3. Криволинейные интегралы

3.1 Криволинейный интеграл 1 рода

Криволинейный интеграл 1-го рода будем вводить по аналогии с обычным одномерным интегралом.

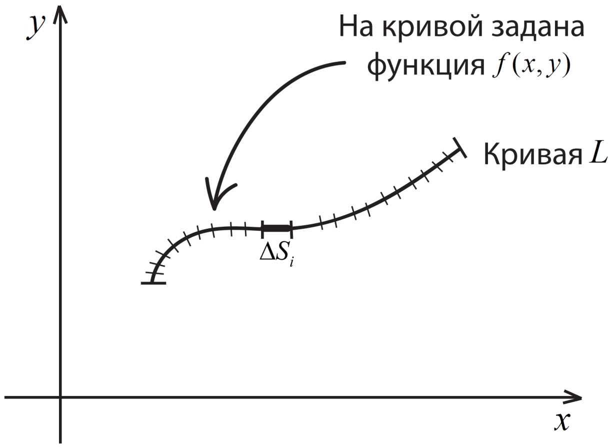

Рис. 35: Разбиение кривой L на элементарные части

Разобъем кривую L на конечное число дуг. Пусть ΔS_i – длина соответствующей дуги. Выберем точку $P_i(\xi_i,\eta_i)$ в произвольном месте i-той дуги и посчитаем значение функции в этой точке: $f(\xi_i,\eta_i)$. Если при измельчении разбиения интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий от способа разбиения и выбора точек P_i, то он называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L и обозначается символом

$$\int\limits_L f(x,y)dS = \lim_{\max|\Delta S_i|\to 0} \sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i. \tag{3.1}$$

3.2 Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

Криволинейный интеграл 1 рода считается по разному в зависимости от способа задания кривой.

1) Кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Тогда:

$$\int\limits_L f(x,y)dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)) \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (xy(t))^2}dt}_{dS}. \qquad (3.2)$$

2) Кривая задана в декартовых координатах:

$$y = g(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Тогда:

$$\int\limits_L f(x,y)dS = \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}dx \qquad (3.3)$$

3) Кривая задана в полярных координатах:

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta.$$

В этом случае:

$$\int\limits_L f(x,y)dS = \int\limits_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi. \qquad (3.4)$$

4) В трёхмерном случае возможно только параметрическое задание кривой (другие способы задания кривой неудобны):

$$\int\limits_L f(x,y,z)dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \qquad (3.5)$$

Приложения криволинейного интеграла 1 рода

Длина кривой: $L = \int\limits_L dS.$

Масса кривой с плотностью $\rho(x,y,z): \quad M = \int\limits_L \rho(x,y,z)dS.$

Задачи

1) Вычислить $\int\limits_L (x-y)dS$, где L – отрезок прямой от $A\,(0;0)$ до $B\,(4;3)$.

Уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки, известно:

$$AB: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

В нашем случае:

$$\frac{x-0}{4-0} = \frac{y-0}{3-0} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{3}{4}x \;\Rightarrow\; y' = \frac{3}{4}.$$

$$\int\limits_L (x-y)dS = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

2) Найти массу M дуги кривой

$$x = t,\ y = \frac{t^2}{2},\ z = \frac{t^3}{3}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

линейная плотность которой меняется по закону: $\rho = \sqrt{2y}$.

$$M = \int\limits_L \rho dS = \int\limits_L \sqrt{2y}dS = \int\limits_0^1 \sqrt{2\cdot\frac{t^2}{2}}\cdot\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\Big(\underbrace{t^2+\frac{1}{2}}_{S}\Big)^2+\frac{3}{4}}\cdot\underbrace{d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)}_{dS} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}dS = \Bigg/ \begin{matrix} u=\sqrt{S^2+\frac{3}{4}} & du = \dfrac{S}{\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}}dS \\ v = S & dv = dS \end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= \frac{1}{2}S\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{S^2}{\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}}dS = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{S^2+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}}dS =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}dS + \frac{3}{8}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dS}{\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}dS + \frac{3}{8}\ln\left(S+\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}dS + \frac{3}{8}\left(\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}+1\right)\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{S^2+\frac{3}{4}}dS + \frac{3}{8}\ln\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}.$$

Мы получили уравнение относительно $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{S^2 + \frac{3}{4}} dS$. Решив его, получим значение интеграла:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{S^2 + \frac{3}{4}} dS = \frac{3\sqrt{3} - 1}{4} + \frac{3}{8} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно,

$$M = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{S^2 + \frac{3}{4}} dS = \frac{3\sqrt{3} - 1}{8} + \frac{3}{16} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

3) Найти массу всей астроиды $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, если $\rho(x,y) = |xy|$.

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$$
$$y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$M = \int\limits_L \rho(x,y) dS = \int\limits_0^{2\pi} \left| a^2 \cos^3 t \sin^3 t \right| \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt.$$

Астроида симметрична относительно осей OX, OY. Плотность $\rho = |xy|$ также симметрична. Поэтому мы можем считать интеграл (массу астроиды) только в I квадранте, а затем домножить его на 4 :

$$M = 4 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^3 t \sin^3 t \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} dt =$$

$$= 4 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^3 t \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = 4 \cdot 3a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^4 t \cos^4 t dt =$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{16} a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 2t dt = \frac{3}{16} a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)^2 dt = \frac{3}{16} a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 4t + \cos^2 4t\right) dt =$$

$$= \frac{3}{32} \pi a^3 - \frac{3}{8} a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt + \frac{3}{32} a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 8t) dt =$$

$$= \frac{3}{32}\pi a^3 - \frac{3}{32}a^3 \underbrace{\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{3}{64}\pi a^3 + \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{32}a^3 \underbrace{\sin 8t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} = \frac{9}{64}\pi a^3.$$

4) Найти массу всей кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$, если $\rho(P) = k\sqrt{r}$.

$$M = \int\limits_L \rho dS = \int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{r}\cdot\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2}d\varphi =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a(1+\cos\varphi)}\cdot\sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1})}d\varphi =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} a\sqrt{a}\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\cos\varphi)d\varphi = ka\sqrt{2a}\Big(2\pi + \underbrace{\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{0}\Big) = 2k\pi a\sqrt{2a}.$$

5) Вычислить

$$\int\limits_L \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

где L – первый виток винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$.

$$x^2+y^2+z^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2 = a^2 + b^2t^2.$$

$$\int\limits_L \frac{dS}{a^2+b^2t^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a^2+b^2t^2}\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{a^2+b^2t^2}dt = \frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d(bt)}{(bt)^2+a^2} =$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{bt}{a}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{ab}\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{arctg}\frac{2\pi b}{a}.$$

6) Найти массу всей лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, если $\rho(P) = kr$.

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \;\Rightarrow\; r' = \frac{a}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot(-2\sin 2\varphi).$$

$$M = \int\limits_L \rho dS = \int\limits_0^{\pi} ka\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt{a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} ka\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt{a^2 \cdot \frac{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi = \int_0^{\pi} ka^2 d\varphi = \pi ka^2.$$

7) Найти массу дуги конической винтовой линии

$$x = ae^t \cos t,\ y = ae^t \sin t,\ z = ae^t,$$

если $\rho = ke^t$, от точки $O\,(0{,}0{,}0)$ до точки $A(a{,}0{,}a)$.

$$O\,(0,0,0) : \begin{cases} ae^t \cos t = 0 \\ ae^t \sin t = 0 \\ ae^t = 0 \end{cases} \Rightarrow\ t = -\infty.$$

$$A(a,0,a) : \begin{cases} ae^t \cos t = a \\ ae^t \sin t = 0 \\ ae^t = a \end{cases} \Rightarrow\ t = 0.$$

$$M = \int_L \rho dS = \int_{-\infty}^{0} ke^t\sqrt{(ae^t\cos t - ae^t \sin t)^2 + (ae^t \sin t + ae^t \cos t)^2 + (ae^t)^2}dt =$$

$$\Bigg/ \begin{array}{c} x'(t) = ae^t \cos t - ae^t \sin t \\ y'(t) = ae^t \sin t + ae^t \cos t \\ z'(t) = ae^t \end{array} \Bigg/$$

$$= k\int_{-\infty}^{0} e^t\sqrt{a^2e^{2t}(2\cos^2 t - 2\sin t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin t \cos t + 1)}dt =$$

$$= k\int_{-\infty}^{0} e^t \cdot a \cdot e^t \cdot \sqrt{3}dt = \sqrt{3}ka\int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}ka \cdot e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{2}ka.$$

3.3 Криволинейный интеграл 2 рода

В криволинейном интеграле 1-го рода на кривой задавалась скалярная функция$f(x,y)$. Теперь мы будем задавать на кривой векторную функцию $\vec{a}$.

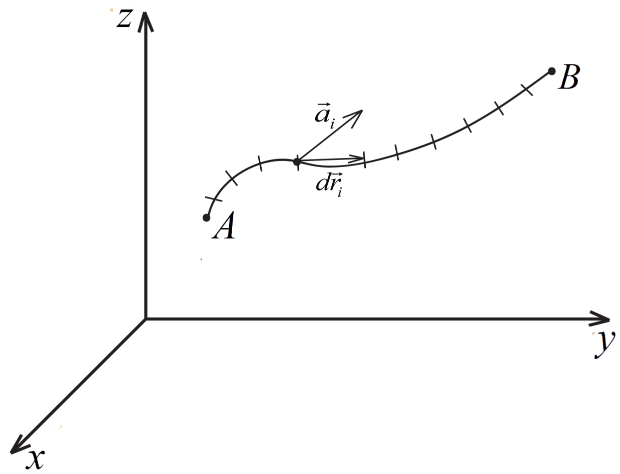

Рис. 36: На кривой AB задана векторная функция $\vec{a}$

В каждой точке кривой AB задан вектор $\vec{a}$. Разобьём кривую AB на части. Для каждой части дуги построим вектор перемещения $d\vec{r}_i$. Криволинейным интегралом 2-го рода по дуге AB называется

$$\int\limits_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \lim_{\max|d\vec{r}_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i$$

и обозначается

$$\int\limits_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{AB} (a_x dx + a_y dy + a_z dz).$$

Этот криволинейный интеграл 2-го рода называется линейным интегралом векторного поля $\vec{a}$ по кривой AB. В случае замкнутой кривой интеграл называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ по замкнутой кривойAB. *Физический смысл* линейного интеграла – работа силового поля $\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$ при перемещении в нём материальной точки по кривой AB из точки A в точку B.

3.4 Вычисление криволинейного интеграла 2 рода

Пусть заданы a_x, a_y, a_z. Кривая AB задана параметрически:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Тогда:

$$\int\limits_{AB} (\vec{a},d\vec{r}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_x(x(t),y(t),z(t))x'(t) + a_y(x(t)),y(t),z(t))y'(t) + a_z(x(t),y(t),z(t))z'(t))\, dt. \tag{3.6}$$

Свойство:

$$\int\limits_{BA} (\vec{a},d\vec{r}) = -\int\limits_{AB} (\vec{a},d\vec{r}).$$

Задачи

1) Найти работу силового поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$ при перемещении материальной точки вдаль первого витка конической винтовой линии

$$x = ae^t \cos t,\ y = ae^t \sin t,\ z = ae^t$$

из точки $A\,(0,0,0)$ в точку $B(a,0,a)$.

$$(\vec{F},d\vec{r}) = xdx + ydy + zdz \Leftrightarrow$$

$$\left/ \begin{array}{c} dx = ae^t(\cos t - \sin t)dt \\ dy = ae^t(\sin t + \cos t)dt \\ dz = ae^t dt \end{array} \right/$$

$$\Leftrightarrow (\vec{F},d\vec{r}) = a^2e^{2t}(\cos^2 t - \sin t\cos t + \sin^2 t + \sin t \cos t + 1)dt = 2a^2e^{2t}dt$$

Посмотрим, как меняется параметр t при перемещении по кривой из точки A в точку B.
$t = -\infty$ в точке A.
$t = 0$ в точке B.
Теперь можно вычислить значение интеграла:

$$\int\limits_{AB} (\vec{F},d\vec{r}) = 2a^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}dt = a^2e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} = a^2.$$

2) Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль эллипса $\frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2$, $y = x$ в положительном направлении (то есть против часовой стрелки) относительно орта $\vec{j}$.

Решение. Эллипс задан как сечение эллипсоида $\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2$ плоскостью $y=x$. Найдём их пересечение.

$$\frac{x^2+x^2}{2}+z^2=a^2 \ \Leftrightarrow \ x^2+z^2=a^2 \text{ – уравнение окружности на плоскости } XOZ.$$

В трехмерном пространстве эта окружность задает цилиндрическую поверхность. Ее пересечение с плоскостью $y=x$ дает искомую кривую интегрирования. Итак, наша кривая имеет вид:

$$\begin{cases} x^2+z^2=a^2 \\ y=x \end{cases}$$

Зададим ее параметрически:

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ z=a\sin\varphi \\ y=x=a\cos\varphi \end{cases}$$

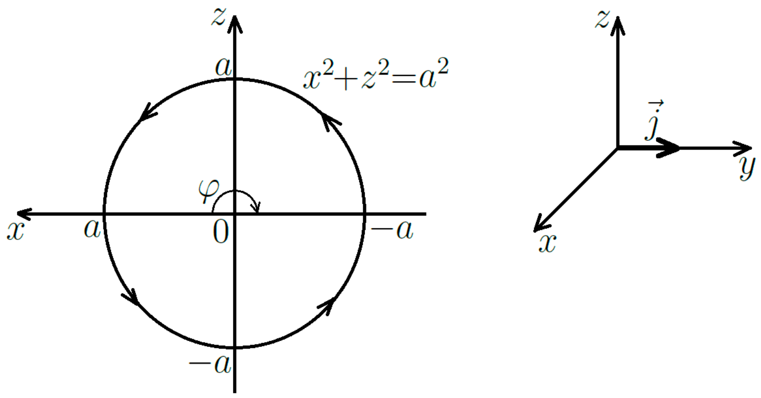

Рис. 37: Окружность $x^2+z^2=a^2$. Стрелками указано положительное направление обхода контура

Если смотреть со стороны орта $\vec{j}$, то при изменении угла φ от 0 до 2π кривая обходится по часовой стрелке (то есть в отрицательном направлении). Это означает, что интеграл следует взять со знаком минус. Окружность, изображенная на рисунке – это проекция эллипса на плоскость XOZ. Рисунок приведен для иллюстрации направления обхода контура при данном выборе полярных координат. Направление обхода контура

на эллипсе и на окружности будет одинаковым.
Для вычисления интеграла нам понадобится знать значения производных $x'_\varphi,\ y'_\varphi,\ z'_\varphi$:

$$x'_\varphi = y'_\varphi = -a\sin\varphi, \qquad z'_\varphi = a\cos\varphi.$$

С учетом вышеперечисленного, согласно формуле (3.6), циркуляция вектора $\vec{a}$ примет вид:

$$\oint\limits_C (\vec{a},d\vec{r}) = -\int\limits_0^{2\pi} (a\cos\varphi\cdot x'_\varphi - a\sin\varphi\cdot y'_\varphi + a\cos\varphi\cdot z'_\varphi)d\varphi =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} (-a^2\cos\varphi\sin\varphi + a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= -a^2\int\limits_0^{2\pi} (1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)d\varphi = -2\pi a^2 + \frac{1}{4}a^2\cos 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2.$$

3) Вычислить работу силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль сечения гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $(a,a,0)$ до точки $(a\sqrt{2},a\sqrt{2},a)$.
Решение.
Найдём пересечение гиперболоида $x^2+y^2-2z^2 = 2a^2$ с плоскостью $y = x$:

$$2x^2 - 2z^2 = 2a^2 \ \Leftrightarrow\ x^2 - z^2 = a^2.$$

Выберем в качестве параметра переменную x :

$$y = x,$$

$$z^2 = x^2 - a^2 \ \Leftrightarrow\ z = \pm\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Нас интересует кривая при $z \geqslant 0$, поэтому знак “$-$” отбрасываем: $z = \sqrt{x^2 - a^2}$. Посчитаем производные:

$$y'_x = x'_x = 1, \quad z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Итак, работа силового поля равна:

$$\oint\limits_C (\vec{F},d\vec{r}) = \int\limits_a^{a\sqrt{2}} (2x\cdot x + x^2 - x^2\cdot z'_x)dx =$$

$$= \int\limits_a^{a\sqrt{2}} \left(3x^2 - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) dx = x^3\Big|_a^{a\sqrt{2}} - \int\limits_a^{a\sqrt{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx =$$

/ Замена: $t = \sqrt{x^2 - a^2} \;\Leftrightarrow\; t^2 = x^2 - a^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 = t^2 + a^2$
$dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
Пределы изменения по $t : t_1 = 0,\; t_2 = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$ /

$$= a^3(2\sqrt{2} - 1) - \int\limits_0^a (t^2 + a^2)dt = a^3(2\sqrt{2} - 1) - \frac{t^3}{3}\Big|_0^a - a^2t\Big|_0^a = a^3\left(2\sqrt{2} - \frac{7}{3}\right)$$

4)

$$\oint\limits_C x^2ydx + x^3dy$$

где C – контур, ограниченный параболами $y^2 = x,\; x^2 = y$ и пробегаемый против часовой стрелки.

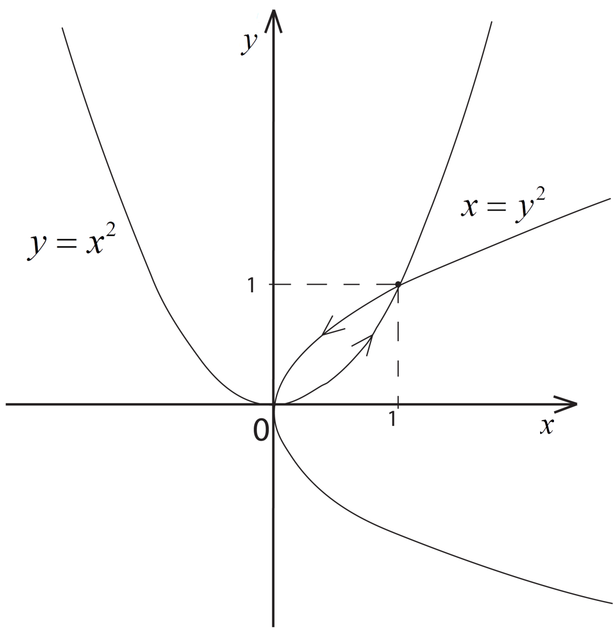

Рис. 38: К задаче 4

$$\oint\limits_C x^2ydx + x^3dy = \int\limits_{y=x^2} \left(x^2ydx + x^3dy\right) + \int\limits_{y=\sqrt{x}} \left(x^2ydx + x^3dy\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 \cdot x^2dx + x^3 \cdot 2xdx\right) + \int\limits_1^0 \left(x^2\sqrt{x}dx + x^3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 3x^4dx + \int\limits_1^0 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\right)dx = \frac{3}{5}x^5\Big|_0^1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$$

5) Теперь решим ту же задачу, заменив подынтегральное выражение.

$$\oint\limits_C (ydx + xdy)$$

$$C : \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\oint\limits_C (ydx + xdy) = \int\limits_{y=x^2} (ydx + xdy) + \int\limits_{y=\sqrt{x}} (ydx + xdy) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2dx + x \cdot 2xdx\right) + \int\limits_1^0 \left(\sqrt{x}dx + x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 3x^2dx + \int\limits_1^0 \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx = 1 + x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^0 = 1 - 1 = 0.$$

Общая теория гласит, что если под интегралом стоит полный дифференциал, то $\oint = 0$.

Ещё одно свойство: $\oint = 0 \Leftrightarrow \int\limits_A^B$ не зависит от формы кривой.

(можно взять любую кривую из точки A в точку B).

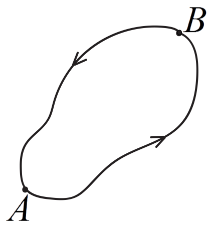

Рис. 39: Кривые из точки A в точку B

Для того, чтобы проверить, что под интегралом $\oint\limits_C a_x dx + a_y dy$ стоит полный дифференциал, нужно проверить следующее условие:

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}.$$

В трёхмерном случае для интеграла $\oint\limits_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$ нужно проверять 3 условия:

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}, \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial y}.$$

Эти условия вполне естественны. В самом деле, если $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$, то:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Замечание

Условие $\dfrac{\partial a_x}{\partial y} = \dfrac{\partial a_y}{\partial x}$ должно быть выполнено везде внутри области, ограниченной нашей кривой.

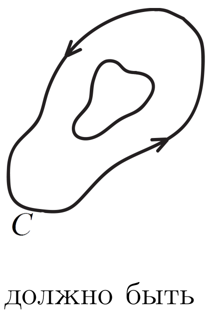

Рис. 40: Внутри области не должно быть выколотых точек, в которых мы не можем проверить условие

3.5 Восстановление функции по её полному дифференциалу

Пусть мы знаем дифференциал функции F :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Тогда

$$f(x,y) = \int\limits_L \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

где L – произвольная кривая, соединяющая некоторую фиксированную точку (x_0,y_0) с точкой (x,y), точка (x_0,y_0) выбирается произвольным образом. Единственное условие – чтобы в точке (x_0,y_0) не нарушилось условие существования дифференциала $\dfrac{\partial a_x}{\partial y} = \dfrac{\partial a_y}{\partial x}$.

6) Восстановить функцию $f(x,y)$ по её дифференциалу:

$$df = (y + \ln(x+1))dx + (x + 1 - e^y)dy \tag{3.7}$$

$$a_x = y + \ln(x+1)$$

$$a_y = x + 1 - e^y$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = 1 = \frac{\partial a_y}{\partial x},$$

тем самым, мы проверили, что (3.7) – это полный дифференциал. Выбираем начальную точку и кривую интегрирования:

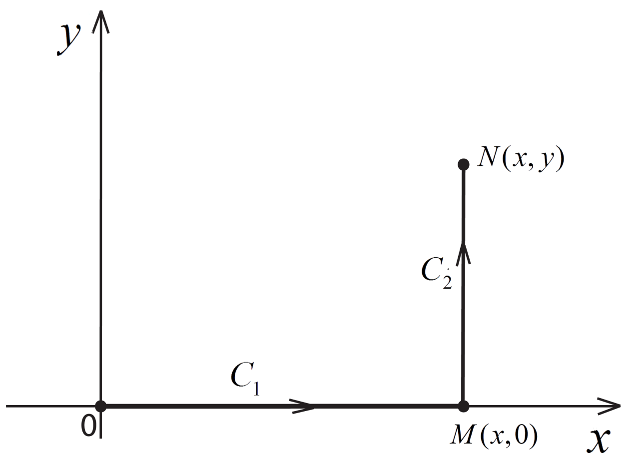

Рис. 41: К задаче 6

В качестве точки (x_0,y_0) возьмем $(0,0)$.

$$f(x,y)=\int\limits_{OMN}(y+\ln(x+1))dx+(x+1-e^y)dy=$$

$$=\int\limits_{OM}(\underbrace{y}_{=0}+\ln(x+1))dx+(x+1-e^y)\underbrace{dy}_{=0}+\int\limits_{MN}(y+\ln(x+1))\underbrace{dx}_{=0}+(x+1-e^y)dy=$$

$$=\int\limits_0^x\ln(x+1)dx+\int\limits_0^y(x+1-e^y)dy=\Big/\begin{matrix}u=\ln(x+1) & du=\frac{1}{x+1}dx\\ v=x & dv=dx\end{matrix}\Big/$$

$$=x\ln(x+1)\Big|_0^x-\int\limits_0^x\frac{x}{x+1}dx+(x+1)y\Big|_0^y-e^y\Big|_0^y=$$

$$=x\ln(x+1)-\int\limits_0^x\frac{x+1-1}{x+1}dx-e^y+1+(x+1)y=$$

$$=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+(x+1)y-e^y+1+C.$$

7) Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy,$$

где C – контур, образованный полуокружностью $y=\sqrt{r^2-x^2}$ и осью OX.

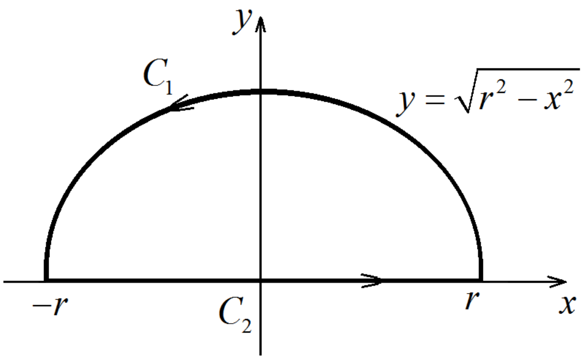

Рис. 42: Контур интегрирования

$$\oint\limits_{C} (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = \oint\limits_{C_1} (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy +$$

$$+ \oint\limits_{C_2} (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = \Big/ \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right. \Big/ =$$

$$= \int\limits_0^\pi ((r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)(-r\sin\varphi) + r^2 \cdot r\cos\varphi)d\varphi + \int\limits_{-r}^{r} x^2 dx =$$

$$= r^3 \int\limits_0^\pi (-\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi + \cos\varphi)d\varphi + \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-r}^{r} =$$

$$= r^3 \int\limits_0^\pi \cos^2\varphi d(\cos\varphi) + r^3 \int\limits_0^\pi \sin^2\varphi d(-\cos\varphi) + r^3 \int\limits_0^\pi \cos\varphi d\varphi + \frac{2}{3}r^3 =$$

$$= \frac{r^3}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^\pi + r^3 \int\limits_0^\pi (\cos^2\varphi - 1)d(\cos\varphi) + r^3\sin\varphi\Big|_0^\pi + \frac{2}{3}r^3 = \frac{4}{3}r^3.$$