ЛЕКЦИЯ 2

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРА. МАТРИЦЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ВИДЫ, ДЕЙСТВИЯ

2.1. $\mathbb{N}$-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА)

Понятие "вектор" можно рассматривать с двух точек зрения - с ***геометрической*** (как некоторое преобразование пространства (плоскости)) и с ***арифметической*** (как упорядоченный набор чисел). Для того чтобы некоторая совокупность объектов (в данном случае векторов) образовала ***пространство (векторов),*** нам необходимо определить операции *сложения векторов* и *умножения вектора на число.*

Сначала мы дадим определение самого понятия ***вектор*** и рассмотрим его с двух точек зрения - геометрической и арифметической. Одним из примеров ***$\mathbb{N}$-мерного пространства арифметических векторов*** является $\mathbb{N}$-мерное пространство геометрических векторов, записанных в координатной форме (в школьном курсе математики вы уже встречались с 2-х и 3-х мерными пространствами арифметических векторов, заданных в декартовой системе координат). Так как в геометрии, физике, механике приходится изучать объекты, для которых недостаточно задать упорядоченную двойку или тройку чисел, то возникает необходимость рассмотрения упорядоченных наборов из n чисел и линейных действий с ними, т.е. ***$\mathbb{N}$-мерного пространства арифметических векторов***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ***Вектором*** (*геометрическим вектором) называется направленный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая - концом. Начало вектора называется также* ***точкой его приложения***.

Обозначение: $\vec{a}$, $\bar{a}$; А-начало, В-конец: $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ - см. РИС.1.

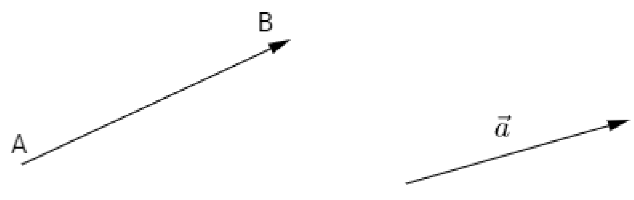

РИС.1. Изображение вектора

2. ***Вектором*** *(арифметическим вектором) называется упорядоченный набор чисел* $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in R$ *(или* $a_i \in C$, *где* C *-множество комплексных чисел - см. ЛЕКЦИЯ 1), где числа* $a_i \in R$ $(a_i \in C)$ *называются* ***компонентами*** *(или* ***координатами) вектора*** $\vec{a}$.

ПРИМЕР 1.

$$\vec{a}=(1,0,...,0): a_1, a_2,...,a_n \in R \ ,$$

$$\vec{b}=\left(-2,\frac{1}{3},\sqrt{3}\right): b_1, b_2, b_3 \in R \ ,$$

$$\vec{c}=(2+i,3i): c_1, c_2 \in C \ .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ***Длиной*** *или* ***модулем вектора*** *(геометрического) называют длину отрезка, образующего вектор.*

Обозначение: $|\vec{a}|, |\bar{a}|, |\overrightarrow{AB}|, |\overline{AB}|$.

2. ***Длиной*** *или* ***модулем вектора*** $\vec{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ *называют число* $|\vec{a}|$*:*

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+...+(a_n)^2} \ .$$

ПРИМЕР 2.

$$\vec{a}=(1,0,...,0), \ |\vec{a}|=\sqrt{(1)^2+(0)^2+...+(0)^2}=1,$$

$$\vec{b}=\left(-2,\frac{1}{3},\sqrt{3}\right), \ |\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+...+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы задать геометрический вектор, необходимо знать его модуль и направление. При этом любой такой вектор можно перенести параллельно самому себе в любую точку пространства - т.е. начало этого вектора может находиться где угодно. Такие вектора называются ***свободными векторами.*** Если начало вектора (точка его приложения) зафиксирована - вектор называется ***связанным,*** если принадлежит некоторой кривой - ***скользящим.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ***Нулевым*** *(геометрическим вектором) называется вектор, начало и конец которого совпадают. Такой вектор называют коротко* ***нуль-вектор*** *и обозначают как* $\vec{0}$.

2. Нулевым (арифметическим вектором) называется вектор $\vec{0}$, все компоненты которого равны нулю:

$$\vec{0}=(0,0,...,0)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вектор, длина которого равна 1, называется ***единичным вектором*** и обозначается $\vec{e}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ***1.*** *Два вектора (геометрических) называются* ***равными****, если совпадают их длины и направления*

2. *Два вектора* $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ *и* $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ *называются* ***равными****, если равны их соответствующие компоненты:*

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2,..,a_n=b_n .$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД n - МЕРНЫМИ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ВЕКТОРАМИ

1. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Суммой*** $\vec{a}+\vec{b}$ ***векторов*** $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ *называется вектор* $\vec{c}=(c_1,c_2,...,c_n)$*:*

$$\vec{c}=(c_1,c_2,...,c_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n),$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} .$$

ПРИМЕР 3. Найти сумму векторов $\vec{a}=(2,-5,9,4)$ и $\vec{b}=(0,3,5,-7)$.

Решение:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(2,-5,9,4)+(0,3,5,-7)=(2+0,-5+3,9+3,4-7)=(2,-2,12,-3),$$

$$\vec{c}=(2,-2,12,-3).$$

Свойства сложения векторов

1. *Коммутативность:*

Для любых векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ верно:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} .$$

ПРИМЕР 4. Даны векторы $\vec{a}=(2,-5,9,4)$ и $\vec{b}=(0,3,5,-7)$. Найдём $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$.

Решение:

$$\vec{a}+\vec{b}=(2,-5,9,4)+(0,3,5,-7)=(2+0,-5+3,9+3,4-7)=(0+2,3+(-5),3+9,-7+4)=\vec{b}+\vec{a}$$

2. *Ассоциативность:*

Для любых векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ и $\vec{c}=(c_1,c_2,...,c_n)$ верно:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\ .$$

ПРИМЕР 5. Даны векторы $\vec{a}=(2,5,1)$, $\vec{b}=(-2,-1,0)$ и $\vec{c}=(1,4,-1)$. Найдём $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ и $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Решение:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(2,5,1)+((-2,-1,0)+(1,4,-1))=(2,5,1)+(-1,3,-1)=(1,8,0),$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=((2,5,1)+(-2,-1,0))+(1,-4,1)=(0,4,1)+(1,4,-1)=(1,8,0).$$

3. *Прибавление нулевого вектора к любому другому не меняет последнего, т.е.* для любого вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ верно:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\ .$$

4. *Для любого вектора* $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ *существует вектор* $\vec{a}'=\left(a_1^{'},a_2^{'},...,a_n^{'}\right)$:

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}\ .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $\vec{a}'=\left(a_1^{'},a_2^{'},...,a_n^{'}\right)$ называется ***противоположным*** к вектору $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и обозначается $-\vec{a}$:

$$-\vec{a}=(-a_1,-a_2,...,-a_n)\ .$$

ПРИМЕР 6. Дан вектор $\vec{a}=(2,-5,9,4)$. Найдём противоположный ему вектор $-\vec{a}$.

Решение:

$$-\vec{a}=\left(-2,-(-5),-9,-4\right)=\left(-2,5,-9,-4\right),$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\left(2,-5,9,4\right)+\left(-2,5,-9,-4\right)=\left(0,0,0,0\right)=\vec{0}.$$

Используя понятие противоположного вектора, мы можем дать определение ещё одной линейной операции над векторами:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Разностью*** $\vec{a}-\vec{b}$ ***векторов*** $\vec{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ *и* $\vec{b}=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ *называется сумма вектора* $\vec{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ *и вектора* $-\vec{b}=\left(-b_1,-b_2,...,-b_n\right)$, *противоположного к* $\vec{b}=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$*:*

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

2. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением вектора*** $\vec{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ ***на число*** $\lambda\in R$ называется вектор $\vec{c}=\lambda\vec{a}$:

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}=\lambda\left(a_1,a_2,...,a_n\right)=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n\right).$$

ПРИМЕР 7. Найти произведение вектора $\vec{a}=\left(-0.45,5,2,-4,1\right)$ на число $\lambda=-2$ Решение:

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}=\left(-2\right)\cdot\left(-0.45,5,2,-4,1\right)=\left(0.9,-10,-4,8,-2\right).$$

Свойства умножения вектора на число

1. *Коммутативность:*

Для любого вектора $\vec{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ и числа $\lambda\in R$ верно :

$$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda.$$

ПРИМЕР 8. Для вектора $\vec{a}=\left(9,5,2\right)$ и числа $\lambda=4$ найдём произведение $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}\lambda$.

Решение:

$$\lambda\vec{a}=4\vec{a}=4\cdot\left(9,5,2\right)=\left(4\cdot9,4\cdot5,4\cdot2\right)=\left(9\cdot4,5\cdot4,2\cdot4\right)=\left(9,5,2\right)\cdot4=\vec{a}4$$

2. *Ассоциативность :*

Для любого вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и чисел $\lambda,\mu\in R$ верно :

$$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a}).$$

ПРИМЕР 9. Для вектора $\vec{a}=(1,4,-2)$ и чисел $\lambda=-3,\mu=2$ найдём произведение $(\lambda\mu)\vec{a}$ и $\lambda(\mu\vec{a})$.

Решение:

$$(\lambda\mu)\vec{a}=((-3)\cdot 2)(1,4,-2)=(-6)\cdot(1,4,-2)=(-6,-24,12),$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=-3\cdot(2\cdot(1,4,-2))=-3\cdot(2,8,-4)=(-6,-24,12).$$

3. *Дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов и сложения чисел:*

Для любых векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ и чисел $\lambda,\mu\in R$ верно :

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a},$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

ПРИМЕР 10. Для векторов $\vec{a}=(3,-1,1)$, $\vec{b}=(0,-1,2)$ и чисел $\lambda=-1$, $\mu=5$ проверим выполнение равенств $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ и $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Решение:

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=(-1+5)\cdot(3,-1,1)=4\cdot(3,-1,1)=(12,-4,4),$$

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}=(-1)\cdot(3,-1,1)+5\cdot(3,-1,1)=(-3,1,-1)+(15,-5,5)=(12,-4,4),$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=(-1)\cdot((3,-1,1)+(0,-1,2))=(-1)\cdot(3,-2,3)=(-3,2,-3),$$

$$\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=(-1)\cdot(3,-1,1)+(-1)\cdot(0,-1,2)=(-3,1,-1)+(0,1,-2)=(-3,2,-3),$$

значит равенства $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ и $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ верны.

4. *Умножение любого вектора* $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ на 1 не меняют вектора $\vec{a}$:

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}.$$

2.2. МАТРИЦЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ И ИХ СВОЙСТВА

2.2.1. МАТРИЦЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ВИДЫ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Матрица*** *(от лат.* matricis *- источник, начало)* ***размера*** $m \times n$ *- это прямоугольная таблица, в которой* $(m \cdot n)$ *элементов некоторого множества располагаются в* m *строках и* n *столбцах.*

Элементами матрицы могут быть числа, многочлены, матрицы или другие математические объекты.

Матрицу как единый объект обозначают заглавными буквами латинского алфавита $A, B, ...$, а элемент матрицы A, стоящий в i-ой строке и j-м столбце - соответствующей строчной буквой с индексом ij : a_{ij} (или $[A]_{ij}$).

Запись матрицы в общем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Запись матрицы в сокращённом виде:

$$A = [a_{ij}] : i = \overline{1, m}, \, j = \overline{1, n}; \qquad (a_{ij})_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m}; \qquad A_{m \times n}.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ - образуют i-ую строку матрицы $A_{m \times n}$; элементы $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ - образуют j-ый столбец матрицы $A_{m \times n}$.

ПРИМЕР 11. Дана матрица $A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Найдите элементы a_{23}, a_{32}, сумму элементов третьей строки.

Решение:

a_{23}=-2 : $\qquad$ a_{32} = -4:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Сумма элементов третьей строки: $a_{31} + a_{32} + a_{33} = 4 + (-4) + (-3) = -3$.

Далее перейдём к рассмотрению основных видов матриц.

ВИДЫ МАТРИЦ

1. ***Матрица-строка*** - матрица размера $1 \times n$ и её записывают так:

$$A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \text{ или } A = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Количество элементов в матрице-строке называют её *длиной*.

2. ***Матрица-столбец*** - это матрица размера $m \times 1$ и её записывают так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Количество элементов в матрице-столбце называют её *высотой*.

3. ***Квадратная матрица*** - матрица размера $n \times n$ (или порядка n). Количество строк этой матрицы равно количеству её столбцов и записывают её так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если $m \neq n$, то такая матрица называется ***прямоугольной.***

У квадратных матриц выделяют две последовательности элементов:

$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ - ***главная диагональ*** матрицы A: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$

$a_{n1}, a_{n-1,2}, ..., a_{1n}$ - ***побочная диагональ*** матрицы A: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & .. & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$

ЗАМЕЧАНИЕ. Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ главной диагонали матрицы A называются ***диагональными элементами матрицы*** A.

Аналогично, можно выделить ***главную и побочную диагонали*** прямоугольной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1,n-1} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2,n-1} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mm} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1,m} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & .. & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m-1.1} & a_{m-1,2} & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mm} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

4. ***Диагональная матрица*** - квадратная числовая матрица порядка n, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны 0 (при этом среди элементов главной диагонали также могут быть нулевые элементы):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональную матрица порядка n обозначают так:

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}).$$

ПРИМЕР 12.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(2,-3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,-1,0), \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,0,3,4).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Сумма диагональных элементов матрицы A называется ***следом матрицы*** и обозначается $\mathrm{tr}\, A$ (от англ. trace - след) или $\mathrm{sp}\, A$ (от нем. spur - след):

$$\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

ПРИМЕР 13. Найти след матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение:

$$\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 1 + 2 + 0 + 4 = 7.$$

5. ***Единичная матрица*** - диагональная матрица порядка n, все элементы главной диагонали которой равны 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичную матрицу обозначают буквой E (или I).

6. ***Нулевая матрица*** - числовая матрица $A_{m\times n}$, все элементы которой равны нулю (она может быть как прямоугольной, так и квадратной):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Нулевую матрицу обозначают буквой O.

7. ***Верхняя треугольная матрица*** - квадратная матрица порядка n, у которой:

- все элементы, расположенные под главной диагональю, равны 0,
- все остальные элементы могут принимать любые числовые значения (в том числе и нулевые).

Общий вид верхней треугольной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 14. Верхние треугольные матрицы порядка 2,3 и 4 соответственно:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8. ***Нижняя треугольная матрица*** - квадратная матрица порядка n, у которой :

- все элементы, расположенные над главной диагональю, равны 0,
- все остальные элементы могут принимать любые числовые значения (в том числе и нулевые).

Общий вид нижней треугольной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 \\ a_{12} & a_{22} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 15. Нижние треугольные матрицы порядка 2,3 и 4 соответственно:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

9. ***Трапецевидная матрица*** - прямоугольная матрица $A_{m\times n}$, у которой:

- все элементы, расположенные под главной диагональю, равны 0,
- диагональные элементы не равны 0,
- все остальные элементы могут принимать любые числовые значения (в том числе и нулевые).

Общий вид трапецевидной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1,n-1} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2,n-1} & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{mm} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или (при наличии нулевых строк):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & .. & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & .. & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{mm} & .. & a_{mn} \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 16. Трапецевидные матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

10. ***Ступенчатая матрица*** - матрица $A_{m\times n}$, для любой строки которой выполнено условие:

под первым слева ненулевым элементом строки и предшествующими ему нулевыми элементами строки все элементы матрицы равны нулю.

ПРИМЕР 17. Ступенчатые матрицы $A_{3\times 4}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрицы $A_{3\times 4}$, не являющиеся ступенчатыми:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ И ИХ СВОЙСТВА

Прежде чем перейти непосредственно к линейным операциям над матрицами, дадим определение ***равных*** матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Две матрицы называются* ***равными****, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы совпадают, т.е.*

$$A_{m\times n}=B_{m\times n}\Leftrightarrow \forall i,j:a_{ij}=b_{ij} \; .$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

1.СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ.

Данная операция возможна только для матриц ***одинаковой*** размерности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Суммой*** *двух матриц* $A_{m\times n}$ *и* $B_{m\times n}$ *называется матрица* $C_{m\times n}=\left[c_{ij}\right]$:

$$C_{m\times n}=\left[c_{ij}\right]:c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=1,...m;j=1,...,n,$$

т.е. если $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n}\\ a_{21} & .. & .. & a_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ a_{m1} & .. & .. & a_{mn}\end{pmatrix}$, $B_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & .. & .. & b_{1n}\\ b_{21} & .. & .. & b_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ b_{m1} & .. & .. & b_{mn}\end{pmatrix}$, тогда

$$C_{m\times n}=A_{m\times n}+B_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n}\\ a_{21} & .. & .. & a_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ a_{m1} & .. & .. & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & .. & .. & b_{1n}\\ b_{21} & .. & .. & b_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ b_{m1} & .. & .. & b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & .. & .. & a_{1m}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & .. & .. & a_{2n}+b_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ a_{m1}+b_{m1} & .. & .. & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & .. & .. & c_{1n}\\ c_{21} & .. & .. & c_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ c_{m1} & .. & .. & c_{mn}\end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 18. Даны матрицы $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A+B$.

Решение:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+2 & 2+1 & 0+5\\ 3+1 & 1-1 & 4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 19. Даны матрицы $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&4&5\\3&2&7\end{pmatrix}$, $B_{3\times3}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&-2&0\\0&1&3\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A+B$.

Решение:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&4&5\\3&2&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&-2&0\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&2&3\\-2+3&4-2&5\\3&2+1&7+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&2&5\\3&3&10\end{pmatrix}$$

Свойства операции сложения матриц

1. $A+B=B+A$ (*коммутативность*)
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (*ассоциативность*)
3. Для любой матрицы $A_{m\times n}: n,m\in N$ существует нулевая матрица $O_{m\times n}$:

$$A+O=O+A.$$

2.УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением*** *матрицы* $A_{m\times n}$ *на число* $\lambda\in R$ *(или числа* $\lambda\in R$ *на матрицу* $A_{m\times n}$*) называется матрица* $C=[c_{ij}]: c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij},\ i=1..m, j=1..n.$

т.е если $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&..&..&a_{1n}\\a_{21}&..&..&a_{2n}\\..&..&..&..\\a_{m1}&..&..&a_{mn}\end{pmatrix}$, тогда

$$C_{m\times n}=\lambda\cdot A_{m\times n}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&..&..&a_{1n}\\a_{21}&..&..&a_{2n}\\..&..&..&..\\a_{m1}&..&..&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&..&..&\lambda a_{1m}\\\lambda a_{21}&..&..&\lambda a_{2n}\\..&..&..&..\\\lambda a_{m1}&..&..&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&..&..&c_{1n}\\c_{21}&..&..&c_{2n}\\..&..&..&..\\c_{m1}&..&..&c_{mn}\end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 20. Дана матрица $A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $\lambda=-\frac{1}{2}$. Найти матрицу $C=-\frac{1}{2}A$.

Решение:

$$C=-\frac{1}{2}\cdot A=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot 1 & -\frac{1}{2}\cdot 2\\ -\frac{1}{2}\cdot(-3) & -\frac{1}{2}\cdot 0\\ -\frac{1}{2}\cdot 3 & -\frac{1}{2}\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{2} & 0\\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. При $\lambda=-1$ мы получим матрицу $A=-1\cdot A=-A$, которую будем называть ***матрицей, противоположной матрице А.***

2. Теперь мы можем определить ***разность матриц*** $A-B$:

$$A-B=A+(-B).$$

Свойства операции умножения матрицы на число

1. $1\cdot A=A\cdot 1=A$
2. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ (*ассоциативность* относительно умножения чисел)
3. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (*дистрибутивность* умножения на число относительно сложения матриц)
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (*дистрибутивность* умножения на матрицу относительно сложения чисел).

2.3.УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Произведение матрицы A на матрицу B возможно только в том случае, если A и B - ***согласованные*** матрицы, т.е. количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B:

$$A\cdot B=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением*** *матрицы* $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ *на матрицу* $B_{n\times k}=[b_{ij}]$ *называется матрица* $C=[c_{ij}]$, *такая, что:* $c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\cdot b_{sj}$, т.е. чтобы получить элемент c_{ij}, нужно почленно умножить элементы i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B и сложить полученные произведения.

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\ B_{3\times 2}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}, & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}, & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 21. Даны матрицы $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A\cdot B$.

Решение:

$$A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 3}=C_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 1, & 1\cdot 0+2\cdot 2, & 1\cdot 3+2\cdot(-9) \\ -3\cdot(-1)+4\cdot 1, & -3\cdot 0+4\cdot 2, & -3\cdot 3+4\cdot(-9) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -15 \\ 7 & 8 & -45 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 22. Даны матрицы $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A\cdot B$ и матрицу $D=B\cdot A$.

Решение:

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-2)\cdot 3+0\cdot(-1), & 1\cdot 7+(-2)\cdot 4+0\cdot 0 \\ 3\cdot 1+(-1)\cdot 3+5\cdot(-1), & 3\cdot 7+(-1)\cdot 4+5\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix},$$

$$B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=D_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+7\cdot 3, & 1\cdot(-2)+7\cdot(-1), & 1\cdot 0+7\cdot 5\\ 3\cdot 1+4\cdot 3, & 3\cdot(-2)+4\cdot(-1), & 3\cdot 0+4\cdot 5\\ -1\cdot 1+0\cdot 3, & -1\cdot(-2)+0\cdot(-1), & -1\cdot 0+0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & -9 & 35\\ 15 & -10 & 20\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Очевидно и ***важно***, что в общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$, но для некоторых матриц это свойство выполнимо и они имеют специальное название:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если определены оба произведения* $A\cdot B$ *и* $B\cdot A$ *и выполнено равенство* $A\cdot B=B\cdot A$, *то матрицы* A *и* B *называют* ***коммутативными*** *или* ***перестановочными***. Такие матрицы всегда квадратные и одного порядка.

ПРИМЕР 23. Даны матрицы $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A\cdot B$ и матрицу $D=B\cdot A$.

Решение:

$$A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+1\cdot 0, & 1\cdot 3+1\cdot 2\\ 0\cdot 1+1\cdot 0, & 0\cdot 3+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$B_{2\times 2}\cdot A_{2\times 2}=D_{2\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 0, & 2\cdot 1+3\cdot 1\\ 0\cdot 1+2\cdot 0, & 0\cdot 1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2}=B_{2\times 2}\cdot A_{2\times 2}.$$

ПРИМЕР 24. Даны матрицы $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A\cdot B$ и матрицу $D=B\cdot A$.

Решение:

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-2)\cdot 3+0\cdot(-1), & 1\cdot 7+(-2)\cdot 4+0\cdot 0\\ 3\cdot 1+(-1)\cdot 3+5\cdot(-1), & 3\cdot 7+(-1)\cdot 4+5\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -5 & 17\end{pmatrix},$$

$$B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}=D_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&7\\3&4\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&-1&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+7\cdot3, & 1\cdot(-2)+7\cdot(-1), & 1\cdot0+7\cdot5\\ 3\cdot1+4\cdot3, & 3\cdot(-2)+4\cdot(-1), & 3\cdot0+4\cdot5\\ -1\cdot1+0\cdot3, & -1\cdot(-2)+0\cdot(-1), & -1\cdot0+0\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-9&35\\15&-10&20\\-1&2&0\end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Произведение двух ***ненулевых*** матриц может быть равно ***нулевой*** матрице.

ПРИМЕР 25. Даны матрицы $A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A\cdot B$.

Решение:

$$A_{2\times2}\cdot B_{2\times2}=C_{2\times2}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot(-1), & 1\cdot(-1)+1\cdot1\\ 1\cdot1+1\cdot(-1), & 1\cdot(-1)+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O.$$

Свойства операции умножения матриц

1. $A\cdot E=E\cdot A=A$ - для любой матрицы A.
2. $A\cdot O=O\cdot A=O$ - для любой матрицы A.
3. $A\cdot B\neq B\cdot A$ (*некоммутативность* сложения в ***общем*** случае)
4. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ (*ассоциативность* умножения матриц)
5. $\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$.
6. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ (*дистрибутивность* умножения справа относительно сложения матриц).
7. $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$ (*дистрибутивность* умножения слева относительно сложения матриц).

Далее мы рассмотрим очень важную <u>нелинейную</u> операцию над матрицами - транспонирование матриц. Эта операция часто применяется при решении различных прикладных задач.

2.4.ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Для матрицы* $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ *её* ***транспонированной*** *матрицей называют матрицу* $A^T=A^T_{n\times m}=[c_{ij}]$: $c_{ij}=a_{ji}$, $i=1,..,m$; $j=1,..n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При ***транспонировании*** матрицы её ***строки*** становятся ***столбцами*** новой матрицы с сохранением их порядка. Аналогично, ***столбцы*** исходной матрицы превращаются в ***строки*** транспонированной матрицы. Поэтому операцию транспонирования можно рассматривать как ***преобразование симметрии*** матрицы относительно её главной диагонали.

Общий вид операции транспонирования:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 26. Транспонируем матрицу $A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A_{3\times 2}{}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^T=C_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Транспонированная матрица-столбец (строка) - это матрица-строка (столбец):

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}^T=(a_1,a_2,\dots,a_n)\ .$$

Свойства операции транспонирования матриц

1. $\left(A^T\right)^T = A$.

2. $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$.

3. $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T, \lambda \in R$.

4. $\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$

ПРИМЕР 27. Даны матрицы $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Проверить выполнение свойства $\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$.

Решение:

1) Найдём $\left(A \cdot B\right)^T$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + \left(-2\right)\cdot 3 + 0\cdot\left(-1\right), & 1\cdot 7 + \left(-2\right)\cdot 4 + 0\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + \left(-1\right)\cdot 3 + 5\cdot\left(-1\right), & 3\cdot 7 + \left(-1\right)\cdot 4 + 5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix},$$

$$\left(A \cdot B\right)^T = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & 17 \end{pmatrix},$$

2) Найдём $B^T \cdot A^T$:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 0, & 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 5 \\ 7\cdot 1 + 4\cdot(-2) + 0\cdot 0, & 7\cdot 3 + 4\cdot(-1) + 0\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}.$$

3) Получили, что $\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$.