Глава 5. Определенный интеграл

Задача вычисления определенного интеграла появилась из необходимости вычислять площадь фигур с кривой границей. Вычислим площадь следующей криволинейной трапеции:

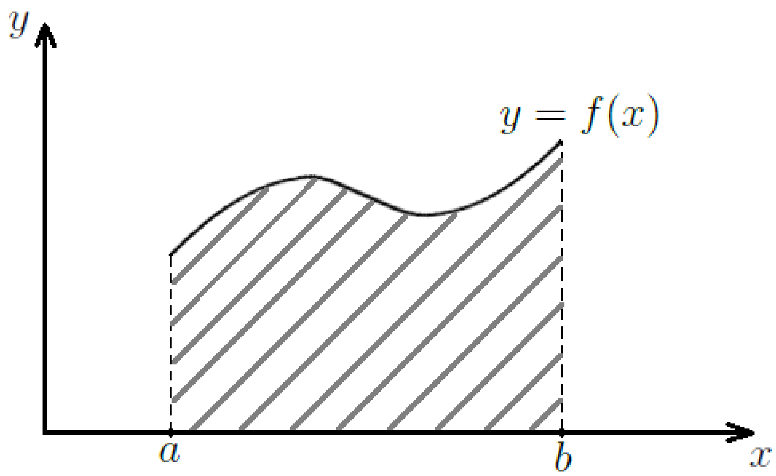

Рис. 1: Криволинейная трапеция

Вычислять площадь такой фигуры традиционными геометрическими методами мы не умеем. Попытаемся свести задачу вычисления площади криволинейной трапеции к вычислению площадей фигур, которые мы умеем вычислять. Для этого разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей. Тогда область разобъется на n полос.

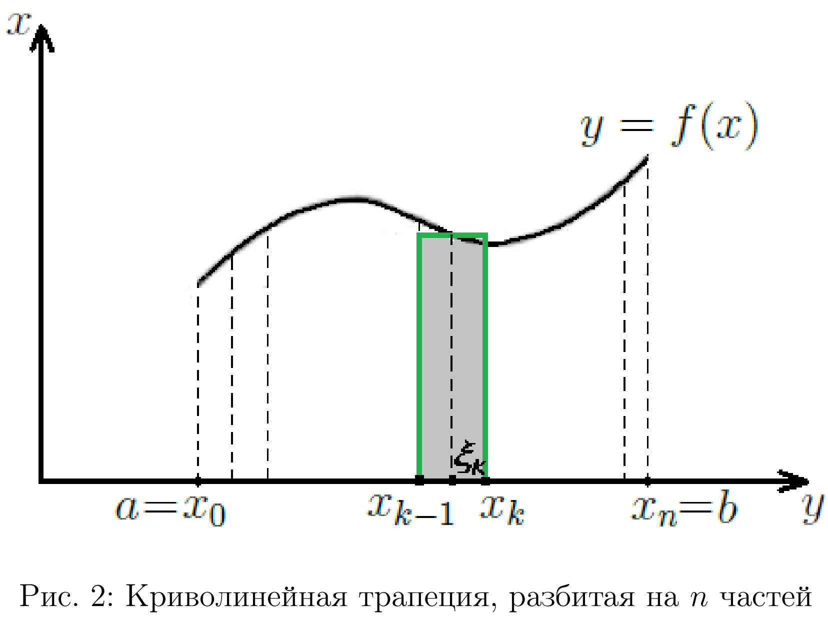

Рис. 2: Криволинейная трапеция, разбитая на n частей

Площадь каждой из полос приближённо равна площади соответствующего прямоугольника. Площадь каждого прямоугольника равна:
$f(\xi_k)\,\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
Тогда площадь криволинейной трапеции можно приближённо заменить на сумму площадей прямоугольников:
$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$
При измельчении разбиения $\left(\max\limits_k |\Delta x_k| \to 0\right)$ сумма площадей прямоугольников будет стремиться к площади криволинейной трапеции:
$S \overset{def}{=} \lim\limits_{\max\limits_k |\Delta x_k| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$

Определение

Если предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_k, то он называется определённым интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_k |\Delta x_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

5.1 Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$.

Пример

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln\left(\ln e^2\right) - \ln(\ln e) =$$

$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

5.1) $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} 0 - \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$5.2)\quad \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{d\left(x^3\right)}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{d\left(x^3\right)}{1+\left(x^3\right)^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3\Big|_0^1 =$$

$$= \ln\left(\ln e^2\right) - \ln(\ln e) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{12}.$$

<u>Решите самостоятельно:</u>

$$5.3)\quad \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx,$$

$$5.4)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi d\varphi.$$

5.2 Свойства определенного интеграла

В основном свойства определенного интеграла сходны со свойствами неопределенного. Выделим уникальное свойство.

Аддитивность

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

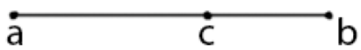

Рис. 3: Аддитивность интеграла

5.3 Замена переменной в определенном интеграле

Сделаем замену $x=\varphi(t)$ в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где t_1 и t_2 находятся из условий: $a=\varphi\left(t_1\right),\quad b=\varphi\left(t_2\right).$

Пример

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

Сделаем подстановку: $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$

Тогда $dx = \cos t dt, \quad t_1 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$

В новых переменных интеграл будет иметь следующий вид:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = (-\operatorname{ctg} t - t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 0 + 1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

5.5) $$\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}$$

Сделаем подстановку: $t = \sqrt{x+3} \Rightarrow x + 3 = t^2; \quad x = t^2 - 3$

Тогда $dx = 2tdt, \quad t_1 = \sqrt{-2+3} = 1, \quad t_2 = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}.$

В новых переменных интеграл будет иметь следующий вид:

$$\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{t+t^3} = 2\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t\Big|_{1}^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

5.6) $$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

Сделаем подстановку: $e^x + 1 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{e^x + 1}$

Тогда $e^x = t^2 - 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(t^2 - 1\right); \quad dx = \frac{2t}{t^2-1}dt; \quad t_1 = \sqrt{e^{\ln 3} + 1} =$
$= 2; \quad t_2 = \sqrt{e^{\ln 8} + 1} = 3.$

В новых переменных интеграл будет иметь следующий вид:

$$\int\limits_{2}^{3} \frac{1}{t} \cdot \frac{2t \cdot dt}{t^2 - 1} = 2\int\limits_{2}^{3} \frac{dt}{t^2 - 1} = -2\int\limits_{2}^{3} \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$= (-2) \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \Bigg|_2^3 = -\ln 2 + \ln 3 = \ln \frac{3}{2}.$$

5.4 Интегрирование по частям

$$\int\limits_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Пример

$$\int\limits_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - x \Big|_1^e = 1.$$

$$\Bigg/ \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ v = x & dv = dx \end{matrix} \Bigg/$$

5.7) $$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 t} = \Bigg/ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ v = \operatorname{tg} x & dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{matrix} \Bigg/ = x \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{18} \cdot \pi + \ln |\cos x| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{18} \cdot \pi + \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{18} \cdot \pi + \ln \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{18} \cdot \pi - \frac{1}{2} \ln 3.$$

<u>Решите самостоятельно:</u>

5.8) $$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} \quad \left(\text{Подстановка: } e^x + 1 = t^2\right)$$

5.9) $$\int\limits_0^1 (x \cdot \operatorname{arctg} x) dx$$

5.5 Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

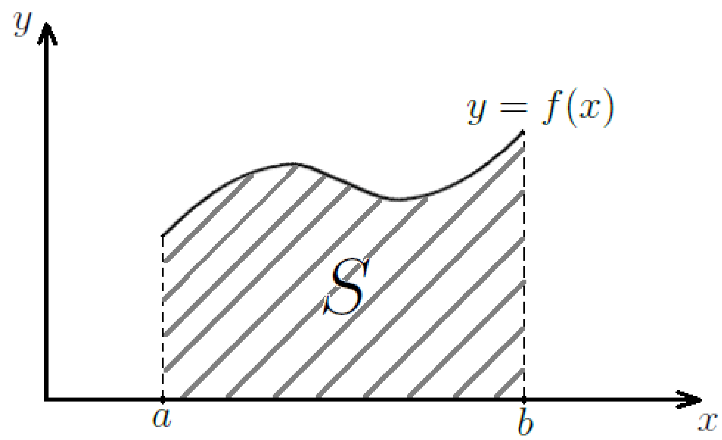

Рис. 4: Криволинейная трапеция

Площадь такой криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

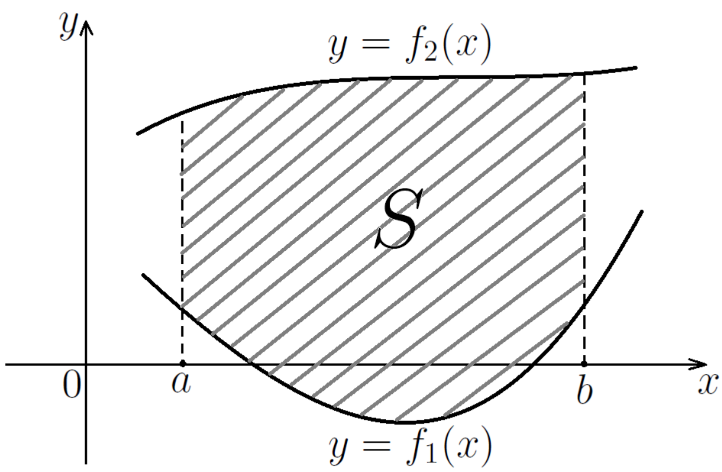

Рис. 5: Фигура, ограниченная графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)dx$$

5.9) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$y = \ln(x+2),\ y = 2\ln x,\ y = 0.$

Есть 2 способа решения данной задачи: классический и через переход к обратным функциям.

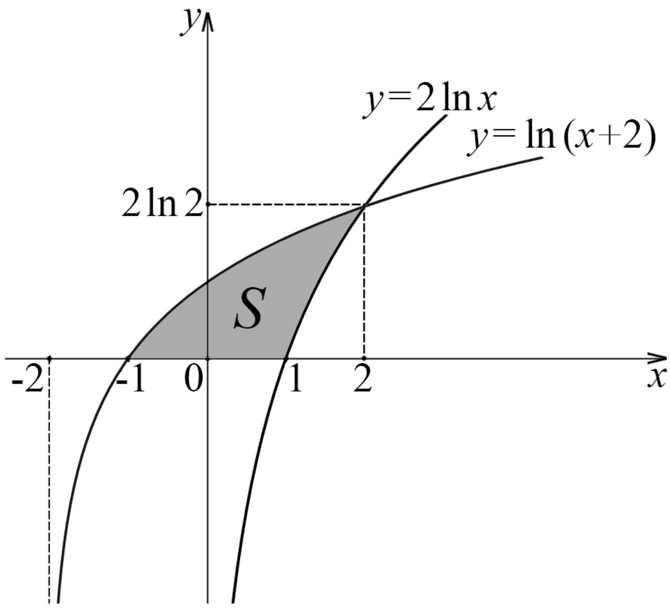

Рис. 6: Рисунок к заданию 5.9 (1 способ)

<u>1 способ.</u> Найдем координаты точки пересечения графиков функций $y = \ln(x+2)$ и $y = 2\ln x$:

$$2\ln x = \ln(x+2) \Leftrightarrow e^{2\ln x} = e^{\ln(x+2)} \Leftrightarrow \left(e^{\ln x}\right)^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 = x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \text{ – точка пересечения графиков} \end{array}\right.$$

$x = 2$ – точка пересечения графиков.

$$S = \int\limits_{-1}^{2} (\ln(x+2) - 0)dx - \int\limits_{1}^{2} (2\ln x - 0)dx = \Big/ \text{Замена: } y = x+2,\ dy = dx \Big/$$

$$= \int\limits_{1}^{4} \ln y dy - 2\int\limits_{1}^{2} \ln x dx = \Bigg/ \begin{array}{ll} u = \ln y & du = \frac{1}{y}dy \\ v = y & dv = dy \end{array} \Bigg/ = y\ln y\Big|_1^4 - \int\limits_{1}^{4} y \cdot \frac{1}{y}dy -$$

$$-2\left(x\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_{1}^{2} x \cdot \frac{1}{x}dx\right) = 4\ln 4 - (4-1) - 2(2\ln 2 - (2-1)) =$$

$= 8\ln 2 - 3 - 4\ln 2 + 2 = 4\ln 2 - 1$

<u>2 способ.</u>

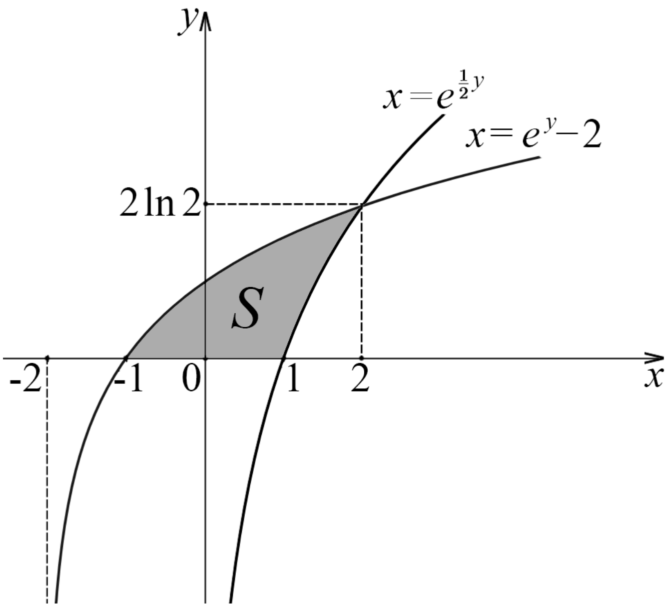

Рис. 7: Рисунок к заданию 5.9 (2 способ)

Перейдем к обратным функциям:
$y = 2\ln x \Leftrightarrow e^y = e^{2\ln x} \Leftrightarrow e^y = \left(e^{\ln x}\right)^2 \Leftrightarrow e^y = x^2 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}y}$
После извлечения корня берем только положительные x, так как область определения $\ln x : x > 0$.

$y = \ln(x+2) \Leftrightarrow e^y = x + 2 \Leftrightarrow x = e^y - 2$

$$S = \int\limits_0^{2\ln 2} \left(e^{\frac{1}{2}y} - (e^y - 2)\right) dy = 2\int\limits_0^{2\ln 2} e^{\frac{1}{2}y} d\left(\frac{1}{2}y\right) - \int\limits_0^{2\ln 2} (e^y - 2)\, dy =$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}y}\Big|_0^{2\ln 2} - e^y\Big|_0^{2\ln 2} + 2y\Big|_0^{2\ln 2} = 4 - 2 - (4 - 1) + 4\ln 2 = 4\ln 2 - 1$$

5.10) <u>Решите самостоятельно:</u> найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{27}{x^2+9}$, $y = \frac{x^2}{6}$.