Практическая работа № 6

Построение доверительных интервалов для оценки средней генеральной совокупности

Оценка генеральной средней:

1. Случай большого объема выборки ($n > 30$):

$$\bar{X} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}},$$

где t_γ находится из отношения $\Phi(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$, $\Phi(x)$ – функция распределения нормального закона.

2. Случай малого объема выборки ($n \le 30$):

$$\bar{X} - t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $\frac{1+\gamma}{2}$ с $(n-1)$ степенью свободы (см. прил. 2); s – исправленное среднее квадратическое отклонение.

Оценка генеральной дисперсии:

$$\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)},$$

где $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)$ и $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ – квантили распределения χ^2 Пирсона порядков $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно с $(n-1)$ степенью свободы (см. прил. 3).

Пример 1

Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 10$:

162 151 161 170 167 164 166 164 173 172

Построить доверительный интервал для оценки средней при $\gamma = 0{,}95$.

Решение. В данном случае объем выборки мал и нужно использовать формулу

$$\bar{X} - t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

В примере практически все частоты значений признака имеют значения единицы, поэтому используем формулу простых средних $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$:

$$\bar{X} = \frac{162+151+161+170+167+164+166+164+173+172}{10} = 165,$$

$$D(X) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2,$$

$$\sum x_i^2 = 162^2+151^2+161^2+170^2+167^2+164^2+166^2+164^2+173^2+172^2=272616,$$

$$D(X) = \frac{272616}{10} - 165^2 = 27261{,}6 - 27225 = 36{,}6.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение связано с дисперсией следующим соотношением: $s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D(X)$,

$$s^2 = \frac{10}{10-1} \cdot 36{,}6 \approx 40{,}67, \qquad s = \sqrt{40{,}67} \approx 6{,}38.$$

Далее по таблице квантилей распределения Стьюдента (см. прил. 2) находим квантиль $t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)$:

$$\gamma = 0{,}95, \quad n = 10, \quad \frac{1+\gamma}{2} = 0{,}975, \quad t_{0{,}975}(9) = 2{,}262,$$ подставляем:

$$165 - 2{,}262 \cdot \frac{6{,}38}{\sqrt{10}} < m < 165 - 2{,}262 \cdot \frac{6{,}38}{\sqrt{10}}.$$

Получаем доверительный интервал: $160{,}43 < m < 169{,}57$.

Пример 2

Известна следующая информация о выборке:

$$n = 72; \quad \sum x_i = 1267{,}2; \quad \sum x_i^2 = 22536.$$

Построить доверительный интервал для оценки средней при $\gamma = 0{,}99$.

Решение. В данном случае объем выборки велик, используем формулу

$$\bar{X} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}.$$

Поскольку суммы уже даны по условию, объем вычислений сокращается.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1267{,}2}{72} = 17{,}6,$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{22536}{72} - 17{,}6^2 = 313 - 309{,}76 = 3{,}24,$$

$$\sigma = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8.$$

По заданной доверительной вероятности γ и таблице распределения нормального закона $\mathbf{\Phi}(x)$ (см. прил. 1) определяем t_γ: $\mathbf{\Phi}(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$.

$\mathbf{\Phi}(t_\gamma) = \frac{1+0{,}99}{2} = 0{,}995$, по таблице (см. прил. 1) $t_\gamma = 2{,}575$, подставляем:

$$17{,}6 - \frac{2{,}575 \cdot 1{,}8}{\sqrt{72}} < m < 17{,}6 - \frac{2{,}575 \cdot 1{,}8}{\sqrt{72}}.$$

$$17{,}05 < m < 18{,}15.$$

Задание 1

1. После очень дождливой ночи на лужайке было обнаружено 12 дождевых червей. Их длины, см:

9,5   9,5   11,2   10,6   9,9   11,1   10,9   9,8   10,1   10,2   10,9   11,0

2. Дана выборка:

3,6   3,9   4,5   3,8   4,4   4,9   4,2   3,8

3. Уровень грамотности населения в 15 выбранных развивающихся африканских странах, %:

63,4   64,5   57,1   51,7   40,1   37,7   45,8   54,9   35,9   31,0   35,5   19,2   13,6   31,4   40,1

4. Масса 13 шайб, г:

154   152   146   161   148   153   159   160   154   146   150   155   161

5. Рост шести полицейских, см:

180   176   179   181   183   179

6. Дана выборка:

0,30   0,28   0,27   0,33   0,35   0,33   0,27   0,31   0,37   0,29

7. Доля учащихся среди молодежи в 15 выбранных развитых странах мира к середине 90-х гг., %:

79   86   87   90   82   88   73   91   94   92   100   83   96   89   78

8. Десять пачек определенных сортов печенья выбраны случайным образом и взвешены. Их массы, г:

396,8   400,0   397,6   392,1   401,0   392,9   400,8   400,6   399,6   397,3

9. Пятнадцать студентов на физическом практикуме экспериментально измеряли величину ускорения свободного падения. Были получены следующие результаты:

9,806   9,807   9,810   9,802   9,805   9,806   9,804   9,811   9,801   9,804   9,805   9,809   9,807

10. Выборка из 12 кусков розового мыла была взвешена. Вес оказался следующим, г:

174   164   182   169   171   187   176   177   168   171   180   175

Построить доверительный интервал для оценки генеральной средней при заданной доверительной вероятности γ.

Номер варианта	Номер задания	γ	Номер варианта	Номер задания	γ
1	1	0,9	11	1	0,95
2	2	0,95	12	2	0,99
3	3	0,9	13	3	0,95
4	4	0,99	14	4	0,9
5	5	0,95	15	5	0,9
6	6	0,9	16	6	0,99
7	7	0,99	17	7	0,95
8	8	0,95	18	8	0,9
9	9	0,9	19	9	0,95
10	10	0,99	20	10	0,9

Задание 2

Известна следующая информация о выборке:

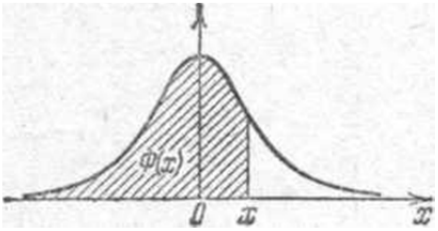
1. $n = 100$, $\bar{X} = 76$, $\sigma = 12$.
2. $n = 150$, $\bar{X} = 748$, $\sigma = 3{,}6$.
3. $n = 100$, $\bar{X} = 82$, $\sum x_i^2 = 686800$.
4. $n = 150$, $\sum x_i = 1623$, $\sum x_i^2 = 17814{,}36$.
5. $n = 100$, $\sum x_i = 1119$, $\sum x_i^2 = 12585{,}61$.
6. $n = 64$, $\sum x_i = 5452{,}8$, $\sum(x_i - \bar{X})^2 = 973{,}44$.
7. $n = 80$, $\bar{X} = 69$, $\sigma = 4$.
8. $n = 250$, $\sum x_i = 43205$, $\sum x_i^2 = 7469107$.
9. $n = 72$, $\sum x_i = 1267{,}2$, $\sum x_i^2 = 22536$.
10. $n = 64$, $\sum x_i = 1008$, $\sum(x_i - \bar{X})^2 = 172{,}8$.

Построить доверительный интервал для оценки генеральной средней при заданной доверительной вероятности γ.

Номер варианта	Номер задания	γ	Номер варианта	Номер задания	γ
1	1	0,99	11	1	0,9
2	2	0,9	12	2	0,95
3	3	0,98	13	3	0,99
4	4	0,96	14	4	0,99
5	5	0,9	15	5	0,96
6	6	0,97	16	6	0,9
7	7	0,95	17	7	0,99
8	8	0,99	18	8	0,9
9	9	0,9	19	9	0,95
10	10	0,95	20	10	0,9

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

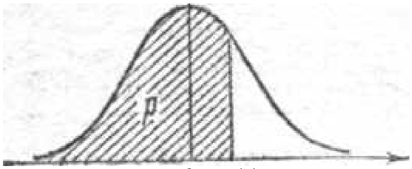


x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5717	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706

Окончание таблицы

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9883	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА



$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} du.$$

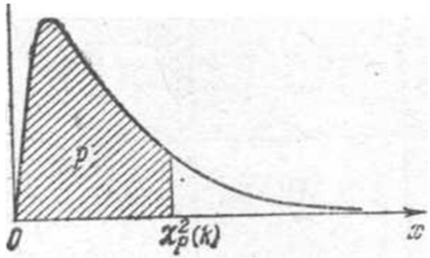
n \ p	**0,750**	**0,900**	**0,950**	**0,975**	**0,990**	**0,995**	**0,999**
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505

Окончание таблицы

n / *p*	**0,750**	**0,900**	**0,950**	**0,975**	**0,990**	**0,995**	**0,999**
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

П Р И Л О Ж Е Н И Е 3

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИРСОНА



n \ p	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10	0,20	0,30	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
1	$0{,}0^4393$	$0{,}0^3157$	$0{,}0^3982$	$0{,}0^2393$	0,0158	0,0642	0,148	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	3,67	4,64	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,19	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9

Окончание таблицы

n \ p	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10	0,20	0,30	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	23,9	26,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	24,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	27,8	30,2	38,9	41,8	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3	66,6
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	32,3	34,9	44,2	47,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	36,9	39,6	49,5	52,7	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2	80,1
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	41,4	44,3	54,7	58,2	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	64,5	68,1	80,9	85,1	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3	118,6
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	87,9	92,1	106,9	111,7	118,5	124,3	129,6	135,6	140,2	149,4