Глава 5. Теория поля

5.1 Скалярное поле

Определение

Если в области $D \subset \mathbb{R}^3$ задана скалярная функция точки $u(x, y, z)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле.

Определение

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в котором функция u принимает постоянное значение:
$u(x, y, z) = C$. В качестве примера можно привести эквипотенциальные поверхности в электростатике.
В пространстве $\mathbb{R}^2$: $u(x, y) = C$ – уравнения линий уровня. Например, изотермы, изобары, линии равных высот в географии.

5.2 Производная по направлению

Производная функции одной переменной задавалась на числовой оси:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}. \tag{5.1}$$

Попробуем определить производную функции нескольких переменных $u(x, y, z)$ по направлению некоторого вектора $\overrightarrow{l}$.

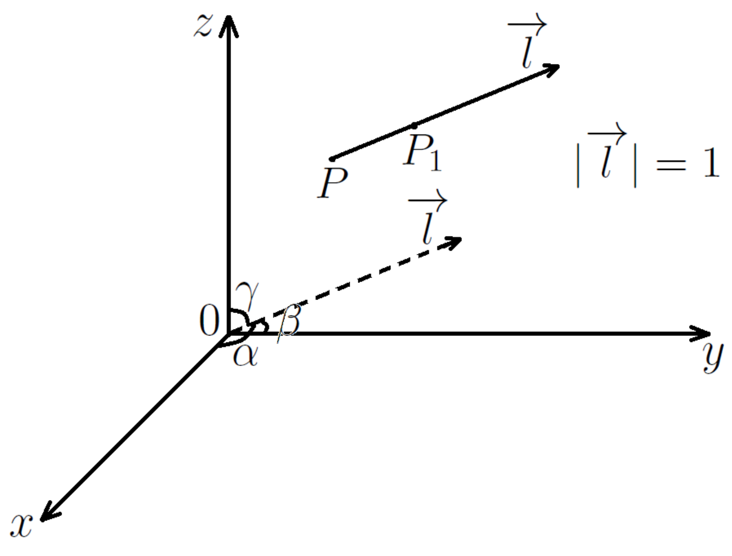

Рис. 34: Производная по направлению

Определим производную функции $u(x, y, z)$ в точке P в направлении $\overrightarrow{l}$, где $\overrightarrow{l}$ – единичный вектор выбранного направления:

$$\overrightarrow{l} = \cos\alpha \cdot \overrightarrow{i} + \cos\beta \cdot \overrightarrow{j} + \cos\gamma \cdot \overrightarrow{k}, \tag{5.2}$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – проекции вектора $\overrightarrow{l}$ на оси $OX,\ OY,\ OZ$ соответственно.

Возьмем точку P_1, удаленную на расстояние $\triangle l$ от точки P в направлении вектора $\overrightarrow{l}$. Ее координаты таковы:

$$P_1(x + \triangle l\cos\alpha,\ y + \triangle l\cos\beta, z + \triangle l\cos\gamma).$$

Определение

Рассмотрим отношение $\frac{u(P_1)-u(P)}{\triangle l}$. Если у него существует конечный предел при $\triangle l \to 0$, то он называется производной функции u по направлению $\overrightarrow{l}$ и обозначается символом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\triangle l \to 0} \frac{u(P_1) - u(P)}{\triangle l} =$$

$$= \lim_{\triangle l \to 0} \frac{u(x + \triangle l\cos\alpha,\ y + \triangle l\cos\beta,\ z + \triangle l\cos\gamma) - u(x, y, z)}{\triangle l}. \tag{5.3}$$

$\frac{\partial u}{\partial l}$ характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении $\overrightarrow{l}$.

Теорема 1

Если функция дифферернцируема в точке P, то ее производная по любому направлению существует и равна:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P \cdot \cos\gamma. \tag{5.4}$$

<u>Доказательство:</u>

Пусть функция u дифференцируема в точке P. Тогда, согласно определению дифференциала, ее приращение представимо в виде:

$$u(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z) - u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \triangle x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \triangle y + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \triangle z + o(\triangle l), \tag{5.5}$$

где $\triangle l = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 + (\triangle z)^2}$,

$\triangle x = \triangle l \cos\alpha,\ \triangle y = \triangle l \cdot \cos\beta,\ \triangle z = \triangle l \cdot \cos\gamma.$

Производные $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$ в формуле (5.5) вычислены в точке P.

Разделим обе части уравнения (5.5) на $\triangle l$:

$$\underbrace{\frac{u(P_1) - u(P)}{\triangle l}}_{\to \frac{\partial u}{\partial l}\big|_P} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}_{\text{не зависит от } \triangle l} + \underbrace{\frac{o(\triangle l)}{\triangle l}}_{\to 0}.$$

Тогда при $\triangle l \to 0$ получим:

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_P = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P \cdot \cos\gamma,$$

что и доказывает теорему.

■

Замечание

Если поле плоское ($\gamma = \frac{\pi}{2}$), то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и выполнено:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\alpha. \tag{5.6}$$

Замечание

Через точку P можно провести не прямую, а гладкую кривую и выбирать точку P_1 на ней. Параметризуем кривую. В качестве параметра l выберем длину участка кривой от фиксированной точки P. Тогда функция u на кривой будет функцией параметра l. Производную от функции u по параметру l найдем как производную сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dl}, \tag{5.7}$$

где все производные вычислены в точке P. Здесь $\frac{dx}{dl},\ \frac{dy}{dl},\ \frac{dz}{dl}$ – это направляющие косинусы касательной к кривой.

Сравнивая формулы (5.4) и (5.7), несложно увидеть, что производная по кривой совпадает с производной по направлению касательной к этой кривой.

Пример

Найти производную от функции $u = xyz$ в точке $P(5,1,2)$ в направлении точки $Q(7,-1,3)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P = yz\Big|_P = 2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P = xz\Big|_P = 10,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P = xy\Big|_P = 5.$$

Вектор направления PQ имеет координаты: $(2,-2,1)$. Нормируем его и получим вектор направления $\overrightarrow{l}$:

$$\overrightarrow{l} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{2}{3}\overrightarrow{i} - \frac{2}{3}\overrightarrow{j} + \frac{1}{3}\overrightarrow{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_P = 2\cdot\frac{2}{3} + 10\cdot(-\frac{2}{3}) + 5\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{20}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}.$$

5.3 Градиент

Определение

Градиент скалярного поля $u(x,y,z)$ – это векторное поле, задаваемое формулой:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\overrightarrow{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\overrightarrow{k} = \nabla u, \qquad (5.8)$$

где $\nabla = \overrightarrow{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \overrightarrow{j}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \overrightarrow{k}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$ – оператор Гамильтона (читается как "набла"). Формула (5.4) дает связь производной по направлению и градиента:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u\cdot\overrightarrow{l} = |\operatorname{grad} u|\cdot\cos\varphi, \qquad (5.9)$$

где φ – угол между градиентом и вектором $\overrightarrow{l}$.

С помощью формулы (5.9) можно дать инвариантное определение градиента. Для того, чтобы задать вектор, достаточно задать его модуль и направление. $|\operatorname{grad} u|$ – наибольшее возможное значение производной по направлению (так как $\cos\varphi \le 1$). Направление $\operatorname{grad} u$ – это направление наибыстрейшего возрастания функции.

Теорема 2

Направление $\operatorname{grad} u$ в любой точке совпадает с направлением нормали к поверхности уровня скалярного поля, проходящей через эту точку.

Доказательство:

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0). \tag{5.10}$$

Напишем уравнение нормали к этой поверхности:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}}. \tag{5.11}$$

Здесь $\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\right)$ – координаты направляющего вектора для прямой (5.11) (нормали). Как видим, направления нормали и $\operatorname{grad} u$ совпадают.

■

Следствие 1

$\operatorname{grad} u$ перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня, то есть его проекция на эту плоскость равна 0.

Следствие 2

Согласно формуле (5.9):

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos \varphi.$$

Следовательно, производная по любому направлению, касательному к поверхности уровня, проходящей через данную точку, равна 0.

Частный случай

В случае плоского поля:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j}\,.$$

При этом все свойства градиента сохраняются с заменой поверхностей уровня на линии уровня.

Приближенное вычисление градиента

Рассмотрим плоское поле. Пусть на плоскости задана густая сетка линий уровня. Тогда можно приближенно вычислить градиент. Выберем произвольную точку P_0. Через нее проходитнекоторая линия уровня: $u(x,y)=C$. На соседней линии уровня $u(x,y)=C+h$ найдем точку P_0 так, чтобы отрезок PP_0 был перпендикулярен линии уровня.

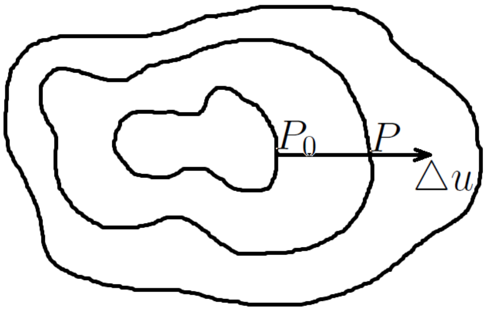

Рис. 35: Линии уровня

Тогда:

$$|\nabla u| = \left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| \approx \frac{u(P)-u(P_0)}{|P_0P|} = \frac{C+h-C}{|P_0P|} = \frac{h}{|P_0P|}.$$

Шаг сетки h известен по условию задачи.

$|P_0P|$ можно измерить на чертеже.

Направление ∇u задается вектором $\overrightarrow{P_0P}$.

Свойства градиента:

1) $\operatorname{grad}(u_1+u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$,

2) $\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u, \quad$ где $C = const$.

3) $\operatorname{grad}(u_1u_2) = u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2$.

Доказательство:

$$\operatorname{grad}(u_1u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1u_2)\cdot\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}(u_1u_2)\cdot\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}(u_1u_2)\cdot\overrightarrow{k} =$$

$$= u_2 \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)}_{=\nabla u_1} + u_1 \underbrace{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)}_{=\nabla u_2}$$

■

4) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\cdot \operatorname{grad} u$.

Доказательство:

$$\operatorname{grad} f(u) = \frac{\partial}{\partial x} f(u)\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y} f(u)\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z} f(u)\cdot\vec{k} =$$

$$= \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k} = \frac{df}{du}\cdot\operatorname{grad} u.$$

■

Пример

Найдем напряженность электрического поля точечного заряда q, расположенного в начале координат.

Потенциал поля точечного заряда известен:

$$u(x,y,z) = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Тогда напряженность поля равна:

$$\vec{E} = -\nabla u = -\Big(-\frac{1}{2}q\cdot(2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\vec{i}+2y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\vec{j}+$$

$$+2z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\vec{k})\Big) = \frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\underbrace{(x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k})}_{\vec{r}} = \frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

5.4 Векторное поле

Определение

Если в каждой точке области $D \subset \mathbb{R}^3$ задан вектор, то говорят, что в этой области задано векторное поле. Например, векторы скоростей текущей жидкости или векторы напряженностей электрического поля образуют векторные поля.

Для того, чтобы задать векторное поле $\overrightarrow{A}$, достаточно задать его проекции на оси координат $A_x,\ A_y,\ A_z$:

$$\overrightarrow{A} = A_x(x,y,z)\cdot\overrightarrow{i} + A_y(x,y,z)\cdot\overrightarrow{j} + A_z(x,y,z)\cdot\overrightarrow{k}.$$

Определение

Пусть $P(x,y,z)$ – произвольная точка пространства. Поле называется однородным, если: $\overrightarrow{A}(P) = const$.

Определение

Поле называется плоским, если все векторы поля параллельны одной плоскости и их величина не меняется при смещении перпендикулярно этой плоскости. Пример плоского поля: $\overrightarrow{A}(P) = A_x(x,y)\cdot\overrightarrow{i} + A_y(x,y)\cdot\overrightarrow{j}$.

Пример

Пусть тело вращается с постоянной угловой скоростью $\overrightarrow{\omega}$ вокруг оси OZ. Найдем поле скоростей точек тела.

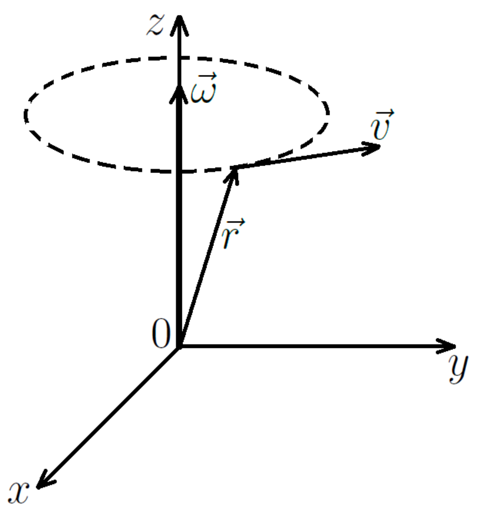

Рис. 36: Связь линейной и угловой скоростей для точки вращающегося тела

Линейная скорость точки связана с угловой по формуле:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{r}, \quad \text{где } \overrightarrow{\omega} = \omega\cdot\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

Тогда:

$$\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \cdot \overrightarrow{i} + \omega x \cdot \overrightarrow{j}. \qquad (5.12)$$

Нетрудно убедиться, что векторы $\overrightarrow{v}$ образуют плоское поле: векторы $\overrightarrow{v}$ параллельны плоскости XOY и не меняются при изменении координаты z.

Определение

Векторной линией векторного поля называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора поля. Например: линии тока жидкости, силовые линии электрического поля.

Алгоритм поиска векторных линий

Зададим векторную линию поля $\overrightarrow{A} = A_x \cdot \overrightarrow{i} + A_y \cdot \overrightarrow{j} + A_z \cdot \overrightarrow{k}$ параметрически:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Касательный вектор к линии имеет компоненты $(x'(t), y'(t), z'(t))$ или (dx, dy, dz). Напишем условие параллельности векторов (dx, dy, dz) и $\overrightarrow{A}(A_x, A_y, A_z)$:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

Мы получили систему диффферернциальных уравнений, определяющую векторные линии поля. В случае плоского поля:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y}.$$

Пример

Для плосокго поля скоростей точек вращающегося тела $\overrightarrow{A} = -\omega y \cdot \overrightarrow{i} + \omega x \cdot \overrightarrow{j}$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} \ \Leftrightarrow\ xdx = -ydy.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Таким образом, векторные линии представляют собой окружности.

5.5 Дивергенция векторного поля

Пусть в трехмерном пространстве задано векторное поле:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}.$$

Определение

Дивергенция (от лат. *divergere* – обнаруживать расхождение) – это линейный дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное. Для векторного поля $\vec{A}$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{5.13}$$

Пример

Найдем дивергенцию для следующих векторных полей:

$$\vec{v} = -\omega y \cdot \vec{i} + \omega x \cdot \vec{j}: \qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}: \qquad \operatorname{div}\vec{r} = 3.$$

Замечание

$\operatorname{div}\vec{A}$ – скалярная величина.

Физический смысл дивергенции

Дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства (вернее, достаточно малая окрестность точки) является источником или стоком этого поля:

$\operatorname{div}\vec{A} > 0$ – точка является источником поля;

$\operatorname{div}\vec{A} < 0$ – точка является стоком поля;

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$ – стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга. В качестве примера можно рассмотреть озеро. Если считать глубину озера постоянной, а течение – горизонтальным, то векторы скоростей жидкости во всех точках озера будут задавать двумерное векторное поле скоростей на двумерном пространстве. В такой модели родники, бьющие из дна озера, будут давать положительную дивергенцию поля скоростей течения, а подводные стоки (пещеры, куда вода утекает) – отрицательную дивергенцию.

Некоторые свойства дивергенции:

1) Линейность.

$$\operatorname{div}(C_1\vec{A}_1 + C_2\vec{A}_2) = C_1 \operatorname{div}\vec{A}_1 + C_2 \operatorname{div}\vec{A}_2. \tag{5.14}$$

2) Дивергенция произведения скалярного поля на векторное:

$$\operatorname{div}(u\vec{A}) = u \operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\operatorname{grad} u. \tag{5.15}$$

<u>Доказательство:</u>

$$u\vec{A} = uA_x\vec{i} + uA_y\vec{j} + uA_z\vec{k}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} u\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(uA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uA_z) =$$

$$= u\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)}_{=\operatorname{div}\vec{A}} + \underbrace{\left(A_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + A_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{=\vec{A}\cdot\operatorname{grad} u}.$$

■

Пример

$$\operatorname{div}(u\vec{r}) = u\underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{=3} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad} u = 3u + \vec{r}\cdot\operatorname{grad} u.$$

5.6 Ротор векторного поля

Определение

Ротор – векторный дифференциальный оператор над векторным полем. Для поля $\vec{A}$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \qquad (5.16)$$

Замечание

$\operatorname{rot}\vec{A}$ – векторная величина.

Физический смысл ротора

Рассмотрим поток движущейся жидкости. Поместим в некоторую точку этого потока колесико бесконечно малого размера с лопастями, расположенными по его периметру параллельно оси. Под воздействием потока жидкости колесико будет вращаться с некоторой скоростью, величина и направление которой является функцией положения точки. Ротор вектора скорости $\vec{A}$ характеризует вращательную компоненту поля скоростей.

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}, \quad \text{где } \vec{\omega} \text{ – мгновенная угловая скорость.}$$

Некоторые свойства ротора:

1) Линейность.

$$\operatorname{rot}(C_1\vec{A}_1 + C_2\vec{A}_2) = C_1 \operatorname{rot}\vec{A}_1 + C_2 \operatorname{rot}\vec{A}_2. \qquad (5.17)$$

Доказательство очевидно в силу линейности операции диффереренцирования.

2) Ротор произведения скалярного поля на векторное:

$$\operatorname{rot}(u\vec{A}) = u \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad} u \times \vec{A}. \qquad (5.18)$$

<u>Доказательство:</u>

$$\operatorname{rot}(u\vec{A}) = \left(\frac{\partial(uA_z)}{\partial y} - \frac{\partial(uA_y)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(uA_x)}{\partial z} - \frac{\partial(uA_z)}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial(uA_y)}{\partial x} - \frac{\partial(uA_x)}{\partial y}\right)\vec{k} = u\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + u\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+ u\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}A_z - \frac{\partial u}{\partial z}A_y\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}A_x - \frac{\partial u}{\partial x}A_z\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}A_y - \frac{\partial u}{\partial y}A_x\right)\vec{k} = u \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad} u \times \vec{A}. \qquad \blacksquare$$

Пример

Посчитаем ротор плоского поля $\vec{v} = -\omega y \cdot \vec{i} + \omega x \cdot \vec{j}$:

$\operatorname{rot}\vec{v} = 2\omega \cdot \vec{k}$.

5.7 Оператор Гамильтона

Определение

Введем оператор Гамильтона ∇ по следующему правилу:

$$\nabla = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.19}$$

При помощи оператора Гамильтона градиент, дивергенцию и ротор можно записать в следующем виде:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} u, \tag{5.20}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{A}. \tag{5.21}$$

Здесь “умножение” $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ на A_x, A_y и A_z соответственно предполагает дифференцирование по соответствующей переменной.

$$\nabla \times \vec{A} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{5.22}$$

Замечание

Оператор ∇ переводит скалярное поле u в векторное поле ∇u, а векторное поле $\vec{A}$ либо в скалярное поле $\nabla \cdot \vec{A}$, либо в векторное поле $\nabla \times \vec{A}$.

Дальнейшие свойства ротора и дивергенции:

1)

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \triangle u \quad \text{– оператор Лапласа.} \tag{5.23}$$

Заметим, что $\triangle = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$.

2)

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}. \tag{5.24}$$

Доказательство:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)}_{=0}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)}_{=0}\vec{j} +$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)}_{=0}\vec{k} = \vec{0}.$$

■

Свойство 2 можно доказать и по-другому:

$$\nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla)u = \vec{0}.$$

Векторное произведение вектора ∇ на самого себя равно $\vec{0}$.

3)

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0. \tag{5.25}$$

Доказательство:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$
$$= \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}} = 0.$$

■

Свойство 3 можно доказать и по-другому:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.$$

Векторное произведение $\nabla \times \vec{A}$ ортогонально вектору ∇. Следовательно, скалярное произведение векторов ∇ и $\nabla \times \vec{A}$ равно 0.

4)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \triangle\vec{A}, \quad \text{где } \triangle\vec{A} = \triangle A_x \cdot \vec{i} + \triangle A_y \cdot \vec{j} + \triangle A_z \cdot \vec{k}. \tag{5.26}$$

Доказательство:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}\vec{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}\vec{A})_y\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,\vec{A})_x - \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}\,\vec{A})_z\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}\,\vec{A})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,\vec{A})_x\right)\vec{k} =$$

$$\Big/ (\mathrm{rot}\,\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad (\mathrm{rot}\,\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad (\mathrm{rot}\,\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \Big/$$

$$= \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x}\vec{i} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}\vec{i} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\vec{i} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y}\vec{j} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\vec{j} -$$

$$-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}\vec{j} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z}\vec{k} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\vec{k} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\vec{k} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z}\vec{k} =$$

$$\Big/ \text{Добавим и вычтем} \quad \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\vec{k} \Big/$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{k} - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{j} - \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{k} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\vec{k} - \triangle A_x\vec{i} - \triangle A_y\vec{j} - \triangle A_z\vec{k} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \triangle\vec{A}.$$

■

Замечание

Свойство 4 аналогично формуле для двойного векторного произведения:

$$\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

при условии договоренности, что оператор ставится всегда впереди функции:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A}.$$

5)

$$\mathrm{div}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B}. \tag{5.27}$$

Доказательство:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}.$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x}A_y - \frac{\partial A_z}{\partial x}B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x}A_z\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}B_x + \frac{\partial B_x}{\partial y}A_z - \frac{\partial A_x}{\partial y}B_z - \frac{\partial B_z}{\partial y}A_x\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}B_y + \frac{\partial B_y}{\partial z}A_x - \frac{\partial A_y}{\partial z}B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z}A_y\right) =$$

$$= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) -$$

$$-\left(A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\right) =$$

$$= \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}.$$

■

6)

$$\triangle(uv) = v\triangle u + u\triangle v + 2\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v. \tag{5.28}$$

Доказательство:

$$\triangle(uv) = \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2} = /\text{по формуле Лейбница}/ =$$

$$= v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} =$$

$$= v\triangle u + u\triangle v + 2\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v.$$

■

5.8 Криволинейный интеграл второго рода

Рассмотрим непрерывную кривую AB. Пусть на ней задана функция $f(x,y)$. Последовательно разобъем кривую AB точками A_i (в заданном направлении). На элементарной дуге A_iA_{i+1} выберем произвольную точку $M_i(\xi_i,\eta_i)$. Посчитаем значение функции в этой точке: $f(M_i)$. Домножим $f(M_i)$ на величину проекции этой дуги на ось OX и составим интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\triangle x_i, \quad \text{где} \ \ \triangle x_i = x_{i+1} - x_i. \tag{5.29}$$

Если при измельчении разбиения ($\mu = \max\limits_i A_iA_{i+1} \to 0$) интегральная сумма (5.29) имеет конечный предел, не зависящий от способа разбиения кривой и выбора точек M_i, то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции f по кривой AB и обозначается символом:

$$\int\limits_{AB} f(M)dx = \int\limits_{AB} f(x,y)dx = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\triangle x_i. \tag{5.30}$$

Аналогично через проекции элементарных дуг на ось OY можно определить интеграл:

$$\int\limits_{AB} f(M)dy = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\triangle y_i. \tag{5.31}$$

Если задать на кривой AB две функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, то можно определить интеграл:

$$\int\limits_{AB} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) \tag{5.32}$$

как сумму интегралов (5.30) и (5.31).

Проекция дуги на ось зависит от направления дуги и меняет знак при изменении этого направления:

$$\int\limits_{BA} f(x,y)dx = -\int\limits_{AB} f(x,y)dx. \tag{5.33}$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл в пространстве:

$$\int\limits_{AB} (Pdx + Qdy + Rdz)\,. \tag{5.34}$$

5.9 Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема 3

Пусть кривая AB задана параметрически: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Предположим также, что φ и ψ – непрерывно дифференцируемые функции и при изменении параметра t от α до β точка на кривой пробегает от A до B. Пусть $f(x,y)$ – непрерывная функция на AB. Тогда существуют интегралы $\int\limits_{AB} f(x,y)dx$ и $\int\limits_{AB} f(x,y)dy$ и выполнено:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)dt, \tag{5.35}$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)dt. \tag{5.36}$$

<u>Доказательство:</u>

Составим интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i = \Big/ \triangle x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt \Big/ =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)) \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt. \tag{5.37}$$

С другой стороны:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt. \tag{5.38}$$

Тогда разность $\sigma - I$ примет вид:

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t)) \Big] \varphi'(t) dt. \tag{5.39}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\triangle t_i$ столь малыми, чтобы колебания функции $f(\varphi(t), \psi(t))$ на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ не превышали ε. Поскольку непрерывная функция на замкнутом промежутке равномерно непрерывна на нем (по теореме Кантора), выбор $\triangle t_i$ можно сделать сразу для всех отрезков $[t_i, t_{i+1}] \subset [\alpha, \beta]$. Кроме того, непрерывная функция $\varphi'(t)$ на замкнутом промежутке $[\alpha, \beta]$ ограничена: $|\varphi'(t)| \le L$. Тогда имеет место неравенство:

$$|\sigma - I| < \varepsilon \cdot L \cdot |\beta - \alpha|. \tag{5.40}$$

Таким образом, измельчая разбиение, мы можем сделать $|\sigma - I|$ сколь угодно малым. Следовательно,

$$\lim_{\max\limits_i \triangle t_i \to 0} \sigma = I, \tag{5.41}$$

что и доказывает существование интеграла и формулу (5.35). Аналогично доказывается формула (5.36).

■

Частный случай

Пусть кривая задана явным образом: $y = y(x)$. Тогда формулы (5.35) и (5.36) дадут следующий результат:

$$\int\limits_{AB} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))\, dx. \tag{5.42}$$

Замечание

Формулы (5.35) и (5.36) верны и для самопересекающейся кривой, если параметр на кривой меняется непрерывным образом.

Замечание

В случае замкнутого контура $\mathcal{L}$ его можно разбить на две кривых и будет выполнено:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \ldots = \int\limits_{AMC} \ldots + \int\limits_{CNA} \ldots .$$

Направление обхода на замкнутом контуре

В случае замкнутой кривой задание начальной и конечной точек не определяет направление.

Определение

Направление считается положительным, если контур обходится против часовой стрелки. Под $\int\limits_{\mathcal{L}}(Pdx + Qdy)$ мы будем понимать интеграл, взятый в положительном направлении.

Замечание

Криволинейный интеграл 2 рода можно получить предельным переходом от интеграла по ломаной.

5.10 Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода

Рассмотрим гладкую кривую $\mathcal{L}$ и выберем в качестве ее параметра длину дуги l :

$$x = x(l),\ y = y(l), \quad \text{где } 0 \leq l \leq L, \quad L \text{ – длина кривой.}$$

Пусть $x(l),\ y(l)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда будет выполнена “теорема Пифагора” для дифференциалов (формула (3.17)):

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.$$

$$x = x(l) \ \Rightarrow\ dx = x'(l)dl,$$

$$y = y(l) \ \Rightarrow\ dy = y'(l)dl.$$

Тогда:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dl} = x'(l),$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{dl} = y'(l).$$

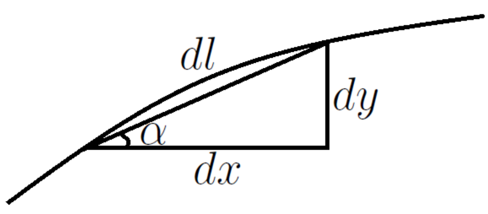

Рис. 37: “Теорема Пифагора” для дифференциалов

Если функции $P(M)$ и $Q(M)$ непрерывны вдоль кривой $\mathcal{L}$, то будет выполнено:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = /\text{формулы (5.35) и (5.36)}/ =$$

$$= \int\limits_{0}^{L} \left(P(x(l), y(l)) \cos\alpha + Q(x(l), y(l)) \sin\alpha\right) dl =$$

$$= /\text{формула (3.25)}/ = \int\limits_{\mathcal{L}} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha) dl, \tag{5.43}$$

то есть мы получили криволинейный интеграл 1 рода.

Аналогичная формула для пространственной кривой:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int\limits_{\mathcal{L}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dl. \tag{5.44}$$

5.11 Работа силового поля

Рассмотрим материальную точку, которая перемещается по плоской кривой $\mathcal{L}$ под действием силы $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j}$. Найдем работу силового поля A. Разобъем кривую точками M_i.

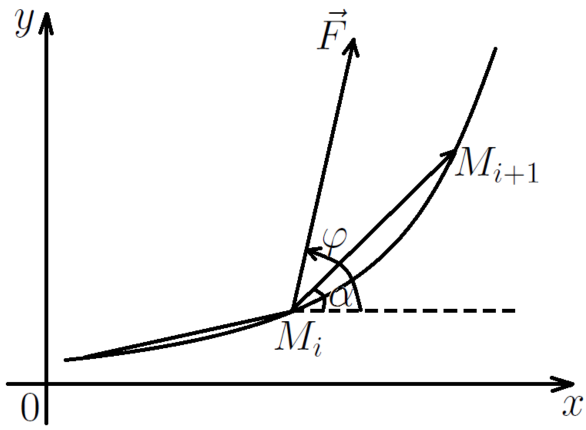

Рис. 38: Работа силового поля $\vec{F}$ при перемещении по кривой $\mathcal{L}$

Обозначим за α угол между хордой M_iM_{i+1} и осью OX. При измельчении разбиения этот угол будет стремиться к углу между касательной и осью OX.

Пусть φ – угол между вектором силы $\overrightarrow{F}$ и осью OX, θ – угол между $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ и $\overrightarrow{F}$. Элементарная работа dA_i при перемещении от точки M_i к точке M_{i+1} будет равна:

$$dA_i = F \cdot \cos\theta \cdot dl_i, \quad \text{где} \;\; dl_i = |M_iM_{i+1}|. \tag{5.45}$$

Следовательно, полная работа:

$$A = \int\limits_{\mathcal{L}} F \cos\theta \cdot dl. \tag{5.46}$$

$$\theta = \varphi - \alpha \;\Rightarrow\; \cos\theta = \cos\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\varphi \cdot \sin\alpha.$$

Тогда формулу (5.46) можно переписать в виде:

$$A = \int\limits_{\mathcal{L}} \Big(\underbrace{F\cos\varphi}_{F_x} \cos\alpha + \underbrace{F\sin\varphi}_{F_y} \sin\alpha \Big) dl =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{L}} (F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha)\, dl = \int\limits_{\mathcal{L}} (F_x dx + F_y dy) = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot \vec{dl}. \tag{5.47}$$

Аналогично в трехмерном случае:

$$A = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int\limits_{\mathcal{L}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)\,. \tag{5.48}$$

Определение

Если кривая $\mathcal{L}$ замкнута, то криволинейный интеграл 2 рода обозначается символом $\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot \vec{dl}$ и называется циркуляцией векторного поля по контуру $\mathcal{L}$.