**12)** Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$

$$\int\limits_3^{\infty}\frac{1}{x\ln x\,(\ln\ln x)^2}dx = \Big/ d\,(\ln\ln x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\Big/ = \int\limits_3^{\infty}\frac{d\,(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln\ln x}\bigg|_3^{\infty} = \frac{1}{\ln\ln 3}$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$ также сходится.

## 7.3 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Знакопеременный ряд – ряд, у которого члены разных знаков.
Например: $a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$ , где $a_i > 0$
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей членов этого ряда:

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

**Теорема (Признак сходимости знакопеременного ряда)**
Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.
***Определение***
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся.
**Теорема (Признак Лейбница)**
Пусть члены $a_n$ знакочередующегося ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ \dots\dots\ + (-1)^{n+1}a_n + \ \dots\dots \tag{7.4}$$

монотонно убывают : $a_1 > a_2 > \ \dots\dots\ > a_n > \ \dots\dots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Тогда ряд (7.4) сходится, причем его сумма $S < a_1$.

$$\Big/\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ \dots\dots\ = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{>0} - \ \dots\dots\ \Big/$$

Для проверки абсолютной сходимости можно использовать признаки для положительных рядов (Коши, Даламбера и другие).

**Пример**
Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leftarrow \text{ сходится (так как это гармонический ряд)}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n|}{n^2}$ сходится, а значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ сходится абсолютно, то есть сходится.

**Задачи**
Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

**1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3n-1}$

Для проверки абсолютной сходимости исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$.
Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+2} \cdot \frac{3n-1}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{3n+2}\right) = 1$$

Признак Даламбера не сработал.
Воспользуемся предельным признаком сравнения:
Сравним ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-1}$ расходится.
При помощи признака Лейбница проверим на условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3n-1}$.
$a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = \dfrac{1}{5},\ a_3 = \dfrac{1}{8},\ \ldots\ldots, a_n = \dfrac{1}{3n-1},$
то есть члены ряда монотонно убывают. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} = 0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3n-1}$ сходится.
Ответ: ряд сходится условно.

**2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{5n-2}$

Для проверки абсолютной сходимости исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n+3}\cdot\frac{5n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2n+5n-2}{5n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n+3}{10n+3}=1$$

Признак Даламбера не работает. Нужно искать другой путь.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{n}{n-\frac{2}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n-\dfrac{2}{5}}\right)>\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty.$$

Ряд из единиц расходится, значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-2}$ также расходится. То же самое можно было доказать, воспользовавшись предельным признаком сравнения. Сравним ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5n-2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{5n-2}}{1}=\frac{1}{5},$$

то есть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5n-2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ ведут себя одинаково. Итак, мы доказали абсолютную расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{5n-2}$. Проверим его на условную сходимость по признаку Лейбница. Убывание членов ряда видно из формулы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5n-2}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n-\dfrac{2}{5}}\right)$$

$$\underbrace{a_1}_{=\frac{1}{3}}>\underbrace{a_2}_{=\frac{1}{4}}>\underbrace{a_3}_{=\frac{3}{13}}>\underbrace{a_4}_{=\frac{2}{9}}>\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\frac{n-\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}}{n-\dfrac{2}{5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n-\dfrac{2}{5}}\right)=\frac{1}{5}\neq 0$$

Нарушено необходимое условие сходимости $\Rightarrow$ ряд расходится.
Ответ: ряд расходится.

**3)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

Для проверки абсолютной сходимости исследуем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.
Воспользуемся интегральным признаком Коши.

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int\limits_2^{\infty}\ln x d\left(\ln x\right)=\left.\frac{\left(\ln x\right)^2}{2}\right|_2^{\infty}=\infty$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ расходится.

Проверим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ на условную сходимость.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0$ (применили правило Лопиталя).
Осталось проверить, что: $a_1>a_2>a_3>a_4>\ .....\ >a_n>\ .....$
Точнее, можно доказывать даные неравенства, начиная с некоторого номера, поскольку отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость. Докажем, что $a_n>a_{n+1}$, то есть нужно проверить, что:

$$\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\left(n+1\right)}{n+1}=\frac{\ln n\cdot\left(n+1\right)-n\ln\left(n+1\right)}{n\left(n+1\right)}>0$$

$$\ln n\cdot(n+1)-n\ln\left(n+1\right)>0\ \Leftrightarrow\ \ln n^{n+1}-\ln\left(n+1\right)^n>0\ \Leftrightarrow\ \ln\frac{n^{n+1}}{\left(n+1\right)^n}>0$$

Нетрудно убедиться в том, что последнее неравенство всегда выполнено, так как аргумент натурального логарифма будет больше единицы:

$$\frac{n^{n+1}}{\left(n+1\right)^n}=\frac{n^n}{\left(n+1\right)^n}\cdot n=\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\to\frac{1}{e}}\cdot\underbrace{n}_{\to\infty}>1.$$

По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ сходится.
Ответ: ряд сходится условно.

# 8. Функциональные ряды

Функциональный ряд – это ряд из функций $f\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R}$:

$$f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)+\ .....\ +f_n\left(x\right)+\ ......\ =\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)\qquad(8.1)$$

При каждом фиксированном $x$ функциональный ряд превращается в числовой и можно определить его сходимость или расходимость. Множество тех значений $x$, при которых ряд сходится, называется областью сходимости.

**Пример**

Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}}_{=f_n(x)}, \quad x \in \mathbb{R},\ x > -2.$$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}$$

По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

$$\Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1 \Big/$$

По признаку Коши ряд сходится при

$$\frac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1 \ \Leftrightarrow\ 1 < 3\sqrt{x+2} \ \Rightarrow\ x+2 > \frac{1}{9} \ \Rightarrow\ x > -\frac{17}{9}.$$

При $x = -\frac{17}{9}$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$.

По признаку Лейбница:

Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$ монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$ сходится.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ сходится при $x \geqslant -\frac{17}{9}$.

Проверим сходимость ряда при $-2 < x < -\dfrac{17}{9}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}}>1$ при $-2<x<-\dfrac{17}{9}$.
Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|>1$, а значит нарушено необходимое условие сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\neq 0$). Следовательно, ряд расходится.

Ответ: область сходимости: $\Big[-\dfrac{17}{9},+\infty\Big)$.

**Задачи**

Найти области сходимости следующих рядов:

**1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

По признаку сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^{\frac{3}{2}}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^{\frac{3}{2}}}$ тоже сходится, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится.

Область сходимости: $(-\infty;+\infty)$.

**2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$

По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n^2x}}=\lim_{n\to\infty}e^{-nx}=\begin{cases}0 \text{ при } x>0 \ \Rightarrow \ \text{ряд сходится;}\\ 1 \text{ при } x=0;\\ \infty \text{ при } x<0 \ \Rightarrow \ \text{ряд расходится.}\end{cases}$$

При $x=0$ ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=\infty \ \Rightarrow$ ряд расходится.

Область сходимости: $(0,\infty)$.

## 8.1 Степенные ряды

Ряд

$$C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\ldots+C_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \tag{8.2}$$

называется степенным по степеням $(x-x_0)$.

В частности, при $x_0=0$ получаем степенной ряд по степеням $x$ :

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\ \ldots\ldots\ +C_nx^n+\ \ldots\ldots\ =\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \tag{8.3}$$