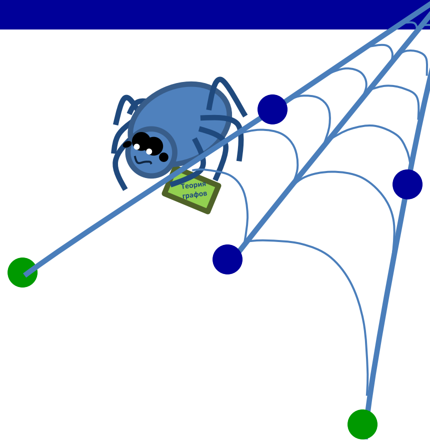
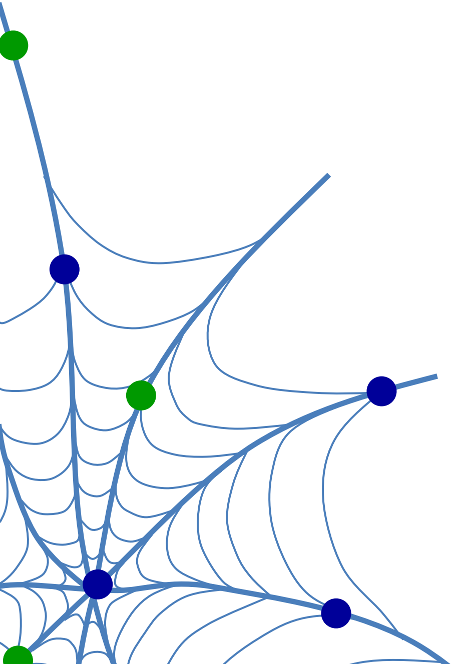


Основы теории графов

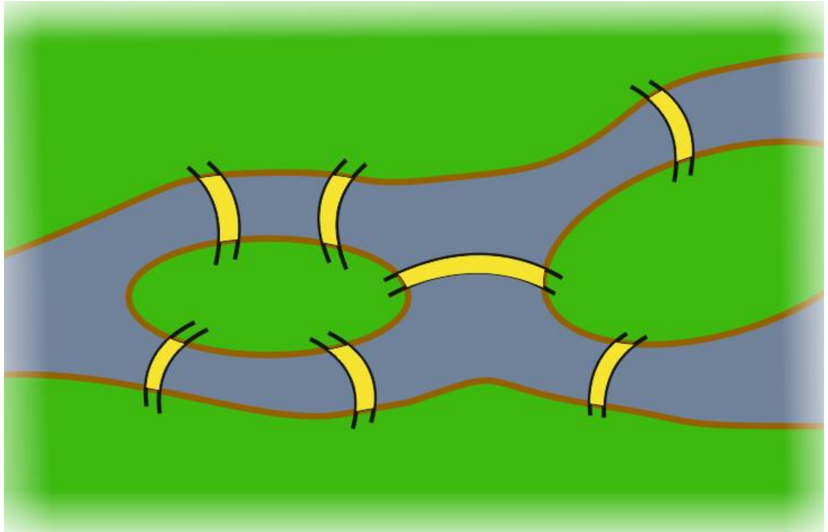
- ✓ История теории графов
- ✓ Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- ✓ Операции над графами

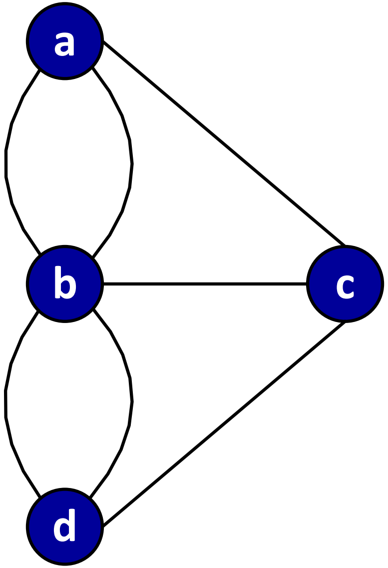


Основы теории графов

- История теории графов
- ✓ Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- ✓ Операции над графами

Термин «граф» впервые ввел венгерский математик Д.Кёниг в 1936 году, хотя основы этой теории были заложены еще в 18 веке великим Эйлером (задача о Кёнигсбергских мостах).





Основы теории графов

- ✓ История теории графов
- Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- ✓ Операции над графами

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, X \neq \varnothing$

Понятие №1. Граф – это графическое изображение специального бинарного отношения $R \subseteq X \cdot X$.

R = {(x,y): (x,y) $\in$ X*X, μ(x,y)>0}, где:

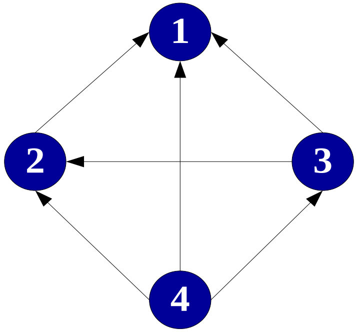
X = {x1,x2,…,xn}, X $\neq \varnothing$;

$\mu(x,y)$ – степень принадлежности элемента (x,y) множеству R, числовое значение на отрезке $[0;1]$.

Пример 1. Построение четкого графа.

Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

R1 = {(x,y): (x,y) $\in$ X*X; x > y}



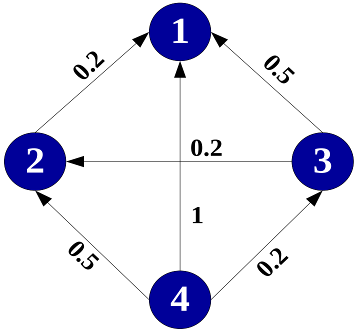
$$
\begin{aligned}
X \cdot X = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\\
&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\
&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\
&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}
\end{aligned}
$$

Матрица отношения R_1

$$M_{R_1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_1 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

Пример 2. Построение нечеткого графа.



Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

R2 = {(x,y): (x,y) $\in$ X*X;

x намного больше y}

$$X \cdot X = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

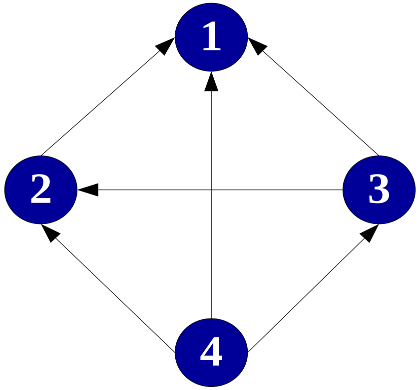
Матрица отношения R_2

$$M_{R_2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}$$

R2 = 0,2/(2,1) + 0,5/(3,1) + 0,2/(3,2) + 1/(4,1) + 0,5/(4,2) + 0,2/(4,3), где знак «+» означает объединение элементов в множество

Понятие №2. Граф – отображение $\eta : X \to X$.

Пример 3. Построение графа как отображения.

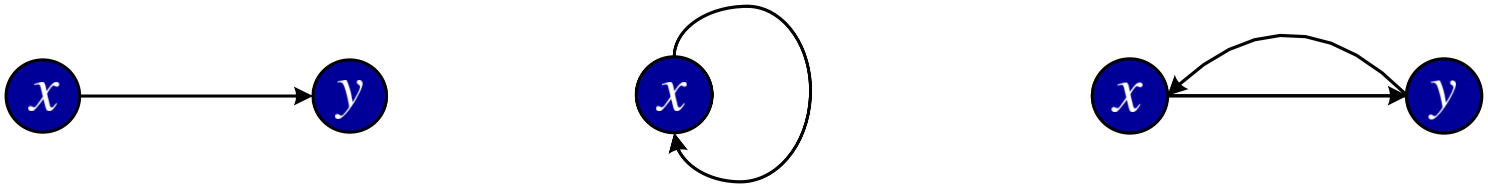


x	$\Gamma(x)$ – образы x
1	$\{\varnothing\}$
2	$\{1\}$
3	$\{1,2\}$
4	$\{1,2,3\}$

Понятие №3. Граф $G(X,U)$ – два множества X и U, находящихся между собой в отношении инцидентности.

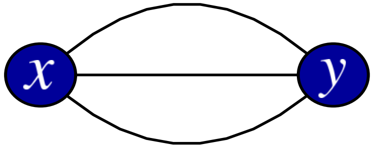
Множество вершин – $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, X \neq \varnothing$.

Множество ребер и (или) дуг $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.



Дуга *Петля* *Ребро*

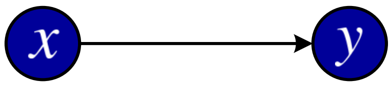
Ребра называются кратными, если они имеют общие концы.



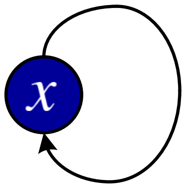
Понятие №3. Граф $G(X,U)$ – два множества X и U, находящихся между собой в отношении инцидентности.

Множество вершин – $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}, X\neq\varnothing$.

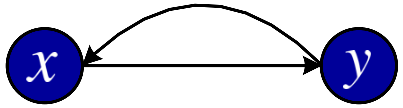
Множество ребер и (или) дуг $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$.



Дуга

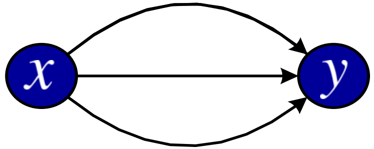


Петля

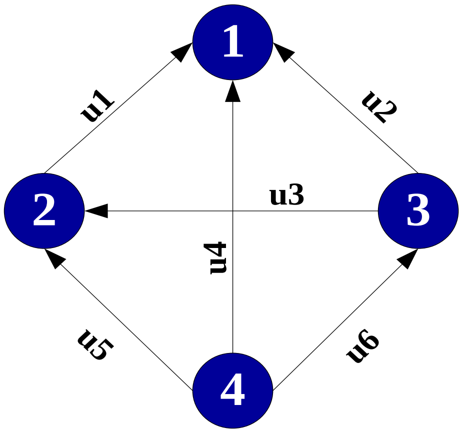


Ребро

Дуги называются кратными, если они имеют общую вершину исхода и общую вершину захода.



Пример 4. Построение $n, m-$ графа $G(X,U)$.



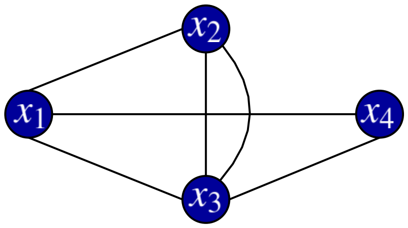
Матрица инцидентности $||A||_{n \times m}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Основы теории графов

- ✓ История теории графов
- ✓ Понятие графа
- Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- ✓ Операции над графами

1. $G(X,U)$ – неограф (неориентированный граф), если U – множество ребер.



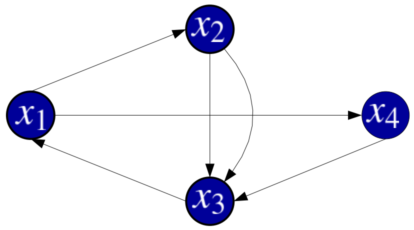
$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Локальная степень (= валентность) вершины x неографа $\rho(x)$ – числовая характеристика вершины, определяемая количеством инцидентных ей ребер.

x_i	x_1 x_2 x_3 x_4
$\rho(x_i)$	3 3 4 2

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)}{2} \qquad \rho(x_i) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \qquad m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}}{2}$$

2. $G(X,U)$ – орграф (ориентированный граф), если U – множество дуг.



$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Полустепень захода, полустепень исхода вершины x орграфа $\rho^+(x), \rho^-(x)$ – числовые характеристики вершины, определяемые количеством входящих, выходящих дуг.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$\rho^+(x_i)$	1	1	3	1
$\rho^-(x_i)$	2	2	1	1

$$m = \sum_{i=1}^{n} \rho^+(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \rho^-(x_i)$$

$$\rho^-(x_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$$

$$\rho^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$$

1. $G(X,U)$ – неограф (неориентированный граф), если U – множество ребер.

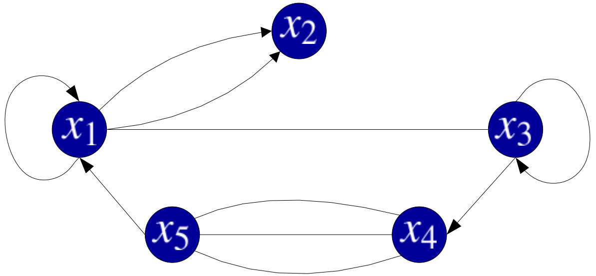
2. $G(X,U)$ – орграф (ориентированный граф), если U – множество дуг.

3. $G(X,U)$ – граф со смешанной структурой, если U – множество ребер и дуг.

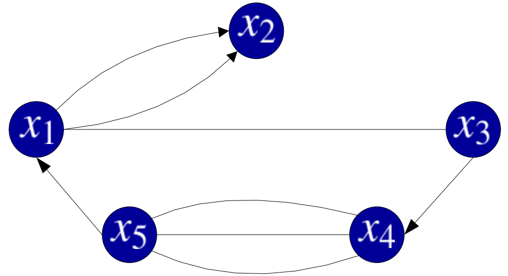
Основы теории графов

- ✓ История теории графов
- ✓ Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- ✓ Операции над графами

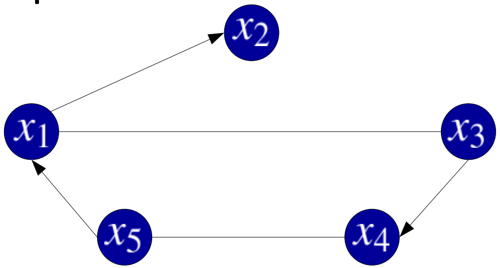
Псевдограф – обобщенное понятие бинарного графа.



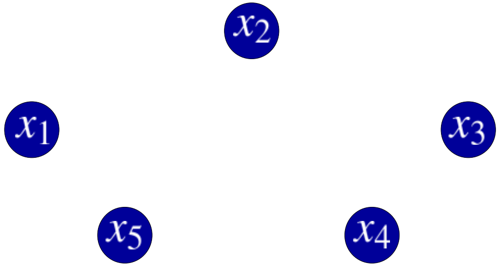
Мультиграф – псевдограф без петель. Мультичисло графа – максимальное количество кратных ребер (дуг) в графе.



Скелетный (= обыкновенный, = простой) граф – мультиграф, в котором мультичисло равно 1.

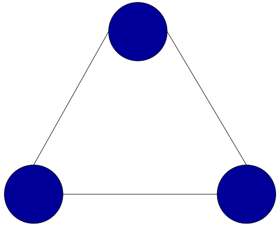


Пустой граф (= 0-граф) – граф $G(X,U)$, в котором $U = \varnothing$.

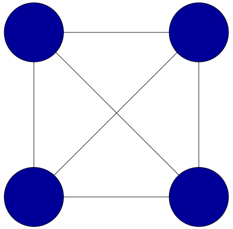


Полный граф – скелетный неограф, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

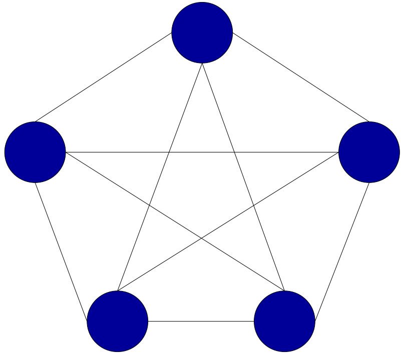
Количество ребер в полном графе – $m = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$



$n = 3$
$m = 3$

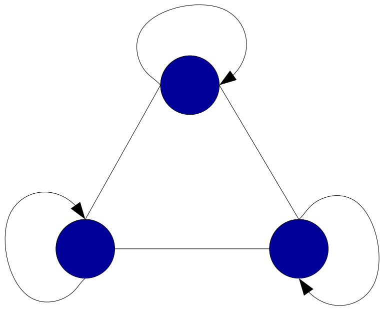


$n = 4$
$m = 6$

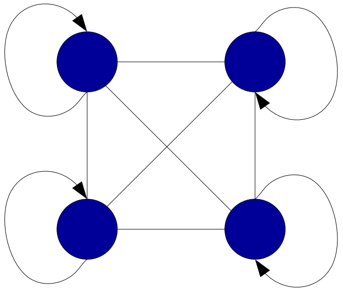


$n = 5$
$m = 10$

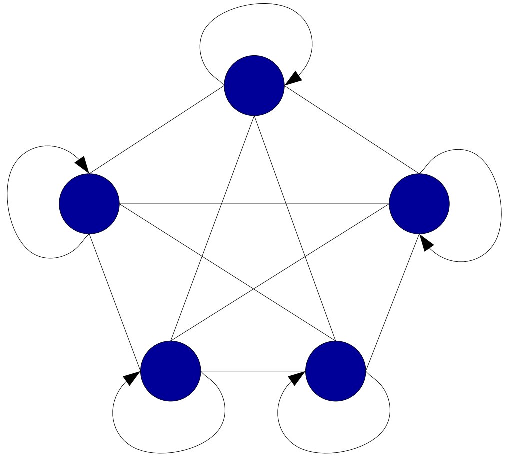
Насыщенный граф – это полный граф, в котором есть петля при каждой вершине.



$n = 3$

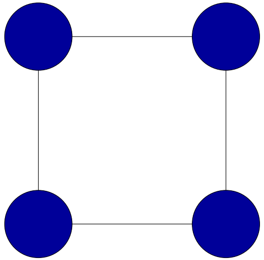


$n = 4$

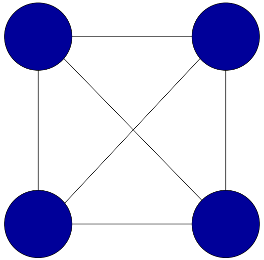


$n = 5$

Регулярный граф – это граф, в котором $\forall x \in X : \rho(x) = \mathrm{const}$ или $\rho^{+}(x) = \mathrm{const};\ \rho^{-}(x) = \mathrm{const}.$

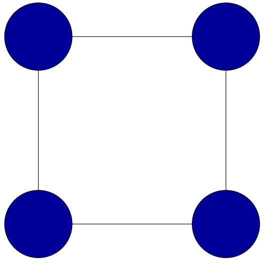


$\forall x \in X : \rho(x) = 2$

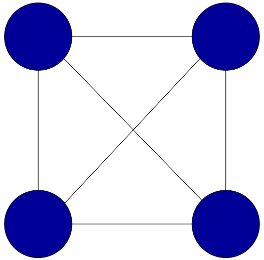


$\forall x \in X : \rho(x) = 3$

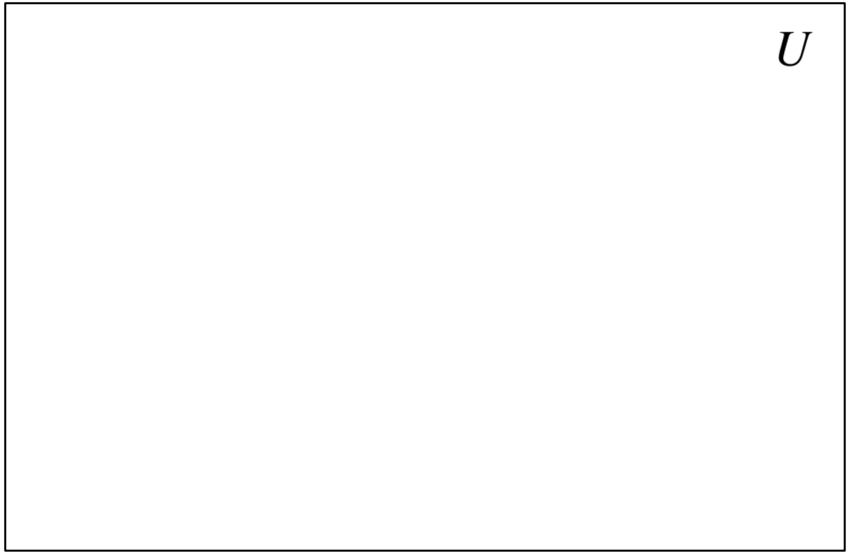
Регулярный граф – это граф, в котором $\forall x \in X : \rho(x) = \mathrm{const}$ или $\rho^{+}(x) = \mathrm{const};\ \rho^{-}(x) = \mathrm{const}.$



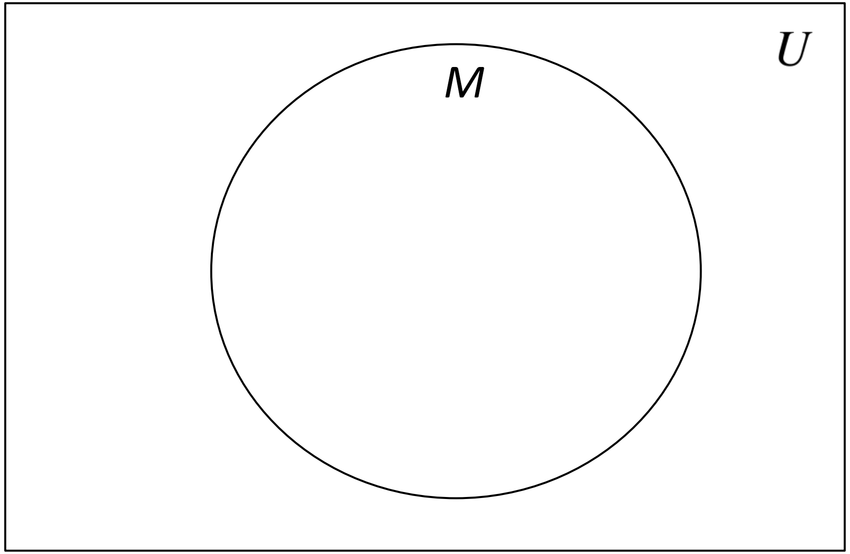
$$\forall x \in X : \rho(x) = 2$$



$$\forall x \in X : \rho(x) = 3$$

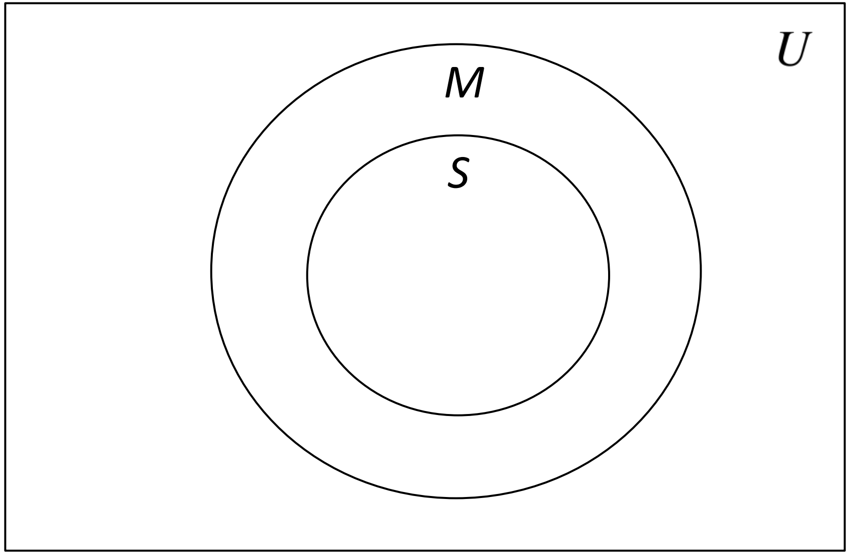


U - *множество псевдографов*



U - *множество псевдографов*

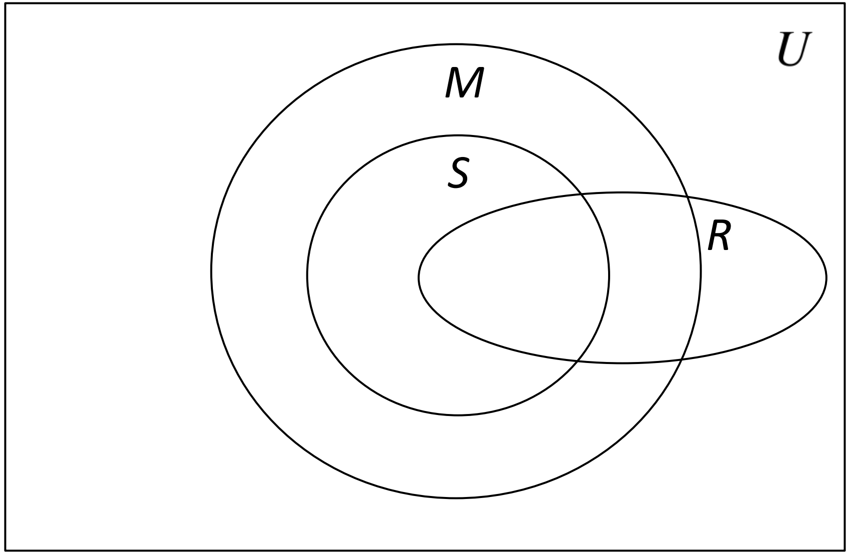
М – множество мультиграфов



U - *множество псевдографов*

M – множество мультиграфов

S – множество скелетных графов

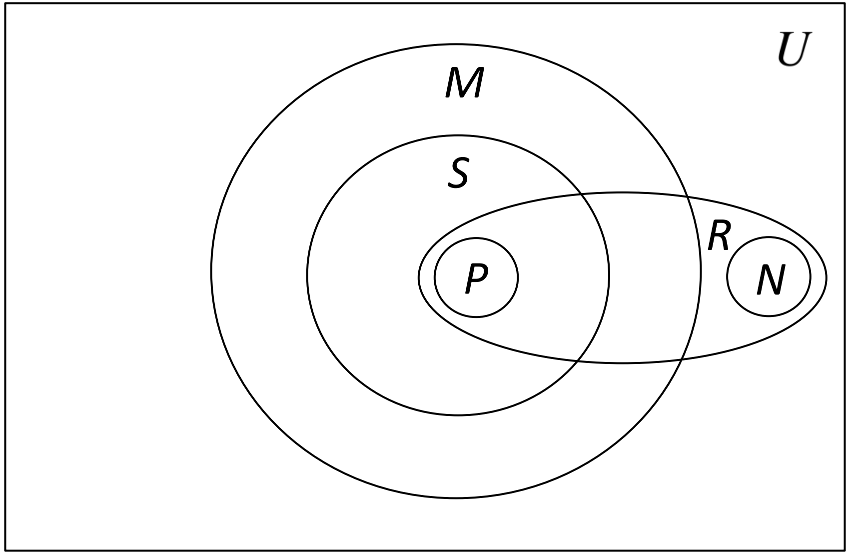


U - *множество псевдографов*

M – множество мультиграфов

S – множество скелетных графов

R – множество регулярных графов



U - множество псевдографов

M – множество мультиграфов

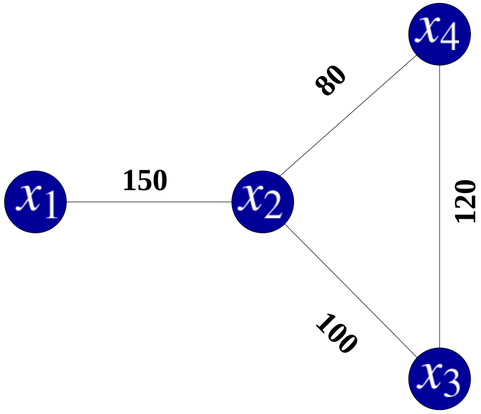
S – множество скелетных графов

R – множество регулярных графов

P – множество полных графов

N – множество насыщенных графов

Взвешенный граф – это граф с числовыми характеристиками (весами) у элементов множеств X и (или) U.



Матрица весов

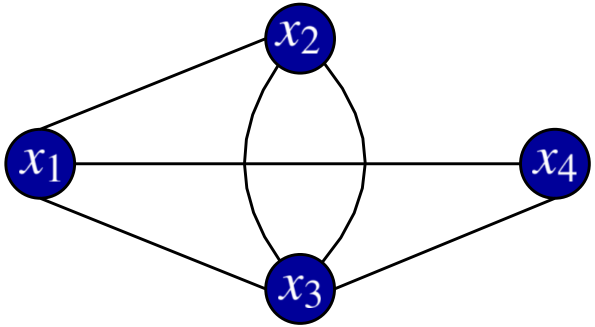
$$W = \begin{vmatrix} \infty & 150 & \infty & \infty \\ 150 & \infty & 100 & 80 \\ \infty & 100 & \infty & 120 \\ \infty & 80 & 120 & \infty \end{vmatrix}$$

Основы теории графов

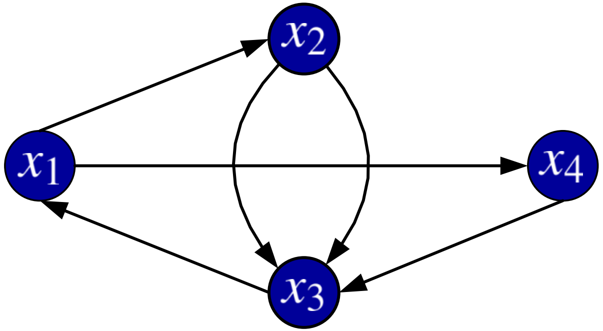
- ✓ История теории графов
- ✓ Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- Смежность в графах
- ✓ Операции над графами

Две вершины x и y являются смежными, если они являются концами одного и того же ребра или началом и концом одной и той же дуги.

Ребра называются смежными, если у них имеется один общий конец.



Дуги называются смежными, если у них общая вершина конца дуги.



Основы теории графов

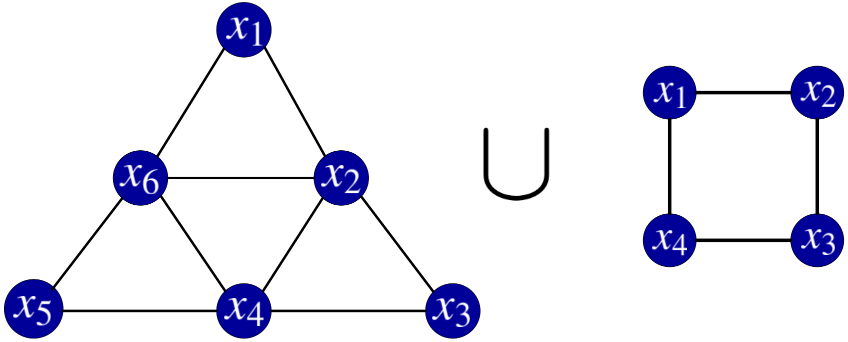
- ✓ История теории графов
- ✓ Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- Операции над графами

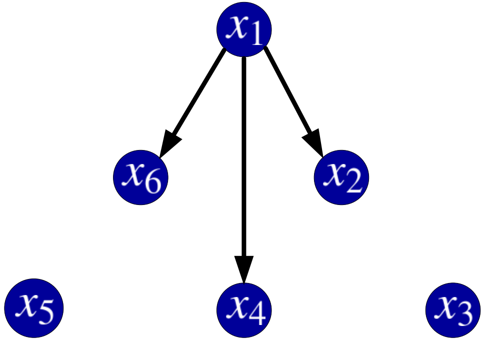
1. Объединение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cup G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cup X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.





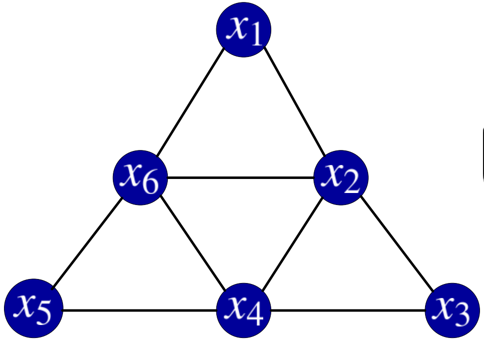
$$\Gamma(x_1) = \Gamma_1(x_1) \cup \Gamma_2(x_1) = \{x_2, x_6\} \cup \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4, x_6\}$$

1. Объединение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cup G_2(X_2,U_2)$.

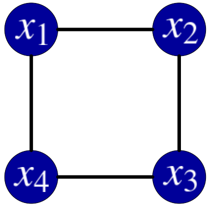
$X = X_1 \cup X_2$,

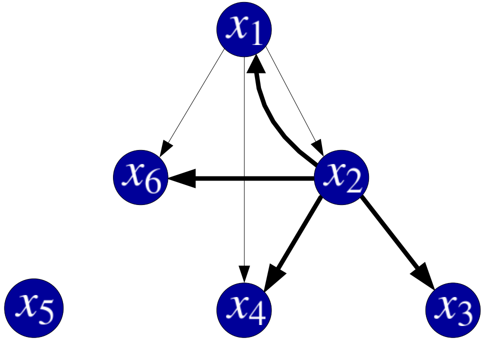
$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



$\cup$





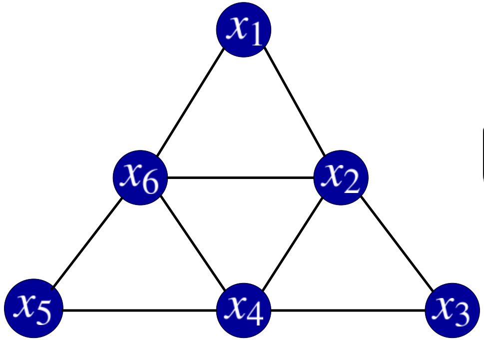
$$\Gamma(x_2) = \Gamma_1(x_2) \cup \Gamma_2(x_2) = \{x_1, x_3, x_4, x_6\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$$

1. Объединение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cup G_2(X_2,U_2)$.

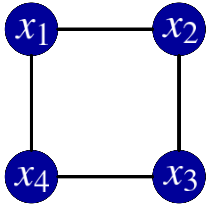
$X = X_1 \cup X_2$,

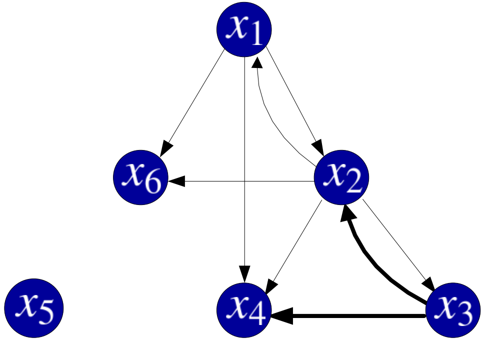
$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



$\cup$





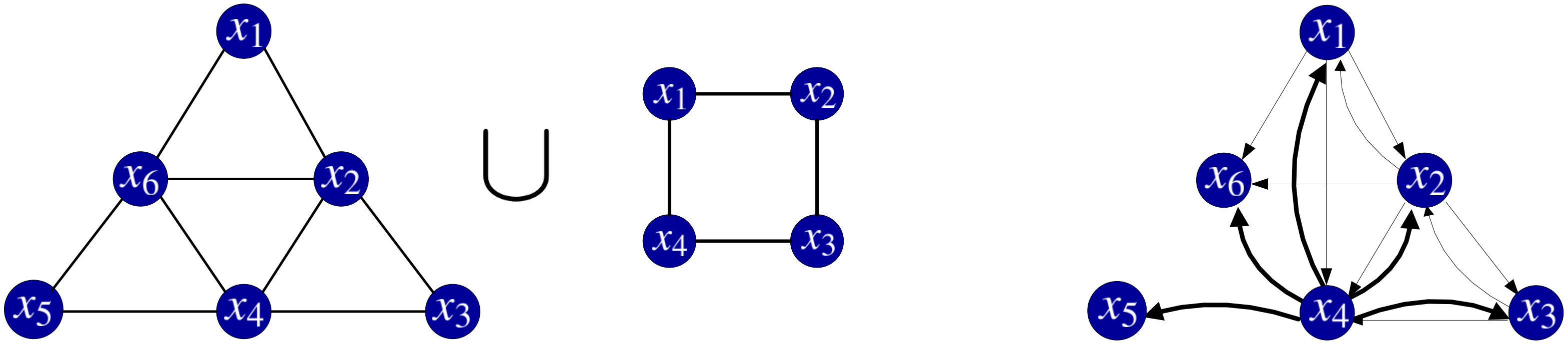
$$\Gamma(x_3) = \Gamma_1(x_3) \cup \Gamma_2(x_3) = \{x_2, x_4\} \cup \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\}$$

1. Объединение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cup G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cup X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



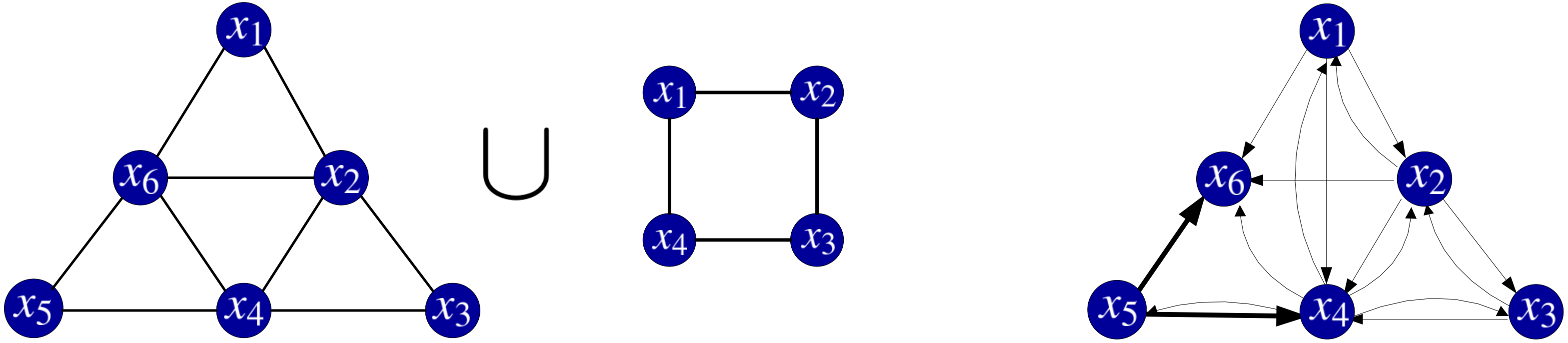
$$\Gamma(x_4) = \Gamma_1(x_4) \cup \Gamma_2(x_4) = \{x_2, x_3, x_5, x_6\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$$

1. Объединение графов $G(X,U)=G_1(X_1,U_1)\cup G_2(X_2,U_2)$.

$X=X_1\cup X_2$,

$\forall x\in X:\Gamma(x)=\Gamma_1(x)\cup\Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



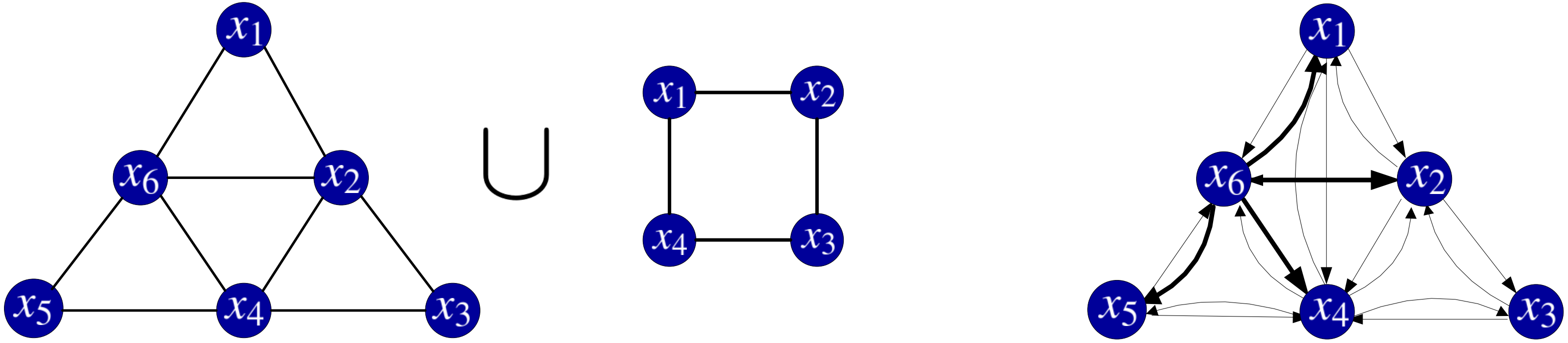
$$\Gamma(x_5)=\Gamma_1(x_5)\cup\Gamma_2(x_5)=\{x_4,x_6\}\cup\{\varnothing\}=\{x_4,x_6\}$$

1. Объединение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cup G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cup X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



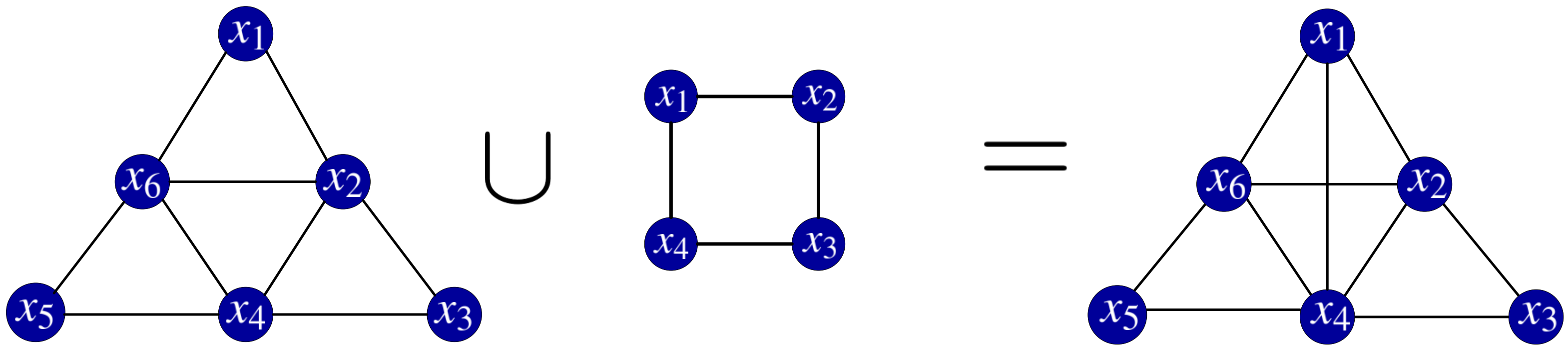
$$\Gamma(x_6) = \Gamma_1(x_6) \cup \Gamma_2(x_6) = \{x_1, x_2, x_4, x_5\} \cup \{\varnothing\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$$

1. Объединение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cup G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cup X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.

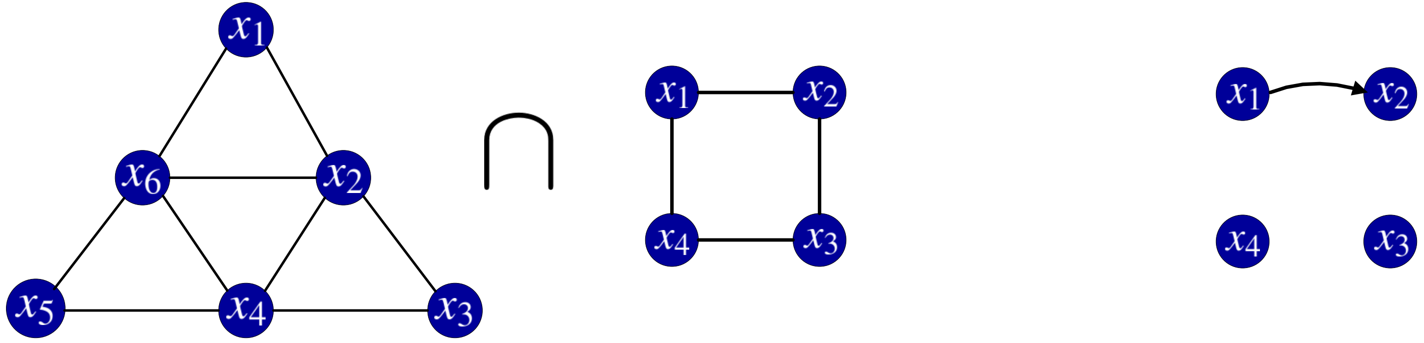


2. Пересечение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cap G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cap X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



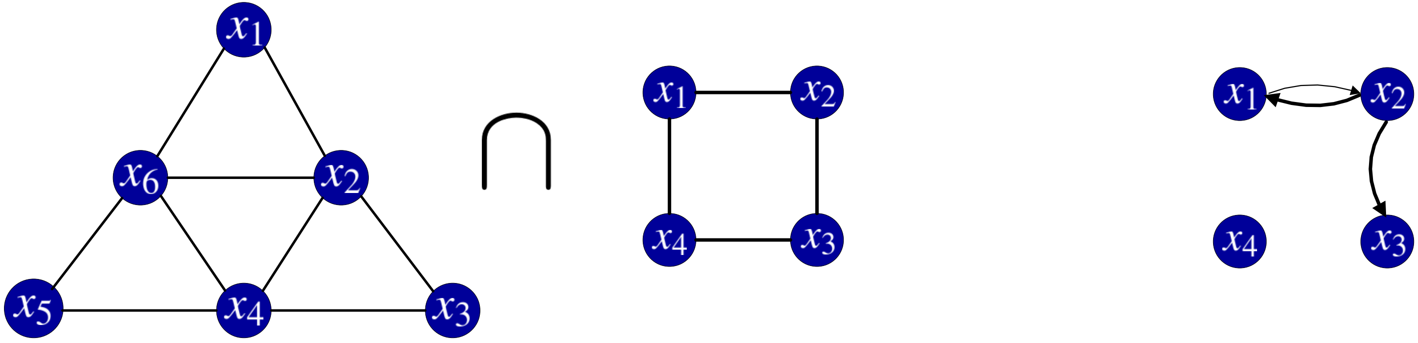
$$\Gamma(x_1) = \Gamma_1(x_1) \cap \Gamma_2(x_1) = \{x_2, x_6\} \cap \{x_2, x_4\} = \{x_2\}$$

2. Пересечение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cap G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cap X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



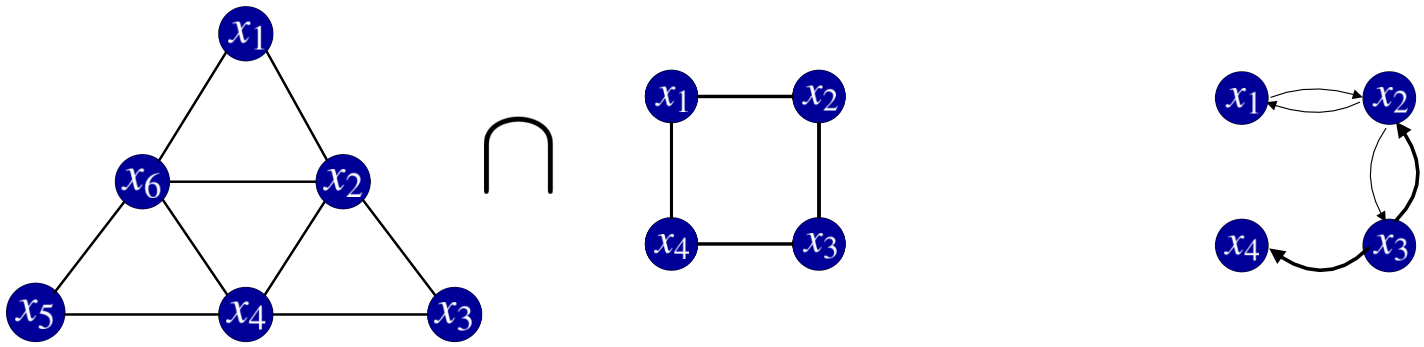
$$\Gamma(x_2) = \Gamma_1(x_2) \cap \Gamma_2(x_2) = \{x_1, x_3, x_4, x_6\} \cap \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3\}$$

2. Пересечение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cap G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cap X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



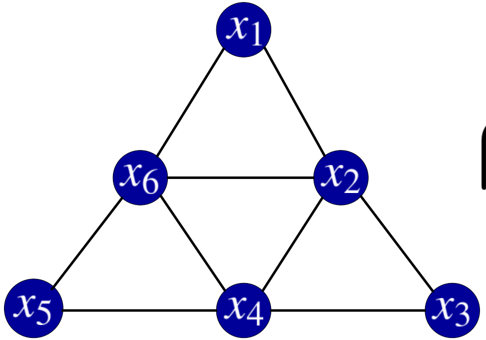
$$\Gamma(x_3) = \Gamma_1(x_3) \cap \Gamma_2(x_3) = \{x_2, x_4\} \cap \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\}$$

2. Пересечение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cap G_2(X_2,U_2)$.

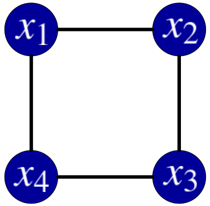
$X = X_1 \cap X_2$,

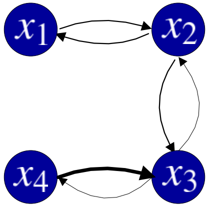
$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.



$\cap$





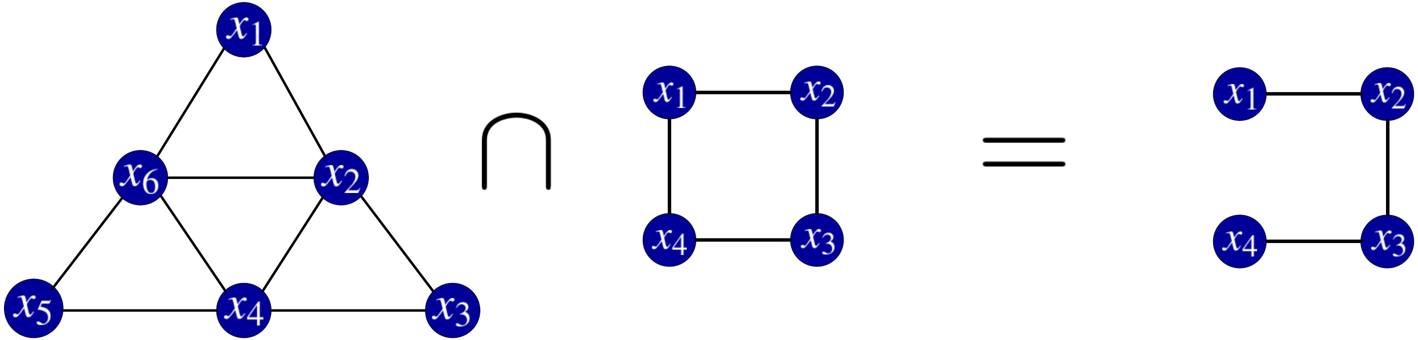
$$\Gamma(x_4) = \Gamma_1(x_4) \cap \Gamma_2(x_4) = \{x_2, x_3, x_5, x_6\} \cap \{x_1, x_3\} = \{x_3\}$$

2. Пересечение графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \cap G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \cap X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2 соответственно.

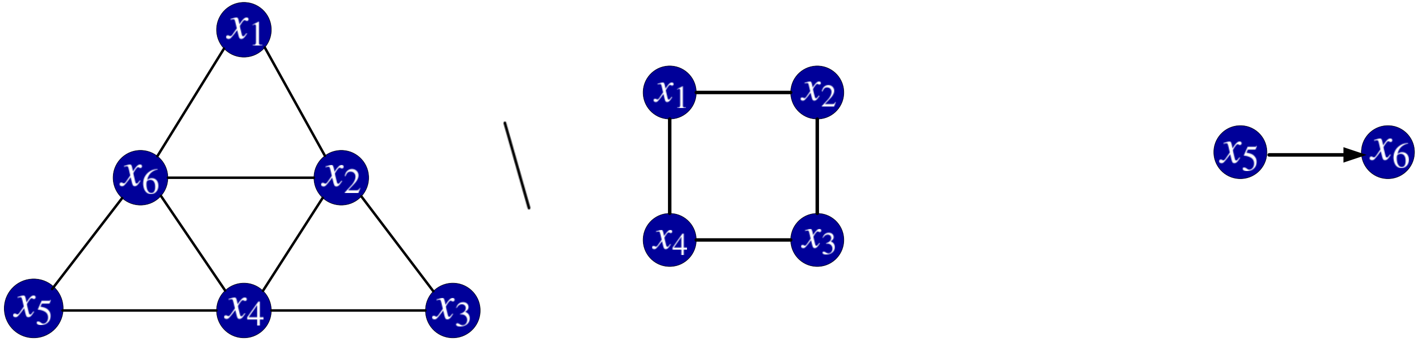


3. Вычитание графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \setminus G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \setminus X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap X$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1 соответственно.



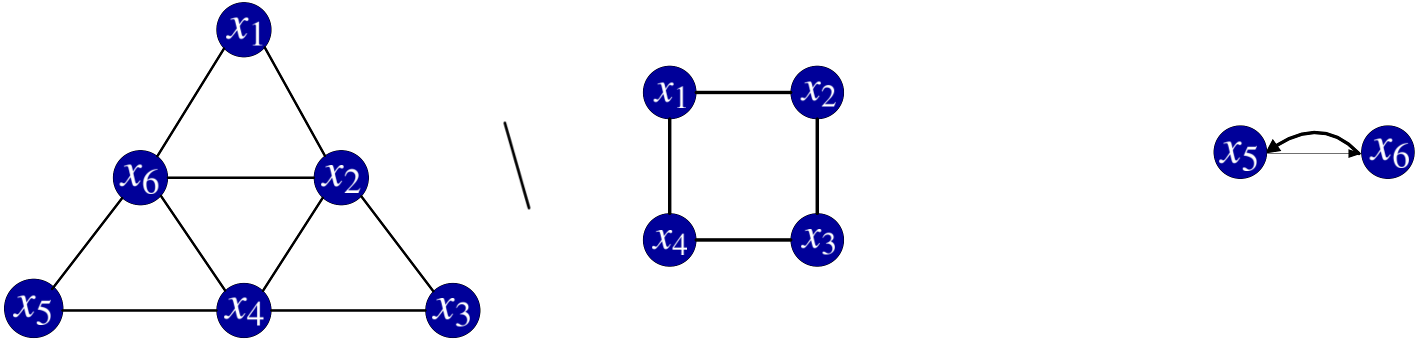
$$\Gamma(x_5) = \{x_4, x_6\} \cap \{x_5, x_6\} = \{x_6\}$$

3. Вычитание графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \setminus G_2(X_2,U_2)$.

$X = X_1 \setminus X_2$,

$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap X$,

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1 соответственно.



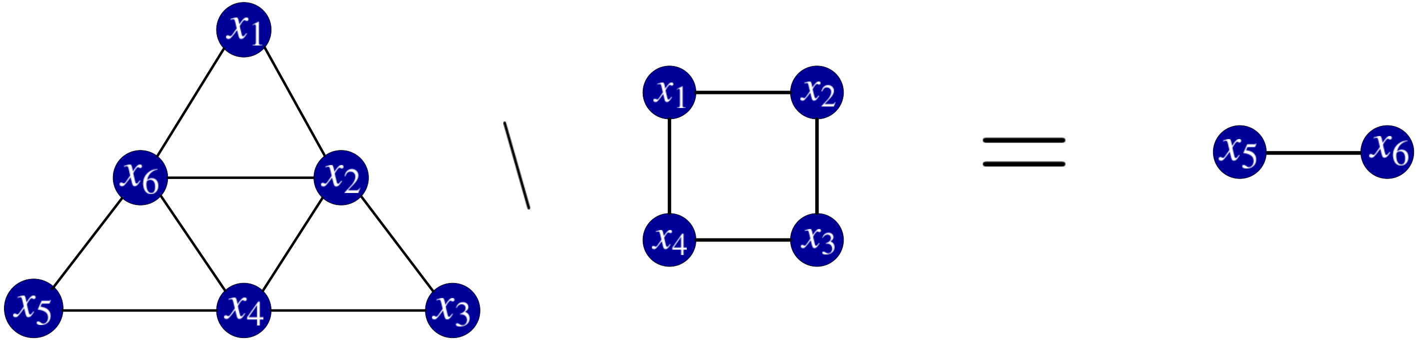
$$\Gamma(x_6) = \{x_1, x_2, x_4, x_5\} \cap \{x_5, x_6\} = \{x_5\}$$

3. Вычитание графов $G(X,U) = G_1(X_1,U_1) \setminus G_2(X_2,U_2)$.

$$X = X_1 \setminus X_2,$$

$$\forall x \in X : \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap X,$$

где $\Gamma(x)$, $\Gamma_1(x)$ – множества образов вершины x в графах G, G_1 соответственно.



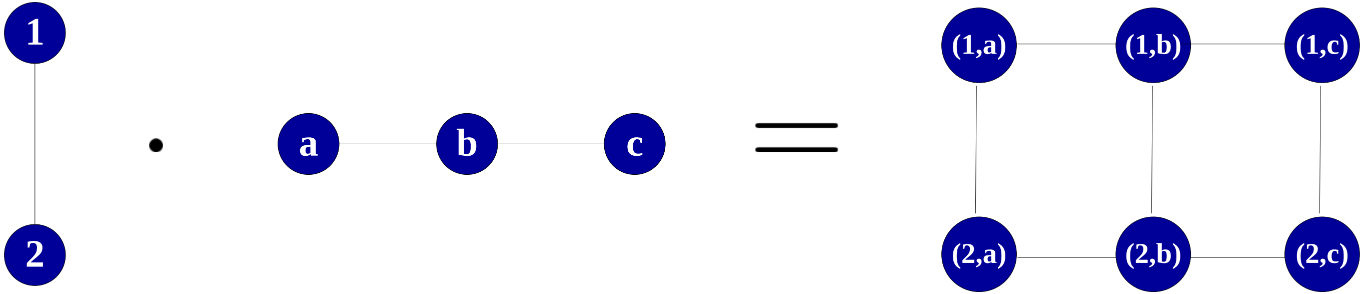
4. Произведение графов $G(V,Z) = G_1(X,U) \cdot G_2(Y,R)$

$V = X \cdot Y$

Z – множество ребер и (или) дуг, определяемое по следующему правилу.

Вершины (x_i, y_j) и (x_k, y_l) будут смежными в графе тогда и только тогда, когда:

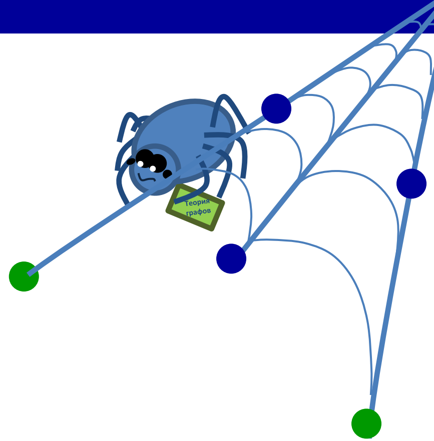
- $x_i = x_k$, y_j и y_l – смежные вершины в графе G_2;
- $y_j = y_l$, x_i и x_k – смежные вершины в графе G_1.



Основы теории графов

- ✓ История теории графов
- ✓ Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- Операции над графами

Основы теории графов



- ✓ История теории графов
- ✓ Понятие графа
- ✓ Классификация графов по структуре
- ✓ Основной терминологический базис теории графов
- ✓ Смежность в графах
- ✓ Операции над графами

Л.С. Лисицына

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО