$$= \frac{1}{8}\ln\left|4x^2+7\right|+C.$$

24. $$\int \frac{x^2}{3+x^2}dx = \int \frac{3+x^2-3}{3+x^2}dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{3+x^2} =$$
$$= x - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

1.3 Интегрирование по частям

Пусть $u(x),\ v(x)$ – дифференцируемые функции.

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{1.33}$$

За u выбирают функцию, которая упрощается от дифференцирования.

$$\int x^2\cos x dx = \begin{pmatrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ v = \sin x & dv = \cos x dx \end{pmatrix} = x^2\sin x - \int 2x\sin x dx =$$
$$= \begin{pmatrix} u = 2x & du = 2dx \\ v = -\cos x & dv = \sin x dx \end{pmatrix} = x^2\sin x - (-2x\cos x - \int(-\cos x)2dx =$$
$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

25. $$\int \arccos x dx = \begin{pmatrix} u = \arccos x & du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x & dv = dx \end{pmatrix}$$
$$= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arccos x + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) = x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

26. $$\int x\ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 & dv = x dx \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

27. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} & dv = x^{-\frac{1}{3}}dx \end{pmatrix} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{3}{2}\int x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$\displaystyle= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}} + C.$

28. $\displaystyle\int \left(x^2 - x + 1\right)\ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x & dv = \left(x^2 - x + 1\right)dx \end{pmatrix} =$

$\displaystyle= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1\right)dx =$

$\displaystyle= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + x + C.$

29. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx = /$Замена: $\sqrt{x} = y$, тогда: $x = y^2, \quad dx = 2ydy/ =$

$\displaystyle= \int e^y 2ydy = 2ye^y - 2\int e^y dy = 2ye^y - 2e^y + C = \begin{pmatrix} u = y & du = dy \\ v = e^y & dv = e^y dy \end{pmatrix} =$

$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$

30. $\displaystyle\int x^3 e^x dx = \begin{pmatrix} u = x^3 & du = 3x^2 dx \\ v = e^x & dv = e^x dx \end{pmatrix} = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx =$

$\displaystyle= \begin{pmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ v = e^x & dv = e^x dx \end{pmatrix} = x^3e^x - 3x^2e^x + 3\int 2xe^x dx =$

$\displaystyle= \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ v = e^x & dv = e^x dx \end{pmatrix} = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6\int e^x dx =$

$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C.$

31. $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}dx = \int x^2 e^{-x^2}\cdot xdx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x^2} d\left(x^2\right) =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int \left(-x^2\right)e^{-x^2} d\left(-x^2\right) = /$Замена: $y = -x^2/ = \displaystyle\frac{1}{2}\int ye^y dy =$

$\displaystyle\frac{1}{2}ye^y - \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}ye^y - \frac{1}{2}e^y + C = \begin{pmatrix} u = y & du = dy \\ v = e^y & dv = e^y dy \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Иногда после двукратного применения формулы интегрирования по частям приходим в правой части к выражению, содержащему исходный интеграл. То есть получаем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного.

Пример

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \begin{pmatrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}dx \\ v = -\frac{1}{b}\cos bx & dv = \sin bx dx \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx = \begin{pmatrix} u = e^{ax} & du = ae^{\alpha x}dx \\ v = \frac{1}{b}\sin bx & dv = \cos bx dx \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx\right).$$

Получим уравнение относительно $\int e^{ax}\sin bx dx$:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{-be^{ax}\cos bx + ae^{ax}\sin bx}{a^2 + b^2} + \widetilde{C}.$$

32. $$\int \cos(\ln x)dx = \begin{pmatrix} u = \cos(\ln x) & du = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx \\ v = x & dv = dx \end{pmatrix} =$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = \begin{pmatrix} u = \sin(\ln x) & du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx \\ v = x & dv = dx \end{pmatrix} =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

Получим уравнение относительно $\int \cos(\ln x)dx$:

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + \widetilde{C}.$$

Глава 2. Интегрирование основных классов элементарных функций

2.1 Простейшие интегралы, содержащие квадратный трёхчлен

1) Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно привести к табличным.

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x^2+4x+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}} =$$
$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{5-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

2) Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ и $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ можно привести к интегралам вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Пример

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1} =$$
$$\Big/ \left(3x^2+2x+1\right)' = 6x+2; \quad x-1 = \frac{1}{6}(x+2) - \frac{4}{3} \Big/$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}dx - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{3x^2+2x+1} =$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{d\left(3x^2+2x+1\right)}{3x^2+2x+1} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+2x+1\right) -$$
$$-\frac{4}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}} = \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+2x+1\right) - \frac{4}{9}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+2x+1\right) - \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C =$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+2x+1\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Задачи

1) $$\int \frac{dx}{x^2+4x-5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-9} = -\int \frac{d(x+2)}{3^2-(x+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+2)+3}{(x+2)-3}\right| + C = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+5}{x-1}\right| + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}-2x-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{3}-(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2-(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} + C.$$

3) $$\int \frac{dx}{x^2-6x} = \int \frac{dx}{x^2-6x+9-9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-3^2} =$$

$$= -\int \frac{d(x-3)}{3^2-(x-3)^2} = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-3)+3}{(x-3)-3}\right| + C = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x-6}\right| + C.$$

4) $$\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx =$$

$$\Big/ \left(2-x-x^2\right)' = -1-2x; \quad x+4 = -\frac{1}{2}(-1-2x)+\frac{7}{2} \Big/$$

$$= -\left(2-x-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\left(2-x-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + C = -\sqrt{2-x-x^2} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3} + C.$$

5) $$\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}dx =$$

$$\Big/ \left(x^2-2x+6\right)' = 2x-2;\ 4x-3 = 2(2x-2)+1 \Big/$$

$$= 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+6}dx + \int \frac{dx}{x^2-2x+6} =$$

$$= 2\int \frac{d\left(x^2-2x+6\right)}{x^2-2x+6} + \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+5} = 2\ln\left|x^2-2x+6\right| +$$

$$+ \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+(\sqrt{5})^2} = 2\ln\left|x^2-2x+6\right| + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

6) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx =$$

$$\Big/ \left(x^2+x+1\right)' = 2x+1;\ x = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} \Big/$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+1)}} =$$

$$= x^2+x+1 - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= x^2+x+1 - \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) + C.$$

7) $$\int \frac{3^x dx}{3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3} =$$

$$/(\mathrm{a}^x)' = a^x \ln a; \quad \text{Замена: } y = 3^x;\ dy = 3^x \ln 3 dx/$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dy}{y^2-4y+3} = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dy}{(y-2)^2-1} = -\frac{1}{\ln 3}\int \frac{d(y-2)}{1-(y-2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{y-2+1}{y-2-1}\right| + C = -\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{y-1}{y-3}\right| + C = -\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x-3}\right| + C.$$

8) $$\int x \operatorname{arctg} x =$$

$$\Big/ u = \operatorname{arctg} x; du = \frac{1}{1+x^2};\ v = \frac{x^2}{2}; dv = x \Big/$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

2.2 Интегрирование рациональных дробей

Рациональная дробь есть отношение двух полиномов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ \ldots\ + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ \ldots\ + b_n}.$$

Дробь называется правильной, если $n > m$ и неправильной, если $n \leq m$. Интегрирование правильной рациональной дроби осуществляется с помощью ее разложения на простейшие.

Простейшими дробями называются дроби вида:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где $D = p^2 - 4q < 0 \qquad A\,,\ B\,,\ a\,,\ p\,,\ q\ = const.$

$D < 0 \Rightarrow$ знаменатель $x^2 + px + q$ нельзя разложить на вещественные множители.

Интегралы от простейших дробей

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A(x+\frac{p}{2}) + B - \frac{Ap}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{A(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$\Big/ \left(x+\frac{p}{2}\right) d\left(x+\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}\, d\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Big/$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right) + B - \frac{Ap}{2}}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k}\,dx =$$

$$\Big/ \text{Замена:} \qquad x + \frac{p}{2} = t; \qquad dx = dt \Big/$$

$$= \int \frac{At + B - \frac{Ap}{2}}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k}\,dt = \int \frac{Atdt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^k}$$

$$\int \frac{Atdt}{(t^2+q-\frac{p^2}{4})^k} = \frac{A}{2}\int \frac{dz}{z^k} = \frac{A}{2(-k+1)} z^{-k+1} + C$$

$$\Big/ \text{Замена:} \qquad t^2 + q - \frac{p^2}{4} = z; \qquad dz = 2tdt; \qquad tdt = \frac{dz}{2} \Big/$$

Введём обозначение:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}, \qquad \text{где} \ \ a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + t^2 - t^2) dt}{(t^2 + a^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}}}_{I_{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2\, dt}{(t^2 + a^2)^k} =$$

$$\Big/ \ u = t; \quad du = dt; \quad dv = \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k}; \quad v = \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} \ \Big/$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{t}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{t}{2a^2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2a^2(1-k)} I_{k-1}.$$

Получили рекуррентное соотношение.

Применяя это соотношение несколько раз, приходим к табличному интегралу I_1.

2.3 Процедура интегрирования рациональной дроби

Опишем процедуру интегрирования рациональной дроби общего вида: $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$

1) Пусть $m \geq n$ (то есть дробь неправильная: степень числителя $\geq$ степени знаменателя). Тогда в дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ нужно выделить целую часть. Это можно сделать с помощью деления многочленов в столбик. Например:

$$\frac{x^4 + 3x^2 + x + 2}{x^2 + 1} = x^2 + 2 + \frac{x}{x^2 + 1}.$$