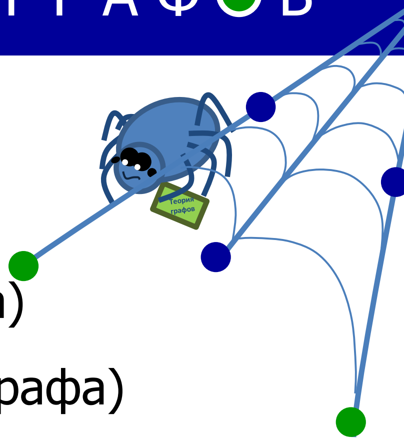
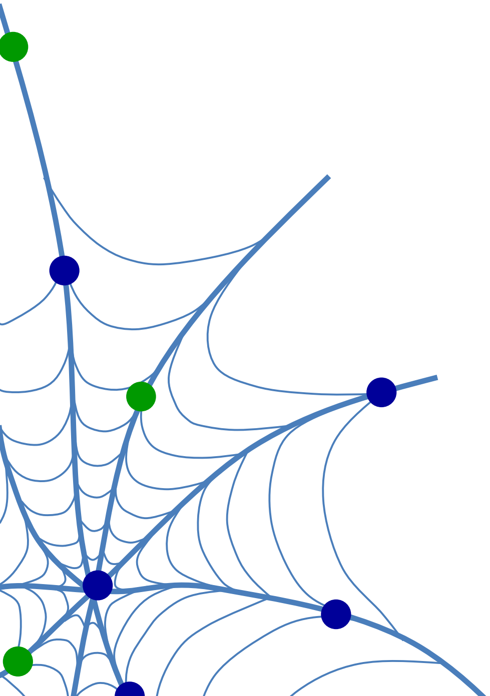


Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов



Двудольные графы

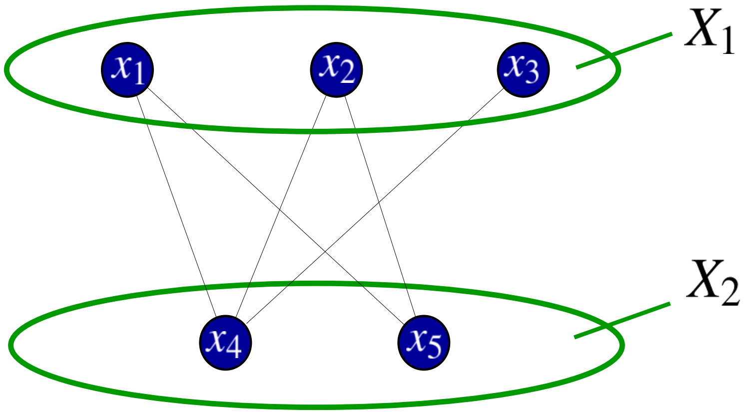
- Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

Двудольным графом (= графом Кёнига) называется граф $K(X,U)$, у которого множество вершин X состоит из двух долей (подмножеств) -X_1 и X_2 таких, что:

$$X = X_1 \cup X_2,\ X_1 \cap X_2 = \varnothing,$$

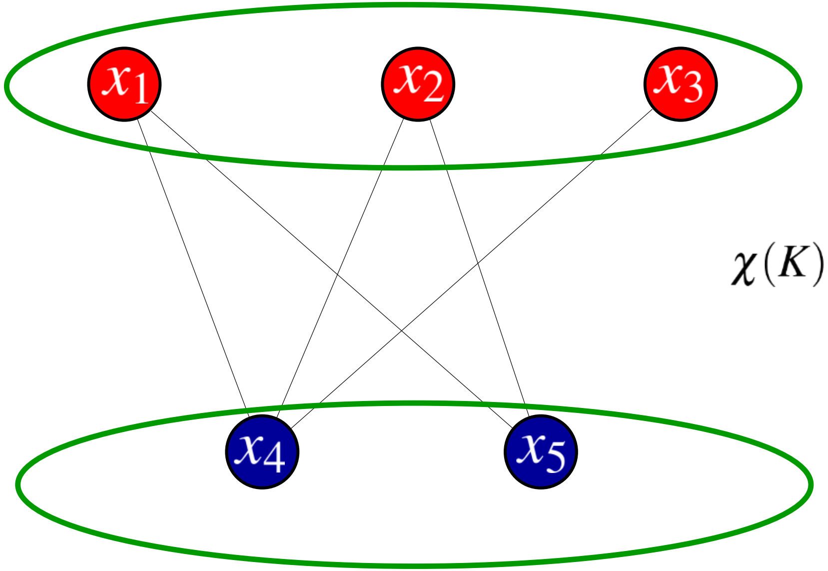
а множество U состоит только из таких ребер и (или) дуг, для которых выполняется следующее условие:

$$\forall (x,y) \in U : x \in X_1,\ y \in X_2$$



Примечание:

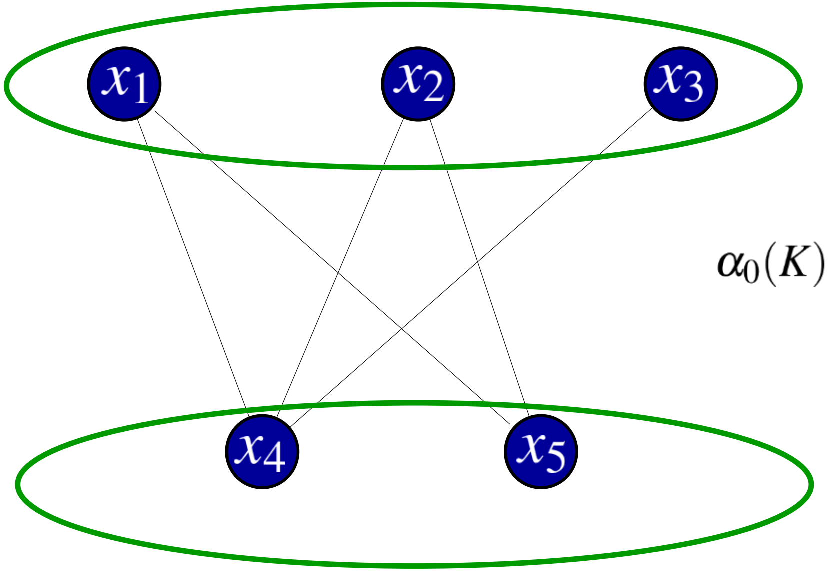
1. Граф Кёнига можно раскрасить в два цвета, т.к. вершины в долях не смежны между собой. Поэтому граф Кёнига называют еще и бихроматическим графом.



$$\chi(K) = 2$$

Примечание:

2. Число внутренней устойчивости графа Кёнига $\alpha_0(K) = \max(|X_1|, |X_2|)$.



$\alpha_0(K) = 3$

Двудольные графы

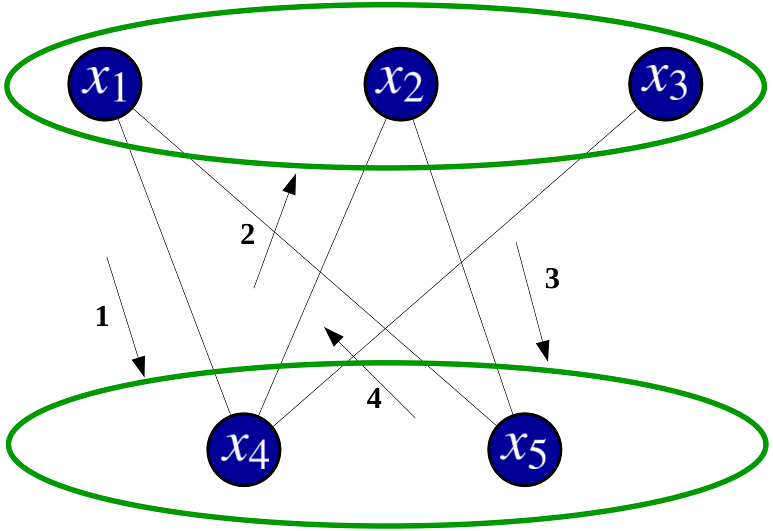
- Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

Теорема Кёнига (критерий двудольности графа).

Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы этот граф не содержал простых циклов нечётной длины.



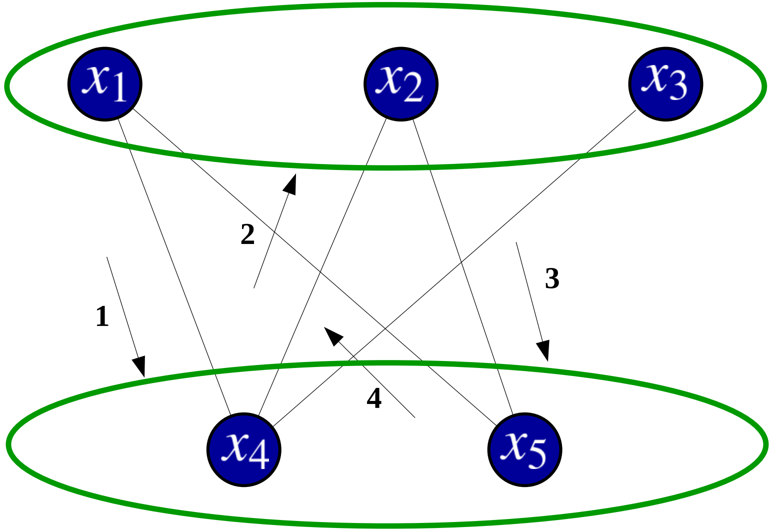
Доказательство необходимости.

Пусть задан двудольный граф $K(X,U)$, содержащий множество циклов C.

$\forall c \in C : l_c = 4, 6, 8...,$ т.к. по определению двудольного графа все простые циклы в нем строятся из ребер, концы которых находятся в разных долях этого графа.

Теорема Кёнига (критерий двудольности графа).

Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы этот граф не содержал простых циклов нечётной длины.



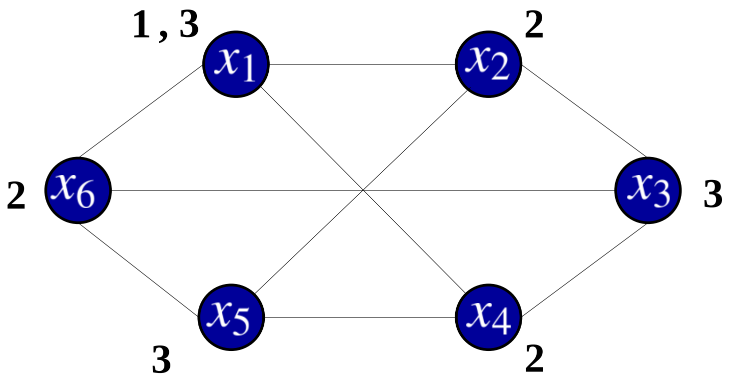
Доказательство необходимости.

Пусть задан двудольный граф $K(X,U)$, содержащий множество циклов C.

$\forall c \in C : l_c = 4, 6, 8 \ldots$, т.к. по определению двудольного графа все простые циклы в нем строятся из ребер, концы которых находятся в разных долях этого графа.

Теорема Кёнига (критерий двудольности графа).

Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы этот граф не содержал простых циклов нечётной длины.



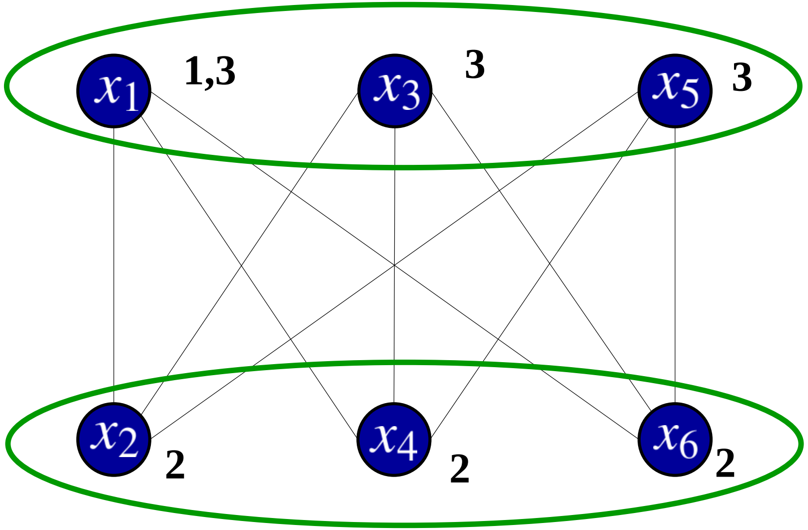
Доказательство достаточности.

Пусть задан граф $G(X,U)$, содержащий множество циклов C.

Разметим вершины этого графа с помощью метода обхода вершин вширь следующим образом. Произвольно выберем первую вершину в графе», например, x_1 и присвоим ей числовую метку «1». Далее присвоим метку «2» образам этой вершины, а метку «3» - образам вершин, получивших метку «2» и т.д. до тех пор, пока все вершины графа не будут размечены.

Теорема Кёнига (критерий двудольности графа).

Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы этот граф не содержал простых циклов нечётной длины.

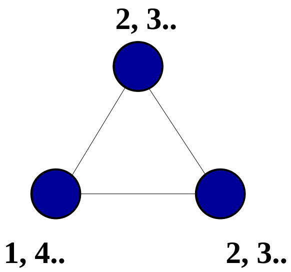


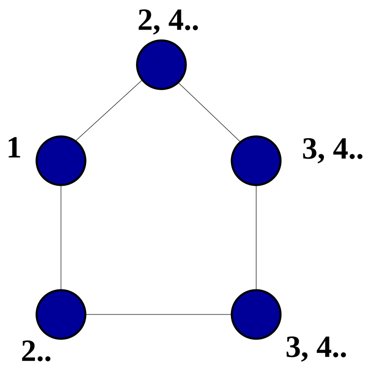
Доказательство достаточности.

При разметке вершин цикла $c \in C$ с чётной длиной каждая вершина получит метки из ряда «1,3…» или «2,4,…». Если в графе все циклы только чётной длины, то все вершины делятся на две доли X_1 и X_2 с метками «1,3…» или «2,4,…», причем ребра, входящие в эти циклы, будут инцидентны вершинам из разных долей.

Теорема Кёнига (критерий двудольности графа).

Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы этот граф не содержал простых циклов нечётной длины.





Доказательство достаточности.

При разметке вершин цикла $c \in C$ с нечётной длиной каждая вершина получит чётные и нечётные метки. Такие вершины нельзя разбить на две доли двудольного графа X_1 и X_2, т.к. $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Примечание: Любое дерево (лес) является графом Кёнига.

Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

Содержательная постановка задачи линейного назначения

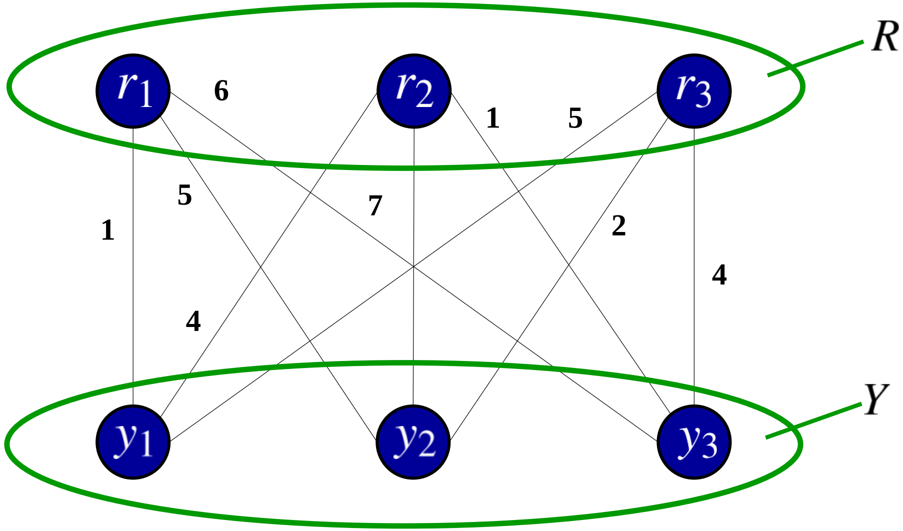
Имеется n вакантных рабочих мест, на которые претендуют n рабочих. Известна стоимость назначения каждого рабочего на каждое вакантное рабочее место. Необходимо так распределить рабочих по рабочим местам, чтобы суммарная стоимость такого назначения была минимальной.

Формальная постановка задачи линейного назначения

Дано: взвешенный полный двудольный граф $K(X,U)$, в котором множество вершин X состоит из двух долей - R и Y (R моделирует n рабочих, а Y $-n$ рабочих мест). Граф представлен матрицей весов $||W||_{nxn}$, в которой w_{ij} – стоимость назначения $i-$го рабочего на $j-$место.

Найти: Совершенное паросочетание $U^* \subset U$ в графе $K(X,U)$.

Совершенное паросочетание – это наибольшее паросочетание графа с минимальным суммарным весом его ребер.

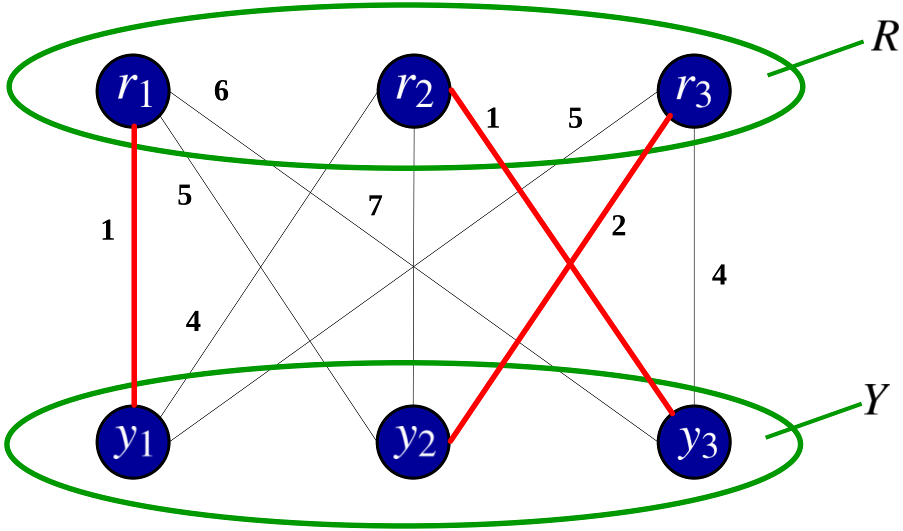


$$\alpha_1 = 3$$

$$\{(r_1, y_1), (r_2, y_3), (r_3, y_2)\}$$

стоимость назначения $1+1+2=4$

Совершенное паросочетание – это наибольшее паросочетание графа с минимальным суммарным весом его ребер.



$$\alpha_1 = 3$$

$$\{(r_1, y_1), (r_2, y_3), (r_3, y_2)\}$$

стоимость назначения $1 + 1 + 2 = 4$

Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ● Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

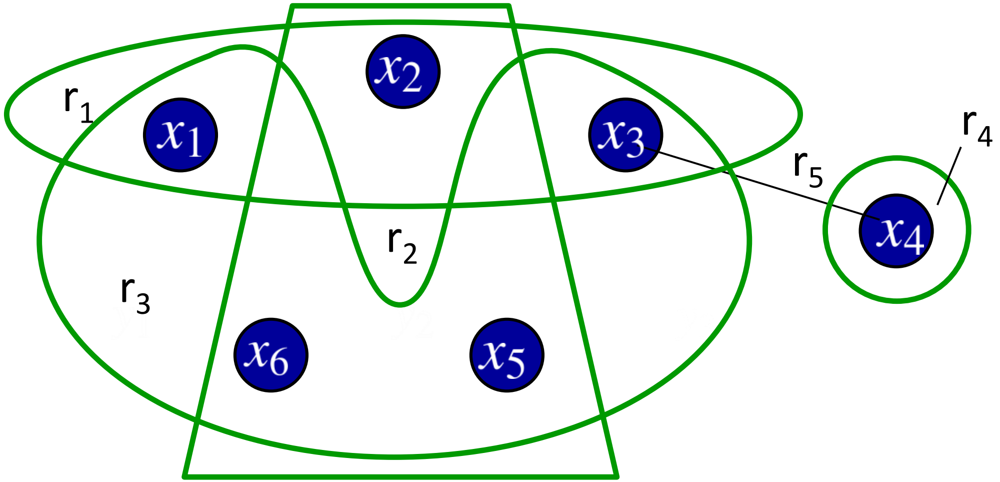
Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, X \neq \emptyset$

Гиперграф H(X, R) – это:

- графовая модель, задающая N-арное отношение на множестве $X \cup X * X \cup X * X * X \cup \ldots \cup X * X * \ldots * X$;
- отношение инцидентности на множествах X и R, где X – множество вершин, а R – множество его гипердуг (гиперрёбер), причём $\forall r \in R: r \subset X$.



n = 6, m = 5

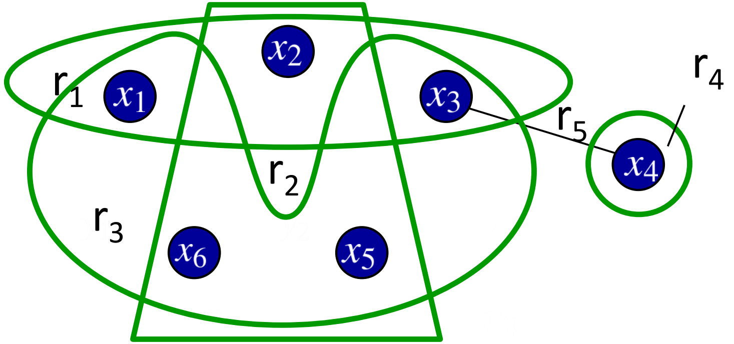
$r_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$

$r_2 = \{x_2, x_5, x_6\}$

$r_3 = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$

$r_4 = \{x_4\}$

$r_5 = \{x_3, x_4\}$



n = 6, m = 5

$r_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$

$r_2 = \{x_2, x_5, x_6\}$

$r_3 = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$

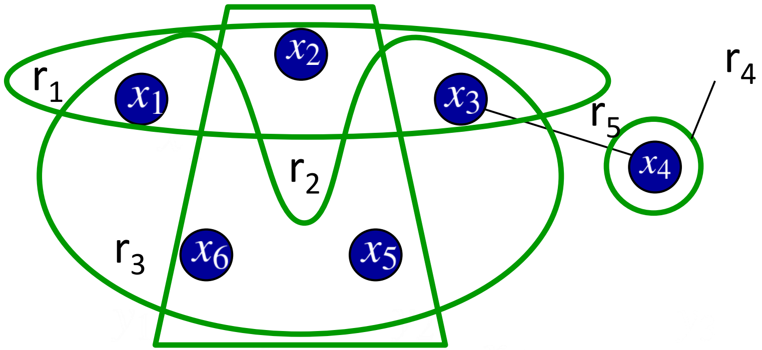
$r_4 = \{x_4\}$

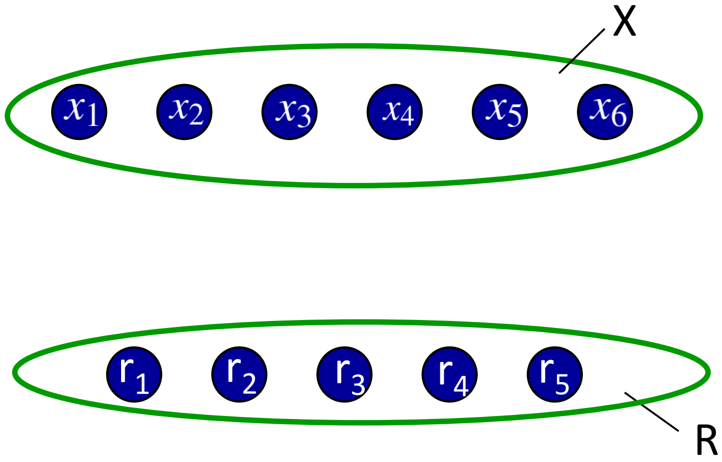
$r_5 = \{x_3, x_4\}$

Примечание.

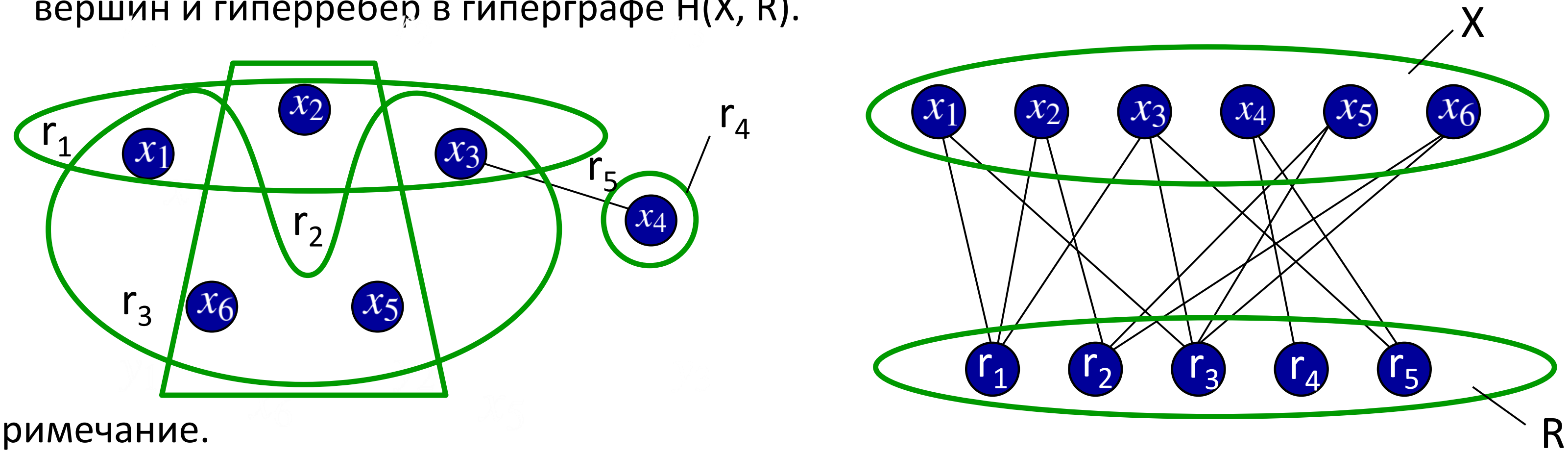
1. Количество вершин n и количество гиперрёбер m определяют **порядок гиперграфа** (аналог размерности бинарного графа).
2. Равные множества в R называются **кратными гиперрёбрами.**
3. Количество вершин, инцидентных гиперребру $r \in R$, определяет **степень этого гиперребра –** ρ(r), причем $\rho(r) \geq 1$.
4. **Смежность** в гиперграфах. Два гиперграфа r’ и r’’ называются смежными, если выполняется условие $r' \cap r'' \neq \emptyset$.
5. **Однородность** гиперграфов. Если в гиперграфе H(X, R) выполняется условие $\forall r \in R$: ρ(r) = h, то такой гиперграф называется h-однородным или h-униформным.
6. Бинарный граф является частным случаем гиперграфа, причем однородным с h = 2.

Кёнигово представление гиперграфа H(X, R) – это двудольный граф K(H) = G(X’, U), где X’ = X ∪ R – множество вершин, а U – множество рёбер, моделирующих инцидентность вершин и гиперрёбер в гиперграфе H(X, R).





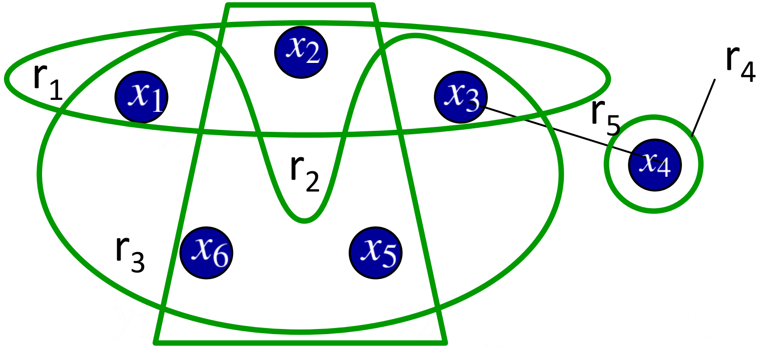
Кёнигово представление гиперграфа H(X, R) – это двудольный граф K(H) = G(X’, U), где X’ = X ∪ R – множество вершин, а U – множество рёбер, моделирующих инцидентность вершин и гиперрёбер в гиперграфе H(X, R).

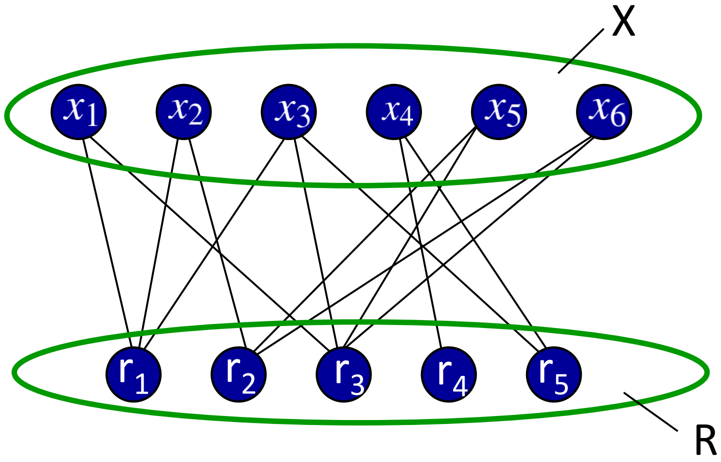


Примечание.

1. В Кёниговом представлении гиперграфа H(X, R) количество вершин – n + m, а количество бинарных рёбер - $\sum_{\forall r \in R} \rho(r)$.
2. Кёнигово представление гиперграфа H(X, R) адекватно отображает свойства этой модели (инцидентность вершин и гиперрёбер).
3. Кёнигово представление гиперграфа H(X, R) позволяет использовать для гиперграфов все известные методы и алгоритмы, разработанные для бинарных графов.

Кёнигово представление гиперграфа H(X, R) – это двудольный граф K(H) = G(X’, U), где X’ = X ∪ R – множество вершин, а U – множество рёбер, моделирующих инцидентность вершин и гиперрёбер в гиперграфе H(X, R).





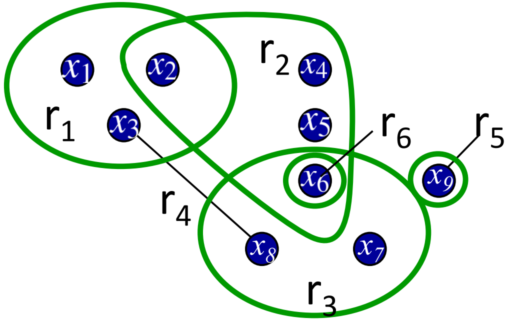
Примечание.

4. Гиперграф можно представить в виде ненулевой подматрицы смежности $||M||_{nxn}$ или ненулевой подматрицы связности $||A||_{nxn}$ его Кёнигова представления.

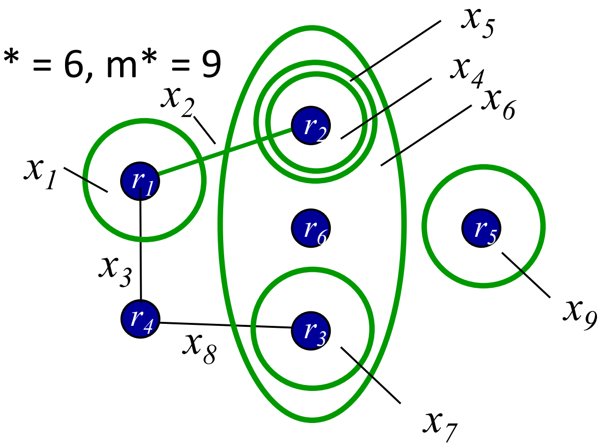
Двойственность гиперграфов

Пусть имеется n, m-гиперграф H(X, R) без изолированных вершин. Тогда новый m,n-гиперграф H*(X*, R*) называется двойственным к гиперграфу H(X, R), если в нем X* = R, R* - множество гиперрёбер, каждое гиперребро r^*_i моделирует инцидентность гиперрёбер в исходном гиперграфе H(X, R) вершине x_i .

H: n = 9, m = 6



H*: n* = 6, m* = 9



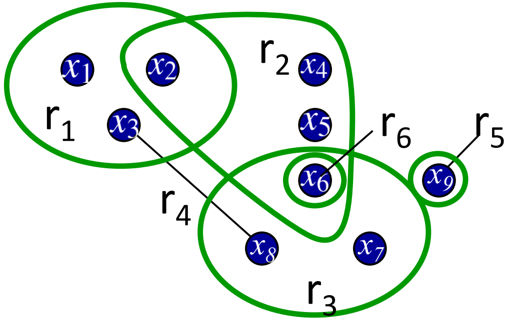
$X^* = \{r_1, r_2, r_3 , r_4, r_5 , r_6\}$

$r^*_1 (x_1) = \{r_1\}, r^*_2(x_2) = \{r_1, r_2\}, \ldots$

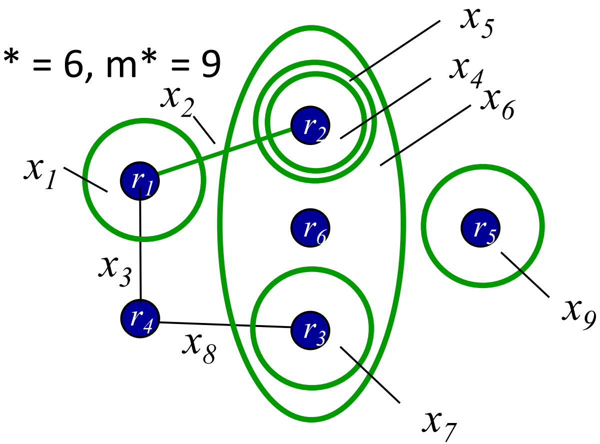
Двойственность гиперграфов

Пусть имеется n, m-гиперграф H(X, R) без изолированных вершин. Тогда новый m,n-гиперграф H*(X*, R*) называется двойственным к гиперграфу H(X, R), если в нем X* = R, R* - множество гиперрёбер, каждое гиперребро r^*_i моделирует инцидентность гиперрёбер в исходном гиперграфе H(X, R) вершине x_i .

H: n = 9, m = 6



H*: n* = 6, m* = 9

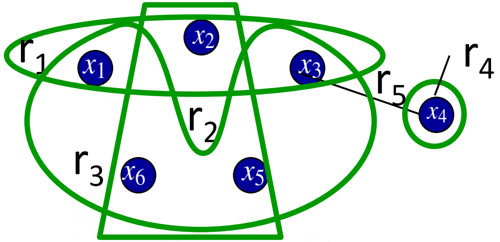


Примечание.

1. Если гиперграф H(X, R) не имеет изолированных вершин, то (H*)* = H.
2. Гиперграф H(X, R) без изолированных вершин и двойственный к нему гиперграф H*(X*, R*) имеют общее Кёнигово представление, т.е. К(H) = К(H*).

Цепью в гиперграфе H(X, R) с длиной l > 0 называется такая упорядоченная последовательность $\mu = (x_1, r_1, \ldots, r_l, x_{l+1})$, в которой:

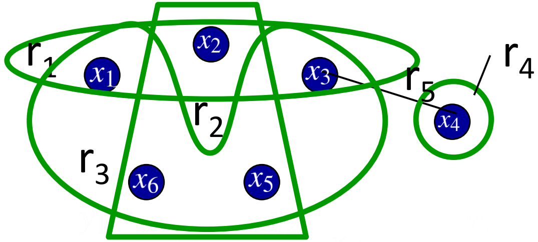
1. Все вершины $x_1, \ldots, x_{l+1}$ различны между собой,
2. Все гиперрёбра $r_1, \ldots, r_l$ различны между собой,
3. Каждое гиперребро r_i инцидентно вершинам x_i и x_{i+1}.



Пример цепи (l = 3):

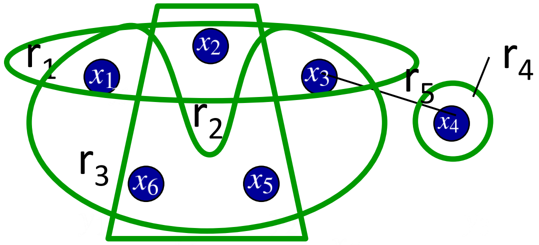
$$\mu_1 = (x_2, r_2, x_5, r_3, x_3, r_5, x_4)$$

Цикл в гиперграфе H(X, R) – это замкнутая цепь, т.е. цепь, в которой $x_1 = x_{l+1}$.



Пример цикла (l = 3):

$$\mu_2 = (x_2, r_2, x_5, r_3, x_3, r_1, x_2)$$



$$\mu_1 = (x_2, r_2, x_5, r_3, x_3, r_5, x_4)$$

$$\mu_2 = (x_2, r_2, x_5, r_3, x_3, r_1, x_2)$$

Примечание.

1. Понятие цепи и цикла в гиперграфе соответствует понятию простой цепи и простого цикла в неографе.
2. Поиск цепей и циклов в гиперграфе сводится к поиску простых цепей и простых циклов в его Кёниговом представлении.
3. Длина цепи (цикла) в гиперграфе определяются количеством гиперрёбер в последовательности.
4. Минимальная длина цикла в гиперграфе – 2 (как минимум два гиперребра).
5. Понятие связности гиперграфа аналогично понятию связности графа: в связном гиперграфе любая пара вершин может быть соединена хотя бы одной цепью.
6. Количество компонент связности гиперграфа совпадает с количеством компонент связности его Кёнигова представления, т.е. k(H) = k(K).

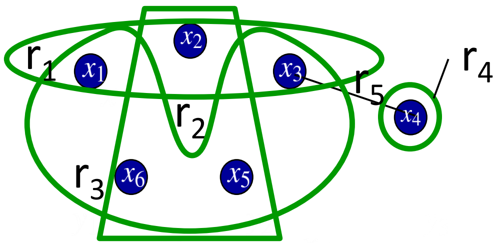
Цикломатический ранг гиперграфа H(X, R) - σ (H) определяется цикломатическим числом его Кёнигова представления K(H).

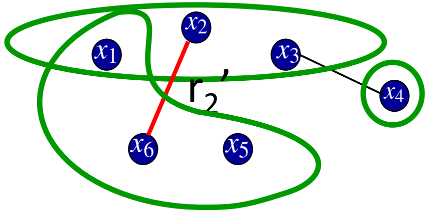
Известно, что для любого бинарного графа σ (G) = m(G) – n(G) + k(G).

Для графа К(H): n(K) = n + m, m(K) = $\sum_{\forall r \in R} \rho(r)$, k(H) = k(K).

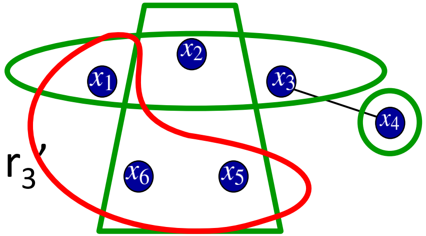
Тогда σ (H) = σ (K) = $\sum_{\forall r \in R} \rho(r) - (n+m) + k(K)$.

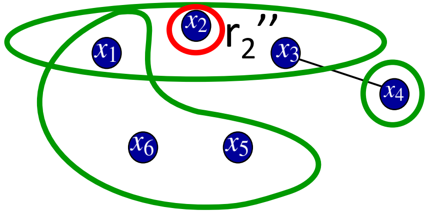
σ(H) = [3+3+4+1+2]-(6+5)+1=3.

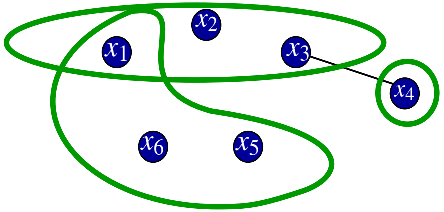




1. $r_3' = r_3 \backslash \{x_3\}$
2. $r_2' = r_2 \backslash \{x_5\}$
3. $r_2'' = r_2' \backslash \{x_6\}$







Цикломатический ранг гиперграфа H(X, R) - σ (H) определяется цикломатическим числом его Кёнигова представления K(H).

Известно, что для любого бинарного графа σ (G) = m(G) – n(G) + k(G).

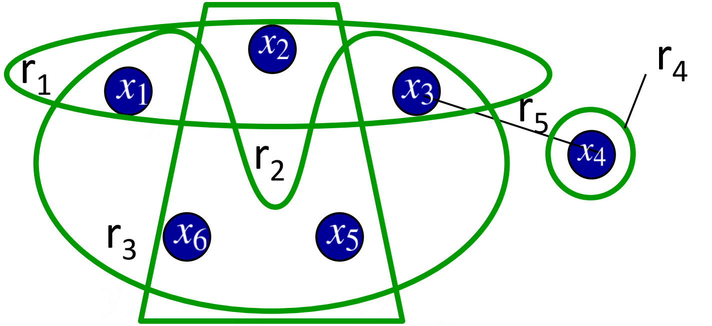
Для графа K(H): n(K) = n + m, m(K) = $\sum_{\forall r \in R} \rho(r)$, k(H) = k(K).

Тогда σ (H) = σ (K) = $\sum_{\forall r \in R} \rho(r) - (n+m) + k(K)$.

Примечание.

1. Цикломатический ранг гиперграфа указывает на то, сколько рёбер надо удалить в его Кёниговом представлении, чтобы превратить его в остовное дерево (остовный лес).
2. Удаление каждого бинарного ребра (x, r) в Кёниговом представлении гиперграфа приводит к удалению вершины x из гиперребра r.

Подгиперграфом, порожденным в гиперграфе H(X, R) непустым множеством $X' \subset X$, называется новый гиперграф H'(X', R'), в котором $R'=\{r' : r' = r \cap X' ; r' \neq \varnothing \}$.



Пусть $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Тогда:

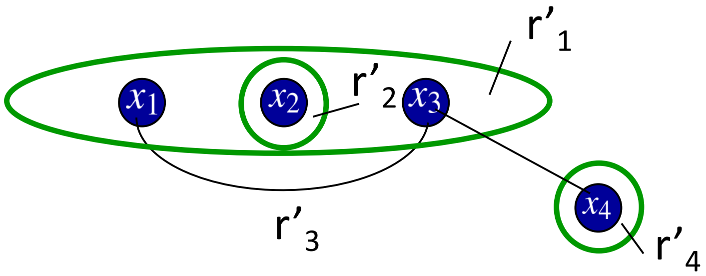
$r_1' = \{x_1, x_2, x_3\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$r_2' = \{x_2, x_5, x_6\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_2\}$

$r_3' = \{x_1, x_3, x_5, x_6\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_3\}$

$r_4' = \{x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_4\}$

$r_5' = \{x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_3, x_4\}$



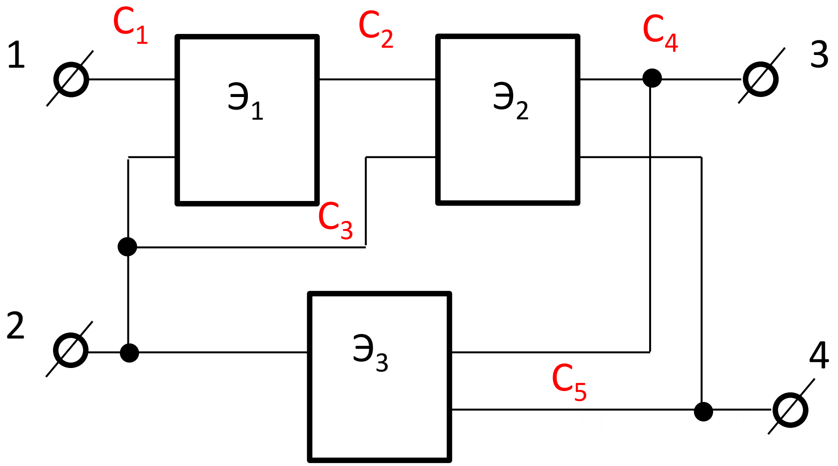
Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов

Двудольные графы

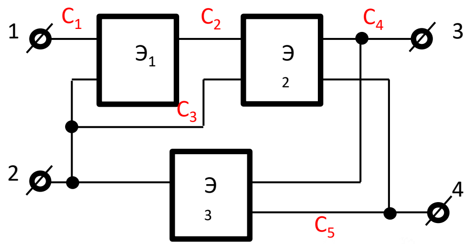
- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- Моделирование сложных объектов

Моделирование электрической принципиальной схемы (ЭПС) с помощью графов

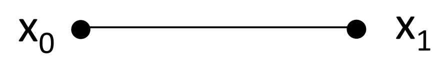
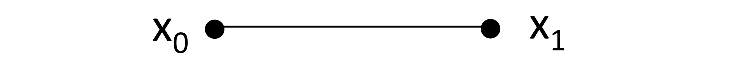
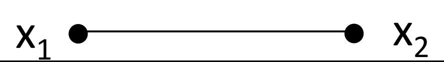
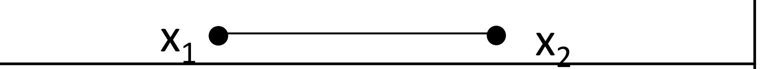
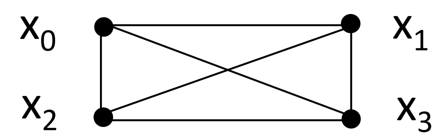
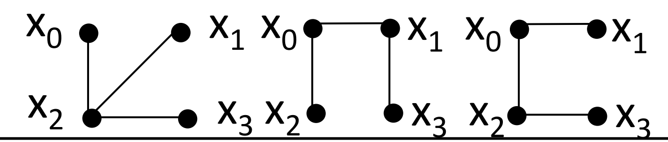
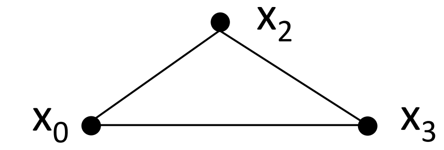
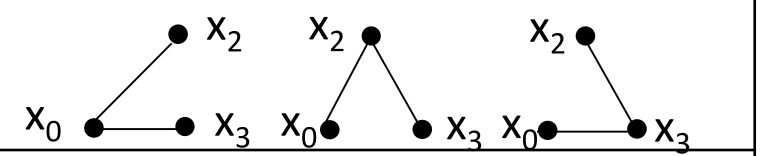
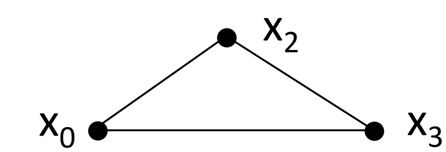
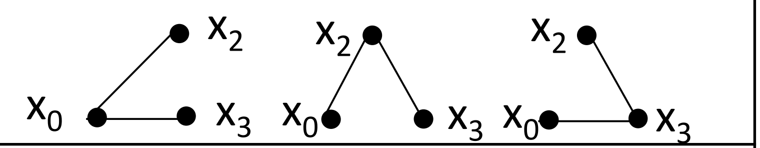
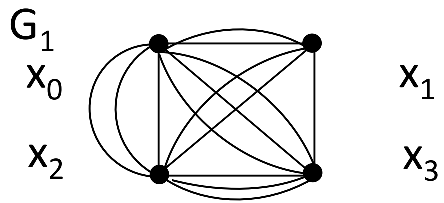
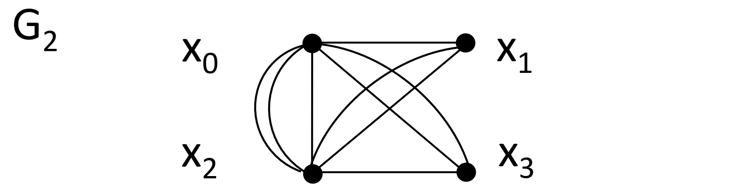


Модели элементов ЭПС

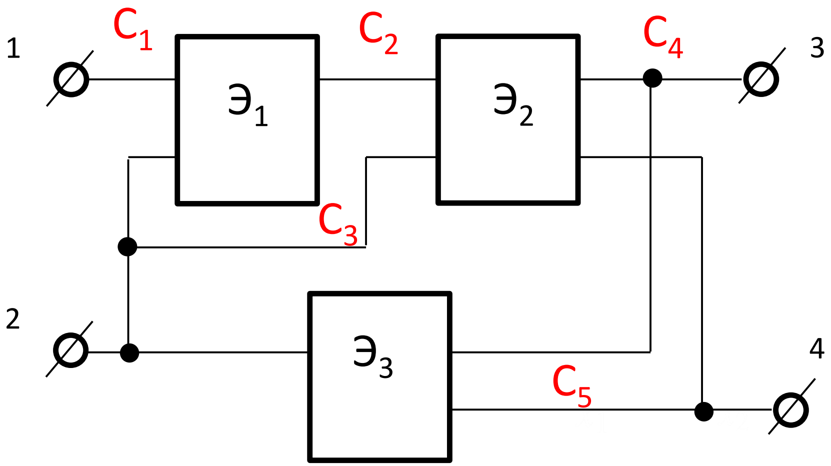
Элемент	**Вершина**
$Э_0$	x_0
$Э_1$	x_1
$Э_2$	x_2
$Э_3$	x_3



Элемент	Вершина
$Э_0$	x_0
$Э_1$	x_1
$Э_2$	x_2
$Э_3$	x_3

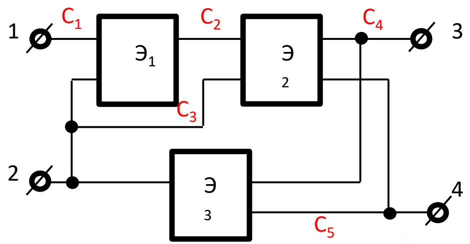
Объект	Модели объекта	
	Полный граф	Дерево
Цепь C_1		
Цепь C_2		
Цепь C_3		 и т.д.
Цепь C_4		
Цепь C_5		
ЭПС		

Моделирование электрической принципиальной схемы (ЭПС) с помощью гиперграфов

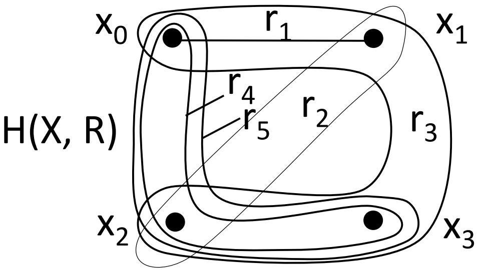
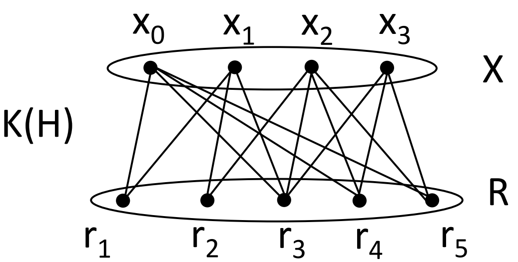


Модели элементов ЭПС

Элемент	**Вершина**
$Э_0$	x_0
$Э_1$	x_1
$Э_2$	x_2
$Э_3$	x_3



Элемент	Вершина
$Э_0$	x_0
$Э_1$	x_1
$Э_2$	x_2
$Э_3$	x_3

Объект	Модель объекта
Цепь C_1	$r_1 = \{x_0,x_1\}$
Цепь C_2	$r_2 = \{x_1,x_2\}$
Цепь C_3	$r_3 = \{x_0,x_1,x_2,x_3\}$
Цепь C_4	$r_4 = \{x_0,x_2,x_3\}$
Цепь C_5	$r_5 = \{x_0,x_2,x_3\}$
ЭПС	 

Двудольные графы

- ✓ Понятие двудольного графа (графа Кёнига)
- ✓ Теорема Кёнига (критерий двудольности графа)
- ✓ Задача линейного назначения,
  понятие совершенного паросочетания графа
- ✓ Венгерский алгоритм решения задачи линейного
  назначения
- ✓ Кёнигово представление гиперграфа, понятие гиперграфа
- ✓ Моделирование сложных объектов