Учитывая, что: $f^*(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, приходим к требуемому соотношению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = f'(x). \tag{136}$$

■

Замечание
Равенство (130) может быть записано в виде:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \tag{137}$$

Теорему 21 кратко можно сформулировать так: ряд можно почленно дифференцировать, если ряд из производных сходится равномерно.

2.5 Степенные ряды

Определение
Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots\ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots\ldots, \tag{138}$$

где a_n – постоянные числа, называется степенным рядом по степеням $(x - x_0)$.
В частности, при $x_0 = 0$ получаем степенной ряд по степеням x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots. \tag{139}$$

Для выяснения характера области сходимости степенного ряда сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 22 (Теорема Абеля)
Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится в некоторой точке x_1, то он сходится, причем абсолютно, на целом интервале, симметричном относительно точки x_0 (то есть для любого x, удовлетворяющего неравенству: $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$).

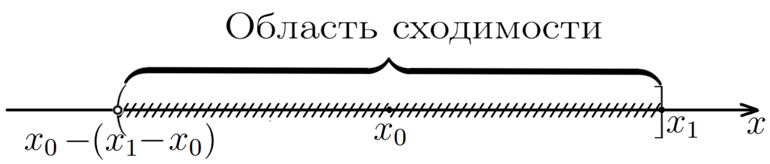

Рис. 3: Иллюстрация к теореме Абеля

Замечание
Область абсолютной сходимости – это область сходимости без точки x_1 (про точку x_1 нет информации).

Доказательство:
Введем следующие обозначения:

$$x - x_0 = y, \qquad x_1 - x_0 = y_1. \tag{140}$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ примет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n.$$

По условию теоремы исходный ряд сходится в точке x_1. В наших обозначениях это означает сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y_1^n$. Согласно необходимому условию сходимости,

$$\lim_{n\to\infty} a_n y_1^n = 0, \tag{141}$$

то есть последовательность $\{a_n y_1^n\}$ сходится, а значит ограничена некоторым числом M:

$$|a_n y_1^n| \le M \quad \forall\, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,. \tag{142}$$

Рассмотрим значения x, удовлетворяющее неравенству:

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0| \;\Leftrightarrow\; |y| < |y_1| \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{y}{y_1}\right| < 1. \tag{143}$$

Тогда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n y_1^n| \cdot \left|\frac{y}{y_1}\right|^n \le \Big/ \text{формула (142)} \Big/ \le \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{y}{y_1}\right|^n. \tag{144}$$

Так как $\left|\frac{y}{y_1}\right| < 1$, то члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n y^n|$ меньше членов сходящейся геометрической прогрессии. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n y^n|$ сходится при $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$, а значит ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ сходится абсолютно.

■

Область сходимости степенного ряда
Из теоремы Абеля можно сделать заключение о характере области сходимости степенного ряда.

При $x = x_0$ степенной ряд сходится, то есть его область сходимости всегда не пуста. Но есть степенные ряды, которые помимо точки x_0 не сходятся ни при одном значении x. Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$ расходится при любом $x \ne 0$, в чем нетрудно убедиться по признаку Даламбера.

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ существуют такие отличные от 0 значения $y = y_1$, при которых он сходится и рассмотрим множество $\{|y_1|\}$. Это множество либо ограничено сверху, либо нет.

Если не ограничено, то для любого y найдется y_1 такое, что $|y| < |y_1|$. Так как в точке y_1 ряд сходится, то по теореме Абеля он сходится абсолютно при $|y| < |y_1|$.

Пусть теперь множество $\{|y_1|\}$ ограничено сверху. Обозначим за R его точную верхнюю границу ($0 < R < \infty$). Если $|y| > R$, то ряд расходится, ибо это y заведомо отличается от всех y_1, при которых ряд сходится. Возьмем y, для которого $|y| < R$. По определению точной верхней границы существует y_1 такое, что: $|y| < |y_1| \le R$ и в точке y_1 ряд сходится. Следовательно, по теореме Абеля, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ сходится абсолютно при $|y| < R$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 23

Для каждого степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, если он не является всюду расходящимся, существует такое положительное число R (конечное или бесконечное), что в открытом промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ ряд сходится абсолютно, при $|x - x_0| > R$ ряд расходится. На концах промежутка, при $x = x_0 + R$ и $x_0 - R$, общего утверждения о сходимости сделать нельзя: может иметь место как сходимость, так и расходимость.

Замечание

Поскольку степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ всегда сходится при $x = x_0$, то под “расходимостью всюду” подразумевается расходимость при всех x, отличных от x_0.

Примеры

Найдем области сходимости следующих степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Проверим по признаку Даламбера абсолютную сходимость этого ряда.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно, то есть сходится для любых $x \in (-\infty, \infty)$.
Ответ: $x \in (-\infty, \infty)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Проверим абсолютную сходимость по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

$|x| < 1:$ ряд сходится абсолютно, то есть сходится.
$|x| > 1:$ ряд расходится абсолютно, то есть расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).

При $x = 1$ ряд имеет вид гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

При $x = -1$ имеет знакочередующийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.
Ответ: $x \in [-1, 1)$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n^2}$.

Проверим абсолютную сходимость по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{|x-1|^n}=|x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x-1|.$$

$|x-1|<1$: ряд сходится абсолютно, то есть сходится.
$|x-1|>1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0 \end{array}\right.$: ряд расходится абсолютно, то есть расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).
Рассмотрим крайние точки.
При $x=2$ имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходящийся обобщенный гармонический ряд.
При $x=0$ получаем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ – этот ряд сходится абсолютно, то есть сходится.
Ответ: $x\in[0,2]$.

Теорема 24 (Формула для радиуса сходимости)
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. Пусть все $a_n\neq 0$ и существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=K,\quad K\in\mathbb{R}. \tag{145}$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ имеет радиус сходимости

$$R=\frac{1}{K}. \tag{146}$$

<u>Доказательство:</u>
Проверим абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x-x_0|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x-x_0|^n}=K\cdot|x-x_0|.$$

Если $K\cdot|x-x_0|<1$, то ряд сходится абсолютно, то есть сходится.
Если $K\cdot|x-x_0|>1$, то $a_{n+1}>a_n$, то есть общий член ряда не стремится к нулю (нарушено необходимое условие сходимости) и ряд расходится.
Таким образом, мы получим радиус сходимости ряда:

$$R=\frac{1}{K}.$$

■

Замечание

Формула для радиуса сходимости применима только если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ содержит все степени x.

Например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$ формула $R = \frac{1}{K}$ неприменима. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4}.$$

Теперь применим непосредственно признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2} \cdot 2^{2n}}{2^{2n+2} \cdot |x|^{2n}} = \frac{x^2}{2^2}.$$

Ряд сходится при $\frac{x^2}{2^2} < 1 \;\Leftrightarrow\; -2 < x < 2$, то есть радиус сходимости равен:

$$R = 2 \neq \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = 4.$$

Обозначение

До конца данного параграфа будем обозначать через R радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Теорема 25 (о равномерной сходимости степенного ряда)

Для любого $r < R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Доказательство:

Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса. Для этого требуется найти для данного функционального ряда мажорантный числовой ряд, который сходится. Построим его.

$$x \in [x_0 - r, x_0 + r] \;\Rightarrow\; |x - x_0| \le r \;\Rightarrow\; |x - x_0|^n \le r^n \;\Rightarrow$$
$$\Big/ \text{Домножим обе части неравенства на } |a_n| \Big/$$
$$\Rightarrow\; |a_n(x-x_0)^n| \le |a_n| r^n.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ мажорирует ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

По условию теоремы $r < R$. Значит ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится (так как внутри интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно). Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Следствие

Сумма $f(x)$ степенного ряда для всех значений x между $(-R)$ и R представляет собой непрерывную функцию от x.

Доказательство:

Какое бы значение x внутри интервала сходимости ни взять, можно выбрать число $r < R$ так, чтобы было выполнено: $|x - x_0| < r$. Тогда по только что доказанной теореме 25 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$. Учитывая непрерывность полинома $(x-x_0)^n$, по теореме 18 о непрерывности суммы ряда получим непрерывность суммы $f(x)$ степенного ряда в точке x.

■

Теорема 26 (Теорема о тождестве степенных рядов)
Если два степенных ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots, \tag{147}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots + b_n x^n + \ldots\ldots, \tag{148}$$

в окрестности точки $x = 0$ имеют одну и ту же сумму, то эти ряды тождественны, то есть соответствующие коэффициенты попарно равны:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \ \ldots\ldots, \ a_n = b_n, \ \ldots\ldots \tag{149}$$

<u>Доказательство:</u>
Полагая $x = 0$ в тождестве

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots, \tag{150}$$

получаем равенство: $a_0 = b_0$. Отбросив a_0 и b_0, разделим обе части равенства (150) на x (в этом случае мы вынуждены считать $x \neq 0$). Мы получим новое тождество:

$$a_1 + a_2 x + \ldots\ldots = b_1 + b_2 x + \ldots\ldots, \tag{151}$$

которое также имеет место в окрестности точки $x = 0$, но исключая саму эту точку. Не имея права положить здесь $x = 0$ мы можем устремить x к 0. Тогда, воспользовавшись непрерывностью обоих рядов, в пределе получим, что $a_1 = b_1$. Отбросив эти члены и снова разделив на $x \neq 0$, при $x \to 0$ получим, что $a_2 = b_2$. И так далее. По индукции получим, что $a_n = b_n$.

■

Замечание
Для рядов общего вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ утверждение теоремы 26 тоже будет верным ибо можно сделать замену $x - x_0 = y$ и одно утверждение сведется к другому.
Теорема 26 устанавливает единственность разложения функции в степенной ряд.

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов
Обозначим сумму ряда через $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x). \tag{152}$$

Теорема 27 (Интегрирование степенных рядов)
Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в промежутке $[0, x]$, где $|x| < R$, можно почленно интегрировать:

$$\int\limits_0^x f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots\ldots \tag{153}$$

Значение x здесь может совпадать с одним из концов промежутка сходимости, если на этом конце ряд сходится.

Доказательство:
Выберем r такое, что: $|x| < r < R$.
Тогда по теореме 25 ряд сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$. Применяя теорему 20 о почленном интегрировании рядов, получим, что на отрезке $[0, x]$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно интегрировать.

■

Интегрирование рядов можно использовать для разложения функции в ряд.

Пример
Разложим в степенной ряд функцию $\ln(1 + x)$.

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x}. \tag{154}$$

С другой стороны, функция $\frac{1}{1+x}$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots\ldots \quad \text{при } |x| < 1. \tag{155}$$

Сравнивая формулы (154) и (155), получим:

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots\ldots \tag{156}$$

Разложение верно при $|x| < 1$. Позже, при рассмотрении ряда Тейлора мы докажем, что при $x = 1$ это разложение также верно.

Теорема 28 (Дифференцирование степенных рядов)
Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots \tag{157}$$

Утверждение сохраняет силу и для конца промежутка сходимости, если на этом конце ряд сходится.

Доказательство:
Возьмем любое x внутри промежутка сходимости исходного ряда так что $|x| < R$ и вставим два числа r_0 и r между $|x|$ и R:

$$|x| < r_0 < r < R. \tag{158}$$

Так как внутри интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. Тогда по необходимому условию сходимости общий член ряда стремится к нулю, а значит последовательность $\{|a_n| r^n\}$ ограничена:

$$|a_n| r^n \leq L \quad \forall\, n \tag{159}$$

Тогда при $|x| < r_0$ имеем:

$$\begin{aligned} n|a_n| \cdot |x|^{n-1} < n|a_n| r_0^{n-1} = n|a_n| r^{n-1} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leq \Big/ \text{формула (159)} \Big/ \leq \\ \leq n \cdot \underbrace{\frac{L}{r}}_{=L_0 \text{ (обозначение)}} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} = nL_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}. \end{aligned} \tag{160}$$

Значит члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ не превосходят по модулю членов мажорантного ряда

$$L_0 + 2L_0 \cdot \frac{r_0}{r} + 3L_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \ldots\ldots + nL_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} + \ldots\ldots \tag{161}$$

Сходимость числового ряда (161) проверим по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)L_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n}{nL_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}} = \frac{r_0}{r} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{r_0}{r} < 1. \tag{162}$$

Следовательно, ряд сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса (теорема 17) при $x \in [-r_0, r_0]$ ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ сходится равномерно. Тогда по теореме 21 о почленном дифференцировании рядов, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать на отрезке $[-r_0, r_0]$, в частности, в точке x.

■

Замечание
Доказано, что ряды из производных и интегралов сходятся на интервале $(-R, R)$. Значит их радиусы сходимости $R' \geq R$.

С другой стороны, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно получить дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot x^n$ и интегрированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Следовательно, радиус R сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не меньше, чем R', то есть $R \geq R'$. Таким образом, радиусы сходимости всех трех рядов равны: $R = R'$.

Замечание
Интегрирование и дифференцирование рядов можно использовать для вычисления сумм рядов.
Пример
Найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}}_{=S(x) \text{ (обозначение)}} = x \cdot S(x).$$

Проинтегрируем ряд $S(x)$:

$$\int\limits_0^x S(x)dx = \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \text{ при } |x| < 1.$$

/ Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии /
Продифференцируем полученный результат:

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Следовательно,

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xS(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

2.6 Ряд Тейлора

Связь коэффициентов степенного ряда с его суммой
Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots\ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots\ldots \tag{163}$$

сходится на интервале $|x - x_0| < R$. Обозначим через $f(x)$ его сумму.

По теореме 28 о дифференцировании степенных рядов, на интервале $|x-x_0| < R$ ряд (163) можно почленно дифференцировать любое число раз, то есть:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-k+1) \cdot a_n(x-x_0)^{n-k}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots \tag{164}$$

При $x = x_0$ получим:

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2,\ \ldots\ldots,\ f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n,\ \ldots\ldots \tag{165}$$

Таким образом, если $f(x)$ есть сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то коэффициенты этого ряда не могут быть ничем иным, как $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Такие коэффициенты называются коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.