Глава 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

6.1 Функция одной переменной

Если каждой точке $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое единственное число $f(x)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

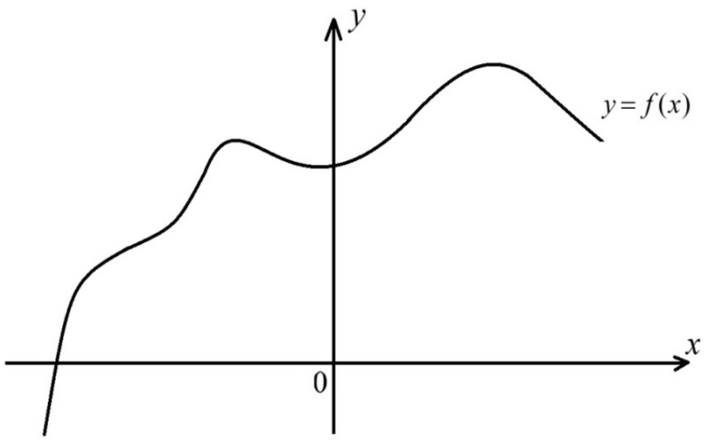


Рис. 21: Функция одной переменной $y = f(x)$

Множество D называется областью определения. Множество $E = \{f(x) \in \mathbb{R},\ x \in D\}$ называется областью значений функции $f(x)$.

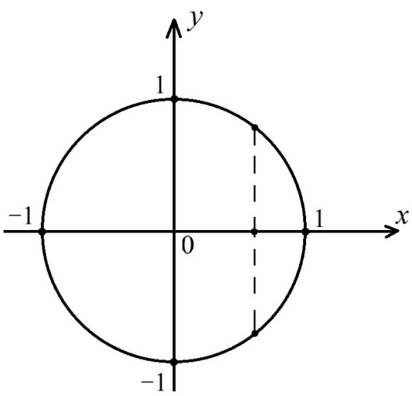


Рис. 22: Единичная окружность

Решение уравнения $x^2+y^2 = 1$ не является функцией, так как одному значению x отвечают два значения y.

Уравнение $y = x^2$ задает функцию $y = f(x)$ (каждому значению x соответствует единственное значение y), но не задает функцию $x = \varphi(y)$ (каждому положительному значению y соответствуют два значения x).

Таким образом, функция является однозначным соответствием множеств D и E, но не является их взаимно однозначным соответствием.

6.2 Функция нескольких переменных

Напомним, что всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ называется точкой пространства $\mathbb{R}^n$. Расстояние между точками $P\,(x_1, \ldots, x_n)$ и $P'\,(x_1', \ldots, x_n')$ определяется формулой:

$$\rho\,(P, P') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное множество точек n-мерного пространства. Если каждой точке $P\,(x_1, \ldots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое (вещественное) число $f(P) = f\,(x_1, \ldots, x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Множество D называется областью определения, множество $E = \{u \in \mathbb{R} : u = f(P), P \in D\}$ называется областью значений функции $u = f(P)$. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$.

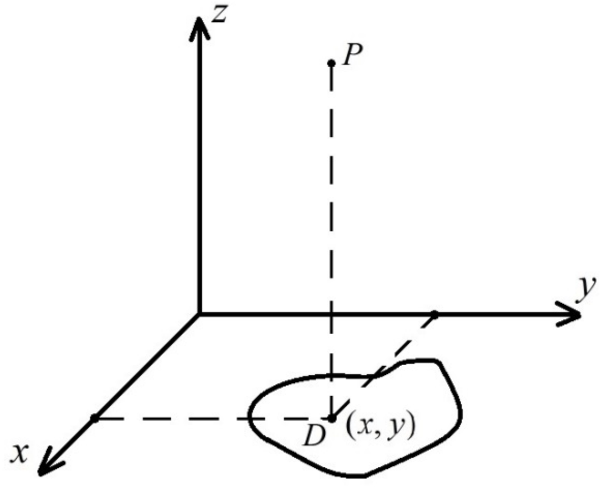


Рис. 23: График функции $z = f(x, y)$

Графиком этой функции называется следующее множество точек: $\Gamma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y)\big\}$. Таким образом, график функции представляет из себя некоторую поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Пример

Найти область определения функции $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

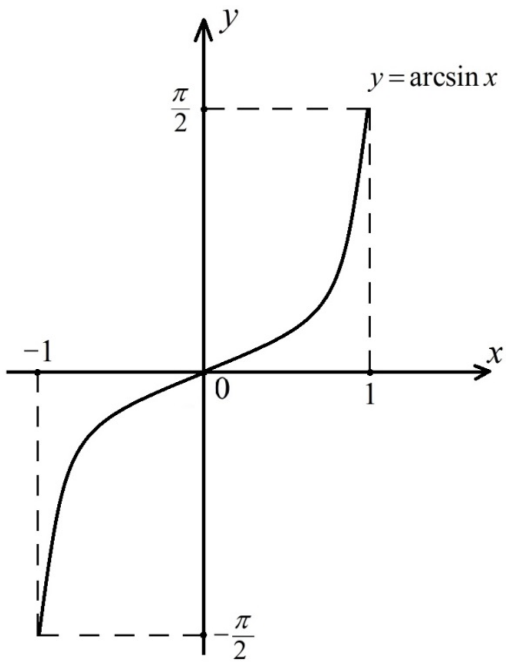


Рис. 24: График функции $y = \arcsin x$

Область определения функции:

$D(\arcsin x) = [-1, 1]$.

Функция определена при:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Напишем подробно условия, при которых функция определена:

$$\frac{y}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x, \text{ при } \quad x > 0 \\ y \geq x, \text{ при } \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x, \text{ при } \quad x > 0 \\ y \leq -x, \text{ при } \quad x < 0 \end{cases}$$

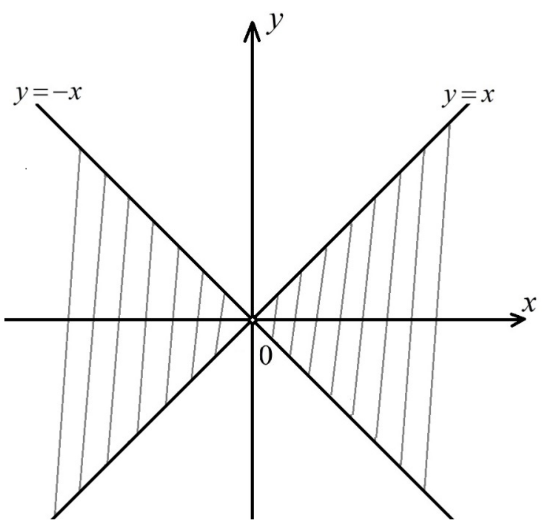


Рис. 25: Область определения $D(z)$

Задачи. Найти области определения функций двух переменных.

6.1) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$R^2 - x^2 - y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \leq R^2$

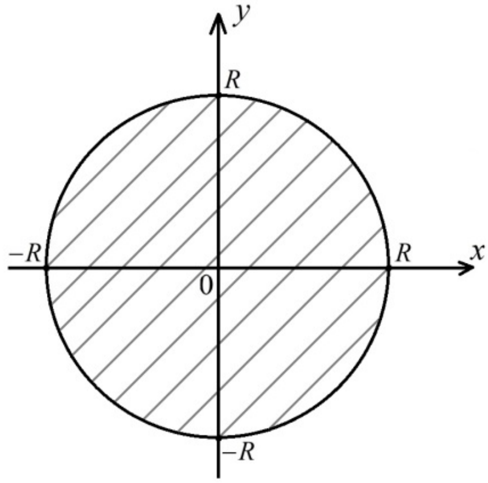


Рис. 26: Область определения $D(z)$

6.2) $z = \ln(-x - y)$

$-x - y > 0 \;\Leftrightarrow\; y < -x$

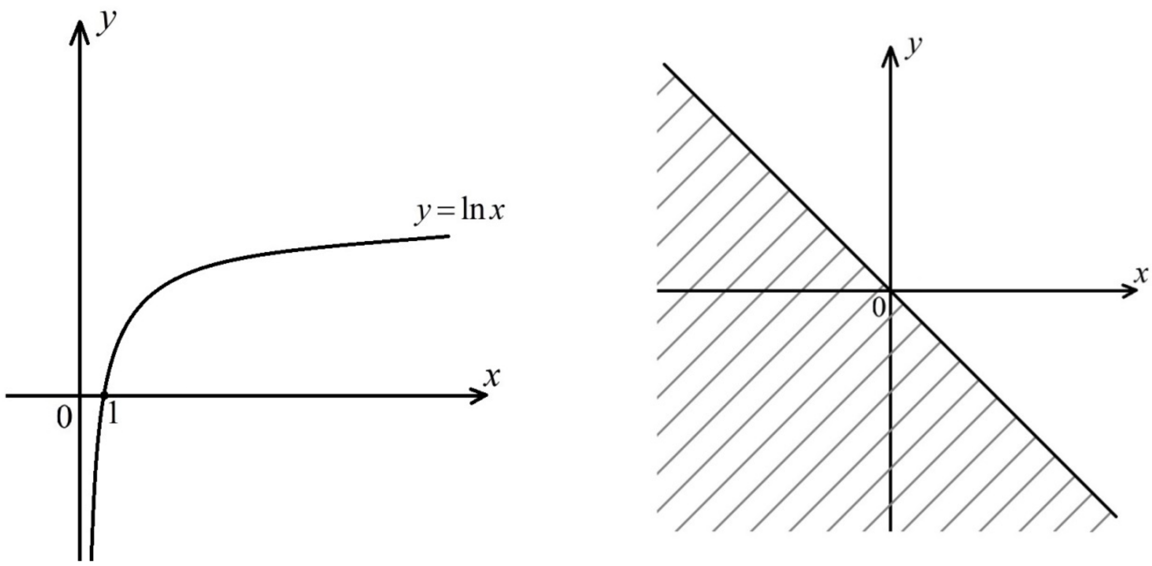
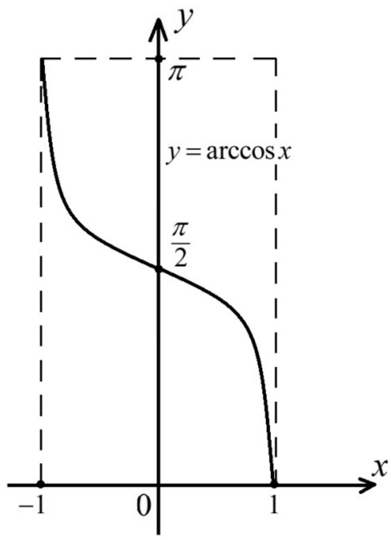


Рис. 27: Слева: график функции $y = \ln x$. Справа: область определения функции $z = \ln(-x - y)$

6.3) $z = \arccos \dfrac{x}{x + y}$



$D(\arccos x) = [-1, 1]$.

Тогда область определения функции

$z = \arccos \dfrac{x}{x+y}$:

$$D(z) = \begin{cases} -1 \le \frac{x}{x+y} \le 1 \\ y \ne -x \end{cases}$$

Рис. 28: График функции $y = \arccos x$

$$\frac{x}{x+y} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le x+y, \text{ если } x+y>0 \\ x \ge x+y, \text{ если } x+y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \text{ при } x+y>0 \\ y \le 0 \text{ при } x+y<0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x+y} \ge -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -x-y, \text{ если } x+y>0 \\ x \le -x-y, \text{ если } x+y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -2x \text{ при } x+y>0 \\ y \le -2x \text{ при } x+y<0 \end{cases}$$

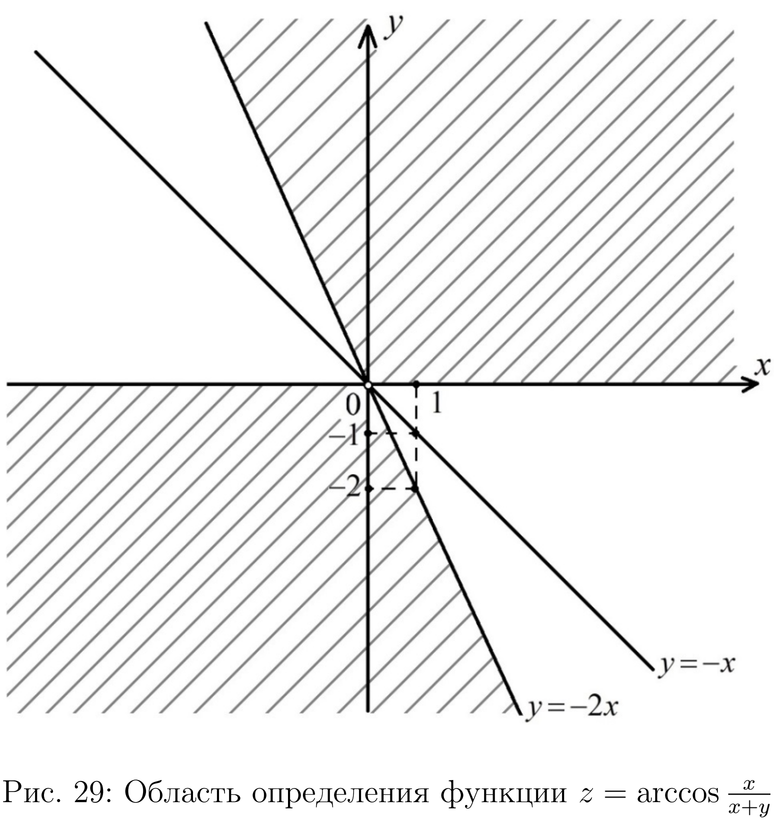


Рис. 29: Область определения функции $z = \arccos \frac{x}{x+y}$

6.3 Частные производные

Пусть задана некоторая функция нескольких переменных. Найдем от нее частные производные первого и второго порядков.

6.4) $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$

Считая, что $y = const$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 15x^2y^3$$

Считая, что $x = const$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4 - 15y^2x^3$$

Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 20x^3 - 30xy^3$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 20y^3 - 30yx^3$$
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = -45y^2x^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = -45x^2y^2 \end{array}\right\} \text{Смешанные частные производные}$$

Как видим, результат многократного дифференцирование не зависит от очередности дифференцирования (при условии, что возникающие при этом смешанные частные производные непрерывны (как функции двух переменных)).

6.5) $z = xy + \dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-1}\right) = y - \frac{y}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

6.6) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} + yx\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y\cdot x^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y+y^3-yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = -\frac{3xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y = -\frac{3yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = 3x^2\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+x^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = \frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-3x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

6.7) $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\cdot\left(-\sin y^2\right)\cdot 2y = -\frac{2y\sin y^2}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\cos y^2}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2\sin y^2}{x} - \frac{2y}{x}\cdot\cos y^2\cdot 2y = -\frac{2\sin y^2+4y^2\cos y^2}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y\sin y^2}{x^2}$$

6.8) $z = y^x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x (\ln y)^2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \cdot y^{x-1}\right) = y^{x-1} + x \cdot y^{x-1} \ln y$$

6.9) $z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \left(y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right) = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|} \cdot \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= -\frac{y}{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{|x|} = \Big/ \frac{x}{|x|} = sign(x) \Big/ = -\frac{y \cdot sign(x)}{x^2+y^2} \quad \text{при } x \neq 0.$$

При $x = 0$ значение $\frac{\partial z}{\partial x}$ не определено.

Здесь $sign(x) = \begin{cases} 1, \ \text{при } x > 0, \\ 0, \ \text{при } x = 0, \\ -1, \ \text{при } x < 0. \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|} \cdot \left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$
$$\left. + y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|} \cdot \frac{x^2+y^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|x|}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \cdot sign\,(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{-1} = \frac{y \cdot sign\,(x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot 2x \qquad /sign\,(x) \cdot 2x = 2\,|x|/$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = |x| \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)^{-1} = -\frac{2y\,|x|}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = sign(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-1}\right) = sign(x) \cdot \frac{1}{x^2+y^2} +$$
$$+ sign(x) \cdot x \cdot \frac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\left(y^2-x^2\right) \cdot sign(x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

6.10) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2x \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} = -x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) 2y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

6.11) $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-z}\right) = -zy^z x^{-z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{-z}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^z\right) = zx^{-z}y^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z(z+1)y^z x^{-z-2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z(z-1)x^{-2}y^{z-2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \ln^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -z^2 x^{-z-1}y^{z-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -zy^z x^{-z-1} \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z \left(z\ln\left(\frac{y}{z}\right)+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = z \cdot x^{-z}y^{z-1} \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

6.4 Дифференциал функции одной переменной

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$.

Приращение для такой функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$