Лекция 2.

3. Последовательности независимых испытаний

3.1. Схема Бернулли

Одинаковые независимые между собой испытания называются *схемой Бернулли* или *испытаниями Бернулли*, если при каждом испытании имеется только два возможных исхода, причём вероятности этих исходов положительны и неизменны для всех испытаний.

Исходы испытаний обычно называют *успехом* и *неудачей* и обозначают соответственно буквами p и q. Очевидно, что $p > 0$, $q > 0$ и

$$p + q = 1. \tag{3.1}$$

Опишем вероятностное пространство, соответствующее n испытаниям Бернулли. Будем считать, что исходами каждого испытания являются либо 0, либо 1. Пусть успеху соответствует 1, а неудаче — 0.

Пространством элементарных событий

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = \text{У}, \text{Н}\}.$$

Вероятность элементарного события задаётся формулой

$$\mathsf{P}(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}.$$

Теорема 3.1. *Если μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли, то*

$$\mathsf{P}(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Если число успехов элементарного события ω равно m, то $\mathsf{P}(\omega) = p^m q^{n-m}$. Очевидно, что количество таких событий равно C_n^m. ■

Пример 1. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность события A, состоящее в выпадении 3 гербов.

Решение. Выпадение герба будем считать успехом. Так как $p = q = \dfrac{1}{2}$, то из формулы (3.2) получаем

$$\mathsf{P}(A) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} = 0{,}3125. \quad ■$$

Одинаковые независимые между собой испытания называются *полиномиальной схемой*, если при каждом испытании имеется только k возможных исходов, причём вероятности этих исходов положительны и неизменны для всех испытаний. Схема Бернулли является является частным случаем полиномиальной схемы при $k = 2$.

Пусть E_1, E_2, …, E_k — исходы испытаний и $p_i = \mathsf{P}(E_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, что $p_i > 0$ и

$$p_1 + \ldots + p_k = 1. \tag{3.3}$$

Теорема 3.2. *Рассмотрим полиномиальную схему, состоящую из n испытаний с возможными исходами E_1, E_2, …, E_k. Вероятность того, что событие E_i произойдёт r_i раз, $i = 1, \ldots, k$, равна*

$$P_n(r_1, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}\, p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Вероятность элементарного события $\omega = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$, в котором E_i встречается r_i раз, $i = 1, \ldots, k$, равна $\mathsf{P}(\omega) = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$. Из теоремы 1.5.1 следует, что количество таких событий равно $\dfrac{n!}{r_1! \ldots r_k!}$. ■

Пример 2. Игральная кость бросается 12 раз. Найти вероятность события A, состоящее в том, что каждая грань выпадет дважды.

Решение. Пусть $E_1, \ldots, E_6$ соответствуют шести граням. По условию все $p_i = 1/6$ и все $r_i = 2$. В силу (3.4) получаем

$$P(A) = \frac{12!}{(2!)^6}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{12} = \frac{1925}{559872} = 0{,}003438\ldots. \quad ■$$

3.2. Локальная предельная теорема

Будем рассматривать схему Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q. Число испытаний будем обозначать через n.

Теорема 3.3.(Локальная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то для любого конечного промежутка $[a, b]$, $a \le b$,*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, (1 + O(n^{-1/2})). \tag{3.5}$$

равномерно для $x \in [a, b]$ вида

$$x = x_{mn} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3.6}$$

где m — целое неотрицательное число.

Доказательство. Доказательство опирается на формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n \exp(\theta_n), \quad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

Используя формулу Стирлинга, запишем

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m q^{n-m} = \frac{\sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{-n} n^n \exp\left(\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}\right) p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\, \mathrm{e}^{-m} m^m \sqrt{2\pi(n-m)}\, \mathrm{e}^{-(n-m)} (n-m)^{n-m}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \Big(\frac{np}{m}\Big)^m \Big(\frac{nq}{n-m}\Big)^{n-m} \exp(\theta).$$

Здесь $\theta = \theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}$.

Из (3.6) следуют равенства

$$\begin{aligned} m &= np + x\sqrt{npq} = np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right), \\ n - m &= nq - x\sqrt{npq} = nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как x принадлежит ограниченному промежутку $[a, b]$, то $m = O(n)$, $n - m = O(n)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a, b]$. Следовательно,

$$|\theta| \le |\theta_n| + |\theta_m| + |\theta_{n-m}| \le \frac{1}{12n} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{12(n-m)} = O(n^{-1}).$$

Следовательно,
$$\exp(\theta) = 1 + O(n^{-1}) \tag{3.8}$$
при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a,b]$.

Рассмотрим величину
$$\ln A_n = \ln\Bigl(\frac{np}{m}\Bigr)^m \ln\Bigl(\frac{nq}{n-m}\Bigr)^{n-m} = m\ln\Bigl(\frac{np}{m}\Bigr) + (n-m)\ln\Bigl(\frac{nq}{n-m}\Bigr).$$

Из равенств (3.7) следует
$$\ln A_n = -np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Величины $x\sqrt{q/np}$ и $x\sqrt{p/nq}$ есть величины $O(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a,b]$. Следовательно,
$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np} + O(n^{-3/2})$$
$$\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\frac{px^2}{nq} + O(n^{-3/2})$$

Таким образом, получаем
$$np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x\sqrt{npq} + qx^2 - \frac{qx^2}{2} + O(n^{-1/2}),$$
$$nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{npq} + qx^2 - \frac{qx^2}{2} + O(n^{-1/2}),$$
и поэтому
$$\ln A_n = -\frac{x^2}{2} + O(n^{-1/2}). \tag{3.9}$$

Осталось рассмотреть множитель $\sqrt{\dfrac{n}{m(n-m)}}$. Из равенств (3.7) следует
$$m(n-m) = n^2pq\bigl(1 + O(n^{-1/2})\bigr).$$

Отсюда получаем
$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left((1 + O(n^{-1/2})\right). \tag{3.10}$$

Теперь утверждение теоремы следует из (3.8), (3.9), (3.10). ■

Пример 3. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Из локальной теоремы Муавра-Лапласа имеем
$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Находим x:
$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = 0.$$

В результате
$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} = 0{,}0498678.$$
Точное значение
$$P_{400}(80) = \frac{400!}{80!\,320!}\,0{,}2^{80}\,0{,}8^{320} = 0{,}049813272\ldots. \quad \blacksquare$$

3.3. Интегральная предельная теорема

Будем рассматривать схему Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q. Число испытаний будем обозначать через n. Пусть μ — число успехов в n испытаниях.

Теорема 3.4.(Интегральная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то равномерно по $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, имеет место соотношение*
$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx. \tag{3.11}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|a| \le C$, $|b| \le C$. Пусть $]x[$ — наименьшее целое число такое, что $x \le]x[$, а $[x]$ — наибольшее целое число такое, что $[x] \le x$. Пусть
$$m_1 =]\,np + a\sqrt{npq}\,[, \quad m_2 = [\,np + b\sqrt{npq}\,].$$
Тогда
$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \mathsf{P}\{\mu = m\}. \tag{3.12}$$
Обозначим $m = np + x_m\sqrt{npq}$, тогда
$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$
По локальной предельной теореме запишем (3.12) в виде
$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x_m^2/2}\,\Delta x_m(1 + O(n^{-1/2})). \tag{3.13}$$
Справа в (3.13) стоит интегральная сумма, сходящаяся равномерно по a, b при $n \to \infty$ к интегралу
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx.$$
Следовательно, теорема доказана при $|a| \le C$, $|b| \le C$.

Избавимся теперь от ограничения $|a| \le C$, $|b| \le C$. Обозначим $\xi_n = \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$. Имеем равенство
$$\mathsf{P}\{|\xi_n| > C\} = 1 - \mathsf{P}\{|\xi_n| \le C\}. \tag{3.14}$$
Из анализа известно, что
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^{C} e^{-x^2/2}\, dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) получаем

$$\left| \mathsf{P}\{|\xi_n| > C\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} e^{-x^2/2}\, dx \right| = \left| \mathsf{P}\{|\xi_n| \le C\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^{C} e^{-x^2/2}\, dx \right|. \tag{3.16}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое C, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} e^{-x^2/2}\, dx < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{3.17}$$

Зафиксируем C. По доказанному выше найдётся такое n_1, что для всех $n \ge n_1$

$$\left| \mathsf{P}\{|\xi_n| \le C\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^{C} e^{-x^2/2}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{8},$$

откуда, в силу (3.16) и (3.17), для тех же $n \ge n_1$ имеем

$$\mathsf{P}\{|\xi_n| > C\} \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.18}$$

Возьмём теперь произвольный интервал $[a, b]$. Обозначим $[A, B] = [a, b] \cap [-C, C]$. Так как $-C \le A \le B \le C$, то, по уже доказанному, существует такое n_2, что для всех $n \ge n_2$ справедливо неравенство

$$\left| \mathsf{P}\left\{ \xi_n \in [A, B] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{B} e^{-x^2/2}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.19}$$

Из неравенства

$$\left| \mathsf{P}\left\{ \xi_n \in [a, b] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-x^2/2}\, dx \right| \le \mathsf{P}\{|\xi_n| > C\} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} e^{-x^2/2}\, dx + \left| \mathsf{P}\left\{ \xi_n \in [A, B] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{B} e^{-x^2/2}\, dx \right|$$

получаем, в силу (3.17)–(3.19), что при $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\left| \mathsf{P}\left\{ \xi_n \in [a, b] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-x^2/2}\, dx \right| < \varepsilon$$

равномерно по всем $a \le b$. Теорема доказана. ■

Следствие 3.5. (Закон больших чисел Бернулли). *Пусть выполнены условия интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Тогда для любого* $\varepsilon >$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \tag{3.20}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathsf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = \mathsf{P}\left\{ -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right\}.$$

В силу интегральной теоремы Муавра-Лапласа

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1. \quad ■$$

3.4. Применение интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Введём функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ равенствами:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt. \tag{3.21}$$

Функция $\Phi(x)$ называется *нормальной функцией распределения*, а функция $\varphi(x)$ — *плотностью нормального распределения*.

Для конкретных расчётов используется функция

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt. \tag{3.22}$$

Значения функции $\Phi_0(x)$ при положительных x приведены в таблице 2 книги [1]. Для отрицательных x следует воспользоваться нечётностью $\Phi_0(x)$: $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$. Отметим формулу:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x), & \text{при } x \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} - \Phi_0(-x), & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Пример 4. В партии из $n = 22500$ изделий, каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 1/5$. Найти вероятность того, что число μ_n бракованных изделий находится между 4380 и 4560.

Решение. Значение $npq = 3600$ велико, поэтому можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Так как $np = 4500$, то неравенство

$$4380 < \mu_n < 4560$$

эквивалентно неравенству

$$-2 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < 1.$$

Из интегральной теоремой Муавра-Лапласа получаем

$$\mathsf{P}\{4380 < \mu_n < 4560\} = \mathsf{P}\left\{-2 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < 1\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{1} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{1} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \Phi_0(2) + \Phi_0(1).$$

Из таблицы 2 в [1] находим: $\Phi_0(1) = 0{,}3413$, $\Phi_0(2) = 0{,}4772$. В результате

$$\mathsf{P}\{4380 < \mu_n < 4560\} = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185. \ \blacksquare$$

3.5. Теорема Пуассона

Теорема 3.6.(Теорема Пуассона.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{3.24}$$

Доказательство. Положим $\lambda = np$. Имеем

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} =$$
$$= \frac{\lambda_n^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Отсюда при $n \to \infty$ получим утверждение теоремы. ■

Обозначим

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{3.25}$$

Полученное распределение вероятностей носит название *закона Пуассона*.

Пример 5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна $p = 0{,}001$. Найти вероятность попадания в цель двумя и более пулями, если число выстрелов равно 5000.

Решение. Будем считать, что каждый выстрел это испытание и попадание в цель это событие. Нужно вычислить $\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\}$. В данном примере

$$\lambda = np = 0.001 \cdot 5000 = 5.$$

Искомая вероятность равна

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} = \sum_{m=2}^{\infty} P_n(m) = 1 - P_n(0) - P_n(1).$$

По теореме Пуассона

$$P_n(0) \approx \mathrm{e}^{-5}, \quad P_n(1) \approx 5\mathrm{e}^{-5}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} \approx 1 - 6\mathrm{e}^{-5} = 0{,}9595723180\dots$$

Точное вычисление даёт

$$P_n(0) = (1-p)^n = 0.999^{5000} = 0{,}006721111960,$$
$$P_n(1) = np(1-p)^{n-1} = 0.999^{5000} = 0{,}0336391990.$$

В результате

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} = 0{,}9596396890\dots$$

Ошибка от использования теоремы Пуассона составляет около 0,007%. ■

4. Случайные величины и функции распределения

4.1. Определения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — произвольное вероятностное пространство.

Числовая функция $\xi(\omega)$ на множестве элементарных событий Ω называется *случайной величиной*, если для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$\{\xi < x\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}. \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что

$$\begin{gathered} \{\xi \geq x\} = \overline{\{\xi < x\}} \in \mathcal{F}, \\ \{x_1 \leq \xi < x_2\} = \{\xi < x_2\} \setminus \{\xi < x_1\} \in \mathcal{F}, \\ \{\xi = x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{ x \leq \xi < x + \frac{1}{n} \Big\}. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Функция

$$F(x) = F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}, \tag{4.3}$$

определённую при всех $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения*.

Очевидно, что функция распределения $F(x)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq F(x) \leq 1 \tag{4.4}$$

при всяком $x \in \mathbb{R}$

Введём обозначения

$$F(x-0) = \lim_{y \nearrow x} F(y), \quad F(x+0) = \lim_{y \searrow x} F(y), \quad F(\pm\infty) = \lim_{y \to \pm\infty} F(y).$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} &\text{i)} && \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1), \\ &\text{ii)} && \mathsf{P}\{\xi = x\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x), \\ &\text{iii)} && \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1), \\ &\text{iv)} && \mathsf{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1+0), \\ &\text{v)} && \mathsf{P}\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1+0). \end{aligned}$$

Доказательство.

i) Так как

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} + \{x_1 \leq \xi < x_2\},$$

то из аддитивности P получаем

$$\mathsf{P}\{\xi < x_2\} = \mathsf{P}\{\xi < x_1\} + \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\}.$$

Отсюда следует (i).

ii) Из непрерывности P, (4.2), (i) получим

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = \lim_{n\to\infty} \left(F_\xi\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - F_\xi(x) \right) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x).$$

Равенства (iii), (iv), (v) доказываются аналогично. ■

Пример 1. Рассмотрим схему Бернулли, состоящую из n испытаний с вероятностью успеха p. Обозначим через μ число успехов. Случайная величина μ принимает все целочисленные значения от 0 до n включительно. Согласно предыдущей главе

$$\mathsf{P}(\mu = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, \ldots, n.$$

Функция распределения случайной величины μ равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0, \\ \sum\limits_{k<x} P_n(k) & \text{при} \quad 0 < x \leq n, \\ 1 & \text{при} \quad x > n. \end{cases}$$

Функция распределения представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках $x = 0, \ldots, n$; скачок в точке $x = k$ равен $P_n(k)$.

Каждая случайная величина однозначно определяет свою функцию распределения. Обратное неверно, т. е. одной функцию распределения могут соответствовать сколь угодно различных случайных величин.

Пример 2. Пусть случайная величина ξ принимает два значения -1 и $+1$, каждое с вероятностью $1/2$. Случайная величина $\nu = -\xi$ всегда отлична от ξ. При этом обе эти случайные величины имеют одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq -1, \\ 1/2 & \text{при} \quad -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

4.2. Свойства функции распределения

Пусть ξ — случайная величина. Функция распределения $F(x) = F_\xi(x)$ обладает следующими свойствами:

F1. $F(x)$ не убывает.

F2. $F(x)$ непрерывна слева.

F3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Доказательство.

1. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$ и, следовательно, $F(x_1) \leq F(x_2)$.

2. Пусть числовая последовательность $\{y_n\}$ возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Тогда

$$\{\xi < y_n\} \subset \{\xi < y_{n+1}\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi < y_n\} = \{\xi < x_0\}.$$

Из непрерывности P и монотонности функции распределения получаем

$$F(x_0 - 0) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi < y_n\} = \mathsf{P}\{\xi < x_0\} = F(x_0).$$

3. В силу п. 1, F монотонна и поэтому существуют пределы $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$. Пусть $A_k = \{k-1 \le \xi < k\}$. Ясно, что $\Omega = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$ и $\mathsf{P}(A_k) = F(k) - F(k-1)$. Получаем

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N+1}^{N} \mathsf{P}(A_k) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \big(F(N) - F(-N)\big) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Из неравенства (4.4) следует, что $0 \le F(\pm\infty) \le 1$. Следовательно, $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$. ■

Теорема 4.1. *Пусть Функция $F(x)$ обладает свойствами* F1, F2 *и* F3. *Тогда существует вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *и случайная величина* ξ *на этом пространстве такая, что* $F_\xi(x) = F(x)$.

4.3. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения

Распределение случайной величины ξ называется *дискретным*, если существует конечное или счётное множество чисел x_1, x_1, … таких, что

$$\mathsf{P}\{\xi = x_n\} = p_n, \ n = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \tag{4.5}$$

Распределение случайной величины ξ называется *абсолютно непрерывным*, если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$ такая, что для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\, du. \tag{4.6}$$

Функция $p_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей.*

Очевидно

$$\mathsf{P}\{a \le \xi < b\} = \int_a^b p_\xi(x)\, dx,$$

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+\frac{1}{n}} p_\xi(x)\, dx = 0.$$

Отсюда следует, что для абсолютно непрерывных величин

$$\mathsf{P}\{a \le \xi \le b\} = \mathsf{P}\{a < \xi \le b\} = \mathsf{P}\{a \le \xi < b\} = \mathsf{P}\{a < \xi < b\}.$$

Приведём часто встречающиеся распределения. Сначала перечислим дискретные распределения.

1. *Вырожденное распределение*:

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = 1, \quad a \text{ — постоянная.}$$

2. *Гипергеометрическое распределение* (N, M, n — натуральные числа, $M \le N$, $n \le N$):

$$\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min\{M, n\}.$$

3. *Биномиальное распределение* (n — натуральные число, $0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

4. *Распределение Пуассона* ($\lambda > 0$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

5. *Геометрическое распределение* ($0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Теперь перечислим абсолютно непрерывные распределения, указав их плотность.

1. *Равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$*,* $a < b$:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

2. *Нормальное распределение с параметрами* (a, σ^2) ($\sigma > 0$, $a \in \mathbb{R}$):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение также называется *гауссовым.* Нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ называется *стандартным нормальным распределением.*

3. *Показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Список литературы

1. Чистяков В. П. *Курс теории вероятностей.* — 3-е изд. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

2. Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей*: Учебник. Изд. 10-е, доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 488 с. (Классический университетский учебник.)

3. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения.* В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.

4. Севастьянов Б. А. *Курс теории вероятностей и математической статистики.* — М.: Наука, 1982. — 256 с.

5. Зубков А.М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Сборник задач по теории вероятностей.* — 2-е изд.— М.: Наука, 1989. — 320 с.