Дифференциальные уравнения

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Основные понятия

Определение

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и её производные y', y'', $\ldots\ldots$, $y^{(n)}$.

Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной независимой переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Если в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называют дифференциальным уравнением с частными производными.

Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пусть x – независимая переменная, y – искомая функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения будет

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Определение

Наивысший порядок n производных неизвестной функции называется порядком дифференциального уравнения.

Определение

Функция $y = \varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения, если её подстановка в уравнение обращает его в тождество.

В данном параграфе мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка. Общий вид такого уравнения будет

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

или, в решенной относительно y' форме:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3}$$

Рассмотрим простейший случай, когда уравнение имеет вид:

$$y' = f(x). \tag{4}$$

Тогда множество решений уравнения дается формулой:

$$y = \int f(x)dx + C, \tag{5}$$

где C – произвольная постоянная. Таким образом, в этом случае мы получим семейство решений дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную. Такое семейство решений называется общим интегралом уравнения. Он может выражаться в том числе и в неявной форме:

$$\psi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \omega(x, y) = C. \tag{6}$$

Определение решения по начальному условию. Теорема существования и единственности.

Уравнение (4) имеет бесконечно много решений, поскольку в формулу (5) входит произвольная постоянная C.

Для того, чтобы получить единственное решение уравнения (4), поставим начальное условие, то есть потребуем, чтобы функция y принимала заданное значение y_0 при $x = x_0$:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{7}$$

Действительно, пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Заменяя в формуле (5) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом x и нижним пределом x_0, получим:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + C. \tag{8}$$

Удовлетворим начальному условию. При $x = x_0$ интеграл обращается в нуль и мы получим:

$$C = y_0. \tag{9}$$

Таким образом, уравнение (4) при начальном условии (7) имеет единственное решение:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0. \tag{10}$$

Отметим, что это решение единственно на всем интервале (a, b).

Определение

Уравнение (4) вместе с заданным начальным условием (7) называется задачей Коши.

<u>Геометрическая интерпретация.</u>

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области Ω на плоскости XOY. Согласно уравнению (3):

$$f(x, y) = y' = \operatorname{tg} \alpha,$$

то есть в каждой точке области Ω задано направление касательной к графику функции $y = \varphi(x)$. Таким образом, уравнение (3) эквивалентно определению в области Ω поля направлений, то есть в каждой точке области Ω уравнение (3) определяет некоторое направление. Вообще говоря, на прямой можно выбрать 2 вектора противоположных направлений, но им обоим соответствует один и тот же $\operatorname{tg}\alpha$.

Определение

Интегральные кривые уравнения (3) – это кривые l, лежащие в области Ω и обладающие свойством: в каждой точке (x, y) касательная к l имеет направление, определяемое указанным выше полем направлений.

Сформулируем теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения.

Теорема 1 (Теорема Пикара)

Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y в области Ω, то через каждую точку, принадлежащую Ω, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (3). Или: то для любой точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения, удовлетворяющее условию: $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Без доказательства.

Определение

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется семейство функций $y = \varphi(x, C)$ таких, что при любом C функция $\varphi(x, C)$ удовлетворяет уравнению и для любых начальных условий $y\big|_{x=x_0} = y_0$ $((x_0, y_0) \in \Omega)$ можно найти значение $C = C_0$, при котором $\varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Общее решение (общий интеграл) может выражаться в неявной форме:

$$\psi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \omega(x, y) = C.$$

Частное решение получается из общего при каком-то конкретном значении C.

Замечание

Общего метода для решения дифференциальных уравнений не существует. Однако, в некоторых частных случаях их удается решать.

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение

Если уравнение $\Phi(x, y, y') = 0$ с помощью алгебраических преобразований удаётся привести к виду

$$y' = g(x) \cdot h(y) \tag{11}$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \tag{12}$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим переменные в уравнениях (11) и (12).

$$y' = g(x) \cdot h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx, \text{ где } h(y) \neq 0. \tag{13}$$

Проинтегрируем обе части уравнения (13):

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$$

и получим решение уравнения в неявном виде:

$$\omega(x, y) = C.$$

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{N_1(x)M_2(y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy, \text{ где } N_1(x) \neq 0, M_2(y) \neq 0. \tag{14}$$

Проинтегрируем обе части уравнения (14) и получим решение в неявном виде:

$$\omega(x, y) = C.$$

Пример 1

Найдем решение дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Bigg| \cdot \frac{dx}{y} \leftarrow \text{ здесь мы предполагаем, что } y \neq 0.$$

$$\int \left| \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1 \Leftrightarrow \right.$$

$$\Leftrightarrow \ln|yx| = \ln C_1 \;\Leftrightarrow\; |yx| = C_1, \quad C_1 \neq 0.$$

Простой подстановкой проверяется, что $y = 0$ является решением исходного уравнения. Однако, в процессе решения мы его потеряем. Следовательно, нужно добавить его обратно:

$$\left[\begin{array}{l} |yx| = C_1,\ C_1 \neq 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; |yx| = C, \text{ где } C \text{ – произвольная постоянная.}$$

Изобразим интегральные кривые (решения уравнения) и поле направлений на плоскости XOY.

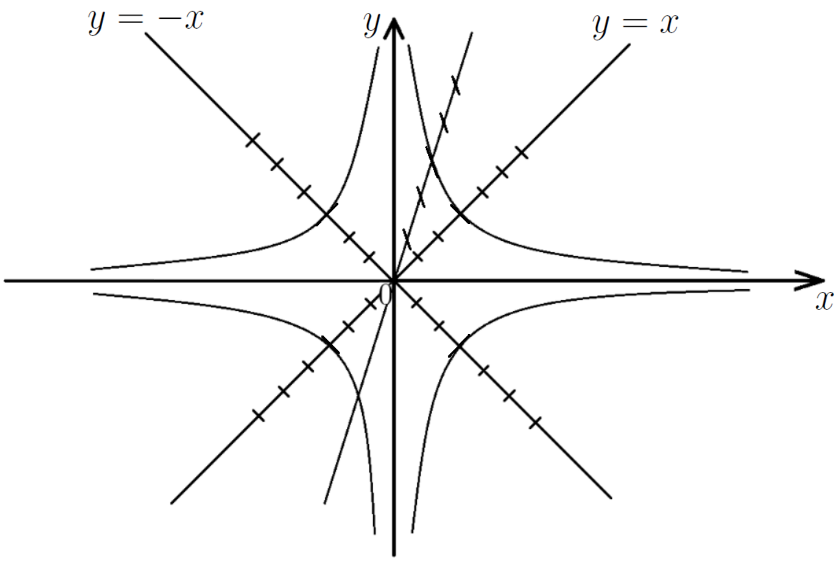

Рис. 1: Интегральные кривые $|yx| = C$.

Интегральные кривые – это гиперболы $y = \pm\frac{C}{x}$. На прямых, проходящих через начало координат, короткими отрезками показано поле направлений для данного уравнения.

Пример

Опишем процесс охлаждения тела.

Скорость охлаждения пропорциональна разности температуры тела T и температуры окружающей среды T_c:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c) \ \Leftrightarrow\ \frac{dT}{T - T_c} = -kdt \ \text{(считаем, что } T > T_c\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(T - T_c) = -kt + \ln C \ \Leftrightarrow\ T - T_c = e^{-kt + \ln C} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ T = T_c + Ce^{-kt}.$$

Пусть задана температура тела в начальный момент времени:

$$T\Big|_{t=0} = T_0.$$

Подставим это условие в решение уравнения:

$$T_0 = T_c + C \cdot e^0 \ \Leftrightarrow\ C = T_0 - T_c.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид:

$$T = T_c + (T_0 - T_c) \cdot e^{-kt}.$$

1.3 Однородные уравнения

Определение

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{15}$$

Сведем это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого сделаем замену:

$$\frac{y}{x} = u \ \Leftrightarrow\ y = ux. \tag{16}$$

Следовательно,

$$y' = u' \cdot x + u, \quad dy = udx + xdu. \tag{17}$$

Подставим y и y' в уравнение (15):

$$u' \cdot x + u = f(u) \ \Leftrightarrow\ u' \cdot x = f(u) - u \ \Leftrightarrow\ \frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \ \Big/ \text{Здесь мы предполагаем, что } f(u) \neq u \Big/$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + \ln C_1 \ \Leftrightarrow \ x = C \cdot e^{\int \frac{du}{f(u)-u}}. \qquad (18)$$

Как определить, что уравнение однородное?

С помощью метода размерностей.

Припишем функции y, переменной x и их дифференциалам некоторые размерности. Например, метры:

$$x \sim \text{м}, \quad y \sim \text{м}, \quad dx \sim \text{м}, \quad dy \sim \text{м}.$$

Производная $y' = \frac{dy}{dx} \sim 1$ – безразмерная величина.

Для трансцендентных функций (то есть функций, не являющихся алгебраическими: $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ e^x,\ a^x,\ \ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,$ $\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x$) в качестве аргумента должна стоять безразмерная величина: $e^{\frac{y}{x}},\ \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ и так далее.

Уравнение будет однородным, если в нём складываются величины одной размерности.

Например:

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2,$$

$$(\text{м}^2 + \text{м} \cdot \text{м}) \cdot 1 = \text{м} \cdot \sqrt{\text{м}^2 - \text{м}^2} + \text{м} \cdot \text{м} + \text{м}^2.$$

Следовательно, уравнение однородное.

Пример

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Замена: $u = \frac{y}{x} \ \Leftrightarrow \ y = ux.$

Соответственно, $y' = u'x + u.$

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u'x + u = \frac{2ux^2}{x^2 - u^2x^2} \ \Leftrightarrow \ \frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{2u}{1 - u^2} \ \Leftrightarrow$$

/ $u \neq 1 \ \Leftrightarrow \ y \neq x$ – выполнено в силу области определения функции $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ /

$$\Leftrightarrow\ \frac{du}{dx}\cdot x=\frac{2u}{1-u^2}-u=\frac{2u-u+u^3}{1-u^2}=\frac{u+u^3}{1-u^2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{dx}{x}=\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du\ \Leftrightarrow\ \int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du\ \Leftrightarrow$$

$$\Big/\ \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{1+u^2}$$

$$1-u^2=A(1+u^2)+(Bu+C)u$$

$$\left.\begin{array}{rrcl} u^2: & -1 & = & A+B\\ u^1: & 0 & = & C\\ u^0: & 1 & = & A\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcr} A & = & 1,\\ B & = & -2,\\ C & = & 0.\end{array}\right.\ \Big/$$

$$\Leftrightarrow\ \ln|x|=\int\frac{du}{u}-\int\frac{2u}{1+u^2}du\ \Leftrightarrow\ \ln|x|=\ln|u|-\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln|x|=\ln|u|-\ln(1+u^2)+C_1\ \Leftrightarrow\ \frac{x(u^2+1)}{u}=C\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \Big/\ u=\frac{y}{x}\ \Big/\ \Leftrightarrow\ x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=C\cdot\frac{y}{x}\ \Leftrightarrow\ \underline{x^2+y^2-Cy=0}.$$

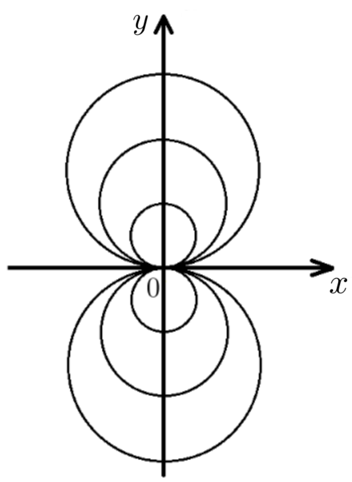

Рис. 2: Окружности $x^2+y^2-Cy=0$.

1.4 Дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{19}$$

Это уравнение можно свести к однородному с помощью следующей замены переменных:

$$\begin{cases} x &= u + m \\ y &= v + n \end{cases}, \quad \text{где } m,\ n = const. \tag{20}$$

Тогда:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1m + b_1n + c_1}{a_2u + b_2v + a_2m + b_2n + c_2}\right). \tag{21}$$

Постоянные m и n найдем из следующих условий:

$$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 &= 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 &= 0. \end{cases} \tag{22}$$

Тогда уравнение становится однородным:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 + b_1 \cdot \frac{v}{u}}{a_2 + b_2 \cdot \frac{v}{u}}\right). \tag{23}$$

Если система (22) не имеет решения, то это означает, что:

$$a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y). \tag{24}$$

Тогда можно ввести новую переменную u вместо y:

$$u(x) = a_1x + b_1y + c_1 \ \Leftrightarrow\ y(x) = \frac{1}{b_1}(u - a_1x - c_1). \tag{25}$$

Уравнение сведётся к следующему виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\frac{du}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \quad \Bigg| \cdot b_1dx \tag{26}$$

$$\Bigg/ a_2x + b_2y + c_2 \underset{\substack{\uparrow \\ (24)}}{=} \lambda \underbrace{(a_1x + b_1y)}_{u-c_1} + c_2 = \lambda u - \lambda c_1 + c_2 \Bigg/$$

$$\Leftrightarrow\ du - a_1dx = f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \cdot b_1dx\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ du = \left(f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \cdot b_1 + a_1\right)dx\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{du}{f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \cdot b_1 + a_1} = dx. \tag{27}$$

Таким образом, переменные в уравнении разделились и решение находится интегрированием.

Пример 1

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x &= u + m, \\ y &= v + n. \end{cases}$$

Найдём m и n:

$$\begin{cases} m + n - 2 &= 0 \\ m - n + 4 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - n \\ 2 - n - n + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m &= -1, \\ n &= 3. \end{cases}$$

Итак, замена:

$$\begin{cases} x &= u - 1, \\ y &= v + 3. \end{cases}$$

Соответственно, $dx = du$, $dy = dv$.

Подставим x и y в исходное уравнение:

$$(u - 1 + v + 3 - 2)du + (u - 1 - v - 3 + 4)dv \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (u + v)du + (u - v)dv = 0.$$

Мы получим однородное уравнение.

Сделаем замену:

$$\frac{u}{v} = t \ \Leftrightarrow \ u = vt.$$

Здесь мы предполагаем, что $v \neq 0$. Если $v = 0$, то $y = 3$. Подстановка в уравнение даёт: $(x+1)dx = 0$. Значит $x = -1$. Таким образом, $v = 0$ даёт не функцию, а значение в одной точке, что не является решением дифференциального уравнения.

Соответственно, $\quad du = vdt + tdv.$

Подставляем в уравнение:

$$(vt + v)(vdt + tdv) + (vt - v)dv = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ v^2tdt + vt^2dv + v^2dt + vtdv + vtdv - vdv = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (v^2t + v^2)dt = -(vt^2 + vt + vt - v)dv \quad \Big| \cdot \frac{1}{v}$$

$$\Leftrightarrow \ (vt + v)dt = -(t^2 + 2t - 1)dv \quad \Big| \cdot \frac{1}{v(t^2 + 2t - 1)}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{t + 1}{t^2 + 2t - 1}dt = -\frac{dv}{v}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{t+1}{t^2+2t-1}dt = -\ln|v| \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\int \frac{d\big((t+1)^2-2\big)}{(t+1)^2-2} = -\ln|v| \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\ln|(t+1)^2-2| + \ln|v| = \ln C \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ |t^2+2t-1|^{\frac{1}{2}} \cdot |v| = C, \quad C > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (t^2+2t-1)\cdot v^2 = C_1, \quad C_1 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ /t = \frac{u}{v}/ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(\frac{u^2}{v^2} + 2\frac{u}{v} - 1\right)v^2 = C_1 \ \Leftrightarrow \ \Bigg/ \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x+1, \\ v & = & y-3. \end{array} \right. \Bigg/ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \underline{\left(\frac{(x+1)^2}{(y-3)^3} + 2\frac{x+1}{y-3} - 1\right)(y-3)^2 = C_1,} \quad \text{где } \ C_1 \neq 0.$$

Пример 2

$$(3x+2y+1)dx + (6x+4y-3)dy = 0.$$

Здесь $6x+4y = 2\cdot(3x+2y)$. Поэтому введём новую переменную u вместо y по правилу:

$$u = 3x+2y+1 \ \Leftrightarrow \ y = \frac{1}{2}u - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2},$$

$$dy = \frac{1}{2}du - \frac{3}{2}dx.$$

Подставим y и dy в исходное уравнение:

$$udx + (2u-5)\left(\frac{1}{2}du - \frac{3}{2}dx\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(u - 3u + \frac{15}{2}\right)dx = -\left(u - \frac{5}{2}\right)du \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; dx = \frac{u - \frac{5}{2}}{2u - \frac{15}{2}}du.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$x + C = \int \frac{u - \frac{5}{2}}{2u - \frac{15}{2}}du = \int \frac{u - \frac{15}{4} + \frac{15}{4} - \frac{5}{2}}{2\left(u - \frac{15}{4}\right)}du =$$

$$= \int \frac{1}{2}du + \frac{5}{8}\int \frac{du}{u - \frac{15}{4}} = \frac{1}{2}u + \frac{5}{8}\ln\left|u - \frac{15}{4}\right|.$$

Учитывая, что $u = 3x + 2y + 1$, вернемся к старой переменной y:

$$x + C = \frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2} + \frac{5}{8}\ln\left|3x + 2y + 1 - \frac{15}{4}\right| \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \underline{\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2} + \frac{5}{8}\ln\left|3x + 2y - \frac{11}{4}\right| = C.}$$

1.5 Линейные уравнения

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{28}$$

где $p(x),\; q(x)$ – заданные функции.

Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение при $q(x) = 0$:

$$\tilde{y}' + p(x)\tilde{y} = 0. \tag{29}$$

Переменные здесь разделяются:

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + p(x)\tilde{y} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + p(x)dx = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln|\tilde{y}| = -\int p(x)dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \tilde{y} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}. \tag{30}$$

Заменим неопределённый интеграл определённым с переменным верхним пределом:

$$\tilde{y} = C \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}. \tag{31}$$

Если есть начальное условие:

$$\tilde{y}\Big|_{x=x_0} = y_0, \tag{32}$$

то $C = y_0$. Для интегрирования уравнения (28) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Будем искать решение этого уравнения в следующем виде:

$$y = u \cdot e^{-\int p(x)dx}, \tag{33}$$

считая u не постоянной, а некоторой функцией от x. Дифференцируя, находим

$$y' = u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)). \tag{34}$$

Подставив y' в уравнение (28), получим:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + \cancel{u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))} + \cancel{p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx}} = q(x) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \;\Leftrightarrow\; du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C. \tag{35}$$

Подставляя u в формулу (33), получим:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \Big(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C \Big). \tag{36}$$

Заменим неопределённые интегралы на интегралы с переменным верхним пределом:

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(u)du} \cdot \left(\int\limits_{x_0}^{x} q(v) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{v} p(u)du} \cdot dv + C \right). \qquad (37)$$

Для ясности мы обозначаем переменные интегрирования различными буквами u и v, отличными от буквы x.

Если задано начальное условие: $y\Big|_{x=x_0} = y_0$, то $C = y_0$ и формула (37) принимает вид:

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(u)du} \cdot \left(\int\limits_{x_0}^{x} q(v) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{v} p(u)du} \cdot dv + y_0 \right). \qquad (38)$$

$$y(x) = \underbrace{y_0 \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(u)du}}_{\tilde{y}} + \underbrace{e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(u)du} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} q(v) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{v} p(u)du} \cdot dv}_{Y}, \qquad (39)$$

то есть $y = \tilde{y} + Y$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2 (Теорема об общем решении ЛНДУ)

Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Пример 1

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{\sin x}{x}.$$

Замена:

$$y = u \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} = u \cdot e^{-\ln|x|} = u \cdot e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{u}{x}.$$

Здесь знак “$\pm$” и *const* мы внесли в функцию u.

Соответственно,

$$y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}.$$

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$\frac{u'}{x} - \cancel{\frac{u}{x^2}} + \cancel{\frac{1}{x}\cdot\frac{u}{x}} = \frac{\sin x}{x} \;\Leftrightarrow\; u' = \sin x \;\Leftrightarrow\; u = -\cos x + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \underline{y = \frac{1}{x}(-\cos x + C).}$$

Пример 2

Найдём закон изменения силы тока в электрической цепи.

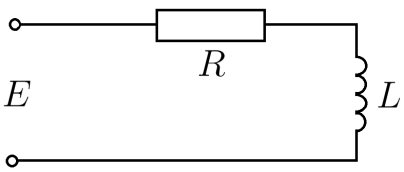

Рис. 3: Электрическая цепь

Здесь $E = E(t)$ – Э.Д.С. (электродвижущая сила), R – сопротивление, L – индуктивность.

Напишем закон Ома для цепи:

$$E = I \cdot R + L\frac{dI}{dt} \quad \text{, где } I\text{– сила тока.}$$

Будем считать Э.Д.С. постоянной: $E(t) = E_0$.

Пусть в начальный момент времени сила тока равна I_0. Тогда получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\cdot I = \frac{E_0}{L}, \\ I(0) = I_0. \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$I(t) = \upsilon \cdot e^{-\int \frac{R}{L}dt} = \upsilon \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Соответственно,

$$I' = \upsilon' \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}\upsilon \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Подставляем I и I' в уравнение:

$$\upsilon' \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}\upsilon \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}\upsilon \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{L} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \upsilon' = \frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t} \;\Leftrightarrow\; d\upsilon = \frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \upsilon = \frac{E_0}{L} \cdot \int e^{\frac{R}{L}t}dt = \frac{E_0}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C \;\Leftrightarrow\; \Big/\; I = \upsilon \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \;\Big/$$

$$\Leftrightarrow\; I = \frac{E_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Постоянную C найдем из начального условия:

$$I\Big|_{t=0} = I_0 \;\Leftrightarrow\; C = I_0 - \frac{E_0}{R}.$$

Итак, решение задачи Коши:

$$\underline{I(t) = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.}$$

Заметим, что $I(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{E_0}{R}$, то есть при $t \to \infty$ сила тока стремится к постоянному значению $\frac{E_0}{R}$.

1.6 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a, \quad \text{, где } a = const,\ a \neq 0,\ a \neq 1. \tag{40}$$

Его решение можно получить двумя способами.

<u>I способ (сведение к линейному уравнению)</u>

Разделим обе части уравнения (40) на y^a:

$$\frac{y'}{y^a} + p(x)y^{1-a} = q(x).$$

Сделаем замену: $z = y^{1-a}$.

Соответственно,

$$z' = (1-a)\cdot y^{-a}\cdot y' \;\Leftrightarrow\; \frac{y'}{y^a} = \frac{z'}{1-a}.$$

Подстановим z и z' в исходное уравнение:

$$\frac{1}{1-a}z' + p(x)z = q(x). \tag{41}$$

Мы получили линейное уравнение.

<u>II способ (сведение к уравнению с разделяющимися переменными)</u>

Сделаем замену переменной как в линейном уравнении:

$$y = u\cdot e^{-\int p(x)dx}. \tag{42}$$

Тогда

$$y' = u'\cdot e^{-\int p(x)dx} + u\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x)).$$

Подставим y и y' в уравнение (40):

$$u'\cdot e^{-\int p(x)dx} + \cancel{u\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))} + \cancel{p(x)u\cdot e^{-\int p(x)dx}} = q(x)u^a\cdot e^{-a\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow\; u'\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)u^a\cdot e^{-a\int p(x)dx} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; du = q(x)u^a\cdot e^{(1-a)\int p(x)dx}\cdot dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{du}{u^a} = q(x)\cdot e^{(1-a)\int p(x)dx}\cdot dx. \tag{43}$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

Пример

$$xy' + y = y^2\ln x \;\Leftrightarrow\; y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}\cdot y^2.$$

Замена:

$$y = u\cdot e^{-\int\frac{dx}{x}} = u\cdot e^{-\ln|x|} = \frac{u}{x}.$$

Соответственно,

$$y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}.$$

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$\frac{u'}{x} - \cancel{\frac{u}{x^2}} + \cancel{\frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x}} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{u^2}{x^2} \Leftrightarrow u' = u^2 \cdot \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\Bigg/ \begin{array}{ccccc} u & = & \ln x, & du & = & \frac{1}{x} dx, \\ \upsilon & = & -\frac{1}{x}, & d\upsilon & = & \frac{1}{x^2} dx. \end{array} \Bigg/$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow u = \frac{x}{1 + Cx + \ln x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}}.$$

1.7 Уравнения в полных дифференциалах

Определение

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \qquad (44)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$M dx + N dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \qquad (45)$$

Условие того, что $Mdx + Ndy$ представляет собой полный дифференциал:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (46)$$