

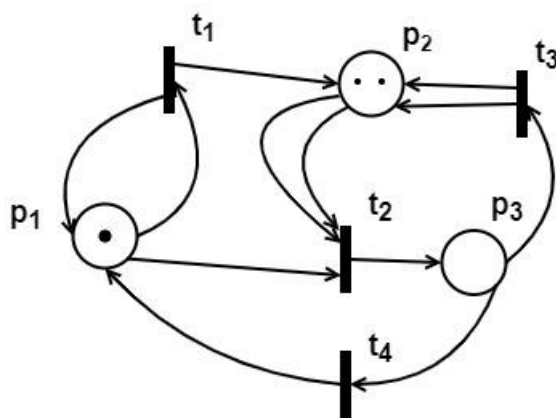
## Алгоритм для анализа динамических свойств сети Петри на основе покрывающего дерева с расширенной маркировкой

Данный алгоритм является универсальным и может использоваться для любой сети, в том числе и для СП с неограниченными позициями. Для этого введем понятие расширенной маркировки.

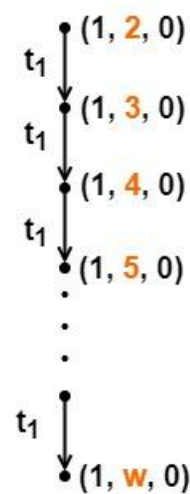
**Расширенная маркировка** – это такая маркировка (разметка) сети Петри, при которой ёмкость неограниченной позиции  $p_k$  можно заменить на  $w$ , т.е. если в процессе функционирования сети наблюдается  $\mu(p_k) \rightarrow \infty$ , то считаем, что в векторе маркировки  $\mu_k = w$ .

Для расширенной маркировки справедливо следующее тождество  $w + n = w - n = w + w = w$ , где  $n$  – счетное количество маркеров, т.е.  $n < \infty$ .

На рисунке 1,а изображена сеть Петри с неограниченной позицией  $p_2$ : каждый раз срабатывание разрешенного перехода  $t_1$  в ней увеличивает ёмкость позиции  $p_2$  на один маркер и опять возбуждает этот переход к срабатыванию (рис. 1,б). Поэтому при построении покрывающего дерева для этой сети мы заменяем всю цепочку (рис. 1,б) на одну дугу  $t_1$ , исток дуги –  $(1,2,0)$ , а ее сток –  $(1,w,0)$ . Данный пример иллюстрирует случай бесконечного срабатывания одного перехода, в общем случае в цепочке могут быть несколько переходов, входящих в некоторый простой цикл сети.



а) сеть Петри



б) фрагмент построения покрывающего дерева

Рисунок 1 – Пример моделирования функционирования СП с расширенной маркировкой

Для понимания важности данного алгоритма приведем две теоремы.

1. Покрывающее дерево, построенное с помощью описанного выше алгоритма, является конечным графом.
2. Процесс построения покрывающего дерева этим алгоритмом заканчивается за конечное число шагов.

Алгоритм содержит следующие два этапа.

1. Построение покрывающего дерева СП (с расширенной маркировкой при наличии неограниченных позиций в сети).
2. Определение динамических свойств СП (безопасность, ограниченность, сохраняемость и живость) на основе анализа ее покрывающего дерева.

### Этап №1 – «Построение покрывающего дерева СП»

Пусть задана сеть Петри со структурой  $C = \langle T, P, I, O \rangle$  и вектором начальной маркировки  $\mu_0$ . Введем следующие обозначения и термины.

$s$  - счетчик вершин в покрывающем дереве;

$VECTOR$  - множество векторов маркировок, моделируемых вершинами дерева;

$MET$  - множество меток вершин дерева, используемые в алгоритме метки приведены ниже.

Метка	Определение метки
<b>Г</b>	Метка <b>границной</b> вершины дерева (вершины, не обработанной данным алгоритмом).
<b>Т</b>	Метка <b>терминальной</b> вершины дерева (вершины, моделирующей тупиковую маркировку).
<b>Д</b>	Метка <b>дублирующей</b> вершины дерева (вершины, моделирующей маркировку, которая уже встречалась).
<b>В</b>	Метка <b>внутренней</b> вершины дерева (вершины, обработанной данным алгоритмом и не являющейся терминальной или дублирующей).

Алгоритм на этом этапе состоит из следующих шагов.

Строим корень дерева:  $s=1$ ,  $VECTOR(s) = \mu_0$ ,  $MET(s) = Г$ .

**ПОКА** в дереве есть граничные вершины **ВЫПОЛНЯТЬ**:

1. Выбрать первую по счету граничную вершину –  $v$ .
2. **ЕСЛИ**  $VECTOR(v)$  – тупиковая маркировка, **ТО**  $MET(v) = Т$ .
3. **ЕСЛИ**  $VECTOR(v)$  – дублирующая маркировка, **ТО**  $MET(v) = Д$ .
4. **ЕСЛИ**  $MET(v) \neq Т$  или  $MET(v) \neq Д$ , **ТО ВЫПОЛНЯТЬ**:
  - 4.1.  $MET(v) = В$ .
  - 4.2. **ПОКА** для  $VECTOR(v)$  есть разрешенные переходы **ВЫПОЛНЯТЬ**:
    - 4.2.1.  $s = s + 1$ ,  $MET(s) = Г$ .
    - 4.2.2. Построить новую дугу  $(v, s)$  в дереве, пометить ее разрешенным переходом.
    - 4.2.3. Определить  $VECTOR(s)$ .
    - 4.2.4. **ЕСЛИ** в дальнейшем наблюдается неограниченный рост емкости некоторой позиции при отсутствии тупиковых маркировок в корневом поддереве с корнем  $v$ , **ТО** в  $VECTOR(s)$  заменить ее емкость на  $w$ .

### Этап №2 – «Определение динамических свойств СП на основе анализа ее покрывающего дерева»

Алгоритм на этом этапе состоит из проверки следующих условий по шагам.

1. **ЕСЛИ** при построении дерева использовалась расширенная маркировка  $w$ , **ТО** эта СП не безопасная, не ограниченная и не сохраняющаяся,

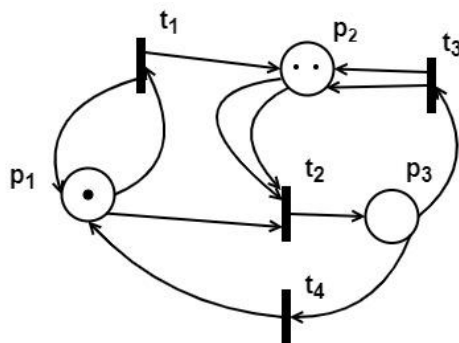
**ИНАЧЕ ВЫПОЛНЯТЬ:**

- 1.1. **ЕСЛИ** в множестве векторов маркировок *VECTOR* есть только 0 и 1,  
**ТО** эта СП *безопасная и ограниченная* с  $k = 1$ ,  
**ИНАЧЕ** эта СП *не безопасная и ограниченная* ( $k$  определяется максимальной емкостью позиций по всем векторам маркировок *VECTOR*).
- 1.2. **ЕСЛИ** сумма емкостей позиций во всех векторах маркировок *VECTOR* одинакова,  
**ТО** эта СП *строго сохраняющаяся*,  
**ИНАЧЕ ВЫПОЛНЯТЬ:**
  - 1.2.1. **ЕСЛИ** система линейных уравнений, построенная на множестве *VECTOR*, имеет решение (найден хотя бы один ненулевой вектор  $c = (c_1, \dots, c_n)$ ),  
**ТО** эта СП *сохраняющаяся*,  
**ИНАЧЕ** эта СП *не сохраняющаяся*.
2. **ЕСЛИ** в дереве есть терминальные вершины,  
**ТО** эта СП *не живая*,  
**ИНАЧЕ ВЫПОЛНЯТЬ:**
  - 2.1. **ЕСЛИ** для разметки дуг дерева были использованы все перехода сети,  
**ТО** эта СП *живая*,  
**ИНАЧЕ** эта СП *не живая*.

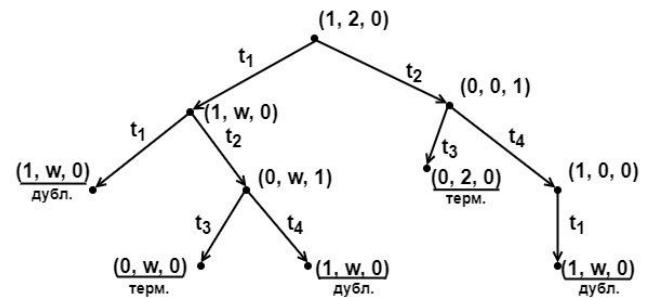
Приведем далее два примера. Первый пример – для СП с неограниченными позициями, а второй пример – для СП без использования расширенной маркировки (решение на стенде).

**Пример №1**

На рисунке 2,а представлена сеть Петри с количеством переходов  $m = 4$ , количеством позиций  $n = 3$  и вектором начальной маркировки  $\mu_0 = (1, 2, 0)$ , а на рисунке 2,б – ее покрывающее дерево с расширенной маркировкой  $w$ , построенное на 1-ом этапе алгоритма. В этом дереве пять листьев (две терминальные вершины и три дублирующие вершины). Дуги в этом дереве размечены разрешенными переходами.



а) сеть Петри



б) покрывающее дерево

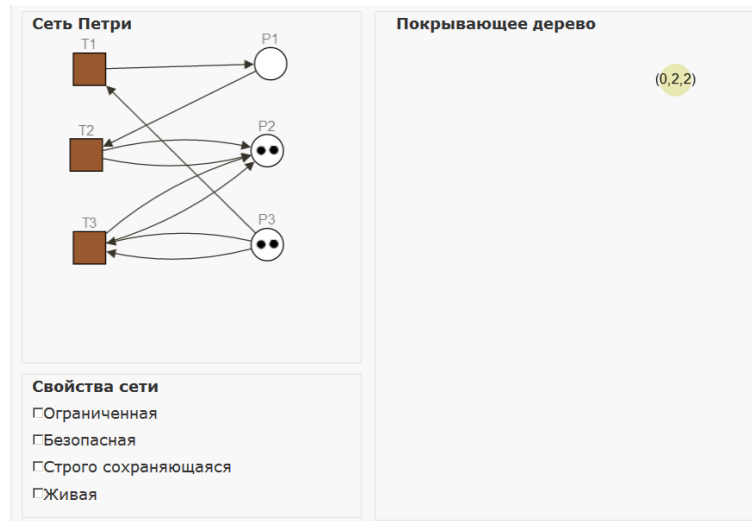
Рисунок 2 – Пример построения покрывающего дерева СП

На 2-ом этапе проводится анализ покрывающего дерева (рис. 2,б). В таблице ниже описан процесс определения динамических свойств сети Петри (рис. 2,а).

№	Условие	?	Свойства СП
1.	При построении дерева использовалась расширенная маркировка $w$ ?	+	не безопасная, не ограниченная, не сохраняющаяся
2.	В дереве есть терминальные вершины?	+	не живая

## Пример №2

Построить покрывающее дерево для данной сети Петри определить ее свойства.



## Решение

### Этап №1 – «Построение покрывающего дерева СП»

1. При начальной разметке СП (0,2,2) разрешенными для срабатывания являются переходы  $t_1$  и  $t_3$ . Построим в покрывающем дереве соответствующие им дуги и определим ёмкости позиций после их срабатывания:

$$(0,2,2) [ t_1 > (1,2,1)$$

$$(0,2,2) [ t_3 > (0,4,0)$$

Маркировка (0,4,0) – тупиковая, поэтому отметим эту вершину в дереве как терминальную (Т). На рисунке ниже результат построения 1-го уровня вершин покрывающего дерева.

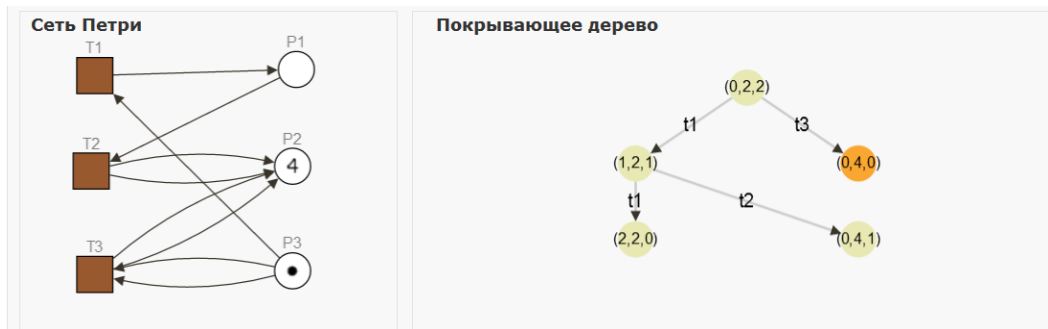


2. При разметке СП (1,2,1) разрешенными для срабатывания являются переходы  $t_1$  и  $t_2$ . Построим в покрывающем дереве соответствующие им дуги и определим ёмкости позиций после их срабатывания:

$$(1,2,1) [ t_1 > (2,2,0)$$

$$(1,2,1) [ t_2 > (0,4,1)$$

Обе маркировки новые (не являются дублирующими) и не тупиковые. На рисунке ниже результат построения 2-го уровня вершин покрывающего дерева.



3. При разметке СП (2,2,0) разрешенным для срабатывания является только переход  $t_2$ . Построим в покрывающем дереве соответствующую ему дугу и определим ёмкости позиций после его срабатывания:

$$(2,2,0) [t_2 > (1,4,0)]$$

Эта маркировка новая (не является дублирующей) и не тупиковая.

При разметке СП (0,4,1) разрешенным для срабатывания является только переход  $t_1$ . Построим в покрывающем дереве соответствующую ему дугу и определим ёмкости позиций после его срабатывания:

$$(0,4,1) [t_1 > (1,4,0)]$$

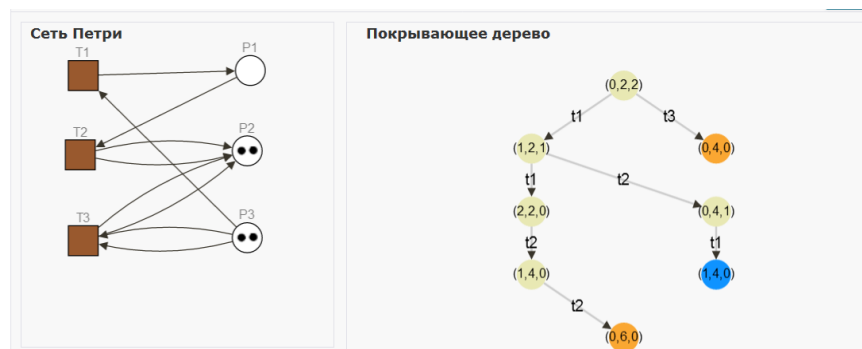
Эта маркировка является дублирующей (Д). На рисунке ниже результат построения 3-го уровня вершин покрывающего дерева.



4. При разметке СП (1,4,0) разрешенным для срабатывания является только переход  $t_2$ . Построим в покрывающем дереве соответствующую ему дугу и определим ёмкости позиций после его срабатывания:

$$(1,4,0) [t_2 > (0,6,0)]$$

Маркировка (0,6,0) – тупиковая, поэтому отметим эту вершину в дереве как терминальную (Т). На рисунке ниже результат построения последнего 4-го уровня вершин покрывающего дерева.



## Этап №2 – «Определение динамических свойств СП на основе анализа ее покрывающего дерева»

В таблице ниже описан процесс определения динамических свойств сети Петри.

№	Условие	?	Свойства СП
1.	При построении дерева использовалась расширенная маркировка $w$ ?	-	
2.	Ёмкости позиций только 0 или 1?	-	не безопасная, ограниченная с $k=6$
3.	Сумма емкостей позиций во всех вершинах дерева одинакова?	-	не строго сохраняющаяся
4.	В дереве есть терминальные вершины?	+	не живая

Результаты проведенного анализа представлены на рисунке ниже.

