Лекция 1

1. Вероятностное пространство

1.1. Опыт с равновероятными исходами

Рассмотрим опыт с подбрасыванием монеты. он имеет два взаимно исключающих друг друга исхода: выпадение "герба"и выпадение "решётки". Обозначим эти исходы буквами Г и Р. Наблюдатель не может проанализировать и учесть те многочисленные факторы, которые влияют на результат рассматриваемого опыта: исход бросания монеты случаен, и заранее нельзя с уверенностью сказать, выпадет ли Г или Р. Но несмотря на случайность исхода в каждом отдельном испытании, при многократном повторении опыта можно наблюдать замечательную закономерность. Именно, при n-кратном бросании монеты число выпаданий герба $n(\Gamma)$ таково, что отношение

$$\frac{n(\Gamma)}{n}$$

приблизительно равно 1/2.

Ниже в таблице приведены результаты такой серии испытаний, когда монета подбрасывалась в общей сложности 10 000 раз. При этом отдельно рассматривались серии по $n = 100$ испытаний и в каждой серии регистрировалось соответствующее количество $n(\Gamma)$ выпадений "герба".

1 – 1000	54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	501
1001 – 2000	48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
2001 – 3000	43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
3001 – 4000	58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
4001 – 5000	48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
5001 – 6000	49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
6001 – 7000	45	47	41	51	49	59	60	55	53	50	500
7001 – 8000	53	52	46	52	44	51	48	51	46	54	497
8001 – 9000	45	47	46	52	47	48	59	57	45	48	494
9001 – 10000	47	41	51	59	51	52	55	39	41	48	484

Указанное число $\mathsf{P}(\Gamma) = 1/2$ является вероятностью выпадения "герба"в каждом отдельном испытании. Определить эту вероятность можно было бы и без длинной серии испытаний, основываясь на том, что по отношению к условиям опыта исходы Г и Р равнозначны, т. е. $\mathsf{P}(\Gamma) = \mathsf{P}(\text{Н}) = 1/2$.

Предположим, что рассматривается некоторый опыт, в котором в зависимости от случая происходит или не происходит событие A. Предположим, что условия опыта могут быть воспроизведены многократно, так что в принципе осуществима целая серия одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых происходит или не происходит событие A. Обозначим буквой n число всех опытов в такой серии испытаний, и пусть $n(A)$ — число тех испытаний, которые привели к наступлению события A. Отношение

$$\frac{n(A)}{n}$$

называется *частотой* события A в данной серии опытов.

Как показывает практика, при больших n частоты $n(A)/n$ в различных сериях испытаний оказываются примерно одинаковыми. Существует некоторое значение $\mathsf{P}(A)$, называемое *вероятностью* события A, около которого группируются указанные частоты:

$$\mathsf{P}(A) \approx \frac{n(A)}{n}.$$

В случае, когда рассматриваемый опыт имеет равновероятные исходы, вероятность $\mathsf{P}(A)$ события A может быть вычислена по следующей простой формуле:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{N(A)}{N},$$

где N — общее число равновероятных и взаимно исключающих друг друга исходов, $N(A)$ — число тех из них, которые приводят к наступлению события A.

1.2. События

Пусть задано некоторое множество Ω.

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется *алгеброй*, если

A1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,

A3) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B,\; A \cap B \in \mathcal{A}$.

В условии A2) достаточно потребовать лишь, чтобы выполнялось либо $A \cup B \in \mathcal{A}$, либо $A \cap B \in \mathcal{A}$, в силу равенств

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}},\; A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-*алгеброй*, если $\mathcal{F}$ является алгеброй и

A3*) если $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

В условии A3*) достаточно потребовать лишь, чтобы выполнялось либо $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, либо $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Пара $(\Omega, \mathcal{F})$, состоящая из множества Ω и σ-алгебры $\mathcal{F}$ подмножеств Ω, называется *измеримым пространством*.

Переходим к аксиоматике теории вероятностей. Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Множество Ω называется *пространством элементарных событий*. Элементы ω множества Ω называются *элементарными событиями*. Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются *случайными событиями* или просто *событиями*. Все остальные подмножества множества Ω, т. е. подмножества не входящие в $\mathcal{F}$, событиями не являются.

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, являющееся объединением $A \cup B$. Событие $A + B$ состоит в том, что произошло по крайней мере одно из событий A или B.

Произведением событий A и B называется событие AB, равное пересечению $A \cap B$. Событие AB происходит тогда и только тогда, когда происходит и A и B. События A и B называются *несовместными* если $AB = \varnothing$.

Событие $\boldsymbol{\Omega}$ называется *достоверным*; пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным* событием. Событие $\overline{A} = \boldsymbol{\Omega} \setminus A$ называется *противоположным* событию A. Событие $\overline{A}$ означает, что A не произошло.

Если $A \subset B$, то говорят, что событие A *влечёт* событие B.

1.3. Вероятность

Вероятностью на измеримом пространстве $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F})$ называется числовая функция $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, заданная на σ-алгебре событий $\mathcal{F}$, удовлетворяющая условиям:

P1) $\mathsf{P}(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность P);

P2) $\mathsf{P}(\boldsymbol{\Omega}) = 1$ (нормированность P);

P3) $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ для любых A, $B \in \mathcal{F}$, $AB = \varnothing$ (аддитивность P);

P4) если $A_n \downarrow \varnothing$, т. е. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = 0$ (непрерывность P).

Тройку $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий, P — вероятность на измеримом пространстве $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F})$, называется *вероятностным пространством.*

Пусть $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Тогда справедливы следующие свойства вероятности.

1. Справедливо равенство

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0. \tag{1.1}$$

◄ Так как $\varnothing + \varnothing = \varnothing$, то из P3) следует, что $\mathsf{P}(\varnothing) + \mathsf{P}(\varnothing) = \mathsf{P}(\varnothing)$. Следовательно $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$. ►

2. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(B - A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.

◄ Так как $B = A + (B - A)$ и $A(B - A) = \varnothing$, то из P3)

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - A). \tag{1.2}$$

►

3. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

◄ Следует из (1.2) и P1). ►

4. Для любого $A \in \mathcal{F}$

$$0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1.$$

◄ Следует из **1**, **3**, так как $\varnothing \subset A \subset \boldsymbol{\Omega}$. ►

5. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$ для любого события A.

◄ Следует из P3), так как $A + \overline{A} = \boldsymbol{\Omega}$ и $A\overline{A} = \varnothing$. ►

6. *Конечная аддитивность*: если $A_i A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i). \tag{1.3}$$

◄ Индукция по n с использованием P3). ►

7. Для любых событий $A_1, \ldots, A_n$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k). \tag{1.4}$$

◀ Представим $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ в виде суммы попарно несовместных событий $B_k = A_k - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1})$:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \coprod_{k=1}^{n} B_k.$$

Из аддитивности **6** имеем

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k),$$

откуда следует (1.4), так как $\mathsf{P}(B_k) \le \mathsf{P}(A_k)$. ▶

8. Для любых событий A и B

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

◀ Из $A + B = A + (B - AB)$, P3) следует $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - AB)$. Из свойства **2** получаем $\mathsf{P}(B - AB) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$. ▶

Аксиомы P3) и P4) можно заменить одной аксиомой *счётной аддитивности.*

P3*) Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ событий такова, что $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n). \tag{1.5}$$

Теорема 1. *Система аксиом* P1), P2), P3), P4) *равносильна системе аксиом* P1), P2), P3*).

1.4. Примеры вероятностных пространств

Дискретные вероятностные пространства

Пусть

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

— счётное множество, $\mathcal{F}$ — набор всех подмножеств Ω. Пусть p_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Для всякого события $A \in \mathcal{F}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{n \in \{n:\, \omega_n \in A\}}^{\infty} p_n. \tag{1.6}$$

Нетрудно показать, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *дискретным вероятностным пространством.*

Отметим, что если $p_n = 0$ при $n > N$, то фактически мы имеем дело с конечным пространством $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$.

Абсолютно непрерывные вероятностные пространства

Пусть
$$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
— n-мерное вещественное евклидово пространство, $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неотрицательная функция, интегрируемая по Риману по любой квадрируемой области из Ω. Будем предполагать, что существует несобственный интеграл по Ω от функции $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и
$$\int_\Omega \pi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1.$$
Обозначим через $\mathcal{F}$ алгебру, порождённую квадрируемыми областями в Ω. Для любого $A \in \mathcal{F}$ положим
$$\mathsf{P}(A) = \int_A \pi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{1.7}$$
Можно показать, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *абсолютно непрерывным вероятностным пространством.*

2. Условные вероятности. Независимость

2.1. Условные вероятности

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Пусть A, B — некоторые события, причём $\mathsf{P}(B) > 0$. *Условной вероятностью* $\mathsf{P}(A\,|B)$ события A при условии, что произошло событие B, называется величина
$$\mathsf{P}(A\,|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}. \tag{2.1}$$
Для условной вероятности $\mathsf{P}(A\,|B)$ применяется также обозначение $\mathsf{P}_B(A)$.

Запишем (2.1) в виде
$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(A\,|B). \tag{2.2}$$
Равенство (2.2) называется *теоремой умножения.*

Пример 1. В урне находится M белых и $N-M$ чёрных шаров. Последовательно выбираются два шара без возвращения. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим события
$$A = \{\text{ 1-й вынутый шар — белый }\},$$
$$B = \{\text{ 2-й вынутый шар — белый }\}.$$
Тогда
$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N}, \quad \mathsf{P}(B\,|A) = \frac{M-1}{N-1}.$$
Из теоремы умножения получаем
$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B\,|A) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}. \quad \blacksquare$$

Теорема 2.1. (Теорема умножения.) *Пусть события* $A_1, \ldots, A_n$ *таковы, что* $\mathsf{P}(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2\,|A_1)\,\mathsf{P}(A_3\,|A_1A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n\,|A_1\ldots A_{n-1}). \tag{2.3}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование всех условных вероятностей в (2.3). Индукция по n. При $n = 2$ равенство (2.3) вытекает из (2.2). Пусть (2.3) справедливо при $n = k$. Докажем его при $n = k+1$. Подставляя в (2.2) $B = A_1 \ldots A_k$ и $A = A_{k+1}$, получим

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_k A_{k+1}) = \mathsf{P}(A_1 \ldots A_k)\,\mathsf{P}(A_{k+1}\,|A_1 \ldots A_k).$$

Из этого равенства и индукционного предположения следует (2.3) при $n = k+1$. ∎

2.2. Формула полной вероятности

Система событий B_1, B_2, ..., B_n называется *конечным разбиением* $\mathbf{\Omega}$, если они попарно несовместны и

$$B_1 + B_2 + \ldots B_n = \Omega. \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. (Формула полной вероятности.) *Пусть события* $B_1, \ldots, B_n$ *образуют конечное разбиение* Ω *и все* $\mathsf{P}(B_k) > 0$. *Тогда для любого события* A *справедлива формула*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k), \tag{2.5}$$

называемая формулой полной вероятности.

Доказательство. Из (2.4) следует разложение A на сумму

$$A = A\Omega = AB_1 + AB_2 + \ldots AB_n.$$

События AB_1, $AB_2 \ldots AB_n$ попарно независимы. Из конечной аддитивности P и теоремы умножения (2.2) получаем

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(AB_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k). \quad \blacksquare$$

Пример 2. В условиях примера 1 вычислим вероятность B, т. е. вероятность того, что 2-й вынутый шар белый.

Решение. Имеем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N}, \quad \mathsf{P}(\overline{A}) = \frac{N-M}{N},$$
$$\mathsf{P}(B\,|A) = \frac{M-1}{N-1}., \quad \mathsf{P}(B\,|\overline{A}) = \frac{M}{N-1}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B\,|A) + \mathsf{P}(\overline{A})\,\mathsf{P}(B\,|\overline{A}) = \frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N}\,\frac{M}{N-1} = \frac{M}{N},$$

т. е. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)$. ∎

П р и м е р 3. Из урны, содержащей M и $N - M$ чёрных шаров утерян один шар неизвестного цвета. Какова вероятность вытащить наудачу из урны белый шар?

Решение. Пусть B_k — событие, состоящее в том, что утеряно k белых шаров ($k = 0,\ 1$); A — событие, состоящее в том, что шар, извлечённый из оставшихся шаров, оказался белым. Положим

$$\mathsf{P}(B_0) = \frac{N-M}{N}, \quad \mathsf{P}(B_1) = \frac{M}{N},$$
$$\mathsf{P}(A\,|B_0) = \frac{M}{N-1}, \quad \mathsf{P}(A\,|B_1) = \frac{M-1}{N-1}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \frac{N-M}{N}\,\frac{M}{N-1} + \frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1} = \frac{M}{N},$$

Отметим, вероятность извлечения белого шара из урны до утери шара тоже равна M/N. ■

2.3. Формулы Байеса

Теорема 2.3. *Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ образуют конечное разбиение Ω и все $\mathsf{P}(B_k) > 0$. Тогда для любого события A, $\mathsf{P}(A) > 0$, справедливы формулы*

$$\mathsf{P}(B_k\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\,\mathsf{P}(A\,|B_i)}, \tag{2.6}$$

называемые формулами Байеса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме умножения

$$\mathsf{P}(B_kA) = \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B_k\,|A).$$

Следовательно

$$\mathsf{P}(B_k\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Применяя к знаменателю $\mathsf{P}(A)$ формулу полной вероятности (2.5), получаем (2.6). ■

Формулы Байеса можно интерпретировать следующим образом. Назовём события B_k гипотезами. Пусть событие A — результат некоторого эксперимента. Вероятности $\mathsf{P}(B_k)$ — это *априорные* вероятности гипотез, вычисляемые до проведения опыта, а условные вероятности $\mathsf{P}(B_k\,|A)$ — это *апостериорные* вероятности гипотез, вычисляемые после того, как известен результат эксперимента A. Формулы Байеса позволяют по априорным вероятностям гипотез и по условным вероятностям события A при гипотезах B_k вычислять апостериорные вероятности $\mathsf{P}(B_k\,|A)$.

П р и м е р 4. Имеется пять урн следующего состава:

2 урны (состава B_1) по 2 белых и 3 чёрных шара,
2 урны (состава B_2) — 1 белый и 4 чёрных шара,
1 урна (состава B_3) — 4 белых и 1 чёрный шар.

Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым (событие A). Чему равна после опыта вероятность (апостериорная вероятность) того, что шар вынут из урны третьего состава?

Решение. Согласно предположению

$$\mathsf{P}(B_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(B_2) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(B_3) = \frac{1}{5}$$
$$\mathsf{P}(A\,|B_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(A\,|B_2) = \frac{1}{5}, \quad \mathsf{P}(A\,|B_3) = \frac{4}{5}.$$

Согласно формуле Байеса

$$\mathsf{P}(B_3\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_3)\,\mathsf{P}(A\,|B_3)}{\mathsf{P}(B_1)\,\mathsf{P}(A\,|B_1) + \mathsf{P}(B_2)\,\mathsf{P}(A\,|B_2) + \mathsf{P}(B_3)\,\mathsf{P}(A\,|B_3)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Аналогично $\mathsf{P}(B_1\,|A) = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(B_2\,|A) = \frac{1}{5}$. ■

2.4. Независимость событий

События A и B называются *независимыми*, если

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B). \tag{2.7}$$

Если равенство (2.7) не выполняется, события будут называться *зависимыми*.

Приведём некоторые свойства независимых событий.

1. Если $\mathsf{P}(B) > 0$, то независимость A и B эквивалентна равенству

$$\mathsf{P}(A\,|B) = \mathsf{P}(A).$$

2. Если A и B независимы, то независимы $\overline{A}$ и B.

Это следует из

$$\mathsf{P}(\overline{A}B) = \mathsf{P}(B - AB) = \mathsf{P}(B)(1 - \mathsf{P}(A)) = \mathsf{P}(\overline{A})\,\mathsf{P}(B).$$

3. Пусть события A и B_1 независимы и независимы также события A и B_2, при этом $B_1B_2 = \varnothing$. Тогда независимы события A и $B_1 + B_2$.

Имеем

$$\mathsf{P}(A(B_1 + B_2)) = \mathsf{P}(AB_1 + AB_2) = \mathsf{P}(AB_1) + \mathsf{P}(AB_2) =$$
$$= \mathsf{P}(A)(\mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B_1 + B_2).$$

Пример 5. Из колоды в 52 карты (состоящей из 13 карт каждой масти) случайно вынимается карта. Рассмотрим события

$$A = \{\text{ вынут туз }\}, \quad B = \{\text{ вынута карта бубновой масти }\}.$$

Тогда событие

$$AB = \{\text{ вынут туз }\}, \quad B = \{\text{ вынут туз бубновой масти }\}.$$

Имеем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},$$
$$\mathsf{P}(AB) = \frac{1}{52} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Следовательно, события A и B независимы.

Предположим теперь, что колода содержит ещё и джокер. В этом случае

$$\mathsf{P}(A) = \frac{4}{53}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{13}{53},$$
$$\mathsf{P}(AB) = \frac{1}{53} \neq \frac{4 \cdot 13}{53^2} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Мы видим, что события A и B зависимы. ■

События A_1, A_2, …, A_n называются *независимыми*, если для любых $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$, $2 \le m \le n$, выполняются равенства

$$\mathsf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\,\mathsf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathsf{P}(A_{i_m}); \tag{2.8}$$

в противном случае события называются *зависимыми*. Независимость нескольких событий называется иногда *независимостью событий в совокупности*.

Пример 6 (пример Бернштейна). На плоскость бросается тетраэдр, три грани которого покрашены соответственно в красный, синий и зелёный цвета, а на четвёртую нанесены все три цвета. Рассмотрим события

$$R = \{\text{ выпала грань, содержащая красный цвет }\},$$
$$G = \{\text{ выпала грань, содержащая зелёный цвет }\},$$
$$B = \{\text{ выпала грань, содержащая синий цвет }\}.$$

Так как каждый из трёх цветов находится на двух гранях, то

$$\mathsf{P}(R) = \mathsf{P}(G) = \mathsf{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Любая пара цветов присутствует только на одной грани, поэтому

$$\mathsf{P}(RG) = \mathsf{P}(RB) = \mathsf{P}(GB) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, события R, G, B попарно независимы. Так как

$$\mathsf{P}(RGB) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathsf{P}(R)\,\mathsf{P}(G)\,\mathsf{P}(B),$$

то мы видим, что события R, G, B зависимы.

Список литературы

1. Чистяков В. П. *Курс теории вероятностей.* — 3-е изд. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

2. Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей*: Учебник. Изд. 10-е, доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 488 с. (Классический университетский учебник.)

3. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения.* В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.

4. Севастьянов Б. А. *Курс теории вероятностей и математической статистики.* — М.: Наука, 1982. — 256 с.

5. Зубков А.М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Сборник задач по теории вероятностей.* — 2-е изд.— М.: Наука, 1989. — 320 с.