Конспект лекции по транспортным сетям

1. Понятие транспортной сети

Транспортная сеть (ТС) – это связный орграф $G(X,U)$ со следующими свойствами:

1. $\exists!\, x_0 \in X\,(\Gamma^{-1}(x_0) = \varnothing)$, где x_0 - начало или источник ТС
2. $\exists!\, x_t \in X\,(\Gamma^{1}(x_t) = \varnothing)$, где x_t - конец или сток ТС
3. $\forall u \in U : c(u) \geq 0$, где $c(u)$ - пропускная способность дуги

На рисунке 1 приведен пример ТС. Здесь вершина x_1 – начало, а вершина x_6 – конец ТС. Количество вершин в ТС – $n = 6$, а количество дуг – $m = 9$. Числовые характеристики дуг определяют их пропускные способности, например, пропускная способность дуги (x_2, x_5) равна 6 (по этой дуге может пройти информации, газа и т.п. не больше, чем 6). Значение пропускной способности дуги определяется в процессе моделирования объекта (телекоммуникационной сети, газопровода, и т.п.).

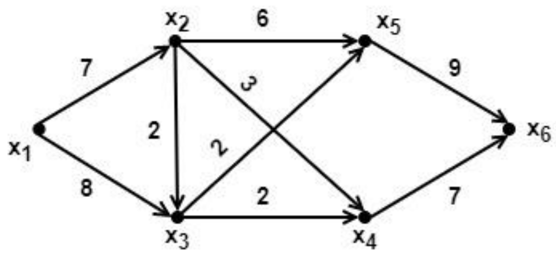


Рисунок 1 – Пример транспортной сети

Допустимый поток дуги $\varphi(u)$ – это такая числовая характеристика дуги, которая выбирается из условий:

$$\forall u \in U : 0 \leq \varphi(u) \leq c(u) \tag{1}$$

$$\forall x_j \in X \setminus \{x_0, x_t\} \Big(\sum_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_j)} \varphi(x_i, x_j) = \sum_{x_k \in \Gamma^{1}(x_j)} \varphi(x_j, x_k) \Big) \tag{2}$$

Условие (1) связано с тем, что поток, идущий по дуге, не превышает пропускную способность этой дуги. Условие (2) – это **принцип сохранения потока**. Суть его заключается в том, что, сколько информации, газа и т.п. пришло в данный пункт, столько и вышло из него.

Допустимый поток ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1),..., \varphi(u_m))$ – это любой поток при соблюдении условий (1) и (2), его величина определяется как

$$\Phi = \sum_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_t)} \varphi(x_i, x_t) = \sum_{x_k \in \Gamma^{1}(x_0)} \varphi(x_0, x_k) \,. \tag{3}$$

Т.е. величина допустимого потока Φ определяется суммарной пропускной способностью дуг, исходящих из начала ТС, или суммарной пропускной способностью дуг, входящих в конец ТС.

Дуга $u \in U$ называется **насыщенной**, если для допустимого потока $\varphi(G) = (\varphi(u_1),..., \varphi(u_m))$ выполняется условие, что $\varphi(u) = c(u)$.

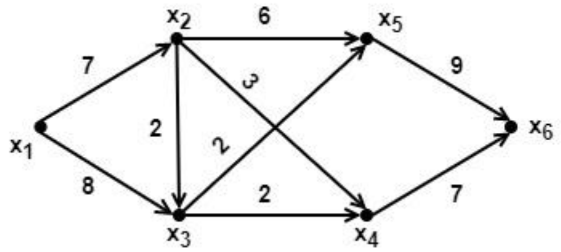
Допустимый поток ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1),..., \varphi(u_m))$ будет **полным**, если в каждом пути $\mu = (x_0,..., x_t)$ есть хотя бы одна насыщенная дуга. Обозначим полный поток $\varphi_f(G)$, а его величину – Φ_f. Рассмотрим далее алгоритм поиска полного потока в ТС.

2. Алгоритм поиска полного потока в транспортной сети

Пусть исходный граф ТС – $G(X,U)$, граф ТС с полным потоком $\varphi_f(G)$ величиной Φ_f – $G*(X*,U*)$. Идея алгоритма состоит в последовательном поиске простых путей $\mu = (x_0,..., x_t)$ в графе $G(X,U)$, нахождении в пути насыщенных дуг и удалении их из графа $G(X,U)$. Поиск продолжается до тех пор, пока в графе $G(X,U)$ есть хотя бы один простой путь $\mu = (x_0,..., x_t)$. После этого в графе $G(X,U)$ получена остаточная ТС с ненасыщенными дугами, а в графе $G*(X*,U*)$ формируется ответ (полный поток ТС). Алгоритм состоит из следующих действий.

1. Положить, что $G*(X*,U*) = G(X,U)$.
2. Положить, что $\forall u \in U : \varphi(u) = c(u)$, $\Phi_f = 0$.
3. **ЦИКЛ до тех пор, пока** в графе $G(X,U)$ вершина x_t достижима из вершины x_0:
   3.1. Построить простой путь $\mu = (x_0,..., x_t)$.
   3.2. Найти в пути $\mu = (x_0,..., x_t)$ насыщенную дугу (насыщенные дуги) и определить $MIN = \min\limits_{\forall u \in \mu} \varphi(u)$.
   3.3. Увеличить значение $\Phi_f = \Phi_f + MIN$.
   3.4. Скорректировать $\forall u \in \mu : \varphi(u) = \varphi(u) - MIN$.
   3.5. Удалить из графа $G(X,U)$ насыщенную дугу (насыщенные дуги).
4. Определить $\forall u^* \in U^* : \varphi(u^*) = c(u) - \varphi(u)$.

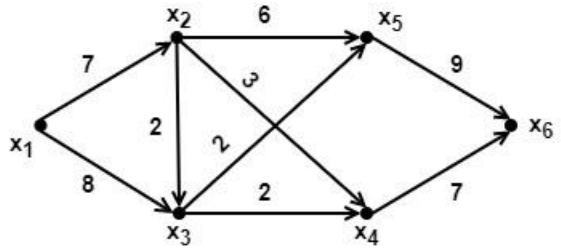
Пример. Пусть имеется следующая транспортная сеть – граф $G(X,U)$. Здесь вершина x_1 – начало, а вершина x_6 – конец ТС. Количество вершин в ТС – $n = 6$, а количество дуг – $m = 9$. Веса дуг определяют их пропускные способности. Надо найти полный поток этой сети $\varphi(G) = (\varphi(u_1),..., \varphi(u_m))$ и определить его величину Φ_f.



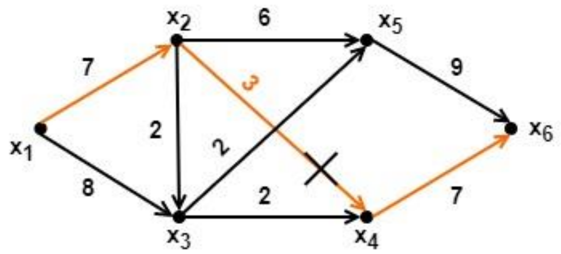
Решение.

Положим, что $G^*(X^*, U^*) = G(X, U)$.

Пусть $\forall u \in U : \varphi(u) = c(u)$, $\Phi_f = 0$. Ниже на рисунке изображен граф $G(X, U)$, в котором веса дуг определяют их допустимые потоки.



Построим простой путь $\mu_1 = (x_1, x_2, x_4, x_6)$, в этом пути дуга (x_2, x_4) является насыщенной, см. рисунок ниже. Тогда $MIN = \varphi(x_2, x_4) = 3$, $\Phi_f = \Phi_f + MIN = 0 + 3 = 3$.



Скорректируем допустимые потоки дуг этого пути:

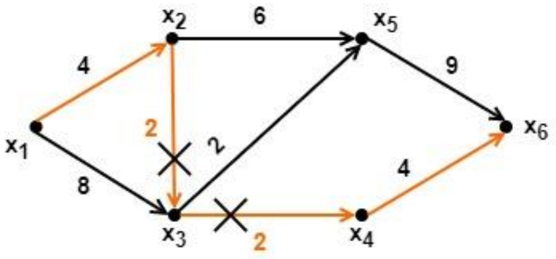
$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) - MIN = 7 - 3 = 4$,

$\varphi(x_2, x_4) = \varphi(x_2, x_4) - MIN = 3 - 3 = 0$,

$\varphi(x_4, x_6) = \varphi(x_4, x_6) - MIN = 7 - 3 = 4$.

Удалим из графа $G(X, U)$ дугу (x_2, x_4). Полученный граф $G(X, U)$ представлен на рисунке ниже.

Т.к. в графе $G(X, U)$ вершина x_6 достижима из вершины x_1, то построим в нем новый простой путь $\mu_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)$, в этом пути дуги (x_2, x_3) и (x_3, x_4) являются насыщенными, см. рисунок ниже. Тогда $MIN = \varphi(x_2, x_3) = \varphi(x_3, x_4) = 2$, $\Phi_f = \Phi_f + MIN = 3 + 2 = 5$.



Скорректируем допустимые потоки дуг этого пути:

$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) - MIN = 4 - 2 = 2$,

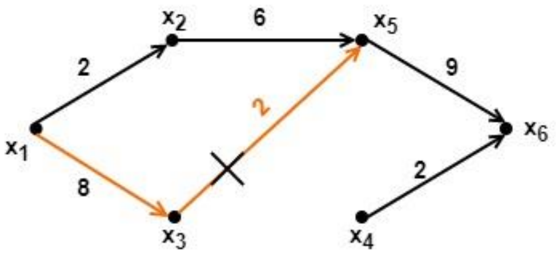
$\varphi(x_2, x_3) = \varphi(x_2, x_3) - MIN = 2 - 2 = 0$,

$\varphi(x_3, x_4) = \varphi(x_3, x_4) - MIN = 2 - 2 = 0$,

$\varphi(x_4, x_6) = \varphi(x_4, x_6) - MIN = 4 - 2 = 2$.

Удалим из графа $G(X,U)$ дуги (x_2, x_3) и (x_3, x_4). Полученный граф $G(X,U)$ представлен на рисунке ниже.

Т.к. в графе $G(X,U)$ вершина x_6 достижима из вершины x_1, то построим в нем новый простой путь $\mu_3 = (x_1, x_3, x_5, x_6)$, в этом пути дуга (x_3, x_5) является насыщенной. Тогда $MIN = \varphi(x_3, x_5) = 2$, $\Phi_f = \Phi_f + MIN = 5 + 2 = 7$.



Скорректируем допустимые потоки дуг этого пути:

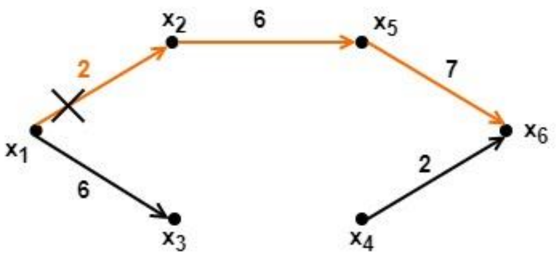
$\varphi(x_1, x_3) = \varphi(x_1, x_3) - MIN = 8 - 2 = 6$,

$\varphi(x_3, x_5) = \varphi(x_3, x_5) - MIN = 2 - 2 = 0$,

$\varphi(x_5, x_6) = \varphi(x_5, x_6) - MIN = 9 - 2 = 7$.

Удалим из графа $G(X,U)$ дугу (x_3, x_5). Полученный граф $G(X,U)$ представлен на рисунке ниже.

Т.к. в графе $G(X,U)$ вершина x_6 достижима из вершины x_1, то построим в нем новый простой путь $\mu_4 = (x_1, x_2, x_5, x_6)$, в этом пути дуга (x_1, x_2) является насыщенной. Тогда $MIN = \varphi(x_1, x_2) = 2$, $\Phi_f = \Phi_f + MIN = 7 + 2 = 9$.



Скорректируем допустимые потоки дуг этого пути:

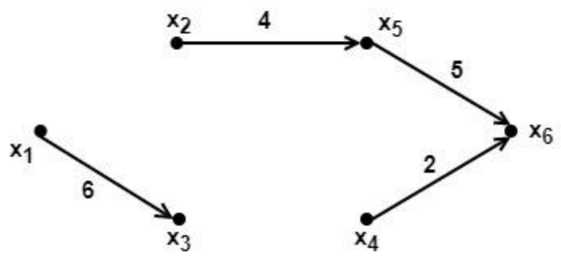
$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) - MIN = 2 - 2 = 0$,

$\varphi(x_2, x_5) = \varphi(x_2, x_5) - MIN = 6 - 2 = 4$,

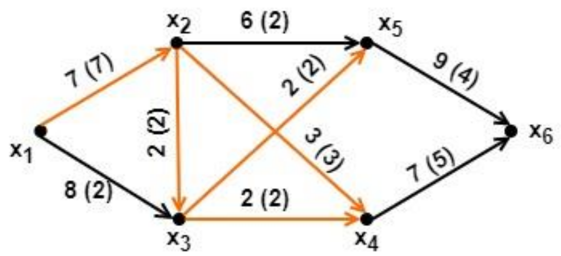
$\varphi(x_5, x_6) = \varphi(x_5, x_6) - MIN = 7 - 2 = 5$.

Удалим из графа $G(X,U)$ дугу (x_1, x_2). Полученный граф $G(X,U)$ представлен на рисунке ниже.

Т.к. в графе $G(X,U)$ вершина x_6 не достижима из вершины x_1, то завершим цикл. Граф на рисунке ниже представляет собой остаточную ТС, в которой все дуги ненасыщенные, а их вес указывает на остаточную пропускную способность после того, как через ТС прошел полный поток.



Определим допустимые потоки дуг в графе $G^*(X^*,U^*)$ по формуле $\forall u^* \in U^* : \varphi(u^*) = c(u) - \varphi(u)$. Ниже на рисунке представлен граф $G^*(X^*,U^*)$, в котором веса дуг определяют их пропускную способность и допустимый поток (в скобках). На рисунке желтым цветом раскрашены насыщенные дуги. Задача решена.



Полученный поток является полным $\varphi_f(G)$, его величина $\Phi_f = 9$. Задача решена.

3. Теорема Форда-Фалкерсона

Не всякий допустимый поток ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1),..., \varphi(u_m))$, в т.ч. и полный поток $\varphi_f(G)$, является максимальным. Данная теорема служит теоретической основой для поиска максимального допустимого потока ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1),..., \varphi(u_m))$. Теорема опирается на понятие разреза и его пропускной способности в ТС.

Разрезом транспортной сети $G(X,U)$ называется разбиение множества X на два подмножества A и B таких, что: $A \cap B = \varnothing, A \cup B = X$, $x_0 \in A$, $x_t \in B$. Очевидно, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Разрезы ТС строятся с начала сети слева направо.

Пропускная способность разреза определяется по условию допустимости потока (1) и (2) как

$$C(A,B) = \sum_{\forall v \in A} C(v), \tag{4}$$

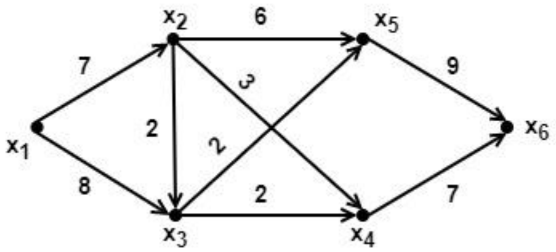
где $C(v)$ – поток, который может пройти через данный разрез из вершины v.

Принимается, что $C(x_0) = \sum_{\forall w \in B} c(x_0, w)$, а для других вершин разреза как

$$C(v) = \min\left(\sum_{\forall s \in A} c(s,v), \sum_{\forall w \in B} c(v,w)\right). \tag{5}$$

Т.е. поток, который может пройти через разрез из вершины v не больше, чем сумма потоков, которые могут прийти в эту вершину из других вершин множества A.

Пример. На рисунке 1 представлена транспортная сеть $G(X,U)$, вершина x_1 является началом, а вершина x_6 – концом этой сети, а веса дуг определяют их пропускную способность $c(u)$. Этот рисунок приведен еще раз ниже.



Разрезы этой ТС и их пропускные способности, рассчитанные по формулам (4) и (5), приведены в таблице ниже.

№	A	B	$C(A,B)$
1	$\{x_1\}$	$\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$C(x_1)$ =7+8=**15**
2	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5, x_6\}$	$C(x_1)+C(x_2)+C(x_3)$ =0+7+4=**11**
3	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$C(x_1)+C(x_2)+C(x_3)+C(x_4)+C(x_5)$ =0+0+5+8=**13**

Разрез транспортной сети с минимальной пропускной способностью называется **минимальным разрезом**. Очевидно, что минимальным разрезом ТС (рис. 1) является второй разрез с $C(A,B) = 11$.

Теорема Форда-Фалкерсона. Величина максимального потока Φ_{max} транспортной сети $G(X,U)$ определяется пропускной способностью ее минимального разреза.

<u>Доказательство.</u> Для любого допустимого потока Φ в транспортной сети $G(X,U)$ и любого ее разреза выполняется неравенство $\Phi \le C(A,B)$, т.е. величина любого

допустимого потока Φ, в т.ч. и максимального $\Phi_{\max}$ не превышает пропускную способность любого разреза ТС, в т.ч. и минимального. Следовательно $\Phi_{\max} = \min\limits_{\forall A,B} C(A,B)$

Эта формулировка теоремы Форда-Фалкерсона является **критерием максимальности** допустимого потока ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1),...,\varphi(u_m))$. Следовательно, величина максимального потока ТС (рис.1) $\Phi_{\max} = 11$. Ранее для данной ТС мы нашли полный поток $\Phi_f = 9$, что указывает на то, что он не является максимальным.