Конспект лекций по теме «Сети Петри»

1. Понятие и структура сети Петри

Сеть Петри (СП) – это математическая модель, отображающая структуру и динамику дискретных систем и используемая для исследования поведения системы с целью получения ее новых характеристик (свойств). СП предложил впервые в 1962 году немецкий математик **Карл Петри**.

На рисунке 1.1 приведена общая схема проектирования системы с использованием СП. Здесь в цикле выполняются следующие процессы: моделирование проекта системы в виде СП, анализ функционирования СП и определение основных свойств системы, модификация проекта системы. Проектирование системы завершается, если полученные в ходе моделирования свойства системы удовлетворяют требования проекта. Такой подход к проектированию систем имеет существенное преимущество по сравнению с изготовлением и натурным испытанием опытных образцов системы (экономия времени и стоимости разработки проекта системы). Наибольшую эффективность данный подход имеет для случая проектирования систем с большим количеством элементов и сложной логикой их поведения.

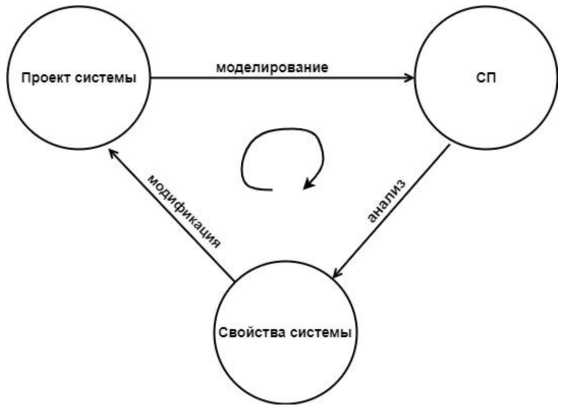


Рисунок 1.1 – Общая схема проектирования системы с использованием СП

По структуре СП представляет собой **ориентированный двудольный граф**. В таблице ниже показано соответствие основных понятий системы и ее модели в виде СП.

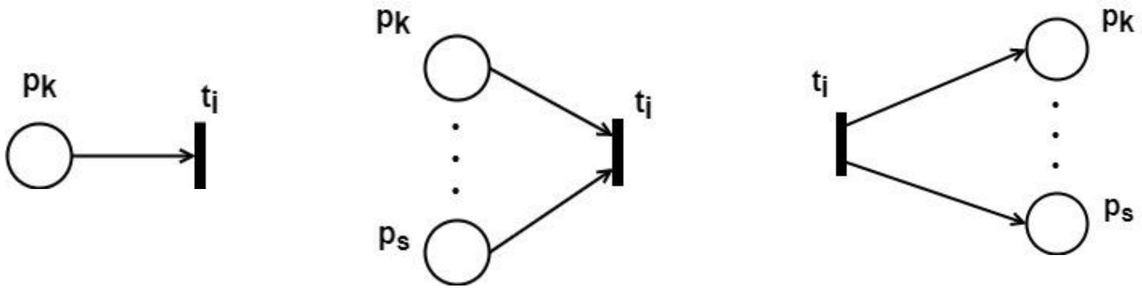
№	Понятие системы	Понятие СП
1	Событие	Переход
2	Условие	Позиция
3	Предусловие	Входная позиция, входная функция
4	Постусловие	Выходная позиция, выходная функция

Событие – это некоторый факт в системе, трактуемый как потенциальное действие одного из ее элементов, которое может выполниться один раз, несколько раз или ни разу. Событие в СП моделируется с помощью перехода. **Переход** – это вершина двудольного графа, которую на рисунке мы будем изображать коротким отрезком. Множество переходов объединяются в первую долю вершин графа $T = \{t_1,..., t_m\}$, где m – это количество различных событий в системе (количество переходов в СП). Очевидно, что для существования модели необходимо, чтобы $m > 0$.

Условие – это некоторый предикат, являющийся логическим описанием ситуации, при которой в системе может реализоваться некоторое событие. Условие в СП моделируется с помощью позиции. **Позиция** – это вершина двудольного графа, которую на рисунке мы будем изображать кружками. Множество позиций объединяются во вторую долю вершин графа $P = \{p_1,..., p_n\}$, где n – это количество различных ситуаций в системе (количество позиций в СП). Очевидно, что для существования модели необходимо, чтобы $n > 0$.

Предусловие – это логическое отношение нескольких условий, при истинном значении которого в системе может реализоваться некоторое событие. Предусловие в СП моделируется с помощью входных позиций. **Входная позиция** перехода $t_i \in T$ – это некоторая позиция $p_k \in P$, из которой идет дуга к данному переходу (рис. 1.2,а). Если к переходу $t_i \in T$ идет несколько дуг (рис. 1.2,б), то его входные позиции объединяются в множество $I(t_i)$. **Входная функция** – это такое отображение $T \to P$, которое каждому перехода ставит в соответствие множество его входных позиций: $I = \bigcup_{i=1}^{m} I(t_i)$.

Постусловие – это логическое отношение нескольких условий, которое в системе влияет на реализацию некоторого события. Постусловие в СП моделируется с помощью выходных позиций. **Выходная позиция** перехода $t_i \in T$ – это некоторая позиция $p_k \in P$, в которую идет дуга от данного перехода. Если от перехода $t_i \in T$ идет несколько дуг (рис. 1.2,с), то его выходные позиции объединяются в множество $O(t_i)$. **Выходная функция** – это такое отображение $T \to P$, которое каждому перехода ставит в соответствие множество его выходных позиций: $O = \bigcup_{i=1}^{m} O(t_i)$.



а) входная позиция перехода $t_i \in T$ | б) множество входных позиций $I(t_i)$ | с) множество выходных позиций $O(t_i)$

Рисунок 1.2 – Моделирование предусловия и постусловия системы в СП

Исходя из приведенных выше понятий перейдем к формальному определению СП. **Сеть Петри – это четверка множеств T, P, I, O, задающая причинно-следственные связи между событиями и условиями в моделируемой системе**. Каким же образом в таком графе моделируется поведение системы? Для этого Карл Петри ввел для этого понятие ёмкости позиций.

Ёмкость k-ой позиции в СП – это целое неотрицательное число $\mu(p_k)$, которое характеризует выполнимость k-го условия в системе в данный момент времени. По сути дела, ёмкость указывает на то, сколько раз выполняется данное условие (0,1,2,…). Ёмкость на рисунках изображается точками с помощью маркеров или фишек (рис. 1.3). Если ёмкость велика, то вместо точек ставится число. На рисунке 3 приведен пример, где емкость позиции $\mu(p_k)=3$, т.е. в данный момент времени k-ое условие выполнимо, причем три раза.

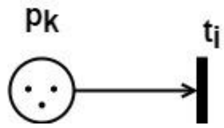


Рисунок 1.3 – Пример установления ёмкости позиции

Маркировка (разметка) СП – это процедура определения емкостей позиций в модели. Результат маркировки всех позиций СП можно представить с помощью вектора $\vec{\mu}=(\mu_1,...,\mu_n)$, в котором $\mu_k=\mu(p_k)$. **Начальная маркировка** $\vec{\mu}_0$ – это маркировка СП до начала исследования модели (в начальный момент времени). Таким образом, **маркированная СП** – это математическая модель $C=<T,P,I,O,\vec{\mu}_0>$.

2. Классификация сетей Петри по структуре

По структуре СП представляет собой **ориентированный двудольный граф**. Множество вершин этого графа состоит из двух долей – множества переходов $T=\{t_1,...,t_m\}$ и множества позиций $P=\{p_1,...,p_n\}$, оба множества непустые. Дуги, соединяющие переходы и позиции, определяют входные и выходные позиции переходов $I(t_i)$ и $O(t_i)$, входную и выходную функции сети $I=\bigcup_{i=1}^{m} I(t_i)$ и $O=\bigcup_{i=1}^{m} O(t_i)$. Ёмкости позиций в СП задаются с помощью вектора маркировки $\vec{\mu}=(\mu_1,...,\mu_n)$, в начальный момент времени – с помощью вектора $\vec{\mu}_0$.

В СП допускается наличие **кратных дуг**. Кратность является атрибутом дуги; они определяют следующие важные характеристики СП:

- $\#(p_k, I(t_i))$ - кратность позиции p_k на входе перехода t_i,
- $\#(p_k, O(t_i))$ - кратность позиции p_k на выходе перехода t_i.

На рисунке 2.1 приведены примеры изображения кратной дуги (p_k, t_i). Очевидно, что при этом $\#(p_k, I(t_i)) = 3$.

а) с помощью пучка дуг б) с помощью числа

Рисунок 2.1 – Примеры изображения кратных дуг в СП

Если некоторая позиция p_k является одновременно и входной, и выходной для перехода t_i, то такой элемент структуры в СП называется **петлей** (рис. 2.2).

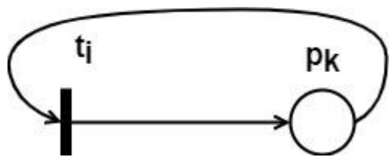
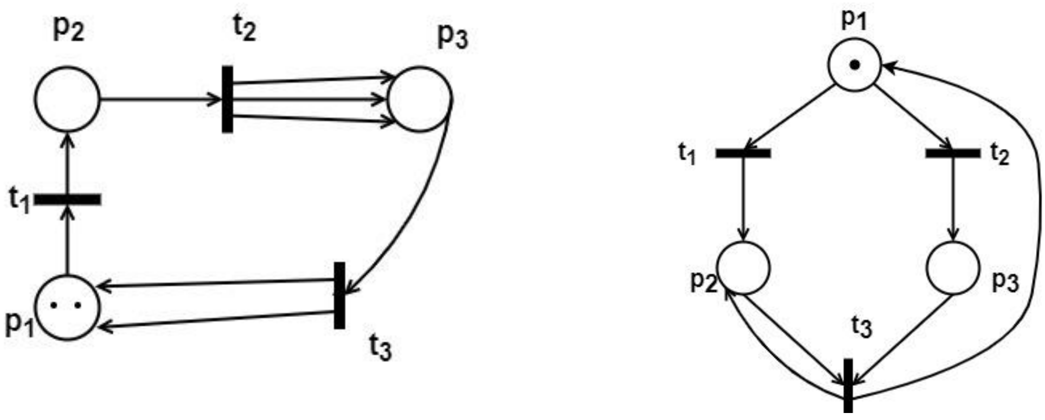


Рисунок 2.2 – Пример петли в СП

В зависимости от наличия кратных дуг и петель в графе различают чистые и ординарные СП. **Чистая сеть Петри** – это СП без петель**. Ординарная сеть Петри –** это СП без кратных дуг.

На рисунке 2.3,а приведен пример чистой (нет петель), но не ординарной СП (дуги (t_2, p_3) и (t_3, p_1) имеют кратность 3 и 2, соответственно). В этой сети количество переходов $m = 3$, количество позиций $n = 3$, вектор начальной маркировки $\vec{\mu}_0 = (2,0,0)$.

На рисунке 2.3,б приведен пример ординарной (нет кратных дуг), но не чистой СП (есть петля, образованная дугами (p_2, t_3) и (t_3, p_2)). В этой сети количество переходов $m = 3$, количество позиций $n = 3$, вектор начальной маркировки $\vec{\mu}_0 = (1,0,0)$.



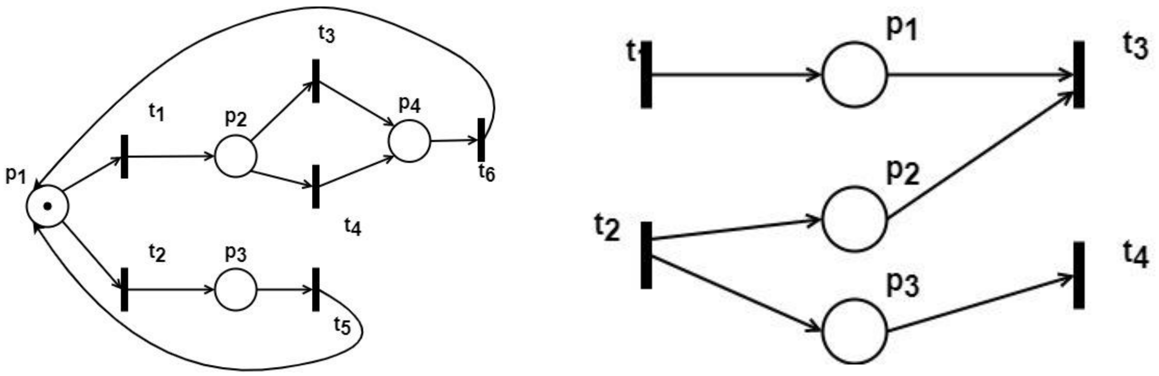
а) чистая, но не ординарная б) ординарная, но не чистая

Рисунок 2.3 – Примеры СП

В свою очередь в классе ординарных СП выделяют автоматные сети и синхрографы.

Автоматная сеть Петри – это ординарная СП, в которой *каждый переход* имеет ровно одну входную и ровно одну выходную позицию. Очевидно, что ординарная СП (рис. 2.3,б) не является автоматной (переход t_3 имеет по две позиции на входе и выходе). А вот на рисунке 2.4,а изображена автоматная СП (у каждого ее перехода одна входящая и одна выходящая дуга).

Синхрограф (маркированный граф) – это ординарная СП, в которой *каждая позиция* является входной и (или) выходной позицией только для одного перехода. Очевидно, что ординарная СП (рис. 2.4,б) не является синхрографом (позиция p_1 является входной для двух переходов). А вот на рисунке 4,б изображен фрагмент синхрографа (здесь в каждую позицию входит и выходит по одной дуге).



а) автоматная СП б) сихрограф

Рисунок 2.4 – Примеры ординарных сетей

Пример №1 – «ГПМ в составе АСУТП»

Гипкий производственный модуль (ГПМ) включает в себя обрабатывающий центр (ОЦ), который обрабатывает одновременно 3 заготовки из магазина (30 заготовок), поступившего со склада. Обработанные заготовки (детали) поступают в контейнер (300 деталей), который после заполнения отправляется на склад. Построим модель управления ГПМ в виде сети Петри.

№	Событие в системе	Переход в СП
1	Магазин поступил в ГПМ со склада	t_1
2	ОЦ начал обработку заготовки	t_2
3	ОЦ закончил обработку заготовки	t_3
4	Деталь поступила в контейнер	t_4
5	Контейнер отправлен на склад	t_5

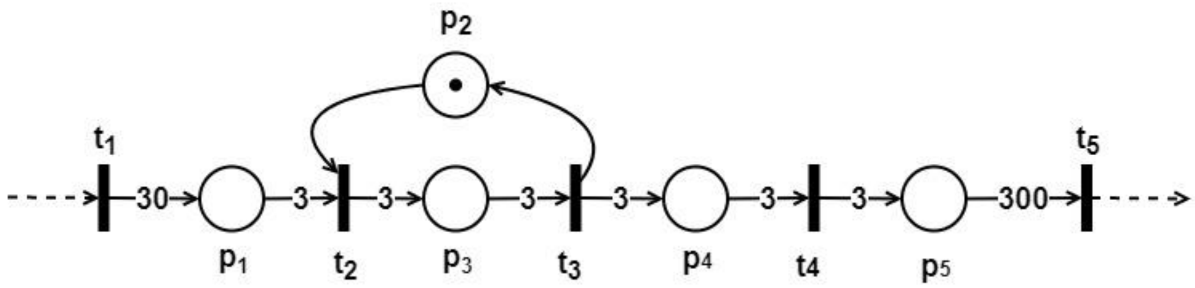
№	Условие в системе	Позиция в СП
1	Заготовка ждет обработки	p_1
2	ОЦ свободен	p_2

3	Заготовка обрабатывается в ОЦ	p_3
4	Деталь получена	p_4
5	Контейнер полностью заполнен	p_5

Переход	$I(t_i)$	$O(t_i)$
t_1	$\{...\}$	$\{p_1\}$
t_2	$\{p_1, p_2\}$	$\{p_3\}$
t_3	$\{p_3\}$	$\{p_2, p_4\}$
t_4	$\{p_4\}$	$\{p_5\}$
t_5	$\{p_5\}$	$\{...\}$

$\vec{\mu}_0 = (0,1,0,0,0)$

Ниже на рисунке представлена сеть Петри для данного ГПМ.



Пример №2 – «Модуль ВС для параллельной обработки заданий»

Модуль вычислительной системы (ВС) включает в себя два вычислительных устройства (ВУ) – ВУ1 и ВУ2, которые могут обрабатывать очередное задание и формируют отчет об обработке. Построим модель управления такого модуля ВС в виде сети Петри.

№	**Событие в системе**	**Переход в СП**
1	ВУ1 начало обработку задания	t_1
2	ВУ1 закончило обработку задания	t_2
3	ВУ2 начало обработку задания	t_3
4	ВУ2 закончило обработку задания	t_4

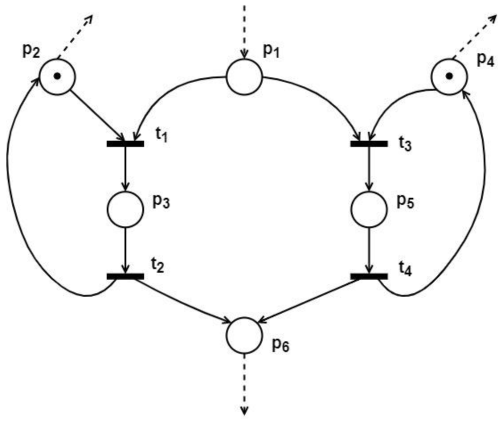
№	**Условие в системе**	**Позиция в СП**
1	Задание поступило на обработку	p_1
2	ВУ1 свободно	p_2
3	ВУ1 обрабатывает задание	p_3
4	ВУ2 свободно	p_4
5	ВУ2 обрабатывает задание	p_5

6	Сформирован отчет об обработке задания	p_6

Переход	$I(t_i)$	$O(t_i)$
t_1	$\{p_1,p_2\}$	$\{p_3\}$
t_2	$\{p_3\}$	$\{p_2,p_6\}$
t_3	$\{p_1,p_4\}$	$\{p_5\}$
t_4	$\{p_5\}$	$\{p_4,p_6\}$

$\vec{\mu}_0 = (0,1,0,1,0,0)$

Ниже на рисунке представлена сеть Петри для данной ВС.



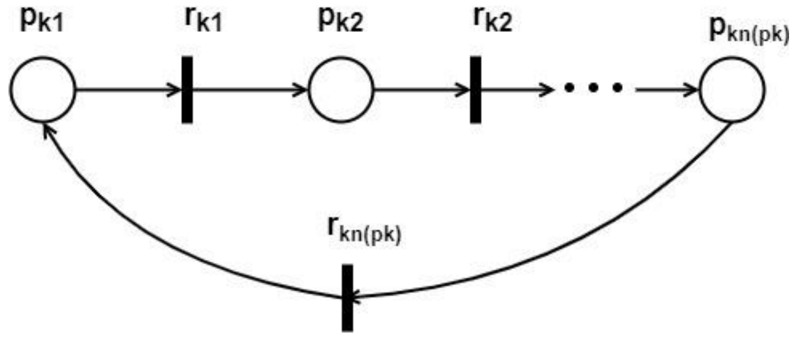
3. Алгоритм преобразования в ординарную сеть Петри

Многие методы, использующие сети Петри, требуют, чтобы на входе была ординарная СП. На практике часто не удается сразу построить такую модель, но, к счастью, имеется достаточно простой алгоритм, который позволяет преобразовать любую маркированную СП в ее аналог ординарной СП (с сохранением всех основных свойств модели). Безусловно, такое преобразование имеет и негатив (размерность модели после преобразования сильно возрастает). Однако, это позволяет использовать готовые программные решения для многих прикладных задач.

Алгоритм преобразования содержит следующие семь шагов.

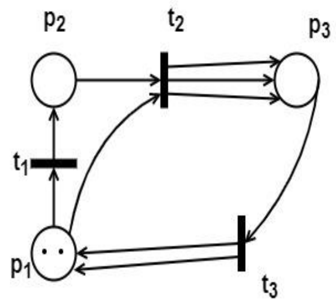
1. Для всех позиций $p_k \in P$ исходной СП подсчитывается следующая характеристика: $n(p_k) = \max_{i=1}^{m}(\#(p_k, I(t_i)) + \#(p_k, O(t_i)))$.
2. Если $n(p_k) > 1$, то для этой позиции определяется множество дополнительных позиций $\{p_{k1},..., p_{kn(p_k)}\}$.
3. Переходы исходной СП $T = \{t_1,...,t_m\}$ объявляются нормальными переходами.

4. Если $n(p_k) > 1$, то для этой позиции определяется множество кольцевых переходов $\{r_{k1},...,r_{kn(p_k)}\}$.
5. Если $n(p_k) > 1$, то для этой позиции строится кольцевая подсеть на множествах $\{p_{k1},..., p_{kn(p_k)}\}$ и $\{r_{k1},...,r_{kn(p_k)}\}$, представляющая собой простой контур, в котором чередуются дополнительные позиции и кольцевые переходы этой позиции. Направление дуг в контуре может быть как по часовой стрелки (см. рисунок ниже), так и против часовой стрелки.



6. Строится новая структура СП, в которой каждая позиция исходной сети с характеристикой $n(p_k) > 1$ заменяется на ее кольцевую подсеть. При этом дуги, соединяющие дополнительные позиции подсети с нормальными переходами, строятся так, чтобы не было кратности.
7. Производится начальная разметка в преобразованной СП по следующему правилу.
   - Если $n(p_k) = 1$, то ёмкость этой позиции сохраняется.
   - Если $n(p_k) > 1$, то все фишки этой позиции переходят в первую по счету дополнительную позицию ее кольцевой подсети, т.е. $\mu(p_{k1}) = \mu(p_k)$, а ёмкости остальных ее дополнительных позиций обнуляются.

Пример. На рисунке ниже представлена следующая маркированная СП с количеством переходов $m = 3$, количеством позиций $n = 3$, вектором начальной маркировки $\vec{\mu}_0 = (2,0,0)$. Необходимо преобразовать ее в ординарную СП с помощью данного алгоритма.



Решение.

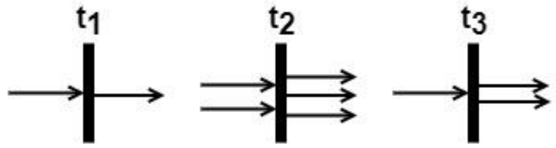
1. Подсчитаем характеристики позиций этой сети.

$$n(p_1) = \max_{i=1}^{3}(\#(p_1, I(t_i)) + \#(p_1, O(t_i))) = \max(1+0, 1+0, 0+2) = 2$$

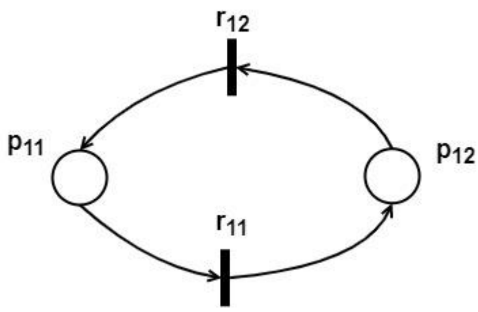
$$n(p_2) = \max_{i=1}^{3}(\#(p_2, I(t_i)) + \#(p_2, O(t_i))) = \max(0+1, 1+0, 0+0) = 1$$

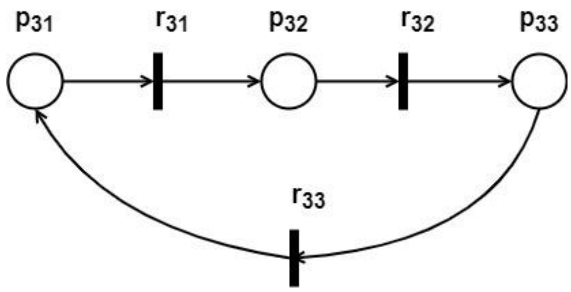
$$n(p_3) = \max_{i=1}^{3}(\#(p_3, I(t_i)) + \#(p_3, O(t_i))) = \max(0+0, 0+3, 1+0) = 3$$

2. Т.к. $n(p_1) > 1$, то определим для нее множество дополнительных позиций $\{p_{11}, p_{12}\}$. Т.к. $n(p_3) > 1$, то определим для нее множество дополнительных позиций $\{p_{31}, p_{32}, p_{33}\}$.
3. Объявим нормальные переходы СП:

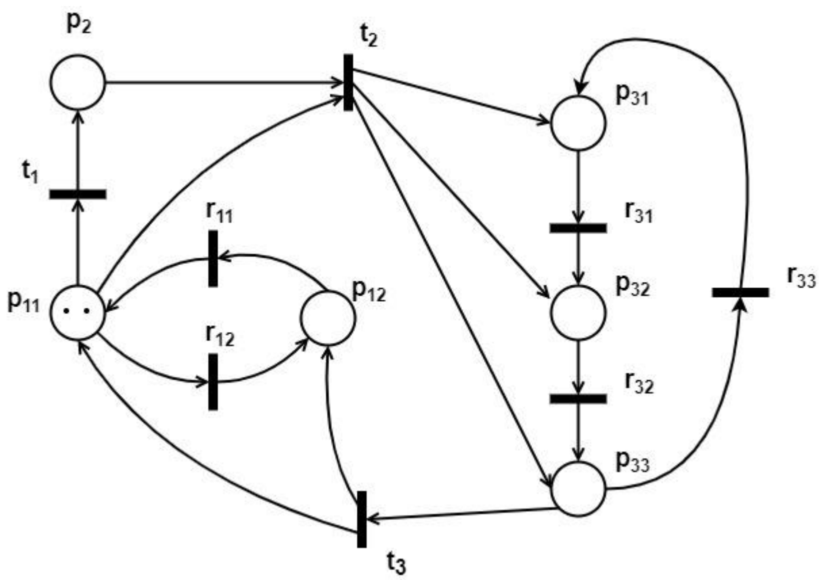


4. Т.к. $n(p_1) > 1$, то определим для нее множество кольцевых переходов $\{r_{11}, r_{12}\}$. Т.к. $n(p_3) > 1$, то определим для нее множество кольцевых переходов $\{r_{31}, r_{32}, r_{33}\}$.
5. Т.к. $n(p_1) > 1$, то строим для этой позиции кольцевую подсеть (рис. слева). Т.к. $n(p_3) > 1$, то строим для этой позиции кольцевую подсеть (рис. справа).





6-7. Строим новую структуру СП путем замены в исходной сети позиций p_1 и p_3 на их кольцевые подсети. Соединяем позиции кольцевых подсетей с нормальными переходами так, чтобы в сети не было кратных дуг. Производим начальную разметку полученной ординарной СП по правилу п.7 алгоритма: $\mu(p_{11}) = 2$, остальные позиции в этой СП получат нулевые значения емкостей. Построенная таким образом ординарная СП выглядит так:



Примечание. Сравнивая данную ординарную СП и с ее оригиналом (с исходной СП), легко заметить, что размерность ординарной СП увеличилась: количество переходов $m'=8$, количество позиций $n'=6$, вектор начальной маркировки $\vec{\mu}_0'=(2,0,0,0,0,0)$.
Размерность ординарной СП, построенной данным алгоритмов, можно посчитать сразу же после шага 1 следующим образом: $m'=m+\sum_{i=1}^{n} n(p_k)$, $n'=n+\sum_{i=1}^{n}(n(p_k)-1)$.

4. Функционирование сетей Петри

Функционированием СП управляют маркеры (Их количество и распределение по позициям в сети), которые запускают переходы. Переход может запускаться, если он разрешен. После срабатывания разрешенного переход перемещает маркеры из своих входных в свои выходные позиции.

Разрешенный переход – это такой переход $t_i \in T$, для которого при заданном векторе $\vec{\mu}=(\mu_1,...,\mu_n)$ выполняется следующее условие:

$$\forall p_k \in I(t_i): \mu_k \geq \#(p_k, I(t_i)). \qquad (1)$$

Т.е. у каждой входной позиции перехода $t_i \in T$ ёмкость (количество маркеров в этой позиции) не меньше, чем количество дуг, идущих из данной позиции к этому переходу.

Срабатывание разрешенного перехода $t_i \in T$ – это неделимое локальное действие, в результате которого ёмкости позиций пересчитываются по следующему правилу:

$$\forall p_k \in P: \mu_k' = \mu_k - \#(p_k, I(t_i)) + \#(p_k, O(t_i)), \qquad (2)$$

где μ_k, μ_k' – ёмкость позиции $p_k \in P$ до срабатывания, после срабатывания перехода t_i. Т.е. новая емкость μ_k' позиции корректируется (минус) на кратность дуги, идущей из этой позиции к переходу t_i, и суммируется с кратностью дуги, идущей от перехода t_i к данной позиции. Заметим, что, если данная позиция p_k не связана с переходом t_i, то ее ёмкость не меняется. Это обстоятельство удобно использовать на практике.

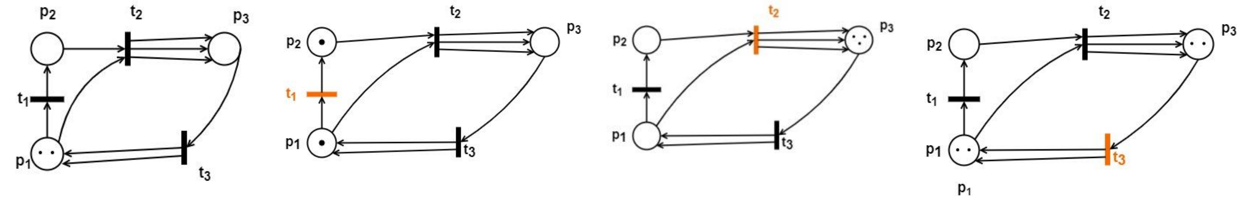
Тупиковая маркировка – это такой вектор $\vec{\mu}=(\mu_1,...,\mu_n)$, при котором в СП нет ни одного разрешенного перехода.

Функционирование сети Петри – это процесс последовательного срабатывания разрешенных переходов, в ходе которого происходит изменение емкостей позиций до тех пор, пока не будет получена тупиковая маркировка.

Запишем отношение непосредственного следования маркировки $\vec{\mu}'$ после маркировки $\vec{\mu}$ в результате срабатывания разрешенного перехода t_i по форме К. Петри:

$$\mu[t_i > \mu'. \qquad (3)$$

Пример. Пусть имеется СП с количеством переходов $m = 3$, количеством позиций $n = 3$ (рис.4.1,а). Под рисунком 4.1,а указан вектор начальной маркировки (до начала функционирования сети). Проанализируем процесс функционирования этой сети.



а) $(2,0,0)$ б) $(2,0,0)[t_1 > (1,1,0)$ в) $(1,1,0)[t_2 > (0,0,3)$ г) $(0,0,3)[t_3 > (2,0,2)$

Рисунок 4.1 – Пример функционирования СП

Согласно условию (1) в сети (рис.4.1,а) только один разрешенный переход – t_1. После его срабатывания ёмкости позиций изменятся согласно правилу (2). Результат изменения емкостей показан на рисунке 4.1,б. В сети Петри (рис. 4.1,б) есть два разрешенных перехода – t_1 и t_2. Пусть в следующий момент времени сработал переход t_2, ёмкости позиций после его срабатывания изменятся так, как показано на рисунке рис. 4.1,в. В сети Петри (рис. 4.1,в) только один разрешенный переход – t_3. После его срабатывания ёмкости позиций изменятся (рис. 4.1,г). Очевидно, что в следующий момент времени в сети (рис. 4.1,г) есть два разрешенных перехода – t_1 и t_3. Поэтому процесс функционирования продолжится дальше аналогичным образом. К вопросу моделирования процесса функционирования СП мы перейдем более подробно в следующей лекции.

Под рисунками 4.1,б–4.1,г приведены записи отношения следования маркировок согласно форме (3), эти записи можно свернуть следующим образом: $(2,0,0)[t_1, t_2, t_3 > (0,2,2)$. Здесь через запятую перечисляются переходы, которые сработали последовательно.

Правила срабатывания переходов

1. **Очередность срабатывания переходов**. Возбуждение перехода может сохранятся в сети сколь угодно долго, которое снимается после его срабатывания или в результате срабатывания другого разрешенного перехода.
2. **Разрешение конфликтов**. Если несколько переходов имею общую входную позицию, которая содержит маркер для срабатывания только одного перехода, то такая позиция называется конфликтной. Например, в СП на рисунке 4.2 позиция p_1 является конфликтной (маркер в ней возбуждает одновременно t_1 и t_2). Для разрешения конфликтов в таких СП используются следующие подходы:

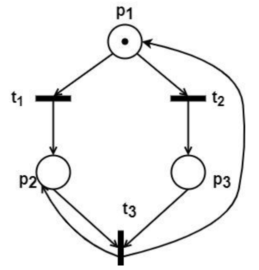


Рисунок 4.2 – Пример СП с конфликтной позицией

Для разрешения конфликтов в таких СП используются следующие подходы:

1). Для срабатывания выбирается один из альтернативных переходов случайным образом.

2). Для срабатывания выбирается один из альтернативных переходов с помощью алгоритма, определяющего приоритеты этих переходов в текущий момент времени.

3. **Возможность одновременного срабатывания нескольких переходов**. Если в СП в текущий момент времени есть несколько попарно независимых разрешенных переходов, то они могут сработать в любой последовательности или параллельно. Несколько разрешенных переходов называются независимыми, если они имеют непересекающиеся между собой множества входных и выходных позиций. На рисунке 4.3 приведен пример СП, в которой в текущий момент времени имеется три независимых разрешенных переходов – t_1 , t_4 и t_6 .

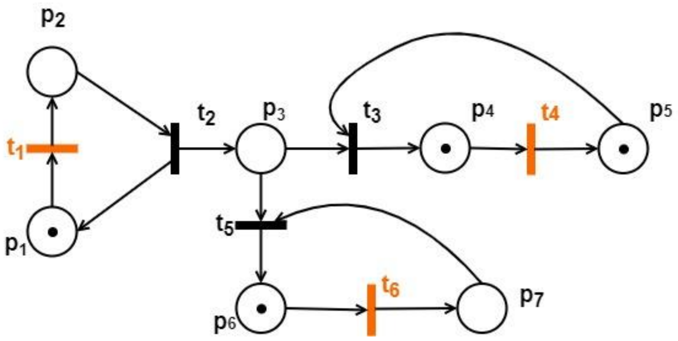


Рисунок 4.3 – Пример СП с независимыми разрешенными переходами

Докажем, что эти разрешенные переходы являются независимыми. Ниже в таблице показаны множества входных и выходных позиций переходов: эти множества при пересечении дают пустое множество. Поэтому эти переходы могут сработать, например, в такой последовательности $(1,0,0,1,1,1,0)[t_1, t_4, t_6 > (0,1,0,0,2,0,1)$ или параллельно $(1,0,0,1,1,1,0)[t_1 + t_4 + t_6 > (0,1,0,0,2,0,1)$.

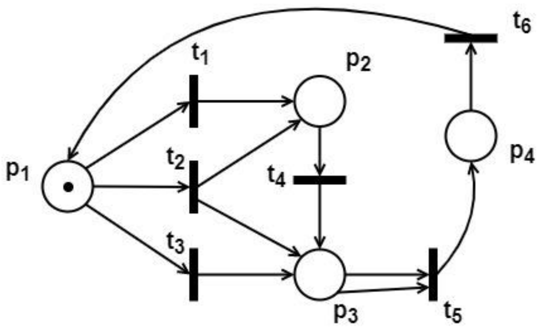
Переход t_i	**Множество** $I(t_i)$	**Множество** $O(t_i)$
t_1	$\{p_1\}$	$\{p_2\}$
t_4	$\{p_4\}$	$\{p_5\}$
t_6	$\{p_6\}$	$\{p_7\}$

5. Покрывающее дерево сети Петри

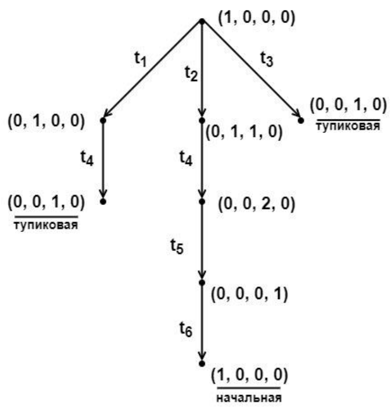
Покрывающее дерево СП – это модель функционирования сети, представляющее собой корневое дерево, в котором вершины моделируют вектора маркировки, а дуги – разрешенные переходы. Корень дерева моделирует вектор начальной маркировки μ_0.

Истоком дуги является вершина, моделирующая вектор маркировки μ, при котором разрешен переход t_i, а стоком – вершина, моделирующая вектор маркировки μ' после срабатывания этого перехода: $\mu[t_i > \mu'$. Дерево строится в следующем порядке: сначала сверху вниз, а затем слева направо. Вершины дерева, моделирующие тупиковые и дублирующие (ранее встретившиеся в дереве) маркировки, являются листьями этого дерева.

Пример. На рисунке 5.1,а представлена сеть Петри с количеством переходов $m = 6$, количеством позиций $n = 4$ и вектором начальной маркировки $\mu_0 = (1,0,0,0)$, а на рисунке 5.1,б – ее покрывающее дерево. В этом дереве три листа (две вершины, моделирующие тупиковые маркировки, и одна вершина, дублирующая маркировку μ_0). Дуги в этом дереве размечены разрешенными переходами.



а) сеть Петри



б) покрывающее дерево

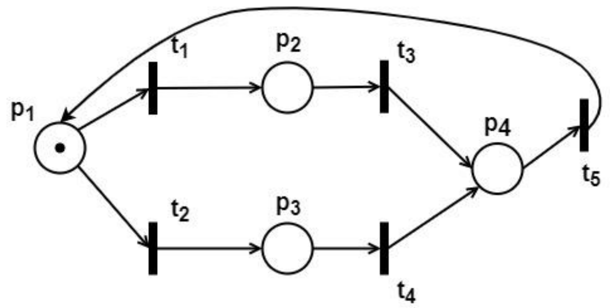
Рисунок 5.1 – Пример моделирования функционирования СП

Множество достижимости СП – это множество $R(C, \mu_0)$, включающее все вектора маркировок, достижимых в сети Петри со структурой C и вектором начальной маркировки μ_0 в процессе ее функционирования. Множество $R(C, \mu_0)$ не бывает пустым, содержит хотя бы один элемент – вектор начальной маркировки μ_0. Основой для построения множества $R(C, \mu_0)$ является покрывающее дерево СП. Для сети Петри (рис. 5.1,а) с покрывающим деревом (рис. 5.1,б) множество достижимости $R(C, \mu_0)$ ={(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,2,0), (0,0,0,1)}, т.е. содержит шесть различных между собой векторов маркировок, достижимых в процессе функционирования этой сети. Множество $R(C, \mu_0)$ служит основой для определения динамических свойств этой СП.

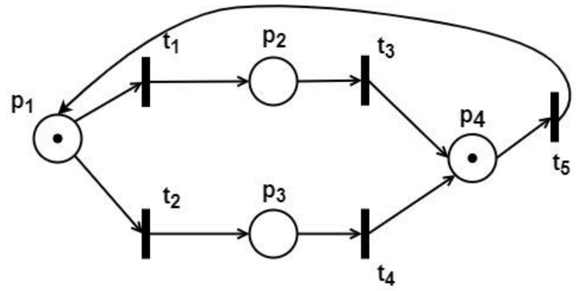
6. Классификация сетей Петри по динамическим свойствам

Безопасная СП – это маркированная сеть Петри, в процессе функционирования которой емкости позиций могут быть только 0 или 1. В противном случае СП называется небезопасной.

На рисунке 6.1,а приведен пример безопасной сети. По структуре эта СП является автоматной. Множество достижимости этой сети $R(C, \mu_0)$ ={(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)}, т.е. ёмкости всех ее позиций в процессе функционирования либо 0, либо 1. Заметим, что СП с такой структурой станет небезопасной, если вектор начальной маркировки будет, например, $\mu_0 = (1,0,0,1)$, см. рисунок 6.1,б.



а) безопасная



б) небезопасная

Рисунок 6.1 – Примеры сетей Петри

Ограниченная СП – это маркированная сеть Петри, в процессе функционирования которой емкости позиций не превышают некоторого числа $k = \max\limits_{i=1}^{n} \max\limits_{\mu \in R(C,\mu_0)} \mu(p_i)$. В этом случае говорят о k-ограниченной сети Петри, в противном случае (если $k \to \infty$) сеть Петри является неограниченной.

Заметим, что любая безопасная СП является ограниченной с $k = 1$. На рисунке 6.2 приведен пример неограниченной СП. Здесь позиция p_2 является неограниченной, в ней может накапливаться бесконечно большое количество фишек после многочисленного срабатывания перехода t_1.

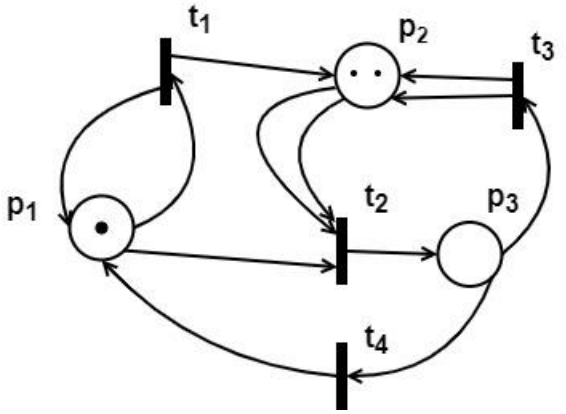
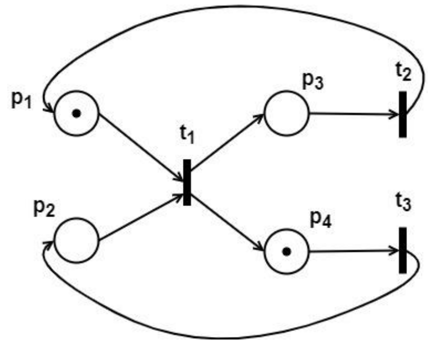


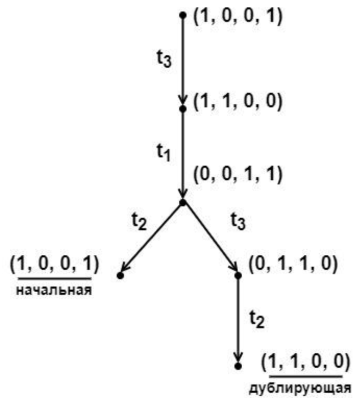
Рисунок 6.2 – Пример неограниченной СП

Строго сохраняющаяся СП – это маркированная сеть Петри, в процессе функционирования которой общее количество маркеров в сети остается постоянным, т.е. $\forall \mu \in R(C, \mu_0) : \sum_{i=1}^{n} \mu_0(p_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(p_i)$.

На рисунке 6.3 приведен пример строго сохраняющейся сети. Ее покрывающее дерево (рис. 6.3,б) содержит вершины, моделирующие вектора маркировок, в которых сумма емкостей позиций равна 2.



а) сеть Петри



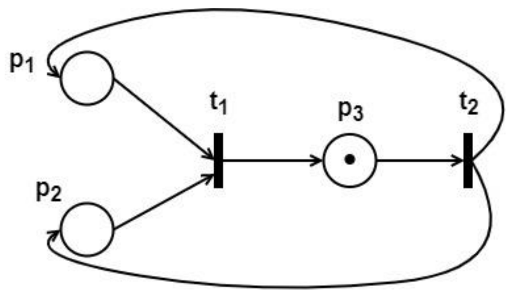
б) покрывающее дерево сети

Рисунок 6.3 – Пример строго сохраняющейся СП

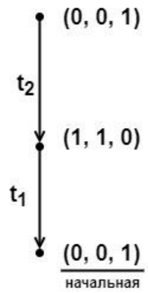
Если сеть Петри не является строго сохраняющейся, то требуется продолжить исследование сохраняемости сети.

Сохраняющаяся СП – это маркированная сеть Петри, для которой существует такой ненулевой вектор $c = (c_1,\dots,c_n)$, что $\forall \mu \in R(C, \mu_0): \sum_{i=1}^{n} \mu_0(p_i) \times c_i = \sum_{i=1}^{n} \mu(p_i) \times c_i$.

На рисунке 6.4 приведен пример сохраняющейся сети. Ее покрывающее дерево (рис. 6.4,б) содержит вершины, моделирующие вектора маркировок, в которых сумма емкостей позиций равна 1 или 2. Поэтому эта СП не является строго сохраняющейся.



а) сеть Петри



б) покрывающее дерево сети

Рисунок 6.4 – Пример сохраняющейся СП

Для проверки сохраняемости данной сети найдем ненулевой вектор $c = (c_1,\dots,c_n)$. Для этого построим систему линейных уравнений на множестве $R(C, \mu_0) = \{(0,0,1), (1,1,0)\}$ (по условию сохраняемости должно выполняться условие равенства сумм):

$$0 \times c_1 + 0 \times c_2 + 1 \times c_3 = a$$
$$1 \times c_1 + 1 \times c_2 + 0 \times c_3 = a$$

После преобразований получим, что $c_3 = c_1 + c_2$. Поэтому в данном случае для вектора $c = (c_1,\ldots,c_n)$ можно найти множество решений, например, $c = (1,1,2)$. Заметим, что если вектор $c = (c_1,\ldots,c_n)$ единичный, то данная сеть является строго сохраняющееся.

На рисунке 6.5 приведен пример несохраняющейся сети Петри. В ней позиция p_3 является неограниченной, поэтому не существует и вектор $c = (c_1,\ldots,c_n)$ для этой сети. Заметим, что данная СП (рис. 6.5) является еще неограниченной, т.е. из неограниченности СП следует и ее несохраняемость.

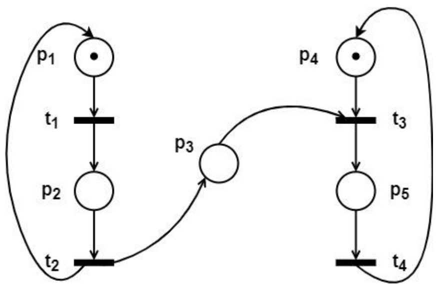
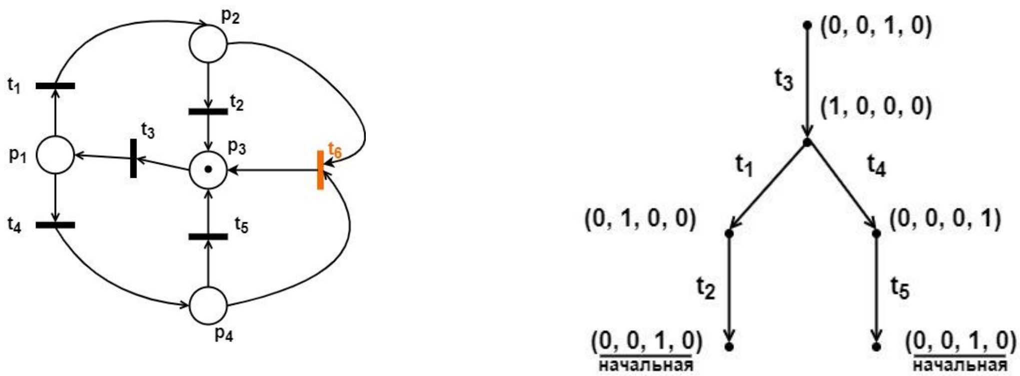


Рисунок 6.5 – Пример несохраняющейся СП

Живая СП – это маркированная сеть Петри, в процессе функционирования которой для любого перехода $t_i \in T$ сохраняется потенциальная возможность для срабатывания после маркировки μ, достижимой из маркировки μ_0. В противном случае СП неживая. Очевидно, что наличие тупиковых маркировок в покрывающем дереве СП указывает на то, что она неживая. Однако, отсутствие тупиковых маркировок является необходимым, но недостаточным условием живости СП. Для живости СП без тупиковых маркировок следует проверить *наличие всех переходов* в каждом поддереве покрывающего дерева данной сети. Если это условие выполняется, то затем следует еще проверить наличие *всех переходов в каждом цикле* покрывающего дерева. Сети Петри (рис. 6.1, 6.3, 6.4) являются живыми.

На рисунке 6.6 приведен пример неживой сети Петри. Ее покрывающее дерево (рис. 6.6,б) не содержит тупиковых маркировок (необходимое условие живости сети), однако среди дуг дерева отсутствует переход t_6 (данный переход закрыт для срабатывания, т.е. не выполняется достаточное условие живости сети).

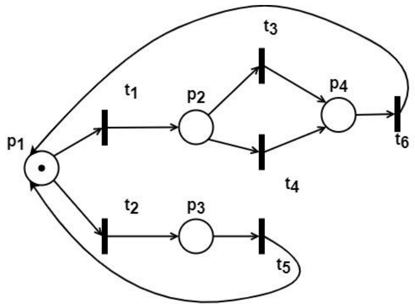


а) сеть Петри б) покрывающее дерево сети

Рисунок 6.6 – Пример неживой СП

Динамические свойства автоматных сетей Петри

Автоматная сеть Петри – это ординарная СП, в которой *каждый переход* имеет ровно одну входную и ровно одну выходную позицию. Ниже на рисунке приведен пример автоматная СП (у каждого ее перехода одна входящая и одна выходящая дуга).



Из определения автоматной сети Петри можно сделать следующие выводы (только при наличии ненулевого вектора начальной маркировки μ_0).

1. Любая автоматная СП является ограниченной и строго сохраняющейся, т.к. при срабатывании разрешенного перехода он перемещает ровно одну фишку из своей единственной входной позиции в свою единственную выходную позицию).
2. Автоматная СП является безопасной, если при начальной маркировки μ_0 только в одной позиции содержится единственный маркер, а остальные позиции пусты. В противном случае для определения безопасности автоматной СП требуется построение ее покрывающего дерева и множества достижимости $R(C, \mu_0)$. Приведенная выше на рисунке автоматная СП является безопасной.
3. Автоматная СП является живой, если она представляет собой сильно связный граф, т.е. граф, в котором из каждой его вершины существует хотя бы один простой путь, ведущий к любой другой вершины этого графа. В противном случае автоматная СП не живая. Приведенная выше на рисунке автоматная СП является живой.

Динамические свойства синхрографов

Синхрограф (маркированный граф) – это ординарная СП, в которой *каждая позиция* является входной и (или) выходной позицией только для одного перехода. Ниже на рисунке 6.7 приведен пример синхрографа (здесь в каждую позицию входит и выходит по одной дуге).

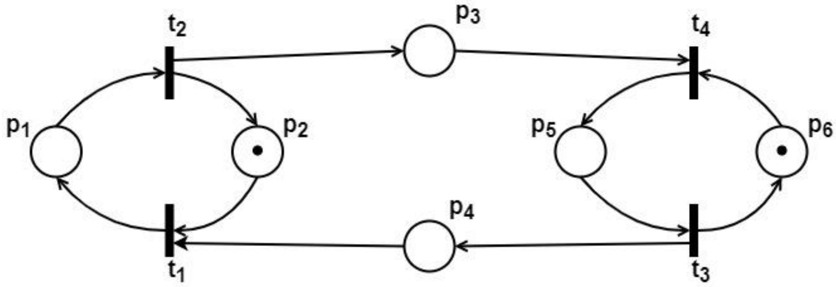
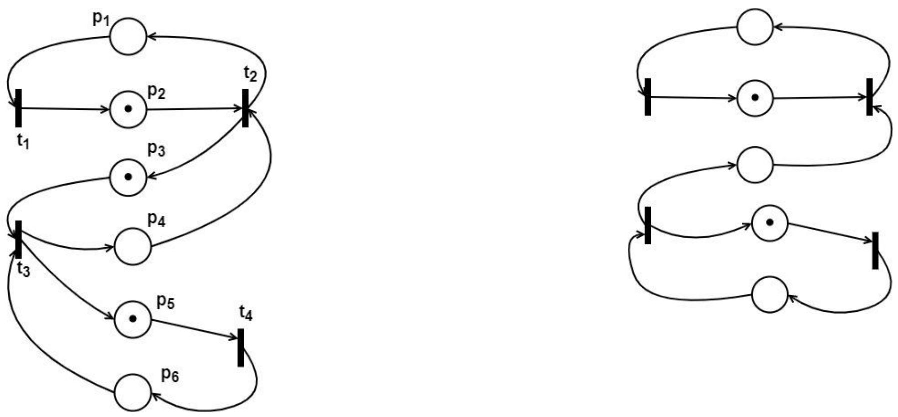


Рисунок 6.7 – Пример синхрографа

Синхрограф является живой сетью Петри, если при заданном ненулевом векторе начальной маркировки μ_0 каждый простой цикл в нем не пуст, т.е. содержит хотя бы одну позицию с ненулевой ёмкостью. В противном случае, синхрограф не живой. В синхрографе (рис. 1) есть три простых цикла: $c_1 = (p_1, t_2, p_2, t_1, p_1)$, $c_2 = (p_5, t_3, p_6, t_4, p_5)$, $c_3 = (p_1, t_2, p_3, t_4, p_5, t_3, p_4, t_1, p_1)$. Первые два простых цикла не пусты, а третий цикл пустой (все позиции в нем имеют нулевую ёмкость при μ_0). Поэтому синхрограф (рис. 6.7) не живой. Действительно, в нем при μ_0 нет ни одного разрешенного перехода.

Живой синхрограф является безопасной (следовательно, ограниченной и строго сохраняющейся) сетью Петри, если при заданном ненулевом векторе начальной маркировки μ_0 каждая его позиция входит в простой цикл, а каждый цикл содержит один единственный маркер. На рисунке 6.8 приведены примеры живых синхрографов (все простые циклы в них не пустые). В синхрографе (рис. 6.8,а) условие безопасности выполняется. Синхрограф (рис. 6.8,б) содержит позицию (третья позиция по счету сверху), которая не входит ни в один простой цикл, в процессе функционирования эта позиция является неограниченной.



а) безопасный, ограниченный и строго сохраняющийся

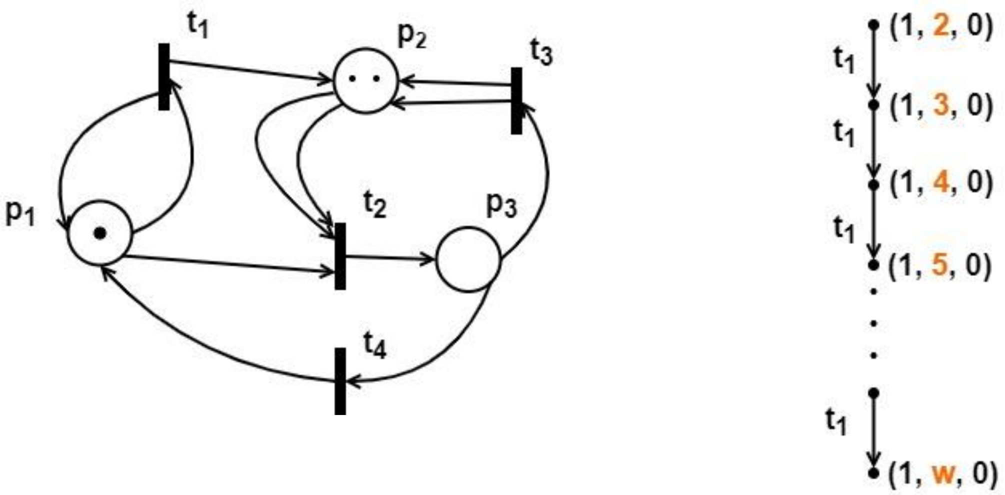
б) не безопасный, не ограниченный и не сохраняющийся

Рисунок 6.8 – Примеры живых синхрографов

Понятие расширенной маркировки

Расширенная маркировка – это такая маркировка (разметка) сети Петри, при которой ёмкость неограниченной позиции p_k можно заменить на w, т.е. если в процессе функционирования сети наблюдается $\mu(p_k) \to \infty$, то считаем, что в векторе маркировки $\mu_k = w$. Для расширенной маркировки справедливо следующее тождество $w + n = w - n = w + w = w$, где n – счетное количество маркеров, т.е. $n \ll \infty$.

На рисунке 6.9,а изображена сеть Петри с неограниченной позицией p_2: каждый раз срабатывание разрешенного перехода t_1 в ней увеличивает ёмкость позиции p_2 на один маркер и опять возбуждает этот переход к срабатыванию (рис. 6.9,б). Поэтому при построении покрывающего дерева для этой сети мы заменяем всю цепочку (рис. 6.9,б) на одну дугу t_1, исток дуги – (1,2,0), а ее сток – (1,w,0). Данный пример иллюстрирует случай бесконечного срабатывания одного перехода, в общем случае в цепочке могут быть несколько переходов, входящих в некоторый простой цикл сети.



а) сеть Петри

б) фрагмент построения покрывающего дерева

Рисунок 6.9 – Пример моделирования функционирования СП с расширенной маркировкой