Вычисление координат вектора в ортонормированном базисе

Пусть $e_1, e_2, \; \ldots\ldots, e_n$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве E.

Тогда $\forall x \in E : \quad x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \; \ldots\ldots + \xi_n e_n$. Умножая это равенство на e_i, в силу ортонормированности базиса получим:

$$(x, e_i) = \xi_i, \quad i = 1, \; \ldots\ldots, n,$$

то есть координата вектора в ортонормированном пространстве находится по правилу:

$$\xi_i = (x, e_i). \tag{109}$$

3. Операторы

3.1 Линейный оператор. Матрица линейного оператора

Определение

Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – линейные пространства. Если задан закон, в соответствии с которым любому элементу $x \in \mathcal{L}_1$ ставится в соответствие элемент $y \in \mathcal{L}_2$, то говорят, что задан оператор $\hat{A}$, действующий из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ и пишут: $y = \hat{A}x$.

Замечание

Здесь и в дальнейшем будем использовать следующие обозначения.

Операторы будем обозначать буквами "со шляпкой": $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и так далее, а их матрицы – соответствующими обычными буквами: A, B, C и так далее.

Определение

Оператор $\hat{A}$: $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ называется линейным, если выполнено:

1) $\hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$;

2) $\hat{A}(\alpha x) = \alpha \hat{A}x \quad \forall x \in \mathcal{L}_1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

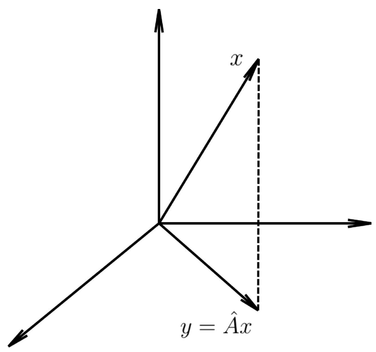
Определение

Линейный оператор, действующий из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$, называется гомоморфизмом. Если $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, то линейный оператор называется эндоморфизмом. Если $\mathcal{L}_2 = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), то линейный оператор называется линейной формой.

Примеры операторов

1) $\hat{A}x = \alpha x$ – линейный оператор, где α – фиксированное число.

2) Оператор проектирования $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейный оператор.



3) Оператор $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, действующий по правилу: $\hat{A}x = |x|$, не является линейным, так как для векторов не выполнено свойство линейности: $|x + y| \neq |x| + |y|$.

4) Оператор дифференцирования в пространстве полиномов $\hat{A} : P^n \to P^{n-1}$, действующий по правилу: $\hat{A}x = \frac{dx}{dt}$, является линейным ибо для производной свойства линейности выполнены.

Теорема 1

Под действием линейного оператора $\hat{A}$ линейное подпространство $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{L}_1$ перейдет в линейное подпространство $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{L}_2$, причем размерность подпространства не увеличится:

$$\dim \mathcal{N}_2 \leq \dim \mathcal{N}_1.$$

<u>Доказательство:</u>

Пусть $e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots, e_n$ – базис в $\mathcal{N}_1$: $\dim \mathcal{N}_1 = n$.

Тогда произвольный вектор $x \in \mathcal{N}_1$ можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:

$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ \ldots\ldots\ + \xi_n e_n.$

Тогда

$$\hat{A}x = \hat{A}(\xi_1 e_1 + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \xi_n e_n) = /\text{в силу линейности оператора } \hat{A}/ =$$
$$= \xi_1 \hat{A} e_1 + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \xi_n \hat{A} e_n. \tag{110}$$

Таким образом, любой элемент из $\mathscr{N}_2 = \hat{A}\mathscr{N}_1$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\hat{A}e_i, \quad i = 1, 2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , n$. Значит
$\mathscr{N}_2 \subset V\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^n$ – линейная оболочка векторов $\hat{A}e_i$.

С другой стороны, если $y \in V\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^n$ то:

$$y = \xi_1 \hat{A} e_1 + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \xi_n \hat{A} e_n = /\text{формула (110)}/ = \hat{A}x.$$

Значит $V\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{N}_2 = \hat{A}\mathscr{N}_1$. Как мы выясняли ранее,
$\mathscr{N}_2 \in V\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^n$. По Теореме 15 из параграфа 2.4 линейная оболочка $V\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^n$, является подпространством пространства $\mathcal{L}_2$. Кроме того: $\dim \mathscr{N}_2 = \dim V\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^n \leq n$, так как размерность линейной оболочки не может превысить число векторов, на которых она построена. Итак, $\dim \mathscr{N}_2 \leq n = \dim \mathscr{N}_1$.

■

Определение

Пусть $\hat{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$. Подпространство $\hat{A}\mathcal{L}_1$ называется множеством значений (образом) оператора $\hat{A}$ и обозначается $\mathrm{Im}\hat{A}$ (“image” $\hat{A}$).
$\mathrm{Im}\hat{A} = \hat{A}\mathcal{L}_1$

Определение

Единичный оператор $\hat{I}$ – это оператор, действующий по правилу:

$$\hat{I}x = x, \quad \forall x \in \mathcal{L}. \tag{111}$$

Нулевой оператор $\hat{0}$ действует по правилу:

$$\hat{0}x = \mathbb{O}, \quad \forall x \in \mathcal{L}. \tag{112}$$

Определение

Множество векторов, отображающихся в $\mathbb{O}$ под действием оператора $\hat{A}$, называется ядром оператора $\hat{A}$.

Обозначение: $Ker\hat{A}$.

Теорема 2

Ядро оператора является линейным пространством.

Доказательство:

Проверим, что линейные операции не выводят из множества

$$x, y \in Ker\hat{A} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \hat{A}x = \mathbb{O} \\ \hat{A}y = \mathbb{O} \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \hat{A}(x+y) = /\text{В силу линейности оператора}/ = \hat{A}x + \hat{A}y = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}.$$

$x \in Ker\hat{A}, \quad \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \;\Rightarrow\; \hat{A}x = \mathbb{O} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \hat{A}(\alpha x) = /\text{В силу линейности оператора}/ = \alpha\hat{A}x = \mathbb{O}.$$

Проверим, что $\mathbb{O} \in Ker\hat{A}$.

Согласно теореме 3 из параграфа 2.2 (формула (79)): $\mathbb{O} = 0 \cdot x \quad \forall x \in \mathcal{L}$. Следовательно, $\hat{A}\mathbb{O} = \hat{A}(0 \cdot x) = 0 \cdot \hat{A}x = \mathbb{O} \;\Rightarrow\; \mathbb{O} \in Ker\hat{A}$. Все аксиомы линейного пространства будут выполнены автоматически, так как линейные операции были индуцированы (заимствованы) из линейного пространства.

■

Замечание

Ядро линейного оператора не может быть пустым, так как $\mathbb{O} \in Ker\hat{A}$ (доказано в теореме 2).

Пример

Рассмотрим оператор проектирования из $\mathbb{R}^3$ на плоскость XOY. Ядро этого оператора состоит из векторов, обращающихся в 0 при проектировании, то есть параллельных орту оси $\vec{k}$. Таким образом, $Ker\hat{A} = V\{\vec{k}\}$.

Теорема 3

Пусть $\hat{A}:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$. Тогда:

$$\dim Ker\hat{A} + \dim \mathrm{Im}\hat{A} = \dim \mathcal{L}. \tag{113}$$

Доказательство:
Пусть $e_1,\ e_2,\ .....,e_k$ – базис в $Ker\hat{A}$, $\dim Ker\hat{A}=k$. Дополним его до базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ в $\mathcal{L}$, $\dim\mathcal{L}=n$ (такое дополнение всегда возможно согласно теореме 8 из параграфа 2.2). Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что $\dim\mathrm{Im}\hat{A}=n-k$.

Возьмем набор векторов $\hat{A}e_{k+1},\ .....,\hat{A}e_n$ и докажем, что он будет базисом в $\mathrm{Im}\hat{A}$. Проверим линейную независимость векторов $\hat{A}e_{k+1},\ .....,\hat{A}e_n$. Для этого составим их линейную комбинацию и приравняем её к нулю:

$$\alpha_{k+1}\hat{A}e_{k+1}+\ .....\ +\alpha_n\hat{A}e_n=\mathbb{O}.$$

Следовательно, в силу линейности оператора:

$$\hat{A}(\alpha_{k+1}e_{k+1}+\ .....\ +\alpha_n e_n)=\mathbb{O},$$

то есть $\alpha_{k+1}e_{k+1}+\ .....\ +\alpha_n e_n\in Ker\hat{A}$.
Поскольку векторы $e_{k+1},\ .....,e_n\notin Ker\hat{A}$, то их линейная комбинация может принадлежать ядру $Ker\hat{A}$ только если это нулевой вектор:

$$\alpha_{k+1}e_{k+1}+\ .....\ +\alpha_n e_n=\mathbb{O}\ \Rightarrow\ \alpha_{k+1}=\ .....\ =\alpha_n=0,$$

так как векторы $e_k,\ .....,e_n$ линейно независимы.

Теперь покажем, что любой вектор $y\in\mathrm{Im}\hat{A}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\{\hat{A}e_i\}_{i=k+1}^n$. Действительно, поскольку $y\in\mathrm{Im}\hat{A}$, то существует $x\in\mathcal{L}$, такой что: $y=\hat{A}x$. Разложим x по базису $\{e_i\}_{i=1}^n$:

$$y = \hat{A}x = \hat{A}\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i = \hat{A}\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i}_{\in Ker\hat{A}} + \hat{A}\sum_{i=k+1}^{n}\xi_i e_i =$$

$$\Big/ \hat{A}\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i = 0, \text{ так как } \sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i \in Ker\hat{A} \Big/$$

$$= \hat{A}\sum_{i=k+1}^{n}\xi_i e_i = /\text{в силу линейности оператора } \hat{A}/ = \sum_{i=k+1}^{n}\hat{A}\xi_i e_i,$$

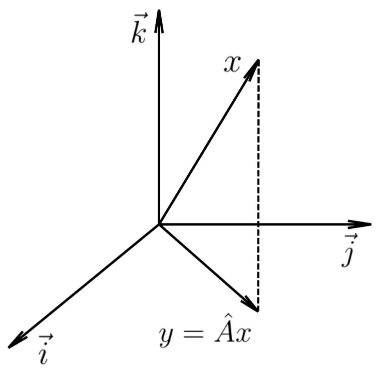
то есть мы представили вектор y в виде линейной комбинации векторов $\{\hat{A}e_i\}_{i=k+1}^n$. Линейная независимость уже была проверена ранее. Таким образом, набор $\{\hat{A}e_i\}_{i=k+1}^n$ образует базис в $\mathrm{Im}\hat{A}$ и выполнено:

$$\dim \mathrm{Im}\hat{A} = n - k = \dim \mathcal{L} - \dim Ker\hat{A}.$$

■

Пример

Рассмотрим оператор проектирования из $\mathbb{R}^3$ на плоскость XOY.



Его ядро было найдено ранее: $Ker\hat{A} = V\{\vec{k}\}$. Образ оператора – это плоскость XOY, то есть $\mathrm{Im}\hat{A} = V\{\vec{i}, \vec{j}\}$, что соответствует теореме 3.

Матрица линейного оператора

Пусть $e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots, e_n$ – базис в пространстве $\mathcal{L}$. Введем оператор $\hat{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующий по правилу $y = \hat{A}x$. Разложим векторы x и y по базису:

$$x = \xi_1 e_1 + \ \ldots\ldots \ + \xi_n e_n, \tag{114}$$

$$y = \eta_1 e_1 + \ \ldots\ldots + \eta_n e_n. \tag{115}$$

Найдем связь между координатами $\xi_1, \ \ldots\ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ \ldots\ldots, \eta_n$. Применим оператор $\hat{A}$ к вектору x, заданному разложением (114):

$$\hat{A}x = \hat{A}(\xi_1 e_1 + \ \ldots\ldots + \xi_n e_n) = /\text{В силу линейности оператора } \hat{A}/ =$$
$$= \xi_1 \hat{A} e_1 + \ \ldots\ldots + \xi_n \hat{A} e_n. \tag{116}$$

Поскольку $\hat{A}e_i \in \mathcal{L}$, то его можно разложить по базису:

$$\hat{A}e_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \ \ldots\ldots + a_{ni}e_n, \quad i = 1, 2, \ \ldots\ldots, n. \tag{117}$$

Подставим $\hat{A}e_i \in \mathcal{L}$ из (117) в формулу (116):

$$y = \hat{A}x = \xi_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots\ldots + a_{n1}e_n) + \xi_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots\ldots + a_{n2}e_n) +$$
$$+ \ \ldots\ldots + \xi_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ \ldots\ldots + a_{nn}e_n) =$$
$$= e_1 \underbrace{(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ \ldots\ldots + a_{1n}\xi_n)}_{\eta_1} + e_2 \underbrace{(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ \ldots\ldots + a_{2n}\xi_n)}_{\eta_2} +$$
$$+ \ \ldots\ldots + e_n \underbrace{(a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ \ldots\ldots + a_{nn}\xi_n)}_{\eta_n} \tag{118}$$

Сравнивая формулы (115) и (118), получаем выражения для координат $\eta_1, \ \eta_2, \ \ldots\ldots, \eta_n$:

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ \ldots\ldots + a_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ \ldots\ldots + a_{2n}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ \ldots\ldots + a_{nn}\xi_n. \end{cases} \tag{119}$$

Систему (119) можно записать в виде матричного равенства:

$$Y = AX, \tag{120}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$

Матрица A называется матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots, e_n$.

Подведем итог. Для того, чтобы построить i-ый столбец матрицы оператора в базисе $e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots, e_n$, надо взять вектор e_i, подействовать на него оператором $\hat{A}$ и разложить вектор $\hat{A}e_i$ по базису $e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots, e_n$. Коэффициенты $a_{1i},\ a_{2i},\ \ldots\ldots, a_{ni}$ этого разложения (формула (117)) и дадут i-ый столбец матрицы оператора.

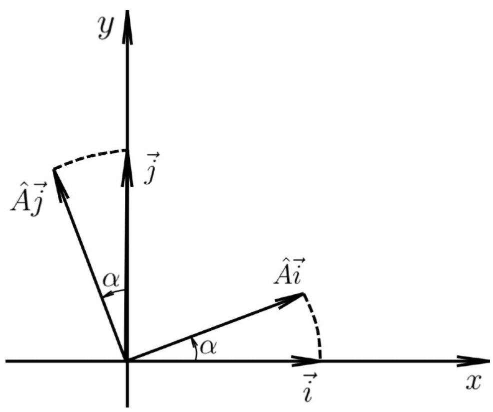
Замечание

При фиксированном базисе в пространстве $\mathcal{L}$ описанная процедура задает взаимно однозначное соответствие между оператором $\hat{A}$ и матрицей A.

Примеры матриц различных операторов

1) Пусть $\hat{A}$ – оператор поворота на угол α радиус-вектора на плоскости XOY. Найдем его матрицу в базисе $\vec{i},\ \vec{j}$.

Длины базисных векторов $\vec{i},\ \vec{j}$ равны 1. При повороте длина вектора не меняется. Следовательно, $\|\hat{A}\vec{i}\| = \|\hat{A}\vec{j}\| = 1$.



Разложим векторы $\hat{A}\vec{i}$ и $\hat{A}\vec{j}$ по базису $\vec{i},\ \vec{j}$:

$\hat{A}\vec{i} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$,

$\hat{A}\vec{j} = -\sin\alpha \cdot \vec{i} + \cos\alpha \cdot \vec{j}$.

Координаты $\hat{A}\vec{i}$ запишем в первый столбец матрицы поворота, координаты $\hat{A}\vec{j}$ – во второй столбец.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{– матрица поворота} \tag{121}$$

2) Единичному оператору $\hat{I}: \ \hat{I}x = x$ отвечает единичная матрица:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Нулевому оператору $\hat{0}: \ \hat{0}x = \mathbb{O}$ отвечает нулевая матрица:

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Оператор проектирования из $\mathbb{R}^3$ на плоскость XOY переводит всякий вектор $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в вектор $\hat{P}\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Тогда:

$\hat{P}\vec{i} = \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$

$\hat{P}\vec{j} = \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$

$\hat{P}\vec{k} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$

Следовательно, матрица проектирования имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Найдем матрицу оператора дифференцирования в пространстве P^n полиномов степени $\leq n$ в базисе $1, t, t^2, \ \ldots\ldots, t^n$.

$\hat{D}x = \hat{D}(\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot t + \ \ldots\ldots + \alpha_n \cdot t^n) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \ \ldots\ldots + n\alpha_n t^{n-1}$.

Тогда:

$\hat{D}1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ \ldots\ldots \ + 0 \cdot t^n,$

$\hat{D}t = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ \ldots\ldots \ + 0 \cdot t^n,$

$\hat{D}t^2 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + \ \ldots\ldots \ + 0 \cdot t^n,$

. . . .

$\hat{D}t^n = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ \ldots\ldots \ + n \cdot t^{n-1} + 0 \cdot t^n.$

Следовательно, матрица оператора дифференцирования в базисе $1,\ t,\ t^2,\ \ldots\ldots, t^n$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание

Рассмотрим оператор $\hat{A}$, действующий из пространства $\mathcal{L}_1$ в некоторое другое пространство $\mathcal{L}_2$. Здесь матрица оператора A уже необязательно будет квадратной. Для построения матрицы A необходимо фиксировать базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ в $\mathcal{L}_1$ и $\{g_i\}_{i=1}^m$ в $\mathcal{L}_2$ и разложить $\hat{A}e_i$ по базису $\{g_i\}_{i=1}^m$, выписывая координаты вектора $\hat{A}e_i$ в i-ый столбец матрицы A. В результате, мы получим матрицу A размером $m \times n$.

3.2 Действия над линейными операторами

Определение

Суммой операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих из пространства $\mathcal{L}_1$ в пространство $\mathcal{L}_2$, называется оператор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, действующий из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ по правилу:

$$\hat{C}x = \hat{A}x + \hat{B}x \quad \forall x \in \mathcal{L}_1. \tag{122}$$

Замечание

Очевидно, что оператор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ является линейным оператором, причем его матрица равна $A + B$.

Определение

Произведением линейного оператора $\hat{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ на число $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ является линейный оператор $\hat{D} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, действующий по правилу:

$$\hat{D}x = \alpha\hat{A}x \quad \forall x \in \mathcal{L}_1. \tag{123}$$

Замечание

Очевидно, что оператор $\hat{D} = \alpha\hat{A}$ является линейным оператором, причем его матрица равна αA.

Теорема 4

Множество линейных операторов с введенными действиями сложения и умножения на число, а также нулевым элементом (нулевым оператором), является линейным пространством.

Доказательство:

Очевидно, что аксиомы линейного пространства выполнены. Нулевой элемент – это нулевой оператор. Противоположный к $\hat{A}$ оператор – это $(-\hat{A})$.

■

Теорема 5

Размерность пространства линейных операторов, действующих из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$, равна $\dim \mathcal{L}_1 \cdot \dim \mathcal{L}_2$

Доказательство:

Пространство линейных операторов, действующих из
$\mathcal{L}_1$ (пусть $\dim \mathcal{L}_1 = n$) в $\mathcal{L}_2$ (пусть $\dim \mathcal{L}_2 = m$), изоморфно пространству матриц M_{mn} размера $m \times n$ (то есть между ними можно установить взаимно-однозначное соответсвие, сохраняющее линейные операции с элементами).

Покажем, что пространство M_{mn} имеет размерность $m \cdot n$. Базис в нем задают матрицы, имеющие один элемент, равный 1 и все остальные, равные нулю. Очевидно, что такие матрицы линейно независимы и любую матрицу размера $m \times n$ можно представить в виде их линейной комбинации. Число базисных матриц равно $m{\cdot}n$, то есть $\dim M_{mn} = m{\cdot}n$.

■

Определение

Пусть оператор $\hat{B} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, \quad \hat{A} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$.

Тогда произведением операторов $\hat{A}\hat{B}$ называется оператор $\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B}$, действующий по правилу:

$\hat{C}x = \hat{A}(\hat{B}x) \quad \forall x \in \mathcal{L}_1$.

Замечание

Нетрудно убедиться, что оператор $\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B}$ является линейным:

$$\hat{A} \cdot \hat{B}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \hat{A}(\alpha_1 \hat{B}x_1 + \alpha_2 \hat{B}x_2) = \alpha_1 \hat{A}\hat{B}x_1 + \alpha_2 \hat{A}\hat{B}x_2.$$

Теорема 6

Пусть $\hat{A}$, $\hat{B}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Тогда матрица оператора $\hat{A}\hat{B}$ есть произведение матриц $A \cdot B$.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $e_1, \; . \; . \; . \; . \; . \; , e_n$ – базис в пространстве $\mathcal{L}$. Элементы матрицы оператора находятся по формуле (117). Соответсвенно,

$$\hat{B}e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j, \tag{124}$$

$$\hat{A}e_i = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k. \tag{125}$$

Тогда:

$$(\hat{A} \cdot \hat{B})e_i = \hat{A}(\hat{B}e_i) \underset{\substack{\uparrow \\ (124)}}{=} \hat{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейность}}}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \hat{A} e_j \underset{\substack{\uparrow \\ (125)}}{=} \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji}\Big) e_k. \tag{126}$$

В соответствии с формулой (117), коэффициенты этого разложения дают элементы i-го столбца матрицы оператора $\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B}$:

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{k} a_{kj} b_{ji}. \tag{127}$$

Это соответствует формуле для произведения матриц:

$$C = A \cdot B. \tag{128}$$

■

Замечание

Теорема 6 полностью сохраняется в случае, когда операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют между различными пространствами.

Замечание

Произведение операторов некоммутативно:

$$\hat{A} \cdot \hat{B} \neq \hat{B} \cdot \hat{A}. \tag{129}$$

Это аналогично свойству произведения матриц.

Определение

Оператор $[\hat{A},\ \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называется коммутатором операторов $\hat{A},\ \hat{B}$.

Пример

Рассмотрим операторы в пространстве дифференцируемых функций.
Пусть $\hat{A}$ – оператор умножения на t.
Пусть $\hat{B}$ – оператор дифференцирования: $\frac{d}{dt}$.
Вычислим коммутатор $[\hat{A},\ \hat{B}]$.
$\hat{A} \cdot \hat{B} f(t) = t \cdot f'(t)$,
$\hat{B} \cdot \hat{A} f(t) = (tf(t))' = f(t) + tf'(t)$,
$[\hat{A},\ \hat{B}] f(t) = \hat{A}\hat{B} f(t) - \hat{B}\hat{A} f(t) = tf'(t) - f(t) - tf'(t) = -f(t)$.
Таким образом, $[\hat{A},\ \hat{B}] = -\hat{I}$, где $\hat{I}$– единичный оператор.

Определение

Оператор $\hat{B}$ в пространстве $\mathcal{L}$ называется обратным к оператору $\hat{A}$, если $\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B} = \hat{I}$:

Обозначение: $\hat{A}^{-1}$.

Замечание

Для того, чтобы найти обратный оператор, нужно решить уравнение $\hat{A}x = y$.

Степень оператора

$$\hat{A}^0 = \hat{I}, \quad \hat{A}^1 = \hat{A}, \quad \hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}, \; \ldots\ldots, \; \hat{A}^n = \hat{A}^{n-1}\hat{A}. \tag{130}$$

Отрицательные степени определяются с помощью обратного оператора:

$$\hat{A}^{-n} = (\hat{A}^{-1})^n. \tag{131}$$

3.3 Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть в пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: $\{e_1, \; \ldots\ldots, e_n\}$ и $\{g_1, \; \ldots\ldots, g_n\}$. Выясним, как меняются координаты вектора при замене базиса. Разложим некоторый вектор $x \in \mathcal{L}$ по каждому из базисов:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \; \ldots\ldots \; + \xi_n e_n. \tag{132}$$

$$x = \eta_1 g_1 + \eta_2 g_2 + \; \ldots\ldots \; + \eta_n g_n. \tag{133}$$

Нам нужно найти связь координат η_i и ξ_i:

Разложим векторы g_i по базису $\{e_1, \; \ldots\ldots, e_n\}$:

$$g_i = \tau_{1i} \cdot e_1 + \tau_{2i} \cdot e_2 + \; \ldots\ldots \; + \tau_{ni} \cdot e_n, \quad i = 1, \; 2, \; \ldots\ldots, n. \tag{134}$$

Подставим g_i из (134) в формулу (133):

$$\begin{gathered} x = \eta_1(\tau_{11}\cdot e_1 + \tau_{21}\cdot e_2 + \ ..... \ + \tau_{n1}\cdot e_n) + \\ + \eta_2(\tau_{12}\cdot e_1 + \tau_{22}\cdot e_2 + \ ..... \ + \tau_{n2}\cdot e_n) + \ ..... \\ + \eta_n(\tau_{1n}\cdot e_1 + \tau_{2n}\cdot e_2 + \ ..... \ + \tau_{nn}\cdot e_n) = \\ = \underbrace{(\tau_{11}\eta_1 + \tau_{12}\eta_2 + \ ..... \ + \tau_{1n}\eta_n)}_{\xi_1} e_1 + \ ..... \\ + \underbrace{(\tau_{11}\eta_1 + \tau_{12}\eta_2 + \ ..... \ + \tau_{1n}\eta_n)}_{\xi_n} e_n. \end{gathered} \tag{135}$$

Сравнивая формулы (132) и (135), получаем следующие соотношения для координат:

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_{11}\eta_1 + \tau_{12}\eta_2 + \ ..... \ + \tau_{1n}\eta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = \tau_{n1}\eta_1 + \tau_{n2}\eta_2 + \ ..... \ + \tau_{nn}\eta_n. \end{cases} \tag{136}$$

Систему (136) можно записать в виде матричного уравнения:

$$X_e = T_{e\to g}\cdot X_g, \tag{137}$$

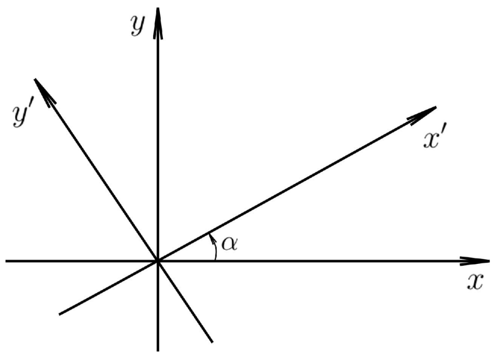
где $T_{e\to g} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & ..... & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & ..... & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & ..... & \tau_{nn} \end{pmatrix}, \quad X_e = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad X_g = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$

Матрица $T_{e\to g}$ называется матрицей преобразования координат при переходе от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{g_i\}_{i=1}^n$. Столбцами матрицы $T_{e\to g}$ являются координаты векторов $g_1,\ g_2,\ .....,g_n$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Пример

Преобразование координат вектора при повороте базиса.

Преобразование координат дается формулой (137):



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{e\to g} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота $T_{e\to g}$ уже была получена ранее (формула (121)):

$$T_{e\to g} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно, координаты вектора преобразуются по следующему правилу:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{138}$$

Теорема 7

Пусть в евклидовом пространстве задано два ортонормированных базиса: $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_i\}_{i=1}^n$. Тогда матрица преобразования координат $T_{e\to g}$ будет ортогональной.

Доказательство:

Согласно формуле (134):

$g_i = \tau_{1i}\cdot e_1 + \tau_{2i}\cdot e_2 + \ \ldots\ldots + \tau_{ni}\cdot e_n, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots, n.$

В силу ортонормированности базиса $\{g_i\}_{i=1}^n$ будет выполнено:

$$1 = (g_i, g_i) \underset{\substack{\uparrow \\ (134)}}{=} (\tau_{1i}e_1 + \ \ldots\ldots + \tau_{ni}e_n,\ \tau_{1i}e_1 + \ \ldots\ldots + \tau_{ni}e_n) =$$

$$= /\text{в силу ортонормированности базиса } \{e_i\}_{i=1}^n/ =$$

$$= \tau_{1i}^2 + \tau_{2i}^2 + \ \ldots\ldots + \tau_{ni}^2, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots, n. \tag{139}$$

$$0 = (g_i, g_j) \underset{\substack{\uparrow \\ (134)}}{=} (\tau_{1i}e_1 + \ \ldots\ldots + \tau_{ni}e_n,\ \tau_{1j}e_1 + \ \ldots\ldots + \tau_{nj}e_n) =$$

$$= \tau_{1i}\tau_{1j} + \ \ldots\ldots + \tau_{ni}\tau_{nj}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots, n. \tag{140}$$

Полученные формулы (139), (140) соответствуют свойствам ортогональной матрицы (формулы (58), (59)). Следовательно, матрица $T_{e\to g}$ ортогональна.

■

Замечание

Например, матрица преобразования координат при повороте осей: $T_{e\to g} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ будет ортогональной матрицей.

3.4 Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Рассмотрим оператор $\hat{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующий по правилу $y = \hat{A}x$ Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис в $\mathcal{L}$. $Y_e = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$, $X_e = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ – столбцы координат векторов y и x в этом базисе. Матрица A_e оператора $\hat{A}$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ связывает Y_e и X_e:

$$Y_e = A_e X_e. \tag{141}$$

Пусть $\{g_i\}_{i=1}^n$ – другой базис в $\mathcal{L}$. Y_g и X_g – столбцы координат векторов

y и x в базисе $\{g_i\}_{i=1}^n$. Матрица A_g оператора $\hat{A}$ в базисе $\{g_i\}_{i=1}^n$ связывает Y_g и X_g:

$$Y_g = A_g X_g. \tag{142}$$

Пусть $T_{e\to g}$ – матрица преобразования координат при переходе от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{g_i\}_{i=1}^n$.Тогда:

$$X_e = T_{e\to g} X_g, \quad Y_e = T_{e\to g} Y_g. \tag{143}$$

Подставим X_e и Y_e из (143) в формулу (141):

$$T_{e\to g} Y_g = A_e T_{e\to g} X_g \ \Rightarrow \ Y_g = T_{e\to g}^{-1} A_e T_{e\to g} X_g. \tag{144}$$

Сравнивая формулы (144) и (142), получим матрицу линейного оператора в новом базисе:

$$A_g = T_{e\to g}^{-1} A_e T_{e\to g}. \tag{145}$$

Если пространство евклидово и $T_{e\to g}$ – ортогональная матрица ($T_{e\to g}^{-1} = T_{e\to g}^T$), то формулу (145) можно упростить:

$$A_g = T_{e\to g}^T A_e T_{e\to g}. \tag{146}$$

3.5 Самосопряженные и унитарные операторы

Рассмотрим комплексное евклидово пространство E, то есть в нем определено умножение вектора на комплексное число и скалярное произведение является комплексным числом.Рассмотрим оператор $\hat{A}$, действующий в E. $\hat{A}: E \to E$.

Определение

Оператор $\hat{A}^*$ называется сопряженным к оператору $\hat{A}$, если выполнено:

$$(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^* y), \quad \forall x, y \in E. \tag{147}$$

Примеры построения сопряженных операторов

1) $\hat{I}^* = \hat{I}$, где $\hat{I}$ – единичный оператор.

Действительно,