Глава 4. Интегрирование некоторых иррациональных функций

4.1 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ – рациональная функция от x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$,
где $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ \ n$ – натуральное число.

Сделаем замену:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$$

Пример

$$\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}} =$$

$$\Bigg/ \begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t \ \Rightarrow\ 1+x = t^2 \ \Leftrightarrow\ x = t^2-1 \\ dx = 2tdt \end{array} \Bigg/$$

$$= \int \frac{2tdt}{(5+t^2-1)\,t} = 2\int \frac{dt}{4+t^2} = 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2} + C.$$

4.2 Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx$

Здесь $R(x, y, z, \ldots)$ – рациональная функция своих аргументов.

$m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2, \ldots$ – целые числа.

Сделаем подстановку:

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x} - \sqrt[3]{1-3x}} =$$

$$\Bigg/ \begin{array}{l} 1-3x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{1-3x} \\ 3x = 1-t^6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t^6 \\ dx = -2t^5dt \end{array} \Bigg/$$

$$= \int \frac{-2t^5dt}{t^3-t^2} = -2\int \frac{t^3dt}{t-1}.$$

Мы получили интеграл от неправильной дробно-рациональной функции. Выделяем у дроби $\frac{t^3}{t-1}$ целую часть:

$$\begin{array}{rrr|l}
t^3 & & & \; t-1 \\ \cline{4-4}
t^3 & -t^2 & & \; t^2+t+1 \\ \cline{1-2}
 & t^2 & & \\
 & t^2 & -t & \\ \cline{2-3}
 & & t & \\
 & & t & -1 \\ \cline{3-4}
 & & & 1
\end{array}$$

$$\frac{t^3}{t-1} = t^2+t+1+\frac{1}{t-1}.$$

Тогда интеграл можно разложить на сумму интегралов:

$$-2\int \frac{t^3dt}{t-1} = -2\left(\int \left(t^2+t+1\right)dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) =$$

$$= -2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|+C\right) =$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{1-3x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{1-3x}}{2}+\sqrt[6]{1-3x}+\ln|\sqrt[6]{1-3x}-1|+C\right).$$

1) $$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}} = \int \frac{\left(\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}t^2dt}{t} = \frac{3}{4}\int \left(t^3+3\right)tdt =$$

$$= \frac{3}{4}\int \left(t^4+3t\right)dt = \frac{3}{20}t^5+\frac{9}{8}t^2+C = \frac{3}{20}(2x-3)^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{8}(2x-3)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$\left/ \begin{array}{l} t=\sqrt[3]{2x-3} \\ t^3=2x+3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2} \\ dx=\frac{3}{2}t^2dt \end{array} \right/$$

2) $$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}} =$$

$$\left/ \begin{array}{l} \text{Замена: } x=t^6 \;\Leftrightarrow\; t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5dt \end{array} \right/$$

$$= \int \frac{6t^5 dt}{(t^2+4)\, t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+4} = 6\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4} dt =$$
$$= 6\int dt - 24\int \frac{dt}{t^2+4} = 6t - 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} - 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

4.3 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

Здесь R – рациональная функция двух аргументов.

а) Выделяем полный квадрат в квадратном трёхчлене.

б) Заменяем переменную: $a = x + \frac{b}{2a}$.

Тогда исходный интеграл сведётся к интегралу одного из следующих типов:

1) $$\int R\left(u, \sqrt{l^2-u^2}\right) du \;\Rightarrow\; \text{Замена: } u = l\sin t; \tag{4.1}$$

2) $$\int R\left(u, \sqrt{l^2+u^2}\right) du \;\Rightarrow\; \text{Замена: } u = l\,\mathrm{tg}\,t; \tag{4.2}$$

3) $$\int R\left(u, \sqrt{u^2-l^2}\right) du \;\Rightarrow\; \text{Замена: } u = l\sec t,\ \text{где } \sec t = \frac{1}{\cos t}. \tag{4.3}$$

Здесь l – некоторая постоянная.

После подстановки интеграл сведётся к интегралу вида:

$$\int R(\sin t, \cos t)dt.$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4x+7\right)^3}} = /x^2+4x+7 = x^2+4x+4+3 = (x+2)^2+3/ =$$

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{\left((x+2)^2+3\right)^3}} = /u = x+2 \quad du = dx/ = \int \frac{du}{\sqrt{\left(u^2+3\right)^3}} =$$

$$= \left/ \begin{array}{l} u = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t \;\Rightarrow\; du = \sqrt{3}\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}dt = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{u^2+3} = \sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\,t+3} = \sqrt{3}\sqrt{\mathrm{tg}^2\,t+1} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{\sqrt{3}}{\cos t} \end{array} \right/ =$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos t}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{3}\cdot\cos^3 t}{\cos^2 t\cdot(\sqrt{3})^2}dt = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C =$$

$$\Big/ \frac{\sqrt{3}}{\cos t} = \sqrt{u^2+3} \Leftrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3}} \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{3}{u^2+3}} = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+3}} \Big/ = \frac{1}{3}\frac{u}{\sqrt{u^2+3}} + C = \frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+3}} + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}} =$

$$\Big/ x = 2\sin t;\ dx = 2\cos t dt;\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t \Big/$$

$$= \int \frac{2\cos t dt}{\left(4\sin^2 t - 3\right)\cdot 2\cos t} = \int \frac{dt}{4\sin^2 t - 3} =$$

$$\Big/ y = \operatorname{tg} t; \quad R(-\sin t, -\cos t) = R(\sin t, \cos t) \sin^2 t = \frac{y}{1+y^2} dt = \frac{dy}{1+y^2} \Big/$$

$$= \int \frac{dy}{(1+y^2)\left(\frac{4y}{1+y^2}-3\right)} = \int \frac{dy}{4y-3-3y^2} = -\int \frac{dy}{3y^2-4y+3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{y^2-\frac{4}{3}y+1} = -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(y-\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(y-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{y-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}}{y-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg} t+\sqrt{5}-2}{3\operatorname{tg} t-\sqrt{5}-2}\right| + C =$$

$$\Big/ \begin{array}{l} x = 2\sin t;\ \sin t = \frac{x}{2};\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \\ \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \end{array} \Big/$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{5}-2}{\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}-\sqrt{5}-2}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3x+(\sqrt{5}-2)\sqrt{4-x^2}}{3x-(\sqrt{5}-2)\sqrt{4-x^2}}\right| + C.$$

4) $\displaystyle\int \sqrt{1-2x-x^2}dx =$

$/1-2x-x^2 = 2-\left(x^2+2x+1\right) = 2-(x+1)^2/$

$$= \int \sqrt{2-(x+1)^2}dx = /u = x+1 \quad du = dx/ = \int \sqrt{2-u^2}du =$$

$$\Bigg/ \begin{array}{l} u = \sqrt{2}\sin t \;\Rightarrow\; t = \arcsin \frac{u}{\sqrt{2}} \\ du = \sqrt{2}\cos t dt; \quad \sqrt{2-u^2} = \sqrt{2-2\sin^2 t} = \sqrt{2}\cos t \end{array} \Bigg/$$

$$= \int \sqrt{2}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t dt = 2\int \cos^2 t dt = \Big/ \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \Big/ =$$

$$= 2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)d(2t) = t + \frac{1}{2}\sin 2t + C =$$

$$= \arcsin \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}u\sqrt{2-u^2} + C =$$

$$\Big/ \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{2}u\sqrt{1-\frac{u^2}{2}} = u\sqrt{2-u^2} \Big/$$

$$= \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{2}\sqrt{2-(x+1)^2} + C.$$

5) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3} =$

$\Big/$Замена: $\displaystyle\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t;$

$$t^3 = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)t^3 = x+1 \Leftrightarrow x\left(t^3-1\right) = t^3+1 \Leftrightarrow x = \frac{t^3+1}{t^3-1};$$

$$x-1 = \frac{t^3+1-t^3+1}{t^3-1} = \frac{2}{t^3-1};$$

$$dx = \frac{3t^2\left(t^3-1\right)-3t^2\left(t^3+1\right)}{\left(t^3-1\right)^2}dt = \frac{-3t^2-3t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt = -6\frac{t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt \Big/$$

$$= \int t \cdot \frac{\left(t^3-1\right)^3}{8} \cdot (-6)\frac{t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt = -\frac{3}{4}\int t^3\left(t^3-1\right)dt = -\frac{3}{4}\int \left(t^6-t^3\right)dt =$$

$$= -\frac{3}{28}t^7 + \frac{3}{16}t^4 + C = -\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + \frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} + C.$$

<u>Решите самостоятельно:</u>

6) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)};$$

7) $$\int \sqrt{4x-x^2}dx.$$