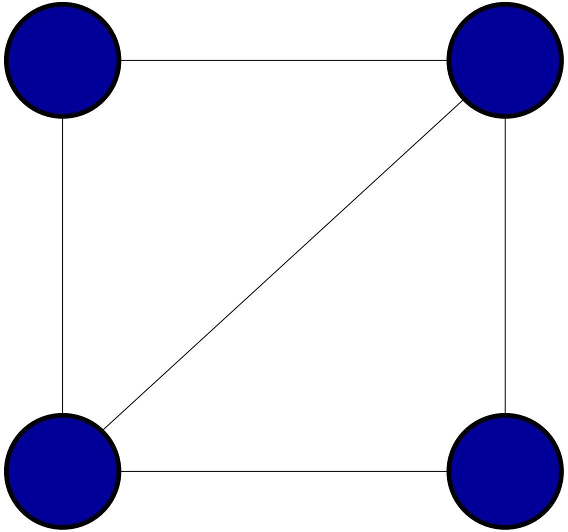
Плоские и планарные графы

- ✓ Понятие плоского и планарного графа
- ✓ Свойства плоских укладок графа
- ✓ Теорема Эйлера для плоского графа
- ✓ Следствия из теоремы Эйлера
- ✓ Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

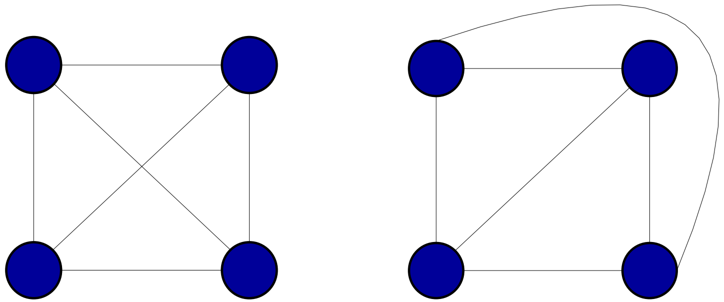
Плоские и планарные графы

- Понятие плоского и планарного графа
- ✓ Свойства плоских укладок графа
- ✓ Теорема Эйлера для плоского графа
- ✓ Следствия из теоремы Эйлера
- ✓ Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

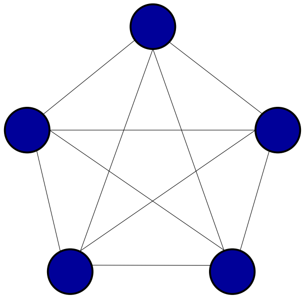
Плоским графом называется граф, который изображен на плоскости без пересечения и самопересечения ребер (дуг).



Если граф изображен на плоскости с пересечением и (или) самопересечением ребер (дуг), но существует плоский изоморфный ему граф, то такой граф называется **планарным**; в противном случае граф называется **непланарным**.



Планарный



Непланарный

Из определения планарного графа следуют следующие утверждения:

1. Всякий подграф планарного графа планарен.
2. Граф планарен тогда и только тогда, когда каждая компонента его связности планарна.

Плоские и планарные графы

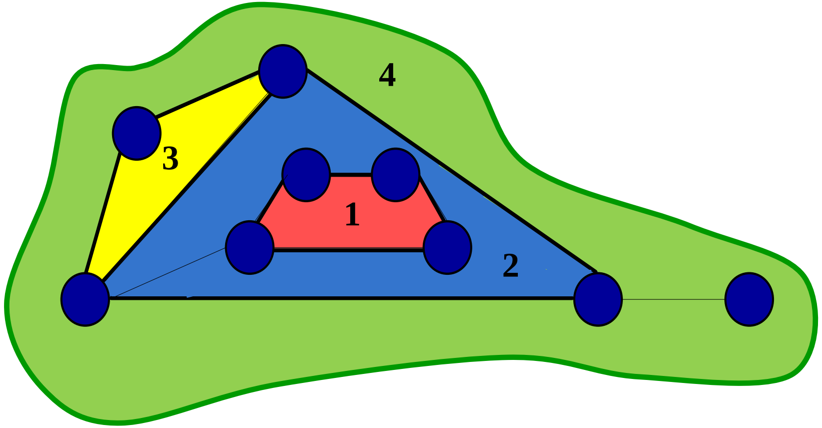
- ✓ Понятие плоского и планарного графа
- Свойства плоских укладок графа
- ✓ Теорема Эйлера для плоского графа
- ✓ Следствия из теоремы Эйлера
- ✓ Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

Задача плоской укладки планарного графа.

Пусть имеется пространство L – плоскость для укладки графа $G(X,U)$. Необходимо найти такое отображение вершин и ребер (дуг) графа $G(X,U)$ в точки и кривые Жордана пространства L, чтобы:

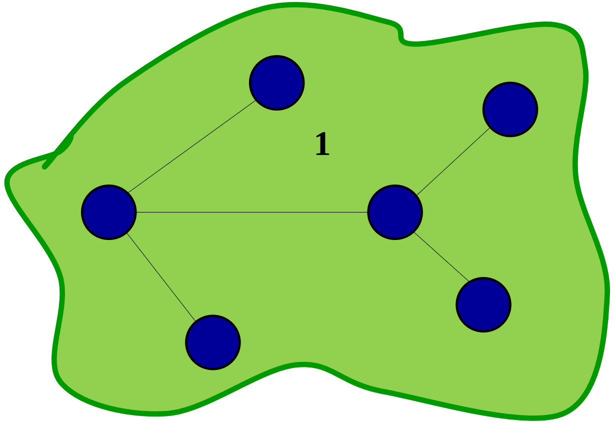
- различным вершинам графа соответствовали различные точки;
- кривые Жордана, соответствующие различным ребрам (дугам) графа, пересекались между собой только в точках, соответствующих инцидентным этим ребрам (дугам) вершинам графа.

Гранью плоского графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, в котором каждая пара точек может быть соединена кривой Жордана, не пересекающей ребра (дуги) графа. **Границей грани** будем считать множество вершин и ребер (дуг) графа, принадлежащих одной грани.



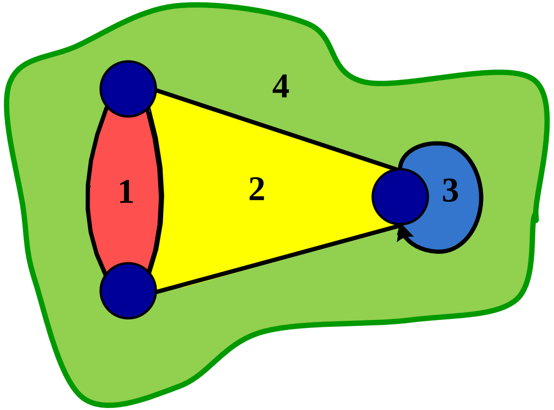
Утверждение 1.

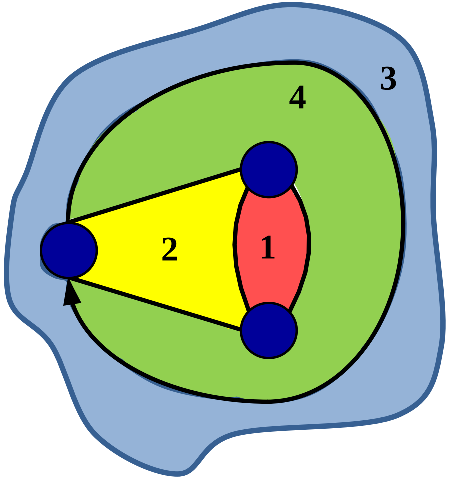
В плоском графе имеется одна внешняя грань, остальные грани – внутренние.



Утверждение 2.

Плоская укладка дерева приводит к построению плоского графа с одной гранью; причем эта грань – внешняя.





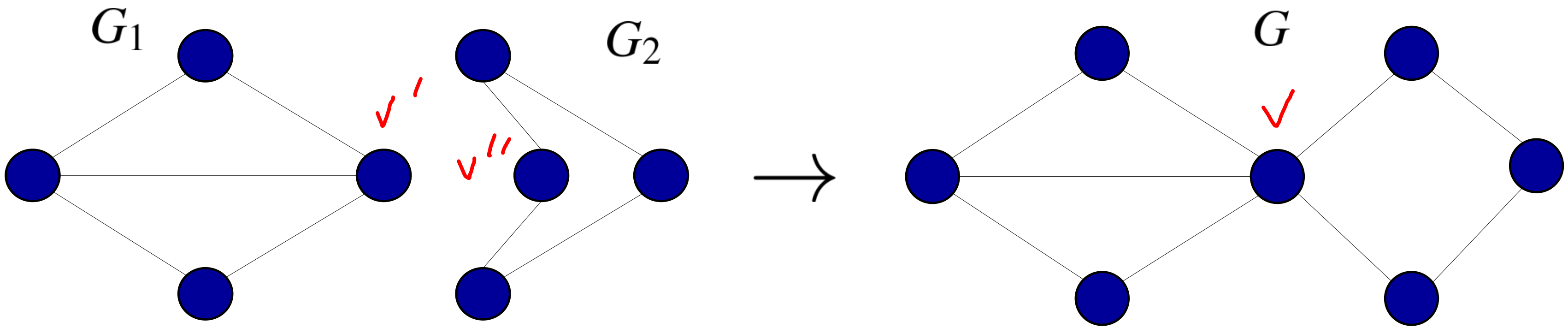
Утверждение 3.

Понятие грани распространяется на псевдографы.

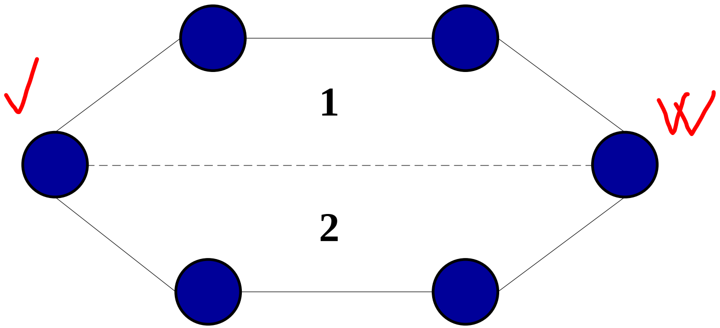
Утверждение 4.

Стереографическая проекция плоского графа позволяет превратить любую внутреннюю грань во внешнюю.

1. Всякий планарный граф допускает плоскую укладку, в которой любая выбранная вершина будет принадлежать внешней грани (на основании утверждения №4).
2. Склейка двух плоских графов по общей вершине (по общему ребру) приводит к образованию нового плоского графа.

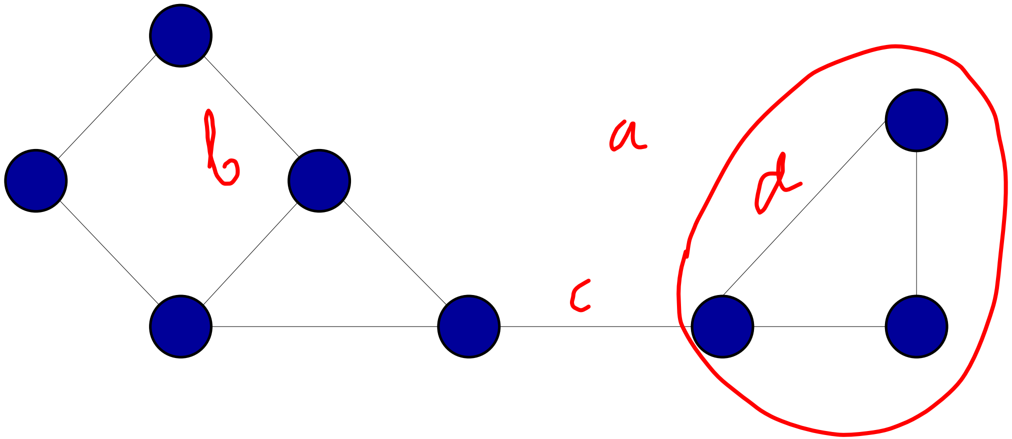


3. Две различные вершины графа, находящиеся на границе некоторой грани плоского графа, можно соединить кривой Жордана, которая разобьет эту грань на две грани.



4. Каждая точка плоскости L, в которой уложен некоторый граф, входит:

- только в одну грань, если она не лежит на ребре;
- только в одну грань, если она лежит на ребре, являющемся мостом в графе;
- точно в две грани, если она лежит на ребре, не являющемся мостом в графе.



Плоские и планарные графы

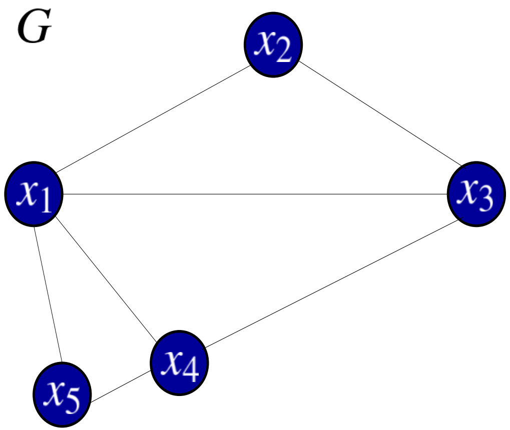
- ✓ Понятие плоского и планарного графа
- ✓ Свойства плоских укладок графа
- Теорема Эйлера для плоского графа
- ✓ Следствия из теоремы Эйлера
- ✓ Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

Теорема Эйлера для плоского графа (формула Эйлера).

Для всякого связного плоского графа выполняется следующее равенство:

$$n - m + f = 2,$$

где n, m, f — количество вершин, ребер, граней плоского графа.



Доказательство.

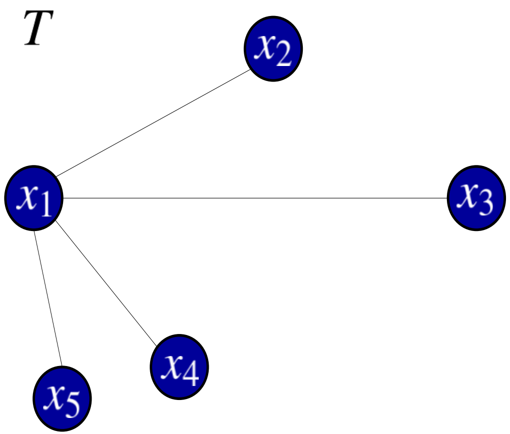
Пусть $G(X,U)$ – связный плоский n,m-граф, содержащий f граней.

Теорема Эйлера для плоского графа (формула Эйлера).

Для всякого связного плоского графа выполняется следующее равенство:

$$n - m + f = 2,$$

где n, m, f — количество вершин, ребер, граней плоского графа.



Доказательство.

Пусть $G(X, U)$ – связный плоский n, m-граф, содержащий f граней.

Построим для графа $G(X, U)$ его некоторое остовное дерево – граф T. Известно, что количество ребер в этом дереве – $m(T) = n - 1$, а количество граней в нем – $f(T) = 1$ (на основании утверждения №2).

Подставим значения в формулу Эйлера: $n - (n-1) + 1 = 2.$

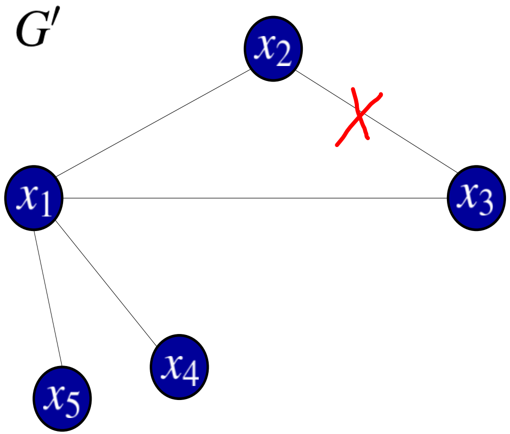
Следовательно, формула Эйлера верна для графа T.

Теорема Эйлера для плоского графа (формула Эйлера).

Для всякого связного плоского графа выполняется следующее равенство:

$$n - m + f = 2,$$

где n, m, f — количество вершин, ребер, граней плоского графа.



Доказательство.

Пусть $G(X,U)$ – связный плоский n,m-граф, содержащий f граней.

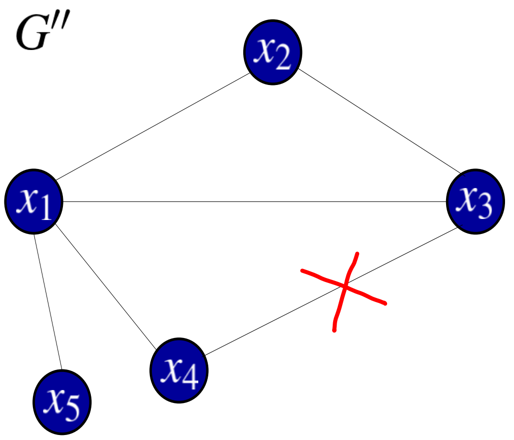
Построим граф G' путем добавления в дерево T одного из новых ребер графа G, не вошедших в это дерево. Тогда $m(G') = m(T) + 1 = n$, а количество граней в нем $f(G') = f(T) + 1 = 2$, (на основании свойства №3). Подставим значения в формулу Эйлера: $n - \underline{n + 2 = 2}$. Следовательно, формула Эйлера верна для графа G'.

Теорема Эйлера для плоского графа (формула Эйлера).

Для всякого связного плоского графа выполняется следующее равенство:

$$n - m + f = 2,$$

где $n,\ m,\ f$ — количество вершин, ребер, граней плоского графа.



Доказательство.

Пусть $G(X,U)$ – связный плоский n,m-граф, содержащий f граней.

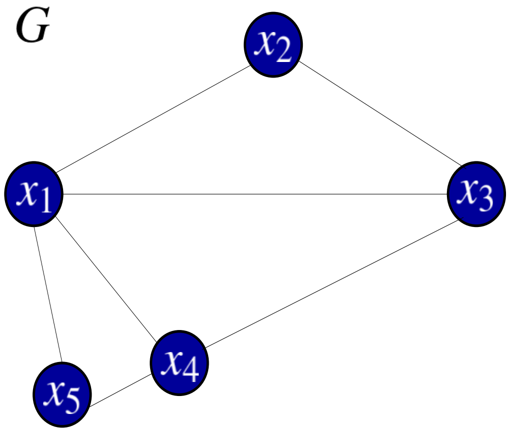
Достроим цепочку графов $T \to G' \to G'' \to \ldots \to G$ до тех пор, пока не будет построен исходный граф G. Каждый следующий граф в цепи строится на основе предыдущего путем добавления в него нового ребра из графа G.

Теорема Эйлера для плоского графа (формула Эйлера).

Для всякого связного плоского графа выполняется следующее равенство:

$$n - m + f = 2,$$

где n, m, f — количество вершин, ребер, граней плоского графа.



Доказательство.

Пусть $G(X,U)$ – связный плоский n,m-граф, содержащий f граней.

При проверке формулы Эйлера для очередного графа в цепочке заметим, что добавление нового ребра приводит к увеличению количества граней на 1.

Таким образом, формула Эйлера верна и для графа G, завершающего эту цепочку.

Плоские и планарные графы

- ✓ Понятие плоского и планарного графа
- ✓ Свойства плоских укладок графа
- ✓ Теорема Эйлера для плоского графа
- Следствия из теоремы Эйлера
- ✓ Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

1. Число граней в плоской укладке связного планарного n, m-графа определяется по формуле Эйлера как $\mathbf{f = m - n + 2}$, т.е. f – инвариант планарного графа, не зависит от способа его плоской укладки.

Утверждение. Количество внутренних граней в связном планарном n, m-графе определяется цикломатическим числом этого графа, т.е. равно максимальному числу независимых циклов в графе.

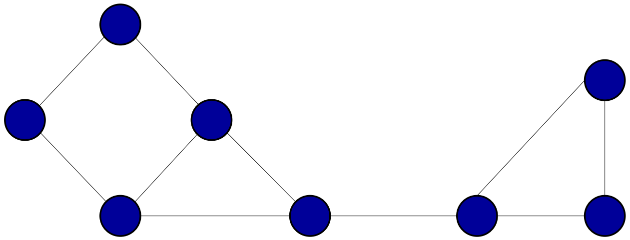
По теореме Эйлера $n - m + f = 2$ или $f - 1 = m - n + 1$.

Известно, что для связного n, m-графа $\boldsymbol{\sigma(G) = m - n + 1}$. Любой плоский граф содержит точно одну внешнюю грань, поэтому $\boldsymbol{\sigma(G)}$ совпадает с количеством внутренних граней в нем.

2. Для связного планарного n, m-графа при $n \geq 3$ выполняется следующее условие:

$$m \leq 3n - 6.$$

G



$n = 8,\ m = 10,\ f = 4$

$2m = 20$

Доказательство.

Пусть G – плоский граф без петель и кратных ребер.

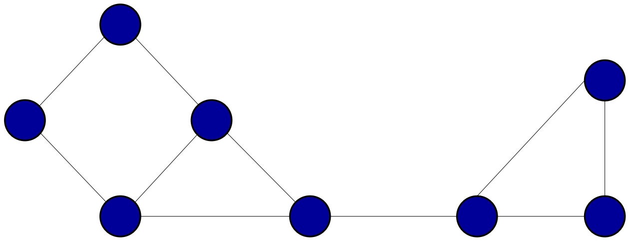
Всякое ребро в нем – раздел двух граней или мост (свойство №4 плоских укладок).

Поэтому суммарное количество ребер во всех гранях этого графа - максимум $2m$.

2. Для связного планарного n, m-графа при $n \geq 3$ выполняется следующее условие:

$$m \leq 3n - 6.$$

G



$n = 8,\ m = 10,\ f = 4$

$2m = 20 \quad 3f = 12$

Доказательство.

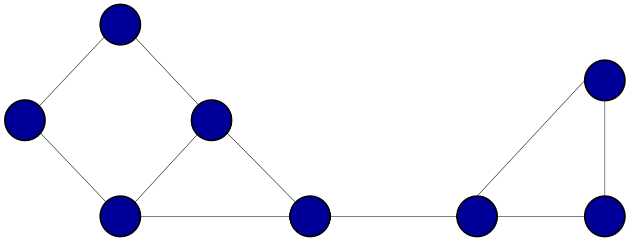
Пусть G – плоский граф без петель и кратных ребер.

Каждая грань в нем образована как минимум тремя ребрами. Поэтому суммарное количество ребер во всех гранях этого графа - минимум $3f$.

2. Для связного планарного n,m-графа при $n \geq 3$ выполняется следующее условие:

$$m \leq 3n - 6.$$

G



$n = 8,\ m = 10,\ f = 4$

$2m = 20 \qquad 3f = 12$

$10 \leq 3 \cdot 8 - 6$ (верно)

Доказательство.

Пусть G – плоский граф без петель и кратных ребер.

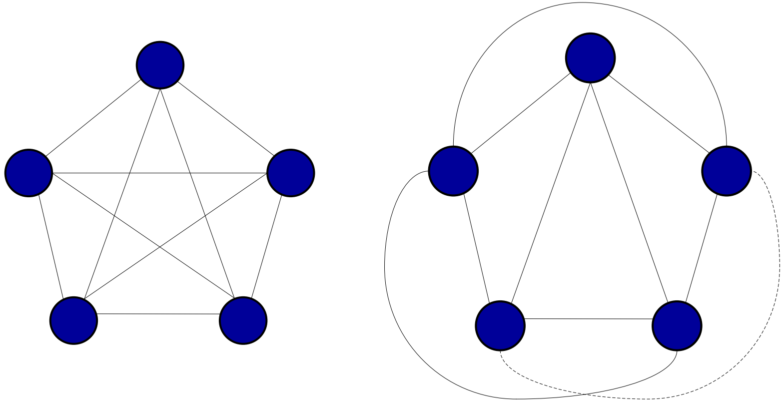
Следовательно, можно утверждать, что $3f \leq 2m.$

Подставим в это неравенство $f = m - n + 2.$

Тогда $3(m - n + 2) \leq 2m.$

Отсюда и следует, что $m \leq 3n - 6.$

3. Полный 5-вершинный граф K_5- непланарный граф.



Доказательство (от противного).

$$m(K_5) = 10,\ n(K_5) = 5.$$

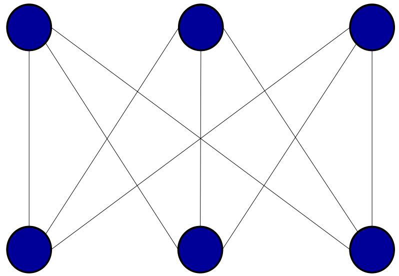
Предположим, что граф K_5 планарен.

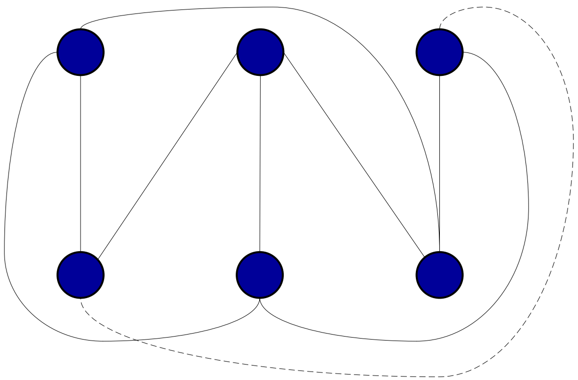
Тогда для него должно выполняться условие $m \leq 3n - 6$.

Но после подстановки значений получим, что $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$ (не верно).

Поэтому граф K_5 - непланарный граф.

4. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ - непланарный граф.





Доказательство (от противного).

$$m(K_{3,3}) = 9,\ n(K_{3,3}) = 6.$$

Предположим, что граф $K_{3,3}$ планарен.

Из-за двудольности графа каждая грань в нем образована как минимум 4 ребрами. Поэтому суммарное количество ребер во всех гранях этого графа - минимум $4f$. Следовательно, можно утверждать, что $4f \leq 2m$. Подставим в это неравенство $f = m - n + 2$. Тогда $m \leq 2n - 4$.

Но после подстановки значений получим, что $9 \leq 2 \cdot 6 - 4$ (не верно).

Поэтому граф $K_{3,3}$ - непланарный граф.

Плоские и планарные графы

- ✓ Понятие плоского и планарного графа
- ✓ Свойства плоских укладок графа
- ✓ Теорема Эйлера для плоского графа
- ✓ Следствия из теоремы Эйлера
- Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

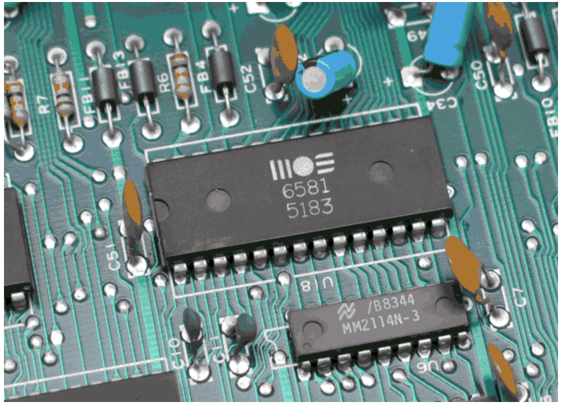
Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа).

Граф является планарным тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов изоморфных и (или) гомеоморфных графам K_5 и $K_{3,3}$.

Примечание: Графы K_5 и $K_{3,3}$ называют графами Понтрягина-Куратовского.

Задача **плоской укладки** графа решается следующим образом:

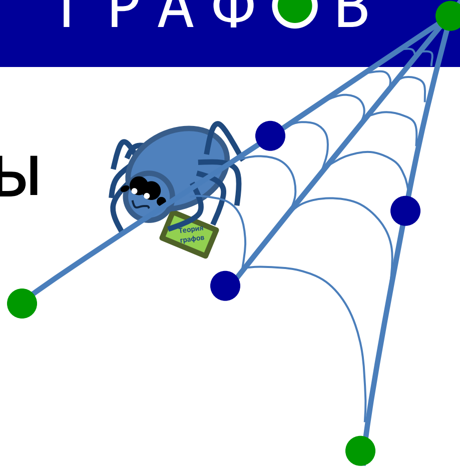
1. Исследование графа на планарность.
2. Если граф не планарный, то определяется минимальное количество слоев для его укладки.
3. Плоская укладка графа в слоях монтажного пространства.



Плоские и планарные графы

- ✓ Понятие плоского и планарного графа
- ✓ Свойства плоских укладок графа
- ✓ Теорема Эйлера для плоского графа
- ✓ Следствия из теоремы Эйлера
- Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

Плоские и планарные графы



- ✓ Понятие плоского и планарного графа
- ✓ Свойства плоских укладок графа
- ✓ Теорема Эйлера для плоского графа
- ✓ Следствия из теоремы Эйлера
- ✓ Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графа)

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО