УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# *Теория вероятностей и математическая статистика*

## *Практическое занятие 3.*

## ***Функция распределения случайной величины. Числовые характеристики случайных величин***

# Функция распределения случайной величины

**Задача.** В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные — черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Закон распределения запишем в виде таблицы.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{15}{56}$ | $\frac{30}{56}$ | $\frac{10}{56}$ |

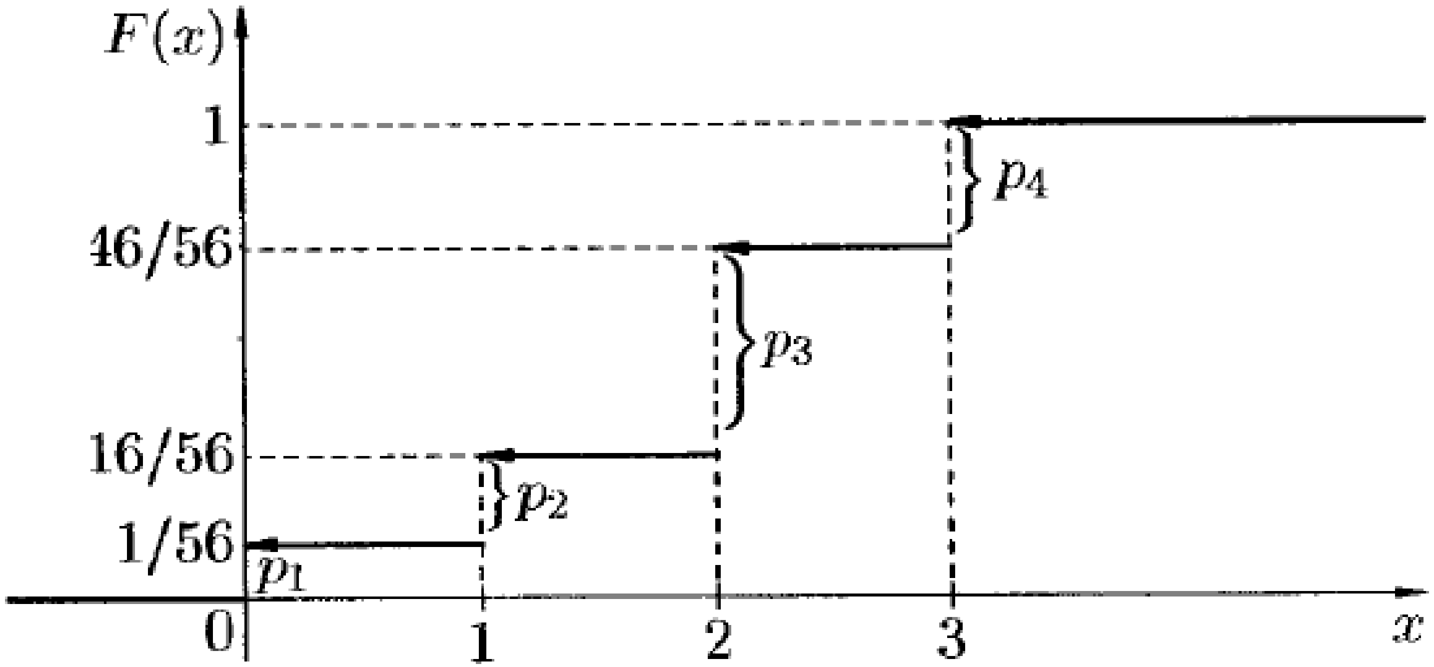
Будем задавать различные значения $x$ и находить для них $F(x) = P\{X < x\}$:

1. Если $x \leqslant 0$, то, очевидно, $F(x) = P\{X < 0\} = 0$;
2. Если $0 < x \leqslant 1$, то $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{56}$;
3. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56}$;
4. Если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} = \frac{46}{56}$;
5. Если $3 < x$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{46}{56} + \frac{10}{56} = 1$.

# Функция распределения случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{56}, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ \dfrac{16}{56}, & \text{если} \quad 1 < x \leqslant 2; \\ \dfrac{46}{56}, & \text{если} \quad 2 < x \leqslant 3; \\ 1, & \text{если} \quad 3 < x. \end{cases}$$

Строим график $F(x)$



# Плотность распределения вероятностей

Плотность распределения с. в. $X$ задана функцией $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$.
Найти значение параметра $a$.

- Согласно свойству 4 плотности, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = 1, \quad \text{т. е.} \quad a \lim_{\substack{d\to+\infty \\ c\to-\infty}} \int_c^d \frac{dx}{1+x^2} = 1, \quad \text{т. е.} \quad a \cdot \lim_{\substack{d\to+\infty \\ c\to-\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_c^d = 1$$

или $a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$ и, наконец, получаем $a\pi = 1$, т. е. $a = \frac{1}{\pi}$. ●

# Математическое ожидание дискретной случайной величины

Задача В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб, 50 по 50 руб, 100 по 10 руб, 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

❍ Ряд распределения с. в. $X$ — суммы выигрыша на один билет таков:

| $X$ | 500 | 50 | 10 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,01 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,69 |

(Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{5} p_i = 1$.) Находим $MX$:

$MX = 500 \cdot 0{,}01 + 50 \cdot 0{,}05 + 10 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}69 = 8{,}65$ руб. ●

# *Математическое ожидание дискретной случайной величины*

Найти математическое ожидание случайной величины *X* – значения грани, выпавшей на кубике.

Построим закон распределения этой случайной величины. Все значения случайной величины равновероятны и вероятность каждого из возможных значений равна 1/6. Поэтому закон распределения задается следующей таблицей:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Выполним проверку: $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$. ☻

$M(X) = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 21/6 = 3.5.$

# *Математическое ожидание дискретной случайной величины*

Найти математическое ожидание случайной величины *Z*, возникающей при подбрасывании двух монет и равной числу выпавших гербов.

Построим закон распределения этой случайной величины. Первоначально определим возможные значения случайной величины *Z*. Очевидно, что при подбрасывании двух монет герб может появиться 2 раза, один раз или вообще не появиться. Поэтому $Z = \{0, 1, 2\}$. Вероятность значения 0 определяется по теореме умножения вероятностей двух независимых событий – при каждом подбрасывании выпала решка.

$$P(Z=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Вероятность значения 1 определяется как сумма вероятностей двух событий – на первой и второй монете один герб и одна решка:

$$P(Z=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Наконец, вероятность значения 2 определяется по теореме умножения вероятностей двух независимых событий – при каждом подбрасывании выпала герб:

$$P(Z=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

# *Математическое ожидание дискретной случайной величины*

Найти математическое ожидание случайной величины *Z*, возникающей при подбрасывании двух монет и равной числу выпавших гербов.

Закон распределения задается следующей таблицей:

| $Z$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

Выполним проверку: $\sum_{k=1}^{3} p_k = 1$. ☻

$$M(Z) = 0\cdot1/4 + 1\cdot1/2 + 2\cdot1/4 = 1.$$

# Математическое ожидание дискретной случайной величины

Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти м.о. числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: а) $p_1 = 0{,}7$, б) $p_2 = 0{,}8$, в) $p_3 = 0{,}9$.

а) $P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001$ — вероятность трех промахов;

б) $P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}01 = 0{,}027$ — вероятность одного попадания;

в) $P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 3 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$ — вероятность двух попаданий;

г) $P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}9^3 = 0{,}729$ — вероятность трех попаданий. ●

$$MX = 0 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}027 + 2 \cdot 0{,}243 + 3 \cdot 0{,}729 = 2{,}7$$

# Математическое ожидание дискретной случайной величины

Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти м.о. числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: а) $p_1 = 0{,}7$, б) $p_2 = 0{,}8$, в) $p_3 = 0{,}9$.

Если вероятности при разных выстрелах различны, то производящая функция имеет вид $\varphi_3(z) = (0{,}3 + 0{,}7z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}1 + 0{,}9z) = 0{,}504z^3 + 0{,}398z^2 + 0{,}092z + 0{,}006$. Откуда находим вероятность трех, двух, одного попаданий, промаха соответственно: $P_3(3) = 0{,}504$, $P_3(2) = 0{,}398$, $P_3(1) = 0{,}092$, $P_3(0) = 0{,}006$. (Контроль: $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1$.)

$$MX = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4.$$

# Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x > \pi, \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $X$.

$$MX = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\right] = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} x \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x\cdot 0\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x \sin x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

# Свойства математического ожидания

Найти математическое ожидание суммы значений, выпавших на двух одновременно подброшенных кубиках.

Пусть случайная величина $X$ = {значения, которые могут выпасть на верхней грани первого кубика}, случайная величина $Y$ = {значения, которые могут выпасть на верхней грани второго кубика}. Найти $M(X + Y)$ суммы этих двух случайных величин можно двумя способами.

*Первый способ* (сложный) –построить закон распределения случайной величины Z = $X + Y$, а затем вычислить искомое математическое ожидание.

*Второй способ* (простой) – используя свойство 3.

Мы вычислили математическое ожидание случайной величины $X$ – значения грани, выпавшей на кубике.

$$M(X) = M(Y) = 3.5.$$

Тогда $M(X + Y) = 3.5 + 3.5 = 7.$

# Свойства математического ожидания

Дана случайная величина $Z = 3 + 2 \times X$ , где $X$ – случайная величина с $M(X) = 5$. Вычислить математическое ожидание величины $Z$.

Используя свойства 1 и 2 математического ожидания, имеем:

$$M(Z) = M(3 + 2 \cdot X) = M(3) + M(2 \cdot X) =$$

$$= 3 + 2 \cdot M(X) = 3 + 2 \cdot 5 = 13.$$

# *Дисперсия случайной величины*

Найдем дисперсию случайной величины *X* – значения грани, выпавшей на кубике.

Используя построенный ранее закон распределения этой случайной величины

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

и вычисленное ее математическое ожидание

$$M(X) = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 21/6 = 3.5.$$

получаем:

$$D(X) = 1/6 + 4/6 + 9/6 + 16/6 + 25/6 + 36/6 - 3.5^2 =$$

$$= 91/6 - 12.25 \cong 15.17 - 12.25 = 2.92.$$ ☻

# *Дисперсия случайной величины*

Найти дисперсию случайной величины *Z*, возникающей при подбрасывании двух монет и равной числу выпавших гербов.

Используя построенный ранее закон распределения этой случайной величины

| $Z$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

и вычисленное ее математическое ожидание

$$M(Z) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1.$$

получаем:

$$D(Z) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 - 1^2 = 1/2.$$

# Дисперсия случайной величины

Задача Дискретная случайная величина $\xi$ имеет только два возможных значения $x_1$ и $x_2$, которые она принимает с вероятностями $p_1 = 0.6$ и $p_2 = 0.4$ соответственно.

Найти ряд распределения величины $\xi$, если $M\xi = 1.4$ и $D\xi = 0.24$.

**Решение**. Учитывая формулы для математического ожидания и дисперсии, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4 \\ 0.6x_1^2 + 0.4x_2^2 - (1.4)^2 = 0.24 \end{cases}.$$

Система имеет два решения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_1 = 1.8$, $x_2 = 0.8$.

Тогда ряд распределения имеет вид

| $x_i$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $p_i$ | 0.6 | 0.4 |

или

| $x_i$ | 0.8 | 1.8 |
|---|---|---|
| $p_i$ | 0.4 | 0.6 |

# *Свойства дисперсии*

Найти дисперсию суммы значений, выпавших на двух одновременно подброшенных кубиках.

Пусть случайная величина *X* = {значения верхней грани первого кубика}, случайная величина *Y* = {значения верхней грани второго кубика}. Дисперсии этих случайных величин одинаковы и равны 2.92. Так как эти величины независимы, то на основании свойства 4

$$D(X + Y) = 2.92 + 2.92 = 5.84.$$

# Свойства дисперсии

Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и имеют следующие числовые характеристики: $M(X) = 1$, $D(X) = 3$, $M(Y) = 2$, $D(Y) = 4$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$U = 3 \times X - 2 \times Y$.

Сначала вычислим математическое ожидание $M(U)$, используя известные свойства математического ожидания

$$M(U) = M(3 \cdot X - 2 \cdot Y) = 3 \cdot M(X) - 2 \cdot M(Y) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Затем вычислим дисперсию $D(U)$, используя известные свойства дисперсии:

$$D(U) = D(3 \cdot X - 2 \cdot Y) = 3^2 \cdot D(X) + (-2)^2 \cdot D(Y) =$$

$$= 9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 43.$$

# Среднее квадратическое отклонение

Д. с. в. $X$ задана рядом распределения.

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 |

Найти $MX$, $DX$, $\sigma_X$.

❍ Используем формулы (2.9), (2.13), (2.18): $MX = -1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 = 0{,}9$; $DX = (-1-0{,}9)^2\cdot 0{,}2 + (0-0{,}9)^2\cdot 0{,}1 + (1-0{,}9)^2\cdot 0{,}3 + (2-0{,}9)^2\cdot 0{,}4 = 1{,}29$ (или, используя формулу (2.16), $DX = (-1)^2\cdot 0{,}2 + 0^2\cdot 0{,}1 + 1^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}4 - (0{,}9)^2 = 1{,}29$); $\sigma_X = \sqrt{1{,}29} \approx 1{,}14$. ●

# Дисперсия случайной величины

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x > \pi, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

найти $DX$ и $\sigma_X$

$$MX = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\right] = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} x \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x\cdot 0\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$DX = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (MX)^2\right] = \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x^2\cdot 0\,dx -$$

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx - \frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi}\right)\right) -$$

$$-\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}467;\ \sigma_X = \sqrt{0{,}467} \approx 0{,}68.$$

# Производящая функция

Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти м. о. числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: а) $p_1 = 0{,}7$, б) $p_2 = 0{,}8$, в) $p_3 = 0{,}9$.

Найти дисперсию с. в. $X$ — числа попаданий

Найдем $DX$, используя формулу (2.22). Производящая функция $\varphi(z) = 0{,}01 + 0{,}027z + 0{,}243z^2 + 0{,}729z^3$. Тогда $\varphi'(z) = 0{,}027 + 0{,}486z + 2{,}187z^2$. Полагая $z = 1$, находим $\varphi'(1) = 2{,}7 = MX$ (упражнение 1 из п. 2.5). $\varphi''(z) = 0{,}486 + 4{,}374z$. Поэтому $\varphi''(1) = 4{,}46$ и $DX = 4{,}86 + 2{,}7 - (2{,}7)^2 = 0{,}27$ (формула (2.22)).

Аналогично решаем во втором случае, когда вероятности при разных выстрелах различны (п. 1.20, пример 1.31). $\varphi(z) = 0{,}006 + 0{,}092z + 0{,}398z^2 + 0{,}504z^3$. $\varphi'(z) = 0{,}092 + 0{,}796z + 1{,}512z^2$, $\varphi'(1) = 2{,}4 = MX$. $\varphi''(z) = 0{,}796 + 3{,}024z$, $\varphi''(1) = 3{,}82$. Поэтому $DX = 3{,}82 + 2{,}4 - (2{,}4)^2 = 0{,}46$. ●