ЛЕКЦИЯ 6
ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.
ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

6.1. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ: СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ, ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ. ТЕОРЕМА О ВИДЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНЕ. *Система линейных уравнений (С.Л.У) называется* ***однородной****, если столбец её свободных членов равен нулю:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Так как у однородной С.Л.У всегда есть ***тривиальное решение*** ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$), то она всегда ***совместна*** (см. **ЛЕКЦИЯ 5, п.5.1**). Возможны два случая:

- $\operatorname{rang} A = r = n$, т.е. $\det A \neq 0$ и решение единственное (тривиальное).
- $\operatorname{rang} A = r < n$, тогда решений ***бесконечно много***.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что если X и Y - некоторые решения однородной С.Л.У, тогда и любая их линейная комбинация $\alpha X + \beta Y$ является решением этой системы.

В случае, когда решений бесконечно много, встаёт вопрос о виде общего решения однородной системы и в конце этой лекции мы сформулируем и докажем соответствующую теорему. Для этого нам понадобится ввести ряд дополнительных понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность ненулевых решений* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *однородной С.Л.У. называется* ***фундаментальной системой решений,*** *если:*

1) $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *- линейно независимы,*

2)Любое другое ненулевое решение X *однородной С.Л.У может быть представлено линейной комбинацией* $X_1, X_2, \ldots, X_k$*:*

$$X = c_1X_1, +c_2X_2 + c_kX_k, c_i \in R.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решение однородной С.Л.У, представленное в виде*

$$X = c_1X_1, +c_2X_2 + c_kX_k, c_i \in R,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *- фундаментальная система решений однородной С.Л.У , называется* ***общим решением однородной С.Л.У.***

Далее перейдём к формулировке и доказательству теоремы о фундаментальной системе решений.

ТЕОРЕМА (О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ). *Если ранг матрицы коэффициентов однородной С.Л.У меньше числа неизвестных, то эта система имеет фундаментальную систему решений размерностью (n-r) , где n - число неизвестных,* $r=\mathrm{rang}A$.

Доказательство:

Т.к. $r=\mathrm{rang}A$, то выразим r базисных переменных через n-r свободных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (*)$$

Базисный минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

значит базисные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ находятся однозначно, если придать свободным переменным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ некоторые числовые значения.

Придадим свободным неизвестным следующие наборы решений (всего n-r наборов):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$$

подставим их в систему и найдём r наборов базисных неизвестных.

Например, берём набор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$, которому соответствуют следующие значения свободных переменных:

$$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0,$$

тогда, при подстановке в систему (*), получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1} \end{cases},$$

эта С.Л.У имеет единственное решение - столбец значений базисных переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1^{\ 1} \\ x_2^{\ 1} \\ x_3^{\ 1} \\ .. \\ x_r^{\ 1} \end{pmatrix}.$$

Далее, берём набор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$, которому соответствуют следующие значения свободных переменных:

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, ..., x_n = 0\ ,$$

тогда, при подстановке в систему (*) получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1r+2} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2r+2} \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = -a_{rr+2} \end{cases},$$

откуда однозначно находим ещё один столбец базисных значений переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2} \\ x_3^{\ 2} \\ .. \\ x_r^{\ 2} \end{pmatrix}.$$

Продолжая процесс далее, находим r наборов базисных неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x_1^{\ 1} \\ x_2^{\ 1} \\ x_3^{\ 1} \\ .. \\ x_r^{\ 1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2} \\ x_3^{\ 2} \\ .. \\ x_r^{\ 2} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_1^{\ n-r} \\ x_2^{\ n-r} \\ x_3^{\ n-r} \\ .. \\ x_r^{\ n-r} \end{pmatrix}.$$

Объединим наборы базисных и свободных переменных в *n-r* наборов решений однородной С.Л.У:

$$X_1=\begin{pmatrix} x_1^{\ 1} \\ x_2^{\ 1} \\ .. \\ x_r^{\ 1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} x_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2} \\ .. \\ x_r^{\ 2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix},\dots,X_{n-r}=\begin{pmatrix} x_1^{\ n-r} \\ x_2^{\ n-r} \\ .. \\ x_r^{\ n-r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Полученная система решений $X_1, X_2,..., X_{n\text{-}r}$ является фундаментальной системой решений, т.е. она линейно независима и любое другое решение системы X есть линейная комбинация фундаментальных решений.

Доказательство:

1) Докажем линейную независимость системы решений $X_1, X_2,..., X_{n\text{-}r}$.

Рассмотрим линейную комбинацию $c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_{n-r}X_{n\text{-}r} = 0$, которая соответствует однородной С.Л.У с переменными $c_1, c_2,..., c_{n-r}$.

Матрица коэффициентов этой системы:

$$\begin{pmatrix} x_1^{\ 1} & x_1^{\ 2} & ... & x_1^{\ n-r} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_r^{\ 1} & x_r^{\ 2} & ... & x_r^{\ n-r} \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

в ней можно выделить базисный минор

$$M_{n-r} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

значит однородная С.Л.У с переменными $c_1, c_2,..., c_{n-r}$ имеет единственное решение - тривиальное, что доказывает, что система решений $X_1, X_2,..., X_{n\text{-}r}$ - линейно независима.

2) Рассмотрим любое решение X :

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и матрицу $Y_{n\times 1}$:

$$Y\ =X-x_{r+1}X_1-x_{r+2}X_2-\ldots-x_nX_{n-r}==\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ x_{r+3} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}-x_{r+1}\begin{pmatrix} x_1^{\ 1} \\ x_2^{\ 1} \\ .. \\ x_r^{\ 1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}-x_{r+2}\begin{pmatrix} x_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2} \\ .. \\ x_r^{\ 2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}-\ldots-x_n\begin{pmatrix} x_1^{\ n-r} \\ x_2^{\ n-r} \\ .. \\ x_r^{\ n-r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

которая является столбцом решений однородной С.Л.У (см. **ЗАМЕЧАНИЕ** в начале лекции). Значит и решение равносильной системы (*), которая при таком наборе решений является однородной и имеет только одно решение - тривиальное, т.е. $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ x_{r+3} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - x_{r+1}\begin{pmatrix} x_1^{\ 1} \\ x_2^{\ 1} \\ .. \\ x_r^{\ 1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} - x_{r+2}\begin{pmatrix} x_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2} \\ .. \\ x_r^{\ 2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} - \dots - x_n\begin{pmatrix} x_1^{\ n-r} \\ x_2^{\ n-r} \\ .. \\ x_r^{\ n-r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим, что

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ x_{r+3} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1}\begin{pmatrix} x_1^{\ 1} \\ x_2^{\ 1} \\ .. \\ x_r^{\ 1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2}\begin{pmatrix} x_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2} \\ .. \\ x_r^{\ 2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} x_1^{\ n-r} \\ x_2^{\ n-r} \\ .. \\ x_r^{\ n-r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$$

или в краткой форме

$$X = x_{r+1}X_1 + x_{r+2}X_2 + \dots + x_nX_{n\text{-}r}\,.$$

Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. В ходе доказательства **ТЕОРЕМЫ (О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ)** мы доказали, что ***общее решение*** X однородной системы представляется в виде

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k\,,$$

где система решений $X_1, X_2, \dots, X_k$ является фундаментальной системой решений однородной С.Л.У.

Далее сформулируем (без доказательства) ещё одну важную теорему.

ТЕОРЕМА (ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ С.Л.У.)
Если Y - некоторое частное решение неоднородной С.Л.У с n неизвестными, ранг системы r, k=n-r, $X_o = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k$ *- общее решение соответствующей однородной С.Л.У., тогда общее решение неоднородной С.Л.У имеет вид:*

$$X = X_o + Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_k X_k + Y$$

ПРИМЕР 1. Найти общее решение неоднородной С.Л.У.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}.$$

Решение:

1. Найдём общее решение соответствующей однородной С.Л.У.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Посчитаем ранг матрицы коэффициентов:

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{(2)-2\cdot(1) \\ (3)-4\cdot(1) \\ (4)-(1)}}{\sim} r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{(3)-(2) \\ (4)-(2)}}{\sim} r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, ему соответствуют базисные переменные x_1, x_2.

$k = n - r = 4 - 2 = 2$ - число свободных неизвестных и размерность фундаментальной системы решений.

Выразим базисные переменные x_1, x_2 через свободные переменные x_3, x_4. Для этого от преобразованной матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ перейдём к эквивалентной однородной С.Л.У.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \\ 3x_2 = 3x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

и найдём фундаментальные решения X_1 и X_2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \\ 3x_2 = 3x_3 - 5x_4 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 = 1 - 1 + 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(3 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \text{ т.е. } X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \\ 3x_2 = 3x_3 - 5x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 = -\frac{5}{3} - 0 + 1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3}(3 \cdot 0 - 5 \cdot 1) = -\frac{5}{3} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{5}{3}, \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \text{ т.е. } X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда общее решение однородной С.Л.У.

$$X_o = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in R .$$

2. Найдём частное решение исходной неоднородной системы. Для этого преобразуем расширенную матрицу этой системы к ступенчатому виду (с помощью тех же преобразований, которыми мы применяли при подсчёте ранга матрицы коэффициентов однородной С.Л.У.), посчитаем её ранг, выделим базисный минор и перейдём к эквивалентной С.Л.У:

$$r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{(2)-2\cdot(1) \\ (3)-4\cdot(1) \\ (4)-(1)}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{(3)-(2) \\ (4)-(2)}}{\sim} r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2$$

Базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, ему соответствуют базисные переменные x_1, x_2.

$k = n - r = 4 - 2 = 2$ - число свободных неизвестных и размерность фундаментальной системы решений.

Выразим базисные переменные x_1, x_2 через свободные переменные x_3, x_4. Для этого от преобразованной расширенной матрицы $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ перейдём к эквивалентной неоднородной С.Л.У.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}.$$

Найдём любое частное решение этой системы, придав свободным переменным некоторые числовые значения, например при $x_3 = 0, x_4 = 0$.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 + 2 = -\dfrac{1}{3} + 2 = \dfrac{5}{3} \\ x_2 = x_3 - \dfrac{5}{3}x_4 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases},$$

т.е. частное решение Y исходной неоднородной С.Л.У.: $Y = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теперь запишем общее решение неоднородной С.Л.У.:

$$X = X_o + Y = c_1X_1 + c_2X_2 + Y = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in R$$

или

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3}c_2 + \dfrac{5}{3} \\ x_2 = c_1 - \dfrac{5}{3}c_2 - \dfrac{1}{3}. \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

Проверка. Проверку можно сделать двумя способами:

1. Придадим коэффициентам c_1, c_2 некоторые значения , $c_1 = 1, c_2 = -1$. Тогда частное решение неоднородной С.Л.У :

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3}\cdot(-1) + \dfrac{5}{3} = \dfrac{7}{3} \\ x_2 = 1 - \dfrac{5}{3}\cdot(-1) - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{3} \\ x_2 = \dfrac{7}{3} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases},$$

подставим эти значения в исходную С.Л.У.:

$$\begin{cases} \frac{7}{3}-\frac{7}{3}+1-(-1)=2 \\ 2\cdot\frac{7}{3}+\frac{7}{3}-1+3(-1)=\frac{21}{3}-4=7-4=3 \\ 4\cdot\frac{7}{3}-\frac{7}{3}+1-1=\frac{21}{3}=7 \\ \frac{7}{3}+2\cdot\frac{7}{3}-2-4=\frac{21}{3}-6=1 \end{cases}$$

- получили верные тождества, значит проверка верна.

2. Подставим в исходную С.Л.У. выражения для переменных при всех $c_1, c_2 \in R$:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3}c_2+\frac{5}{3} \\ x_2=c_1-\frac{5}{3}c_2-\frac{1}{3} \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}c_2+\frac{5}{3}-\left(c_1-\frac{5}{3}c_2-\frac{1}{3}\right)+c_1-c_2=2 \\ 2\cdot\left(-\frac{2}{3}c_2+\frac{5}{3}\right)+\left(c_1-\frac{5}{3}c_2-\frac{1}{3}\right)-c_1+3c_2=3 \\ 4\cdot\left(-\frac{2}{3}c_2+\frac{5}{3}\right)-\left(c_1-\frac{5}{3}c_2-\frac{1}{3}\right)+c_1+c_2=7 \\ \left(-\frac{2}{3}c_2+\frac{5}{3}\right)+2\cdot\left(c_1-\frac{5}{3}c_2-\frac{1}{3}\right)-2c_1+4c_2=1 \end{cases}$$

- также получаем верные тождества.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что при приведении расширенной матрицы неоднородной С.Л.У и при подсчёте ранга матрицы коэффициентов соответствующей однородной С.Л.У применялись одни и те же преобразования. Поэтому, для сокращения поиска общего решения неоднородной С.ЛУ., можно сразу начинать с преобразования расширенной матрицы системы и, выписывая из неё матрицу коэффициентов однородной С.Л.У, находить соответствующую фундаментальную систему решений.