

Уравнения Максвелла

Материальные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Параметр	Тип среды
$\sigma = 0$	Диэлектрическая
$\sigma \neq 0$	Проводящая
$\varepsilon = \text{const}$	Однородная, изотропная
$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$	Неоднородная
$\varepsilon = \varepsilon(\text{направления})$	Анизотропная
$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{E})$	Нелинейная

Волновое уравнение

Однородный изотропный
диэлектрик

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

Материальные уравнения

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Параметр	Тип среды
$\sigma = 0$	Диэлектрическая
$\sigma \neq 0$	Проводящая
$\epsilon = \text{const}$	Однородная, изотропная
$\epsilon = \epsilon(x, y, z)$	Неоднородная
$\epsilon = \epsilon(\text{направления})$	Анизотропная
$\epsilon = \epsilon(\vec{E})$	Нелинейная

Волновое уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Скорость э/м волн

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0}}$$

Вакуум: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ $c = 299792456 \text{ м/с}$

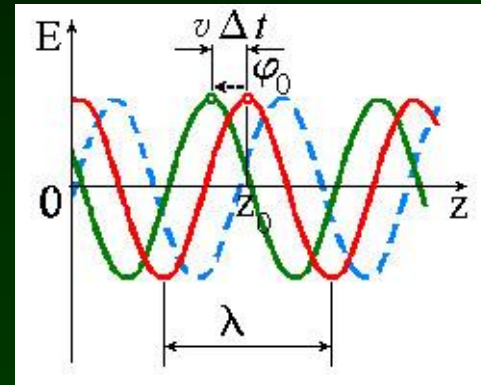
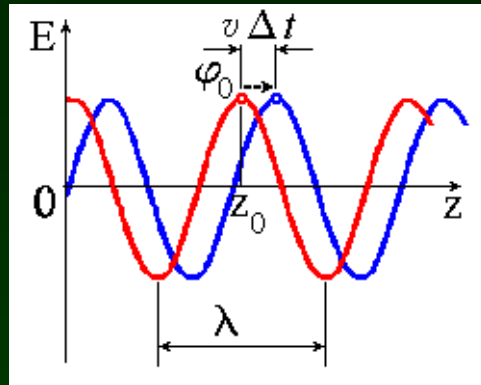
Показатель преломления $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu} \quad n = \sqrt{\epsilon}$

Вещество	n	$\sqrt{\epsilon}$	Вещество	n	$\sqrt{\epsilon}$
водород	1,000139	1,000139	бензол	1,501	1,511
воздух	1,000292	1,000302	спирт	1,36	5,1
углекислота	1,000499	1,000485	вода	1,33	9

Плоская монохроматическая волна

$$\vec{E} = \vec{E}(z) \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{A}_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] + \vec{A}_2 \cos \left[\omega \left(t + \frac{z}{v} \right) \right]$$

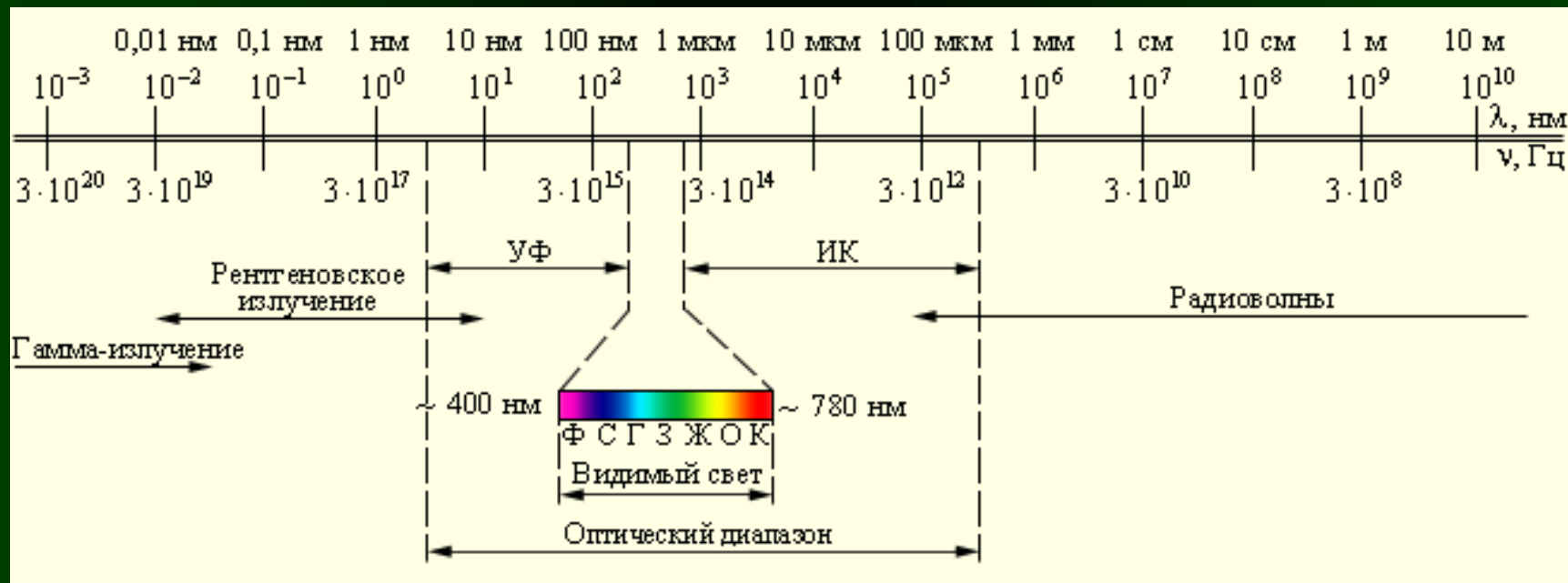


$$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega}$$

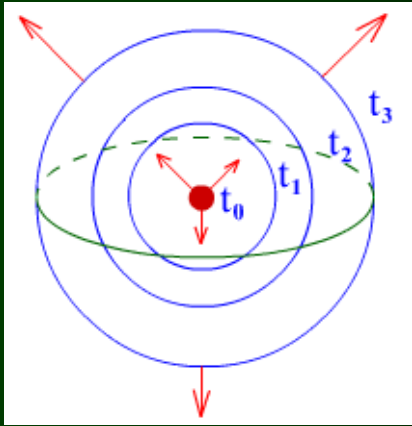
Плоская волна:

волновой фронт $z = \text{const}$

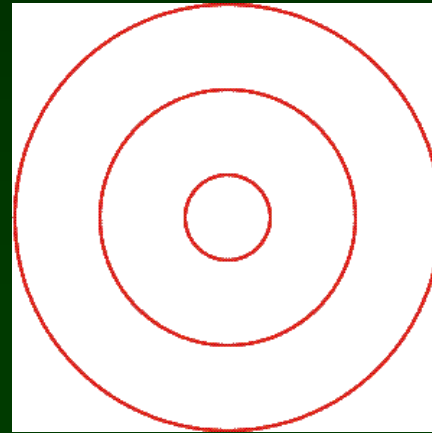
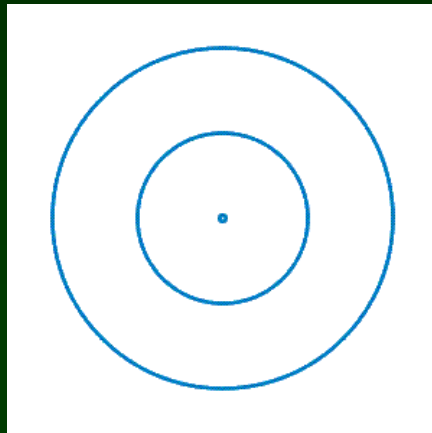
Шкала э/м волн



Сферические волны



$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{A}_1}{r} \cos \omega t - kr + \frac{\vec{A}_2}{r} \cos \omega t + kr$$



СВОЙСТВА Э/М ВОЛН

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{A} e^{i\omega t - \vec{k}\vec{r}} = \vec{A} e^{i\omega t - k_x x - k_y y - k_z z}$$

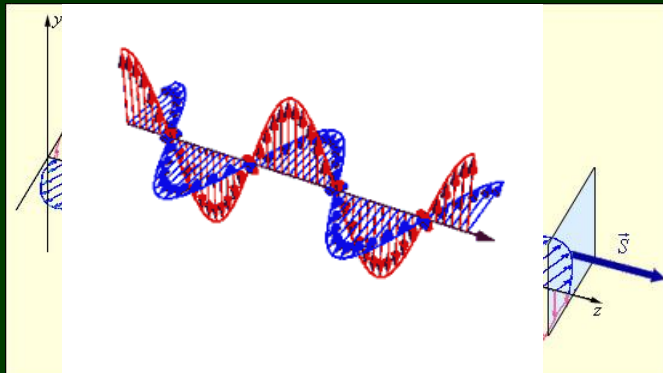
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -ik_x \vec{E} \quad \nabla \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad -i\vec{k} \times \vec{E} = -\mu\mu_0 i\omega \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad -i\vec{k} \times \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 i\omega \vec{E}$$

$$\vec{E} \perp \vec{k}, \quad \vec{H} \perp \vec{k}$$

Поперечность



$\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$
Правая
тройка
векторов

ИНТЕНСИВНОСТЬ СВЕТА

$$kE = \mu\mu_0\omega H \Rightarrow \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$$

Вектор Пойнтинга – вектор
плотности потока энергии

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n E_0^2 \cos^2 \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

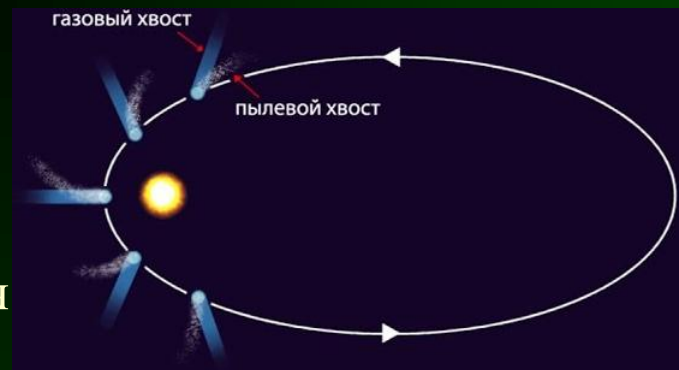
$$I = \langle S \rangle \sim E_0^2 \quad [I] = \text{Вт/м}^2$$

Световое давление

1604 г. И. Кеплер.

Отклонение хвостов комет

1873 г. Дж. Максвелл. Электромагнитная
теория давления света

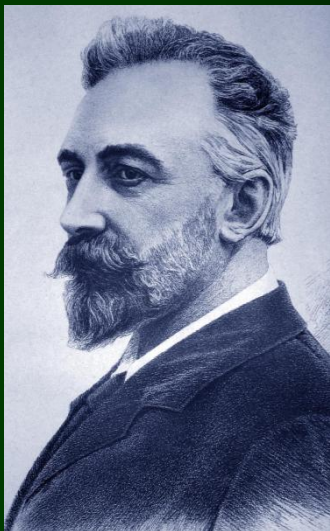


Давление света равно импульсу, передаваемому за
единицу времени единице поверхности тела

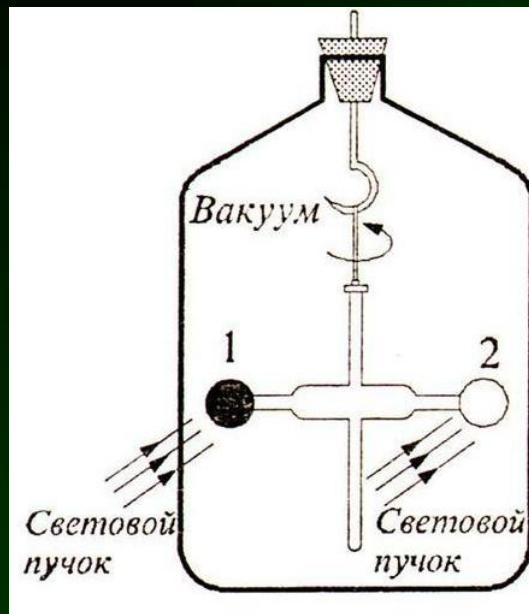
$$p = \frac{I(1 + \rho)}{c}$$

От Солнца: $I = 1,4 \text{ кВт/м}^2 \Rightarrow p = 4,5 \text{ мкПа}$

Световое давление



П. Н. Лебедев
1899 г.

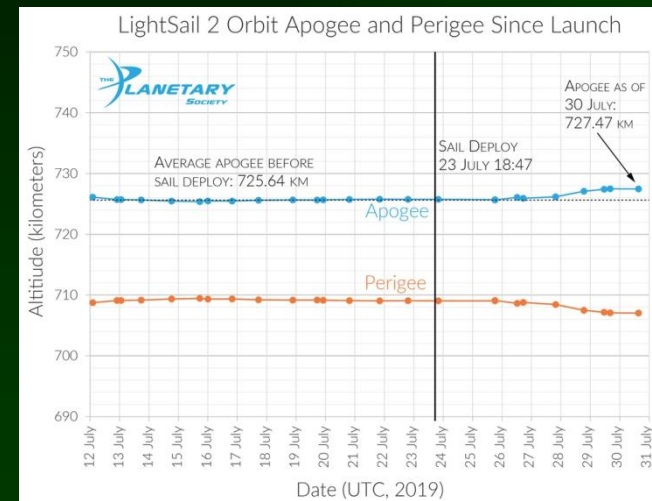
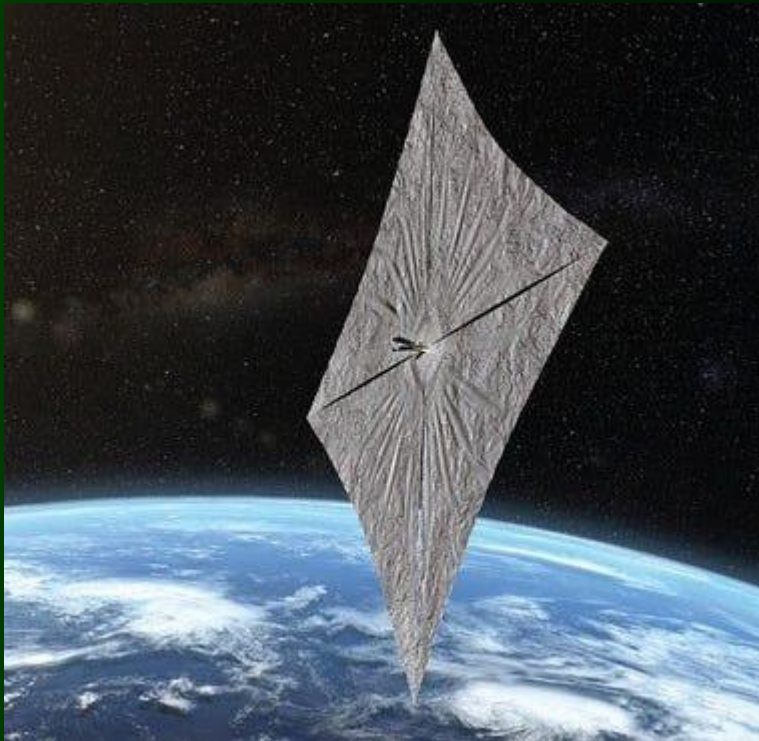


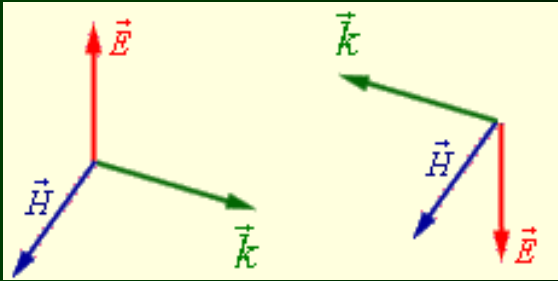
...я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, и вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами.

У. Томсон – К. Тимирязеву

Световое давление

LightSail-2 (июнь 2019) $S = 32 \text{ м}^2$; $a = 0,058 \text{ м/с}$





Стоячие волны

$$E_1 = E_0 \cos \omega t - kz$$

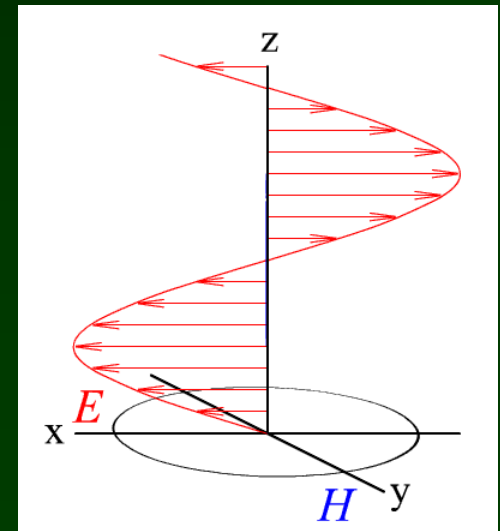
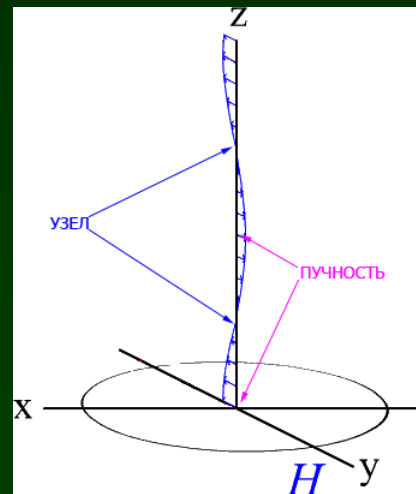
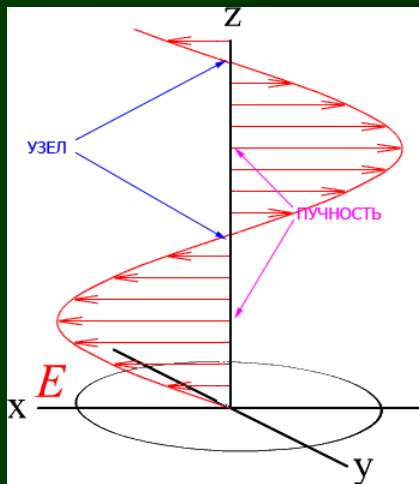
$$H_1 = H_0 \cos \omega t - kz$$

$$E_2 = -E_0 \cos \omega t + kz$$

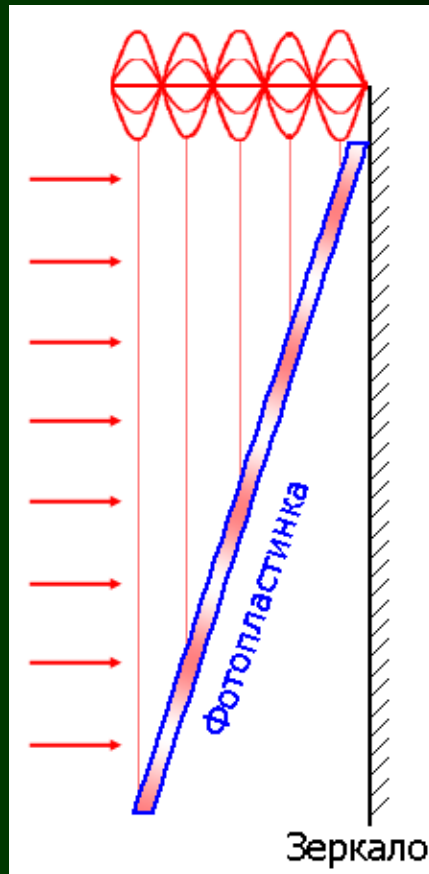
$$H_2 = H_0 \cos \omega t + kz$$

$$E = 2E_0 \sin \omega t \sin kz$$

$$H = 2H_0 \cos \omega t \cos kz$$



Опыт Винера



$$E = cB$$

$$\frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \frac{evB}{eE} \sim \frac{v}{c}$$

1890 г.