УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 3. Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые *числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства (черты) закона распределения с. в.* Такие числа принято называть *числовыми характеристиками с. в.*

Важнейшими среди них являются характеристики положения: математическое ожидание (центр распределения с. в.), мода, медиана; характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение значений с. в. от ее центра), среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием (или *средним* значением) д. с. в. X, имеющей закон распределения $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности.

Математическое ожидание (сокращенно: м. о.) обозначается через MX (или: $M[X]$, $M(X)$, EX, m_X, a_X).

Таким образом, по определению

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

Если число возможных значений с. в. X бесконечно (счетно), то

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i,$$

причем ряд в правой части предполагается сходящимся (в противном случае с. в. X не имеет м. о.).

Вероятностный смысл математического ожидания

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно является средним значением с. в. Действительно, т. к. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = x_{\text{среднее}}.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Значение математического ожидания удовлетворяет следующему неравенству:

$$\boxed{\min\{x_i\} \le M(X) \le \max\{x_i\}}.$$

Для вычисления математического ожидания достаточно знать закон распределения случайной величины. •

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Математическим ожиданием н. с. в. X с плотностью вероятности $f(x)$, называется число

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Интеграл в правой части равенства предполагается абсолютно сходящимся, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$$

(в противном случае н. с. в. X не имеет м. о.).

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т. е.

$$Mc = c.$$

2. Постоянный множитель выносится за знак м. о., т. е.

$$M(cX) = cMX.$$

3. М. о. суммы с. в. равно сумме их м. о., т. е.

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

4. М. о. отклонения с. в. от ее м. о. равно нулю, т. е.

$$M(X - MX) = 0.$$

5. М. о. произведения независимых с. в. равно произведению их м. о., т. е. если X и Y независимы, то

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

Дисперсия случайной величины

Дисперсией (*рассеянием*) с. в. X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания.

Обозначается дисперсия через DX (или $D[X]$, D_X, $D(X)$). Таким образом, по определению

$$DX = M(X - MX)^2,$$

или $DX = M\dot{X}^2$, или $DX = M(X - m_X)^2$. Дисперсия характеризует разброс значений с. в. X относительно ее м. о. Из определения дисперсии следуют формулы для ее вычисления:

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 \cdot p_i \text{ — для д. с. в. } X,$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x)\, dx \text{ — для н. с. в. } X.$$

Дисперсия случайной величины

На практике дисперсию с. в. удобно находить по формуле

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M(X))^2 =$$

$$= x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n - (M(X))^2.$$

Доказательство:

$$DX = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) =$$

$$= MX^2 - M(2X \cdot MX) + M(MX)^2 = MX^2 - 2MX \cdot MX + (MX)^2 =$$

$$= MX^2 - (MX)^2.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной равна нулю, т. е.

$$Dc = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат, т. е.

$$DcX = c^2 DX.$$

3. Дисперсия суммы независимых с. в. равна сумме их дисперсий, т. е. если X и Y независимы, то

$$D(X+Y) = DX + DY.$$

4. Дисперсия с. в. не изменится, если к этой с. в. прибавить постоянную, т. е.

$$D(X+c) = DX.$$

5. Если с. в. X и Y независимы, то

$$D(XY) = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2.$$

Свойства дисперсии

Пояснение. Случайные величины X и Y называются *независимыми* тогда и только тогда, когда случайные события $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых i и j являются независимыми. Из данного определения следует, что при любых i и j вероятность события $\{X = x_i\}$ не зависит от того, произошло событие $\{Y = y_j\}$ или нет. Другими словами, независимые случайные величины X и Y не могут влиять друг на друга, взаимовлияние отсутствует. ●

Среднее квадратическое отклонение

Дисперсия DX имеет размерность квадрата с. в. X, что в сравнительных целях неудобно. Когда желательно, чтобы оценка разброса (рассеяния) имела размерность с. в., используют еще одну числовую характеристику — среднее квадратическое отклонение (сокращенно: с. к. о.).

Средним квадратическим отклонением или *стандартным отклонением* с. в. X называется квадратный корень из ее дисперсии, обозначают через σ_X (или σX, $\sigma[X]$, σ). Таким образом, по определению

$$\sigma_X = \sqrt{DX}.$$

Из свойств дисперсии вытекают соответствующие свойства с. к. о.: $\sigma c = 0$, $\sigma_{cX} = |c|\sigma_X$, $\sigma(c + X) = \sigma_X$.

Стандартная случайная величина

Для изучения свойств случайного явления, независящих от выбора масштаба измерения и положения центра группирования, исходную случайную величину X приводят к некоторому стандартному виду: ее центрируют, т. е. записывают разность $X - MX$ (геометрически означает, что начало координат переносится в точку с абсциссой, равной м. о.), затем делят на с. к. о. σ_X.

Случайную величину $Z = \dfrac{X - MX}{\sigma_X}$ называют *стандартной случайной величиной*. Ее м. о. равно 0, а дисперсия равна 1. Действительно,

$$MZ = M\left(\frac{X - MX}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} M(X - MX) = 0,$$

$$DZ = \frac{1}{\sigma_X^2} D(X - MX) = \frac{DX}{\sigma_X^2} = \frac{DX}{DX} = 1.$$

То есть Z — *центрированная* ($MZ = 0$) и *нормированная* ($DZ = 1$) случайная величина.

Моменты случайной величины

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями следующих более общих понятий — моментов с. в.

Начальным моментом порядка k с. в. X называется м. о. k-й степени этой величины, обозначается через α_k.

Таким образом, по определению

$$\alpha_k = M(X^k).$$

Для д. с. в. начальный момент выражается суммой:

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k \cdot p_i,$$

а для н. с. в. — интегралом: $$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx.$$

В частности, $\alpha_1 = MX$, т. е. начальный момент 1-го порядка есть м. о.

Центральный момент

Центральным моментом порядка k с. в. X называется м. о. величины $(X - MX)^k$, обозначается через μ_k.

Таким образом, по определению

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

В частности, $\mu_2 = DX$, т. е. центральный момент 2-го порядка есть дисперсия; $\mu_1 = M(X - MX) = 0$ (см. свойство 4 м. о.).

Для д. с. в.:

$$\mu_k = \sum_i (x_i - MX)^k \cdot p_i,$$

а для н. с. в.:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k \cdot f(x)\, dx.$$

Производящая функция

Нахождение важнейших числовых характеристик д. с. в. с целыми неотрицательными значениями удобно производить с помощью производящих функций.

Пусть д. с. в. X принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k = P\{X = k\}, \ldots$.

Производящей функцией для д. с. в. X называется функция вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots,$$

где z — произвольный параметр, $0 < z \leqslant 1$.

Отметим, что коэффициентами степенного ряда являются вероятности закона распределения д. с. в. X.

Производящая функция

Дифференцируя по z производящую функцию, получим

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot z^{k-1}.$$

Тогда

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = MX = \alpha_1,$$

т. е.

$$\alpha_1 = MX = \varphi'(1).$$

Производящая функция

Взяв вторую производную функции $\varphi(z)$ и положив в ней $z = 1$, получим:

$$\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k \cdot z^{k-2}, \quad \varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \alpha_2 - \alpha_1,$$

где α_2 и α_1 — начальные моменты соответственно 2-го и 1-го порядков ($\alpha_2 = MX^2$, $\alpha_1 = MX$). Тогда $DX = MX^2 - (MX)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 - \alpha_1^2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$, т. е.

$$DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2.$$

Основные законы распределения случайных величин

Биноминальный закон распределения

Дискретная с. в. X имеет *биномиальное распределение* (или *распределена по биномиальному закону*), если она принимает значения $0, 1, 2, 3, \ldots, n$, с вероятностями:

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, является числом успехов с вероятностью p в схеме Бернулли проведения n независимых опытов.

Биноминальный закон распределения

Если требуется вычислить вероятность «не менее m успехов в n независимых опытах», т. е. $P\{X \geqslant m\}$, то имеем : $P_m = P\{X \geqslant m\} = P\{X = m\} + P\{X = m+1\} + \ldots + P\{X = n\}$. Вероятность P_m бывает удобно находить через вероятность противоположного события: $P_m = P\{X \geqslant m\} = 1 - P\{X < m\}$; та из двух формул лучше, где меньше слагаемых.

Ряд распределения д. с. в. X, имеющей биномиальное распределение, имеет вид:

$X = m$	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$	n
$p_m = P\{X = m\}$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\ldots$	p^n

Контроль: $\sum\limits_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1$.

Биноминальный закон распределения

Функция распределения с. в. X, распределенной по биномиальному закону, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \\ \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m}, & \text{при } 0 < x \leqslant n \\ 1, & \text{при } n < x. \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики этого распределения. Производящей функцией биномиального распределения является

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (pz)^m q^{n-m} = (q+pz)^n,$$

т. е. $\varphi(z) = (q+pz)^n$. Тогда

$$\varphi'(z) = n(q+pz)^{n-1}p, \quad \varphi''(z) = n(n-1)p^2(q+pz)^{n-2}.$$

Биноминальный закон распределения

$$\varphi'(z) = n(q+pz)^{n-1}p, \quad \varphi''(z) = n(n-1)p^2(q+pz)^{n-2}$$

$$MX = \varphi'(1) = np, \text{ т. к. } p+q = 1,$$

$$DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq.$$

$$MX = np, \qquad DX = npq.$$

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если ее возможные значения: $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ (счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой Пуассона

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!},$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, a — параметр.

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np = a$ — постоянно. Примерами случайных величин, имеющих распределение Пуассона, являются: число вызовов на телефонной станции за время t; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число α-частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т. д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной *средней интенсивностью*, характеризующейся параметром $a = np$.

Распределение Пуассона

Случайная величина X, распределенная по закону Пуассона, имеет следующий ряд распределения

$X=m$	0	1	2	...	m	...
p_m	e^{-a}	$\frac{a\cdot e^{-a}}{1!}$	$\frac{a^2\cdot e^{-a}}{2!}$	...	$\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}$	...

Контроль: $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-a}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!} = e^{-a}\cdot e^{a} = 1.$

Найдем м. о. и дисперсию с. в. X, распределенной по закону Пуассона. Производящей функцией распределения Пуассона будет

$$\varphi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}z^m = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(az)^m}{m!} = e^{-a}\cdot e^{az} = e^{a(z-1)},$$

т. е. $\varphi(z)=e^{a(z-1)}$. Тогда $\varphi'(z)=a\cdot e^{a(z-1)}$, $\varphi''(z)=a^2\cdot e^{a(z-1)}$. Стало быть, $MX=\varphi'(1)=a$, $DX=\varphi''(1)+\varphi'(1)-(\varphi'(1))^2=a^2+a-a^2=a$.

$$MX=DX=a.$$

Геометрическое распределение

Дискретная с. в. X имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения: 1,2,3,4,. . . , а вероятности этих значений:

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1}p,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Геометрическое распределение имеет с. в. X, равная числу опытов в схеме Бернулли, проведенной до первого успеха вероятность успеха p в единичном опыте. Примерами реальных случайных величин, распределенных по геометрическому закону, являются: число выстрелов до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения решки и т. д.

Ряд распределения случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, имеет вид

$X = m$	1	2	3	$\ldots$
p_m	p	qp	q^2p	$\ldots$

Контроль: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p\sum\limits_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$

Вероятности p_m образуют геометрическую прогрессию p, qp, q^2p,

Геометрическое распределение

Найдем математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения. Производящей функцией для с. в. X является функция

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} p z^m = pz \sum_{m=1}^{\infty} (qz)^{m-1} = pz \frac{1}{1-qz},$$

т. е. $\varphi(z) = \frac{pz}{1-qz}$. Для нее $\varphi'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2}$, $\varphi''(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}$. Стало быть,

$$MX = \varphi'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

$$DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2},$$

т. е. $MX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{q}{p^2}$ и, значит, $\sigma_X = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

Равномерный закон распределения

Непрерывная с. в. X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b], \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b], \end{cases}$$

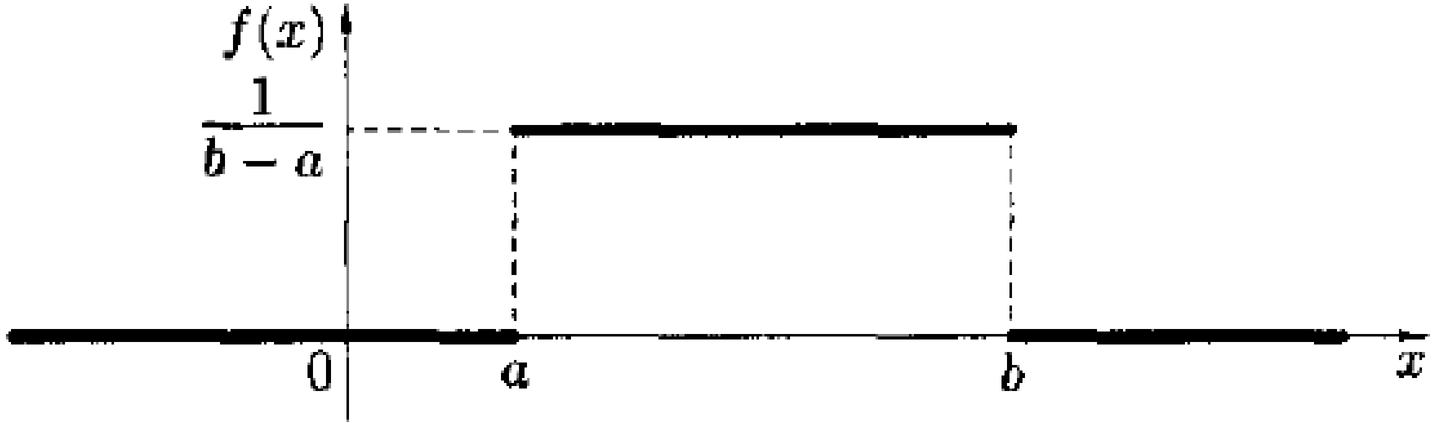
(т. е. $f(x) = c$ при $x \in [a, b]$, но

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c\,dx = 1,$$

отсюда следует, что $cx\Big|_a^b = 1$, $c = \dfrac{1}{b-a}$; вместо отрезка $[a, b]$ можно писать (a, b) или $(a, b]$, $[a, b)$, так как с. в. X — непрерывна.)

Равномерный закон распределения

График плотности $f(x)$ для равномерного распределения н. с. в. X



Равномерное распределение с. в. X на участке $[a, b]$ (или (a, b)) будем обозначать: $X \sim R[a, b]$.

Найдем функцию распределения $F(x)$ для $X \sim R[a, b]$. Согласно формуле (см. п. 2.4)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx,$$

Равномерный закон распределения

имеем

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a}\bigg|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

при $a < x \leqslant b$; $F(x) = 0$ при $x \leqslant a$, и

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0\,dt + \int_a^b \frac{dt}{b-a} + \int_b^x 0\,dt = \frac{t}{b-a}\bigg|_a^b = 1$$

при $x > b$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{при } b < x. \end{cases}$$

Равномерный закон распределения

Определим MX и DX с. в. $X \sim R[a,b]$.

$$MX = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\,dx + \int_{b}^{+\infty} x \cdot 0\,dx = \frac{a+b}{2}.$$

$$DX = \int_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} \left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, для н. с. в. $X \sim R[a,b]$ имеем

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Нормальный закон распределения

Непрерывная с. в. X распределена *по нормальному закону* с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R.$$

Тот факт, что с. в. X имеет нормальное (или гауссовское) распределение с параметрами a и σ, сокращенно записывается так: $X \sim N(a, \sigma)$.

Убедимся, что $f(x)$ — это функция плотности. Очевидно, $f(x) > 0$.

Проверим выполнение условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{\sigma \cdot \sqrt{2}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

Здесь применили подстановку и использовали «интеграл Пуассона» $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$

Нормальный закон распределения

Функция распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty} f(t)\,dt$ н. с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt.$$

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то нормальное распределение с такими параметрами называется *стандартным*. Плотность стандартной случайной величины имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Нормальный закон распределения

Функция распределения с. в. $X \sim N(0,1)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

и называется *функцией Лапласа*.

Она связана с нормированной функцией Лапласа $\Phi_0(x)$

равенством

$$\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x).$$

Нормальный закон распределения

Установим смысл параметров a и σ нормального распределения. Для этого найдем математическое ожидание и дисперсию с. в. $X \sim \sim N(a, \sigma)$.

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left[\text{подстановка } \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t\right] = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t + a)e^{-t^2}\sqrt{2}\sigma\,dt =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\,dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = a,$$

т. е. $MX = a$. Первый интеграл равен нулю, так как подинтегральная функция нечетная, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля, а второй интеграл равен $\sqrt{\pi}$ (см. равенство (2.39)). Таким образом, параметр a — математическое ожидание.

Нормальный закон распределения

При нахождении дисперсии с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ снова сделаем подстановку $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t$ и применим метод интегрирования по частям:

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

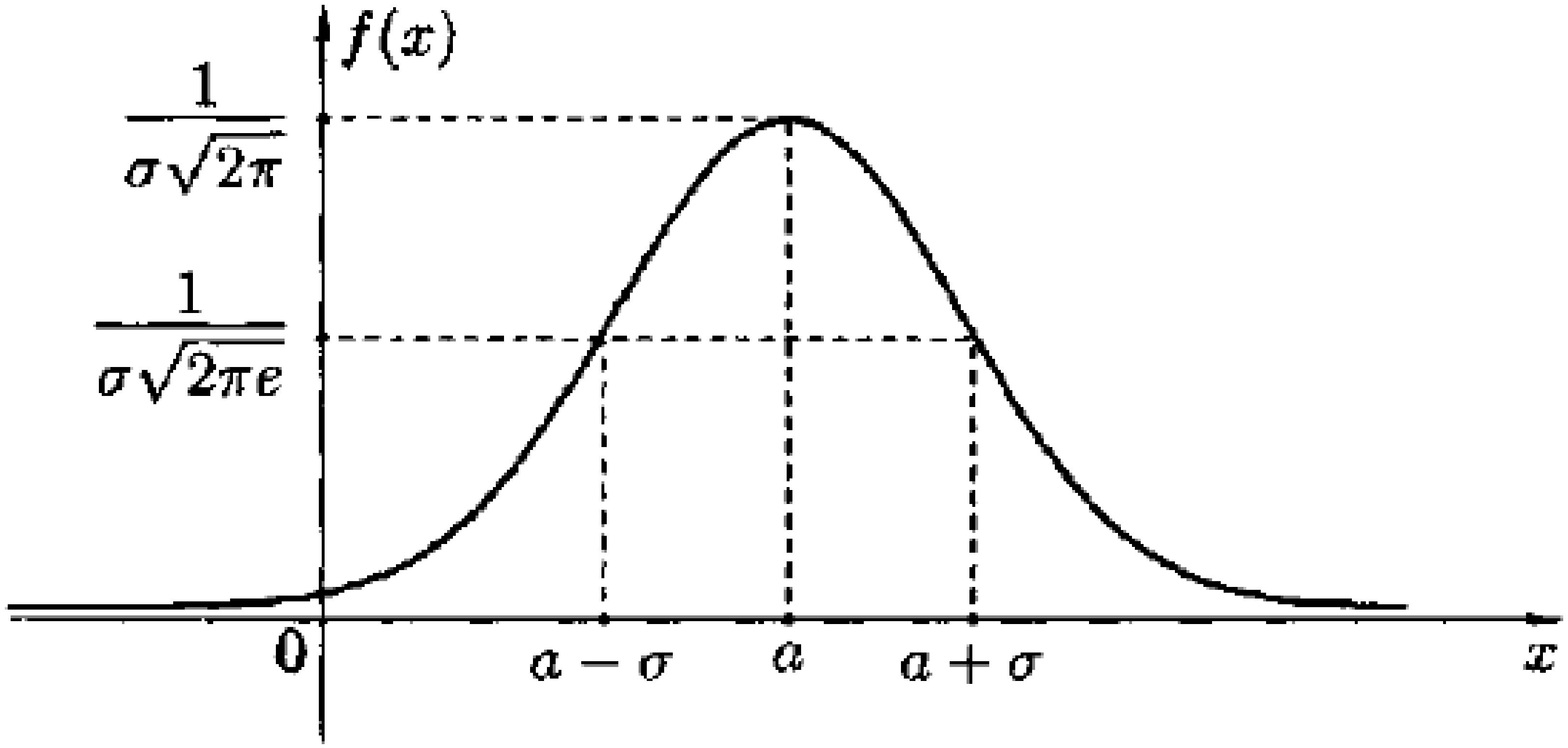
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 t^2 e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}\, dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} t e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sigma^2.$$

Таким образом, $DX = \sigma^2$, а σ — среднее квадратичное отклонение.

Нормальный закон распределения

График плотности распределения вероятности нормального закона



Нормальный закон распределения

Найдем *вероятность попадания с. в.* $X \sim N(a,\sigma)$ *на заданный участок* (α,β). Как было показано,

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left[\frac{x-a}{\sigma} = t\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Нормальный закон распределения

Используя функцию Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

получаем

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Нормальный закон распределения

Через функцию Лапласа $\Phi_0(x)$ выражается и функция распределения $F(x)$ нормально распределенной с. в. X.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

$$\Phi_0(\infty) = \frac{1}{2}$$

Нормальный закон распределения

На практике часто приходиться вычислять *вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал, симметричный относительно центра рассеяния* a. Пусть таким интервалом будет $(a-l, a+l)$ длины $2l$. Тогда $P\{a-l < X < a+l\} = P\{|X-a| < l\} = \Phi_0\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)$, т.е.

$$P\{|X-a| < l\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1.$$

Нормальный закон распределения

Полагая в равенстве $l = 3\sigma$, получим $P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi_0(3)$.

По таблице значений для $\Phi_0(x)$ находим: $\Phi_0(3) = 0{,}49865$. Следовательно, $P\{|X - a| < 3\sigma\} \approx 0{,}9973$, т. е. отклонение с. в. X от своего математического ожидания меньше, чем 3σ— почти достоверное событие.

Важный вывод: практически достоверно, что с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ принимает свои значения в промежутке $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Это утверждение называется «*правилом трех сигм*».

Значение функции $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4961
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000[1]