Пример бесконечномерного пространства

$C[a, b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. В нём будут линейно независимы следующие функции: $1,\ t,\ t^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ t^n,\ .\ .\ .\ .\ . \qquad \forall n.$

2.4 Подпространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L}$ называется подмножество $\mathscr{N}$ из $\mathcal{L}$, замкнутое относительно законов композиции в $\mathcal{L}$, то есть такое что $\forall\ x, y \in \mathscr{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполнено: $x + y \in \mathscr{N}, \quad \alpha x \in \mathscr{N}$.

Теорема 12

Подпространство $\mathscr{N}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ само будет являться линейным пространством, если действия с элементами в $\mathscr{N}$ введены также как в $\mathcal{L}$ (в этом случае говорят, действия в $\mathscr{N}$ индуцированы из $\mathcal{L}$).

<u>Доказательство:</u>

Действия в $\mathcal{L}$ удовлетворяют аксиомам линейного пространства. Следовательно, действия в $\mathscr{N}$ также удовлетворяют аксиомам линейного пространства (так как они были индуцированы из $\mathcal{L}$).

Проверим, что нулевой и противоположный элементы принадлежат $\mathscr{N}$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathscr{N}$. Тогда $0 \cdot x \in \mathscr{N}$.

По определению подпространства $\alpha \cdot x \in \mathscr{N}$, где $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

По теореме 3 (формула (79)): $\mathbb{O} = 0 \cdot x$, то есть $\mathbb{O} \in \mathscr{N}$.

Рассмотрим противоположный к x элемент $(-x)$. Согласно теореме 4 (формула (82)): $-x = (-1) \cdot x$, то есть $(-x) \in \mathscr{N}$.

$\blacksquare$

Определение

Тривиальным подпространством называют подпространство, состоящее из одного нулевого элемента и подпространство, совпадающее со всем пространством $\mathcal{L}$.

Примеры подпространств:

1) Пусть $\mathcal{L}$ – пространство трехмерных векторов, исходящих из начала координат $(0,0,0)$. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку $(0,0,0)$. Множество векторов, лежащих в этой плоскости – это подпространство $\mathscr{N}$ пространства $\mathcal{L}$.

2) Пространство P^m полиномов степени $\leq m$ является подпространством пространства P^n полиномов степени $\leq n \quad \forall m \leq n$.

Для подпространств сохраняется смысл понятия линейной зависимости векторов, базиса, размерности.

Теорема 13

Если $\mathscr{N}$ – подпространство в $\mathcal{L}$, то $dim\mathscr{N} \leq dim\mathcal{L}$.

Доказательство:

Линейно независимый набор векторов в $\mathscr{N}$ будет линейно независимым и в $\mathcal{L}$ тоже, то есть число линейно независимых векторов в $\mathscr{N}$ не может быть больше $dim\mathcal{L}$.

$\blacksquare$

Теорема 14

Базис подпространства всегда можно дополнить до базиса всего пространства.

Доказательство:

Пусть $e_1,\ e_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , e_k$ – базис в $\mathscr{N}$.

Предположим также, что $\tilde{e_1},\ \tilde{e_2},\ .\ .\ .\ .\ .\ , \tilde{e_n}$ – базис в $\mathcal{L}$.

Рассмотрим объединённый набор $e_1, e_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , e_k, \tilde{e_1}, \tilde{e_2},\ .\ .\ .\ .\ .\ , \tilde{e_n}$. Ясно, что произвольный элемент $x \in \mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации элементов этого набора, то есть он полный. Но этот набор линейно зависим. Проредим его, вычеркивая из него элементы, линейно выражающиеся через предыдущие. Полученный в итоге линейно независимый набор будет базисом в $\mathcal{L}$. Кроме того, он содержит набор $e_1, e_2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , e_k$. Этот прием носит название "прополки".

■

Пример дополнения базиса

Пусть $\mathcal{L} = V_3$ – трехмерное пространство векторов с базисом:
$e_1 = \vec{i},\ e_2 = \vec{j},\ e_3 = \vec{k}$. Пусть $\mathcal{N}$ – пространство векторов, лежащих в плоскости XOY с базисом: $e_1 = \vec{i} + \vec{j},\ e_1 = \vec{i} - \vec{j}$.

Дополним базис в $\mathcal{N}$ до базиса в $\mathcal{L}$. Рассмотрим объединённый набор:

$$\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}.$$

Согласно процедуре "прополки", из этого набора последовательно вычеркиваем $\vec{i}$ и $\vec{j}$, так как:

$$\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}),$$
$$\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) - \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}).$$

Полученный набор $\vec{i} + \vec{j},\ \vec{i} - \vec{j},\ \vec{k}$ будет базисом в $\mathcal{L}$.

Замечание

Базис подпространства, вообще говоря, нельзя выбрать из векторов базиса пространства.

Пример

Пусть $\mathcal{L} = V_2$ – двумерное пространство векторов на плоскости XOY с базисом $\vec{i},\ \vec{j}$. Пусть $\mathcal{N}$ – подпространство векторов на плоскости XOY, лежащих на прямой $y = x$ с базисом $\vec{i} + \vec{j}$. Здесь базис в подпространстве $\mathcal{N}$ нельзя выбрать из векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, так как ни один из них не лежит на прямой $y = x$.

Определение

Линейной оболочкой $V\{e_i\}_{i=1}^{k}$ набора векторов $\{e_i\}_{i=1}^{k} \in \mathcal{L}$ называется множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\{e_i\}$ с коэффициентами из $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Теорема 15

Линейная оболочка $V\{e_i\}_{i=1}^k$ является подпространством пространства $\mathcal{L}$, причём $dimV\{e_i\}_{i=1}^k \le dim\mathcal{L}$.

Доказательство:

Пусть x есть вектор из $V\{e_i\}_{i=1}^k$, то есть он является линейной комбинацией векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$. Пусть y – вектор из $V\{e_i\}_{i=1}^k$, то есть он является линейной комбинацией векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$.

Тогда $x+y$ также будет линейной комбинацией векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$, то есть $x+y \in V\{e_i\}_{i=1}^k$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда αx будет линейной комбинацией векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$, то есть $\alpha x \in V\{e_i\}_{i=1}^k$. Следовательно, операции сложения векторов и умножения вектора на число не выводят из $V\{e_i\}_{i=1}^k$, то есть $V\{e_i\}_{i=1}^k$ есть подпространство пространства $\mathcal{L}$. Значит по теореме 13: $dimV\{e_i\}_{i=1}^k \le dim\mathcal{L}$.

■

Замечание

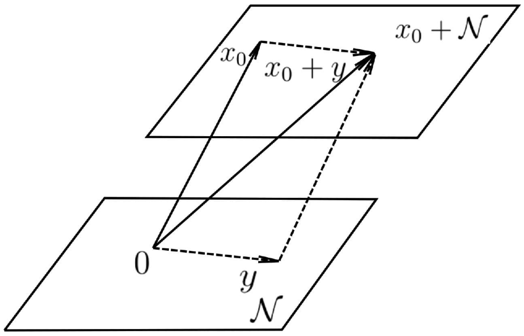
Линейную оболочку $V\{e_i\}_{i=1}^k$ будем называть также подпространством пространства $\mathcal{L}$, натянутым на векторы $\{e_i\}_{i=1}^k$.

Замечание

Подпространство, натянутое на векторы $\{e_i\}_{i=1}^k$, является наименьшим подпространством, содержащим эти векторы.

Определение

Пусть $\mathscr{N}$ – подпространство в $\mathcal{L}$, x_0 – фиксированный вектор. Множество M всех векторов вида $x = x_0 + y$, где $y \in \mathscr{N}$, называется линейным многообразием размерностью $dim\mathscr{N}$. Обозначают его символом $x_0 + \mathscr{N}$.



Будем рассматривать в $\mathbb{R}^3$ радиус-векторы (векторы с началом (0,0,0)). Пусть $\mathscr{N}$ – плоскость, проходящая через $(0, 0, 0)$.

Тогда концы векторов из линейного многообразия $x_0 + \mathscr{N}$ будут лежать на плоскости, параллельной плоскости $\mathscr{N}$ и смещённой на вектор x_0.

Определение

Пусть $dim\mathcal{L} = n$. Тогда одномерное линейное многообразие называется прямой, $(n-1)$-мерное – гиперплоскостью. Все остальные k-мерные линейные многообразия называются k-мерными плоскостями.

Теорема 16

Множество M всех решений неоднородной системы образуют линейное многообразие в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

$$M = y + \mathscr{N}, \tag{92}$$

где y – некоторое решение неоднородной системы, $\mathscr{N}$ – пространство решений соответствующей однородной системы.

Доказательство:

Пусть M – множество решений неоднородной системы:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , m. \tag{93}$$

Пусть $x = (x_1,\ .\ .\ .\ .\ .\ , x_n) \in M, \ \ y = (y_1,\ .\ .\ .\ .\ .\ , y_n) \in M.$

Рассмотрим $x - y = (x_1 - y_1,\ .\ .\ .\ .\ .\ , x_n - y_n)$. Подставим его в уравнение (93):

$$a_{i1}(x_1 - y_1) + \ .\ .\ .\ .\ . \ + a_{in}(x_n - y_n) = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + a_{in}x_n) -$$
$$-(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ .\ .\ .\ .\ . \ + a_{in}y_n) = b_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , m.$$

Значит разность решений неоднородной системы есть решение соответствующей однородной системы:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \ldots\ldots + a_{in}x_n = 0, \quad i = 1, 2, \ \ldots\ldots, m. \qquad (94)$$

Обозначим за $\mathscr{N}$ множество решений однородной системы (94). Оно является линейным пространством (было доказано в примере 6 линейных пространств, параграф 2.2). Правила действий в $\mathscr{N}$ такие же как в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, $\mathscr{N}$ является подпространством $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

Итак, мы доказали, что если $x, y \in M$, то $x - y \in \mathscr{N}$. Пусть x – произвольное решение неоднородной системы (93), y – некоторое фиксированное решение системы (93). Тогда $x - y$ – решение однородной системы (94), то есть $z = x - y \in \mathscr{N}$. Следовательно, любое решение $x \in M$ представимо в виде $x = y + z$, где $z \in \mathscr{N}$. Это означает, что $M \subset y + \mathscr{N}$.

Докажем обратное включение. Пусть $y \in M$, $x \in \mathscr{N}$. Рассмотрим $y + x$. Подставим его в уравнение (93):

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \ \ldots\ldots + a_{in}(x_n + y_n) = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \ldots\ldots + a_{in}x_n) +$$
$$+(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ \ldots\ldots + a_{in}y_n) = 0 + b_i, \quad i = 1, 2, \ \ldots\ldots, m.$$

Значит $y + x$ удовлетворяет неоднородной системе: $y + x \in M$. Следовательно, $y + \mathscr{N} \subset M$. Итак, мы получили:

$$\left.\begin{array}{l} y + \mathscr{N} \subset M \\ y + \mathscr{N} \supset M \end{array}\right\} \Rightarrow M = y + \mathscr{N}.$$

■

Альтернативная формулировка теоремы 16

Общее решение линейной неоднородной системы (93) есть сумма общего решения соответствующей линейной однородной системы (94) и частного решения неоднородной системы (93).

Определение

Семейство решений однородной системы линейных уравнений, являющееся базисом в пространстве всех его решений, называется **фундаментальной системой решений**.

2.5 Линейное нормированное пространство

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется нормированным, если любому его элементу x поставлено в соответствие вещественное число, называемое нормой и обозначаемое $\|x\|$, причем выполнено:

1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathcal{L}$;

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Линейное нормированное пространство становится метрическим, если ввести в нем расстояние $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Справедливость аксиом метрического пространства вытекает из свойств 1–3 нормы. Например, проверим свойство 2 (симметрия).

$$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1) \cdot (x - y)\| = | - 1| \cdot \|x - y\| = \rho(x, y).$$

Примеры введения норм

1) Множество вещественных чисел становится нормированным пространством, если положить $\|x\| = |x|$.

2) В пространстве $\mathbb{R}^n$ с элементами $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ можно положить

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2}.$$

В этом же пространстве можно ввести норму по-другому:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \text{ или } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|.$$

Аксиомы нормы выполняются.

Замечание

При $n = \infty$ соответствующие нормы называются ℓ^2 (евклидова норма), ℓ^1, ℓ^∞ (здесь вместо max в определении следует написать sup).

3) Норма в $C[a,b]$ – пространстве всех непрерывных функций на $[a,b]$:

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|.$$

Пример необычной геометрии в линейном нормированном пространстве

Пусть в двумерном линейном пространстве (на плоскости) норма введена следующим образом:

$$\|f\|_1 = |x| + |y|, \quad \text{где } f = (x, y). \tag{95}$$

Единичным кругом в нем служит квадрат следующей геометрии:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow \pm x \pm y = 1.$$

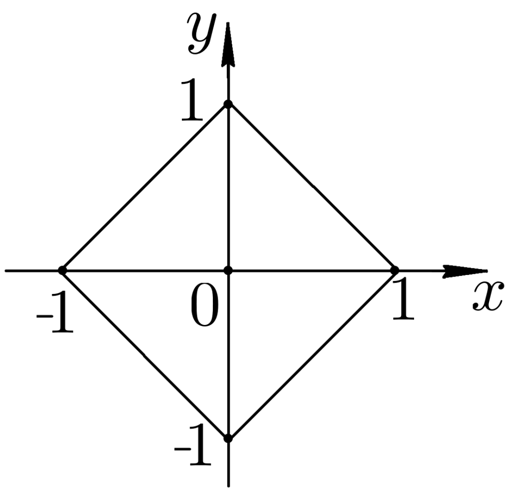


Рис. 3: Единичный круг в пространстве с нормой $\|f\|_1 = |x| + |y|$

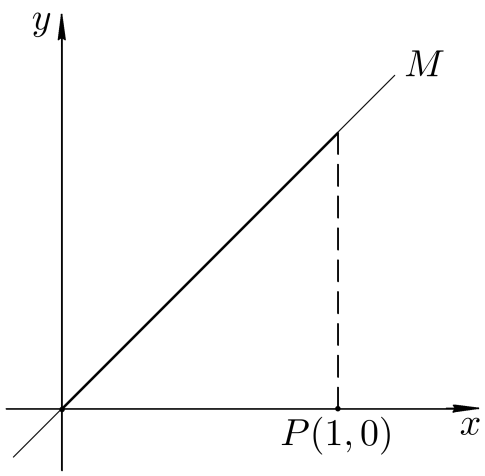


Рис. 4: Проекция точки P на подпространство

В обычном двумерном евклидовом пространстве, если заданы проходящая через начало координат прямая l и не лежащая на ней точка P, найдется единственная точка $\widetilde{P}$ на l такая, что расстояние $P\widetilde{P}$ минимально. $\widetilde{P}$ называется проекцией точки P на подпространство.

Выберем подпространство M следующим образом:

$$M = \{(x, y) : x = y\}.$$

Найдем проекцию точки $P(1, 0)$ на подпространство M. Найдем расстояние между точкой $P(1, 0)$ и произвольной точкой $\widetilde{P}(x, x) \in M$, где $x \in \mathbb{R}$:

$$\|P - \widetilde{P}\| = |1 - x| + |x|,$$

$$\begin{aligned} \text{при} \quad 0 \le x \le 1: &\qquad \|P - \widetilde{P}\| = 1 - x + x = 1, \\ x > 1: &\qquad \|P - \widetilde{P}\| = x - 1 + x = 2x - 1 > 1, \\ x < 0: &\qquad \|P - \widetilde{P}\| = 1 - x - x = 1 - 2x > 1. \end{aligned}$$

Мы получили, что минимальное расстояние между точками P и $\widetilde{P}$ равно 1, но достигается оно не в одной точке, а на целом отрезке при $0 \le x \le 1$. Таким образом, проекция точки P в данном пространстве уже не будет единственной, а значит и вводить её нет смысла.

2.6 Евклидово пространство

Определение

Комплексное линейное пространство E называется **евклидовым**, если любым двум его элементам f, g поставлено в соответствие комплексное число, называемое скалярным произведением и обозначаемое (f, g), причем выполнено:

1) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ – симметричность;

2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ – дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения векторов;

3) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g),\ \alpha \in \mathbb{C}$ – вынесение числового множителя;

4) $(f, f) \ge 0$ – неотрицательность скалярного произведения.

Если $(f, f) = 0$, то $f = 0$.

Примеры

1) В пространстве $\mathbb{R}^3$ скалярное произведение вводится по правилу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{96}$$

2) В пространстве $C[a,b]$ можно ввести скалярное произведение так:

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt. \tag{97}$$

Свойства скалярного произведения

1) Неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(f,g)|^2 \leq (f,f)(g,g). \tag{98}$$

Эквивалентная формулировка:

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|. \tag{99}$$

Доказательство:

1 случай.

Вещественное евклидово пространство, то есть $(f,g)\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, допустимо умножение только на вещественное число. По аксиоме 4 из определения евклидова пространства имеем:

$$(f+\alpha g, f+\alpha g)\geq 0 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R},$$

$$(f,f)+(f,\alpha g)+(\alpha g,f)+\alpha^2(g,g)\geq 0.$$

$$(f,\alpha g)=\overline{(\alpha g,f)}=\overline{\alpha(g,f)}=\overline{\alpha}(f,g)=\,/\alpha\in\mathbb{R}/\,=\alpha(f,g).$$

$$(\alpha g,f)=\alpha(g,f)=\alpha\overline{(f,g)}=\,/(f,g)\in\mathbb{R}/\,=\alpha(f,g).$$

$$(f,f)+2\alpha(f,g)+\alpha^2(g,g)\geq 0, \quad \forall\alpha.$$

Квадратный трехчлен будет неотрицательным при любом α, если выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} (g,g)\geq 0 \text{ (по аксиоме 4)} \\ D\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4(f,g)^2-4(f,f)(g,g)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(f,g)|^2\leq (f,f)(g,g).$$

■

2 случай.

Комплексное евклидово пространство, то есть $(f,g)\in\mathbb{C},\alpha\in\mathbb{C}$.
Пусть $(f,g)=|(f,g)|e^{i\varphi},\ \ \alpha=|\alpha|e^{i\theta}$.

$$(f+\alpha g,f+\alpha g)\geq 0,\quad \forall f,g\in E,\quad \forall\alpha\in\mathbb{C},$$

$$(f,f)+\alpha(g,f)+\overline{\alpha}(f,g)+\alpha\overline{\alpha}(g,g)\geq 0.$$

Учитывая, что: $(g,f)=|(f,g)|e^{-i\varphi},\ \ \overline{\alpha}=|\alpha|e^{-i\theta}$:

$$(f,f)+|\alpha|e^{i\theta}\cdot|(f,g)|e^{-i\varphi}+|\alpha|e^{-i\theta}\cdot|(f,g)|e^{i\varphi}+|\alpha|^2(g,g)\geq 0,$$

$$(f,f)+|\alpha|\cdot|(f,g)|\cdot\underbrace{(e^{i\theta-i\varphi}+e^{-i\theta+i\varphi})}_{=2\cos(\theta-\varphi)}+|\alpha|^2(g,g)\geq 0\quad\forall\ \alpha,f,g.$$

$$\begin{cases}(g,g)\geq 0\ (\text{выполнено})\\ D\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|(f,g)|^2\cdot 4\cos^2(\theta-\varphi)-4(g,g)(f,f)\leq 0. \tag{100}$$

Неравенство (100) выполнено для каждых θ,φ. В частности, оно выполнено при $\theta=\varphi$:

$$|(f,g)|^2\cdot 4-4(g,g)(f,f)\leq 0\Leftrightarrow|(f,g)|^2\leq(f,f)(g,g).$$

■

2) Равенство в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца

$$|(f,g)|^2\leq(f,f)(g,g).$$

достигается тогда и только тогда, когда векторы f и g пропорциональны: $g=\alpha f,\ \alpha\in\mathbb{C}$.

Доказательство:

Достаточность.

Простой подстановкой нетрудно убедиться, что если $g=\alpha f,\ \alpha\in\mathbb{C}$, то равенство достигается: $|(f,g)|^2 = (f,f)(g,g)$.

Необходимость.

Покажем, что если векторы f и g непропорциональны, то равенство не может быть достигнуто. Рассмотрим вектор $h = g - \frac{(g,f)}{(f,f)}f$. Скалярно домножим обе части равенства на f и получим:

$$(g,f) - \frac{(g,f)}{(f,f)}(f,f) = (h,f) \;\Leftrightarrow\; 0 = (h,f), \quad \text{то есть } h \perp f.$$

Итак, $g = \alpha f + h$, где $\alpha = \frac{(g,f)}{(f,f)}$, причем $h \perp f$. Преобразуем обе части неравенства Коши-Буняковского-Шварца.

$$|(f,g)|^2 = |(f,\alpha f + h)|^2 = |\overline{\alpha}(f,f) + \underbrace{(f,h)}_{=0}|^2 = |\overline{\alpha}|^2|(f,f)^2| = |\alpha|^2\|f\|^4.$$

С другой стороны,

$$\|f\|^2\|g\|^2 = \|f\|^2(g,g) = \|f\|^2(\alpha f + h, \alpha f + h) =$$
$$= \|f\|^2\Big(|\alpha|^2\|f\|^2 + \alpha\underbrace{(f,h)}_{=0} + \overline{\alpha}\underbrace{(h,f)}_{=0} + \|h\|^2\Big) =$$
$$= |\alpha|^2\|f\|^4 + \underbrace{\|f\|^2}_{>0}\underbrace{\|h\|^2}_{>0} > |\alpha|^2\|f\|^4.$$

Следовательно, $|(f,g)|^2 < \|f\|^2\|g\|^2$, то есть равенство в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца не достигается в случае когда векторы f и g непропорциональны.

■

3) Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ (то есть норму можно ввести таким образом).

Доказательство:

Проверим аксиомы линейного нормированного пространства. Аксиомы 1 и 3 очевидны, проверим аксиому 2 (неравенство треугольника):

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{(f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g)} =$$

$$= /(f,g) + (g,f) = 2\mathrm{Re}(f,g)/ = \sqrt{(f,f) + 2\mathrm{Re}(f,g) + (g,g)}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\mathrm{Re}(f,g) \le |(f,g)| \le \sqrt{(f,f)} \cdot \sqrt{(g,g)},$$

$$\sqrt{(f,f) + 2\mathrm{Re}(f,g) + (g,g)} \le \sqrt{(f,f) + 2\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)} + (g,g)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)}\right)^2} = \sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)} = \|f\| + \|g\|.$$

$\blacksquare$

Замечание

Из доказательства видно, что равенство в неравенстве треугольника $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ достигается тогда же, когда и в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца, то есть в случае пропорциональности векторов f и $g: \quad g = \alpha f$.

4) Угол между векторами

Определение

Углом между двумя векторами евклидова пространства называется число $\varphi \in [0, \pi]$, для которого выполнено:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad \text{где } \|x\| \ne 0,\ \|y\| \ne 0. \tag{101}$$

Определение корректно. Такое φ найдется, поскольку по неравенству Коши-Буняковского (формула (98)) выполнено:

$$\frac{|(x,y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1, \quad \text{где } \|x\| \ne 0,\ \|y\| \ne 0. \tag{102}$$

Определение

Элементы x, y называются ортогональными, если $(x,y) = 0$ (то есть угол между векторами равен $\frac{\pi}{2}$). Нулевой вектор по определению отогонален любому вектору.

Замечание

В пространстве $\mathbb{R}^3$ введенный угол совпадает с обычным углом между векторами, а ортогональность тождественна перпендикулярности векторов.

Ортонормированный базис

Определение

Система векторов $e_1,\ e_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , e_n$ называется ортогональной, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. И ортонормированной, если:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{103}$$

Теорема 17

Ортонормированная система векторов линейно независима.

Доказательство:

Пусть $e_1, e_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , e_n$ – ортонормированная система, а также пусть

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 +\ .\ .\ .\ .\ .\ + \alpha_n e_n = \mathbb{O}. \tag{104}$$

Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_2 =\ .\ .\ .\ .\ .\ = \alpha_n = 0$, что и означает линейную независимость векторов. Домножим равенство (104) скалярно на e_i. В силу свойства ортонормированности (103) получим: $\alpha_i(e_i, e_i) = \alpha_i = 0, \quad \forall i.$

■

Теорема 18

В n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство:

Докажем методом математической индукции по размерности пространства n.

1) База индукции. $n = 1$.

В одномерном пространстве ортонональность базисных векторов не имеет смысла. Для построения ортонормированного базиса достаточно взять любой ненулевой вектор и отнормировать его. Пусть $f \neq \mathbb{O}$. Тогда $e = \frac{f}{||f||}$ – ортонормированный базис.

2) Переход $n \to n + 1$.

Пусть в любом n-мерном пространстве существует ортонормированный базис. Докажем, что ортонормированный базис существует в любом $(n + 1)$-мерном пространстве. Рассмотрим некоторое евклидово $(n + 1)$-мерное пространство и базис в нем: $f_1, \ \ldots\ldots, f_{n+1}$. Линейная оболочка $V\{f_i\}_{i=1}^n$ – это n-мерное пространство. По индукционному предположению в нем существует ортонормированный базис из n векторов, $e_1, \ e_2, \ \ldots\ldots, e_n$. Построим еще один единичный вектор e_{n+1}, отогональный всем e_i. Для этого рассмотрим вектор

$$\tilde{f}_{n+1} = f_{n+1} - \alpha_1 e_1 - \ \ldots\ldots \ - \alpha_n e_n. \tag{105}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \ \ldots\ldots, \alpha_n$ выберем так, чтобы вектор $\tilde{f}_{n+1}$ был ортогонален ко всем $e_1, e_2, \ \ldots\ldots, e_n$:

$$(\tilde{f}_{n+1}, e_i) = 0 \quad \forall i. \tag{106}$$

Подставим сюда $\tilde{f}_{n+1}$ из формулы (105).

Тогда в силу ортонормированности $e_1, \ e_2, \ \ldots\ldots, e_n$ получим:

$$(f_{n+1}, e_i) - \alpha_i = 0 \quad \forall i \ \Rightarrow \ \alpha_i = (f_{n+1}, e_i), \quad \forall i = 1, \ \ldots\ldots, n. \tag{107}$$

Вектор e_{n+1} выберем следующим образом:

$$e_{n+1} = \frac{\tilde{f}_{n+1}}{\|\tilde{f}_{n+1}\|}. \tag{108}$$

Тогда $\|e_{n+1}\| = 1$ и $(e_{n+1}, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ \ldots\ldots, n$.

Таким образом, векторы $e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots, e_{n+1}$ образуют ортонормированную систему. По теореме 17 она линейно независима. Она полная, так как в ней $(n+1)$ вектор. Следовательно, это ортонормированный базис.

■

Замечание

Рассмотренная в доказательстве процедура построения ортонормированного базиса называется ортогонализацией по Граму-Шмидту.

Пусть есть базис $f_1,\ \ldots\ldots, f_n$. Ортогонализуем его.

$e_1 = \frac{f_1}{||f_1||} = ||f_1||^{-1} \cdot f_1,$

$e_2 = (f_2 - (f_2, e_1)e_1) \cdot ||f_2 - (f_2, e_1)e_1||^{-1},$

$e_3 = (f_3 - (f_3, e_1)e_1 - (f_3, e_2)e_2)||(f_3 - (f_3, e_1)e_1 - (f_3, e_2)e_2)||^{-1},$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

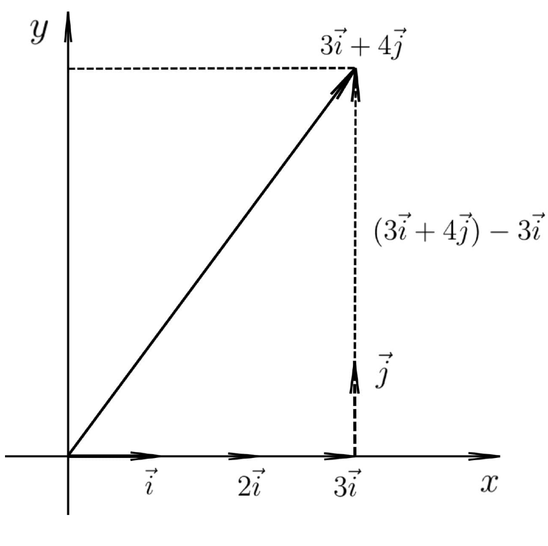
И так далее.

Пример

Пусть на плоскости задан базис $f_1 = 2\vec{i},\ f_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Ортогонализуем его.

$$e_1 = ||2\vec{i}||^{-1} \cdot 2\vec{i} = \vec{i},$$

$$e_2 = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} - (3\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{i})\vec{i}}{||3\vec{i} + 4\vec{j} - (3\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{i})\vec{i}||} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{i}}{||4\vec{j}||} = \frac{4\vec{j}}{4} = \vec{j}.$$



Вычисление координат вектора в ортонормированном базисе

Пусть $e_1, e_2, \; . \; . \; . \; . \; . \; , e_n$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве E.

Тогда $\forall x \in E: \quad x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; + \xi_n e_n$. Умножая это равенство на e_i, в силу ортонормированности базиса получим:

$$(x, e_i) = \xi_i, \quad i = 1, \; . \; . \; . \; . \; . \; , n,$$

то есть координата вектора в ортонормированном пространстве находится по правилу:

$$\xi_i = (x, e_i). \tag{109}$$

3. Операторы

3.1 Линейный оператор. Матрица линейного оператора

Определение

Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – линейные пространства. Если задан закон, в соответствии с которым любому элементу $x \in \mathcal{L}_1$ ставится в соответствие элемент $y \in \mathcal{L}_2$, то говорят, что задан оператор $\hat{A}$, действующий из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ и пишут: $y = \hat{A}x$

Замечание

Здесь и в дальнейшем будем использовать следующие обозначения.

Операторы будем обозначать буквами "со шляпкой": $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и так далее, а их матрицы – соответствующими обычными буквами: A, B, C и.т.д.

Определение

Оператор $\hat{A}$: $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ называется линейным, если выполнено:

1) $\hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$

2) $\hat{A}(\alpha x) = \alpha \hat{A}x \quad \forall x \in \mathcal{L}_1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Определение

Линейный оператор,действующий из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ называется гомоморфизмом. Если $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, то линейный оператор называется эндоморфизмом.