данной линейной комбинации.

Докажем теперь, что при $\det A = 0$ неоднородная система (65) будет разрешима не при любой правой части. Так как строки матрицы A линейно зависимы, то можно составить их линейную комбинацию, которая обращается в нуль. Составив такую же линейную комбинацию уравнений системы (65), мы получим слева нуль, справа – линейную комбинацию правых частей b_i. Поскольку линейная комбинация b_i не обязательно обращается в нуль, то и система (65) будет разрешима не при любой правой части.

$\blacksquare$

1.7 Метод Гаусса

Решение систем линейных уравнений

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных в системе линейных уравнений. Он позволяет привести матрицу системы к трапециевидной форме :

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

Решим систему линейных уравнений.

Запишем её в матричном виде:

$$A \cdot X = B. \tag{71}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Напишем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_n & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Опишем процедуру преобразования системы уравнений

$$-\frac{a_{m1}}{a_{11}} \; \cdots\cdots \; -\frac{a_{21}}{a_{11}} \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; \dots\dots \; + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; \dots\dots \; + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \; \dots\dots \; + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right. \tag{72}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$. Если это не так, ставим на первое место строку, в которой первый коэффициент не равен нулю (если такого нет, то система не содержит x_1).

Домножим первое уравнение системы (72) на $(\frac{-a_{21}}{a_{11}})$ и прибавим его ко второму уравнению. Результат запишем во вторую строку. Аналогично для остальных уровней системы. Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; \dots\dots \; + a_{1n}x_n = b_1, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \; \dots\dots \; + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \tilde{a}_{32}x_2 + \; \dots\dots \; + \tilde{a}_{3n}x_n = \tilde{b}_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{a}_{m2}x_2 + \; \dots\dots \; + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m. \end{array} \right. \tag{73}$$

Здесь $\tilde{a}_{22} = a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}, \; \dots\dots, \; \tilde{a}_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{1n}, \quad \tilde{b}_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot b_1$. И так далее для всех остальных коэффициентов.

Повторим процедуру для 2-го, 3-го, $\; \dots\dots \;$, m-го уравнений, исключая переменную x_2. На каждом новом шаге мы будем получать на одну неизвестную меньше в оставшихся уравнениях. В результате придём к одному из следующих исходов:

1) Матрица системы привелась к треугольному виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^*_{nn}x_n = b^*_n, \end{cases} \tag{74}$$

где $a^*_{nn} \neq 0$. В этом случае $rank\tilde{A} = rankA = n$ и система имеет единственное решение. Находим x_n из последнего уравнения. Подставляем его в предыдущие уравнение и находим x_{n-1} и так далее до x_1.

2) Матрица системы привелась к трапециевидной форме. Однако количество уравнений оказалось меньше числа ненулевых свободных членов.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad a^*_{lk}x_k + \ .\ .\ .\ .\ . \ + a^*_{ln}x_n = b_l, \\ \qquad\qquad 0 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + 0 = b_{l+1} \neq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad 0 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + 0 = b_m \neq 0. \end{cases} \tag{75}$$

Здесь $rank\tilde{A} > rankA$. Система (75) содержит неверные равенства. Следовательно, она несовместна.

3) Матрица системы привелась к трапециевидной форме. Количество уравнений (k) оказалось меньше числа неизвестных (n). В этом случае $(n-k)$ неизвестных мы переносим в правые части уравнений и выбираем их в качестве свободных параметров.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ldots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \ \ldots\ldots - a_{1n}x_n \\ \qquad\quad \tilde{a}_{12}x_2 + \ \ldots\ldots + \tilde{a}_{2k}x_k = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2,k+1}x_{k+1} - \ \ldots\ldots - \tilde{a}_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a^*_{kk}x_k = b^*_k - a^*_{k,k+1}x_{k+1} - \ \ldots\ldots - \tilde{a}_{kn}x_n \end{cases}, \tag{76}$$

где $x_{k+1},\ \ldots\ldots, x_n$ – любые числа (свободные параметры).
Здесь $rank\tilde{A} = rankA < n$. Система неопределённая: имеет бесконечно много решений.

Пример 1.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases} \tag{77}$$

Во избежание постоянного переписывания системы после каждого действия с ней мы будем выписывать только коэффициенты расширенной матрицы системы. После операции с уравнениями результат записывается строчкой ниже, а одно из уравнений вычеркивается.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
-2 -1	1	2	1	-1	1
	~~1~~	~~3~~	~~-1~~	~~2~~	~~-4~~
	~~2~~	~~1~~	~~-1~~	~~1~~	~~-1~~
3	0	1	-2	3	-5
	~~0~~	~~-3~~	~~-3~~	~~3~~	~~-3~~
	0	0	-9	12	-18

Мы получили 3 уравнения и 4 неизвестных. Это означает, что одну из неизвестных следует выбрать в качестве свободного параметра:

$-9x_3+12x_4=-18 \;\Leftrightarrow\; 3x_3-4x_4=6.$

Пусть $x_4=t\in\mathbb{R}$ – свободный параметр. Тогда $x_3=2+\frac{4}{3}t.$

$x_2-2x_3+3x_4=-5 \;\Leftrightarrow\; x_2-2(2+\frac{4}{3}t)+3t=-5 \;\Leftrightarrow\; x_2=-\frac{1}{3}t-1.$

$x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \;\Leftrightarrow\; x_1-\frac{2}{3}t-2+2+\frac{4}{3}t-t=1 \;\Leftrightarrow\; x_1=\frac{1}{3}t+1.$

Итак, решением системы уравнений (77) является следующий вектор :

$$X=t\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}. \tag{78}$$

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4-x_5=0,\\ x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=2,\\ x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5=-1,\\ 3x_1+x_2+3x_3-x_4+4x_5=1.\end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
-3 -1	1	-1	1	2	-1	0
	~~1~~	~~1~~	~~2~~	~~-1~~	~~1~~	~~2~~
	~~1~~	~~-1~~	~~-1~~	~~1~~	~~2~~	~~-1~~
	~~3~~	~~1~~	~~3~~	~~-1~~	~~4~~	~~1~~
-2	0	2	1	-3	2	2
-1	0	0	-2	-1	3	-1
	~~0~~	~~4~~	~~0~~	~~-7~~	~~7~~	~~1~~
	0	0	-2	-1	3	-3
	0	0	0	0	0	-2

Мы получили неверное равенство: $0=-2$. Следовательно, система несовместна.

Замечание

Процедуру получения нулей в методе Гаусса можно продолжить, сделав матрицу системы диагональной и даже единичной. Тогда в столбце $\{b_i\}$ мы получим решения системы :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & 0 & b_2^* \\ 0 & 0 & 1 & b_3^* \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b_1^* \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b_2^* \\ 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = b_3^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1^* \\ x_2 = b_2^* \\ x_3 = b_3^* \end{cases}$$

Построение обратной матрицы методом Гаусса.

Схема метода.

1) Справа от матрицы A приписываем единичную матрицу того же размера.

2) С помощью элементарных преобразований со строками расширенной матрицы на месте исходной матрицы A мы должны получить единичную матрицу I.

3) Тогда на месте приписанной матрицы мы получим обратную матрицу A^{-1}.

Можно использовать следующие элементарные преобразования:

1) Перестановка строк.

2) Умножение строки на число, не равное нулю.

3) Прибавление к одной строке другой строки умноженной на произвольное число.

Пример

Найдём обратную матрицу к матрице: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 2 \\ -4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ (-1)\cdot \\ (-\frac{1}{3})\cdot \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

В исходной матрице мы последовательно получили нули. Сначала – в первом столбце матрицы, затем – во втором, потом – в третьем. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Обоснование метода Гаусса для поиска обратной матрицы. Обратную матрицу можно найти, решив следующее матричное уравнение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}.$$

Здесь A – исходная матрица , B – искомая обратная матрица.

$$A \cdot B = I \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} AB_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (I) \\ AB_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (II) \\ AB_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (III) \end{cases}.$$

где $B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$.

Поскольку у систем (I), (II), (III) одинаковые матрицы A, то приводя матрицу A к единичной, мы будем делать одинаковые элементарные преобразования. Чтобы не переписывать три раза одинаковые преобразования, мы напишем матрицу A один раз, а столбцы правых частей (которыми и отличаются системы (I), (II), (III)) припишем справа. Тогда после преобразования, приводящего матрицу A к единичной, справа в первом столбце мы получим вектор B_1, во втором – B_2, в третьем – B_3, но это и есть столбцы обратной матрицы (объяснение того факта, что после приведения матрицы A к единичной в столбце B_1 мы получим решение системы (I), можно посмотреть в замечании к примеру 2 на страницах 44–45).

2. Пространства

2.1 Метрическое пространство

Понятие пространства используется в математике для объединения объектов по определенным признакам. Если нас интересует только расстояние между объектами, то достаточно ввести только одну характеристику – метрику (расстояние), которая позволит объединить наши элементы в метрическое пространство.

Определение

Пусть M — произвольное множество, и пусть каждой паре его элементов x, y сопоставлено неотрицательное число $\rho(x, y)$ так, что для всех $x, y, z \in M$ выполнено:

1) $\rho(x, y) = 0$ — тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — симметрия;

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ — неравенство треугольника.

Функция ρ называется метрикой (расстоянием), а само множество M, снабженное метрикой — метрическим пространством.

Примеры

1) Множество вещественных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ образует метрическое пространство $\mathbb{R}^1$.

2) Множество $C[a, b]$ всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ с расстоянием (смотри рис. 1):

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |g(t) - f(t)|.$$

3) Множество точек на сфере:

Расстояние между двумя точками – длина дуги большого круга (наименьшая из двух дуг), проходящего через эти точки (смотри рис. 2).

Замечание

Большой круг – это сечение шара плоскостью, проходящее через центр шара.

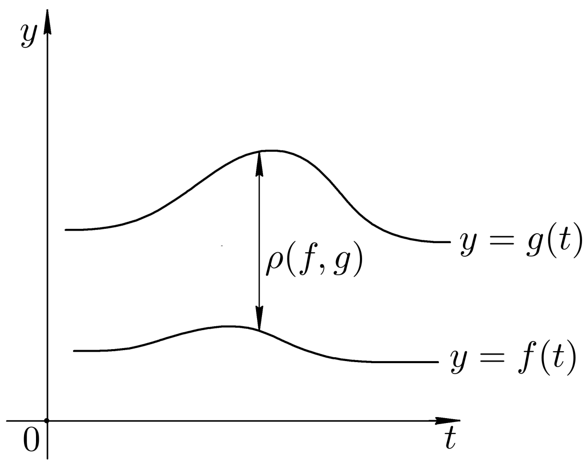

Рис. 1: Расстояние между функциями на множестве C[a,b]

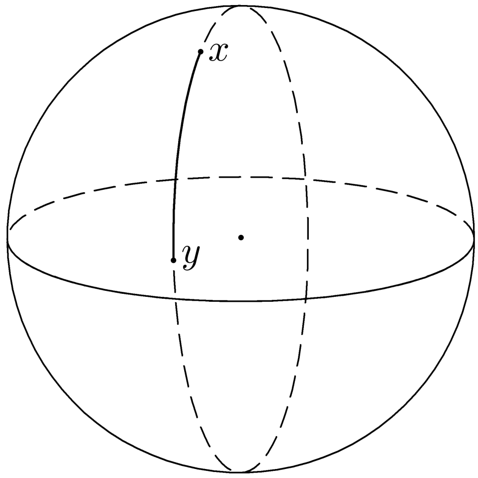

Рис. 2: Расстояние между точками на сфере

2.2 Линейное пространство. Определение. Примеры. Основные свойства

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ – множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на вещественное (либо комплексное) число:

a) паре элементов множества $x \in \mathcal{L},\ y \in \mathcal{L}$ отвечает элемент $x + y \in \mathcal{L}$ (сумма x и y);

b) паре $x \in \mathcal{L},\ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ отвечает элемент $\alpha x \in \mathcal{L}$ (произведение числа α и элемента x).

Множество $\mathcal{L}$ называется линейным (вещественным или комплексным) пространством, если для всех его элементов определены операции сложения и умножения на вещественное (комплексное) число и для любых элементов $x, y, z \in \mathcal{L}$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполнено:

1) $x + y = y + x$ – коммутативность;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ – ассоциативность;

3) $x + \mathbb{O} = x \quad \forall x \in \mathcal{L}$ – существование нулевого элемента;

4) $x + (-x) = \mathbb{O} \quad \forall x \in \mathcal{L}$ – существование противоположного элемента;

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ – ассоциативность умножения на число;

6) $1 \cdot x = x$ – согласование масштабов чисел и векторов;

7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ – дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов;

8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ – дистрибутивность умножения вектора на число относительно сложения чисел.

Примеры линейных пространств

1) Множество векторов в пространстве (V_3) или на плоскости (V_2) с обычными правилами действий.

2) M_{mn} – пространство матриц размером $m \times n$.

3) P^n – пространство полиномов степени $\leq n$.

Замечание

Множество полиномов степени строго равной n не образуют пространство, так как сумма полиномов может оказаться полиномом меньшей степени.

4) Действия в линейном пространстве могут быть определены весьма необычным образом. Важно лишь, чтобы они удовлетворяли аксиомам линейного пространства. Например, в множестве положительных вещественных чисел $\mathbb{R}^+$ можно ввести сложение $\dagger$ и умножение $\odot$ следующим образом:

$x \dagger y = x \cdot y, \quad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы будут выполнены. Роль $\mathbb{O}$ здесь играет элемент $x = 1$, противоположный к x элемент – это $\frac{1}{x}$.

5) Пространство $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Его элементы:

$x = (\xi_1, \xi_2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , \xi_n), \quad$ где $\xi_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Правила действий:

$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , \xi_n + \eta_n)$

$\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , \alpha\xi_n)$, где $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

6) Множество решений $(x_1, x_2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , x_n)$ линейной однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ldots \ + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ldots \ + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

образует линейное пространство.

Как известно, однородная система имеет либо одно решение (нулевое), либо бесконечно много решений. Возьмем два решения $(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$ и $(y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_n)$ и определим правила действий с ними:

$$(x_1, x_2,\ \ldots\ldots, x_n) + (y_1, y_2,\ \ldots\ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2,\ \ldots\ldots, x_n + y_n);$$

$$\alpha\,(x_1,\ \ldots\ldots, x_n) = (\alpha x_1,\ \ldots\ldots, \alpha x_n)\,.$$

Нетрудно убедиться, что введённые действия не выводят из множества. Сделаем проверку для операции сложения. Подставим $(x_1 + y_1,\ \ldots\ldots, x_n + y_n)$ в i-ое уравнение системы:

$$\alpha_{i1}(x_1 + y_1) + \ \ldots\ldots \ + \alpha_{in}(x_n + y_n) =$$

$$= (\alpha_{i1}x_1 + \ \ldots\ldots \ + \alpha_{in}x_n) + (\alpha_{i1}y_1 + \ \ldots\ldots \ + \alpha_{in}y_n) = 0, \quad i = 1, 2,\ \ldots\ldots, m.$$

■

Нулевой элемент: $\mathbb{O} = (0, 0,\ \ldots\ldots, 0)$ является решением однородной системы. Противоположный к $(x_1, x_2,\ \ldots\ldots, x_n)$ элемент – это $(-x_1, -x_2,\ \ldots\ldots, -x_n)$. Он также является решением системы.

Основные свойства линейных пространств.

Теорема 1

В линейном пространстве существует только один нулевой элемент.

Доказательство:

От противного. Пусть есть два нулевых элемента: $\mathbb{O}_1$ и $\mathbb{O}_2$.

Тогда:

$$\mathbb{O}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 3}}}{=} \mathbb{O}_2 + \mathbb{O}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 1}}}{=} \mathbb{O}_1 + \mathbb{O}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 3}}}{=} \mathbb{O}_1,$$

то есть нулевые элементы совпали .

$\blacksquare$

Теорема 2

Для любого элемента x существует только один противоположный элемент.

Доказательство:

От противного.

Пусть есть два противоположных к x элемента : y_1 и y_2.

Тогда:

$$y_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 3}}}{=} y_2 + \mathbb{O} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 4}}}{=} y_2 + (x + y_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 2}}}{=} (y_2 + x) + y_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 4}}}{=}$$

$$= \mathbb{O} + y_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 1}}}{=} y_1 + \mathbb{O} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 3}}}{=} y_1,$$

то есть противоположные элементы совпали.

$\blacksquare$

Теорема 3

$$\forall x \in \mathcal{L}: \qquad 0 \cdot x = \mathbb{O}. \tag{79}$$

Доказательство:

$$x + 0 \cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 6}}}{=} 1 \cdot x + 0 \cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 8}}}{=} (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 6}}}{=} x. \tag{80}$$

Согласно аксиоме 3: $x + \mathbb{O} = x$, где $\mathbb{O}$ никак не связан с x. У нас в формуле (80) эта связь есть: $x + 0 \cdot x = x$, то есть теорема ещё не доказана. Покажем, что элемент $\mathbb{O} = 0 \cdot x$.

Пусть элемент y является противоположным к x. Тогда:

$$\mathbb{O} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 4}}}{=} x+y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{формула (80)}}}{=} (x+0\cdot x)+y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 1}}}{=} (0\cdot x+x)+y = \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 2}}}{=} 0\cdot x+(x+y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 4}}}{=} 0\cdot x+\mathbb{O} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 3}}}{=} 0\cdot x. \tag{81}$$

■

Теорема 4

Для противоположного к x элемента y выполнено:

$$y = (-1)\cdot x. \tag{82}$$

<u>Доказательство:</u>

Проверим, что так определенный элемент y является противоположным для x.

$$x+(-1)\cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 6}}}{=} 1\cdot x+(-1)\cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 8}}}{=} (1+(-1))\cdot x = 0\cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{формула (79)}}}{=} \mathbb{O}. \tag{83}$$

■

Теорема 5

$$\alpha\cdot\mathbb{O} = \mathbb{O}, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}(\mathbb{C}). \tag{84}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\alpha\cdot\mathbb{O} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{формула (83)}}}{=} \alpha(x+(-1)\cdot x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 7}}}{=} \alpha x+(-\alpha)x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{аксиома 8}}}{=} \\ = (\alpha+(-\alpha))\cdot x = 0\cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{формула (79)}}}{=} \mathbb{O}.$$

■

2.3 Линейная независимость векторов. Базис и размерность линейного пространства.

Определение

Система $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимой , если из равенства $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \; ..... \; + \alpha_n x_n$ следует равенство нулю всех коэффициентов $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \; ..... \;, \alpha_n = 0$. В противном случае система называется линейно зависимой.

Теорема 6

Набор ненулевых векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ линейно зависим тогда и только тогда, когда среди векторов набора существует по крайней мере один вектор, представленый в виде линейной комбинации предыдущих.

<u>Доказательство:</u>

Необходимость.

Пусть набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ линейно зависим. Тогда найдётся такой номер j, $1 \leq j < n$, что набор $x_1, \; ..... \;, x_j$ будет линейно независимым, а набор $x_1, \; ..... \;, x_j, x_{j+1}$ – линейно зависимым.

Следовательно, найдётся такой ненулевой набор коэффициентов $\{\alpha_i\}$ что выполнено:

$$\sum_{i=1}^{j} \alpha_i x_i + \alpha_{j+1} x_{j+1} = 0, \tag{85}$$

где $\alpha_{j+1} \neq 0$ (иначе набор $x_1, \; ..... \;, x_j$ будет линейно зависимым).

Выразим x_{j+1} из формулы (85) :

$$x_{j+1} = -\frac{1}{\alpha_{j+1}} \cdot \sum_{i=1}^{j} \alpha_i x_i. \tag{86}$$

Таким образом, мы представили вектор x_{j+1} в виде линейной комбинации векторов с меньшими номерами.

Достаточность.

Пусть x_{j+1} есть линейная комбинация векторов $x_1, \; ..... \;, x_j$. Это означает, что векторы $x_1, \; ..... \;, x_{j+1}$ линейно зависимы. Следовательно, векторы $x_1, \; ..... \;, x_{j+1}, \; ..... \;, x_n$ также линейно зависимы.

$\blacksquare$

Определение

Набор векторов $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{L}$ называется полным в линейном пространстве $\mathcal{L}$, если любой вектор $x \in \mathcal{L}$ может быть представлен линейной комбинацией векторов e_i с коэффициентами $\xi_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i. \tag{87}$$

Очевидно, что если из полного набора вычеркнуть векторы, которые линейно выражается через предшествующие векторы этого набора, то получившийся набор останется полным.

Определение

Пространство $\mathcal{L}$ называется конечномерным если в нём существует конечный полный набор векторов. В противном случае пространство называется бесконечномерным.

Определение

Полный линейно независимый набор векторов пространства называется базисом.

Замечания

1) Базис является максимальным линейно независимым набором векторов: любой набор, содержащий его как собственную часть,(то есть не совпадающий со всем набором), линейно зависим.

2) Базис является минимальным полным набором: любая его собственная часть не является полным набором.

Утверждение.

Вектор можно разложить по базису $\{e_i\}_{i=1}^n$ единственным образом.

<u>Доказательство:</u>

От противного.

Пусть $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \; \ldots\ldots \; + \xi_n e_n$, а также выполнено:

$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \; \ldots\ldots \; + \eta_n e_n$. Вычтем равенства друг из друга. Получим:

$0 = (\xi_1 - \eta_1)e_1 + \ .\ .\ .\ .\ .\ + (\xi_n - \eta_n)e_n \ \Rightarrow \ \xi_1 = \eta_1, \ .\ .\ .\ .\ .\ , \ \xi_n = \eta_n$ (в силу линейной независимости $\{e_i\}_{i=1}^n$).

■

Теорема 7

Любое конечномерное линейное пространство имеет базис.

Доказательство:

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – конечный полный набор векторов $\mathcal{L}$. Если он линейно независим, то он по определению является базисом. Если линейно зависим, то существует вектор e_k который выражается через линейную комбинацию предыдущих векторов по (теореме 6). Вычеркнем этот вектор. Оставшийся набор будет по-прежнему полным. Если он линейно независимым, то это базис. Если нет, то повторяем процедуру. Через конечное число шагов мы получим полный линейно независимый набор (базис).

■

Теорема 8

Любой линейно независимый набор векторов конечномерного пространства можно дополнить до базиса.

Доказательство:

Пусть $\{g_i\}_{i=1}^l$ – линейно независимый набор векторов. Пусть набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ образует базис. Объединим эти два набора в следующем порядке: $g_1, g_2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , g_l, e_1, \ .\ .\ .\ .\ .\ , e_n$. Так как в новом наборе содержится базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, то это полный набор. Проредим его, вычеркивая элементы, представимые в виде линейной комбинации предыдущих. Получим базис.

■

Замечание

Этот прием носит название “**прополки**”, ибо похож на соответствующую сельскохозяйственную операцию, поскольку служит последовательному удалению “сорняков”, портящих линейную независимость векторов набора (Булдырев В.С., Павлов Б.С. Линейная алгебра и функции многих переменных. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1985, 496 с.).

Теорема 9

Пусть набор векторов $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ – линейно независимый, а $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ – полный в $\mathcal{L}$. Тогда $m \leq n$. Таким образом, линейно независимый набор не может содержать больше векторов, чем полный набор.

Доказательство:

От противного.

Пусть $m > n$. Составим набор векторов $x_m,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_n$. Он полный, так как $y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_n$ – полный набор. Он линейно зависимый, так как x_m можно выразить через $y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_n$. Тогда найдётся элемент y_{s_1}, который линейно выражается через предыдущие $x_m,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_{s_1-1}$ (по теореме 6). После его вычеркивания набор останется полным. Допишем к нему слева элемент x_{m-1} и получим: $x_{m-1},\ x_m,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_{s_1-1},\ y_{s_1+1},\ \ldots\ldots,\ y_n$. Этот набор будет полным и линейно зависимым. Следовательно, в нем найдется вектор, который линейно выражается через предыдущие. Этим вектором не может быть x_m или x_{m-1}, так как они линейно независимы. Следовательно, это некоторый вектор y_{s_2}. Вычеркивая его, снова получим полный линейно зависимый набор

$$x_{m-1},\ x_m,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_{s_1-1},\ y_{s_1+1},\ \ldots\ldots,\ y_{s_2-1},\ y_{s_2+1},\ \ldots\ldots,\ y_n.$$

И так далее. На n-ом шаге мы вычеркнем последний из векторов $\{y_i\}_{i=1}^n$ и получим всё ещё полный набор $x_{1+m-n},\ x_{2+m-n},\ \ldots\ldots,\ x_m$. Так как по предположению $m > n$, то $1 + m - n > 1$. Следовательно, имеется еще по крайней мере один вектор x_{m-n}, который в виду полноты $x_{1+m-n}, \ldots\ldots, x_m$ линейно выражается через них, что противоречит линейной независимости $\{x_i\}_{i=1}^m$. Противоречие.

■

Теорема 10

Все базисы конечномерного линейного пространства содержат одинаковое число векторов.

Доказательство:

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_i\}_{i=1}^n$ – два базиса , то есть полные линейно независимые наборы векторов.

Посмотрим на эти два набора с разных сторон и применим теорему 9.

$$\left.\begin{array}{l}\{e_i\}_{i=1}^n - \text{линейно независимый набор}\\ \{g_i\}_{i=1}^m - \text{полный в } \mathcal{L} \text{ набор}\end{array}\right\} \Rightarrow n \leq m$$
$$\left.\begin{array}{l}\{g_i\}_{i=1}^m - \text{линейно независимый набор}\\ \{e_i\}_{i=1}^n - \text{полный в } \mathcal{L} \text{ набор}\end{array}\right\} \Rightarrow m \leq n$$

Таким образом, $m = n$.

■

Определение

Число векторов в базисе конечномерное линейного пространства $\mathcal{L}$ называется размерностью пространства.

Обозначение: $dim\mathcal{L}$.

Утверждение 1

Набор мономов $1,\ t,\ t^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ t^n$ является базисом в P^n (пространстве полиномов в степени $\leq n$).

Доказательство:

Базис – это полный линейно независимый набор. Полнота очевидна, так как любой полином степени $\leq n$ можно представить в виде линейной комбинации $1,\ t,\ t^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ t^n$. Линейная независимость $1,\ t,\ t^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ t^n$ означает, что: $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot t +\ .\ .\ .\ .\ . + \alpha_n \cdot t^n = 0$. По следствию из основной теоремы алгебры полином n-ой степени имеет не более n корней. Если он обращается в нуль более чем в n точках, то все его коэффициенты равны нулю.

В нашем случае полином обращается в нуль при любом t, то есть в бесконечном числе точек $\Rightarrow$ $\alpha_0 = \alpha_1 = \ .\ .\ .\ .\ . \ = \alpha_n = 0$.

■

Следствие

$$dimP^n = n + 1. \tag{88}$$

Утверждение 2

Набор векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ .\ .\ .\ .\ .\ , e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{89}$$

образует базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.

<u>Доказательство:</u>

Проверим полноту. Любой вектор $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ можно представить в виде линейной комбинации $e_1, \ .\ .\ .\ .\ . , e_n$: $\quad x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + \xi_n e_n$

Проверим линейную независимость.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \mathbb{O} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + \alpha_n \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + \alpha_n \cdot 0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + \alpha_n \cdot 1 = 0 \end{cases} . \tag{90}$$

Решение системы (90): $\alpha_1 = \alpha_2 = \ .\ .\ .\ .\ . \ = \alpha_n = 0$, что означает линейную независимость векторов $e_1, \ e_2, \ .\ .\ .\ .\ . , \ e_n$.

■

Следствие

$$dim\mathbb{R}^n = n. \qquad (91)$$

Изоморфизм линейных пространств

Необъятность множества n-мерных пространств кажущаяся. В некотором смысле существует только одно n-мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^n$. И одно n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$. Поясним это.

Определение

Два линейных пространства $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие $x \leftrightarrow \tilde{x}$ такое, что :

1) $\alpha x \longleftrightarrow \alpha\tilde{x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

2) $x + y \longleftrightarrow \tilde{x} + \tilde{y}$

Это взаимно-однозначное соответствие называется изоморфизмом линейных пространств $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$.

Теорема 11

Любое вещественное (комплексное) линейное пространство $\mathcal{L}$ размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $e_1,\ e_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ e_n$ – некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}$,

$\xi_1,\ \xi_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ \xi_n$ – координаты вектора x в этом базисе. Каждому элементу $x \in \mathcal{L}$ поставим в соответствие элемент $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Это соответствие сохраняет алгебраическую структуру: при сложении векторов соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все координаты умножаются на это число. Таким образом, выполнены условия изоморфизма.

■

Пример бесконечномерного пространства

$C[a, b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. В нём будут линейно независимы следующие функции: $1,\ t,\ t^2,\ \ldots\ldots,\ t^n,\ \ldots\ldots \qquad \forall n.$

2.4 Подпространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L}$ называется подмножества $\mathcal{N}$ из $\mathcal{L}$, замкнутое относительно законов композиции в $\mathcal{L}$, то есть такое что $\forall x, y \in \mathcal{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполнено: $x + y \in \mathcal{N}$, $\alpha x \in \mathcal{N}$.

Теорема 12

Пространство $\mathcal{N}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ само будет являться линейным пространством, если действия с элементами в $\mathcal{N}$ введены также как в $\mathcal{L}$ (в этом случае говорят, действия в $\mathcal{N}$ индуцированны из $\mathcal{L}$).

Доказательство:

Действия в $\mathcal{L}$ удовлетворяют аксиомам линейного пространства $\Rightarrow$ действия в $\mathcal{N}$ также удовлетворяют аксиомам линейного пространства(так как они были индуцированы из $\mathcal{L}$) .

Проверим, что нулевой и противоположный элементы принадлежат $\mathcal{N}$.

Действительно, рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathcal{N}$. Тогда $0 \cdot x \in \mathcal{N}$.

/ По определению подпространства $\alpha \cdot x \in \mathcal{N}$, где $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ /

По теореме 3 (формула (79)): $\mathbb{O} = 0 \cdot x$, то есть $\mathbb{O} \in \mathcal{N}$.

Рассмотрим противоположный к x элемент $(-x)$. Согласно теореме 4 (формула (82)): $-x = (-1) \cdot x$, то есть $-x \in \mathcal{N}$.

$\blacksquare$

Определение

Тривиальным подпространством называют подпространство, состоящее из одного нулевого элемента и подпространство, совпадающие со всем