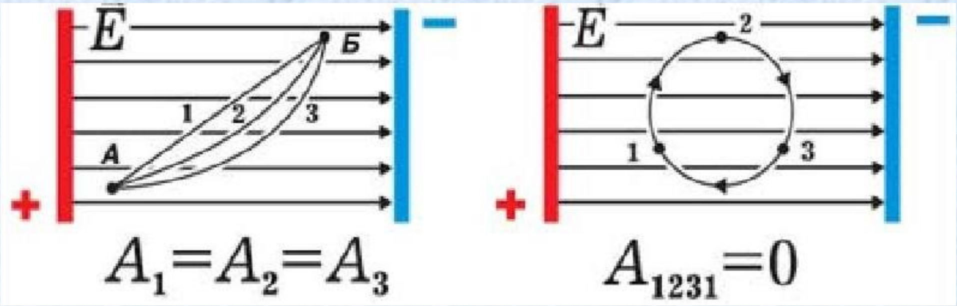
Свойства электростатического поля

1. Электростатические силы центральные.

2. Все центральные силы консервативные.

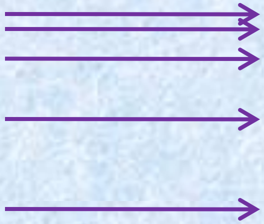
3. Работа консервативных сил не зависит от траектории



4. Теорема о циркуляции: $\oint E_l dl = 0$

Вопрос: Могут ли линии электростатического поля быть замкнуты?

Вопрос: Может ли существовать такое электростатическое поле?



Потенциал

5. Работа сил поля равна убыли потенциальной энергии: $A = W_1 - W_2$.

6. $\vec{F} = -\operatorname{grad} W = -\nabla W$

Для точечного заряда (заряд Q создает поле, q – пробный заряд):

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$W = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

$C = 0$ на бесконечности или на поверхности Земли

$$\vec{F} = \vec{E}q \Rightarrow W = \varphi q$$

φ – потенциал, энергетическая характеристика поля

$[\varphi]$ = Дж/Кл = В

Электронвольт

1эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

1эВ = $1{,}7 \cdot 10^{-36}$ кг

1эВ = $1{,}2 \cdot 10^{4}$ К

Связь потенциала и напряженности

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi$$

Вектор напряженности направлен в сторону уменьшения потенциала

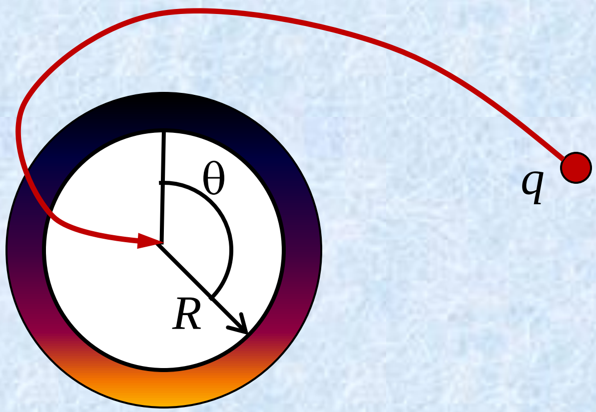
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 E_l dl$$

$\varphi_2 > \varphi_1$ – работают внешние силы
$\varphi_2 < \varphi_1$ – работают силы поля

Принцип суперпозиции

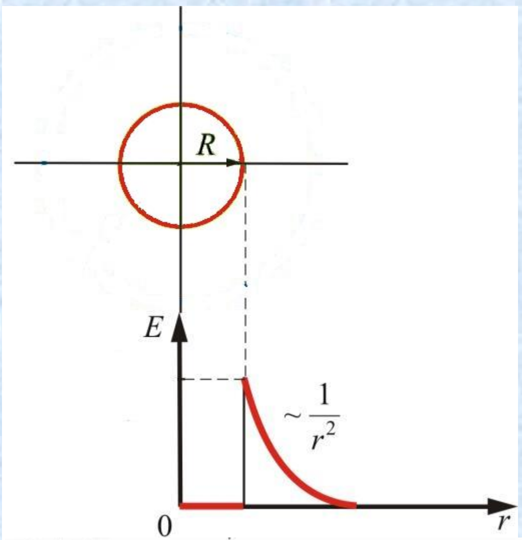
$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i \qquad \varphi = \sum \varphi_i$$

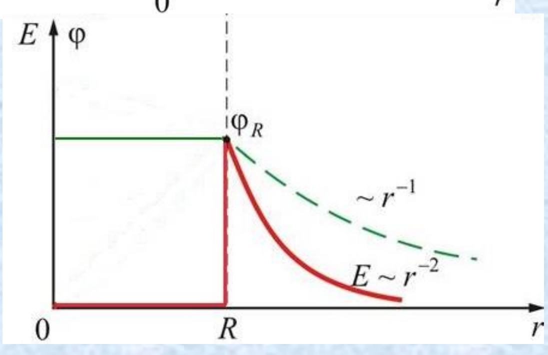
Вопрос: Чему равна работа, необходимая, чтобы перенести заряд q в центр тонкого заряженного кольца? Плотность заряда на кольце зависит от угла как $\tau = \tau_0(1 + \cos\theta)$.



Потенциал сферы и шара

Равномерно заряженная сфера





I: $r < R$ $\quad E_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_I = C_I$

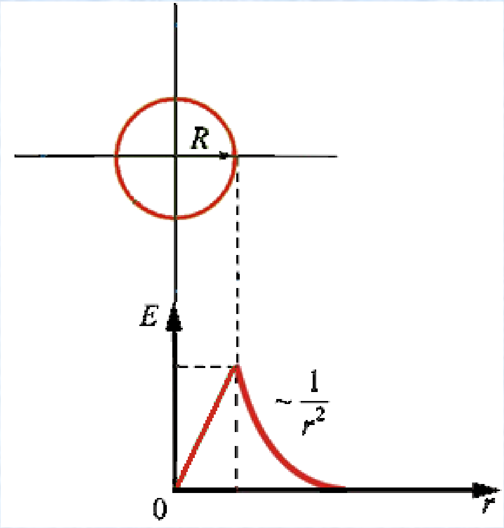
II: $r > R$ $\quad E_{II} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{II} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_{II}$

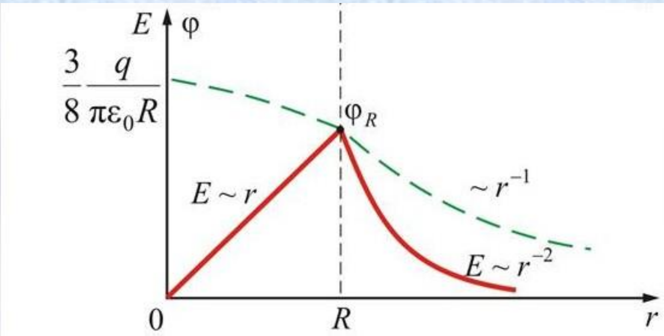
$$\varphi_{II}\left(\infty\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{II} = 0$$

$$\varphi_I\left(R\right) = \varphi_{II}\left(R\right) \quad \Rightarrow \quad C_I = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Потенциал сферы и шара

Равномерно заряженный шар





$$\text{I: } r < R \quad E_I = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad \Rightarrow \quad \varphi_I = -\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + C_I$$

$$\text{II: } r > R \quad E_{II} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{II} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_{II}$$

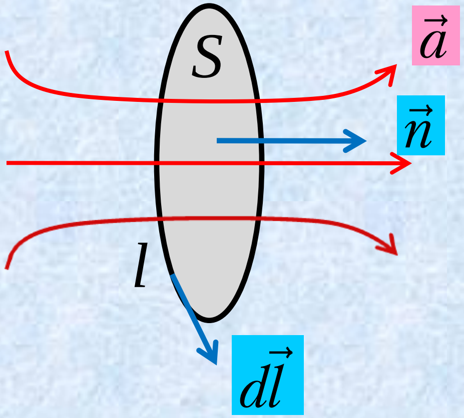
$$\varphi_{II}(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{II} = 0$$

$$\varphi_I(R) = \varphi_{II}(R) \quad \Rightarrow \quad C_I = \frac{3}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Ротор векторного поля

Для любого векторного поля $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint\limits_l \vec{a} \cdot d\vec{l}}{S}$$



$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}}$$

Теорема Стокса

$$\oint\limits_l \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}_n \vec{a}\, dS$$

Ротор векторного поля

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Ротор любого поля консервативных сил равен нулю. Например, для электростатического поля

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla\varphi = 0$$

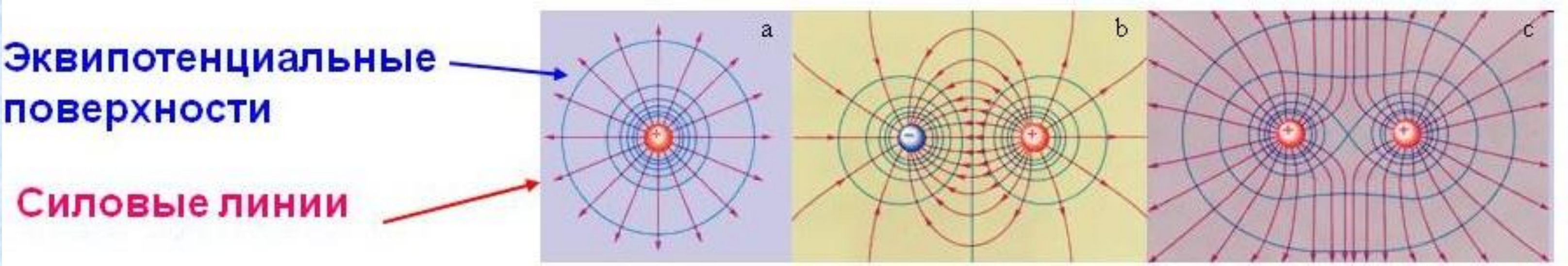
По теореме Стокса $\oint\limits_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}_n \vec{E}\, dS = 0$

Если ротор отличен от нуля, то такое поле называют вихревым (или соленоидальным)

Эквипотенциальные поверхности

φ = const

Работа при перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности не производится $\Rightarrow E_l = 0 \Rightarrow$ силовые линии перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям



Электрический диполь

Диполь: система из двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку.

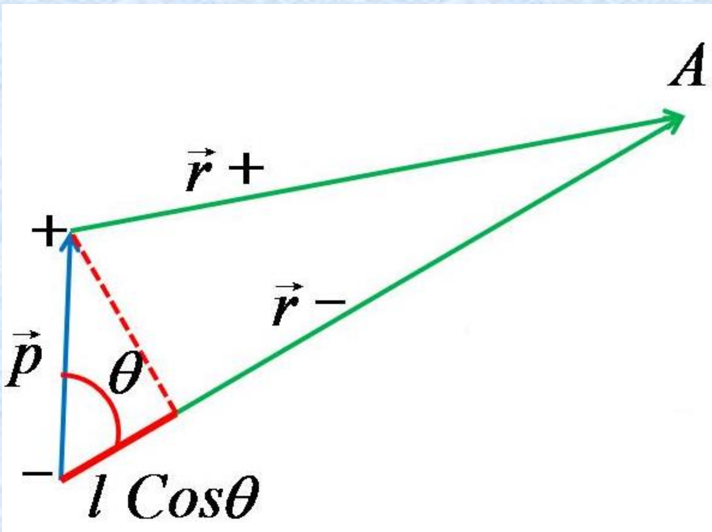
Расстояние l между зарядами называется плечом диполя.

Точка, в которой изучается поле диполя должна быть удалена на большое расстояние. $r >> l$

Дипольный момент $\vec{p} = q\vec{l}$ $[p] = Кл \cdot м$

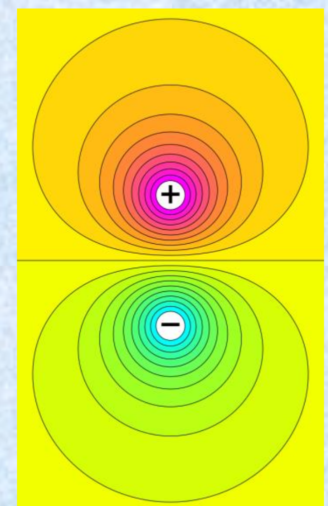
Внутри диполя вектор дипольного момента направлен от минуса к плюсу!

Потенциал поля диполя



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{|q|}{r_-}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}$$



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$$

Напряженность поля диполя
(в векторном виде)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3}$$

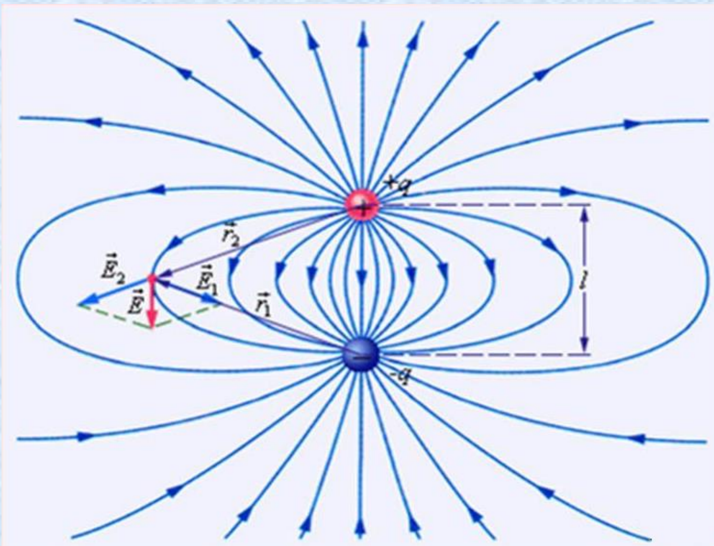
$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\nabla\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\vec{p}$$

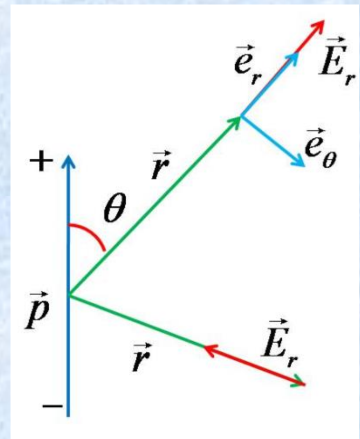
$$-\frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}}$$

Напряженность поля диполя
(в проекциях)



$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

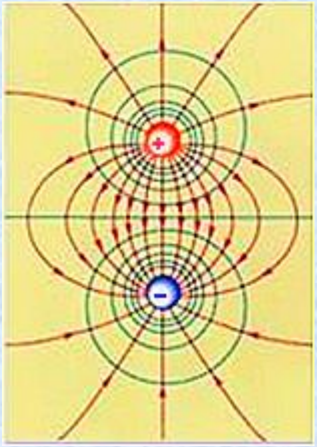


$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \qquad E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{r^3}$$

Поле диполя

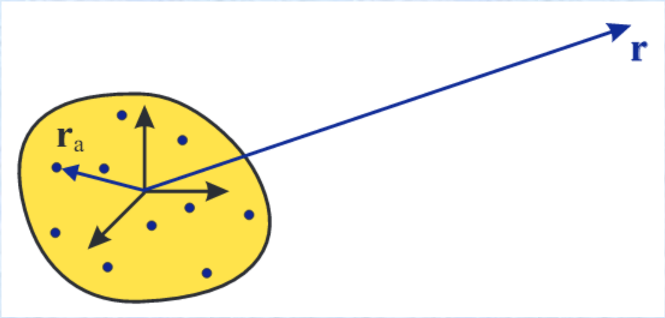


$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{r^3}$$

На оси диполя $$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

Перпендикулярно оси диполя $$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

Мультипольное разложение



$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \qquad \vec{r}_a \ll \vec{r}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{1}{r} - \vec{r}_a \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\sum\limits_a q_a}{r} - \sum_a q_a \vec{r}_a \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$$

Если суммарный заряд системы $Q = \sum\limits_a q_a \neq 0$ $\qquad \varphi(\vec{r}) = \dfrac{Q}{r}$

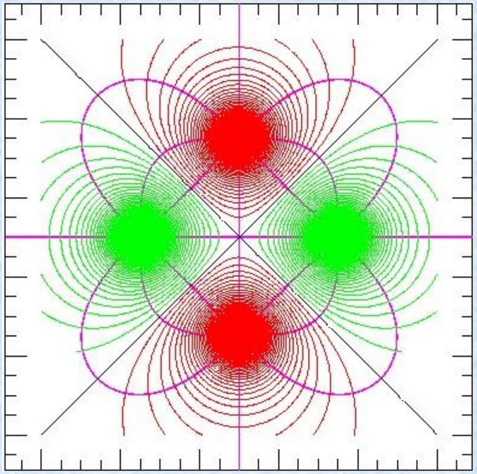
Поле системы близко к полю точечного заряда

Мультипольное разложение

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\sum_a q_a}{r} - \sum_a q_a \vec{r}_a \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$$

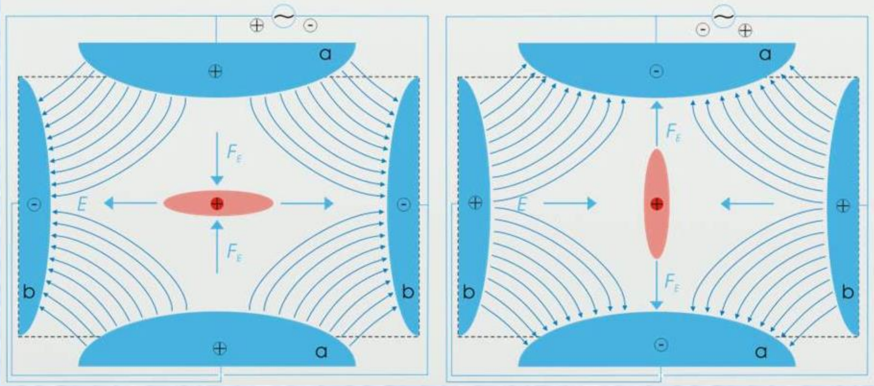
Если $Q = 0$, дипольный момент системы $\vec{p} = \sum_a q_a \vec{r}_a$ $\quad \varphi(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

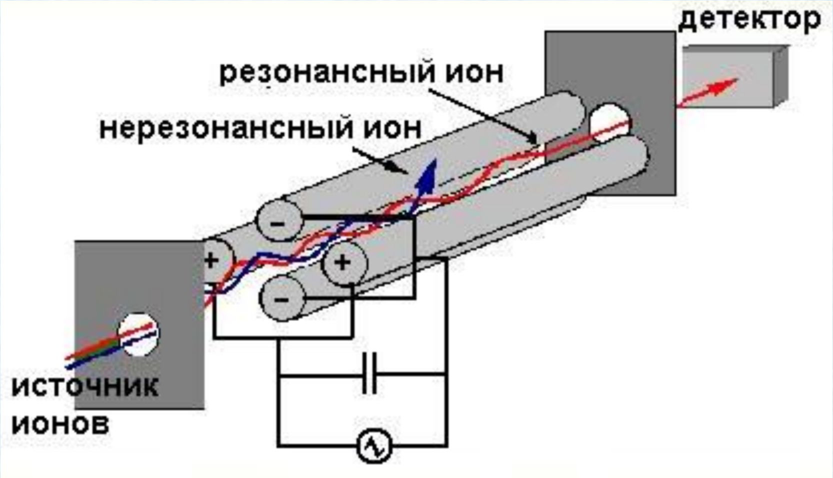
Поле системы близко к полю диполя



Если дипольный момент системы равен нулю, поле близко к полю квадруполя

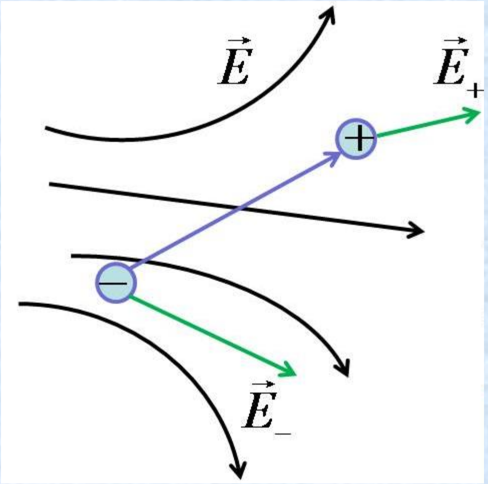
Квадрупольная ловушка



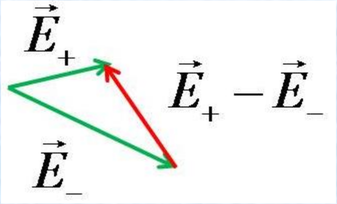


Квадрупольная ловушка

Сила, действующая на диполь во внешнем поле



$$\vec{F} = q\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$$



Для точечного диполя

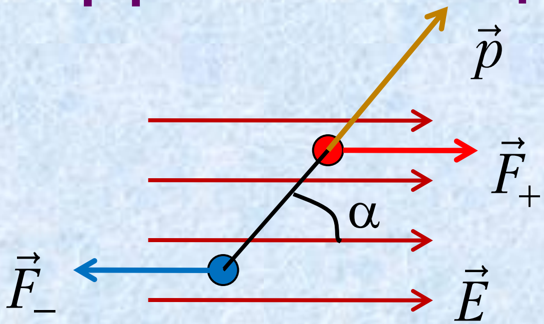
$$\vec{E}_+ - \vec{E}_- = d\vec{E} = l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y}$$

$$\vec{F} = ql\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{l}} = p\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{l}} = \left(\vec{p}\cdot\nabla\right)\vec{E}$$

В однородном поле F = 0

Производная вектора по направлению

Диполь в однородном поле

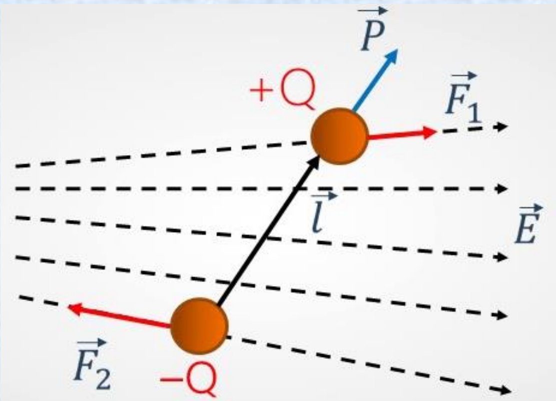


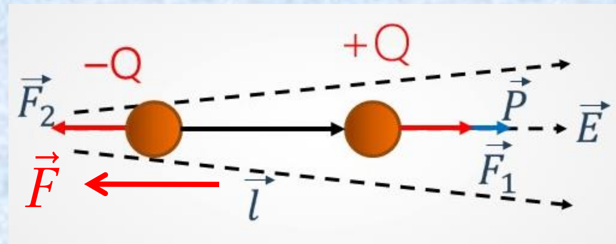
Силы, действующие на заряды образуют пару сил с вращающим моментом

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right] \qquad M = pE\sin\alpha$$

Под действием вращающего момента диполь поворачивается, дипольный момент ориентируется по полю

Диполь в неоднородном поле





X

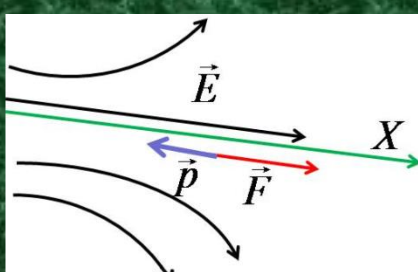
$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$$

$$F_x = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} < 0;\ p_x > 0 \quad \Rightarrow \quad F_x < 0$$

Диполь втягивается в область более сильного поля

Вопрос: Будет ли диполь выталкиваться из поля в следующем случае?



$$\frac{\partial E_x}{\partial x} < 0;\ p_x < 0 \quad \Rightarrow \quad F_x > 0$$

Диполь в неоднородном поле

Вопрос: Диполь находится в поле точечного заряда. Электрические силы центральные. Диполь начинает поворачиваться по полю. А как с законом сохранения момента импульса?

Энергия диполя в электрическом поле

$$W = q\left(\varphi_+ - \varphi_-\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} l$$

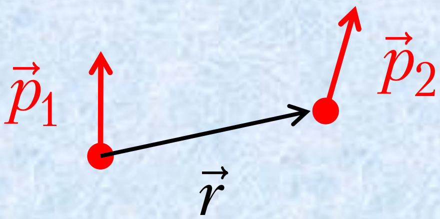
$$\vec{E} = -grad\varphi$$

$$-E_l\, l = -\vec{E}\cdot\vec{l}$$

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

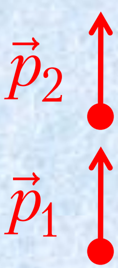
Минимальную энергию диполь имеет если дипольный момент параллелен напряженности электрического поля.
Это положение устойчивого равновесия.

Диполь-дипольное взаимодействие



$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\left(\vec{p}_1\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{p}_1}{r^5}$$

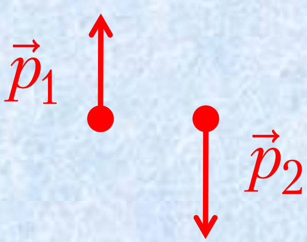
$$W = -\left(\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3\left(\vec{p}_1\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{p}_2\cdot\vec{r}\right) + r^2\left(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\right)}{r^5}$$



$\vec{r} \parallel \vec{p}_1, \vec{p}_2$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3p_1p_2 + p_1p_2}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2p_1p_2}{r^3}$$

W < 0 – силы притяжения



$\vec{r} \perp \vec{p}_1, \vec{p}_2$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\right)}{r^3}$$

W < 0 – силы притяжения