1. Матрицы и системы линейных уравнений

1.1 Определители

Введение

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

Решим систему методом исключения. Домножим уравнение (1) на a_{22}, уравнение (2) на $(-a_{12})$ и сложим их:

$$a_{11}a_{22}x_1 - a_{21}a_{12}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

Теперь домножим уравнение (1) на $(-a_{21})$, уравнение (2) на a_{11} и сложим их:

$$-a_{12}a_{21}x_2 + a_{22}a_{11}x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{12} \;\Leftrightarrow\; x_2 = \frac{b_1a_{21} - b_2a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}. \tag{4}$$

Возникающие в числителе и знаменателе формул (3) и (4) выражения аналогичны по структуре и называются определителями.
Разберем понятие определителя более подробно.

Определение

Прямоугольную таблицу чисел (вещественных или комплексных)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

будем называть матрицей, а сами числа – элементами матрицы. Элементы матрицы будем нумеровать двумя индексами, где первый индекс обозначает номер строки, второй – номер столбца, в котором стоит элемент. Вводя матрицу, указанную таблицу будем записывать в круглых скобках.

Замечание

Иногда матрицу записывают, используя квадратные скобки или двойные вертикальные черточки:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрицу называют квадратной. Действия с матрицами определим позже. Сейчас мы введем только одно действие с квадратной матрицей – вычисление определителя матрицы.

Определение

Определителем матрицы A второго порядка называют число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{6}$$

Свойства определителя

1) Определитель транспонированной матрицы (замены строк на столбцы, а столбцов – на строки) не меняет определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{7}$$

Замечание

Так как операция транспонирования не меняет определителя, то все дальнейшие свойства можно доказывать только для строк.

2) Перестановка строк местами меняет знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

3) Вынесение множителя из строки.

$$\begin{vmatrix} \alpha\, a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}). \tag{9}$$

4) Если у определителя две строки совпадают, то он равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

5) Разложение определителя на сумму определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} +$$

$$+ b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

■

6) Если к одной строке определителя прибавить другую строку (возможно домноженную на число λ), то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} +$$

$$+ \lambda a_{21}a_{22} - \lambda a_{22}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad ■$$

Определение

Определитель 3-го порядка определяется индуктивно (через определитель 2-го порядка).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{A_{11}} + a_{12} \underbrace{(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{A_{12}} +$$

$$+ a_{13} \underbrace{(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{A_{13}} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (13)$$

Мы написали разложение определителя по первой строке. Вообще говоря, определитель можно раскладывать по любой строке или по любому столбцу.

Здесь A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Здесь M_{ij} – минор элемента A_{ij} Это определитель, который получается после вычеркивания строки и столбца, содержащих этот элемент. Все свойства, данные для определителя второго порядка сохраняются (докажем их позже).

7) Дополнительное свойство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}. \qquad (14)$$

Правило Саррюса – метод вычисления определителя матрицы 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} +$$

$$+a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}. \quad (15)$$

Определение

Определитель n-ого порядка вводится индуктивно через определитель $(n-1)$-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ \ldots\ldots \ + a_{1n}A_{1n}. \quad (16)$$

Свойства определителя n-ого порядка

Свойства 1) – 7) сохраняются.

8) Разложение определителя можно писать по любой строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ \ldots\ldots \ + a_{kn}A_{kn}. \quad (17)$$

9) Сумма произведений элементов одной строки на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другой строки равна 0 :

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \ \ldots\ldots \ + a_{kn}A_{ln} = 0, \quad l \neq k. \quad (18)$$

Докажем эти свойства позже

Замечание, символ Σ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ \ldots\ldots \ + a_n.$$

Пример

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k}.$$

Свойства Σ

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – вынесение множителя за знак суммы.
2) Перестановочность знаков суммы:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}.$$

Комбинаторное определение определителя.

Пусть имеется n каких-нибудь элементов, расставленных в определенном порядке. Назовем это перестановкой, образованной из наших элементов. Пусть $i_1, i_2, \; \dots\dots, i_n$ – некоторые перестановки из чисел $1, 2, \; \dots\dots, n$. Обозначим число беспорядков в этой перестановке символом $[i_1, i_2, \; \dots\dots, i_n]$. Беспорядком назовем тот факт, что большее число стоит впереди меньшего.

Примеры.

1) $[3, 1, 2] = 2$

Здесь беспорядки следующие:

3 стоит впереди 1, 3 стоит впереди 2.

2) $[3, 1, 4, 2] = 3$

Беспорядки: 3 стоит впереди 1, 3 стоит впереди 2, 4 стоит впереди 2.

Замечание

Всевозможных перестановок чисел $1, 2, \; \dots\dots, n$ существует $n!$

Определение

Определитель n-го порядка можно ввести по следующему правилу.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\dots,i_n) \\ \text{по всем пересановкам}}} (-1)^{[i_1,i_2,\dots,i_n]} \cdot a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \,\dots\dots\, \cdot a_{ni_n}. \quad (19)$$

Замечание

Проверим соответствие двух определений на примере определителя 3-ого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{[1,2,3]=0} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{[3,1,2]=2} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{[2,3,1]=2} -$$

$$- \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{[3,2,1]=3} - \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}_{[1,3,2]=1} - \underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}_{[2,1,3]=1}.$$

В соответствии с определением (формула (19)), сомножители в каждом из произведений были упорядочены по первому индексу. Посчитав число беспорядков, мы убедились, что правило Саррюса обеспечивает правильность выбора знака в каждом из слагаемых.

Эквивалентность комбинаторного и индуктивного определений определителя.

Нам нужно доказать эквивалентность формул (16) и (19). Вместо этого докажем более общий факт, а именно: введенный комбинаторно определитель удовлетворяет формуле (17):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \,\dots\dots\, + a_{in}A_{in}. \quad (20)$$

<u>Доказательство:</u>

Покажем, что если в определителе (19) собрать все члены с элементом

a_{ik}, то коэффициентом при a_{ik} будет алгебраическое дополнение A_{ik}.
Для начала рассмотрим случай $i = k = 1$ и выпишем все слагаемые суммы (19), которые содержат элемент a_{11}:

$$a_{11} \cdot \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{[1,i_2,\ldots,i_n]} \cdot a_{2i_2} \cdot \ \ldots\ldots \ \cdot a_{ni_n}.$$

Здесь мы суммируем по всем перестановкам $i_1, i_2, \ \ldots\ldots, i_n$ из чисел $2, 3, \ \ldots\ldots, n$. В полной перестановке $1, i_2, \ \ldots\ldots, i_n$ первый элемент единица находится в порядке по отношению ко всем следующим элементам, поэтому для числа беспорядков мы имеем:
$[1, i_2, \ \ldots\ldots, i_n] = [i_2, \ \ldots\ldots, i_n]$.
Таким образом, мы имеем следующее выражение для коэффициентов B_{11} при a_{11} :

$$B_{11} = \sum_{(i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{[i_2,\ldots,i_n]} a_{2i_2} \cdot \ \ldots\ldots \ \cdot a_{ni_n}. \tag{21}$$

Эта сумма подходит под определение определителя, но здесь отсутствуют первая строка и первый столбец.
Следовательно,
$B_{11} = \underbrace{M_{11}}_{\text{Минор}} = (-1)^{1+1} M_{11} = A_{11}$ – алгебраическое дополнение, то есть при $i = k = 1$ утверждение доказано.
Перейдем к случаю любых i и k. Будем переставлять i-ую строку постепенно с более высокими строками так, чтобы она попала на место первой строки. Для этого придется сделать $i - 1$ перестановку строк. Аналогично переставим k-ый столбец на место первого столбца. После перестановок элемент a_{ik} попадет на место a_{11}. Строка с номером i и k окажется на первом месте, порядок остальных строк и столбцов не изменится. Полученный выше результат показывает, что после упомянутых перестановок коэффициент при a_{ik} будет равен минору M_{ik}. Но нам пришлось применять $(i-1)+(k-1)$ перестановок строк и столбцов. Каждая

такая перестановка добавляет множитель (-1) к определителю, то есть в общем мы добавили множитель $(-1)^{(i-1)+(k-1)} = (-1)^{i+k}$.

Следовательно, окончательное выражение для коэффициента B_{ik} будет иметь вид:

$$B_{ik} = \frac{M_{ik}}{(-1)^{i+k}} = (-1)^{i+k} M_{ik} = A_{ik}, \tag{22}$$

то есть мы доказали формулу в общем виде.

■

Докажем свойства определителя n-ого порядка.

1) Операция транспонирования не меняет знак определителя.

У транспонированного определителя первый и второй индексы элементов меняются местами по сравнению с исходным определителем.

Поэтому в каждом из слагаемых определителя (19) упорядочивание сомножителей нужно производить не по первому, а по второму индексу.

Упорядочивание элементов в произведении $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ .\ .\ .\ .\ .\ \cdot a_{ni_n}$ по второму индексу $(i_1, i_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , i_n)$ приведет к появлению точно такого же числа беспорядков первом индексе $(1, 2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , n)$.

Следовательно, знак, определяемый $(-1)^{[i_1, i_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , i_n]}$ сохранится, что и доказывает свойство.

2) Перестановка строк(столбцов) местами меняет знак определителя.

<u>Доказательство:</u>

Перестановка соседних столбцов меняет число беспорядков на 1 (см. формулу (19)), то есть меняет знак определителя. Если столбцы не соседние, то требуется совершить нечетное число перестановок соседних столбцов, что также меняет знак определителя. Объясним этот факт. Пусть для перестановки одного столбца на место другого потребовалось l шагов. Тогда для возвращения другого столбца на место первого потребуется $(l-1)$ последовательная перестановка. Всего понадобится $(2l-1)$ перестановка – нечетное число.

■

3) Вынесение множителя из строки (столбца). Доказательство очевидно в силу формулы (19).

4) Если у определителя 2 строки (столбца) совпадают то он равен нулю.

Доказательство:

С одной стороны, при перестановке одинаковых столбцов определитель не изменится. С другой стороны перестановка столбцов по свойству 2 меняет знак определителя. Выполнение этих условий одновременно возможно только тогда когда определитель равен нулю.

■

5) Разложение определителя на сумму определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Доказательство:

$$\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]}(a_{1i_1}+b_{1i_1})\cdot a_{2i_2}\cdot\ \dots\dots\ \cdot a_{ni_n} =$$
$$= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]}a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ \dots\dots\ \cdot a_{ni_n}+$$
$$+ \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]}b_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ \dots\dots\ \cdot a_{ni_n}.$$

■

6) Если к одной строке определителя прибавить другую строку (возможно, домноженную на число λ) то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Св-во 5}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \text{ т.к. строки} \\ \text{совпадают}}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Доказательство очевидно в силу комбинаторного определения определителя (формула (19)).

8) Разложение определителя можно писать по любой строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ \ldots\ldots \ + a_{kn}A_{kn}.$$

Это свойство уже было доказано при проверке эквивалентности комбинаторного и индуктивного определения определителя.

9) Сумма произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю: $a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \ \ldots\ldots \ + a_{kn}A_{ln} = 0$ при $l \neq k$.

Доказательство:

$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \ .\ .\ .\ .\ .\ + a_{kn}A_{ln} =$

Замечание

Здесь мы воспользуемся свойством 8 (формула 17). Напомним механизм действия этой формулы. Возьмем первое слагаемое суммы: $a_{k1}A_{l1}$. Формула предписывает при формировании определителя в ячейку с номером $l1$ поставить элемент a_{k1}. Аналогично с остальными слагаемыми. В ячейку с номером $l2$ нужно поставить элемент a_{k2} и так далее. Таким образом, в l-ой строке определителя мы получим следующий набор элементов: $a_{k1} \ \ a_{k2} \ .\ .\ .\ .\ . \ \ a_{kn}$.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ k\text{-я строка} \\ \\ \leftarrow \ l\text{-я строка} \\ \\ \\ \end{array} = 0,$$

так как в определителе k-ая и l-ая строки совпадают между собой.

■

10) Теорема об умножении определителей

Пусть A, B, C матрицы размера $n \times n$:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

и выполнено:

$$C_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk}, \quad i, k = 1, 2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , n. \tag{24}$$

Тогда:

$$\det C = \det A \cdot \det B. \tag{25}$$

<u>Доказательство:</u>

Начнем со случая $n = 2$. Учитывая (24), по свойству 5 мы можем разложить определитель на сумму определителей.

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ (24)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Св-во } 5}}{=} \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Вынося одинаковые множители из элементов одного и того же столбца, мы получили в первом и четвертом слагаемом определители с одинаковыми столбцами, равные нулю. Переставляя еще в одном из определителей столбцы, будем иметь:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}}_{\det C} = b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} -$$

$$-b_{12}b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\det A} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}_{\det B}.$$

Рассмотрим теперь общий случай порядка n.

$$\det C = \sum_{(s_1,s_2,\ldots,s_n)} \begin{vmatrix} a_{1s_1}b_{s_1 1} & a_{1s_2}b_{s_2 2} & \ldots & a_{1s_n}b_{s_n n} \\ a_{2s_1}b_{s_1 1} & a_{2s_2}b_{s_2 2} & \ldots & a_{2s_n}b_{s_n n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{ns_1}b_{s_1 1} & a_{ns_2}b_{s_2 2} & \ldots & a_{ns_n}b_{s_n n} \end{vmatrix}, \qquad (26)$$

где переменные суммирования $s_1, s_2, \ \ldots\ldots, s_n$ принимают целые значения $1, 2, \ \ldots\ldots, n$.

Слагаемые этой суммы могут быть записаны в виде :

$$b_{s_1 1}b_{s_2 2} \ldots\ldots b_{s_n n} \begin{vmatrix} a_{1s_1} & a_{1s_2} & \ldots & a_{1s_n} \\ a_{2s_1} & a_{2s_2} & \ldots & a_{2s_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{ns_1} & a_{ns_2} & \ldots & a_{ns_n} \end{vmatrix}. \qquad (27)$$

Если среди чисел $s_1, s_2, \ \ldots\ldots, s_n$ есть одинаковые, то написанный определитель имеет одинаковые столбцы и соответствующее слагаемое равно нулю. Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением таких слагаемых, у которых среди чисел s_k нет одинаковых, а значит последовательность чисел $s_1, s_2, \ \ldots\ldots, s_n$ представляет собой некоторую перестановку чисел $1, \ 2, \ \ldots\ldots, n$.

Домножим выражение (27) дважды на $(-1)^{[s_1,s_2,\ldots,s_n]}$, в результате чего оно не изменится. Перепишем его в виде произведения двух сомножителей:

$$(-1)^{[s_1,s_2,\ldots,s_n]} \begin{vmatrix} a_{1s_1} & a_{1s_2} & \ldots & a_{1s_n} \\ a_{2s_1} & a_{2s_2} & \ldots & a_{2s_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{ns_1} & a_{ns_2} & \ldots & a_{ns_n} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{[s_1,s_2,\ldots,s_n]} b_{s_1 1}b_{s_2 2} \cdot \ \ldots\ldots \ \cdot b_{s_n n}. \qquad (28)$$

Если 2 элемента поменять местами, то будем говорить, что совершена транспозиция.

В первом множителе в выражении (28) путем нескольких транспозиций перестановку $s_1, s_2, \; . \; . \; . \; . \; . \; , s_n$ приведем к виду $1, 2, \; . \; . \; . \; . \; . \; , n$. Такие же транспозиции будем осуществлять со столбцами определителя, от каждой из которых он будет менять знак. Следовательно, произведение $(-1)^{[s_1, s_2, \ldots, s_n]}$ на определитель знака менять не будет. В результате формула (28) примет следующий вид:

$$\underbrace{(-1)^{[1,2,\ldots,n]}}_{=(-1)^0=1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det A} \cdot (-1)^{[s_1, s_2, \ldots, s_n]} b_{s_1 1} b_{s_2 2} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; \cdot b_{s_n n}. \quad (29)$$

Возвращаясь к сумме (26), получаем:

$$\det C = \det A \cdot \sum_{(s_1, s_2, \ldots, s_n)} (-1)^{[s_1, s_2, \ldots, s_n]} b_{s_1 1} b_{s_2 2} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; \cdot b_{s_n n}, \quad (30)$$

где суммирование распространяется на все перестановки $s_1, s_2, \; . \; . \; . \; . \; . \; , s_n$ из чисел $1, 2, \; . \; . \; . \; . \; . \; , n$.

Написанная сумма есть $\det B$, то есть: $\det C = \det A \cdot \det B$.

$\blacksquare$

1.2 Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} . \quad (31)$$

Определение

Решение системы – это n чисел $x_1, x_2, \; . \; . \; . \; . \; . \; , x_n$, которые обращают все уравнения в тождества.

Теорема Крамера

$$\text{Пусть}\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{32}$$

Тогда решение системы (31) единственно и дается формулой:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \ldots\ldots, n, \tag{33}$$

где Δ_k – определитель, полученный из определителя Δ заменой k-го столбца на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

<u>Доказательство:</u>

Домножаем первое уравнение системы (31) на A_{1k}, второе – на A_{2k}, $\ldots\ldots$, n-ое – на A_{nk} и сложим их.

Тогда справа получим:

$$b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \ldots\ldots + b_nA_{nk} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Св-во 8} \\ \text{(ф-ла (17))}}}{=} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \substack{\uparrow \\ k\text{-ый столбец}} \end{array} = \Delta_k. \tag{34}$$

В левой части уравнения при переменной x_l получим следующий коэффициент:

$$a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \ldots\ldots + a_{nl}A_{nk} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Св-ва 8, 9} \\ \text{(ф-лы (17)(18))}}}{=} \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ \Delta, & l = k. \end{cases} \tag{35}$$

то есть в левой части уравнения остается только одно слагаемое: $\Delta \cdot x_k$.

Таким образом из (34) и (35) получаем систему уравнений:

$$\Delta \cdot x_k = \Delta_k = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \ldots\ldots + b_nA_{nk}, \quad k = 1, 2, \ldots\ldots, n. \tag{36}$$

Решение этой системы дается формулой (33):

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, k = 1, 2, \ \ldots\ldots, n.$$

Мы доказали следствие в одну сторону: если решение у системы (31) есть, то оно имеет вид $\frac{\Delta_k}{\Delta}$. Для доказательства следствия в обратную сторону нам необходимо показать эквивалентность систем (36) и (31).

Домножим k-ое уравнение системы (36) на a_{lk} и сложим все уравнения при $k = 1, 2, \ \ldots\ldots, n$. Получим:

$$\begin{gathered}
\Delta \cdot a_{l1}x_1 + \Delta \cdot a_{l2}x_2 + \ \ldots\ldots + \Delta \cdot a_{ln}x_n = \\
= b_1A_{11}a_{l1} + b_2A_{21}a_{l1} + \ \ldots\ldots + b_nA_{n1}a_{l1} + \\
+ b_1A_{12}a_{l2} + b_2A_{22}a_{l2} + \ \ldots\ldots + b_nA_{n2}a_{l2} + \ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots + b_1A_{1n}a_{ln} + b_2A_{2n}a_{ln} + \ \ldots\ldots + b_nA_{nn}a_{ln} = \\
= b_1 \underbrace{(A_{11}a_{l1} + A_{12}a_{l2} + \ \ldots\ldots + A_{1n}a_{ln})}_{=0 \text{ при } l\neq 1 \text{ (св-во 9)}} + \underbrace{b_2(A_{21}a_{l1} + \ \ldots\ldots + A_{2n}a_{ln})}_{=0 \text{ при } l\neq 2} + \ldots\ldots \\
\ldots\ldots + \underbrace{b_l(A_{l1}a_{l1} + \ \ldots\ldots + A_{ln}a_{ln})}_{=b_l\cdot\Delta \text{ (св-во 8)}} + \ldots\ldots \\
\ldots\ldots + \underbrace{b_n(A_{n1}a_{l1} + A_{n2}a_{l2} + \ \ldots\ldots + A_{nn}a_{ln})}_{=0 \text{ при } l\neq n} = b_l \cdot \Delta. \qquad (37)
\end{gathered}$$

Сокращая на Δ, получаем l-ое уравнение исходной системы (31), значит системы (31) и (36) эквивалентны, что и доказывает теорему.

■

Пример

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1.$$