$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2 \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \operatorname{rot}\vec{A} = -3x^2y^2 \cdot \vec{k}.$$

Тогда поток $\operatorname{rot}\vec{A}$ равен:

$$\iint\limits_G \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma = -3\iint\limits_G x^2y^2dxdy = -3\cdot \int\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^2y^2dxdy =$$

$$= \Big/ \left\{\begin{array}{l} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{array}\right. \Big/ = -3\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi\cdot rdr =$$

$$= -3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot \underbrace{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}_{=\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi}\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_0^a = -\frac{a^6}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{4}\underbrace{\sin^2 2\varphi}_{=\frac{1-\cos 4\varphi}{2}}d\varphi =$$

$$= -\frac{a^6}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi = -\frac{a^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{\frac{a^6}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{=0} = -\frac{\pi}{8}a^6.$$

Результаты совпали, то есть мы проверили выполнение теоремы Стокса.

5.21 Теорема Остроградского-Гаусса

При изучении криволинейных интегралов была доказана теорема Грина, связывающая криволинейный интеграл 2 рода с двойным. Ее аналогом в трехмерном пространстве является теорема Остроградского-Гаусса, связывающая поверхностный интеграл 2 рода с тройным.

Рассмотрим цилиндрическое тело Ω, ограниченное кусочно-гладкими поверхностями $G_1 : \ z = z_1(x,y)$ и $G_2 : \ z = z_2(x,y)$ снизу и сверху соответственно и цилиндрической поверхностью G_3 сбоков, образующие которой параллельны оси OZ. Проекцией тела Ω на плоскость XOY является область D, ограниченная контуром $\mathcal{L}$.

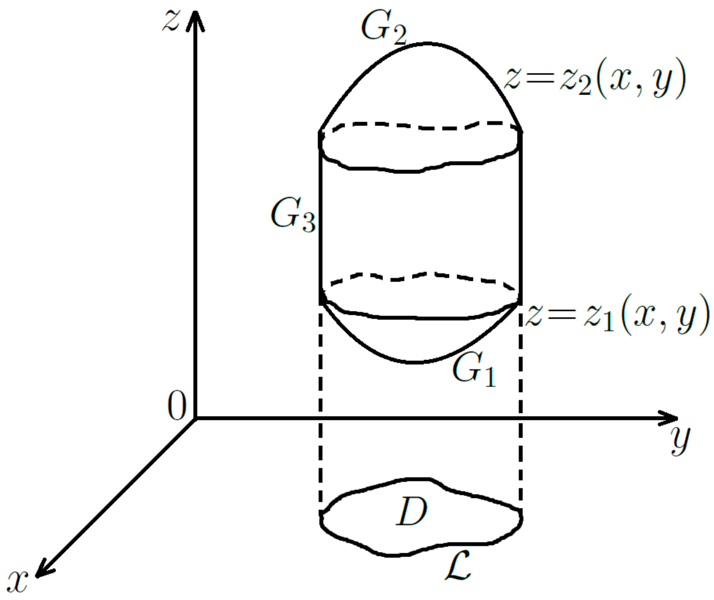

Рис. 51: Цилиндрическое тело Ω

Пусть в области Ω определена непрерывно-дифференцируемая функция $R(x,y,z)$. Тогда имеет место формула:

$$\iiint\limits_{\mathcal{L}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))dxdy. \tag{5.128}$$

Учтем связь поверхностного интеграла 2 рода и двойного (формулы (5.88) и (5.89)):

$$\underbrace{\iint\limits_{G_2} R(x,y,z)dxdy}_{\text{интеграл по верхней стороне поверхности}} = \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))dxdy,$$

$$\underbrace{\iint\limits_{G_1} R(x,y,z)dxdy}_{\text{интеграл по нижней стороне поверхности}} = -\iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))dxdy.$$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{G_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{G_1} R(x,y,z)dxdy. \tag{5.129}$$

Добавим к правой части равенства (5.129) интеграл $\iint\limits_{G_3} R(x,y,z)dxdy$. Этот интеграл равен нулю, так как проекция поверхности G_3 на плоскость XOY представляет собой кривую $\mathcal{L}$ нулевой площади.

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{G_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{G_1} R(x,y,z)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{G_3} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{G} R(x,y,z)dxdy. \tag{5.130}$$

Полученная формула будет верна для тел, которые можно разбить на криволинейные цилиндры вышеприведенного типа. Можно доказать также, что формула (5.130) будет справедлива вообще для любого тела, ограниченного кусочно-гладкими поверхностями. Аналогично будут иметь место формулы:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{G} Pdydz, \tag{5.131}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{G} Qdzdx, \tag{5.132}$$

если функции P и Q непрерывно-дифференцируемы в области Ω. Складывая формулы (5.130), (5.131), (5.132), мы приходим к общей формуле Остроградского:

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{G} \left(Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \right). \tag{5.133}$$

С учетом связи поверхностных интегралов 1 и 2 рода (формула (5.95)), формулу Остроградского-Гаусса можно записать в виде:

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{G} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) d\sigma, \tag{5.134}$$

где $\alpha,\ \beta, \gamma$ – углы между внешней нормалью к поверхности G и координатными осями.

Теорема Остроградского-Гаусса в векторной форме

Пусть векторное поле $\vec{A}$ задано следующим образом:

$$\vec{A} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}.$$

Тогда теорема Остроградского-Гаусса примет вид:

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dV = \iint\limits_{G} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma. \tag{5.135}$$

Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции по области, ограниченной этой поверхностью.

Связь теоремы Остроградского-Гаусса и теоремы Грина

Теорема Грина (5.73) имеет вид:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{5.136}$$

где $P(x, y),\ Q(x, y)$ – непрерывно-дифференцируемые функции в области D, ограниченной кривой $\mathcal{L}$. Введем векторное поле $\vec{A}$:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = Q\vec{i} - P\vec{j}. \tag{5.137}$$

Тогда

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Рассмотрим криволинейный интеграл в теореме Грина. Заметим, что вектор $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ – это касательный вектор к кривой $\mathcal{L}$ (предельное положение хорды). Обозначим за α его угол с осью OX. Тогда по (5.43) имеем:

$$Pdx + Qdy = (P \cos \alpha + Q \sin \alpha)\, dl. \tag{5.138}$$

Вектор нормали $\vec{n}$ к кривой составляет угол $\widetilde{\alpha} = \alpha - \frac{\pi}{2}$ с осью OX. Такое направление нормали выбираем чтобы векторы $\vec{n}$, $\vec{dl}$ и орт оси $\vec{k}$ образовывали правую тройку. В этом случае контур $\mathcal{L}$ в теореме Грина будет обходиться против часовой стрелки. Подставим $\alpha = \widetilde{\alpha} + \frac{\pi}{2}$ в (5.138):

$$Pdx + Qdy = (-P \sin \widetilde{\alpha} + Q \cos \widetilde{\alpha})\, dl = (A_y \sin \widetilde{\alpha} + A_x \cos \widetilde{\alpha})\, dl = \left(\vec{A} \cdot \vec{n} \right) dl.$$

Таким образом, теорема Грина (5.136) приобрела вид теоремы Остроградского-Гаусса (5.135):

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right) dl = \iint\limits_{D} \operatorname{div}\vec{A}dxdy. \tag{5.139}$$

Криволинейный интеграл имеет смысл потока векторного поля $\vec{A}$ через кривую $\mathcal{L}$.

Инвариантное определение дивергенции

Пусть в пространстве задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{A}$. Определим его дивергенцию в точке M. Для этого окружим точку M телом Ω с поверхностью G и напишем теорему Остроградского-Гаусса:

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{A}dV = \iint\limits_{G} \vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma. \tag{5.140}$$

По предположению, $\operatorname{div}\vec{A}$ – непрерывная функция. Следовательно, можно применить теорему о среднем:

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{A}dV = \operatorname{div}\vec{A}(\widetilde{M})\cdot V(\Omega), \tag{5.141}$$

где $\widetilde{M}$ – некоторая точка области Ω, $V(\Omega)$ – объем тела Ω. Будем стягивать область Ω к точке M. Тогда $\widetilde{M}\to M$ и в силу непрерывности дивергенции из формул (5.140) и (5.141) получим:

$$\frac{\iint\limits_{G}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma}{V(G)} = \operatorname{div}\vec{A}(\widetilde{M}) \xrightarrow[\Omega\to M]{} \operatorname{div}\vec{A}(M). \tag{5.142}$$

Таким образом,

$$\operatorname{div}\vec{A}(M) = \lim_{\Omega\to M}\frac{\iint\limits_{G}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma}{V(G)}. \tag{5.143}$$

Итак, мы определили $\operatorname{div}\vec{A}$ без всякой ссылки на систему координат.

5.22 Приложение формулы Остроградского-Гаусса к исследованию поверхностных интегралов

Пусть в некоторой области заданы непрерывно-дифференцируемые функции $P,\ Q,\ R$. Возьмем некоторую замкнутую поверхность G, ограничивающую тело Ω и рассмотрим поверхностный интеграл

$$\iint\limits_G (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = \iint\limits_G (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma. \tag{5.144}$$

Какому условию должны удовлетворять функции $P,\ Q,\ R$, чтобы интеграл по любой поверхности был равен нулю?

Эта задача аналогична задаче об обращении в нуль криволинейного интеграла 2 рода по замкнутому контуру, которая решалась при помощи теоремы Грина или Стокса. Здесь мы будем использовать формулу Остроградского.

Будем считать область пространственно-односвязной, то есть если области принадлежит простая замкнутая поверхность, то и тело, ограниченное этой поверхностью, целиком лежит в области. Таким образом, в теле отсутствуют полости. В отличие от поверхностно-односвязных областей, здесь тор односвязен, а шаровой слой – нет. По формуле Остроградского-Гаусса (5.133):

$$\iint\limits_G (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{5.145}$$

Теорема 9 (Независимость интеграла от поверхности)

Необходимое и достаточное условие равенства нулю интеграла (5.144) по любой замкнутой поверхности в пространственно-односвязной области:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{A} = 0 \ \text{ во всех точках области. } \vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}. \tag{5.146}$$

<u>Доказательство:</u>

<u>Достаточность</u> очевидна. Если $\operatorname{div} A = 0$, то интеграл в формуле (5.145)

также равен нулю, что и доказывает теорему.

Необходимость.

Пусть
$$\iint\limits_{G} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = \iint\limits_{G} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

Докажем, что $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Согласно формуле (5.143):

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \lim_{\Omega \to M} \frac{\iint\limits_{G} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma}{V(G)}. \tag{5.147}$$

По предположению, $\iint\limits_{G} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$. Следовательно, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

■

Следствие (независимость интеграла от формы поверхности)

Пусть интеграл (5.144) по любой замкнутой поверхности равен нулю. Рассмотрим две одинаково ориентированные поверхности G_1 и G_2, натянутые на контур $\mathcal{L}$ (то есть если смотреть со стороны нормалей к поверхностям G_1 и G_2, то контур $\mathcal{L}$ будет обходиться в одинаковом направлении). Тогда интегралы (5.144) по поверхностям G_1 и G_2 равны друг другу, то есть интеграл не зависит от формы поверхности.

Доказательство:

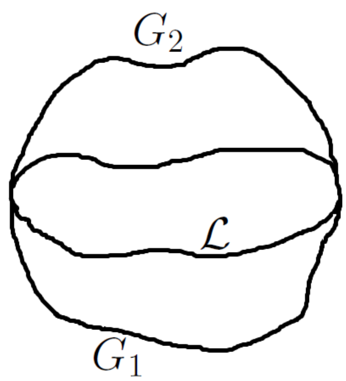

Рис. 52: Поверхности G_1 и G_2, натянутые на контур $\mathcal{L}$

G_1 и G_2 по предположению образуют замкнутую поверхность. Также по условию интеграл по замкнутой поверхности равен нулю:

$$\underbrace{\iint\limits_{G_1}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)}_{\text{внешняя сторона поверхности}}+\underbrace{\iint\limits_{G_2}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)}_{\text{внешняя сторона поверхности}}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{\iint\limits_{G_1}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)}_{\text{внешняя сторона поверхности}}=-\underbrace{\iint\limits_{G_2}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)}_{\text{внешняя сторона поверхности}}=$$

$$=\underbrace{\iint\limits_{G_2}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)}_{\text{внутренняя сторона поверхности}}. \tag{5.148}$$

Внешняя сторона G_1 и внутренняя сторона G_2 и есть одинаково ориентированные поверхности, имеющие своими контурами $\mathcal{L}$. По формуле (5.148) они равны друг другу.

■

5.23 Интеграл Гаусса

В электростатике напряженность $\vec{E}$ электрического поля точечного заряда, помещенного в точку (x_0, y_0, z_0), дается законом Кулона:

$$\vec{E}=kq\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{5.149}$$

где k – некоторая постоянная, q – заряд, $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий постоянную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с переменной точкой $M(x, y, z)$.

$$\vec{r}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k},$$

$$|\vec{r}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Найдем поток векторного поля $\vec{E}$ через некоторую замкнутую поверхность G :

$$\iint\limits_{G}\vec{E}\cdot\vec{n}d\sigma=kq\iint\limits_{G}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}d\sigma=kq\iint\limits_{G}\frac{|\vec{r}|\cdot\overbrace{|\vec{n}|}^{=1}\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{r^3}d\sigma=kq\iint\limits_{G}\frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{r^2}d\sigma. \tag{5.150}$$

Получившийся интеграл называется интегралом Гаусса:

$$I = \iint\limits_G \frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{r^2} d\sigma. \tag{5.151}$$

Вычислим его. Пусть $P = \frac{x-x_0}{r^3}$, $Q = \frac{y-y_0}{r^3}$, $R = \frac{z-z_0}{r^3}$. Тогда:

$$I = \iint\limits_G \frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{r^2} d\sigma = \iint\limits_G \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3} d\sigma = \Big/ \text{формула (5.105)} \Big/$$

$$= \iint\limits_G (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy). \tag{5.152}$$

Найдем дивергенцию векторного поля $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\right) =$$

$$= \left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+(x-x_0)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}.$$

Тогда:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}\Big(\underbrace{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}_{r^2}\Big) = 0. \tag{5.153}$$

Так как $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ всюду кроме точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то по теореме 9 интеграл (5.152) равен нулю по любой замкнутой поверхности, не содержащей точку (x_0, y_0, z_0). В этом случае $I = 0$.

В случае, когда поверхность G охватывает точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, теорема 9 неприменима. Но по следствию из теоремы 9 интеграл не зависит от формы поверхности, лишь бы при изменении формы поверхность не пересекла точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда вместо вычисления интеграла (5.152) по произвольной поверхности мы будем вычислять интеграл по сфере радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. На сфере нормаль $\vec{n}$ сонаправлена с $\vec{r}$. Следовательно, $\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}}) = 1$. Тогда:

$$I = \iint\limits_G \frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{R^2} d\sigma = \iint\limits_G \frac{d\sigma}{R^2} = \frac{1}{R^2} \cdot \underbrace{\iint\limits_G d\sigma}_{\text{площадь сферы}} = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi. \tag{5.154}$$

Подведем итог.

$$I = \iint\limits_G \frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{r^2} d\sigma = \begin{cases} 4\pi, \text{ если } M_0 \text{ лежит внутри } G \\ 0, \text{ если } M_0 \text{ лежит вне } G \end{cases}. \tag{5.155}$$

5.24 Первая и вторая формулы Грина

Пусть v и u – скалярные дважды непрерывно дифференцируемые функции в области Ω. Рассмотрим векторное поле

$$\vec{A} = v \operatorname{grad} u. \tag{5.156}$$

Тогда по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\iiint\limits_\Omega \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) dxdydz = \iint\limits_G v \operatorname{grad} u \cdot \vec{n} d\sigma = \Big/ \text{формула (5.9)} \Big/ = \iint\limits_G v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma, \tag{5.157}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности G. С другой стороны, по формуле (5.15):

$$\operatorname{div}(v\vec{u}) = v \operatorname{div} \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v. \tag{5.158}$$

Кроме того, по формуле (5.23):

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \triangle u. \tag{5.159}$$

Подставляя (5.158) и (5.159) в формулу (5.157), получаем:

$$\iiint\limits_\Omega (v \triangle u + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\, dxdydz = \iint\limits_G v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \iiint\limits_{\Omega} v\triangle u dxdydz = -\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz+\iint\limits_{G} v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma \tag{5.160}$$

– первая формула Грина.

Напишем первую формулу Грина, поменяв местами u и v :

$$\iiint\limits_{\Omega} u\triangle v dxdydz = -\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)dxdydz+\iint\limits_{G} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma. \tag{5.161}$$

Вычтем из уравнения (5.160) уравнение (5.161):

$$\iiint\limits_{\Omega}(v\triangle u - u\triangle v)\,dxdydz = \iint\limits_{G}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma \tag{5.162}$$

– вторая формула Грина.

5.25 Потенциальное поле

Определение

Векторное поле $\vec{A}$ называется потенциальным, если существует скалярное поле $u(x,y,z)$, для которого $\vec{A} = \operatorname{grad} u$, то есть $A_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $A_z = \frac{\partial u}{\partial z}$. Это эквивалентно тому, что:

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = du.$$

Функция $u(x,y,z)$ называется потенциальной функцией (скалярным потенциалом) поля $\vec{A}$. Перефразируя условие полного дифференциала (теорема 8 и замечание к ней), получаем следующее утверждение.

Для того, чтобы поле $\vec{A}$ было потенциальным в поверхностно-односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области было выполнено:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}, \tag{5.163}$$

то есть $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$. Таким образом, потенциальное поле – это безвихревое поле.

Напишем теорему Стокса (5.123) для потенциального поля:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_{G} \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma = \Big/ \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0} \Big/ = 0, \tag{5.164}$$

то есть циркуляция потенциального поля по простому замкнутому контуру равна нулю. А это по теореме 6 означает независимость линейного интеграла от формы кривой. Потенциал $u(x,y,z)$ можно восстановить по потенциальному полю $\vec{A}$ (формула (5.120)):

$$u = \int\limits_{\mathcal{L}} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) + C = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{A}\cdot d\vec{l} + C, \text{ где } C = const. \tag{5.165}$$

Интеграл берется от некоторой фиксированной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до переменной точки $M(x,y,z)$ по любой кривой $\mathcal{L}$, соединяющей эти точки.

Пример

Найдем потенциал электростатического поля $\vec{E}$ точечного заряда, расположенного в точке $(0,0,0)$:

$$\vec{E} = kq\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Поскольку путь из некоторой фиксированной точки (x_0, y_0, z_0) в точку (x,y,z) можно выбирать произвольным образом, возьмем его состоящим из дуги окружности $\mathcal{L}_1 \ : \ \ r = r_0$ и луча $\mathcal{L}_2$, выходящего из начала координат.

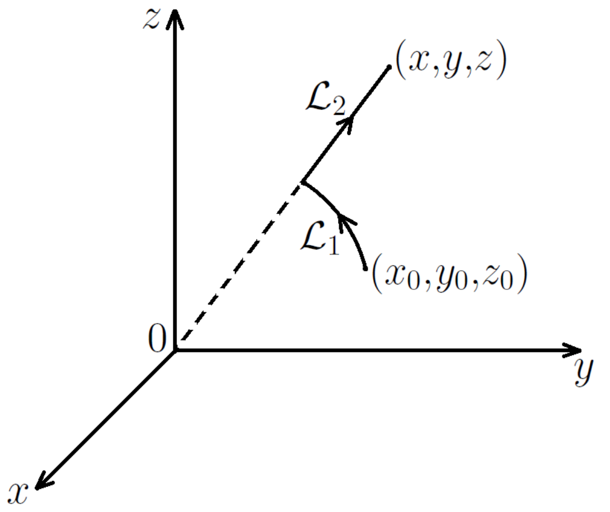

Рис. 53: Контур интегрирования

Согласно формуле (5.165):

$$u = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int\limits_{\mathcal{L}_1} \vec{E}\cdot\vec{dl} + \int\limits_{\mathcal{L}_2} \vec{E}\cdot\vec{dl}.$$

На дуге окружности $\mathcal{L}_1$ векторы $\vec{E}$ и $\vec{dl}$ ортогональны ($\vec{E}$ направлена по радиусу, $\vec{dl}$ – по касательной к окружности). Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{L}_1} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0.$$

На луче $\mathcal{L}_2$ векторы $\vec{E}$ и $\vec{dl}$ сонаправлены ($\vec{E}$ и $\vec{dl}$ направлены по радиусу). Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{L}_2} \vec{E}\cdot\underbrace{\vec{dl}}_{=\vec{dr}} = \int\limits_{\mathcal{L}_2} kq\frac{\vec{r}}{r^3}\vec{dr} = kq\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2}.$$

Итак,

$$u = kq\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = -k\frac{q}{r} + k\frac{q}{r_0} = -\frac{q}{r} + C.$$

В физике в качестве потенциала выбирают $\varphi = -u$, а $r_0 = \infty$.

Тогда $\varphi = k\frac{q}{r}$.

5.26 Соленоидальное поле

Определение

Векторное поле $\vec{A}$ называется соленоидальным (трубчатым), если существует векторное поле $\vec{B}$, для которого $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$, то есть:

$$A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \tag{5.166}$$

Вектор $\vec{B}$ называется векторным потенциалом поля $\vec{A}$.

Теорема 10 (Критерий соленоидальности поля)

Для того, чтобы поле $\vec{A}$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области выполнялось равенство:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{5.167}$$

Доказательство:

Необходимость.

Пусть поле соленоидально. Тогда:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} = \Big/\text{формула (5.25)}\Big/ = 0.$$

Достаточность.

Пусть $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Покажем, что существует векторное поле $\vec{B}$ такое, что: $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{A}$. Для этого достаточно найти частное решение системы уравнений (5.166). Положим $B_z \equiv 0$. Тогда первые два уравнения системы (5.166) примут вид:

$$A_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z}. \tag{5.168}$$

Проинтегрируем уравнения (5.168) по z :

$$B_y = -\int\limits_{z_0}^{z} A_x(x, y, z)dz + \varphi(x, y). \tag{5.169}$$

В качестве B_x возьмем частное решение:

$$B_x = -\int\limits_{z_0}^{z} A_y(x, y, z)dz. \tag{5.170}$$

Неизвестную функцию $\varphi(x,y)$ найдем из третьего уравнения системы (5.166), подставив туда B_x и B_y. Для этого нам понадобится найти $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ и $\frac{\partial B_x}{\partial y}$.

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{5.171}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y} dz. \tag{5.172}$$

Тогда:

$$A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \Big/ \text{добавим и вычтем } \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \Big/ =$$

$$= -\int\limits_{z_0}^{z} \underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)}_{= \operatorname{div} \vec{A} = 0} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} dz =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_z(x,y,z) - A_z(x,y,z_0) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_z(x,y,z_0) \ \Rightarrow \ \varphi = \int\limits_{x_0}^{x} A_z(x,y,z_0) dx.$$

Мы взяли частное решение для φ, так как нам нужно доказать только лишь факт существования поля $\vec{B}$. Определив $B_x,\ B_y,\ B_z$, мы нашли векторный потенциал $\vec{B}$.

■

Выясним, какая степень произвола остается при определении векторного потенциала $\vec{B}$ из системы уравнений (5.166). Пусть $\vec{B}_0$ – некоторое частное решение системы (5.166). Тогда общее решение $\vec{B}$ можно найти из следующих условий:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \vec{A} \\ \operatorname{rot} \vec{B}_0 &= \vec{A} \end{aligned} \right\} \ \Rightarrow \ \operatorname{rot}(\vec{B} - \vec{B}_0) = \vec{0}. \tag{5.173}$$

Тогда по критерию потенциальности поля получаем, что поле $\vec{C} = \vec{B} - \vec{B_0}$ потенциально. Итак,

$$\vec{B} = \vec{B_0} + \vec{C}, \tag{5.174}$$

где $\vec{C}$ – произвольное потенциальное поле.

Сохранение потока через сечение векторной трубки

Рассмотрим отрезок векторной трубки, ограниченный сечениями G_1 и G_2. Так как поле соленоидально, то по теореме 10 будет выполнено: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Следовательно, по теореме Остроградского-Гаусса (5.135):

$$\iint\limits_{G} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dV = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(\iint\limits_{G_1} \ldots + \iint\limits_{G_2} \ldots + \iint\limits_{G_3} \ldots \right) A_n d\sigma = 0, \tag{5.175}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности G.

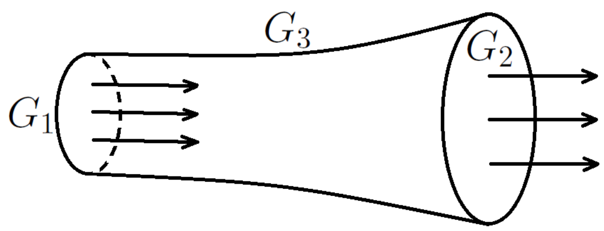

Рис. 54: Поток через векторную трубку

Поток через боковую поверхность $\iint\limits_{G_3} A_n d\sigma$ равен нулю, поскольку $\vec{A} \perp \vec{n}$. Тогда:

$$\underbrace{\iint\limits_{G_2} A_n d\sigma}_{\text{внешняя сторона поверхности}} = \underbrace{-\iint\limits_{G_1} A_n d\sigma}_{\text{внешняя сторона поверхности}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\iint\limits_{G_2} A_n d\sigma}_{\text{внешняя сторона поверхности}} = \underbrace{\iint\limits_{G_1} A_n d\sigma.}_{\text{внутренняя сторона поверхности}} \tag{5.176}$$

Таким образом, у соленоидального поля поток через сечение векторной трубки сохраняется. Это свойство работает и в обратную сторону:

$$\iint\limits_G A_n d\sigma = 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{div}\vec{A} = 0$$

(по инвариантному определению дивергенции (5.143)).

Разложение произвольного векторного поля

Произвольное векторное поле $\vec{A}$ всегда можно представить в виде суммы потенциального поля $\vec{A}'$ и соленоидального поля $\vec{A}''$:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}'', \text{ где } \operatorname{rot}\vec{A}' = \vec{0}, \ \operatorname{div}\vec{A}'' = 0. \tag{5.177}$$

Пусть $\vec{A}' = \operatorname{grad}\Phi$, где скалярная функция Φ будет определена позднее. Тогда равенство

$$\operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = \Big/\text{формула 5.24}\Big/ = \vec{0}$$

будет выполнено автоматически.

$$\vec{A}'' = \vec{A} - \vec{A}' = \vec{A} - \operatorname{grad}\Phi \tag{5.178}$$

$$\operatorname{div}\vec{A}'' = 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \triangle\Phi. \tag{5.179}$$

Таким образом, для определения Φ нужно решить дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\triangle\Phi = \operatorname{div}\vec{A}, \tag{5.180}$$

которое всегда имеет решение (и даже бесконечное множество решений).

Пример 1

Известно, что магнитное поле прямолинейного (по оси OZ) проводника с током задается уравнениями:

$$H_x = -\frac{2kIy}{x^2+y^2}, \quad H_y = \frac{2kIx}{x^2+y^2}, \quad H_z = 0,$$

где $k = const,\ I$ – сила тока в проводнике. Проверим поле $\vec{H}$ на соленоидальность.

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{4kIxy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4kIxy}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

то есть поле соленоидально везде кроме оси OZ (где знаменатель обращается в нуль). Теперь проверим поле $\vec{H}$ на потенциальность.

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = -2kI\cdot\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} - 2kI\cdot\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{0}$, то есть поле потенциально везде кроме оси OZ. Найдем циркуляцию поля $\vec{H}$ по замкнутому контуру $\mathcal{L}$. Если контур не охватывает ось OZ, то $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{0}$. Следовательно, по теореме Стокса (5.123):

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_{G} \operatorname{rot}\vec{H}\cdot\vec{n}d\sigma = 0,$$

то есть циркуляция равна нулю.

Если контур охватывает ось OZ, то $\operatorname{rot}\vec{H}$ не определен на оси $x = 0,\ y = 0$ и мы не можем использовать теорему Стокса. Однако, для потенциального поля интеграл не зависит от формы кривой и мы можем деформировать контур $\mathcal{L}$ в окружность радиуса R, по которой удобно считать циркуляцию.

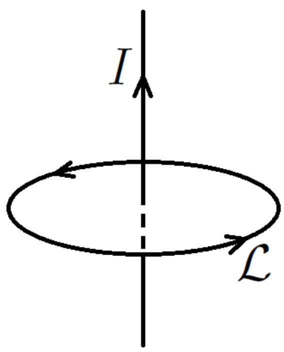

Рис. 55: Циркуляция поля $\vec{H}$ по замкнутому контуру $\mathcal{L}$

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{H}\cdot\vec{dl} = 2kI\int\limits_{\mathcal{L}}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right) = \Big/\left\{\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t\end{array}\right.\Big/ =$$

$$= 2kI\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}{R^2}dt = 4\pi kI.$$

Пример 2

Получим одно из уравнений Максвелла из теоремы Остроградского-Гаусса. Вычислив интеграл Гаусса (5.155), мы выяснили, что поток электрического поля точечного заряда q через окружающую его замкнутую поверхность равен $4\pi kq$. Согласно принципу суперпозиции: если внутри поверхности находится n точечных зарядов q_i, то:

$$\iint\limits_G E_n d\sigma = 4\pi k\sum_{i=1}^{n} q_i.$$

То же верно для непрерывно распределенного заряда $q = \iint\limits_{\Omega}\rho dV$ с плотностью ρ в области Ω, ограниченной поверхностью G :

$$\iint\limits_G E_n d\sigma = 4\pi k\iiint\limits_{\Omega}\rho dV.$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_G E_n d\sigma = \iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{E}dV \;\Leftrightarrow\; \iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{E}dV = 4\pi k\iiint\limits_{\Omega}\rho dV \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \iiint\limits_{\Omega}\left(\operatorname{div}\vec{E} - 4\pi k\rho\right)dV = 0.$$

Считая подынтегральную функцию непрерывной, применим теорему о среднем:

$$\left(\operatorname{div}\vec{E}(\widetilde{M}) - 4\pi k\rho(\widetilde{M})\right)\cdot V(\Omega) = 0.$$

Будем сжимать область Ω к точке M. Тогда $\widetilde{M}\to M$ и по непрерывности получим: $\operatorname{div}\vec{E}(M) - 4\pi k\rho(M) = 0$, то есть уравнение Максвелла:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi k\rho.$$