ЛЕКЦИЯ 5

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

5.1.Системы линейных уравнений. Основные понятия..2

5.2.Методы решения систем линейных уравнений..5

5.1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Системой** m **линейных уравнений с** n **неизвестными** называется система вида:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1),$$

*где $a_{ij} \in R$ - **коэффициенты С.Л.У** (системы линейных уравнений), $b_i \in R$ - **свободные члены.***

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда такую систему называют ***линейной системой алгебраических уравнений (С.Л.А.У)***. Объясним, почему:
алгебраической - потому что левая часть всех уравнений есть многочлен от *n* переменных $x_1, x_2, .., x_n$;
линейной - потому что многочлены от *n* переменных $x_1, x_2, .., x_n$ являются многочленами первой степени (как линейная функция).
Здесь и далее (для краткости и т.к. никакие другие системы не рассматриваются) мы будем опускать прилагательное "алгебраический".

Запись С.Л.У в виде (1) называют ещё ***координатной*** записью системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *С.Л.У называют **однородной,** если все её свободные члены равны нулю:*

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$$

*Если существует хотя бы один свободный член $b_i : b_i \neq 0$, то С.Л.У. называется **неоднородной.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Решением** С.Л.У. называется такой набор значений неизвестных $x_1^0, x_2^0, .., x_n^0$, который при подстановке их в каждое уравнение С.Л.У даёт тождество.*
*Любое конкретное решение С.Л.У (среди множества возможных) называют его **частным решением.***

ЗАМЕЧАНИЕ. Решить С.Л.У. - это значит решить две задачи:

1. Определить, имеет ли вообще С.Л.У решения и сколько их.
2. Найти все существующие решения.

Более подробно остановимся на ***вопросе о существовании решений С.Л.У***:

- если С.Л.У - однородная, то она всегда имеет ***тривиальное решение:***

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 .$$

- если у однородной С.Л.У есть хотя бы одно нетривиальное решение, то всего решений - бесконечно много.

- если С.Л.У - неоднородная, то возможно несколько вариантов:

1. она имеет единственное решение,
2. решений бесконечно много,
3. решений нет.

Вообще, говоря о количестве решений С.Л.У, мы решаем вопрос о совместности или несовместности системы:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *С.Л.У называется* ***совместной,*** *если она имеет хотя бы одно решение. Если решений нет - С.Л.У называется* ***несовместной.***

О том, как определить совместность С.Л.У, а также количество решений, будет подробно рассказано ниже, в п. **5.2.3**.

Теперь остановимся на вопросе формы записи С.Л.У. Помимо введённой ранее записи (1) существуют ещё и другие, которые мы рассмотрим далее.

ФОРМЫ ЗАПИСИ С.Л.У.

1. Координатная форма записи (введённая ранее - (1)):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2. Векторная форма записи:

Рассмотрим коэффициенты a_{ij} при одном неизвестном x_i как элементы столбца (матрицы-столбца) a_i, а неизвестный x_i - как коэффициент. на который умножается этот столбец. Тогда мы получим векторную форму записи С.Л.У:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .. \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .. \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ .. \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

или, обозначая столбцы $a_1, a_2, .., a_n, b$:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + .. + a_n \cdot x_n = b.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Векторная форма записи позволяет говорить о решении С.Л.У. как о возможности представления столбца свободных членов b в виде *линейной комбинации столбцов* коэффициентов системы $a_1, a_2, .., a_n$. При этом коэффициенты в этой линейной комбинации и будут решениями системы $x_1, x_2, .., x_n$. То есть, если необходимо представить один вектор в виде линейной комбинации некоторых других, то для этого нужно составить С.Л.У в векторной форме и решить её - см. **ПРИМЕР 1.**

ПРИМЕР 1. Проверить, является ли вектор $\vec{d}(0,1,-1)$ линейной комбинацией векторов $\vec{a}(2,-1,1), \vec{b}(1,3,-1), \vec{c}(3,-2,1)$.

Решение:

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, мы должны найти ненулевое решение С.Л.У (составленное в координатной форме):

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Матричная форма записи:

Рассмотрим произведение матрицы коэффициентов и столбца неизвестных:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + .. + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + .. + a_{2n} \cdot x_n \\ .... \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + .. + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

и приравняем его к столбцу свободных членов:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + .. + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + .. + a_{2n}\cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + .. + a_{mn}\cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда, согласно определению равных матриц (см. **ЛЕКЦИЯ 2, п.2.2.2**) мы увидим, что эта запись равносильна координатной форме записи (1), которую мы можем записать в виде произведения матрицы коэффициентов A и матрицы-столбца неизвестных X:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + .. + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + .. + a_{2n}\cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + .. + a_{mn}\cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} \sim A\cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}.$$

5.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.2.1. МЕТОД КРАМЕРА

Метод применим только для систем из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

у которых матрица коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

невырожденная (см. **ЛЕКЦИЯ 2, п.2.2.2)**, т.е. $\det A \neq 0$.

Такие системы называют ***крамеровскими .***

ТЕОРЕМА (КРАМЕРА). *Если С.Л.У. является крамеровской* $(\det A \neq 0)$ *тогда её решение единственно и находится по* ***формулам Крамера***:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}, \quad j = 1,2,..,n;$$

где определитель Δ_j *получается из определителя системы* $\det A$ *заменой j-го столбца столбцом свободных членов*:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & a_{2j} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nj} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & b_1 & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & b_2 & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & b_n & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство (для $n = 2$):

1. Рассмотрим крамеровскую систему из 2-х уравнения с 2-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на $(-a_{21})$, второе - на a_{11} и сложим их:

$$+\begin{cases} -a_{21}a_{11}x_1 - a_{21}a_{12}x_2 = -a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{cases},$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Умножим первое уравнение на a_{22}, второе - на $(-a_{12})$ и сложим их:

$$+\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases},$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_1 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

2. Для крамеровской системы размерности больше, чем 2, доказательство приведём ниже -см. п.**5.2.2.**).

ПРИМЕР 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

методом Крамера (или найти решение системы по формулам Крамера).

Решение:

Проверим, возможно ли применить формулы Крамера (т.е. посчитаем определитель системы):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

значит матрица невырожденная и можно применить формулы Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A} = \frac{\Delta_j}{-5} \quad j = 1,2,3.$$

Посчитаем отдельно все определители $\Delta_j (j = 1,2,3)$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 5.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{5}{-5} = -1, \; x_2 = \frac{-15}{-5} = 3, \; x_3 = \frac{-10}{-5} = 2.$$

5.2.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

В этом пункте мы докажем **ТЕОРЕМУ (КРАМЕРА)**(см.п.**5.2.1**) для случая $n > 2$ и в ходе этого доказательства предъявим способ решения С.Л.У. с помощью обратной матрицы.

Доказательство **ТЕОРЕМЫ КРАМЕРА** ($n > 2$):

Так как $\det A \neq 0$, тогда существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Запишем С.Л.У в матричной форме:

$$A \cdot X = B,$$

умножим обе части равенства на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$X = A^{-1} \cdot B$ ***- решение С.Л.У. в матричном виде.***

Таким образом, для того чтобы найти решение системы, нужно найти ***обратную матрицу*** A^{-1} (см. **ЛЕКЦИЯ 3, п.3.4.)** и умножить её справа на матрицу свободных членов B.

Докажем, что это решение есть сокращённый вид формул Крамера $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\det A}, \quad j = 1,2,..,n$.

Доказательство проведём для крамеровской системы 3-го порядка (для большего порядка доказательство аналогично).

Рассмотрим С.Л.У из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

запишем решение системы в матричном виде :

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$x_3 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3. Решить систему из **ПРИМЕРА 2** матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решение:

Матрица системы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, её определитель $\det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-5\neq 0$,

значит у неё существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Находим эту матрицу любым удобным способом (через алгебраические дополнения - см. **ЛЕКЦИЯ 3**, **п.3.4**., **ТЕОРЕМА 4** или с помощью элементарных преобразований -см. **ЛЕКЦИЯ 4. п.4.2**):

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{11}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ -\frac{12}{5} & \frac{9}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь умножаем её справа на столбец свободных членов и получаем матрицу неизвестных X:

$$X=\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{11}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ -\frac{12}{5} & \frac{9}{5} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \\ x_3=2 \end{cases}.$$

5.2.3. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. МЕТОД ГАУССА

Теорема Кронекера-Капелли является ***критерием совместности или несовместности С.Л.У***. Для её формулировки необходимо ввести понятие ***расширенной матрицы***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

матрица С.Л.У.

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + .. + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + .. + a_{2n}\cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + .. + a_{mn}\cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix},$$

*тогда **расширенная матрица** этой системы будет выглядеть так:*

$$(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & | & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & | & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. *Для совместности С.Л.У. необходимо и достаточно, чтобы ранг системы был равен рангу расширенной матрицы системы, т.е.*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что эту теорему имеет смысл рассматривать только для неоднородных С.Л.У, так как однородные системы всегда совместны - имеют ***тривиальное*** (нулевое) решение.

На практике имеет значение следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ (О КОЛИЧЕСТВЕ РЕШЕНИЙ С.Л.У.) *Если* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}) = n$ *-количеству неизвестных, то решение С.Л.У - единственно, если* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}) < n$ *- то решений бесконечно много.*

Теперь перейдём к рассмотрению ***метода Гаусса*** (или ***методу последовательных исключений неизвестных***).

Рассмотрим С.Л.У.

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + .. + a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + .. + a_{2n}\cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + .. + a_{mn}\cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1. Проверим, удовлетворяет ли эта система теореме Кронекера-Капелли, т.е.проверим выполнение равенства:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}).$$

Для этого, с помощью элементарных преобразований **<u>строк</u>**, приведём расширенную матрицу $(A\,|\,B)$ к ступенчатому виду (см. **ЛЕКЦИЯ 4, п.4.2.1: ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ)**

ЗАМЕЧАНИЕ. Такие преобразования ещё называют ***"прямым ходом Гаусса"*** **.**

2. В полученной ступенчатой матрице выделяем ***базисный минор*** (см. **ЛЕКЦИЯ 4, п.4.3.)** и ***базисные переменные*** (т.е. те переменные, коэффициенты которых входят в базисный минор).

3. Исходную С.Л.У. заменяем на эквивалентную ей систему, состоящую из r уравнений, выражающих r базисных переменных через n-r оставшихся переменных, называемых ***свободными***.

Далее возможно два случая:

- Если r=n , то С.Л.У имеет ***единственное решение***. Действительно, в этом случае все строки полученной ступенчатой матрицы не являются нулевыми:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^1_{12} & .. & a^1_{1n} & | & b^1_1 \\ 0 & 1 & .. & a^3{}_{2n} & | & b^3{}_2 \\ 0 & 0 & .. & a^4{}_{3n} & | & b^4{}_3 \\ .. & .. & .. & .. & | & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & | & b^r{}_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что число ненулевых строк расширенной матрицы $(A\,|\,B)$ и матрица системы A совпадают, а значит:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\,|\,B).$$

Чтобы найти решение, необходимо от полученной ступенчатой матрицы перейти к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + a^1{}_{12} \cdot x_2 + .. + a^1{}_{1n} \cdot x_n = b^1{}_1 \\ x_2 + \ldots + a^3{}_{2n} \cdot x_n = b^3{}_2 \\ \ldots + a^4{}_{3n} \cdot x_n = b^4{}_3 \\ \ldots.. = \ldots \\ x_{n-1} + a^{r-1}{}_n \cdot x_n = b^{r-1}{}_{n-1} \\ x_n = b^r{}_n \end{cases}$$

Далее из последнего уравнения берём $x_n = b^r{}_n$, подставляем его в предыдущее уравнение и находим значение x_{n-1} :

$$\begin{cases} x_1 + a^1{}_{12} \cdot x_2 + .. + a^1{}_{1n} \cdot x_n = b^1{}_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + a^3{}_{2n} \cdot x_n = b^3{}_2 \\ \qquad\qquad \ldots + a^4{}_{3n} \cdot x_n = b^4{}_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots.. = \ldots \\ \qquad x_{n-1} + a^{r-1}{}_n \cdot x_n = b^{r-1}{}_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = \boxed{b^r{}_n} \end{cases}$$

$$x_{n-1} = -a^{r-1}{}_n \cdot b^r{}_n + b^{r-1}{}_{n-1}.$$

Таким образом мы совершаем так называемый "обратный ход Гаусса". Продолжая описанный процесс дальше, последовательно находим решение системы.

- Если $r<n$, то С.Л.У имеет ***бесконечно много решений,*** которые выражаются через $n-r$ свободных переменных. Это возможно, когда среди строк преобразованной расширенной матрицы есть нулевые:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a^1_{12} & .. & & a^1_{1n} & b^1_1 \\ 0 & 1 & .. & & a^3{}_{2n} & b^3{}_2 \\ .. & .. & .. & & .. & .. \\ .. & .. & .1. & a^k{}_{rr+1} & a^k{}_{rn}. & b^k{}_r. \\ 0 & 0 & .. & & & 0 \end{array}\right)$$

Очевидно, что число ненулевых строк расширенной матрицы $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ и матрицы системы A совпадают, а значит :

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}).$$

Аналогично предыдущему случаю, перейдём к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x_1 + a^1{}_{12} \cdot x_2 + .. + a^1{}_{1n} \cdot x_n = b^1{}_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + a^3{}_{2n} \cdot x_n = b^3{}_2 \\ \qquad\qquad \ldots + a^4{}_{3n} \cdot x_n = b^4{}_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots.. = \ldots \\ x_r + a^k{}_{rr+1} \cdot x_{r+1} + \quad + a^k{}_{rn} \cdot x_n = b^k{}_r \end{cases}$$

Придадим свободным переменным $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ произвольные значения $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, ..., \alpha_n \in R$:

$$\begin{cases} x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \\ x_{r+2} = \alpha_{r+2}, \\ .. \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$$

и выразим через них базисную переменную x_r:

$$x_r = b^k{}_r - a^k{}_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \quad - a^k{}_{rn} \cdot x_n = -a^k{}_{rr+1} \cdot \alpha_{r+1} - ... - a^k{}_{rn} \cdot \alpha_n + b^k{}_r .$$

Подставим его в предыдущее уравнение, найдём значение второй базисной переменной x_{r-1} и, продолжая далее делать "обратный ход Гаусса", найдём ***общее решение системы***:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{\,0} \\ x_2 = x^0{}_2 \\ x_3 = x^0{}_3 \\ .... \\ x_r = -a^k{}_{rr+1} \cdot \alpha_{r+1} - ... - a^k{}_{rn} \cdot \alpha_n + b^k{}_r \\ x_{r+1} = \alpha_{r+1} \\ x_{r+2} = \alpha_{r+2} \\ .... \\ x_n = \alpha_n \end{cases},$$

где решения $x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, .. x_{r-1}^{\,0}$ - зависят от коэффициентов расширенной матрицы и параметров $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, ..., \alpha_n \in R$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Придавая параметрам $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, ..., \alpha_n$ конкретные числовые значения, мы будем получать различные ***частные решения*** С.Л.У.

ПРИМЕР 4.

1.Решить систему $\begin{cases} x + 2z = 8 \\ -x + 3y = -5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение:

Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 8 \\ -1 & 3 & 0 & | & -5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$(1) \leftrightarrow (3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ -1 & 3 & 0 & | & -5 \\ 1 & 0 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$$

(2)+(1) , (3)-(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 4 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

(2)+4(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 5 & | & 15 \\ 0 & -1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$(-1)\cdot(2) \leftrightarrow \frac{1}{5}\cdot(3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Посчитаем ранг расширенной и исходной матриц:

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = 3$ и равен числу неизвестных, значит система имеет ***единственное решение.***

От расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

перейдём к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y + z = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Сделаем "обратный ход Гаусса" и найдём решение системы:

$$\begin{cases} x = 4 - y - z = 4 - (-1) - 3 = 2 \\ y = z - 4 = 3 - 4 = -1 \\ z = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}.$$

2.Решить систему $\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ x-y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение:

Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \leftrightarrow (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -2 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) - 2 \cdot (2), (3) \text{ - } 3 \cdot (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & -4 & | & 1 \\ 0 & 5 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ - } (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & -4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем ранг расширенной и исходной матриц: $\operatorname{rang} A = 2 \neq \operatorname{rang}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = 3$, значит (см. **ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ)** система уравнений несовместна.

3. Решить систему $\begin{cases} x-y+z-t=2 \\ 2x+y-z+3t=3 \\ 4x-y+z+t=7 \\ x+2y-2z+4t=1 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение:

Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & | & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) - 2 \cdot (1), (3) - 4 \cdot (1), (4) - (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & | & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & | & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) - (2), (4) - (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \cdot (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{5}{3} & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Посчитаем ранг расширенной и исходной матриц: $\operatorname{rang} A = 2 = \operatorname{rang}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) < 4$ (число неизвестных), значит (см. **УТВЕРЖДЕНИЕ (О КОЛИЧЕСТВЕ РЕШЕНИЙ С.Л.У.)** система уравнений имеет бесконечно много решений.

Выделим базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, тогда базисные переменные - x, y, свободные переменные - z, t .

Перейдём к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ y - z + \frac{5}{3} t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Придадим переменным z и t произвольные значения и сделаем "восходящий ход метода Гаусса":

$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ y - z + \frac{5}{3}t = -\frac{1}{3} \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = y - z + t + 2 = \alpha - \frac{5}{3}\beta - \frac{1}{3} - \alpha + \beta + 2 = -\frac{4}{3}\beta + \frac{5}{3} \\ y = z - \frac{5}{3}t - \frac{1}{3} = \alpha - \frac{5}{3}\beta - \frac{1}{3} \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases},$$

получаем

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3}\beta + \frac{5}{3} \\ y = \alpha - \frac{5}{3}\beta - \frac{1}{3}, \quad \alpha, \beta \in R \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$ - решение системы (общее).

Если мы хотим найти какое-то конкретное частное решение, нужно придать двум переменным z и t некоторые значения ($z = \alpha = \alpha_0, t = \beta = \beta_0$), а по ним вычислить оставшиеся два значения x и y.

Например:

$$\begin{cases} z = \alpha = 1 \\ t = \beta = 3 \\ x = -\frac{4}{3}\beta + \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \cdot 3 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{5} \\ y = \alpha - \frac{5}{3}\beta - \frac{1}{3} = 1 - \frac{5}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} = -\frac{13}{3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ y = -\frac{13}{3} \\ z = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$ - частное решение системы.