ЛЕКЦИЯ 7

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЙ И ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

7.1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

В математике существует много объектов, над которыми можно проводить ***линейные действия*** (сложение и умножение на число)- векторы, матрицы, функции и т.д. (см. **ЛЕКЦИЯ 2**). Эти действия имеют одинаковые свойства - коммутативность, ассоциативность, существование нулевого элемента и т.д. Это позволяет перейти к общему взгляду на линейные действия, которые выполняются над совокупностью каких-либо элементов и подчиняются определённым аксиомам. Это взгляд выражается в понятии ***линейного пространства***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным пространством*** L *называется множество элементов* $x, y, z, \ldots$ *, если:*

1. $\forall x, y \in L$ *указан закон (правило) нахождения суммы элементов:* $z = x + y : z \in L$.

2. $\forall x \in L, \lambda \in R$ *указан закон (правило) нахождения произведения элемента на число:* $z = \lambda x = x\lambda : z \in L$.

3. *Операции сложения и умножения на число, удовлетворяют* ***аксиомам:***

1) $x + y = y + x$ *- коммутативность сложения*,

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *- ассоциативность сложения*,

3) $\exists O \in L : x + O = x$ *- существование* ***нулевого элемента*** $0 \in L$,

4) $\forall x \in L \ \exists(-x) \in L : (-x) + x = O$ *- существование* ***противоположного элемента*** $(-x) \in L$,

5) $\exists 1 \in L : 1 \cdot x = x$ *- существование* ***единичного элемента*** $1 \in L$,

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ *- ассоциативность умножения на число,*

$$\left.\begin{array}{l} 7)\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \\ 8)\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \end{array}\right\} \text{ - дистрибутивность.}$$

Непосредственно из определения линейного пространства следуют его свойства.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Существует единственный *нулевой элемент* линейного пространства.
2. Для $\forall x \in L$ существует единственный *противоположный элемент.*
3. $\forall x \in L : 0 \cdot x = O$, где $0 \in R,\ O \in L$.
4. $\forall x \in L : (-1) \cdot x = -x,\ (-x)$ - противоположный элемент.
5. $\forall \alpha \neq 0 : \alpha \cdot O = O,\ O$ - нулевой элемент пространства .

ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ:

1. Множество всех вещественных чисел R.
2. Множество всех матриц.
3. Множество всех многочленов $P_n(x) : P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, a_i \in R$.

4. $A^n, n = 1,2,3,...$ - n-мерное пространство арифметических векторов (см. **ЛЕКЦИЯ 2**). Элементом этого пространства является любой упорядоченный набор из $n = 1,2,3,...$ вещественных чисел: $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где $\vec{a} \in A^n$ - вектор (точка) этого пространства, $a_1, a_2, ..., a_n$ - координаты вектора (точки) $\vec{a} \in A^n$.
5. Множество всех ***свободных векторов*** (см. **ЛЕКЦИЯ 2, ЗАМЕЧАНИЕ**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейное пространство называется* ***евклидовым*** E*, если в нём задано скалярное произведение векторов: определено действие, сопоставляющее каждым двум векторам* $\bar{x}, \bar{y} \in E$ *число* $\alpha = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Длиной (модулем, нормой) вектора*** $\bar{x} \in E$ *называется число* $|\bar{x}|$ $(\|\bar{x}\|)$*, равное корню из квадрата скалярного произведения вектора* $\bar{x}$:

$$|\bar{x}| = \|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}\ .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Тогда операция ***нормирования вектора*** (т.е. приведение длины вектора к 1) : $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$.

Ранее (см. **ЛЕКЦИЯ 4**) было введено понятие ***линейной зависимости и независимости арифметических векторов.*** Аналогично можно ввести понятие линейной зависимости (независимости) ***обобщённых векторов*** (точек, элементов) линейного пространства L:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n \in L$ *называется* ***линейно независимой****, если их линейная комбинация* $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_n\bar{a}_n, \alpha_i \in R$ *равна нулю только при* $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим P-линейное пространство многочленов 2-й степени $P_2(x): P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, a_i \in R$.

Совокупность его элементов (обобщённых векторов) x^2, x, 1 является линейно независимой.

Действительно, рассмотрим их линейную комбинацию:

$$\alpha_1x^2 + \alpha_2x + \alpha_3 \cdot 1.$$

Очевидно, что

$$\alpha_1x^2 + \alpha_2x + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n \in L$ *называется* ***линейно зависимой****, если существует хотя бы одно* $\alpha_i \neq 0 : i = 1,..,n$ *, при котором их линейная комбинация равна нулю:*

$$\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_n\bar{a}_n=0 \Leftrightarrow \exists\alpha_i:\alpha_i\neq 0, i=1,..,n.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим P-линейное пространство многочленов 2-й степени $P_2(x): P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2, a_i\in R$.

Совокупность его элементов (обобщённых векторов) x^2, x, 1 является линейно независимой - см. **ПРИМЕР 1**.

Рассмотрим совокупность $2x^2-3, x^2$, x, 1 и докажем, что она линейно зависима.

Рассмотрим их линейную комбинацию:

$$\alpha_1(2x^2-3)+\alpha_2x^2+\alpha_3\cdot x+\alpha_4\cdot 1,$$

$$\alpha_1(2x^2-3)+\alpha_2x^2+\alpha_3\cdot x+\alpha_4\cdot 1=0$$

при

$$2\alpha_1+\alpha_2=0, \alpha_3=0, \alpha_4=-3\alpha_1,$$

например, при

$$\alpha_1=1, \alpha_2=-2, \alpha_3=0, \alpha_4=-3.$$

Значит элементы $2x^2-3, x^2$, x, 1 - линейно зависимы.

Понятие линейной зависимости (независимости) векторов является одним из основополагающих понятий курса линейной алгебры и позволяет дать определение ***размерности*** и ***базиса линейного пространства.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейное пространство* L *называется* ***n - мерным****, если в нём существует n линейно независимых векторов, а любые (n+1) векторов являются линейно зависимыми. Обозначение:* L_n *(*L^n*).*

Число n называется ***размерностью линейного пространства*** L_n: $\dim L_n=n$.

ПРИМЕР 3. Пространство P многочленов $P_2(x): P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2, a_i\in R$ является 3-х мерным: $\dim P=3$ - см. **ПРИМЕР 1** и **ПРИМЕР 2**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Базисом*** *n-мерного линейного пространства* L *называется любая упорядоченная совокупность (система) n линейно независимых векторов этого пространства.*

ЗАМЕЧАНИЕ. 1)Если базис состоит из конечного числа векторов, то пространство - ***конечномерно***.

2) Если для $\forall m\in N$ найдётся m линейно независимых векторов этого пространства, то это пространство называется ***бесконечномерным.***

ПРИМЕР 4. Совокупность $x^2, x, 1$ является базисом пространства P многочленов $P_2(x): P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, a_i \in R$.

ПРИМЕР 5. 1) Рассмотрим любые три некомпланарных вектора в R^3, например $\vec{p} = (1,-1,1), \vec{q} = (0,3,1), \vec{r} = (2,0,1)$ - они линейно независимы и являются базисом в R^3.

Для доказательства этого факта составим линейную комбинацию этих векторов

$$\lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r}$$

и найдём, что

$$\lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0:$$

$$\lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r} = \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(0,3,1) + \lambda_3(2,0,1) = 0.$$

Эта запись равносильна однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Посчитаем определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

значит эта система имеет единственное решение - тривиальное, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Если мы рассмотрим систему из 4-х векторов $\vec{p} = (1,-1,1), \vec{q} = (0,3,1), \vec{r} = (2,0,1)$, $\vec{s} = (8,-5,4)$, то она будет уже линейно зависимой и вектор $\vec{s} = (8,-5,4)$ можно выразить через базисные вектора $\vec{p} = (1,-1,1), \vec{q} = (0,3,1), \vec{r} = (2,0,1)$. Для этого нужно найти значения $\lambda_i \neq 0 : \vec{s} = \lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r}$ или решить равносильную этой записи систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 8 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = -5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases}.$$

Решением этой системы было найдено ранее (см. **ЛЕКЦИЯ 5, ПРИМЕР 4**):

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}.$$

2) Рассмотрим любые два неколлинеарных вектора в R^2, например $\vec{p} = (0,1), \vec{q} = (1,0)$ - они линейно независимы и являются базисом в R^2.

3) Рассмотрим любой ненулевой вектор в R, например $\vec{p} = (3)$ - он является базисом в R.

7.2. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

В математике много примеров, когда под действием некоторого преобразования (например, один объект (прообраз) переходит в другой (образ), сохраняя при этом линейные действия над изменённым объектом (прообразом).

Рассмотрим поворот всех векторов вокруг начала координат на некоторый угол α.Обозначим это преобразование буквой A, тогда каждому вектору $\vec{x}$ будет соответствовать его образ - вектор $\mathrm{A}\vec{x}$. При этом $\mathrm{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathrm{A}\vec{x}$, а если $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, то $\mathrm{A}\vec{x} = \mathrm{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathrm{A}\vec{x}_1 + \mathrm{A}\vec{x}_2$.

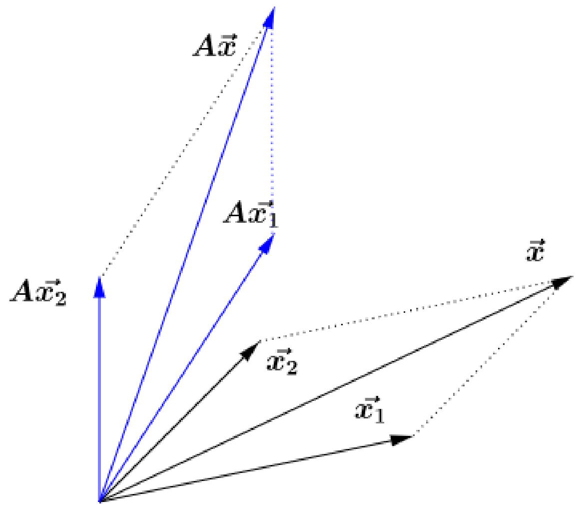

РИС.1.Образ вектора суммы: $\mathrm{A}\vec{x} = \mathrm{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathrm{A}\vec{x}_1 + \mathrm{A}\vec{x}_2$.

Перейдём к определению линейного оператора, действующего в некотором линейном пространстве L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *В пространстве* L *задан* ***линейный оператор*** A***,*** *если установлено правило (задан закон), по которому каждому вектору* $\bar{x} \in L$ *сопоставляется вполне определённый (единственный) вектор* $\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x} : \bar{y} \in L$*, при этом выполнено:*

- $\mathrm{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \mathrm{A}\bar{x}_1 + \mathrm{A}\bar{x}_2$,
- $\mathrm{A}(\lambda\bar{x}) = \lambda\mathrm{A}\bar{x}, \lambda \in R$.

ТЕОРЕМА. *Если* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \in L$ *-базис линейного (n-мерного) пространства* L, *то для* $\forall\bar{x} \in L$ *существует единственная система чисел* $x_1, x_2, ..., x_n$, *такая что*

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n .$$

Доказательство.

По определению ***линейного пространства*** (см. п. **7.1.**) для $\forall \bar{x} \in L$ совокупность из (n+1) векторов $\bar{x}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ является линейно зависимой, т.е. $\exists x_1, x_2, ..., x_n$, не все равные нулю, такие что

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n .$$

Предположим, что $\exists x'_1, x'_2, ..., x'_n$:

$$\bar{x} = x'_1\bar{e}_1 + x'_2\bar{e}_2 + ... + x'_n\bar{e}_n .$$

Тогда

$$x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n = x'_1\bar{e}_1 + x'_2\bar{e}_2 + ... + x'_n\bar{e}_n ,$$

$$(x'_1 - x_1)\bar{e}_1 + (x'_2 - x_2)\bar{e}_2 + ... + (x'_n - x_n)\bar{e}_n = 0 .$$

Так как вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ линейно независимы (см. определение ***базиса*** п.**7.1.**) , то

$$(x'_1 - x_1)\bar{e}_1 + (x'_2 - x_2)\bar{e}_2 + ... + (x'_n - x_n)\bar{e}_n = 0 \Leftrightarrow x'_1 - x_1 = 0, x'_2 - x_2 = 0, ..., x'_n - x_n ,$$

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, ..., x'_n = x_n .$$

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выражение* $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$ *будем называть* ***разложением вектора*** $\bar{x}$ ***по базису*** $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$. *Коэффициенты* x_i *будем называть* ***координатами вектора*** $\bar{x}$ *в этом базисе.*

Рассмотрим образ вектора $\bar{x}$**:** $\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x}$. Он также является вектором , а совокупность из (n+1) векторов $\bar{y}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ является линейно зависимой, т.е. $\exists y_1, y_2, ..., y_n \in R$, не все равные нулю, такие что

$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + ... + y_n\bar{e}_n .$$

Теперь применим оператор A непосредственно к вектору $\bar{x}$**:**

$$\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x} = \mathrm{A}(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n) = \mathrm{A}(x_1\bar{e}_1) + \mathrm{A}(x_2\bar{e}_2) + ... + \mathrm{A}(x_n\bar{e}_n) =$$
$$= x_1\mathrm{A}\bar{e}_1 + x_2\mathrm{A}\bar{e}_2 + ... + x_n\mathrm{A}\bar{e}_n .$$

Так как $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \in L$, то вектора $\mathrm{A}\bar{e}_1, \mathrm{A}\bar{e}_2, ..., \mathrm{A}\bar{e}_n \in L$, а значит могут быть разложенными по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$:

$$\mathrm{A}\bar{e}_k = a_{1k}\bar{e}_1 + a_{2k}\bar{e}_2 + ... + a_{nk}\bar{e}_n , \; k = 1,2,...,n.$$

Таким образом мы получаем, что

$$y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + ... + y_n\bar{e}_n = x_1\mathrm{A}\bar{e}_1 + x_2\mathrm{A}\bar{e}_2 + ... + x_n\mathrm{A}\bar{e}_n ,$$

т.е.

$$y_1 = \mathrm{A}\bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + ... + a_{n1}\bar{e}_n ,$$
$$y_2 = \mathrm{A}\bar{e}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + ... + a_{n2}\bar{e}_n ,$$
$$\vdots$$
$$y_n = \mathrm{A}\bar{e}_n = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + ... + a_{nn}\bar{e}_n .$$

В матричном виде эта запись выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ или } Y = A \cdot X,$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{-столбец координат вектора } \bar{y} = \mathrm{A}\bar{x},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \text{-матрица оператора } \mathrm{A},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{-столбец координат вектора } \bar{x}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. 1)Отметим, что при применении ***одного и того же*** оператора A к различным наборам базисных векторов, мы будем получать ***различные*** матрицы этого оператора.
2) Линейный оператор A, матрица A которого невырожденная, называется ***невырожденным о***ператором.

7.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. ИЗМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К НОВОМУ БАЗИСУ. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ЗАМЕНА БАЗИСА

7.3.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

В предыдущем пункте мы отмечали (см. **ЗАМЕЧАНИЕ**), что матрица оператора зависит от выбранного базиса - у одного и того же оператора в разных базисах будут разные матрицы. Далее мы рассмотрим вопрос о том, как будут меняться координаты некоторого вектора при переходе от одного базиса к другому.
Фиксируем в некотором линейном n-мерном пространстве L два различных базиса:

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n,$$

$$\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n.$$

Рассмотрим вектор $\bar{x} \in L$ и его разложение по данным базисам:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n \,,$$
$$\bar{x} = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + \ldots + x_n'\bar{e}_n' \,.$$

Каждый базисный вектор $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ разложим по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$:

$$\bar{e}_1' = t_{11}\bar{e}_1 + t_{21}\bar{e}_2 + \ldots + t_{n1}\bar{e}_n \,,$$
$$\bar{e}_2' = t_{12}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + \ldots + t_{n2}\bar{e}_n \,,$$
$$\ldots$$
$$\bar{e}_n' = t_{1n}\bar{e}_1 + t_{2n}\bar{e}_2 + \ldots + t_{nn}\bar{e}_n \,.$$

Подставим полученные разложения:

$$\bar{x} = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + \ldots + x_n'\bar{e}_n' =$$
$$= x_1'\left(t_{11}\bar{e}_1 + t_{21}\bar{e}_2 + \ldots + t_{n1}\bar{e}_n\right) + x_2'\left(t_{12}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + \ldots + t_{n2}\bar{e}_n\right) + \ldots + x_n'\left(t_{1n}\bar{e}_1 + t_{2n}\bar{e}_2 + \ldots + t_{nn}\bar{e}_n\right) =$$
$$= \left(t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + \ldots + t_{1n}x_n'\right)\bar{e}_1 + \left(t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + \ldots + t_{2n}x_n'\right)\bar{e}_2 + \ldots + \left(t_{n1}x_1' + t_{n2}x_2' + \ldots + t_{nn}x_n'\right)\bar{e}_n \,.$$

Учитывая, что

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n \,,$$

получим:

$$x_1 = t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + \ldots + t_{1n}x_n',$$
$$x_2 = t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + \ldots + t_{2n}x',$$
$$\vdots$$
$$x_n = t_{n1}x_1' + t_{n2}x_2' + \ldots + t_{nn}x_n'.$$

В матричном виде эта запись выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & .. & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & .. & t_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ t_{n1} & t_{n2} & .. & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \text{ или } X = T \cdot X' ,$$

где

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$,

$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & .. & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & .. & t_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ t_{n1} & t_{n2} & .. & t_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ к базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$,

$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Отметим, что

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & .. & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & .. & t_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ t_{n1} & t_{n2} & .. & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- ***матрица перехода*** от базиса $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ к базису $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,...,\bar{e}'_n$, составляется из столбцов координат векторов базиса $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,...,\bar{e}'_n$ в базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$.

2) Матрица перехода от одного базиса к другому является ***невырожденной.***

3) Любую невырожденную матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу перехода от одного базиса к другому в n -мерном пространстве.

4)Так как матрица перехода от одного базиса к другому невырожденная, то у неё существует обратная матрица и можно выразить координаты в "новом" базисе $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,...,\bar{e}'_n$ через координаты в "старом" базисе $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,...,\bar{e}'_n$:

$$X'=T^{-1}\cdot X .$$

ПРИМЕР 5. Рассмотрим ***преобразование поворота*** на некоторый угол α в плоскости Oxy. Найдём матрицу этого преобразования.

Формулы связи "новых" и "старых" координат:

$$\begin{cases} x=\cos\alpha\cdot x_1-\sin\alpha\cdot y_1 \\ y=\sin\alpha\cdot x_1+\cos\alpha\cdot y_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$T=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

тогда нетрудно найти $T^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $\begin{cases} x_1=\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y \\ y_1=-\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y \end{cases}$.

7.3.2. ИЗМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К НОВОМУ БАЗИСУ. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ЗАМЕНА БАЗИСА

Рассмотрим:

- оператор A в некотором n-мерном линейном пространстве L ,
- $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ - базис этого пространства,
- A - матрица оператора $\mathrm{A}: Y=A\cdot X$,
- $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,...,\vec{e}'_n$ - новый базис пространства L,
- T - матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,...,\vec{e}'_n$: $X=T\cdot X'$, $Y=T\cdot Y'$.

Покажем, как изменится матрица оператора A при переходе в базис $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,...,\vec{e}'_n$.

Для этого рассмотрим равенство

$$Y = A \cdot X = A \cdot T \cdot X' = T \cdot Y',$$

откуда

$$A \cdot T \cdot X' = T \cdot Y',$$
$$T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot X' = T^{-1} \cdot T \cdot Y',$$
$$T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot X' = E \cdot Y' = Y',$$
$$Y' = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot X' = A' \cdot X',$$

где

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

- ***матрица оператора*** A ***в новом базисе*** $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матрица* A *называется* ***подобной*** *матрице* B*, если существует невырожденная матрица* C*, такая что* $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому - подобные: матрица A' подобна матрице A (где $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, T - матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратная матрица* A *называется* ***ортогональной****, если её транспонированная матрица равна обратной:* $A^T = A^{-1}$. *Ортогональной матрице отвечает* ***ортогональный оператор.***

ЗАМЕЧАНИЕ. 1)Определитель ортогональной матрицы всегда равен ± 1.
2) Ортогональный оператор переводит один ортонормированный базис (вектора этого базиса попарно перпендикулярны и имеют единичную длину) в другой ортонормированный базис.