5.4 Эйлеров интеграл 1 рода (Бета-функция Эйлера)

Определение

Эйлеровым интегралом 1 рода (бета-функцией Эйлера) называется интеграл вида

$$B(a,\,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a > 0, \\ b > 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

Он представляет собой функцию двух переменных a и b, где a и b – параметры интеграла.

Теорема 7 (Область определения бета-функции)

Интеграл (5.21) сходится при $a > 0$, $b > 0$ и расходится при $a \leqslant 0$ или $b \leqslant 0$.

Доказательство:

Данный несобственный интеграл имеет особые точки на концах промежутка $[0,\ 1]$.

1. Рассмотрим особенность на правом конце промежутка, в точке 1. Ясно, что при $x \to 1$ выполнено:

$$\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1-x)^{b-1}} = x^{a-1} \to 1,$$

то есть $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ и $(1-x)^{b-1}$ есть эквивалентные бесконечно большие при $x \to 1$.

Согласно теореме 18 (глава 4), если при $x \to 1-0$ подынтегральная функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что $f(x) \sim \frac{C}{(1-x)^\lambda}$, $C > 0$, то интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$. В нашем случае $\lambda = 1-b$, то есть ннтеграл сходится при $1-b < 1 \ \Leftrightarrow\ b > 0$ и расходится при $1-b \geq 1 \ \Leftrightarrow\ b \leq 0$.

2. Теперь рассмотрим особенность на левом конце промежутка, в точке 0. Очевидно, что $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \sim x^{a-1}$ при $x \to 0$.

Аналогично теореме 18 (глава 4), если при $x \to +0$ подынтегральная функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что $f(x) \sim \frac{C}{x^\lambda}$, $C > 0$, то интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$. В нашем случае $\lambda = 1 - a$, то есть ннтеграл сходится при $1 - a < 1 \;\Leftrightarrow\; a > 0$ и расходится при $1 - a \geq 1 \;\Leftrightarrow\; a \leq 0$. Выводы о сходимости из пунктов 1 и 2 доказывают теорему.

$\blacksquare$

Свойства бета-функции Эйлера

1) $B(a,\,b) = B(b,\,a)$ (Симметричность)

Доказательство:

$$B(a,\,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \Big/ \begin{array}{r} \text{Замена: } t = 1 - x \\ dt = -dx \end{array} \Big/ =$$

$$= -\int\limits_1^0 (1-t)^{a-1} t^{b-1}\,dt = \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}\,dt = B(b,\,a).$$

$\blacksquare$

Формулы приведения:

2.1) $B(a,\,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,\,b-1)$,

2.2) $B(a,\,b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,\,b)$.

Доказательство:

В силу первого свойства достаточно доказать только первое соотношение.

$$B(a,\,b) = \int\limits_0^1 (1-x)^{b-1}\,x^{a-1}dx =$$

$$\Big/ u = (1-x)^{b-1}; \quad dv = x^{a-1}dx; \quad du = -(b-1)(1-x)^{b-2}dx; \quad v = \frac{x^a}{a} \Big/$$

$$= \underbrace{\left.\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\right|_0^1}_{=0} + \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx =$$

$$\Big/ \text{Воспользуемся тождеством: } x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x) \Big/$$

$$= \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}B(a,\, b-1) - \frac{b-1}{a}B(a,\, b).$$

Из последнего соотношения выразим $B(a,\, b)$, решив уравнение:

$$B(a,\, b)\left(1 + \frac{b-1}{a}\right) = \frac{b-1}{a}B(a,\, b-1) \;\Rightarrow\; B(a,\, b) = \frac{b-1}{a+b-1}\,B(a,\, b-1).$$

■

Следствие 1

Если $b = n$ – целое число, то:

$$B(a,\, n) = B(n,\, a) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}. \tag{5.22}$$

Доказательство:

Применяя $(n-1)$ раз второе свойство, получим:

$$B(a,\, n) = \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\cdot B(a,\, 1).$$

$B(a,\, 1)$ нетрудно найти:

$$B(a,\, 1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \left.\frac{x^a}{a}\right|_0^1 = \frac{1}{a}.$$

Подставляя $B(a,\, 1)$ в предыдущую формулу, получаем требуемое равенство.

■

Следствие 2

Если $\begin{cases} a = m, \\ b = n, \end{cases}$ – целые числа, то:

$$B(m,\, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{5.23}$$

Доказательство:

Если в формулу (5.22) подставить $a = m$ (целое число), то знаменатель можно представить в виде отношения факториалов:

$$m(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n-1) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}. \qquad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в формулу (5.22), получаем требуемое соотношение.

■

3) $B(a,\,1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \qquad 0 < a < 1.$

Доказательство:

Данное соотношение обычно доказывают при помощи разложения функции в ряд. Поэтому мы на данном этапе оставим его без доказательства.

5.5 Эйлеров интеграл 2 рода (Гамма-функция Эйлера)

Определение

Эйлеровым интегралом 2 рода (гамма-функцией Эйлера) называется интеграл вида

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \qquad a > 0. \qquad (5.25)$$

Теорема 8 (Область определения гамма-функции)

Интеграл (5.25) сходится при $a > 0$ и расходится при $a \leqslant 0$.

Доказательство:

$\Gamma(a)$ представляет собой несобственный интеграл как первого, так и второго рода по полуоси $[0,\ \infty)$ с особой точкой в нуле. Разобъем его на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \int\limits_0^A x^{a-1}e^{-x}dx + \int\limits_A^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \quad \text{где } A > 0.$$

1. Рассмотрим сходимость первого интеграла с особенностью в точке 0.

Ясно, что при $x \to 0$ выполнено:

$$\frac{x^{a-1}e^{-x}}{x^{a-1}} = e^{-x} \to 1,$$

то есть $x^{a-1}e^{-x}$ и x^{a-1} есть эквивалентные бесконечно большие при $x \to 0$.

Согласно теореме 18 (глава 4), если при $x \to +0$ подынтегральная функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что $f(x) \sim \frac{C}{x^\lambda}$, $C > 0$, то интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$. В нашем случае $\lambda = 1-a$, то есть ннтеграл сходится при $1-a < 1 \Leftrightarrow a > 0$ и расходится при $1 - a \geq 1 \Leftrightarrow a \leq 0$.

2. Рассмотрим сходимость второго интеграла на бесконечности. Здесь мы воспользуемся теоремой 8 (глава 4). Напомним первый пункт этой теоремы.

Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, где $0 \leq K < \infty$, то из сходимости $\int\limits_A^\infty g(x)dx$ вытекает сходимость $\int\limits_A^\infty f(x)\,dx$. Пусть $A > 0$, $f(x) = x^{a-1}e^{-x}$, $g(x) = x^{-2}$. Тогда:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{a-1}e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = \Big/ \text{по правилу Лопиталя} \Big/ = 0.$$

$$\int\limits_A^\infty g(x)dx = \int\limits_A^\infty x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_A^\infty = \frac{1}{A},$$

то есть интеграл сходится. Следовательно, по теореме 18 будет сходиться и интеграл $\int\limits_A^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ (при любом a).

Выводы о сходимости из пунктов 1 и 2 доказывают теорему.

■

Свойства гамма-функции Эйлера

1) Дифференцируемость гамма-функции.

Гамма-функция при всех значениях $a > 0$ непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков.

Доказательство:

Докажем существование производных. Дифференцируя интеграл (5.25) под знаком интеграла, получим:

$$\Gamma'(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx. \tag{5.26}$$

Применение правила Лейбница о внесении производной под знак интеграла оправдано тем, что оба интеграла

$$\int\limits_0^1 x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx \quad \text{и} \quad \int\limits_1^\infty x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx$$

сходятся равномерно относительно a. Первый интеграл имеет особенность в точке 0. Его равномерная сходимость обеспечивается тем, что при $a \geq a_0 > 0$ подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту $x^{a_0-1}|\ln x|$. Второй интеграл на бесконечности сходится равномерно, так как при $a \leq A < \infty$ у подынтегральной функции есть интегрируемая мажоранта $x^A e^{-x}$. Здесь мы воспользовались теоремами из теории интегралов, зависящих от параметров, а именно: правилом Лейбница и признаками равномерной сходимости для несобственных интегралов. Более подробно этот вопрос рссмотрен в книге [6] (глава 14, параграф 2).

Таким же путем можно убедиться в существовании второй производной

$$\Gamma''(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} (\ln x)^2 \cdot e^{-x} dx \tag{5.27}$$

и всех дальнейших. Формула для k-ой производной будет иметь вид:

$$\Gamma^{(k)}(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} (\ln x)^k \cdot e^{-x} dx. \tag{5.28}$$

Показав существование производной от гамма-функции любого порядка, мы тем самым доказали и непрерывность этих производных.

■

2) Формула приведения.

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a). \tag{5.29}$$

<u>Доказательство:</u>

$$a\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty ax^{a-1} \cdot e^{-x} dx = \underbrace{e^{-x} \cdot x^a \Big|_0^\infty}_{=0} + \int\limits_0^\infty x^a e^{-x} dx = \Gamma(a+1).$$

$$\Big/ u = e^{-x}; \quad dv = ax^{a-1}dx; \quad du = -e^{-x}dx; \quad v = x^a \Big/$$

■

Следствие 1

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\,(a+n-2) \cdot \ldots \cdot (a+1)a \cdot \Gamma(a), \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}. \tag{5.30}$$

то есть вычисление $\Gamma(a+n)$ можно свести к вычислению $\Gamma(a)$, где $a \leqslant 1$.

Следствие 2

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}. \tag{5.31}$$

<u>Доказательство:</u>

По первому следствию: $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1)$.

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

■

Замечание

Гамма-функция $\Gamma(a)$ является обобщением факториала на нецелые значения аргумента. В целых точках гамма-функция совпадает с факториалом (по второму следствию).

3) Связь бета и гамма-функций.

$$B(a,\, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{5.32}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx=\Big/\text{Замена: } x=ty,\ \text{ параметр } t>0\Big/=t^a\int\limits_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy.$$

Получили соотношение:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int\limits_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy. \tag{5.33}$$

Заменим в формуле (5.33) параметр a на $a+b$ и t на $1+t$:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy. \tag{5.34}$$

Домножим равенство (5.34) на t^{a-1} и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int\limits_0^\infty dt\cdot t^{a-1}\int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy=$$

/ Переставим местами порядок интегрирования. Возможность такой перестановки мы здесь обосновывать не будем /

$$=\int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy\int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt=$$

$$\Big/\text{Согласно формуле (5.33): } \int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt=\frac{\Gamma(a)}{y^a}\Big/$$

$$=\int\limits_0^\infty y^{a+b-1}\cdot e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy=\Gamma(a)\underbrace{\int\limits_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy}_{\Gamma(b)}=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b). \tag{5.35}$$

С другой стороны:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=$$

$$\Big/ \text{Замена: } z = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow 1+t = \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow t = 1 - \frac{1}{1-z}; \quad dt = \frac{dz}{(1-z)^2} \Big/$$

$$= \Gamma(a+b) \int_0^1 z^{a-1} \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)^{-b-1} \cdot \frac{dz}{(1-z)^2} = \Gamma(a+b) \underbrace{\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}dz}_{B(a,b)} =$$

$$= \Gamma(a+b) \cdot B(a,\, b). \tag{5.36}$$

Сравнивая формулы (5.35) и (5.36), получаем:

$$B(a,\, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

■

4) Формула дополнения.

При $0 < a < 1$ выполнено:

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}. \tag{5.37}$$

Доказательство:

В формулу $B(a,\, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ подставим $b = 1 - a$ и воспользуемся свойством: $B(a,\, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$:

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Big/ \Gamma(1) = 1 \Big/ = \Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a).$$

■

Замечание

Свойство 4 можно использовать для определения гамма-функции $\Gamma(a)$ при отрицательных значениях a. Если $a < 0$, то $1 - a > 0$ и $\Gamma(1-a)$ определено. Тогда мы можем определить $\Gamma(a)$ по правилу:

$$\Gamma(a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)\Gamma(1-a)}. \tag{5.38}$$

Здесь $a \notin \mathbb{Z}$, так как в целых точках знаменатель обращается в ноль. Заметим, что $\Gamma(1-a)$ в ноль не обращается, так как это интеграл от положительной функции:

$$\Gamma(1-a)=\int\limits_0^\infty x^{-a}\cdot e^{-x}dx>0.$$

Следствие 1

Формула (5.37) при $a=\frac{1}{2}$ примет вид:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\ \Rightarrow\ \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{\pi}. \tag{5.39}$$

При извлечении корня выбрали знак “+”, так как гамма-функция положительна (ибо это интеграл от положительной функции).

Следствие 2

Пользуясь формулами приведения (5.30), можно вычислять значения гамма-функции во всех полуцелых точках:

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big)=\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{5.40}$$

Следствие 3

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad \text{– интеграл Пуассона.} \tag{5.41}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\Big/\text{Замена: } x=z^2;\ dx=2zdz\Big/=2\int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz.$$

■

Пример 1

Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta$. Сделаем замену переменной:

$$x=\sin\theta\ \Rightarrow\ \cos\theta=(1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}};\quad dx=\cos\theta d\theta.$$

Тогда интеграл примет вид:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta=\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dx=$$

$$\Big/ \text{Замена: } x = y^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{2y^{\frac{1}{2}}} \Big/$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{1}{4}}dy = \Big/ B(a,\,b) = \int\limits_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2}B\Big(\frac{5}{4},\,\frac{3}{4}\Big) = \Big/ \text{формула } (5.32) \Big/ = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} =$$

$\Big/$ По формуле приведения $\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a)$ вычислим $\Gamma(2)$ и $\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)$:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1,$$

$$\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{4}+1\Big) = \frac{1}{4}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) \qquad \Big/$$

$$= \frac{1}{8}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big) = \Bigg/ \begin{array}{c} \text{Формула дополнения: } \Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)} \\ \Gamma\Big(\dfrac{1}{4}\Big)\cdot\Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big) = \Gamma\Big(\dfrac{1}{4}\Big)\cdot\Gamma\Big(1-\dfrac{1}{4}\Big) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2} \end{array} \Bigg/ =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Пример 2

Вычислим интеграл $I(a)$, зависящий от параметра:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cdot\cos 2ax\,dx.$$

Найдем производную от интеграла $I(a)$ по параметру a. Мы можем внести производную под знак интеграла по правилу Лейбница, так как интеграл от производной сходится (в силу экспоненциального убывания подынтегральной функции на бесконечности).

$$\frac{dI}{da} = -\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cdot 2x\sin 2ax\,dx =$$

$$\Big/ \begin{array}{r} u=\sin 2ax;\quad du=2a\cos 2ax\,dx \\ v=e^{-x^2};\quad dv=-e^{-x^2}\cdot 2xdx \end{array} \Big/$$

$$=\underbrace{e^{-x^2}\cdot\sin 2ax\Big|_0^\infty}_{=0}-2a\underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx}_{I(a)}=-2aI(a)$$

Таким образом, производная от интеграла $I(a)$ выразилась через сам интеграл. Решим уравнение относительно $I(a)$:

$$\frac{dI}{da}=-2aI\ \Leftrightarrow\ \frac{dI}{I}=-2a\,da$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим:

$$\left.\begin{array}{r} \ln|I|=-a^2+C_1\Leftrightarrow I=C\cdot e^{-a^2} \\ \text{При}\,a=0:I(0)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

Пример 3

Вычислим следующий интеграл, зависящий от параметра:

$$I(x)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-t(x+1)}}{t}\,dt,\quad \text{где параметр } x>-1.$$

Условие $x > -1$ необходимо для сходимости интеграла (чтобы $e^{-t(x+1)}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$). Заметим, что при $t\to 0$ подынтегральная функция особенности не имеет:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}-e^{-t(x+1)}}{t}=\Big/\text{по правилу Лопиталя}\Big/=\lim_{t\to 0}\frac{-e^{-t}+(x+1)e^{-t(x+1)}}{1}=x$$

– конечное число, то есть особенности в нуле нет.

Найдем производную от интеграла $I(x)$ по параметру x. Мы можем внести производную под знак интеграла по правилу Лейбница, так как интеграл от производной сходится (в силу экспоненциального убывания подынтегральной функции на бесконечности).

$$I'(x)=\int\limits_0^\infty\frac{\cancel{t}\cdot e^{-t(x+1)}}{\cancel{t}}\,dt=-\frac{1}{x+1}e^{-t(x+1)}\Big|_0^\infty=\frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$I(x) = \int \frac{dx}{x+1} = \Big/ x > -1 \Big/ = \ln(x+1) + C.$$

При $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} I(0) &= \ln 1 + C = C \\ I(0) &= \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}}{t} dt = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 0.$$

Итак, $I(x) = \ln(x+1)$.