УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 1. Случайные события

Литература

Литература:

1) Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей*. — М.: Наука, 1974. — 120 с.
2) Чистяков В.П. *Курс теории вероятностей*. 8-е изд. — М.: URSS, 2015. — 304 с.
3) Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. 10-е изд. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 488 с.
4) Свешников А.А. *Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций*. 5-е изд., стер. — СПб.: Издательство "Лань", 2013. — 448 с. — Режим доступа https://e.lanbook.com/book/5711.

Основные понятия и определения

Теория вероятностей — это математическая дисциплина, в рамках ко- торой моделируют и изучают такие события в повседневной жизни, науке и технике, которые носят случайный характер.

В теории вероятностей первичным понятием является произвольное множество. Элементы ω этого множества называют ***элементарными событиями***, а само множество Ω называют ***пространством элементарных событий***.

Для описания каждой реальной задачи пространство Ω выбирается наиболее подходящим образом. Пусть, например, опыт состоит в подбрасывании один раз правильной шестигранной игральной кости. Наблюдаемый результат — число очков на верхней грани. Пространство элементарных событий Ω в этом случае равно множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а элементарные события — цифры от одной до шести.

Пространство Ω может быть **дискретным** или **непрерывным**. Дискретные пространства подразделяются на конечные и счетные — эквивалентные множеству натуральных чисел.

Если пространство Ω дискретно, то **случайным событием** может быть любое подмножество пространства элементарных событий. События обозначают прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots, Z$. Говорят, что событие A произошло (наступило, реализовалось), если результатом опыта явился элементарный исход, принадлежащий A.

Основные понятия и определения

Событие, совпадающее с пустым множеством $\emptyset$, называется **невозможным событием**, а событие, совпадающее со всем множеством Ω , — **достоверным событием**. Невозможное событие не происходит ни в одном опыте, а достоверное — осуществляется всегда.

Если пространство Ω непрерывно, то событиями являются не любые его подмножества, а только те, которые принадлежат σ **- алгебре событий**, т. е. семейству подмножеств, замкнутому относительно основных операций над множествами. Для того, чтобы задать σ - алгебру событий, надо предварительно определить основные операции и отношения между событиями. Поскольку любое событие отождествляется с некоторым множеством, то над событиями можно совершать те же операции, что и над множествами.

Множества, состоящие из одинаковых элементов, называют **равными**.

Если каждый элемент множества A является также элементом множества B , то пишут $A \subset B$ и говорят, что A есть **подмножество** B или A **включено** в B или A **внутри** B .

Основные понятия и определения

С помощью логических символов определение включения одного множества в другое записывается следующим образом:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Если A и B — события и $A \subset B$, то говорят, что **из события** A **следует событие** B . Иначе говоря, событие B происходит всякий раз, как происходит событие A . В примере с игральной костью из события «число выпавших очков будет кратно 5 » следует событие «число выпавших очков будет нечетно», так как $\{5\} \subset \{1, 3, 5\}$.

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, являющееся объедине- нием $A \cup B$. Событие $A + B$ состоит в том, что произошло по крайней мере одно из событий A или B.

Произведением событий A и B называется событие AB, равное пересечению $A \cap B$. Событие AB происходит тогда и только тогда, когда происходит и A и B.

Если множества не имеют общих элементов, то их называют **непересекающимися**, а соответствующие события — **несовместными**. Для двух множеств A и B в этом случае $AB = \emptyset$. Например, события «выпадет чётное число очков» и «выпадет нечётное число очков» несовместны, так как множества $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{1, 3, 5\}$ не пересекаются.

Основные понятия и определения

События A_1, A_2, . . . , A_n образуют **полную группу**, если они попарно несовместны, а в сумме дают достоверное событие. Например, указанные выше события $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{1, 3, 5\}$ образуют полную группу.

Разностью двух множеств A и B называют множество $A \setminus B$, состоящее из тех элементов, которые входят в A , но не входят в B :

$$A \setminus B = \{x \in \Omega | x \in A \cap x \notin B\}.$$

Разности множеств соответствует **разность событий**. Это новое событие, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$ — множество очков меньших пяти, $B = \{2, 4, 6\}$ — множество чётных очков, то $A \setminus B = \{1, 3\}$. Если рассматривается разность между пространством элементарных событий и некоторым множеством A , то разность $\Omega \setminus A$ называется **дополнением множества** A и обозначается $\bar{A}$. Событие $\bar{A}$ называют событием **противоположным** A . Это событие,состоящее в том, что A не происходит. Так, событием противоположным событию $A = \{1, 2, 3, 4\}$ будет событие выпадение числа очков больших или равных пяти .

Строгие определения

Определение σ **-алгебры**. *Семейство подмножеств S пространства Ω называют σ -алгеброй, если выполняются следующие условия:*

а) пустое множество $\emptyset$ и само пространство Ω входят в S ;

б) данное семейство замкнуто относительно теоретико-множественных операций, включая счетные объединения и пересечения множеств из S .

Определение события.

Событием называют некоторое подмножество пространства элементарных событий Ω , принадлежащее σ - алгебре пространства Ω .

Свойства операций над событиями

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

- $A + B = B + A$. $A \cdot B = B \cdot A$ (переместительное);
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$ (распределительное);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (сочетательное);
- $A + A = A$, $A \cdot A = A$;
- $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$;
- $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$;
- $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$;
- $A - B = A \cdot \overline{B}$;
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ и $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ — законы де Моргана.

Вероятность. Аксиомы теории вероятностей.

Вероятностью называется числовая функция P : F → R, заданная на σ-алгебре событий F , которая должна удовлетворять трем аксиомам:

1) P(*A*) ≥ 0 для любого *A* ∈ F (неотрицательность P);

2) P(Ω) = 1 (нормированность P);

3) P(*A* + *B*) = P(*A*) + P(*B*) для любых *A*, *B* ∈ F , *AB* = ∅ (аддитивность P) : для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей.

Тройку {Ω, *S*, *P* }, где *S* есть *σ* -алгебра подмножеств пространства элементарных событий Ω , *P* — числовая функция, удовлетворяющая трем аксиомам, называют **вероятностным пространством** случайного опыта, а неотрицательную, нормированную и аддитивную вероятностную функцию *P* (*A*), *A* ∈ *S*, *A* ⊂ Ω — **распределением вероятностей**.

Аксиоматическая теория вероятностей в ее современном виде была создана русским математиком А. Н. Колмогоровым в 1933 году.

Основные теоремы и следствия теории вероятностей

Теорема (о монотонности распределения вероятностей).

Если из события A следует событие B , то справедлива формула:

$$P(A) \le P(B).$$

Доказательство.

Так как $A \subset B$, то событие B представимо в виде

$B = B\Omega = B(A + \bar{A}) = BA + B\bar{A} = A + B\bar{A}.$

Отсюда, используя аксиому сложения, получим $P(B) = P(A) + P(B\bar{A})$.

Так как в силу аксиомы 1 справедливо неравенство $P(B\bar{A}) \ge 0$, то из предшествующего равенства следует доказательство теоремы.

Основные теоремы и следствия теории вероятностей

Теорема (о вероятности противоположного события).

Вероятность противоположного события вычисляется по формуле:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство. Из равенства $A + \bar{A} = \Omega$ и аксиомы сложения следует $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$. В силу аксиомы нормированности $P(\Omega) = 1$, так что из предшествующего равенства получаем доказываемую формулу.

Отсюда, учитывая, что невозможное и достоверное события взаимно противоположны, т. е. справедливо равенство $\emptyset + \Omega = \Omega$, выводится утверждение $P(\emptyset) = 0$: **«вероятность невозможного события равна нулю»**.

Для любого события A истинны соотношения $\emptyset \subset A \subset \Omega$. Отсюда,

учитывая монотонность распределения вероятностей, следуют неравенства $0 \le P(A) \le 1$, утверждающие, что **вероятность любого события всегда лежит между нулем и единицей**.

Основные теоремы и следствия теории вероятностей

Теорема (о вероятности суммы совместных событий).

Для любых двух событий верна формула сложения вероятностей:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

Доказательство. Представим событие $A \cup B$ в виде $A \cup B = A + B\bar{A}$, а событие B в виде $B = B\bar{A} + BA$. События в правых частях данных равенств несовместны, поэтому по аксиоме сложения получим:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B\bar{A}),\quad P(B) = P(B\bar{A}) + P(BA).$

Отсюда следует доказываемая формула сложения вероятностей.

Из формулы сложения вероятностей по индукции выводится общая формула вероятности суммы любого конечного числа событий. В частности, формула вычисления вероятности суммы трех событий имеет вид

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$

Классическая схема вычисления вероятностей

Пусть пространство элементарных событий Ω конечно, состоит из n равновероятных исходов, вероятность каждого исхода равна $1/n$ и, следовательно, сумма вероятностей всех исходов равна единице. Определим вероятность каждого события $A \subset \Omega$ как сумму вероятностей тех исходов, которые входят в это подмножество. Все аксиомы теории вероятностей выполняются при такой схеме задания вероятностей событий, и, соответственно, выполняются все выводы, которые следуют из аксиом. Данную конечную схему вычисления вероятностей называют классической, а вероятность любого события $A \subset \Omega$ находят по формуле классической вероятности:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

где буквой N обозначено число элементов в множестве.

Таким образом, вероятность любого случайного события в классической схеме равна отношению числа исходов, благоприятствующих появлению этого события, к общему числу элементарных исходов.

При решении многих задач с использованием классической схемы часто оказываются полезными различные комбинаторные формулы.

Декартово произведение множеств и правило умножения

Пусть заданы два множества A и B с произвольным числом элементов любой природы в каждом множестве. Образуем новое множество по правилу: $D = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Это новое множество называется **прямым или декартовым произведением множеств** A и B и обозначается $D = A \times B$. Элементы прямого произведения представляют собой упорядоченные пары, причём две упорядоченные пары равны только в том случае, когда у них равны первые элементы и равны вторые элементы.

Пример. Имея множества $A = \{1; 2\}$ и $B = \{\alpha; \beta\}$, можно образовать декартовы произведения следующего вида:

$D_1 = A \times B = \{(1, \alpha); (1, \beta); (2, \alpha); (2, \beta)\}$,

$D_2 = B \times A = \{(\alpha, 1); (\alpha, 2); (\beta, 1); (\beta, 2)\}$.

Как видно из примера, декартово произведение не обладает свойством коммутативности. Свойство коммутативности выполняется только для равных между собой множеств.

Декартово произведение множеств и правило умножения

Если дана система множеств A1, A2, . . . , An , то элементами декартова произведения являются упорядоченные наборы (a1, a2, . . . , an) , т. е.:

$$A1 \times A2 \times \cdots \times An = \{(a1, a2, . . . , an) | a1 \in A1, a2 \in A2, . . . , an \in An\}.$$

В том случае, когда сомножители декартова произведения являются конечными множествами, можно непосредственно подсчитать, что число упорядоченных наборов (a1, a2, . . . , an) в декартовом произведении равно произведению чисел элементов в каждом из множеств, т. е. справедлива формула:

$$N (A1 \times A2 \times \cdots \times An) = N (A1) \cdot N (A2) \qquad N (An).$$

Данная формула является основной в комбинаторном анализе и обычно называется **принципом или правилом умножения**.

В частности, в рассмотренном ранее примере исходных множеств всего два и каждое содержит по два элемента, так что в декартовом произведении содержится четыре элемента.

Правило умножения и правило сложения

Правило умножения. Если из некоторого конечного множества первый элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, а второй элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, то оба элемента (a_1, a_2) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило сложения. Если из некоторого конечного множества первый элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, а второй элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, то хотя бы один из этих элементов (a_1или a_2) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Правила умножения и сложения справедливы для любого конечного числа (два и более) выбираемых элементов.

Размещения и перестановки

Пусть имеется некоторое множество из *n* элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из *k* элементов, называется **размещением из** *n* **элементов по** *k* . Согласно определению, одно размещение отличается от другого либо составом элементов, либо их порядком.

Число размещений находится по правилу умножения в виде

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots\cdots (n-k+1),$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В частном случае *k* = *n* размещения называют **перестановками**. Одна перестановка отличается от другой только порядком расположения элементов, а число всевозможных перестановок в конечном множестве из *n* элементов вычисляется по следующей формуле:

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Размещения с повторениями

Пусть некоторый опыт состоит в случайном выборе *k* элементов из множества, содержащего *n* элементов. Выбор организован таким образом, что каждый выбранный элемент возвращается обратно, так что при следующем выборе может быть взят как новый элемент, так и прежний. В дальнейшем отобранные элементы упорядочиваются либо в порядке поступления, либо по указанному в решаемой задаче правилу. Полученное таким образом соединение называют **размещением с повторениями**. Одно размещение с повторениями может отличаться от другого элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из *n* элементов по *k* с повторениями обозначается $\bar{A}_n^k$ и находится по следующей формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

При выводе данной формулы использовался комбинаторный принцип умножения *k* множеств, каждое из которых содержит *n* элементов.

Сочетания

Любое подмножество из *k* элементов некоторого множества из *n* элементов называют **сочетанием из** *n* **по** *k* . Одно сочетание отличается от другого хотя бы одним элементом. Число сочетаний находят по формулам:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Действительно, любое подмножество, содержащее *k* элементов множества из *n* элементов, может быть упорядочено *k*! способами. Таким образом, общее число размещений A_n^k больше общего числа соответствующих сочетаний C_n^k в *k*! раз, т. е.

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k .$$

Разделив формулы для числа размещений на k! , получим формулу вычисления количества сочетаний.

Для чисел C_n^k, называемых также **биномиальными коэффициентами**, справедливы следующие тождества:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойство симметрии),

$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ (рекуррентное соотношение),

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ (следствие биномиальной формулы Ньютона).

Сочетания с повторениями

В данной схеме случайный выбор k элементов из множества, содержащего n элементов, организован таким образом, что каждый выбранный элемент возвращается обратно, так что при каждом следующем выборе может быть взят как новый элемент, так и любой ранее выбранный. Полученное таким образом соединение называют **сочетанием с повторениями**. Одно сочетание с повторениями отличается от другого хотя бы одним элементом или числом повторений элемента. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается $\bar{C}_n^k$ и находится по следующей формуле:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Действительно, в соответствии со схемой с возвращением и упорядочиванием, используя правило умножения, получим, что число упорядоченных соединений длиной k равно $n(n + 1)(n + 2) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (n + k - 1)$. Разделив данное число на $k!$ и домножив числитель и знаменатель полученной дроби на $(n - 1)!$, найдем число сочетаний с повторениями в указанном выше виде

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot (n+k-1)}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Перестановки с повторениями

В схеме упорядоченных разбиений множество, содержащее n элементов, разбивается на k упорядоченных подмножеств так, что первое подмножество содержит n_1 элементов первого типа, второе — n_2 элементов второго типа и т. д., а последнее — n_k элементов k -того типа, причем $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Каждое такое разбиение образует соединение из n элементов, которое называют **перестановкой с повторениями**. Число всех перестановок с повторениями называется **полиноминальным коэффициентом**, обозначается $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по следующей формуле:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Действительно, в соответствии со схемой разбиения множества на упорядоченную конечную систему подмножеств и, используя правило умножения, получим, что число таких соединений длиной n находится с помощью следующих преобразований:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \cdots \cdot C_{n_k}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \cdots \cdot \frac{n_k!}{0! \cdot n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Геометрическая схема вычисления вероятности

Формула классической вероятности следующим образом обобщается на случай непрерывных пространств элементарных исходов. Рассмотрим в качестве σ -алгебры S систему измеримых подмножеств пространства Ω . Пусть условия опыта таковы, что вероятность попадания в произвольное измеримое подмножество пропорциональна мере этого подмножества и не зависит от его местоположения в пространстве Ω . Данный опыт можно интерпретировать как бросание случайной точки на пространство Ω . При этих условиях вероятность появления любого события A из S вычисляется по так называемой **формуле геометрической вероятности**:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где буквой μ обозначена мера множества (длина, площадь или объем).

Геометрическая вероятность события A из S удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей, что позволяет применять к ней утверждения и теоремы, доказанные в рамках аксиоматики Колмогорова.

Условная вероятность

Пусть A и B — два события, рассматриваемые в данном опыте. Наступление одного события (скажем, A) может влиять на возможность наступления другого (B). *Для характеристики зависимости одних событий от других* вводится понятие условной вероятности.

Условной вероятностью *события В при условии реализации события А называется отношение вероятности произведения событий А и В к вероятности события А, т.е.*

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \; P(A) \neq 0.$$ Другое обозначение: $$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$$

Вероятность $P(B)$, в отличие от условной, называется *безусловной вероятностью*.

Вероятность произведения двух событий

Вероятность произведения двух событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)\,; P(A) > 0, P(B) > 0.$$

Доказательство. Данные формулы непосредственно следуют из определения условной вероятности.

Применяя правило умножения индуктивно получают **формулу умножения вероятностей для системы событий** в следующем виде:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1}}(A_n).$$

Независимость событий

События A и B называются независимыми, если вероятность произведения данных событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Для двух независимых событий условная вероятность каждого из событий равна безусловной вероятности, что вытекает из следующих соотношений:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B), \; P(A) \neq 0,$$

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A), \; P(B) \neq 0.$$

Таким образом, для независимых событий появление одного из событий никак не влияет на вероятность появления другого.

Иногда именно равенство PA(B) = P (B) берут за исходное определение независимости события B от события A . Однако, мы будем использовать более симметричное определение независимости, рассмотренное А.Н. Колмогоровым.

Независимость событий

Пример. Проводится опыт, состоящий в двукратном подбрасывании симметричной монеты. В этом случае пространство элементарных событий состоит из четырех исходов: Ω = { ГГ, ГР, РГ, РР }. Рассмотрим событие

А = { ГГ, ГР } «выпадение «герба» при первом подбрасывании монеты» и

событие В = { ГГ, РГ } — «выпадение «герба» при втором подбрасывании». Тогда произведение событий АВ = { ГГ } — выпадение герба при первом и втором подбрасывании монеты. По классической схеме вычисления вероятностей $P(A) = P(B) = 1/2,\ P(AB) = 1/4$. События A и B независимы, поскольку выполняется условие $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Для двух независимых событий формула вероятности произведения событий имеет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) .$$

Независимость системы событий

Система из n событий называется независимой, если для любой ее подсистемы из k ≤ n событий справедливы следующие формулы :

$$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_k).$$

Из независимости системы событий непосредственно из опре- деления следует попарная независимость событий. Обратное утверждение неверно

Для системы из n независимых событий формула вероятности произведения событий выводится по индукции и имеет вид:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n).$$

Формула полной вероятности

Одним из следствий совместного применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса. Напомним, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если $A_i \cdot A_j = \varnothing, i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Систему таких событий называют также *разбиением*.

Теорема. Пусть события *H*1, *H*2, …, *Hn* образуют полную группу. Тогда для любого, наблюдаемого в опыте, события *A* имеет место формула полной вероятности.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Формула полной вероятности

Доказательство:

Так как $H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega$, то в силу свойств операций над событиями $A = A\cdot\Omega = A\cdot(H_1+H_2+\ldots+H_n) =$
$= A\cdot H_1 + A\cdot H_2+\ldots+A\cdot H_n$. Из того, что $H_i\cdot H_j=\varnothing$, следует, что $(A\cdot H_i)\cdot(A\cdot H_j)=\varnothing$, $i\neq j$, т. е. события $A\cdot H_i$ и $A\cdot H_j$ также несовместны. Тогда по теореме сложения вероятностей $P(A) =$
$= P(A\cdot H_1)+P(A\cdot H_2)+\ldots+P(A\cdot H_n)$ т. е. $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\cdot H_i)$. По теореме умножения вероятностей $P(A\cdot H_i)=P(H_i)\cdot P(A|H_i)$, откуда и следует формула полной вероятности.

В формуле полной вероятности события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют *гипотезами*; они исчерпывают все возможные предположения (гипотезы) относительно исходов как бы первого этапа опыта, событие A — один из возможных исходов второго этапа.

Формула Байеса

Следствием формулы полной вероятности является формула Байеса или *теорема гипотез*. Она позволяет переоценить вероятности гипотез H_i, принятых до опыта и называемых *априорными* («a priori», доопытные, лат.) *по результатам уже проведенного опыта*, т. е. найти условные вероятности $P(H_i|A)$, которые называют *апостериорными* («a posteriori», послеопытные).

Теорема. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_k $(k = \overline{1, n})$ при условии, что событие A произошло, задается формулой

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)},$$

где $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$ — формула полной вероятности

Формула Байеса

Доказательство:

Применив формулы условной вероятности и умножения вероятностей, имеем

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)},$$

где $P(A)$ — формула полной вероятности