8.3 Приближённые вычисления с использованием рядов

Для приближённого вычисления функция заменяется рядом Тейлора или Маклорена. Вычисляется частичная сумма ряда. Погрешность (остаток ряда) оценивается. Приближённые вычисления имеют смысл только когда возможно оценить остаток ряда. Это возможно не всегда. Случаи, когда остаток ряда удаётся оценить:

1) Остаток ряда имеет лейбницевский тип (ряд знакочередующийся, члены монотонно убывают: $a_1 > a_2 > \ \ldots\ > a_n > \ \ldots,\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$). В этом случае погрешность не превышает первого отброшенного члена. Действительно, остаток ряда равен:

$$r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \ \ldots\ = \\ = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{>0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{>0} - \ \ldots\ldots$$

Пример
Вычислить $\sin 1$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.
Ряд Маклорена для $\sin x$:

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \ \ldots\ldots\ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{n членов ряда}} + \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + \ldots}_{r_n}$$

В качестве приближённого значения $\sin x$ возьмём первые n членов ряда. Оценим остаток r_n . Для него должно быть выполнено:

$$|r_n| < \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} < \varepsilon \quad \text{(выберем } n \text{ таким образом)}$$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \underbrace{\frac{1}{5040}}_{<\varepsilon=10^{-3}} + \ \ldots\ldots\ \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120}.$$

/ Мы отбросили члены которые меньше $\varepsilon = 10^{-3}$ /

Ответ: $\sin 1 \approx \frac{101}{120}$, точность $\varepsilon = 10^{-3}$.

Остаток ряда можно оценить геометрической прогрессией
Пример
Вычислим e^1 с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \overbrace{\frac{x^n}{n!}}^{=a_n} + \underbrace{\overbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}^{=a_{n+1}} + \ .\ .\ .\ .\ .\ .}_{r_n}$$

Оценим остаток ряда r_n :

$$|r_n| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \ .\ .\ .\ .\ .$$

$$|a_{n+1}| = \frac{|x|}{n+1}\,|a_n|\,,$$

$$|a_{n+2}| = \frac{|x|}{n+2}\,|a_{n+1}| = \frac{|x|^2}{(n+1)(n+2)}\,|a_n| < \frac{|x|^2}{(n+1)^2}\,|a_n|\,,$$

$$|a_{n+3}| < \frac{|x|^3}{(n+1)^3}\,|a_n| \quad \text{и так далее.}$$

Тогда:

$$|r_n| < \frac{|x|}{n+1}\,|a_n| + \frac{|x|^2}{(n+1)^2}\,|a_n| + \frac{|x|^3}{(n+1)^3}\,|a_n| + \ .\ .\ .\ .\ . \ = \frac{\frac{|x|}{n+1}\,|a_n|}{1 - \frac{|x|}{n+1}} < \varepsilon.$$

/ При $\dfrac{|x|}{n+1} < 1$ (начиная с некоторого n, это условие будет выполнено)

ряд превращается в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию /

Выбираем n таким образом, чтобы:

$$\frac{\frac{|x|}{n+1}\,|a_n|}{1 - \frac{|x|}{n+1}} < \varepsilon.$$

В нашем случае:
$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ .\ .\ .\ .\ .$ Мы хотим узнать, как долго продолжать суммирование. Для этого проверим остаток ряда:

$$|r_n| < \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{1 - \frac{1}{n+1}} < 10^{-3}.$$

Начиная с $n = 6$, неравенство будет выполнено:

$$\frac{\frac{1}{5040}}{1 - \frac{1}{7}} < \frac{1}{1000}.$$

Итак, суммируем до $n = 6$:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

Задачи

1) Вычислить $\cos 1$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \; \ldots\ldots \; + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \; \ldots\ldots}_{r_n}$$

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \underbrace{\frac{1}{40320}}_{<10^{-3}} + \; \ldots\ldots \; \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720}.$$

2) Вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\cos 18^\circ = \cos \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2} + \underbrace{\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{24}}_{<10^{-3}} - \; \ldots\ldots \; \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2}.$$

3) Вычислить $e^{\frac{1}{10}}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \; \ldots\ldots \; + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \; \ldots\ldots$$

Аналогично задаче для e^1 :

$$|r_n| < \frac{\frac{|x|}{n+1} |a_n|}{1 - \frac{|x|}{n+1}} = \frac{\frac{1}{10(n+1)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n}{n!}}{1 - \frac{1}{10(n+1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10(n+1)}} \cdot \frac{1}{10^{n+1} \cdot (n+1)!}.$$

Начиная с $n = 3$, остаток ряда r_n по модулю будет меньше 10^{-4}. Таким образом, для достижения требуемой точности нужно просуммировать первые четыре члена ряда:

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000}.$$

4) Вычислить $\ln 2$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-1}$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ \ldots\ldots\ + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ \ldots\ldots$$

$$\ln 2 = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \ \ldots\ldots$$

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}.$$

5) Вычислить $\sqrt[3]{70}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64+6} = 4\sqrt[3]{1+\frac{6}{64}} = 4\cdot\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\Big/\ (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ \ldots\ldots\ + \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}x^n +$$
$$+\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1} + \ \ldots\ldots \qquad \Big/$$

Для достижения точности 10^{-3} при вычислении $\sqrt[3]{70}$ нам необходимо посчитать $\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}}$ в 4 раза точнее, то есть с точностью $\varepsilon = \frac{1}{4}\cdot 10^{-3}$.

$$\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{32} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^3 + \ldots\ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^2 + \underbrace{\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^3}_{<\frac{1}{4}\cdot 10^{-3}} - \ \ldots\ldots\ \approx 1 + \frac{1}{32} - \left(\frac{1}{32}\right)^2.$$

Итак,

$$\sqrt[3]{70} \approx 4\cdot\left(1+\frac{1}{32}-\left(\frac{1}{32}\right)^2\right) = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{256}.$$

6) Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ \ldots\ldots\ + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \ldots\ldots$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{5040} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \underbrace{\frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}_{\approx 0{,}000497<10^{-3}} - \frac{1}{7}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7}{5040} + \ldots. \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3.$$

9. Ряды Фурье

Ряд Фурье пишется по ортонормированному базису. Но чтобы ввести такой базис, нужно знать некоторые определения.

Замечание

Ряд Тейлора вводится для того, чтобы хорошо приблизить функцию в окрестности некоторой точки. Ряд Фурье вводится для приближения функции на всей её области определения.

Введем базис в пространстве $L_2(a,\ b)$.

Определение

$L_2(a,\ b)$ – пространство функций, для которых существует $\int\limits_a^b |\varphi(x)|^2\,dx$.

Скалярное произведение в L_2:

$$(\varphi,\ \psi) = \int\limits_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

$\Big/\ \overline{\psi(x)}$ – комплексно сопряженная функция к $\psi(x)\ \Big/$

Норма в L_2: $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)}$.

Ортогональность двух функций φ и ψ : $(\varphi,\ \psi) = 0$.

Ортонормированная система функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\begin{cases} (\varphi_i,\ \varphi_j) = 0, & i \neq j, \\ (\varphi_i,\ \varphi_i) = 1. \end{cases}$$

Определение

Ряд Фурье функции f по ортонормированному базису $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\varphi_i. \tag{9.1}$$

Коэффициенты Фурье находятся следующим образом:

$$(f,\varphi_k) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \underbrace{(\varphi_i,\varphi_k)}_{\substack{\| \\ \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i\neq k \\ 1, & i = k\end{cases}}} = C_k \cdot \|\varphi_k\|^2 = C_k,$$

где C_k – коэффициенты Фурье.

9.1 Тригонометрический ряд Фурье

Рассмотрим периодические функции с периодом T.
$\left[-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$ – период. Ортонормированный базис в $L_2\left(-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}\right)$ составляет система функций:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{T}}}, \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\cos\frac{2\pi x}{\mathrm{T}}, \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\sin\frac{2\pi x}{\mathrm{T}}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\cos\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}, \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\sin\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}, \ldots..$$

Любую периодическую (с периодом T) функцию $f(x)$ (непрерывную или имеющую на периоде конечное число разрывов типа скачка) можно представить рядом Фурье по тригонометрической системе функций:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}} + b_n\sin\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}\right),$$

где $a_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int\limits_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(x)\cos\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}dx, \quad b_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int\limits_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}dx$

При этом ряд сходится к $f(x)$ в точках непрерывности и к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точках разрыва. Например, для функции

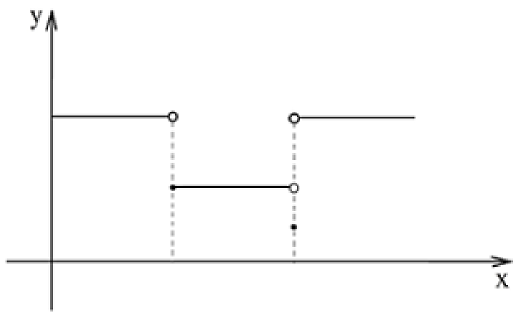

Рис. 62: Периодическая функция

график суммы ряда будет иметь вид:

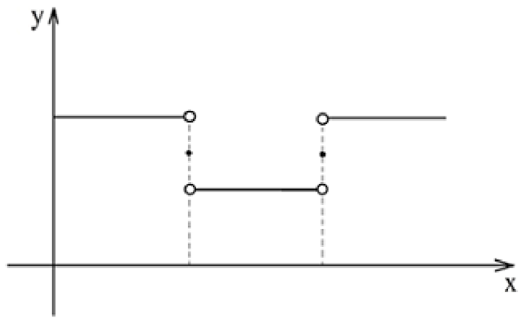

Рис. 63: График суммы ряда

Задачи

1) Разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье; построить график суммы ряда.

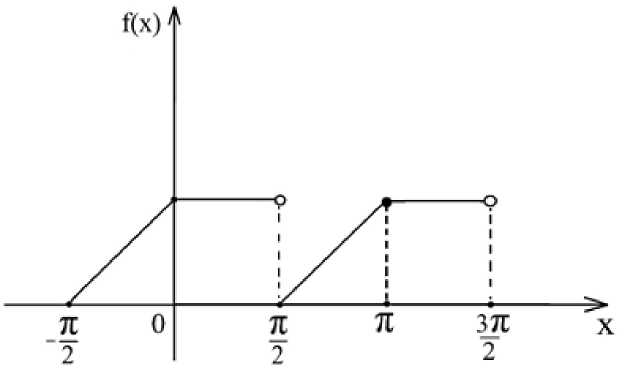

Рис. 64: К задаче 1

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ – период. Соответственно, $T = \pi$.
Запишем функцию $f(x)$ в аналитической форме:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{\pi}{2}, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos \frac{2\pi nx}{\pi} dx + \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos \frac{2\pi nx}{\pi} dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) dx + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x \cos(2nx) dx =$$

$$\bigg/ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ v = \frac{1}{2n}\sin(2nx) & dv = \cos(2nx)dx \end{matrix} \bigg/$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2n}\sin(2nx)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{2n}\sin(2nx)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2n}\sin(2nx)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin(2nx)dx = \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{2n}\cos(2nx)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2\pi n^2}(1 - \underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n}) =$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2} \text{ – верно при } n \neq 0.$$

Рассмотрим случай $n = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx}_{=\frac{\pi}{2}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1+\frac{2}{\pi}x\right)dx + \frac{\pi}{2} =$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{\pi}\right)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi} + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{3\pi}{4}.$$

Найдем b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\frac{2\pi nx}{\pi}dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\sin\frac{2\pi nx}{\pi}dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nx)dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}x\sin(2nx)dx =$$

$$\bigg/ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ v = -\frac{1}{2n}\cos(2nx) & dv = \sin(2nx)dx \end{matrix} \bigg/$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2n}\cos(2nx)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}x\cos(2nx)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos(2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n} + \underbrace{\frac{1}{\pi n} \cdot \frac{1}{2n} \sin(2nx)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}}_{=0} = -\frac{1}{2n}(-1)^n.$$

Итак, разложенная функция в тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2\pi n} \cos(2nx) - \frac{(-1)^n}{2n} \sin(2nx) \right).$$

Ответ записан в такой форме, так как наша функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $\frac{\pi}{2}$ на периоде и в точке разрыва ряд сходится к полусумме правого и левого пределов функции $f(x)$.
График суммы ряда:

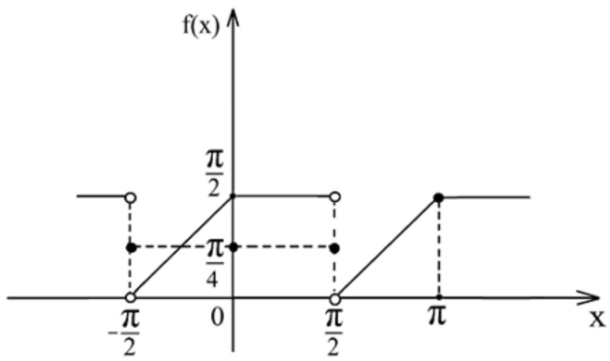

Рис. 65: К задаче 1

2) Разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье; построить график суммы ряда.

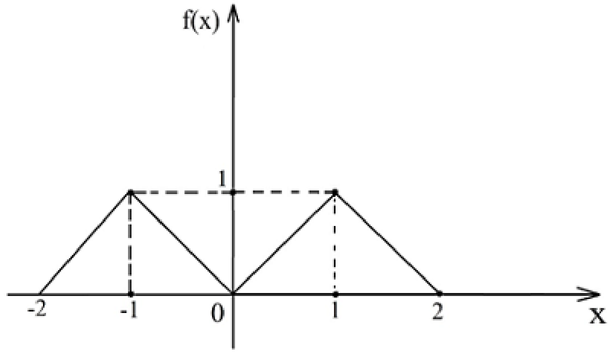

Рис. 66: К задаче 2

T = 2 – период.

$$f(x)=\begin{cases} -x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int\limits_{-1}^{0}(-x)\cos\frac{2\pi nx}{2}dx+\frac{2}{2}\int\limits_{0}^{1}x\cos\frac{2\pi nx}{2}dx=-\int\limits_{-1}^{0}x\cos(\pi nx)dx+\int\limits_{0}^{1}x\cos(\pi nx)dx=$$

$$\Bigg/\ \begin{matrix} u=x & du=dx\\ v=\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx) & dv=\cos(\pi nx)dx\end{matrix}\ \Bigg/$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{\pi n}x\sin(\pi nx)\Big|_{-1}^{0}}_{=0}+\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx)dx+\underbrace{\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx)dx\Big|_{0}^{1}}_{=0}-\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{1}\sin(\pi nx)dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2n^2}\cos(\pi nx)\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{\pi^2n^2}\cos(\pi nx)\Big|_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2n^2}(1-\underbrace{\cos(-\pi n)}_{=(-1)^n})+\frac{1}{\pi^2n^2}(\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n}-1)=\frac{2}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)\text{ – верно при } n\neq 0.$$

Рассмотрим случай $n=0$:

$$a_0=\frac{2}{2}\int\limits_{-1}^{0}(-x)dx+\frac{2}{2}\int\limits_{0}^{1}xdx=-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Найдем b_n.

$$b_n=\frac{2}{2}\int\limits_{-1}^{0}(-x)\cdot\sin\frac{2\pi nx}{2}dx+\frac{2}{2}\int\limits_{0}^{1}x\cdot\sin\frac{2\pi nx}{2}dx=\int\limits_{-1}^{0}(-x)\cdot\sin(\pi nx)dx+\int\limits_{0}^{1}x\cdot\sin(\pi nx)dx=$$

$$\Bigg/\ \begin{matrix} u=x & du=dx\\ v=-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx) & dv=\sin(\pi nx)dx\end{matrix}\ \Bigg/$$

$$=\frac{1}{\pi n}x\cdot\cos(\pi nx)\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-1}^{0}\cos(\pi nx)dx-\frac{1}{\pi n}x\cos(\pi nx)\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{1}\cos(\pi nx)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\cos(-\pi n)-\underbrace{\frac{1}{\pi^2n^2}\sin(\pi nx)\Big|_{-1}^{0}}_{=0}-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n)+\underbrace{\frac{1}{\pi^2n^2}\sin(\pi nx)\Big|_{0}^{1}}_{=0}=0$$

Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1\right) \cdot \cos(\pi n x).$$

График суммы ряда:

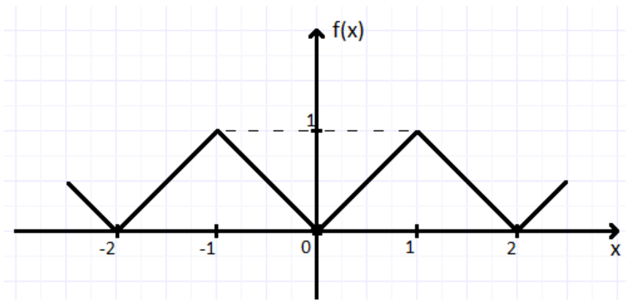

Рис. 67: К задаче 2

3) Разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье; построить график суммы ряда.

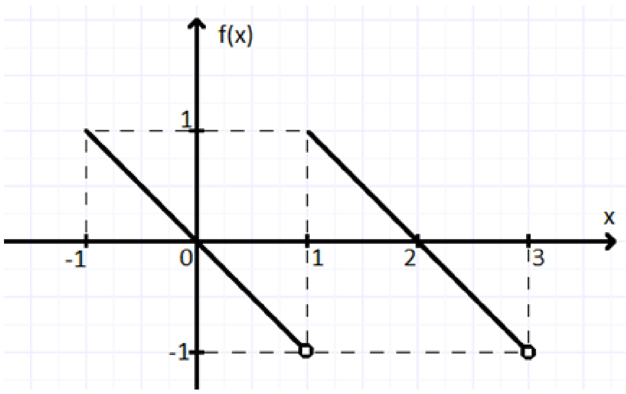

Рис. 68: К задаче 3

T = 2 – период. $f(x) = -x, \quad -1 \leqslant x < 1.$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} (-x) \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2} dx = -\int_{-1}^{1} x \cdot \cos(\pi n x) dx =$$

$$\Bigg/ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n x) & dv = \cos(\pi n x) dx \end{array} \Bigg/$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi n} x \cdot \sin(\pi n x)\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-1}^{1} \sin(\pi n x) dx = -\frac{1}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2 n^2} \left(\cos(\pi n) - \cos(-\pi n)\right) = 0 \text{ – верно при } n \neq 0.$$

Рассмотрим случай $n = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{2} \int\limits_{-1}^{1} (-x) dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Найдем b_n.

$$b_n = \frac{2}{2} \int\limits_{-1}^{1} (-x) \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} dx = -\int\limits_{-1}^{1} x \cdot \sin(\pi n x) dx =$$

$$\Bigg/ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = -\frac{1}{\pi n} \cos(\pi n x) & dv = \sin(\pi n x) dx \end{array} \Bigg/$$

$$= \frac{1}{\pi n} x \cdot \cos(\pi n x)\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-1}^{1} \cos(\pi n x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left(\cos(\pi n) - \cos(-\pi n)\right) - \underbrace{\frac{1}{\pi^2 n^2} \sin(\pi n x)\Big|_{-1}^{1}}_{=0} = \frac{2}{\pi n} (-1)^n.$$

Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin(\pi n x).$$

График суммы ряда:

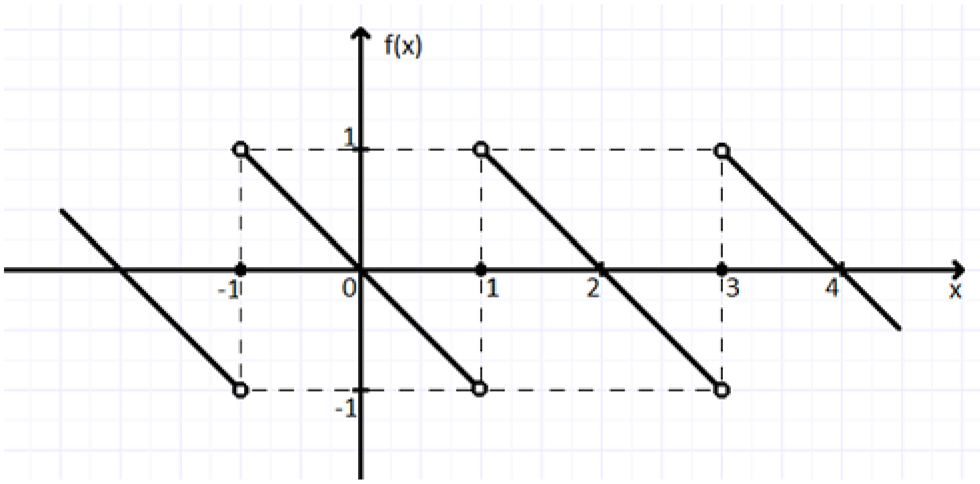

Рис. 69: К задаче 3

4) Разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье; построить график суммы ряда.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0] \\ \cos x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$$

Мы задали функцию на $(-\pi; \pi]$. Дальше продолжаем периодически.

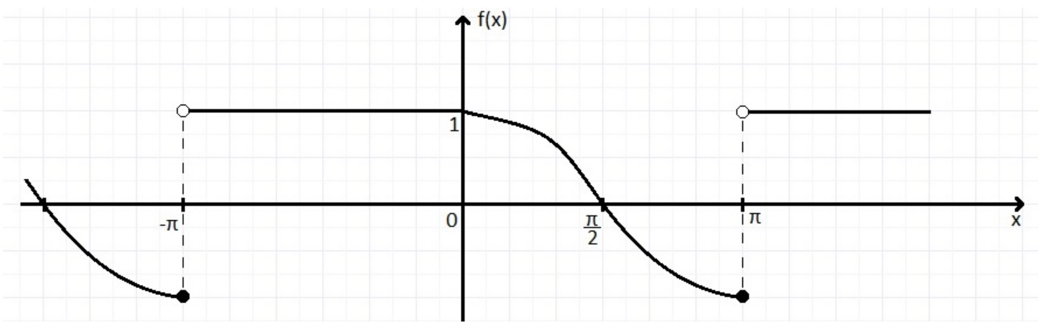

Рис. 70: К задаче 4

$$\text{T} = 2\pi.$$

$[-\pi; \pi]$ – период.

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} 1 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2\pi} dx + \frac{2}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \cos x \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2\pi} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos x\cdot\cos(nx)dx =$$

$$\Big/ \cos x\cdot\cos(nx) = \frac{\cos\left((n+1)x\right)+\cos\left((n-1)x\right)}{2} \Big/$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0}}_{=0} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos\left((n+1)x\right)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos\left((n-1)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)}\sin\left((n+1)x\right)\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(n-1)}\sin\left((n-1)x\right)\Big|_{0}^{\pi} = 0 - \text{верно при } n\neq 0,\ n\neq 1.$$

Рассмотрим случаи $n = 0$ и $n = 1$:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}dx + \frac{2}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos dx = \frac{1}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\sin x\Big|_{0}^{\pi} = 1.$$

$$a_1 = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}1\cdot\cos\frac{2\pi x}{2\pi}dx + \frac{2}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos x\cdot\cos\frac{2\pi x}{2\pi}dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\sin x\Big|_{0}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\underbrace{\cos^2 x}_{=\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \frac{1}{2\pi}x\Big|_{0}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sin 2x\Big|_{0}^{\pi}}_{=0} = \frac{1}{2}.$$

Найдем b_n.

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}1\cdot\sin\frac{2\pi nx}{2\pi}dx + \frac{2}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos x\cdot\sin\frac{2\pi nx}{2\pi}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos x\cdot\sin(nx)dx =$$

$$\Big/ \sin(nx)\cdot\cos x = \frac{\sin\left((n+1)x\right)+\sin\left((n-1)x\right)}{2} \Big/$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin\left((n+1)x\right)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin\left((n-1)x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(1-\cos(-\pi n)\right) - \frac{1}{2\pi(n+1)}\cdot\cos\left((n+1)x\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi(n-1)}\cdot\cos\left((n-1)x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) - \frac{1}{2\pi(n+1)}\cdot\Big(\underbrace{\cos\left(\pi(n+1)\right)}_{=(-1)^{n+1}}-1\Big) - \frac{1}{2\pi(n-1)}\cdot\Big(\underbrace{\cos\left(\pi(n-1)\right)}_{=(-1)^{n-1}}-1\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left((-1)^n-1\right) + \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(1-(-1)^{n+1}\right) + \frac{1}{2\pi(n-1)}\left(1-(-1)^{n-1}\right) \text{ – верно при } n \neq 1.$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \underbrace{\cos x \cdot \sin x}_{\frac{1}{2}\sin(2x)} dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_{-\pi}^{0} - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\cos(2x)\Big|_0^{\pi}}_{=0} = -\frac{2}{\pi}.$$

Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(nx) - \frac{2}{\pi}\sin(nx) +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n-1\right) + \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(1-(-1)^{n+1}\right) + \frac{1}{2\pi(n-1)}\left(1-(-1)^{n-1}\right)\right)\cdot\sin(nx).$$

Альтернативная запись:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(nx) - \frac{2}{\pi}\sin(nx) + \sum_{n=2}^{\infty}(.....) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi n, \\ 0, & x = \pi n. \end{cases}$$

График суммы ряда:

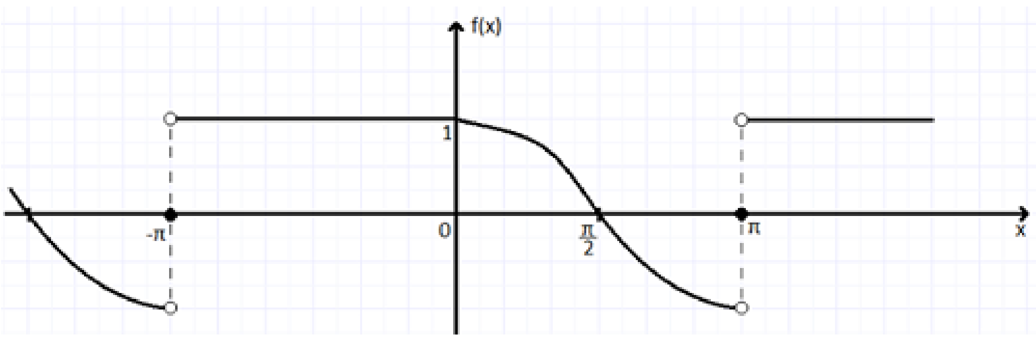

Рис. 71: К задаче 4