Пример

Вычислим объем тела, образованного вращением параболы $y^2 = 2x$ вокруг оси OX при $0 \le x \le 1$.

$$V = \pi \int_0^1 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^1 = \pi.$$

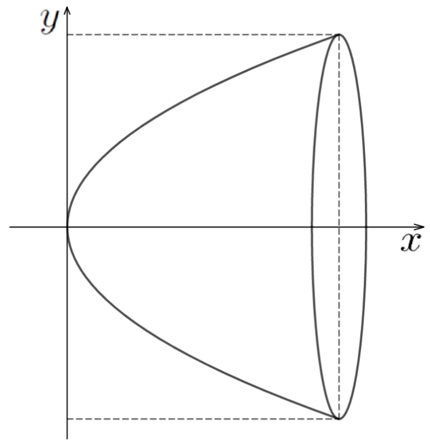

Рис. 9: Параболоид вращения

3.4 Площадь поверхности тела вращения

Площадь произвольной криволинейной поверхности в общем случае не удается ввести по аналогии с определением длины кривой. Однако если поверхность есть поверхность тела вращения, то подобное определение становится корректным. Именно о нем пойдет речь в настоящем параграфе. Общее определение площади поверхности будет дано позже при рассмотрении поверхностных интегралов.

Определение

Пусть поверхность Σ образована вращением вокруг оси OX плоской спрямляемой кривой. Впишем в кривую ломаную $M_0 M_1 \ldots M_n$. Обозначим за S_n площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX данной ломаной. Рассмотрим предел S_n при измельчении разбиения кривой (то есть при $\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0$). Если данный предел существует и конечен и не зависит от выбора точек M_i, то он называется площадью поверхности вращения Σ:

$$S = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} S_n. \tag{3.13}$$

Найдем формулу для вычисления площади поверхности. Площадь поверхности, полученной вращением ломаной, равна сумме площадей боковых поверхностей усеченных конусов ($S_{\text{усеч.конус}} = \pi(r + R)L$, где R – радиус нижнего основания усеченного конуса, r – радиус верхнего основания, L – образующая):

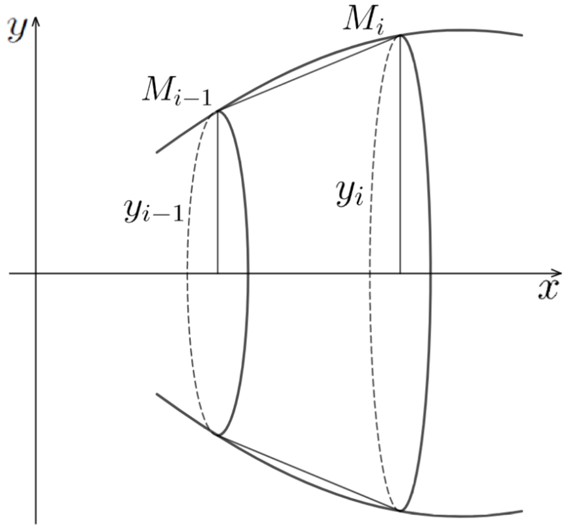

Рис. 10: Усеченный конус, вписанный в поверхность

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi(y_{i-1} + y_i) \cdot |M_{i-1}M_i| =$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} (2y_{i-1} + y_i - y_{i-1}) \cdot |M_{i-1}M_i| =$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot |M_{i-1}M_i| + \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot |M_{i-1}M_i|. \tag{3.14}$$

Покажем, что второе слагаемое стремится к нулю при измельчении разбиения. Так как

$$\max_i |y_i - y_{i-1}| \leq \Big/ \text{Катет меньше гипотенузы} \Big/ \leq \max_i |M_{i-1}M_i| \to 0,$$

то для второго слагаемого будет выполнено:

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot |M_{i-1}M_i| \Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i - y_{i-1}| \cdot |M_{i-1}M_i| \leq$$

$$\leq \max_i |y_i - y_{i-1}| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|}_{\leq l} \leqslant \max_i |y_i - y_{i-1}| \cdot l \to 0,$$

где l – длина кривой. Сделав предельный переход в формуле (3.14), получим:

$$S = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} S_n = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot |M_{i-1}M_i|. \tag{3.15}$$

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $x \in [a,\ b]$. Согласно формуле (3.4), длина отрезка ломаной равна $\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1})$. Следовательно,

$$S = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_{i-1})}_{y_{i-1}} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Полученная сумма не является интегральной, поскольку функции f и f' вычислены в разных точках, но можно доказать что она имеет тот же предел. Делается по аналогии с получением формулы для длины кривой, заданной параметрически (параграф 3.2, формула (3.8)). Таким образом, **площадь поверхности тела вращения равна:**

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.}_{dl} \tag{3.16}$$

Здесь dl – это дифференциал длины дуги кривой.

Замечание

В случае если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то формула (3.16) сохраняется с точностью до замены dl на соответсвующее выражение в данных координатах.

Пример

Найдем площадь поверхности удлиннённого эллипсоида вращения (то есть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вращаемого вокруг большой оси):

$$S = 2\pi \int\limits_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{y^2 + (yy')^2}dx.$$

Продифференцируем уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получим:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{1}{b^2}\cdot 2yy'=0 \;\Rightarrow\; yy'=-\frac{b^2x}{a^2}.$$

Кроме того,

$$y^2=b^2\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big).$$

Следовательно,

$$S=2\pi\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^4x^2}{a^4}}dx=2\pi b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}\Big(1-\frac{b^2}{a^2}\Big)}dx=$$

$$\Big/\text{Эксцентриситет}\;\; e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}\Big/$$

$$=2\pi b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}dx=$$

$$\Big/\text{Интеграл от четной функции по симметричному промежутку}\Big/$$

$$=4\pi b\int\limits_{0}^{a}\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}dx=\frac{4\pi ba}{e}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{1-\Big(\frac{ex}{a}\Big)^2}\,d\Big(\frac{ex}{a}\Big)=$$

$$=\Big/t=\frac{ex}{a}\Big/=\frac{4\pi ba}{e}\int\limits_{0}^{e}\sqrt{1-t^2}dt.$$

Вычислим $\int\sqrt{1-t^2}dt$.

$$\int\sqrt{1-t^2}dt=\Big/u=\sqrt{1-t^2},\; dv=dt,\quad v=t,\; du=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt\Big/$$

$$=t\sqrt{1-t^2}+\int\frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}dt=t\sqrt{1-t^2}-\int\sqrt{1-t^2}dt+\underbrace{\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}_{\arcsin t+C}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{1-t^2}dt=\frac{1}{2}(t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t+C).$$

Следовательно,

$$S=\frac{4\pi ba}{e}\cdot\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2}\Big|_0^e+\arcsin t\Big|_0^e\right)=2\pi ba\Big(\sqrt{1-e^2}+\frac{\arcsin e}{e}\Big)=$$

$$=\Big/\text{Эксцентриситет эллипса}\; e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\Big/=2\pi b^2+2\pi ba\frac{\arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}.$$

3.5 Центр тяжести

В физических задачах важную роль играет понятие центра масс. Центр масс – это точка, положение которой определяется распределением массы в теле, а перемещение характеризует движение тела или механической системы как целого. В случае систем материальных точек и тел с однородной по объёму плотностью в однородном гравитационном поле центр масс совпадает с центром тяжести (то есть с точкой приложения равнодействующей гравитационных сил), хотя в общем случае это разные понятия. Например, если рассматривать малое тело на поверхности Земли, то силы тяжести во всех его точках можно считать одинаковыми по величине и параллельными друг другу. В этой ситуации точка приложения равнодействующей этих сил (центр тяжести) совпадет с центром масс. Если же рассматривать достаточно большое тело (настолько большое, что в пределах этого тела кривизна земной поверхности начинает играть существенную роль), то гравитационные силы в разных его точках будут непараллельны и могут отличаться по величине. Здесь точка приложения равнодействующей этих сил (центр тяжести) уже не будет совпадать с центром масс.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать физические тела относительно малого размера, для которых описанное различие между центром тяжести и центром масс пренебрежимо мало. То есть мы будем отождествлять эти понятия. Найдем центры тяжести различных геометрических объектов.

1. Центр тяжести системы материальных точек

Положение центра масс системы материальных точек определяется следующим образом:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \tag{3.17}$$

где $(x_c,\ y_c)$ – координаты центра масс, x_i – координата i-ой точки с массой m_i.

Замечание

В трехмерном пространстве к вышеперечисленным координатам следует добавить еще одну:

$$z_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

2. Центр тяжести плоской кривой

Рассмотрим плоскую кривую с плотностью $\rho(x,\ y)$, заданную уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,\ b]$. Под плотностью мы подразумеваем линейную плотность распределения массы, то есть массу, приходящуюся на единицу длины кривой. Координаты центра тяжести плоской кривой определяются формулами:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{M}\int\limits_a^b \rho(x, f(x)) \cdot x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx, \\ y_c = \frac{1}{M}\int\limits_a^b \rho(x, f(x)) \cdot f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx, \end{cases} \tag{3.18}$$

где $M = \int\limits_a^b \rho(x, f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ – масса кривой. (3.19)

Теорема 1 (Первая теорема Гульдина)

Площадь поверхности, полученной при вращении дуги однородной плоской кривой $(\rho = 1)$ вокруг некоторой оси (лежащей в её плоскости и не пересекающей её), равняется произведению длины вращающейся дуги на длину пути, описанного при этом вращении центром тяжести дуги.

<u>Доказательство:</u>

Пусть кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,\ b]$, вращается вокруг оси OX.

Так как $\rho = 1$, то масса кривой согласно формуле (3.19), будет равна:

$$M = \int\limits_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}_{dl} = l. \tag{3.20}$$

Тогда по формуле (3.18):

$$My_c = ly_c = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{3.21}$$

Согласно формуле (3.16), площадь поверхности тела вращения равна:

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi y_c \cdot l. \tag{3.22}$$

Заметим, что $2\pi y_c$ – это длина окружности, пройденная центром тяжести кривой при вращении. Что и требовалось доказать.

■

3. Центр тяжести плоской фигуры

Найдем центр тяжести однородной плоской фигуры с плотностью $\rho = 1$, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ снизу и сверху соответственно, а также вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ с боков.

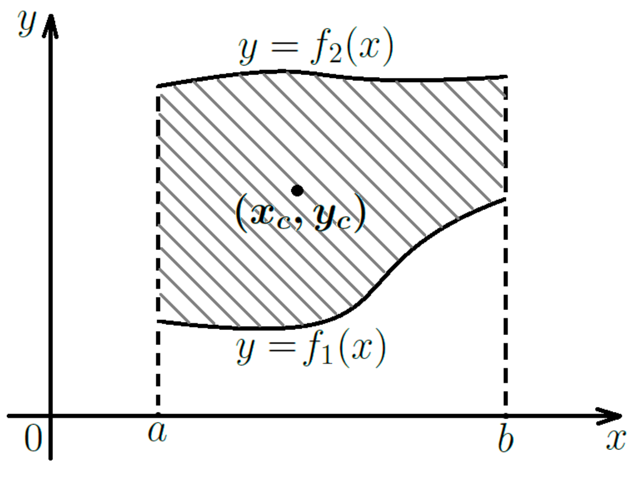

Рис. 11: Центр тяжести плоской фигуры

Координаты центра тяжести данной фигуры даются формулами:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{S}\int\limits_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx, \\ y_c = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\text{где } S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \text{ – площадь фигуры.} \tag{3.24}$$

Теорема 2 (Вторая теорема Гульдина)

Объём тела, полученный при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси (лежащей в её плоскости и не пересекающей её), равен произведению площади вращающейся фигуры на длину пути, описанного её центром тяжести при вращении.

Доказательство:

Пусть плоская фигура, описанная выше, вращается вокруг оси OX. По формуле (3.23) получим:

$$2y_c \cdot S = \int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx. \tag{3.25}$$

Тогда согласно формуле (3.12), объем полученного тела вращения можно вычислить как разность двух объемов, полученных при вращении кривых $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ соответственно:

$$V = \pi\int\limits_a^b f_2^2(x)dx - \pi\int\limits_a^b f_1^2(x)dx = \pi\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx = 2\pi y_c \cdot S. \tag{3.26}$$

Заметим, что $2\pi y_c$ – это длина окружности, пройденная центром тяжести фигуры при вращении. Что и требовалось доказать.

■

Пример 1

Найдем объём тора, образованного вращением круга радиуса r вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости круга на расстоянии a от его центра. По второй теореме Гульдина (формула (3.26)) получим:

$$V = 2\pi a \cdot S = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2.$$

Пример 2

Найдем площадь поверхности тора, образованного вращением круга радиуса r вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости круга на расстоянии a от его центра. По первой теореме Гульдина (формула (3.22)) получим:

$$S = 2\pi a \cdot l = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 a r.$$

Пример 3

Найдем координаты центра тяжести полукруга радиуса R (смотри рисунок (3.5)). Для этого рассмотрим его вращение вокруг оси OX, в результате которого получается шар радиуса R. Объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Площадь вращающегося полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Следовательно, по второй теореме Гульдина (формула (3.26)) получим:

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{V} = 2\pi y_c \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2}R^2}_{S} \Rightarrow y_c = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.$$

Из симметрии полукруга ясно, что $x_c = 0$.

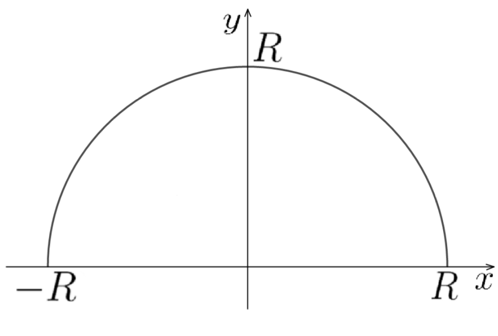

Рис. 12: Полукруг радиуса R

Пример 4

Найдем центр тяжести полуокружности радиуса R. Аналогично примеру 3, рассмотрим ее вращение вокруг оси OX, в результате которого получается сфера радиуса R. Площадь поверхности сферы известна: $S = 4\pi R^2$. Длина вращающейся полуокружности равна $l = \pi R$. Тогда по первой теореме Гульдина (формула (3.22)) получим:

$$\underbrace{4\pi R^2}_{S} = 2\pi y_c \cdot \underbrace{\pi R}_{l} \;\Rightarrow\; y_c = \frac{2}{\pi} R.$$

Из симметрии полуокружности очевидно, что $x_c = 0$.