию часто удобно вычислять по формуле

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y) = MXY - MX \cdot MY,$$

если (X, Y) — непрерывная двумерная с. в., то

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dx dy - m_x m_y.$$

Свойства ковариации

1. Ковариация симметрична, т. е.

$$K_{XY} = K_{YX}.$$

2. Дисперсия с. в. есть ковариация ее с самой собой, т. е.

$$K_{XX} = DX, \qquad K_{YY} = DY.$$

3. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$K_{XY} = 0.$$

4. Дисперсия суммы (разности) двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс (мину , удвоенная ковариация этих случайных величин, т. е.

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2K_{XY}.$$

Свойства ковариации

5. Постоянный множитель можно вынести за знак ковариаций. т. е.

$$K_{cX,Y} = c \cdot K_{XY} = K_{X,cY} \quad \text{или} \quad \operatorname{cov}(cX, Y) = c \cdot \operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, cY).$$

6. Ковариация не изменится, если к одной из с. в. (или к обоим сразу) прибавить постоянную, т. е.

$$K_{X+c,Y} = K_{XY} = K_{X,Y+c} = K_{X+c,Y+c}$$

или

$$\operatorname{cov}(X + c, Y) = \operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, Y + c) = \operatorname{cov}(X + c, Y + c).$$

7. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит их с. к. о., т. е.

$$|K_{XY}| \leqslant \sigma_x \cdot \sigma_y.$$

Коэффициент корреляции

Коэффициентом корреляции r_{XY} двух с. в. X и Y называется отношение их ковариации (корреляционного момента) к произведению их с. к. о.:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

Очевидно, коэффициент корреляции равен ковариации стандартных с. в. $Z_1 = \dfrac{X - m_x}{\sigma_x}$ и $Z_2 = \dfrac{Y - m_y}{\sigma_y}$, т. е. $r_{XY} = \operatorname{cov}(Z_1, Z_2)$.

Свойства коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит 1, т. е.

$$|r_{XY}| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant r_{XY} \leqslant 1.$$

2. Если X и Y независимы, то

$$r_{XY} = 0.$$

3. Если с. в. X и Y связаны линейной зависимостью, т. е. $Y = aX + b$, $a \neq 0$, то

$$|r_{XY}| = 1,$$

причем $r_{XY} = 1$ при $a > 0$,
$r_{XY} = -1$ при $a < 0$.

4. Если $|r_{XY}| = 1$, то с. в. X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Предельные теоремы теории вероятностей

Рассмотрим ряд утверждений и теорем из большой группы так называемых предельных теорем теории вероятностей, устанавливающих связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом числе испытаний над ними. Они составляют основу математической статистики. Предельные теоремы условно делят на две группы. Первая группа теорем, называемая *законом больших чисел* (коротко: ЗБЧ), устанавливает устойчивость средних значений: при большом числе испытаний их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с достаточной точностью. Вторая группа теорем, называемая *центральной предельной теоремой* (коротко: ЦПТ), устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному.

Неравенство Чебышева

Если с. в. X имеет м. о. $MX = a$ и дисперсию DX, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева

$$P\{|X - MX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Отметим, что неравенство Чебышева можно записать в другой форме:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева

Пример 5.1. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что отклонение с. в. X от своего м. о. будет меньше трех с. к. о., т. е. меньше $3\sigma_x$.

Полагая $\varepsilon = 3\sigma_x$ в формуле (5.2), получаем

$$P\{|X - MX| < 3\sigma_x\} \geqslant 1 - \frac{\sigma_x^2}{(3\sigma_x)^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}8889.$$

Эта оценка, как известно (п. 2.7), называется *правилом трех сигм*; для с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ эта вероятность равна 0,9973.

Неравенство Маркова

(Неравенство Маркова). Для любой неотрицательной с. в. X, имеющей м. о. MX и $\varepsilon > 0$, справедливо неравенство:

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leqslant \frac{MX}{\varepsilon},$$

Теорема Чебышева

Теорема **(ЗБЧ в форме П. Л. Чебышева, 1886 г.).** Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и существует такое число $C > 0$, что $DX_i \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

т. е. среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их м. о.:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i.$$

Теорема Чебышева

Следствие. Если с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

т. е. среднее арифметическое с. в. сходится по вероятности к математическому ожиданию a:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} a.$$

Теорема Бернулли

Теорема 5.4 (ЗБЧ в форме Я. Бернулли, 1713 г.). Если вероятность появления события A в одном испытании равна p, число наступления этого события при n независимых испытаниях равно n_A, то для любого числа $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{5.10}$$

т. е. относительная частота $P^*(A)$ события A сходится по вероятности к вероятности p события A: $P^*(A) \xrightarrow[n\to\infty]{P} P(A)$.

Центральная предельная теорема

Теорема 5.5. Пусть с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание $MX_i = a$ и дисперсию $DX_i = \sigma^2$, $i = \overline{1,n}$. Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих случайных величин стремится при $n \to \infty$ к функции распределения стандартной нормальной случайной величины:

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}},$$

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{5.13}$$

Из соотношения (5.13) следует, что при достаточно большом n сумма Z_n приближенно распределена по нормальному закону: $Z_n \sim N(0,1)$. Это означает, что сумма $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ приближенно распределена по нормальному закону: $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma)$. Говорят, что при $n \to \infty$ с. в. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ *асимптотически нормальна.*

Центральная предельная теорема

Напомним, что:

1. С. в. X называется центрированной и нормированной (т. е. стандартной), если $MX = 0$, а $DX = 1$.
2. Если с. в. X_i, $i = \overline{1, n}$ независимы, $MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, то

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = a + a + \ldots + a = na,$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 = n\sigma^2.$$

3. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — функция Лапласа; $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$, где

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — нормированная функция Лапласа.