$$\Big/ \text{Замена:} \qquad t^2 + q - \frac{p^2}{4} = z; \qquad dz = 2tdt; \qquad tdt = \frac{dz}{2} \Big/$$

Введём обозначение:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}, \qquad \text{где} \;\; a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + t^2 - t^2)dt}{(t^2 + a^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}}}_{I_{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2\, dt}{(t^2 + a^2)^k} =$$

$$\Big/ \; u = t; \quad du = dt; \quad dv = \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k}; \quad v = \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} \Big/$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{t}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{t}{2a^2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2a^2(1-k)} I_{k-1}.$$

Получили рекуррентное соотношение.

Применяя это соотношение несколько раз, приходим к табличному интегралу I_1.

2.3 Процедура интегрирования рациональной дроби

Опишем процедуру интегрирования рациональной дроби общего вида: $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx$

1) Пусть $m \geq n$ (то есть дробь неправильная: степень числителя $\geq$ степени знаменателя). Тогда в дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ нужно выделить целую часть. Это можно сделать с помощью деления многочленов в столбик. Например:

$$\frac{x^4 + 3x^2 + x + 2}{x^2 + 1} = x^2 + 2 + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

$$
\begin{array}{llll|l}
x^4 & +3x^2 & +x & +2 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
x^4 & +x^2 & & & x^2+2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^2 & +x & +2 & \\
 & 2x^2 & +2 & & \\ \cline{2-4}
 & & & x &
\end{array}
$$

2) Мы получим правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ (степень числителя меньше степени знаменателя). Разложим правильную дробь на простейшие. Для этого нужно разложить знаменатель на множители:

$$Q_n(x) = a_0(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ \ldots$$

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ представляется в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами. При этом каждому множителю в знаменателе отвечают следующие слагаемые:

$$\frac{1}{(x-a_1)^{k_1}} \longmapsto \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ \ldots\ldots\ +\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}},$$

$$\frac{1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} \mapsto \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}.$$

Пример

$$\frac{x+3}{(x-1)^2\,(x+1)^3\,(x^2+x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x+1}+$$

$$+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

3) Найдём коэффициенты в простейших дробях. Продемонстрируем это на примере.

$$\frac{x+3}{(x-1)\,(x+2)\,x} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)\,(x+2)\,x} = \frac{Ax\,(x+2)+Bx\,(x-1)+C\,(x-1)\,(x+2)}{(x-1)\,(x+2)\,x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = Ax\,(x+2)+Bx\,(x-1)+C\,(x-1)\,(x+2).$$

Приведем два способа нахождения коэффициентов A, B, C :

a) Можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x и получить систему уравнений.

b) Метод подстановки. Подставим в уравнение различные значения x и получим систему уравнений.

$$\left.\begin{array}{l|l} x=0 & 3=C\cdot(-1)\cdot 2 \\ x=1 & 4=A\cdot 3 \\ x=-2 & 1=B\cdot(-2)\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C=-\frac{3}{2}, \\ A=\frac{4}{3}, \\ B=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

4) Последнее действие – интегрирование простейших дробей. Получаются стандартные интегралы, которые были найдены ранее в общем виде.

Задачи

9) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$3x^2+2x-1=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x=1 & 4=3B \\ x=-2 & 12-4-1=9C \\ x=0 & -1=-2A+2B+C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{4}{3} \\ C=\frac{7}{9} \\ A=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9}+\frac{1}{2}=\frac{40}{18}=\frac{20}{9} \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{20}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$
$$=\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C.$$

10) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-1}dx$

$\frac{x^3+1}{x^3-1}$ – здесь степень числителя равна степени знаменателя. Следовательно, нужно выделить целую часть.

$$\frac{x^3+1}{x^3-1} = \frac{x^3-1+2}{x^3-1} = 1 + \frac{2}{x^3-1}$$

$$\frac{2}{x^3-1} = \frac{2}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$2 = A\left(x^2+x+1\right) + (Bx+C)(x-1)$$

$$2 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$2 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C$$

Приравняем коэффициенты при степенях x:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2: & A+B=0 \\ x^1: & A-B+C=0 \\ x^0: & A-C=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-B \\ C=A-2 \\ A-(-A)+A-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{2}{3} \\ B=-\frac{2}{3} \\ C=-\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$\frac{x^3+1}{x^3-1} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{x-1} - \frac{\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-1}dx = \int dx + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx = x + \frac{2}{3}\ln|x-1| -$$

$$-\frac{2}{3}\int\frac{x+2}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}}dx = x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\int\frac{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx =$$

$$= x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} =$$
$$= x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C.$$

11) $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{x^3+3x^2+4x-8}$

Разложим знаменатель дроби на множители:

$$x^3+3x^2+4x-8 = (x-1)\left(x^2+4x+8\right)$$

Теперь разложим рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x+2}{(x-1)\left(x^2+4x+8\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+8}$$

$$x+2 = A\left(x^2+4x+8\right) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x+2 = (A+B)x^2 + (C-B+4A)x + 8A - C$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2: & A+B=0 \\ x^1: & C-B+4A=1 \\ x^0: & 2=8A-C \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B=-A \\ C=-5A+1 \\ 2=13A-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{3}{13} \\ B=-\frac{3}{13} \\ C=-\frac{2}{13} \end{array}\right.$$

$$\frac{x+2}{(x-1)\left(x^2+4x+8\right)} = \frac{\frac{3}{13}}{x-1} - \frac{\frac{3}{13}x+\frac{2}{13}}{x^2+4x+8}$$

$$\int \frac{x+2}{(x-1)\left(x^2+4x+8\right)} = \frac{3}{13}\ln|x-1| - \frac{1}{13}\int\frac{(3x+2)dx}{x^2+4x+8} =$$
$$= \frac{3}{13}\ln|x-1| - \frac{1}{13}\int\frac{3x+6-4}{(x+2)^2+2^2}dx =$$
$$= \frac{3}{13}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{13}\int\frac{d(x+2)^2}{(x+2)^2+2^2} + \frac{4}{13}\int\frac{dx}{(x+2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{3}{13}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{13}\ln\left|(x+2)^2+4\right| + \frac{2}{13}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

<u>Решите самостоятельно:</u>

12) $$\int \frac{2x-5}{\left(x^2-5x+4\right)^3}dx$$

13) $$\int \frac{dx}{x\left(x^2+2\right)}$$

14) $$\int \frac{x+3}{\left(x^2-2x+2\right)(x-2)}dx$$