УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

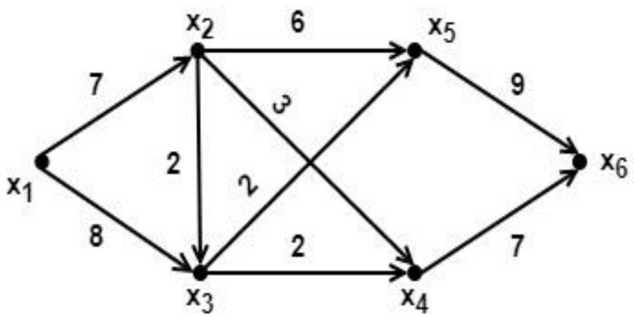
Лекция по теме «Транспортные сети»

автор – д.т.н., профессор Лисицына Л.С.

Введение

Транспортная сеть (ТС) – это связный орграф $G(X,U)$ со следующими свойствами:

1. $\exists! x_0 \in X(\Gamma^{-1}(x_0) = \varnothing)$, где x_0 - начало или источник ТС
2. $\exists x_t \in X(\Gamma^{1}(x_t) = \varnothing)$, где x_t - конец или сток ТС
3. $\forall u \in U : c(u) \geq 0$, где $c(u)$ - пропускная способность дуги



Содержание

1. **Понятие допустимого потока в ТС**
2. Понятие полного потока в ТС
3. Алгоритм поиска полного потока в ТС
4. Теорема Форда-Фалкерсона (критерий для поиска максимального потока в ТС)

Понятие допустимого потока в ТС

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Допустимый поток дуги $\varphi(u)$ – это такая числовая характеристика дуги, которая выбирается из условий:

$$\forall u \in U : 0 \le \varphi(u) \le c(u) \qquad (1)$$

$$\forall x_j \in X \setminus \{x_0, x_t\}\Big(\sum_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_j)} \varphi(x_i, x_j) = \sum_{x_k \in \Gamma^{1}(x_j)} \varphi(x_j, x_k)\Big) \qquad (2)$$

Допустимый поток ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m))$ – это любой поток при соблюдении условий (1) и (2), его величина определяется как

$$\Phi = \sum_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_t)} \varphi(x_i, x_t) = \sum_{x_k \in \Gamma^{1}(x_0)} \varphi(x_0, x_k)$$

ITsMOre than a UNIVERSITY

Содержание

1. Понятие допустимого потока в ТС
2. **Понятие полного потока в ТС**
3. Алгоритм поиска полного потока в ТС
4. Теорема Форда-Фалкерсона (критерий для поиска максимального потока в ТС)

Понятие полного потока в ТС

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дуга $u \in U$ называется **насыщенной**, если для допустимого потока $\varphi(G) = (\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_m))$ выполняется условие, что $\varphi(u) = c(u)$.

Допустимый поток ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_m))$ будет **полным**, если в каждом пути $\mu = (x_0,\ldots,x_t)$ есть хотя бы одна насыщенная дуга. Обозначим полный поток $\varphi_f(G)$, а его величину – Φ_f.

ITsMOre than a UNIVERSITY

Содержание

1. Понятие допустимого потока в ТС
2. Понятие полного потока в ТС
3. **Алгоритм поиска полного потока в ТС**
4. Теорема Форда-Фалкерсона (критерий для поиска максимального потока в ТС)

Алгоритм поиска полного потока в ТС

$G(X,U)$ - исходный граф ТС, $G^*(X^*,U^*)$ - граф ТС с полным потоком

1. Положить, что $G^*(X^*,U^*) = G(X,U)$.
2. Положить, что $\forall u \in U : \varphi(u) = c(u)$, $\Phi_f = 0$.
3. **ЦИКЛ до тех пор, пока** в графе $G(X,U)$ вершина x_t достижима из вершины x_0:

   3.1. Построить простой путь $\mu = (x_0,\dots,x_t)$.

   3.2. Найти в пути $\mu = (x_0,\dots,x_t)$ насыщенную дугу (насыщенные дуги) и определить $MIN = \min\limits_{\forall u \in \mu} \varphi(u)$.

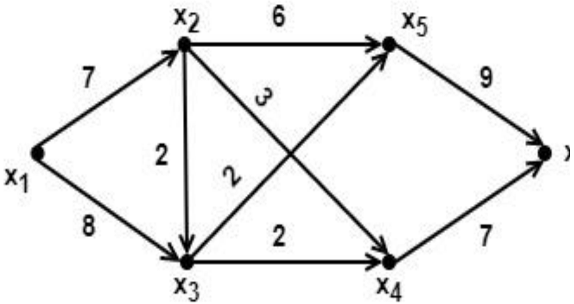
   3.3. Увеличить значение $\Phi_f = \Phi_f + MIN$.

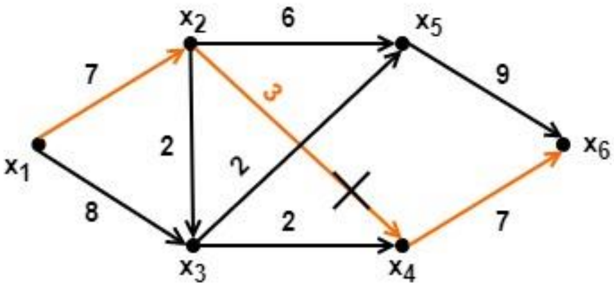
   3.4. Скорректировать $\forall u \in \mu : \varphi(u) = \varphi(u) - MIN$.

   3.5. Удалить из графа $G(X,U)$ насыщенную дугу (насыщенные дуги).
4. Определить $\forall u^* \in U^* : \varphi(u^*) = c(u) - \varphi(u)$.

Алгоритм поиска полного потока в ТС: пример

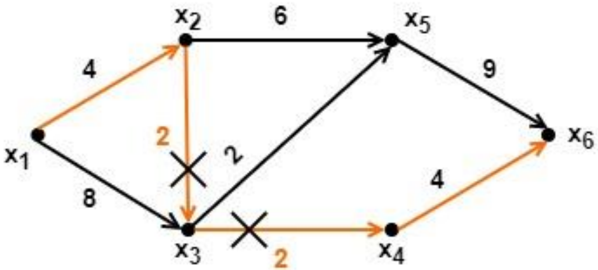
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО





$$\mu_1 = (x_1, x_2, x_4, x_6)$$

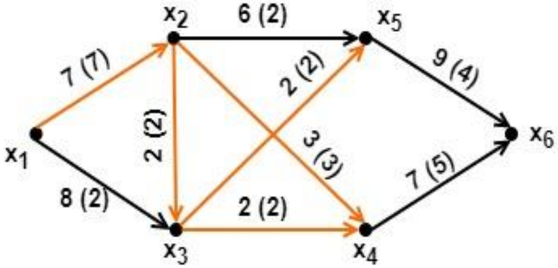
$MIN = \varphi(x_2, x_4) = 3$ $\Phi_f = \Phi_f + MIN = 0 + 3 = 3$



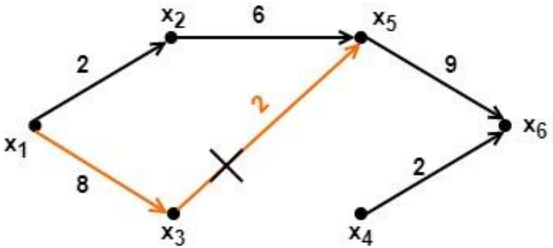
$$\mu_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)$$

$MIN = \varphi(x_2, x_3) = \varphi(x_3, x_4) = 2$

$\Phi_f = \Phi_f + MIN = 3 + 2 = 5$

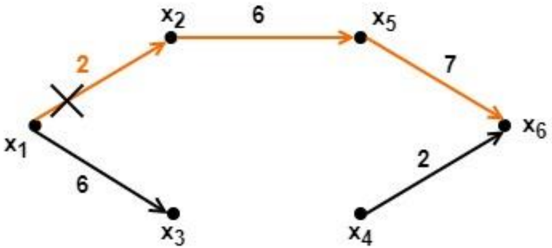


$$\Phi_f = 9$$



$$\mu_3 = (x_1, x_3, x_5, x_6)$$

$MIN = \varphi(x_3, x_5) = 2$ $\Phi_f = \Phi_f + MIN = 5 + 2 = 7$



$$\mu_4 = (x_1, x_2, x_5, x_6)$$

$MIN = \varphi(x_1, x_2) = 2$

$\Phi_f = \Phi_f + MIN = 7 + 2 = 9$

ITMOre than a UNIVERSITY

Содержание

1. Понятие допустимого потока в ТС
2. Понятие полного потока в ТС
3. Алгоритм поиска полного потока в ТС
4. **Теорема Форда-Фалкерсона** (критерий для поиска максимального потока в ТС)

Теорема Форда-Фалкерсона

Разрезом транспортной сети $G(X,U)$ называется разбиение множества X на два подмножества A и B таких, что: $A \cap B = \varnothing, A \cup B = X$, $x_0 \in A$, $x_t \in B$. Очевидно, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Разрезы ТС строятся с начала сети слева направо.

Пропускная способность разреза определяется по условию допустимости потока (1) и (2) как

$$C(A,B) = \sum_{\forall v \in A} C(v), \qquad (4)$$

где $C(v)$ – поток, который может пройти через данный разрез из вершины v.

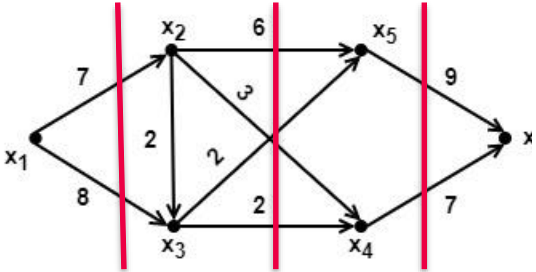
Принимается, что $C(x_0) = \sum_{\forall w \in B} c(x_0, w)$, а для других вершин разреза как

$$C(v) = \min\left(\sum_{\forall s \in A} c(s,v), \sum_{\forall w \in B} c(v,w) \right). \qquad (5)$$

Т.е. поток, который может пройти через разрез из вершины v не больше, чем сумма потоков, которые могут прийти в эту вершину из других вершин множества A.

Теорема Форда-Фалкерсона

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО



№	A	B	$C(A,B)$
1	$\{x_1\}$	$\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$C(x_1)=7+8=\mathbf{15}$
2	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5, x_6\}$	$C(x_1)+C(x_2)+C(x_3)=0+7+4=\mathbf{11}$
3	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$C(x_1)+C(x_2)+C(x_3)+C(x_4)+C(x_5)=0+0+5+8=\mathbf{13}$

$\Phi_f = 9 \quad \Phi_{\max} = 11$

Разрез ТС с минимальной пропускной способностью называется **минимальным разрезом**.

Теорема Форда-Фалкерсона. Величина максимального потока $\Phi_{\max}$ транспортной сети $G(X,U)$ определяется пропускной способностью ее минимального разреза.

Доказательство. Для любого допустимого потока Φ в транспортной сети $G(X,U)$ и любого ее разреза выполняется неравенство $\Phi \le C(A,B)$, т.е. величина любого допустимого потока Φ, в т.ч. и максимального $\Phi_{\max}$ не превышает пропускную способность любого разреза ТС, в т.ч. и минимального. Следовательно $\Phi_{\max} = \min\limits_{\forall A,B} C(A,B)$

Спасибо за внимание!

www.ifmo.ru

ITsMOre than a UNIVERSITY