9.2 Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье только по синусам (или только по косинусам)

Тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$ (с периодом T) в общем случае:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{\mathrm{T}} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{\mathrm{T}} \right),$$

где $a_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int\limits_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{\mathrm{T}} dx, \quad b_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int\limits_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{\mathrm{T}} dx.$

Посмотрим на свойства коэффициентов Фурье a_n, b_n в случае, когда функция $f(x)$ обладает симметрией (четностью или нечетностью):

$$\textbf{1)}\ f(-x) = f(x): \quad b_n = 0, \quad a_n = 2 \cdot \frac{2}{\mathrm{T}} \int\limits_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{\mathrm{T}} dx.$$

$$\textbf{2)}\ f(-x) = -f(x): \quad a_n = 0, \quad b_n = 2 \cdot \frac{2}{\mathrm{T}} \int\limits_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{\mathrm{T}} dx.$$

Полученные выражения для коэффициентов Фурье a_n и b_n нетрудно объяснить. Действительно, интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен 0 :

$g(-x) = -g(x): \quad \int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} g(x)dx + \int\limits_{0}^{a} g(x)dx = \Big/ \begin{matrix} x = -y \\ dx = -dy \end{matrix} \Big/ =$

$= \int\limits_{a}^{0} g(-y)(-dy) + \int\limits_{0}^{a} g(x)dx = \int\limits_{a}^{0} g(y)dy + \int\limits_{0}^{a} g(x)dx = 0.$

Интеграл от четной функции по симметричному промежутку равен удвоенному интегралу по половине промежутка:

$$g(-x) = g(x): \quad \int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = 2 \int\limits_{0}^{a} g(x)dx.$$

Пример

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; l]$.

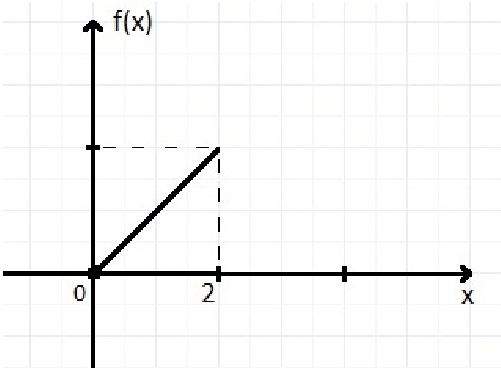

Рис. 72: К примеру 1

1) Разложим $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0; l]$. Для этого продолжим функцию $f(x)$ четным образом (симметрия относительно оси OY) на $[-l; 0]$ (в нашем случае: $[-2; 0]$):

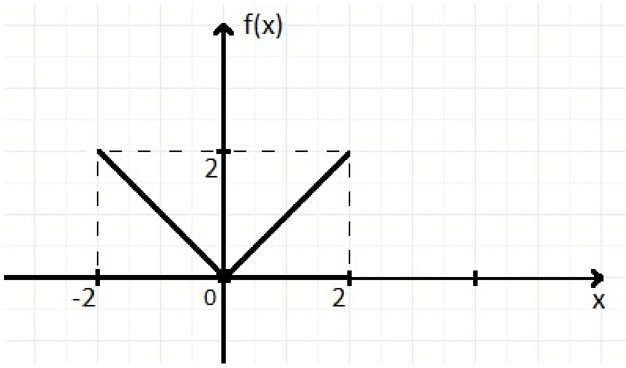

Рис. 73: К примеру 1

Полученную функцию продолжим периодически:

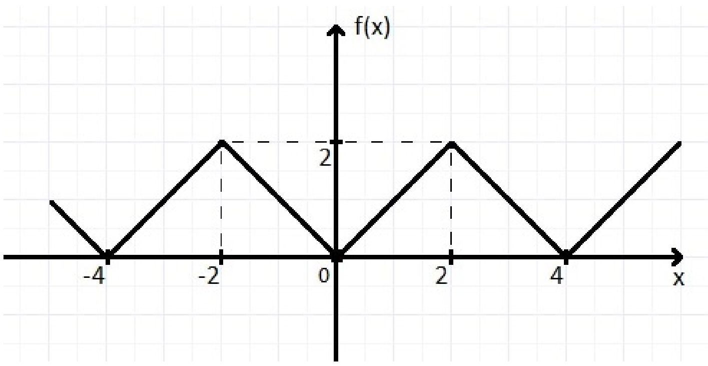

Рис. 74: К примеру 1

Ряд Фурье для продолженной функции будет иметь следующий вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{2\pi nx}{2l},\quad \text{где}\ \ a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot\cos\frac{2\pi nx}{2l}dx.$$

Таким образом, для исходной функции $f(x)$ получаем ряд Фурье только по косинусам:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{\pi nx}{l},\quad \text{где}\ \ a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Это общая формула для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;l]$. В нашем случае функция $f(x)=x$ задана на отрезке $[0;2]$. Тогда:

$$a_n=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 x{\cdot}\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\Bigg/\begin{array}{ll} u=x & du=dx\\ v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2} & dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx\end{array}\Bigg/=\underbrace{\frac{2}{\pi n}x\cdot\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2}_{=0}-$$

$$-\int\limits_0^2\frac{2}{\pi n}{\cdot}\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2=\frac{4}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)\quad\text{– верно при}\ n\neq 0.$$

Рассмотрим случай $n=0$:

$$a_0=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2.$$

Тригонометрический ряд Фурье по косинусам для функции $f(x)$:

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)\cdot\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

График суммы ряда:

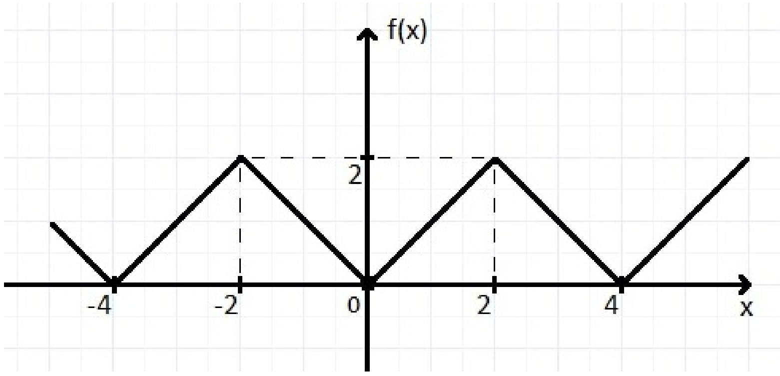

Рис. 75: К примеру 1

2) Разложим $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на $[0; l]$. Для этого продолжим функцию $f(x)$ нечетным образом на $[-l; 0]$,

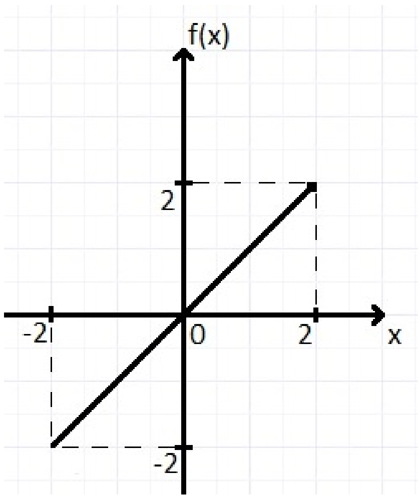

Рис. 76: К примеру 2

а затем – периодически:

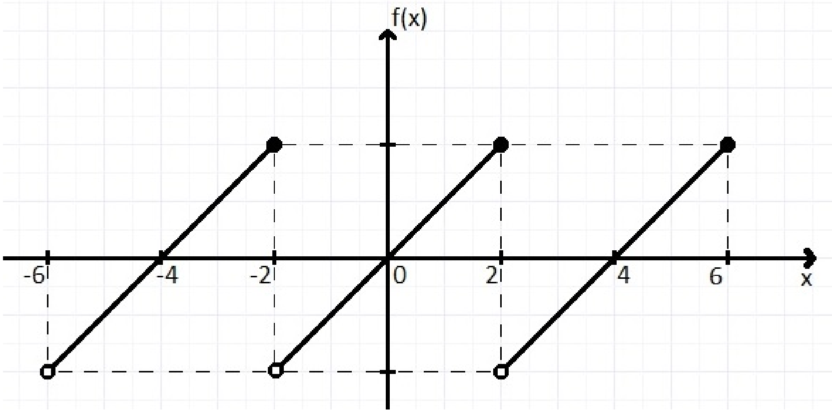

Рис. 77: К примеру 2

Ряд Фурье для продолженной функции будет иметь следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \text{где} \;\; b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot \sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Таким образом, для исходной функции $f(x)$ получаем ряд Фурье только по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \text{где} \;\; b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot \sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Это общая формула для $f(x)$, заданной на отрезке $[0; l]$. В нашем случае функция $f(x) = x$ задана на отрезке $[0; 2]$:

$$b_n = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \Bigg/ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2} & dv = \sin\frac{\pi n x}{2}dx \end{array} \Bigg/ = -\frac{2}{\pi n}x\cdot\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^2 \cos\frac{\pi n x}{2}dx = -\frac{4}{\pi n}\cos\pi n + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{4}{\pi n}(-1)^n.$$

Ответ: тригонометрический ряд Фурье по синусам для функции $f(x)$:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}(-1)^n \cdot \sin\frac{\pi n x}{2}.$$

График суммы ряда:

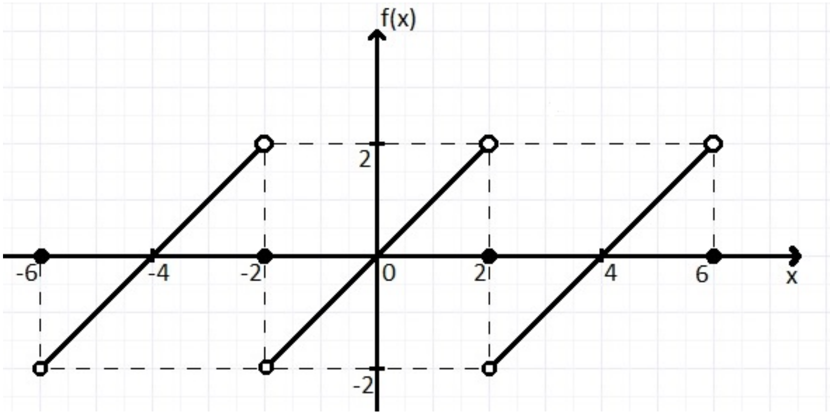

Рис. 78: К примеру 2

9.3 Разложение функции в показательный ряд Фурье

Показательный ряд Фурье для функции $f(x)$ (с периодом T):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}} i}, \quad \text{где} \;\; C_n = \frac{1}{\mathrm{T}} \int\limits_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(x) \cdot e^{-\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}} i} dx.$$

Вместо $\left[-\frac{\mathrm{T}}{2};\ \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$ можно брать любой отрезок длиной в один период (T).
Пример
Разложить функцию в показательный ряд Фурье. Построить график суммы ряда.

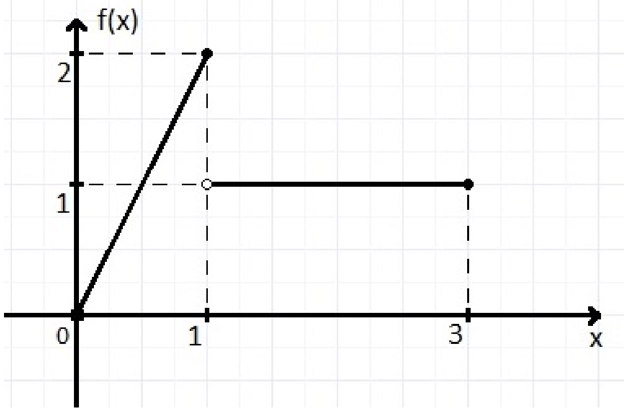

Рис. 79: К примеру

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x\leqslant 3.\end{cases}$$

T = 3 – период.

$$C_n=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 2x\cdot e^{-\frac{2\pi nx}{3}i}dx+\frac{1}{3}\int\limits_1^3 e^{-\frac{2\pi nx}{3}i}dx=\Bigg/\begin{matrix} u=x & du=dx\\ v=-\frac{3}{2\pi ni}e^{-\frac{2\pi nx}{3}i} & dv=e^{-\frac{2\pi nx}{3}i}dx\end{matrix}\Bigg/=$$

$$=-\frac{1}{\pi ni}x\cdot e^{-\frac{2\pi nx}{3}i}\Big|_0^1+\frac{1}{\pi ni}\int\limits_0^1 e^{-\frac{2\pi nx}{3}i}dx-\frac{1}{2\pi ni}e^{-\frac{2\pi nx}{3}i}\Big|_1^3=$$

$$=-\frac{1}{\pi ni}e^{-\frac{2\pi n}{3}i}+\frac{3}{2\pi^2n^2}e^{-\frac{2\pi nx}{3}i}\Big|_0^1-\frac{1}{2\pi ni}\left(e^{-2\pi ni}-e^{-\frac{2\pi n}{3}i}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi ni}\left(e^{-2\pi ni}+e^{-\frac{2\pi n}{3}i}\right)+\frac{3}{2\pi^2n^2}\left(e^{-\frac{2\pi n}{3}i}-1\right)\quad \text{– верно при } n\neq 0.$$

Рассмотрим случай $n=0$:

$$C_0=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 2xdx+\frac{1}{3}\int\limits_1^3 dx=\frac{x^2}{3}\Big|_0^1+\frac{x}{3}\Big|_1^3=\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=1.$$

Показательный ряд Фурье (ряд Фурье в комплексной форме) для функции $f(x)$:

$$S(x)=1+\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi ni}\left(1+e^{-\frac{2\pi n}{3}i}\right)+\frac{3}{2\pi^2n^2}\left(e^{-\frac{2\pi n}{3}i}-1\right)\right)\cdot e^{\frac{2\pi nx}{3}i}=$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\neq 3n,\ x\neq 3n+1,\\ \frac{1}{2}, & x=3n,\\ \frac{3}{2}, & x=3n+1.\end{cases}$$

График суммы ряда:

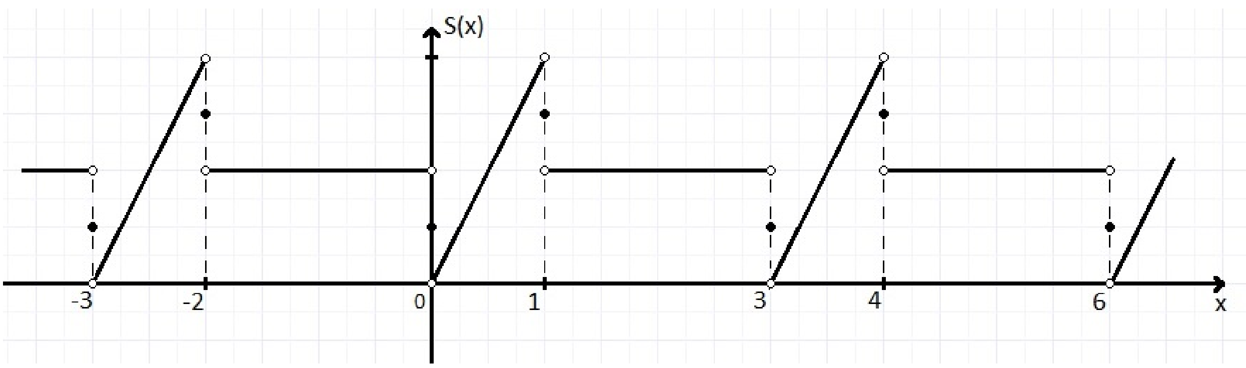

Рис. 80: К примеру