$$\Big/ u = t, \quad du = dt, \quad v = e^t, \quad dv = e^t dt \Big/$$

$$\Leftrightarrow\ u = \operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + C \ \Leftrightarrow\ \underline{x = \operatorname{arctg} y - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} y}.}$$

15) $\begin{cases} 3dy = (1-3y^3)y\sin x dx, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$

$$3\frac{dy}{dx} = y\cdot\sin x - 3y^4\cdot\sin x \ \Leftrightarrow\ y' = \frac{1}{3}y\cdot\sin x - y^4\cdot\sin x \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y' - \frac{1}{3}\sin x\cdot y = -\sin x\cdot y^4 \ \Leftrightarrow$$

$$\Big/ \text{Замена: } y = u\cdot e^{-\int -\frac{1}{3}\sin x dx} \ \Leftrightarrow\ y = u\cdot e^{-\frac{1}{3}\cos x}.$$

$$\text{Соответственно, } y' = u'\cdot e^{-\frac{1}{3}\cos x} + u\cdot e^{-\frac{1}{3}\cos x}\cdot\frac{1}{3}\sin x \Big/$$

$$\Leftrightarrow u'e^{-\frac{1}{3}\cos x} + \cancel{\frac{1}{3}\sin x\cdot ue^{-\frac{1}{3}\cos x}} - \cancel{\frac{1}{3}\sin x\cdot ue^{-\frac{1}{3}\cos x}} = -\sin x\cdot u^4 e^{-\frac{4}{3}\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{du}{dx} = -u^4\cdot\sin x\cdot e^{-\cos x} \ \Leftrightarrow\ \frac{du}{u^4} = -\sin x\cdot e^{-\cos x}dx \ \Big|\ \text{проинтегрируем}$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{3u^3} = \int e^{-\cos x}d(\cos x) \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{3u^3} = -(e^{-\cos x} + C) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ u^3 = \frac{1}{3e^{-\cos x} + 3C} \ \Leftrightarrow\ y^3 = \frac{e^{-\cos x}}{3e^{-\cos x} + 3C}.$$

Постоянную C найдем из начального условия:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ \Leftrightarrow\ y^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{e^{-\cos\frac{\pi}{2}}}{3e^{-\cos\frac{\pi}{2}} + 3C} = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3+3C} = 1 \ \Leftrightarrow\ 3 + 3C = 1 \ \Leftrightarrow\ 3C = -2 \Leftrightarrow\ C = -\frac{2}{3}.$$

$$y^3 = \frac{e^{-\cos x}}{3e^{-\cos x} - 2} \ \Leftrightarrow\ y^3 = \frac{1}{3 - 2e^{\cos x}} \ \Leftrightarrow\ \underline{y = \left(\frac{1}{3 - 2e^{\cos x}}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

7.5 Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Решаются с помощью n-кратного интегрирования.

Пример 1

Решим следующее уравнение: $y'' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Тогда $y' = \operatorname{tg} x + C_1$,

$$y = \int \operatorname{tg} x dx + C_1 x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + C_1 x = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + C_1 x =$$
$$= -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2.$$

Найдём частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{(Уравнение + начальные условия = задача Коши)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + C_1\frac{\pi}{4} + C_2 = \frac{\ln 2}{2} \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + C_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 - \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 + \cancel{\frac{1}{2}\ln 2} = \cancel{\frac{\ln 2}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, частное решение: $y = -\ln|\cos x|$.

2. Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0.$

Решаются с помощью замены: $y^{(k)} = p(x)$.

Пример 2

Решим уравнение: $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.

$\Big/$ Замена: $y'' = p$. Соответственно, $y''' = \dfrac{dp}{dx}$ $\Big/$

В новых переменных уравнение примет вид:

$x^4 \dfrac{dp}{dx} + 2x^3 p = 1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dp}{dx} + \dfrac{2}{x} \cdot p = \dfrac{1}{x^4}$ – линейное уравнение 1-го порядка

$\Big/$ Замена: $p = ue^{-\int \frac{2}{x} dx} \;\Leftrightarrow\; p = ue^{-2\ln|x|} \;\Leftrightarrow\; p = u \cdot |x|^{-2} \;\Leftrightarrow\; p = \dfrac{u}{x^2}$ $\Big/$

Тогда $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{2u}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}u'$.

Подставим p и $\frac{dp}{dx}$ в исходное уравнение:

$$\cancel{-\frac{2u}{x^3}} + \frac{1}{x^2}u' + \cancel{\frac{2}{x} \cdot \frac{u}{x^2}} = \frac{1}{x^4} \;\Leftrightarrow\; u' = \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; u = -\frac{1}{x} + C_1.$$

Вернемся к старым переменным.

$$p = \frac{u}{x^2} = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2} \;\Rightarrow\; y'' = p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y' = \frac{1}{2x^2} - \frac{C_1}{x} + C_2 \;\Rightarrow\; \underline{y = -\frac{1}{2x} - C_1 \ln|x| + C_2 x + C_3.}$$

3. Уравнения вида $F(y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0.$

Решаются с помощью подстановки: $y' = p(y)$.

Соответственно, старшие производные примут вид:

$$y'' = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{=p} = \frac{d}{dx}\left(p(y)\right) = \frac{dp}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p} = \underline{p\frac{dp}{dy}}.$$

$$y''' = \left(p(y)\frac{dp}{dy}\right)'_x = p'_x\frac{dp}{dy} + p(y)\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \Big/ p'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}\Big/ =$$
$$= \frac{dp}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p}\cdot\frac{dp}{dy} + p(y)\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p} = \underline{p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}}.$$

Пример 3

$$y'\cdot y''' - 3(y'')^2 = 0$$

Сделаем подстановки:

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}.$$

Уравнение в новых переменных примет следующий вид:

$$p\cdot\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; p^3\frac{d^2p}{dy^2} - 2p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0 \;\Bigg|\; \cdot\frac{1}{p^2} \leftarrow \text{здесь теряем решение } p = 0 \Leftrightarrow y = C$$
$$\Leftrightarrow\; p\frac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Повторяем процедуру. Сделаем подстановки:

$$\frac{dp}{dy} = z, \quad \frac{d^2p}{dy^2} = z\frac{dz}{dp}.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$pz\frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0 \quad \Big| \cdot\frac{1}{z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Big/ \text{ здесь теряем решение } z = \frac{dp}{dy} = 0 \;\Leftrightarrow\; p = C_1 \;\Leftrightarrow\; y = C_1x + C_2 \Big/$$

$$\Leftrightarrow\; p\frac{dz}{dp} - 2z = 0 \;\Leftrightarrow\; pdz - 2zdp = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{dz}{z} = \frac{2dp}{p} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \ln|z| = 2\ln|p| + C \;\Leftrightarrow\; \ln|z| = \ln p^2 + \ln C_1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; z = \frac{dp}{dy} = C_1p^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{dp}{p^2} = C_1dy \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{p} = C_1y + C_2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \Big/\; y' = p \;\Big/ \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{y'} = C_1y + C_2 \;\Leftrightarrow\; -\frac{dx}{dy} = C_1y + C_2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -dx = C_1y \cdot dy + C_2dy \;\Leftrightarrow\; -x = C_1\frac{y^2}{2} + C_2y + C_3 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \underline{x = \tilde{C}_1y^2 + \tilde{C}_2y + \tilde{C}_3.}$$

Заметим, что в это решение входит потерянное ранее частное решение ($y = C_1x + C_2$). Однако, $y = C$ в решение не входит и нужно добавить его в ответ.

<u>Ответ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \tilde{C}_1y^2 + \tilde{C}_2y + \tilde{C}_3, \\ y = C. \end{array}\right.$

<u>Решите самостоятельно:</u>

16) $y'' = x + \sin x$.

17) $y'' + 2x\,(y')^2 = 0$.

18) $xy'' - y' - x\sin\frac{y'}{x} = 0$.

19) $(2y + y')\,y'' = (y')^2$.

20) Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} \frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1+y^2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Разбор задач 16–20

16) $y'' = x + \sin x \;\Leftrightarrow\; y' = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \;\Leftrightarrow\; \underline{y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.}$

17) $y'' + 2x\,(y')^2 = 0.$

Замена: $y' = p(x)$. Соответственно, $y'' = \frac{dp}{dx}$.

Подставим y' и y'' в уравнение:

$$\frac{dp}{dx} + 2xp^2 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{p^2} \leftarrow \text{теряем решение } p = 0 \text{ (или } y = C\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{dp}{p^2} = -2x dx \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{p} = -x^2 + C \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{y'} = -x^2 + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{dx}{dy} = x^2 - C \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dx}{x^2 - C} = \int dy.$$

Здесь возможны 3 варианта для постоянной C :

$$C = -C_1^2 < 0 : \; \int \frac{dx}{x^2 + C_1^2} = \int dy \;\Leftrightarrow\; \underline{y = \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{C_1}\right) + C_2.}$$

$$C = 0 : \; \int \frac{dx}{x^2} = \int dy \;\Leftrightarrow\; \underline{y = -\frac{1}{x} + C.}$$

$$C = C_1^2 > 0 : \; \int \frac{dx}{x^2 - C_1^2} = \int dy \;\Leftrightarrow\; \underline{y = \frac{1}{2C_1} \ln\left|\frac{x - C_1}{x + C_1}\right| + C_2.}$$

18) $xy'' - y' - x \sin \dfrac{y'}{x} = 0.$

Замена: $y' = p(x)$. Соответственно, $y'' = \frac{dp}{dx}$.

Подставим y' и y'' в уравнение:

$$x\frac{dp}{dx} - p - x \sin \frac{p}{x} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} - \sin \frac{p}{x} - \frac{p}{x} = 0 \text{ – однородное уравнение 1-го порядка}$$

Замена: $\frac{p}{x} = u \Leftrightarrow p = ux$ Соответственно, $p' = u'x + u$.

$$u'x + \cancel{u} - \sin u - \cancel{u} = 0$$

$$\frac{du}{dx} x = \sin u \,\Big| \cdot \frac{1}{\sin u} \text{ – здесь теряем решение } \sin u = 0$$

$$\Big/ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = \pi k \Leftrightarrow \frac{p}{x} = \pi k \Leftrightarrow y' = p = \pi k x \Leftrightarrow y = \frac{\pi k x^2}{2} + C \Big/$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \ \Big| \text{ Проинтегрируем}$$

$$\Leftrightarrow \ \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + C \ \Leftrightarrow \ \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{x}\right| = \ln C_1 \ \Leftrightarrow \ \frac{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{x} = C_1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \operatorname{tg}\frac{u}{2} = C_1 x \ \Leftrightarrow \ u = 2\operatorname{arctg}(C_1 x) \ \Leftrightarrow \ \frac{p}{x} = 2\operatorname{arctg}(C_1 x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ p = 2x\operatorname{arctg}(C_1 x) \ \Leftrightarrow \ y' = 2x\operatorname{arctg}(C_1 x).$$

$$y = 2\int x\operatorname{arctg}(C_1 x)dx =$$

$$\Bigg/ \begin{matrix} u = \operatorname{arctg}(C_1 x) & du = \frac{1}{1+C_1^2x^2}\cdot C_1 dx \\ v = \frac{x^2}{2} & dv = xdx \end{matrix} \Bigg/$$

$$= 2\cdot\operatorname{arctg}(C_1 x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{C_1 x^2}{1+C_1^2x^2}dx =$$

$$= x^2\operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{1}{C_1}\int\frac{C_1^2x^2+1-1}{1+C_1^2x^2}dx =$$

$$= x^2\operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1}\int\frac{dx}{1+C_1^2x^2} =$$

$$= x^2\operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1^2}\int\frac{dC_1x}{1+(C_1x)^2} =$$

$$= x^2\operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1^2}\operatorname{arctg}(C_1 x) + C_2$$

$+$ потерянное решение: $y = \dfrac{\pi k x^2}{2} + C.$

<u>Ответ:</u> $\left[\begin{array}{l} y = x^2\operatorname{arctg}(C_1x) - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1^2}\operatorname{arctg}(C_1x) + C_2, \\ y = \frac{\pi k x^2}{2} + C. \end{array}\right.$

19) $(2y + y')\,y'' = (y')^2$

Сделаем подстановку: $y' = p(y)$. Соответственно, $y'' = p\frac{dp}{dy}$.

Подставим y' и y'' в уравнение:

$$(2y+p)p\frac{dp}{dy} = p^2 \ \Big| \cdot\frac{1}{p} \leftarrow \text{ здесь теряем решение } p = 0 \text{ (или } y = C)$$

$$\Leftrightarrow\ 2y\frac{dp}{dy}+p\frac{dp}{dy}=p\ \Leftrightarrow\ 2\frac{y}{p}\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dy}=1\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{\left(\frac{p}{y}\right)}\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dy}=1.$$

Мы получили однородное уравнение. Сделаем замену переменной: $\frac{p}{y}=u\ \Leftrightarrow\ p=uy$. Соответственно, $p'=u'y+u$. Уравнение в новых переменных примет следующий вид:

$$\frac{2}{u}\left(u'y+u\right)+u'y+u=1\ \Leftrightarrow\ \left(1+\frac{2}{u}\right)\left(\frac{du}{dy}y+u\right)=1\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{u+2}{u}\right)\left(\frac{du}{dy}y+u\right)=1\ \Leftrightarrow\ \frac{du}{dy}y=\frac{u}{u+2}-u\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ du=\frac{u-u^2-2u}{u+2}\cdot\frac{dy}{y}\ \Leftrightarrow\ -\frac{u+2}{u(u+1)}du=\frac{dy}{y}\ \Big|\ \text{Проинтегрируем}$$

Вычислим интеграл $\int\frac{u+2}{u(u+1)}du$:

$$\int\frac{u+2}{u(u+1)}du=\int\frac{A}{u}du+\int\frac{B}{u+1}du=$$
$$\Big/A(u+1)+Bu=u+2$$
$$u=0:A=2$$
$$u=-1:-B=1\Leftrightarrow B=-1\Big/$$
$$=\int\frac{2}{u}du-\int\frac{du}{u+1}=2\ln|u|-\ln|u+1|+C.$$

Подставим в уравнение полученное выражение для интеграла:

$$-\ln|y|=2\ln|u|-\ln|u+1|+C\ \Leftrightarrow\ \ln|u|^2-\ln|u+1|+\ln|y|=\ln C_1\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \ln\left|\frac{u^2}{u+1}\cdot y\right|=\ln C_1\ \Leftrightarrow\ y=C_1\left(\frac{u+1}{u^2}\right)=\frac{C_1}{u}+\frac{C_1}{u^2}\ \Leftrightarrow\ \Big/u=\frac{p}{y}\Big/\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ y=\frac{C_1}{\left(\frac{p}{y}\right)}+\frac{C_1}{\left(\frac{p}{y}\right)^2}\ \Leftrightarrow\ y\cdot\frac{p^2}{y^2}=C_1\frac{p}{y}+C_1\ \Leftrightarrow\ \frac{p^2}{y}-\frac{C_1}{y}p-C_1=0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ p^2-C_1p-C_1y=0\ \Leftrightarrow\ p=y'=\frac{C_1\pm\sqrt{C_1^2+4C_1y}}{2}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2\frac{dy}{dx}=C_1\pm\sqrt{C_1^2+4C_1y}\ \Leftrightarrow$$
$$\int\ \Bigg|\ \frac{dy}{C_1\pm\sqrt{C_1^2+4C_1y}}=\frac{1}{2}dx\ \Leftrightarrow\ \int\frac{dy}{C_1\pm\sqrt{C_1^2+4C_1y}}=\frac{x}{2}+C_2$$

Замена: $t = \sqrt{C_1^2 + 4C_1 y}$:

$$dt = \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{C_1^2 + 4C_1 y}}_{=t}} \cdot 4C_1 dy = \frac{2C_1}{t} dy \;\Leftrightarrow\; dy = \frac{tdt}{2C_1}$$

В новых переменных уравнение примет следующий вид:

$$\int \frac{tdt}{2C_1(C_1 \pm t)} = \frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{C_1} \int \frac{tdt}{C_1 \pm t}$$

$$\int \frac{tdt}{C_1 + t} = \int \frac{(t + C_1)}{t + C_1} dt - C_1 \int \frac{dt}{t + C_1} = t - C_1 \ln|t + C_1| + C_2$$

$$\int \frac{tdt}{C_1 - t} = -\int \frac{(t - C_1 + C_1)\, dt}{t - C_1} = -\int dt - C_1 \int \frac{dt}{t - C_1} =$$

$$= -t - C_1 \ln|t - C_1| + C_2$$

Итак, решение уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{C_1}\left(t - C_1 \ln|t + C_1| + C_2\right), \\ x = \frac{1}{C_1}\left(-t - C_1 \ln|t - C_1| + C_2\right). \end{array} \right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{C_1}\left(\sqrt{C_1^2 + 4C_1 y} - C_1 \ln\left|\sqrt{C_1^2 + 4C_1 y} + C_1\right| + C_2\right), \\ x = \frac{1}{C_1}\left(-\sqrt{C_1^2 + 4C_1 y} - C_1 \ln\left|\sqrt{C_1^2 + 4C_1 y} - C_1\right| + C_2\right). \end{array} \right.$

20) Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} \frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1+y^2}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Сделаем подстановки: $y' = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}$. Подставим y' и y'' в уравнение:

$$\frac{p\frac{dp}{dy}}{p} = \frac{2yp}{1 + y^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{dp}{dy} \cdot \frac{1}{p} = \frac{2y}{1 + y^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{dp}{p} = \frac{2y}{1 + y^2} dy \;\Big|\; \text{Проинтегрируем}$$

$$\Leftrightarrow\; \ln|p| = \int \frac{2ydy}{1 + y^2} \;\Leftrightarrow\; \ln|p| = \int \frac{d\left(y^2\right)}{1 + y^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \ln|p| = \ln\left(1+y^2\right) + \widetilde{C_1} \ \Leftrightarrow \ln\left|\frac{p}{1+y^2}\right| = \ln C_1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{p}{1+y^2} = C_1 \ \Leftrightarrow \ p = C_1\left(1+y^2\right) \ \Leftrightarrow \ y' = C_1\left(1+y^2\right)$$

Постоянную C_1 определим из начального условия:

$$y'(0) = 1 \ \Leftrightarrow \ C_1\left(1+y(0)^2\right) = 1 \ \Leftrightarrow \ \Big/ y(0) = 0 \Big/ \ \Leftrightarrow \ C_1 = 1.$$

Следовательно, уравнение примет вид:

$$y' = 1 + y^2 \ \Leftrightarrow \ \frac{dy}{1+y^2} = dx \ \Big| \ \text{Проинтегрируем}$$

$$\Leftrightarrow \ \operatorname{arctg} y = x + C \ \Leftrightarrow \ y = \operatorname{tg}(x + C).$$

Постоянную C определим из начального условия:

$$y(0) = 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{tg} C = 0 \ \Leftrightarrow \ C = 0.$$

Ответ: $\underline{y = \operatorname{tg} x.}$

7.6 Линейные однородные уравнения

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{7.11}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка. Любой набор из n линейно независимых решений $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots\ldots, y_n(x)$ уравнения (7.11) называется фундаментальной системой решений этого уравнения. Общее решение уравнения (7.11) имеет вид: $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ \ldots\ldots \ + C_ny_n(x)$, где $C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots, C_n$ – произвольные *const*.

Как проверить линейную независимость решений $y_1(x),\ \ldots\ldots, y_n(x)$?

С помощью определителя Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots\ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots\ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$