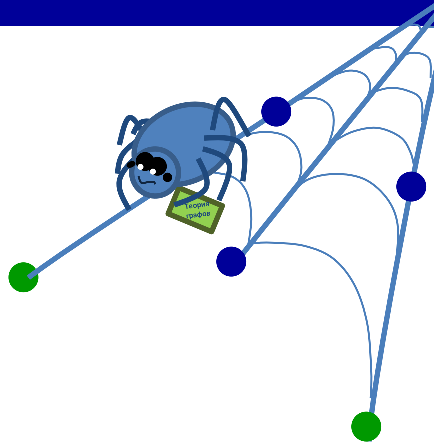


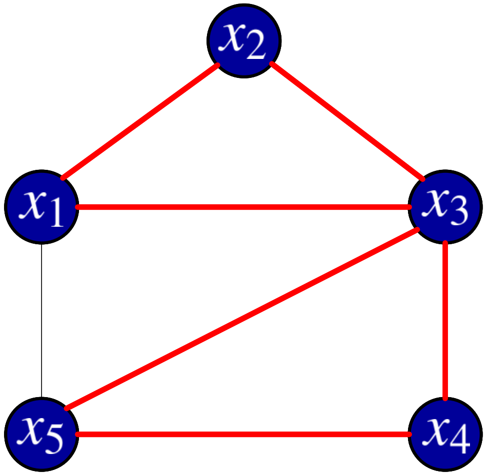
Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

Циклы в графах

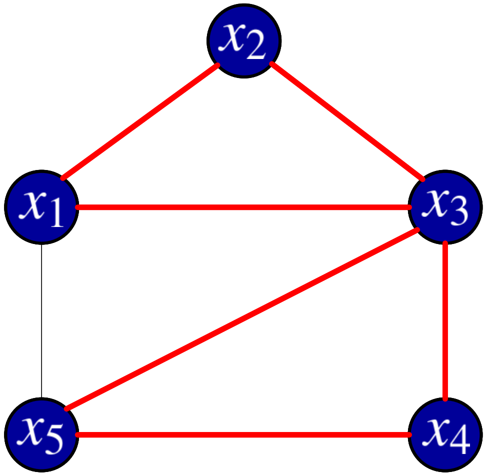
- Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

Цикл – замкнутая цепь в неографе, т.е. цепь, в которую добавлено ребро, инцидентное вершинам начала и конца цепи. Длина цикла l определяется количеством ребер в цикле, причем $l \geq 3$.



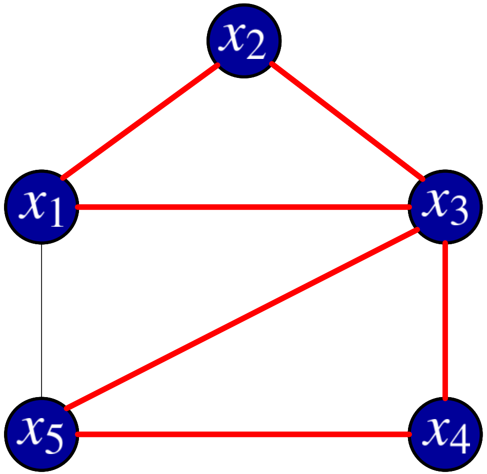
$G(X,U)$

Цикл – замкнутая цепь в неографе, т.е. цепь, в которую добавлено ребро, инцидентное вершинам начала и конца цепи. Длина цикла l определяется количеством ребер в цикле, причем $l \geq 3$.



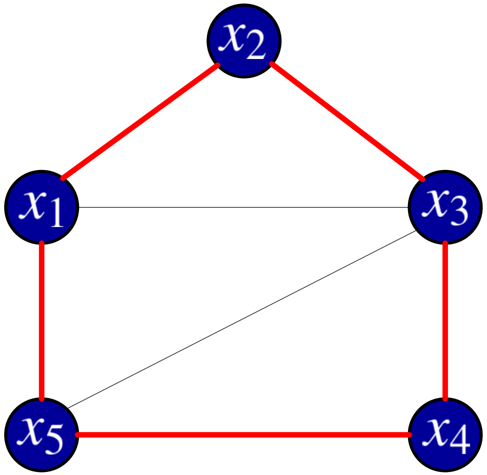
$$\mu_1 = (x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_4)$$

Цикл – замкнутая цепь в неографе, т.е. цепь, в которую добавлено ребро, инцидентное вершинам начала и конца цепи. Длина цикла l определяется количеством ребер в цикле, причем $l \geq 3$.



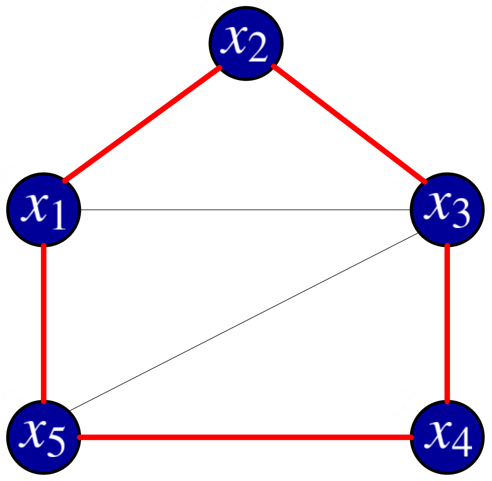
$$c_1 = (x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_4, x_3),\ l_{c_1} = 6.$$

Простой цикл – замкнутая простая цепь в неографе, т.е. простая цепь, в которую добавлено ребро, инцидентное вершинам начала и конца цепи.



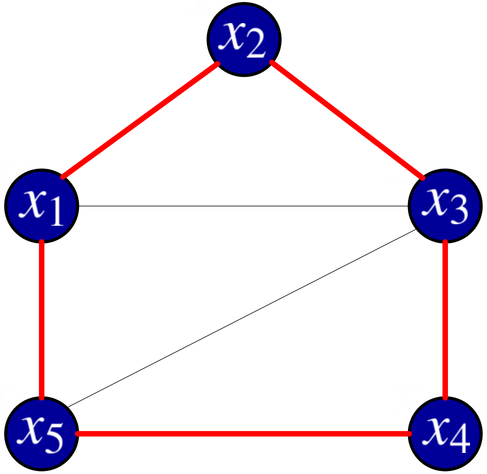
$G(X,U)$

Простой цикл – замкнутая простая цепь в неографе, т.е. простая цепь, в которую добавлено ребро, инцидентное вершинам начала и конца цепи.



$$\mu_2 = (x_3, x_2, x_1, x_5, x_4)$$

Простой цикл – замкнутая простая цепь в неографе, т.е. простая цепь, в которую добавлено ребро, инцидентное вершинам начала и конца цепи.

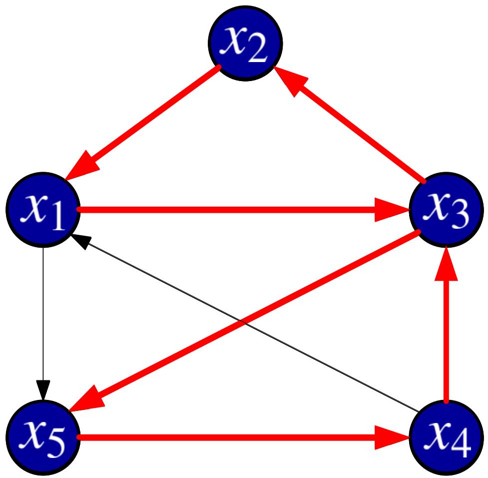


$$c_2 = (x_3, x_2, x_1, x_5, x_4, x_3),\ l_{c_2} = 5.$$

Циклы в графах

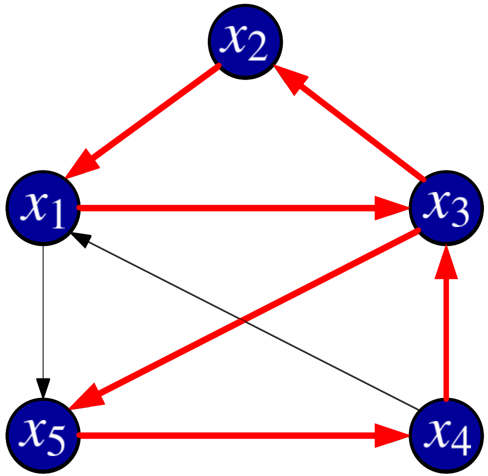
- ✓ Циклы в неографах
- Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

Ориентированный цикл (= контур) – замкнутый путь в орграфе, т.е. путь, в который добавлена дуга, вершиной истока которой является вершина конца пути, а вершиной ее стока – начало пути.



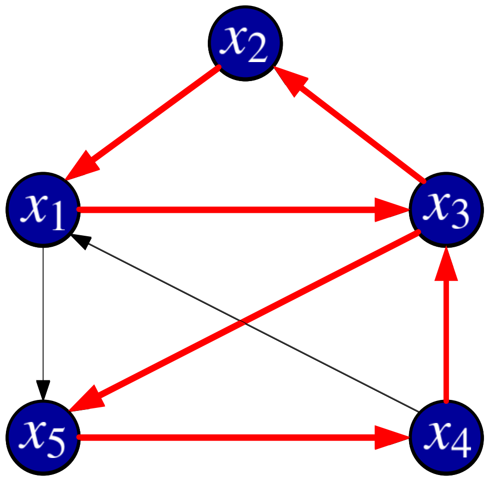
$\vec{G}(X,U)$

Ориентированный цикл (= контур) – замкнутый путь в орграфе, т.е. путь, в который добавлена дуга, вершиной истока которой является вершина конца пути, а вершиной ее стока – начало пути.



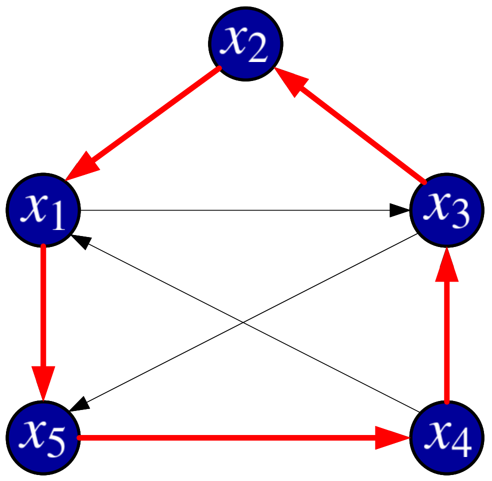
$$\vec{\mu}_1 = (x_3, x_2, x_1, x_3, x_5, x_4)$$

Ориентированный цикл (= контур) – замкнутый путь в орграфе, т.е. путь, в который добавлена дуга, вершиной истока которой является вершина конца пути, а вершиной ее стока – начало пути.



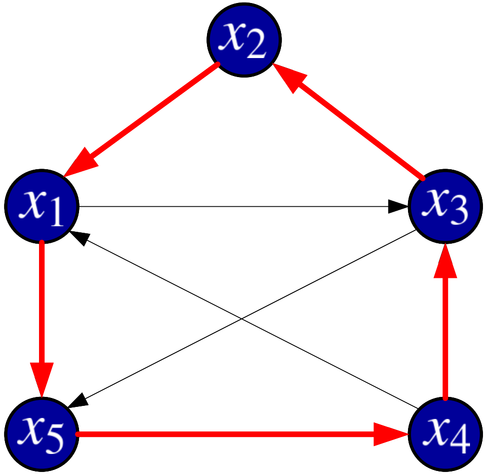
$$\vec{c}_1 = (x_3, x_2, x_1, x_3, x_5, x_4, x_3),\ l_{c_1} = 6.$$

Простой контур – замкнутый простой путь в орграфе, т.е. простой путь, в который добавлена дуга, вершиной истока которой является вершина конца пути, а вершиной ее стока – начало этого пути.



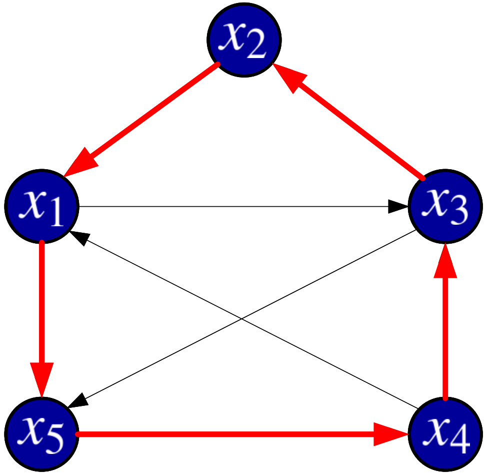
$$\vec{G}(X,U)$$

Простой контур – замкнутый простой путь в орграфе, т.е. простой путь, в который добавлена дуга, вершиной истока которой является вершина конца пути, а вершиной ее стока – начало этого пути.



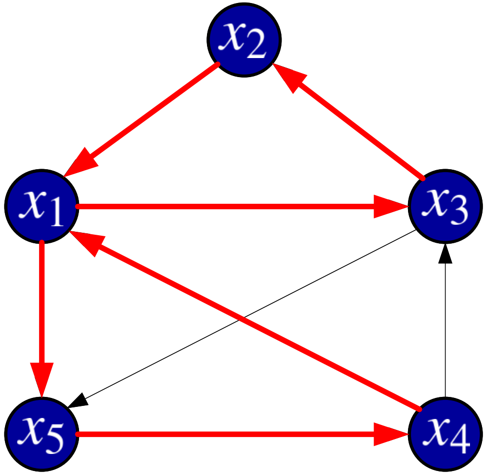
$$\vec{\mu}_2 = (x_3, x_2, x_1, x_5, x_4)$$

Простой контур – замкнутый простой путь в орграфе, т.е. простой путь, в который добавлена дуга, вершиной истока которой является вершина конца пути, а вершиной ее стока – начало этого пути.



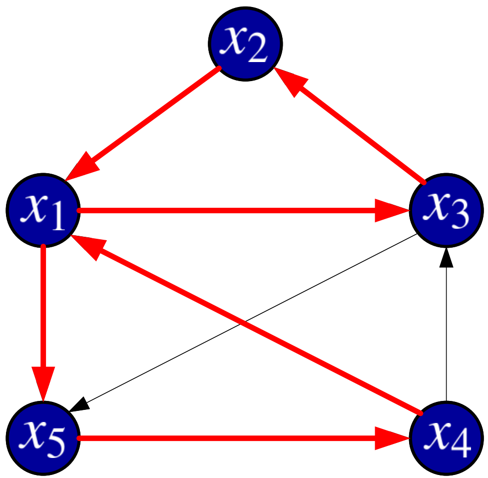
$$\vec{c}_2 = (x_3, x_2, x_1, x_5, x_4, x_3),\ l_{c_2} = 5.$$

Полуконтур – контур, построенный в орграфе без учета направления дуг.



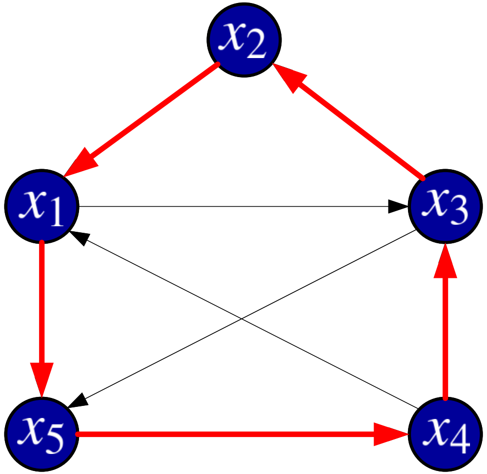
$\vec{G}(X,U)$

Полуконтур – контур, построенный в орграфе без учета направления дуг.



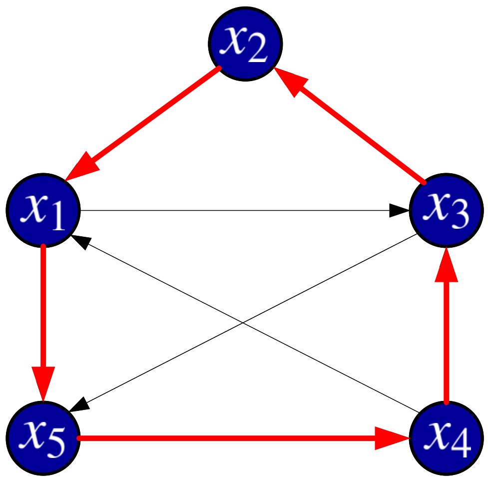
$$c_3 = (x_1, x_2, x_3, x_1, x_5, x_4, x_1),\ l_{c_3} = 6.$$

Простой полуконтур – простой контур, построенный в орграфе без учета направления дуг.



$\vec{G}(X,U)$

Простой полуконтур – простой контур, построенный в орграфе без учета направления дуг.

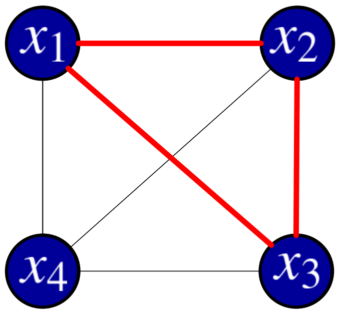


$$c_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1), \; l_{c_4} = 5.$$

Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

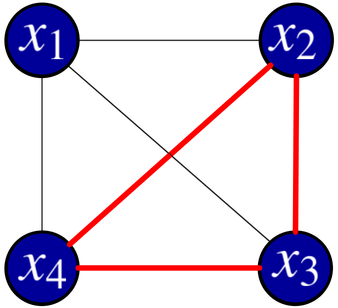
Множество циклов графа $\mathbf{C}(\mathbf{G})$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.



c_1

№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3

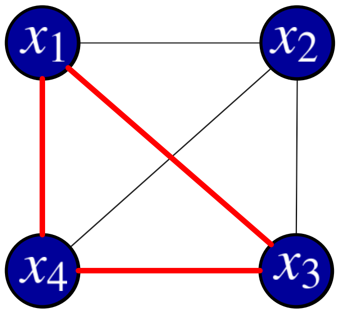
Множество циклов графа $\mathbf{C}(\mathbf{G})$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.



c_2

№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3
2	$c_2 = (x_2, x_3, x_4, x_2)$	3

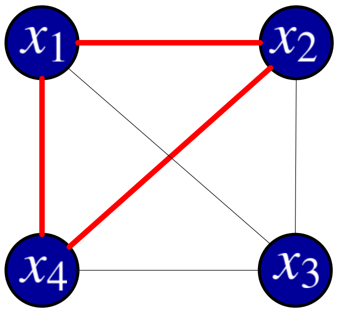
Множество циклов графа $\mathbf{C(G)}$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.



c_3

№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3
2	$c_2 = (x_2, x_3, x_4, x_2)$	3
3	$c_3 = (x_3, x_4, x_1, x_3)$	3

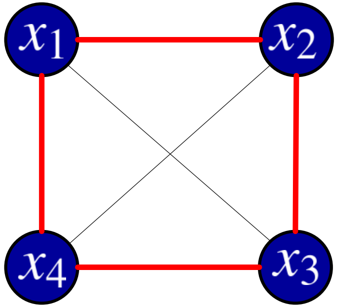
Множество циклов графа $\mathbf{C}(\mathbf{G})$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.



c_4

№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3
2	$c_2 = (x_2, x_3, x_4, x_2)$	3
3	$c_3 = (x_3, x_4, x_1, x_3)$	3
4	$c_4 = (x_4, x_1, x_2, x_4)$	3

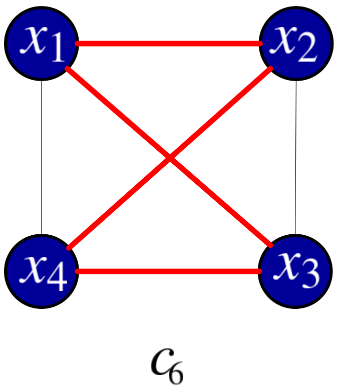
Множество циклов графа $\mathbf{C(G)}$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.



c_5

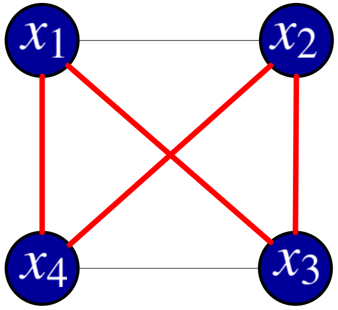
№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3
2	$c_2 = (x_2, x_3, x_4, x_2)$	3
3	$c_3 = (x_3, x_4, x_1, x_3)$	3
4	$c_4 = (x_4, x_1, x_2, x_4)$	3
5	$c_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4

Множество циклов графа $\mathbf{C}(\mathbf{G})$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.



№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3
2	$c_2 = (x_2, x_3, x_4, x_2)$	3
3	$c_3 = (x_3, x_4, x_1, x_3)$	3
4	$c_4 = (x_4, x_1, x_2, x_4)$	3
5	$c_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4
6	$c_6 = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_1)$	4

Множество циклов графа $\mathbf{C}(\mathbf{G})$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.

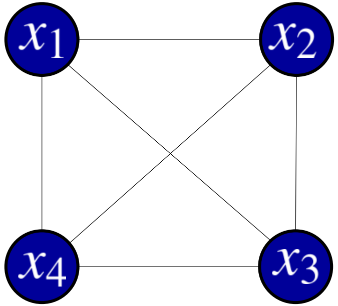


c_7

$$C(G) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$$

№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3
2	$c_2 = (x_2, x_3, x_4, x_2)$	3
3	$c_3 = (x_3, x_4, x_1, x_3)$	3
4	$c_4 = (x_4, x_1, x_2, x_4)$	3
5	$c_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4
6	$c_6 = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_1)$	4
7	$c_7 = (x_1, x_4, x_2, x_3, x_1)$	4

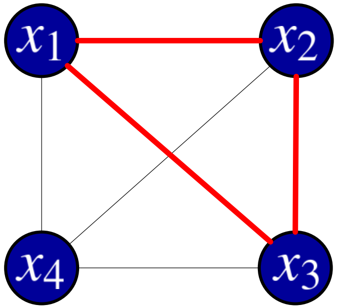
Множество циклов графа $\mathbf{C(G)}$ – множество, содержащее все различные простые циклы (простые контуры) этого графа.



$$C(G) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$$

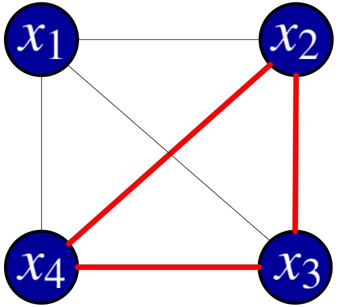
№	Простой цикл	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1)$	3
2	$c_2 = (x_2, x_3, x_4, x_2)$	3
3	$c_3 = (x_3, x_4, x_1, x_3)$	3
4	$c_4 = (x_4, x_1, x_2, x_4)$	3
5	$c_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4
6	$c_6 = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_1)$	4
7	$c_7 = (x_1, x_4, x_2, x_3, x_1)$	4

Множество независимых циклов графа $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}(G) \subseteq \mathbf{C}(G)$ содержит только такие простые циклы (простые контуры) графа, в котором каждый цикл (контур) отличается от других хотя бы одним ребром (дугой). На множестве циклов графа можно построить различные множества независимых циклов этого графа.



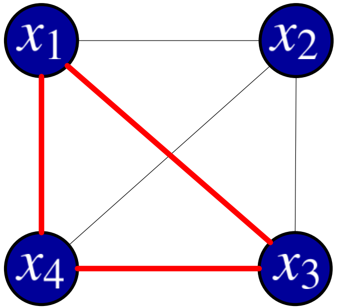
c_1

Множество независимых циклов графа $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}(G) \subseteq \mathbf{C}(G)$ содержит только такие простые циклы (простые контуры) графа, в котором каждый цикл (контур) отличается от других хотя бы одним ребром (дугой). На множестве циклов графа можно построить различные множества независимых циклов этого графа.



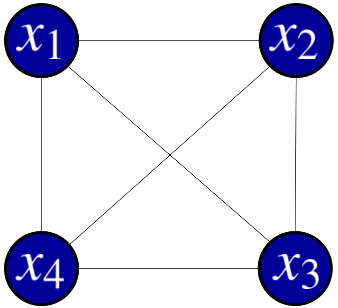
c_2

Множество независимых циклов графа $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}(G) \subseteq \mathbf{C}(G)$ содержит только такие простые циклы (простые контуры) графа, в котором каждый цикл (контур) отличается от других хотя бы одним ребром (дугой). На множестве циклов графа можно построить различные множества независимых циклов этого графа.

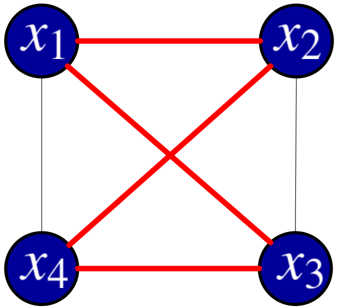


c_3

Множество независимых циклов графа $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}(G) \subseteq \mathbf{C}(G)$ содержит только такие простые циклы (простые контуры) графа, в котором каждый цикл (контур) отличается от других хотя бы одним ребром (дугой). На множестве циклов графа можно построить различные множества независимых циклов этого графа.

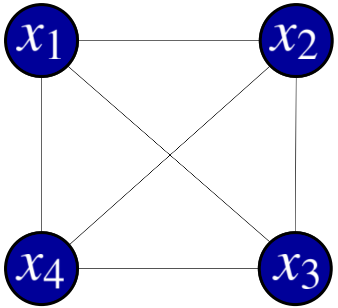


$$C_{\mathrm{H}}(G) = \{c_1, c_2, c_3\}$$

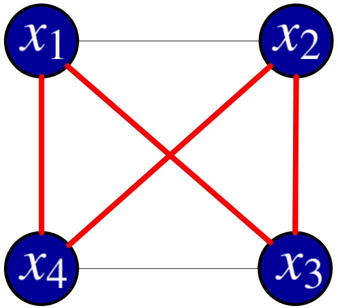


c_6

Множество независимых циклов графа $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}(G) \subseteq \mathbf{C}(G)$ содержит только такие простые циклы (простые контуры) графа, в котором каждый цикл (контур) отличается от других хотя бы одним ребром (дугой). На множестве циклов графа можно построить различные множества независимых циклов этого графа.

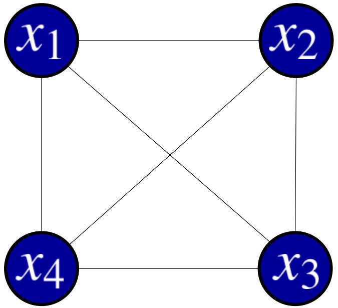


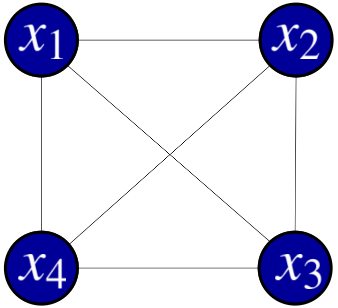
$$C_{\mathrm{H}}(G) = \{c_1, c_2, c_3\}$$



c_7

Множество независимых циклов графа $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}(G) \subseteq \mathbf{C}(G)$ содержит только такие простые циклы (простые контуры) графа, в котором каждый цикл (контур) отличается от других хотя бы одним ребром (дугой). На множестве циклов графа можно построить различные множества независимых циклов этого графа.





$C_{\mathrm{H}}(G) = \{c_1, c_2, c_3\}$

$C_{\mathrm{H}}(G) = \{c_6, c_7\}$

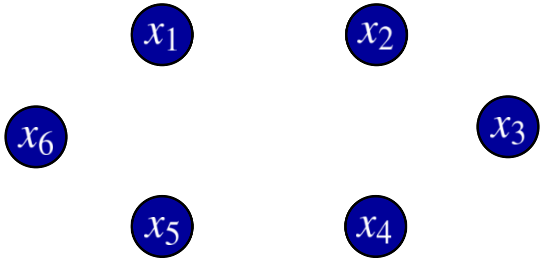
Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- Независимые циклы в графе
- Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

Цикл Эйлера – цикл (контур), проходящий ***через все ребра (дуги)*** связанного графа.

Граф, содержащий цикл Эйлера, называется **графом Эйлера**.

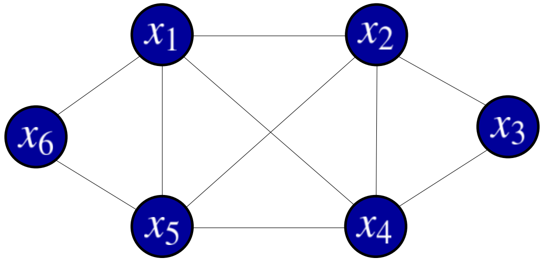
Граф Эйлера можно нарисовать, если «не отрывать карандаш от бумаги и не повторять линий» (теорема Эйлера, 1736 г).

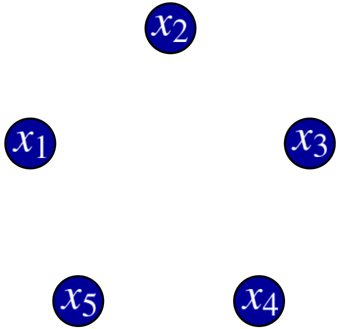


Цикл Эйлера – цикл (контур), проходящий ***через все ребра (дуги)*** связанного графа.

Граф, содержащий цикл Эйлера, называется **графом Эйлера**.

Граф Эйлера можно нарисовать, если «не отрывать карандаш от бумаги и не повторять линий» (теорема Эйлера, 1736 г).

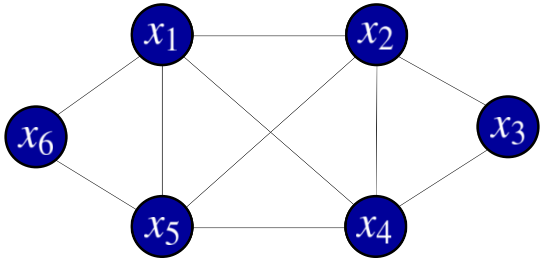


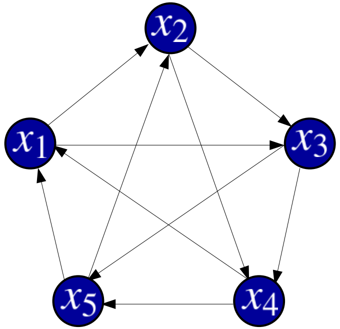


Цикл Эйлера – цикл (контур), проходящий ***через все ребра (дуги)*** связанного графа.

Граф, содержащий цикл Эйлера, называется **графом Эйлера**.

Граф Эйлера можно нарисовать, если «не отрывать карандаш от бумаги и не повторять линий» (теорема Эйлера, 1736 г).

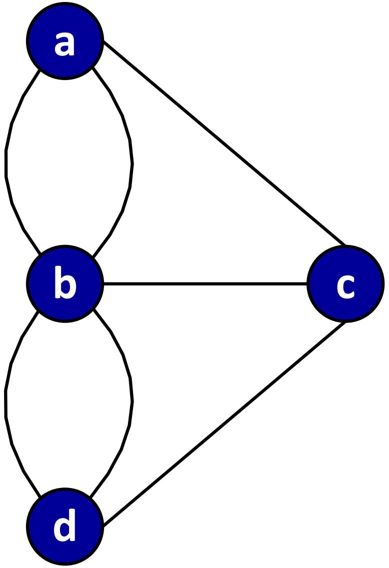




Следствия теоремы для распознавания графов Эйлера:

1. Связный неограф $G(X,U)$ является графом Эйлера, если $\forall x \in X : \rho(x)$ – четное число.
2. Связный орграф $G(X,U)$ является графом Эйлера, если $\forall x \in X : \rho^+(x) = \rho^-(x)$.

Задача о Кенигсбергских мостах сводится к задаче поиска цикла Эйлера в данном графе.

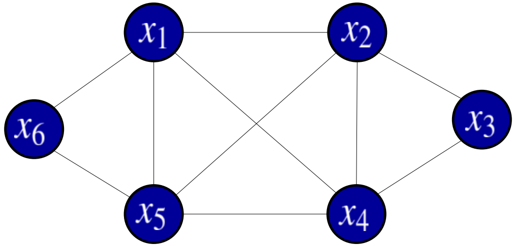


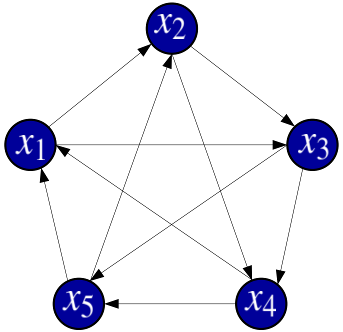
$$\rho(a) = \rho(c) = \rho(d) = 3$$

$$\rho(b) = 5$$

Т.к. данный граф не удовлетворяет условию следствия теоремы Эйлера, то и ответ в решении этой задачи отрицательный.

Если граф не является графом Эйлера, но для его построения достаточно добавить одно ребро (одну дугу), то такой граф называется **полуэйлеровым графом,** а цепь (путь), в который добавляется ребро (дуга), называются **цепью Эйлера.**





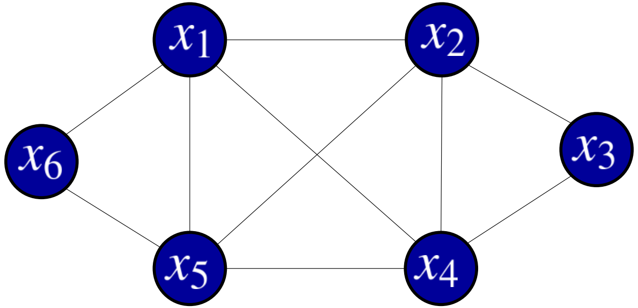
Следствия теоремы для распознавания полуэйлеровых графов:

3. В полуэйлеровом неографе степени всех вершин – четные за исключением двух вершин (эти вершины и являются началом и концом цепи Эйлера в графе).

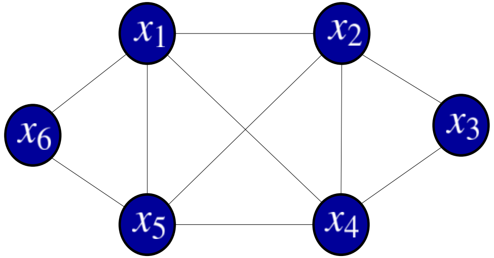
4. В полуэйлеровом орграфе полустепени исхода и полустепени захода различаются только у двух вершин x и y, причем $\rho^{-}(x) = \rho^{+}(x) + 1$ и $\rho^{+}(y) = \rho^{-}(y) + 1$ (вершина x является началом, а вершина y – концом цепи Эйлера в графе).

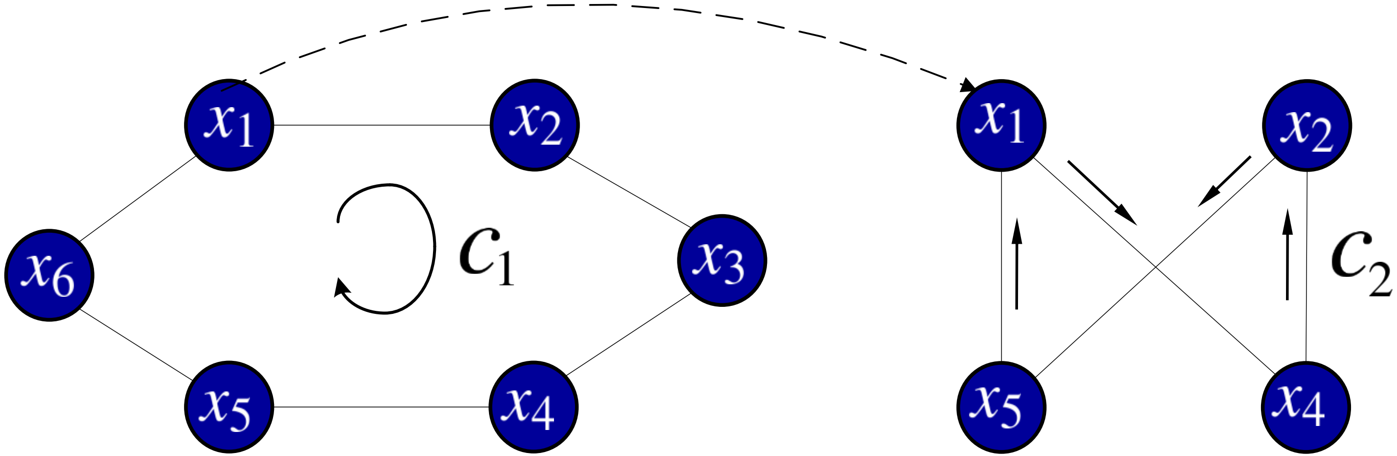
1. Проверка условия существования цикла Эйлера в заданном графе $G(X,U)$.

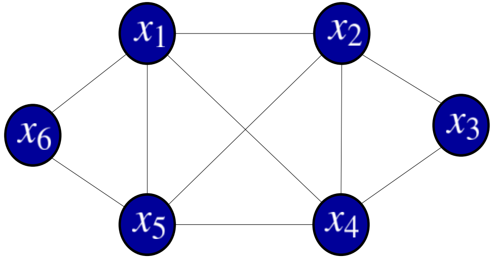
2. Если условие выполняется, то решается задача поиска цикла Эйлера. Если условие не выполняется, то закончить решение задачи (данный граф $G(X,U)$ не является графом Эйлера).

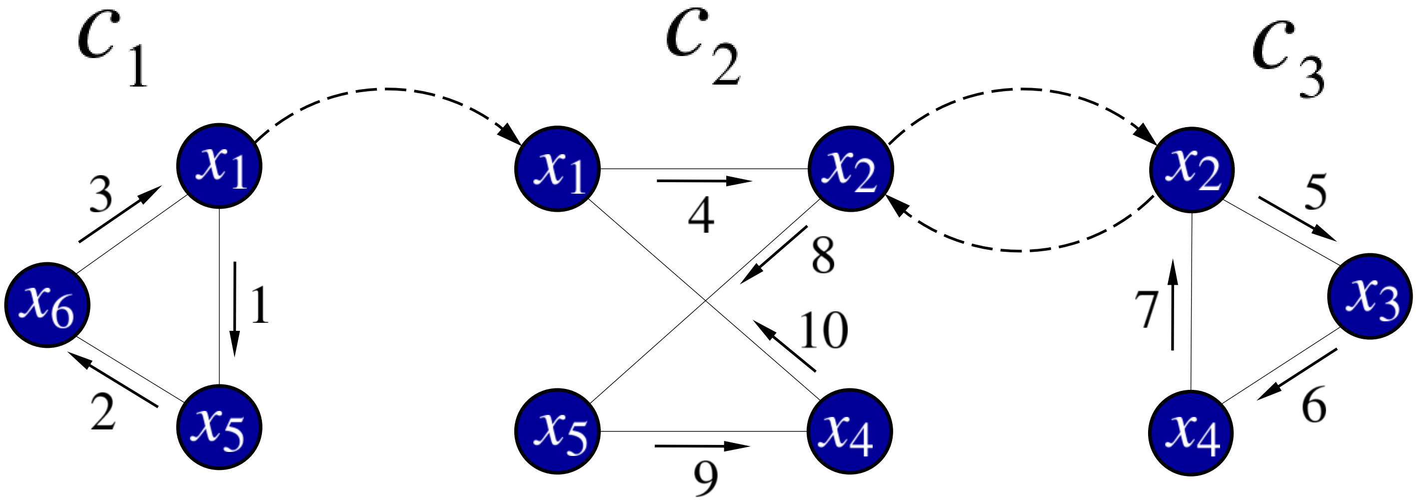


$\forall x \in X : \rho(x)$ – чётное число


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6

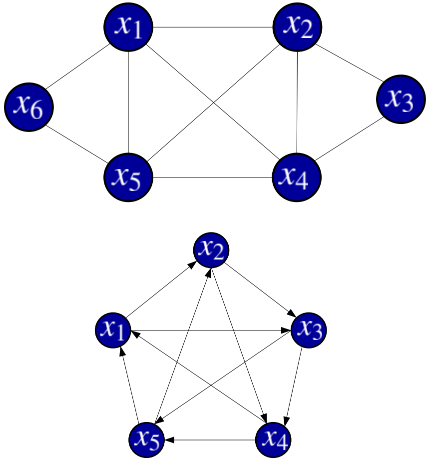

x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
c_1
x_1
x_2
x_4
x_5
c_2


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6

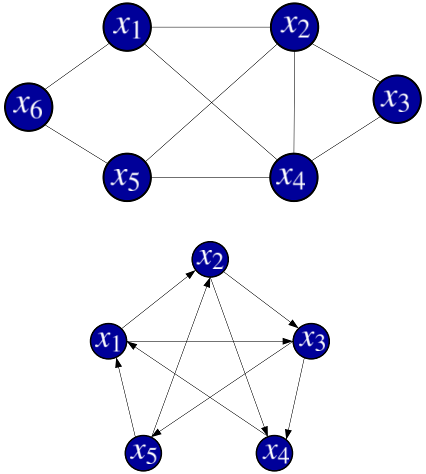

c_1
c_2
c_3
x_1
x_5
x_6
1
2
3
x_1
x_2
x_5
x_4
4
8
10
9
x_2
x_3
x_4
5
6
7

Связные графы

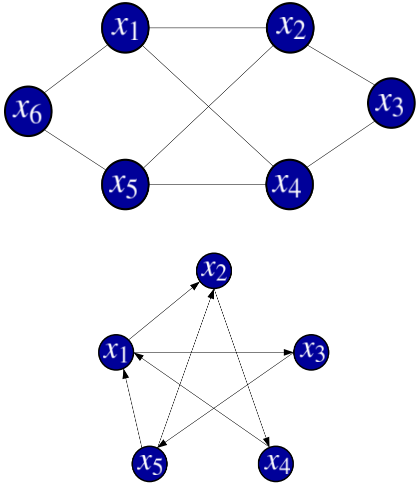
графы Эйлера



полуэйлеровы графы



другие



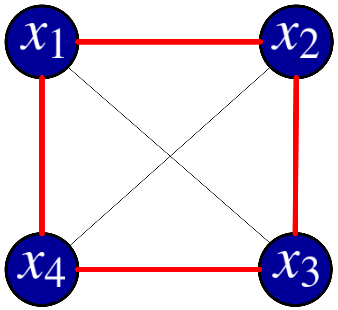
Почти нет графовых структур, являющихся графами Эйлера (теорема Рейда, 1962 г.)

Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- Циклы Эйлера
- Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

Цикл Гамильтона – цикл (контур), проходящий ***через все вершины*** связного графа.

Граф, содержащий хотя бы один цикл Гамильтона, называется **Гамильтоновым графом.**

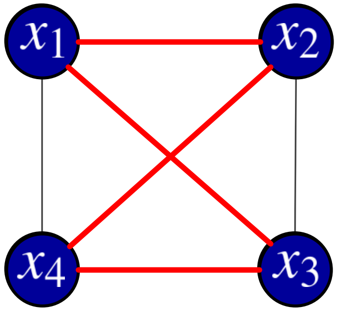


c_1

№	Цикл Гамильтона	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4

Цикл Гамильтона – цикл (контур), проходящий ***через все вершины*** связного графа.

Граф, содержащий хотя бы один цикл Гамильтона, называется **Гамильтоновым графом.**

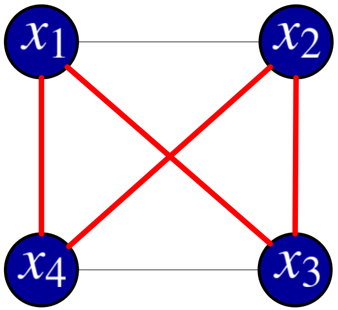


c_2

№	Цикл Гамильтона	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4
2	$c_2 = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_1)$	4

Цикл Гамильтона – цикл (контур), проходящий ***через все вершины*** связного графа.

Граф, содержащий хотя бы один цикл Гамильтона, называется **Гамильтоновым графом.**

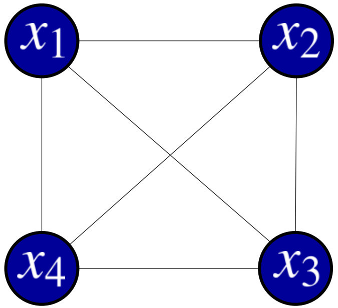


c_3

№	Цикл Гамильтона	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4
2	$c_2 = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_1)$	4
3	$c_3 = (x_1, x_4, x_2, x_3, x_1)$	4

Цикл Гамильтона – цикл (контур), проходящий ***через все вершины*** связного графа.

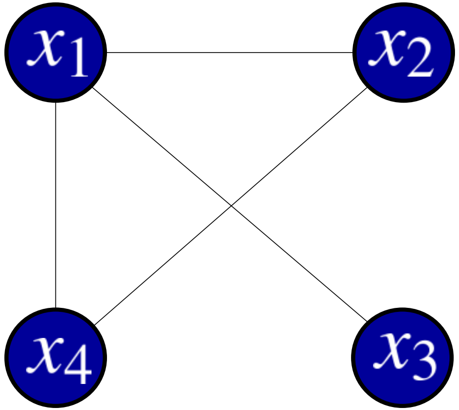
Граф, содержащий хотя бы один цикл Гамильтона, называется **Гамильтоновым графом.**



№	Цикл Гамильтона	Длина цикла
1	$c_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$	4
2	$c_2 = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_1)$	4
3	$c_3 = (x_1, x_4, x_2, x_3, x_1)$	4

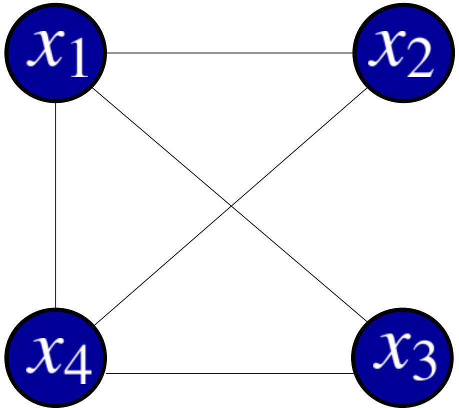
Если с связном графе $n \geq 3$ выполняется условие $\forall x \in X : \rho(x) \geq n/2$, то данный граф является Гамильтоновым графом (теорема Дирака, 1952 г.)

Если в графе отсутствуют циклы Гамильтона, но для его построения достаточно добавить одно ребро (одну дугу), то такой граф называется **полугамильтоновым графом**, а цепь (путь), в который добавляется ребро (дуга), называется **цепью Гамильтона**.

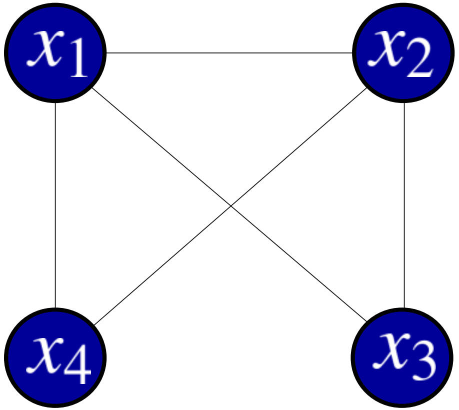


$$\mu_1 = (x_4, x_2, x_1, x_3)$$

Если в графе отсутствуют циклы Гамильтона, но для его построения достаточно добавить одно ребро (одну дугу), то такой граф называется **полугамильтоновым графом**, а цепь (путь), в который добавляется ребро (дуга), называется **цепью Гамильтона**.



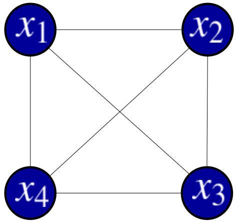
$$c_1 = (x_4, x_2, x_1, x_3, x_4)$$

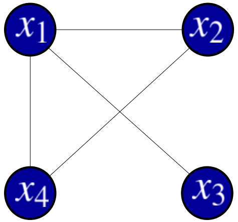


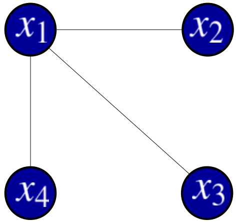
$$c_2 = (x_2, x_4, x_1, x_3, x_2)$$

Связные графы

графы Гамильтона | полугамильтоновы графы | другие







Почти все связные графы являются графами Гамильтона (теорема Перепелицы, 1969г.)

Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- Циклы Гамильтона
- Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- Алгоритмы решения задача коммивояжера

Содержательная постановка задачи о коммивояжере

Торговец (коммивояжер) должен посетить все города по одному разу из заданного списка и вернуться обратно в тот город, с которого он начал посещение. При этом стоимость его поездки должна быть минимальной.

Формальная постановка задачи о коммивояжере

Дано: связный $n, m-$граф $G(X,U)$ с установленными весами ребер $W=(w_1,...,w_m)$, в котором w_i- стоимость проезда между городами, моделируемыми в графе вершинами концов ребра u_i.

Пусть $C_{\text{Н}}-$ множество всех циклов Гамильтона в графе $G(X,U)$.

Найти: $c^* \in C_{\text{Н}}$, для которого выполняется следующее условие: $\sum\limits_{\forall u_i \in c^*} w_i \to \min$.

Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- Алгоритмы решения задача коммивояжера

Циклы в графах

- ✓ Циклы в неографах
- ✓ Циклы в орграфах
- ✓ Независимые циклы в графе
- ✓ Циклы Эйлера
- ✓ Циклы Гамильтона
- ✓ Алгоритмы поиска циклов Гамильтона в графе
- ✓ Алгоритмы решения задача коммивояжера

Л.С. Лисицына

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО