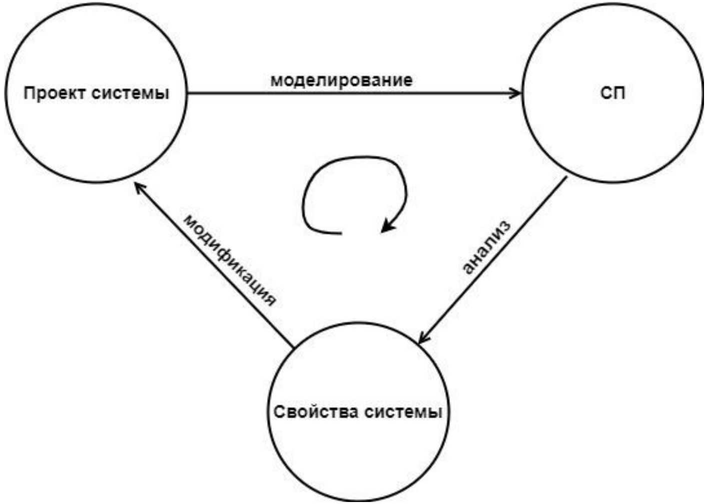
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Цикл лекций по теме «Сети Петри»
Лекция №1

автор – д.т.н., профессор Лисицына Л.С.

Введение

Сеть Петри (СП) – это математическая модель, отображающая структуру и динамику дискретных систем и используемая для исследования поведения системы с целью получения ее новых характеристик (свойств).
СП предложил впервые в 1962 году немецкий математик **Карл Петри**.

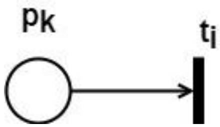


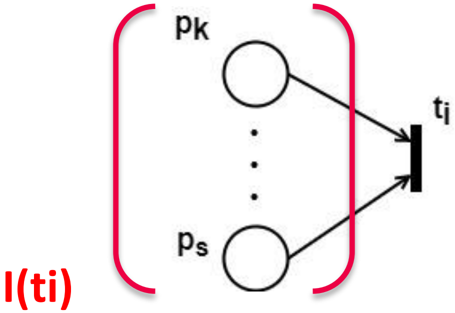
Содержание

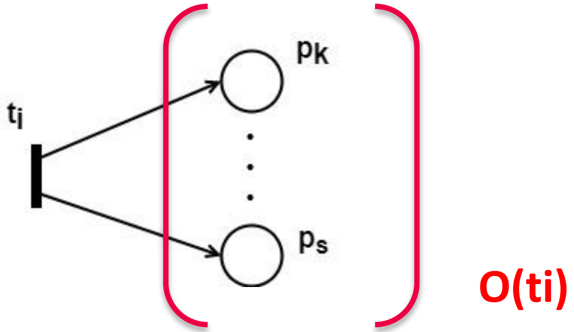
Понятие и структура сети Петри

По структуре СП представляет собой **ориентированный двудольный граф**.

Система	СП	Обозначение
Событие	Переход	$T = \{t_1, ..., t_m\}$
Условие	Позиция	$P = \{p_1, ..., p_n\}$
Предусловие	Входная функция	$I = \bigcup_{i=1}^{m} I(t_i)$
Постусловие	Выходная функция	$O = \bigcup_{i=1}^{m} O(t_i)$



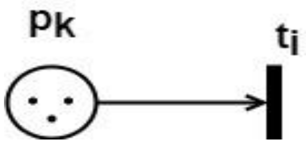




Понятие и структура сети Петри

Сеть Петри – это четверка множеств <T, P, I, O >, задающая причинно-следственные связи между событиями и условиями в моделируемой системе.

Ёмкость k-ой позиции в СП – это целое неотрицательное число $\mu(p_k)$, которое характеризует выполнимость k-го условия в системе в данный момент времени.



$$\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

Маркировка (разметка) СП – это процедура определения емкостей позиций в модели.

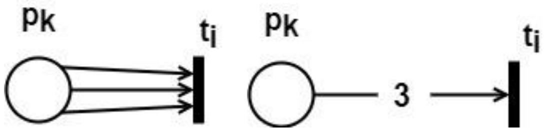
Начальная маркировка – это маркировка СП до начала исследования модели (в начальный момент времени).

$$C = < T, P, I, O, \vec{\mu}_0 >$$

Содержание

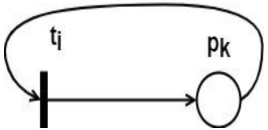
Классификация СП по структуре

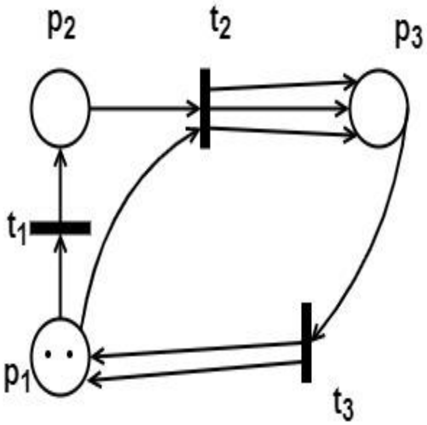
В СП допускается наличие **кратных дуг**. Кратность является атрибутом дуги; они определяют следующие важные характеристики СП:

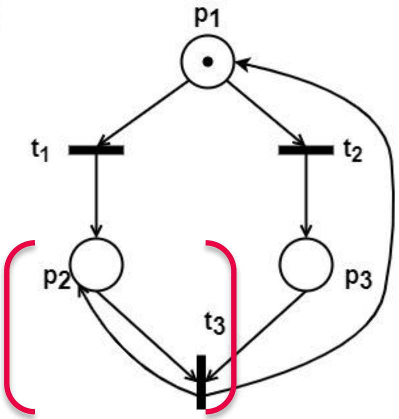


- $\#(p_k, I(t_i))$ - кратность позиции p_k на входе перехода t_i.
- $\#(p_k, O(t_i))$ - кратность позиции p_k на выходе перехода t_i.

Если некоторая позиция p_k является одновременно и входной, и выходной для перехода t_i, то такой элемент структуры в СП называется **петлей.**



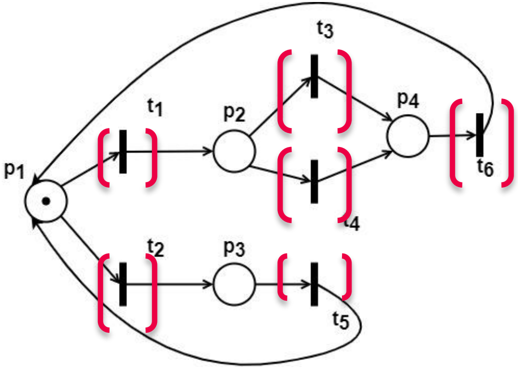




Чистая сеть Петри – это СП без петель**.**

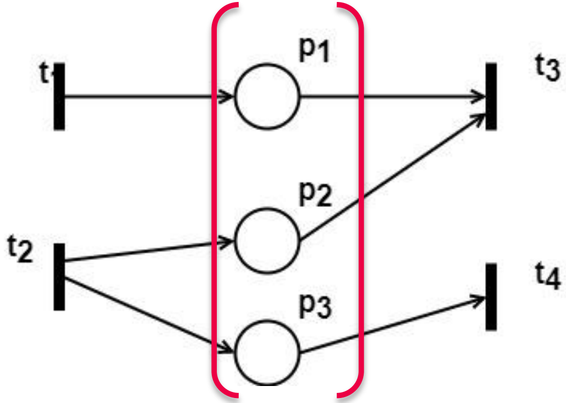
Ординарная сеть Петри – это СП без кратных дуг.

Классификация СП по структуре



Автоматная сеть Петри – это ординарная СП, в которой *каждый переход* имеет ровно одну входную и ровно одну выходную позицию.

Синхрограф (маркированный граф) – это ординарная СП, в которой *каждая позиция* является входной и (или) выходной позицией только для одного перехода.



Пример №1 – «ГПМ в составе АСУТП»

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

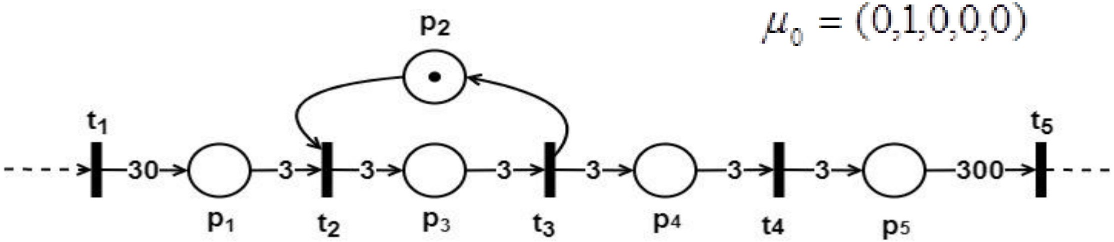
Гипкий производственный модуль (ГПМ) включает в себя обрабатывающий центр (ОЦ), который обрабатывает одновременно 3 заготовки из магазина (30 заготовок), поступившего со склада. Обработанные заготовки (детали) поступают в контейнер (300 деталей), который после заполнения отправляется на склад.

№	Событие в системе	Переход в СП
1	Магазин поступил в ГПМ со склада	t1
2	ОЦ начал обработку заготовки	t2
3	ОЦ закончил обработку заготовки	t3
4	Деталь поступила в контейнер	t4
5	Контейнер отправлен на склад	t5

№	Условие в системе	Позиция в СП
1	Заготовка ждет обработки	p1
2	ОЦ свободен	p2
3	Заготовка обрабатывается в ОЦ	p3
4	Деталь получена	p4
5	Контейнер полностью заполнен	p5

Переход	$I(t_i)$	$O(t_i)$
t_1	$\{...\}$	$\{p_1\}$
t_2	$\{p_1, p_2\}$	$\{p_3\}$
t_3	$\{p_3\}$	$\{p_2, p_4\}$
t_4	$\{p_4\}$	$\{p_5\}$
t_5	$\{p_5\}$	$\{...\}$

$\vec{\mu}_0 = (0,1,0,0,0)$



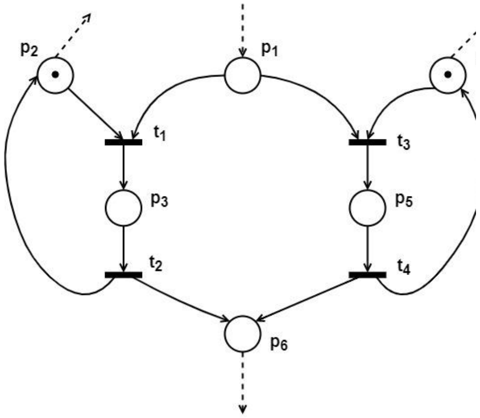
Пример №2 – «Модуль ВС для параллельной обработки заданий»

Модуль вычислительной системы (ВС) включает в себя два вычислительных устройства (ВУ) – ВУ1 и ВУ2, которые могут обрабатывать очередное задание и формируют отчет об обработке.

№	Событие в системе	Переход в СП
1	ВУ1 начало обработку задания	t1
2	ВУ1 закончило обработку задания	t2
3	ВУ2 начало обработку задания	t3
4	ВУ2 закончило обработку задания	t4

	Условие в системе	Позиция в СП
1	Задание поступило на обработку	p1
2	ВУ1 свободно	p2
3	ВУ1 обрабатывает задание	p3
4	ВУ2 свободно	p4
5	ВУ2 обрабатывает задание	p5
6	Сформирован отчет об обработке задания	p6

$\vec{\mu}_0 = (0,1,0,1,0,0)$



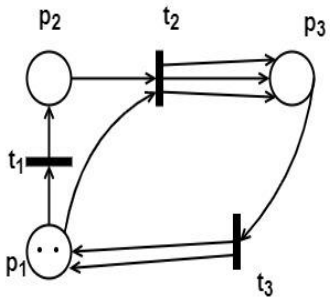
Переход	$I(t_i)$	$O(t_i)$
t_1	$\{p_1, p_2\}$	$\{p_3\}$
t_2	$\{p_3\}$	$\{p_2, p_6\}$
t_3	$\{p_1, p_4\}$	$\{p_5\}$
t_4	$\{p_5\}$	$\{p_4, p_6\}$

Содержание

Алгоритм преобразования СП в ординарную

1. Для всех позиций $p_k \in P$ исходной СП подсчитывается следующая характеристика: $n(p_k) = \max\limits_{i=1}^{m} (\#(p_k, I(t_i)) + \#(p_k, O(t_i)))$.

Пример



$$n(p_1) = \max_{i=1}^{3}(\#(p_1, I(t_i)) + \#(p_1, O(t_i))) = \max(1+0, 1+0, 0+2) = 2$$

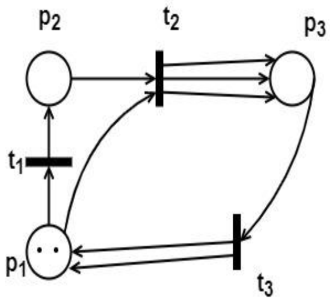
$$n(p_2) = \max_{i=1}^{3}(\#(p_2, I(t_i)) + \#(p_2, O(t_i))) = \max(0+1, 1+0, 0+0) = 1$$

$$n(p_3) = \max_{i=1}^{3}(\#(p_3, I(t_i)) + \#(p_3, O(t_i))) = \max(0+0, 0+3, 1+0) = 3$$

Алгоритм преобразования СП в ординарную

2. Если $n(p_k) > 1$, то для этой позиции определяется множество дополнительных позиций $\{p_{k1},..., p_{kn(p_k)}\}$.

Пример



Т.к. $n(p_1) = 2$, то определим для нее множество дополнительных позиций $\{p_{11}, p_{12}\}$.

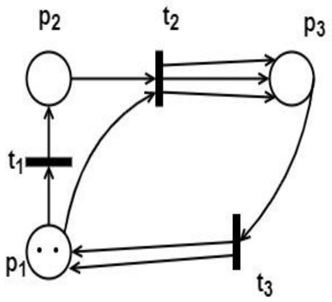
Т.к. $n(p_3) = 3$, то определим для нее множество дополнительных позиций $\{p_{31}, p_{32}, p_{33}\}$.

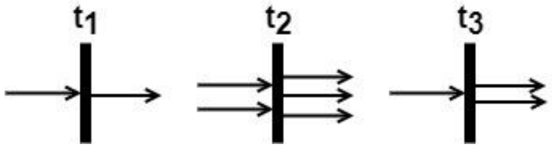
Алгоритм преобразования СП в ординарную

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

3. Переходы исходной СП $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ объявляются нормальными переходами.

Пример





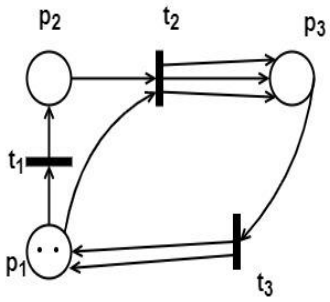
ITsMOre than a UNIVERSITY

Алгоритм преобразования СП в ординарную

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

4. Если $n(p_k) > 1$, то для этой позиции определяется множество кольцевых переходов $\{r_{k1}, \ldots, r_{kn(p_k)}\}$.

Пример



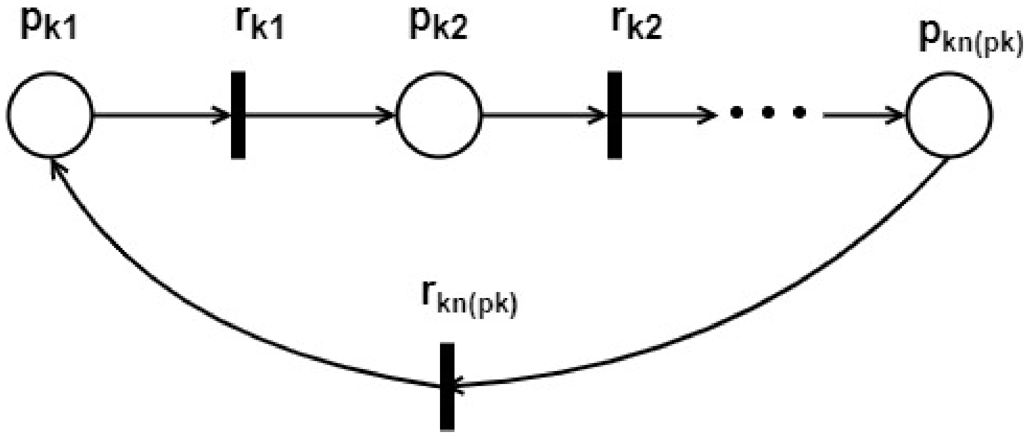
Т.к. $n(p_1) = 2$, то определим для нее множество кольцевых переходов $\{r_{11}, r_{12}\}$.

Т.к. $n(p_3) = 3$, то определим для нее множество кольцевых переходов $\{r_{31}, r_{32}, r_{33}\}$.

ITsMOre than a UNIVERSITY

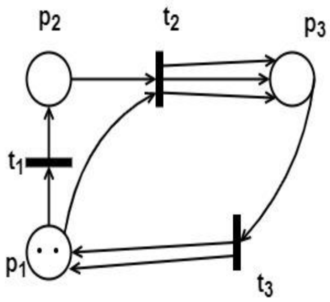
Алгоритм преобразования СП в ординарную

5. Если $n(p_k) > 1$, то для этой позиции строится кольцевая подсеть на множествах $\{p_{k1}, \ldots, p_{kn(p_k)}\}$ и $\{r_{k1}, \ldots, r_{kn(p_k)}\}$, представляющая собой простой контур, в котором чередуются дополнительные позиции и кольцевые переходы этой позиции. Направление дуг в контуре может быть как по часовой стрелки (см. рисунок ниже), так и против часовой стрелки.



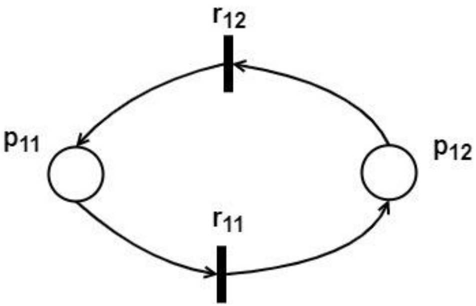
Алгоритм преобразования СП в ординарную

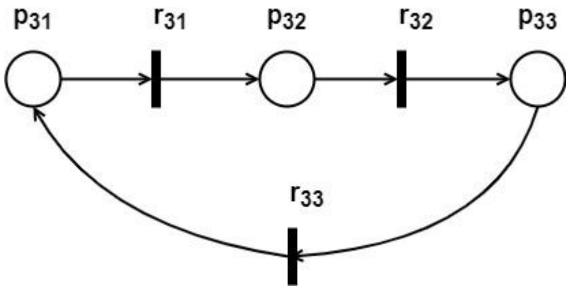
Пример



Т.к. $n(p_1) = 2$, то строим для этой позиции кольцевую подсеть (рис. слева).

Т.к. $n(p_3) = 3$, то строим для этой позиции кольцевую подсеть (рис. справа).





Алгоритм преобразования СП в ординарную

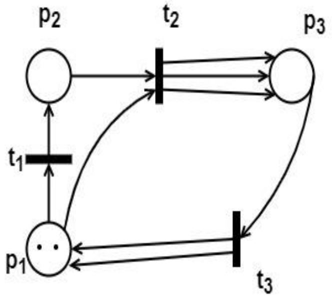
6. Строится новая структура СП, в которой каждая позиция исходной сети с характеристикой $n(p_k) > 1$ заменяется на ее кольцевую подсеть. При этом дуги, соединяющие дополнительные позиции подсети с нормальными переходами, строятся так, чтобы не было кратности.

7. Производится начальная разметка в преобразованной СП по следующему правилу.
   - Если $n(p_k) = 1$, то ёмкость этой позиции сохраняется.
   - Если $n(p_k) > 1$, то все фишки этой позиции переходят в первую по счету дополнительную позицию ее кольцевой подсети, т.е. $\mu(p_{k1}) = \mu(p_k)$, а ёмкости остальных ее дополнительных позиций обнуляются.

Алгоритм преобразования СП в ординарную

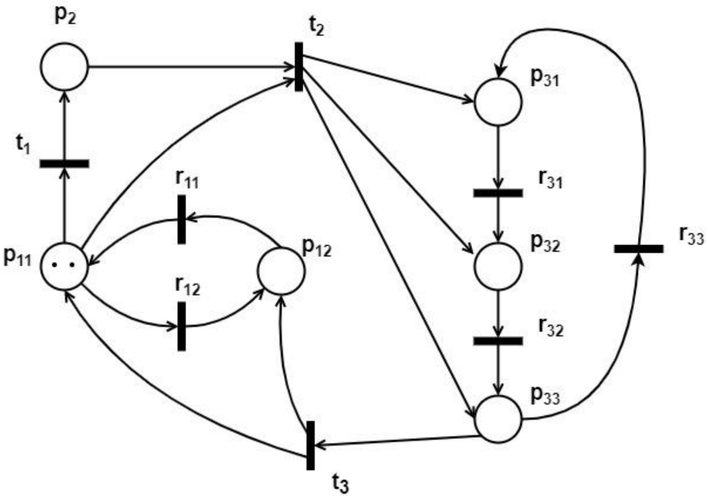
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Пример



$m = 3 \qquad n = 3$

$\vec{\mu}_0 = (2,0,0)$



$m' = 8 \qquad n' = 6$

$\vec{\mu}_0' = (2,0,0,0,0,0)$

$$m' = m + \sum_{k=1}^{n} n(p_k)$$

$$n' = n + \sum_{k=1}^{n} (n(p_k) - 1)$$

ITsMOre than a UNIVERSITY