Глава 7. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$, то есть уравнение вида:

$F\left(x, y, y', y'', ...y^{(n)}\right) = 0$ – дифференциальное уравнение n-го порядка.

$F(x, y, y') = 0$ – дифференциальное уравнение 1-го порядка.

Функция $y = y(x)$ есть решение уравнения, если ее подстановка в уравнение обращает его в тождество.

Общего метода для решения дифференциальных уравнений не существует. Однако в некоторых частных случаях дифференциальные уравнения удается решать.

7.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Если уравнение $y' = f(x, y)$ с помощью алгебраических преобразований удается привести к виду:

$$M_1(x) M_2(y) dx + N_1(x) N_2(y) dy = 0, \qquad \left| \cdot \frac{1}{N_1(x) M_2(y)} \right.$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

$$\int \left| \quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy. \right.$$

Решение находится интегрированием. Мы получим уравнение вида:

$$F(x, y) = const.$$

Пример 1

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y^2 + 1}.$

Разделяем переменные:

$$\int \left| \quad \left(3y^2 + 1\right) dy = 2xdx \;\Leftrightarrow\; \int \left(3y^2 + 1\right) dy = \int 2xdx \;\Leftrightarrow \right.$$

$$\Leftrightarrow\ y^3 + y - x^2 = C, \quad \text{где } C = const.$$

Пример 2

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{y} \quad \text{(здесь мы предполагаем, что } \ y \neq 0)$$

$$\int \Bigg| \ \frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx \ \Leftrightarrow\ \ln|y| = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln|y| = -\ln|\cos x| + C_1 \ \Leftrightarrow\ \ln|y\cos x| = C_1.$$

Функция $y = 0$ является решением исходного уравнения (проверяется подстановкой). Однако, в процессе решения мы его потеряли. Следовательно, добавим его обратно:

$$\left[\begin{array}{l} \ln|y\cos x| = C_1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Упростим ответ:

$$\left[\begin{array}{l} e^{\ln|y\cos x|} = e^{C_1} \\ y = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} y\cos x = \pm e^{C_1} = C_2,\ C_2 \neq 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y\cos x = C,$$

где C – произвольная константа.

Задачи

1) Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

$$\left\{\begin{array}{c} \left(xy^2 + x\right) dy + \left(x^2 y - y\right) dx = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{xy} \\ y\,(1) = 1 \end{array}\right.$$

$$\int \Bigg| \quad \left(y + \frac{1}{y}\right) dy + \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{y^2}{2} + \ln|y| + \frac{x^2}{2} - \ln|x| = C$$

$$y(1) = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2} + \ln 1 + \frac{1}{2} - \ln 1 = C \ \Leftrightarrow\ C = 1$$

Ответ: $\dfrac{y^2 + x^2}{2} + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = 1.$

2) $\left(1+y^2\right)xdx+\left(1+x^2\right)dy=0 \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)} \Leftrightarrow$

$$\int\Big| \quad \frac{xdx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\operatorname{arctg} y=C.$$

3) $ye^{2x}dx-\left(1+e^{2x}\right)dy=0 \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{y\left(1+e^{2x}\right)}$

$$\int\Big| \quad \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx-\frac{dy}{y}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+e^{2x}\right)}{1+e^{2x}}-\int\frac{dy}{y}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)-\ln|y|=C, \\ y=0 \quad \text{– потерянное решение при домножении на } \frac{1}{y(1+e^{2x})}. \end{array}\right.$$

4) $2e^x \operatorname{tg} ydx+(1+e^x)\sec^2 ydy=0 \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} y\left(1+e^x\right)}$

$$\int\Big| \quad \frac{2e^x dx}{1+e^x}+\frac{\sec^2 ydy}{\operatorname{tg} y}=0 \Leftrightarrow \Big/ \sec^2 ydy=\frac{1}{\cos^2 y}dy=d\left(\operatorname{tg} y\right)\Big/ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}+\int\frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y}=0 \Leftrightarrow 2\ln(1+e^x)+\ln|\operatorname{tg} y|=C$$

При домножении на $\frac{1}{\operatorname{tg} y(1+e^x)}$ мы потеряли решение $\operatorname{tg} y=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ (при помощи подстановки можно проверить, что это действительно решение). Итак, все решения установлены и мы можем записать ответ:

$$\left[\begin{array}{l} 2\ln\left(1+e^x\right)+\ln|\operatorname{tg} y|=C, \\ y=\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

7.2 Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7.1}$$

Сведем его к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого сделаем замену:

$$\frac{y}{x} = u \ \Leftrightarrow y = ux. \tag{7.2}$$

Следовательно, $y' = u' \cdot x + u$. Подставим y и y' в уравнение (7.1):

$$u' \cdot x + u = f\left(u\right) \Leftrightarrow u' \cdot x = f\left(u\right) - u \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = f\left(u\right) - u \Leftrightarrow \frac{du}{f\left(u\right) - u} = \frac{dx}{x}$$

Решение находится интегрированием.

Замечание

Уравнение может быть записано в виде:

$$M\left(x, y\right) dx + N\left(x, y\right) dy = 0. \tag{7.3}$$

Тогда при замене: $\frac{y}{x} = u \ \Leftrightarrow \ y = ux$

дифференциал преобразуется по правилу: $dy = udx + xdu$.

Проверка, является ли уравнение однородным.

Метод размерностей.

Припишем переменной x, функции y и их дифференциалам некоторые размерности. Например, пусть это будут метры: $x \sim$ м (метры), $y \sim$ м, $dx \sim$ м, $dy \sim$ м. Производная как отношение дифференциалов будет безразмерной величиной: $y' = \frac{dy}{dx} \sim 1$. Для трансцендентных функций (то есть не являющихся алгебраическими): $(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ e^x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x)$ в качестве аргумента должны стоять безразмерная величина. Например: $e^{\frac{y}{x}}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ и так далее. В однородном уравнении должны складываться величины одной размерности.

Пример 1

Выясним, является ли следующее уравнение однородным:

$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

$(\text{м}^2 + \text{м} \cdot \text{м}) \cdot 1 = \text{м} \cdot \sqrt{\text{м}^2 - \text{м}^2} + \text{м} \cdot \text{м} + \text{м}^2$.

Следовательно, уравнение однородное.

Пример 2

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Bigg/ \begin{array}{ll} \text{Замена:} & u = \frac{y}{x} \\ y = ux & y' = u'x + u \end{array} \Bigg/$$

$$\Leftrightarrow u'x + u = u + e^u \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = e^u \Leftrightarrow \int \Bigg| \quad \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e^{-u} = \ln|x| + C \Leftrightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C.$$

Задачи

5) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

$$\Bigg/ \begin{array}{l} \text{Замена:}\ \ u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \\ \qquad\qquad\quad y' = u'x + u \end{array} \Bigg/$$

$$u'x + u = \frac{x - ux}{x + ux} \ \Leftrightarrow\ \frac{du}{dx}x + u = \frac{x - ux}{x + ux} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ du \cdot x + u \cdot dx = \frac{1-u}{1+u}dx \ \Leftrightarrow\ xdu + \left(u - \frac{1-u}{1+u}\right)dx = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ xdu + \frac{u + u^2 - 1 + u}{1+u}dx = 0 \ \Leftrightarrow\ xdu + \frac{u^2 + 2u - 1}{u+1}dx = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \int \Bigg| \quad \frac{u+1}{u^2 + 2u - 1}du + \frac{dx}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ \int \frac{u+1}{u^2+2u-1}du + \ln|x| = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Bigg/ \begin{array}{l} \int \frac{u+1}{u^2+2u-1}du = \int \frac{u+1}{(u+1)^2-2}du = \frac{1}{2}\int \frac{d(u+1)^2}{(u+1)^2-2} = \\ \quad = \frac{1}{2}\int \frac{d\left((u+1)^2-2\right)}{(u+1)^2-2} = \frac{1}{2}\ln\left|(u+1)^2 - 2\right| + C. \end{array} \Bigg/$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|(u+1)^2 - 2\right| + \ln|x| = C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y}{x}+1\right)^2 - 2\right| + \ln|x| = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\left|\left(\frac{y}{x}+1\right)^2 - 2\right| + \ln|x|^2 = 2C \ \Leftrightarrow\ \ln\left|\left(\frac{y}{x}+1\right)^2 x^2 - 2x^2\right| = 2C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 1\right)x^2 - 2x^2\right| = 2C \Leftrightarrow \ln\left|y^2 + 2yx + x^2 - 2x^2\right| = 2C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y^2 + 2yx - x^2 = \pm e^{2C} \ \Leftrightarrow\ \underline{y^2 + 2yx - x^2 = C_1,\ \text{где } C_1 \neq 0.}$$