Содержание

Глава 1. Неопределённый интеграл

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, если для всех x из промежутка $[a,\, b]$ выполняется $F'(x) = f(x)$.

Пример

Если $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, то $F(x) = \operatorname{tg} x$ есть первообразная от функции $f(x)$.

Теорема 1

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ есть две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, то их разность $F_1(x) - F_2(x) = C$.

<u>Доказательство:</u>

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) = f(x) = F_2'(x) \\ \text{Пусть } F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,\, b] \Rightarrow \varphi(x) = C$$

$\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:
$\forall\ x \in [a, b]$ $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, x]$ и дифференцируема в интервале (a, x). Следовательно,
$\forall x : \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c)(x - a) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) = const.$

■

Если для $f(x)$ найдена какая-то первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная имеет вид $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Определение

Множество всех первообразных от функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \underbrace{F(x) + C.}_{\text{мн-во всех первообразных}} \tag{1.1}$$

Здесь $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Теорема 2

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,\, b]$, то она имеет первообразную.

Доказательство:

Доказывается через понятие определённого интеграла.

Пока оставим без доказательства.

Свойства:

$$\textbf{1.а)}\ \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x). \tag{1.2}$$

$$\textbf{1.б)}\ d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{1.3}$$

$$\textbf{1.в)} \int df(x) = f(x) + C. \tag{1.4}$$

$\Big/ \int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C \Big/$

$$\textbf{2)}\ \int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Доказательство:

Докажем, что производные от левой и правой частей равенства (1.5) совпадают.

$$\left.\begin{aligned} \Big(\int (f_1(x)+f_2(x))dx\Big)' = f_1(x)+f_2(x) \\ \Big(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\Big)' = f_1(x)+f_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ левая и правая части равенства (1.5) являются первообразными одной и той же функции. По теореме 1 эти первообразные отличаются друг от друга на постоянную C. Следовательно, неопределённые интегралы равны.

■

3) $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$ (1.6)

<u>Доказательство:</u>

$$\left.\begin{aligned}\Big(a\int f(x)dx\Big)' = af(x)\\ \Big(\int af(x)dx\Big)' = af(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Первообразные отличаются на постоянную C, то есть неопределенные интегралы равны.

■

4) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то выполнено:

$\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$ (1.7)

<u>Доказательство:</u>

Докажем, что производные от левой и правой частей равенства (1.7) совпадают.

$$\left(\int f(ax+b)dx\right)' = f(ax+b),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \frac{1}{a}(F(ax+b))'_x = \frac{1}{a}\left(F'(ax+b)\cdot(ax+b)'_x\right) = f(ax+b).$$

■

Таблица интегралов

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1),$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln\left|x\right| + C,$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|.$$

Примеры

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+3\right| + C,$$
$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

1.2 Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям

Теорема 3 (Замена переменной в неопределенном интеграле) Пусть переменные x и t связаны соотношением: $x = \varphi(t)$, где $\varphi \in C^1$. Пусть также выполнено:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.8}$$

Тогда равенство (1.8) эквивалентно следующему:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{1.9}$$

<u>Доказательство:</u>

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$
$$\left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right)' = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Таким образом, производные от левой и правой частей равенства (1.9) равны, то есть неопределенные интегралы равны.

■

Замечание

Переход (1.8) $\Rightarrow$ (1.9) называется заменой переменной $x \to t$.

Переход (1.9) $\Rightarrow$ (1.8) называется внесением под знак дифференциала.

$$\varphi'(t)dt = d(\varphi(t)) = dx.$$

Пример 1

$$\int \ln x \frac{dx}{x} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$
$$\Big/\ t = \ln x \quad dt = \frac{1}{x}dx\ \Big/$$

Пример 2

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$
$$\Big/\ x = a\sin t,\ \Rightarrow\ dx = a\cos t\,dt,\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t,\ t = \arcsin\frac{x}{a}\ \Big/$$
$$= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}(\sin t\cos t) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Теорема 4 (Формула интегрирования по частям)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.10}$$

Доказательство:

$$d(uv) = udv + vdu\ \Rightarrow\ udv = d(uv) - vdu\ \Rightarrow\ \int u\,dv = \underbrace{\int d(uv)}_{=uv} - \int v\,du.$$

■

Пример 1

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$\Big/ \; u = x; \qquad dv = \sin x \, dx; \qquad du = dx; \qquad v = -\cos x \; \Big/$

Пример 2

$$\int \ln x \frac{dx}{x} = \ln^2 x - \int \ln x \frac{dx}{x} \Rightarrow \; I = \ln^2 x - I + C \Rightarrow \; I = \frac{1}{2} \ln^2 x + \widetilde{C}.$$

$\Big/ \; u = \ln x; \qquad dv = \frac{dx}{x}; \qquad du = \frac{dx}{x}; \qquad v = \ln x \; \Big/$

$\ln x$ определён только при $x > 0 \Rightarrow$ при взятии первообразной от $\frac{1}{x}$ нет необходимости писать $\ln |x|$.

1.3 Интегрирование рациональных дробей

Определение

Рациональная дробь есть отношение двух полиномов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \, \ldots \, + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \, \ldots \, + b_n}.$$

Дробь называется правильной, если $n > m$ и неправильной, если $n \leq m$. Интегрирование правильной рациональной дроби осуществляется с помощью ее разложения на простейшие. Простейшими дробями называются дроби вида:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где $D = p^2 - 4q < 0 \qquad A\,,\; B\,,\; a\,,\; p\,,\; q\; = const.$

$D < 0 \Rightarrow$ знаменатель $x^2 + px + q$ нельзя разложить на вещественные множители.

<u>**Интегралы от простейших дробей**</u>

$$\int \frac{A}{x-a} \, dx = A \ln |x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A(x+\frac{p}{2}) + B - \frac{Ap}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{A(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$\Big/ \ \Big(x+\frac{p}{2}\Big)\,d\Big(x+\frac{p}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,d\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 \ \Big/$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d\Big(\big(x+\frac{p}{2}\big)^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big)}{\big(x+\frac{p}{2}\big)^2 + q - \frac{p^2}{4}} + \Big(B - \frac{Ap}{2}\Big)\int \frac{d\big(x+\frac{p}{2}\big)}{\big(x+\frac{p}{2}\big)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{A\big(x+\frac{p}{2}\big) + B - \frac{Ap}{2}}{\Big(\big(x+\frac{p}{2}\big)^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big)^k}\,dx =$$

$$\Big/\text{Замена:}\qquad x+\frac{p}{2} = t;\qquad dx = dt\Big/$$

$$= \int \frac{At + B - \frac{Ap}{2}}{\big(t^2+q-\frac{p^2}{4}\big)^k}\,dt = \int \frac{Atdt}{\big(t^2+q-\frac{p^2}{4}\big)^k} + \Big(B - \frac{Ap}{2}\Big)\int \frac{dt}{\big(t^2+q-\frac{p^2}{4}\big)^k}$$

$$\int \frac{Atdt}{(t^2+q-\frac{p^2}{4})^k} = \frac{A}{2}\int \frac{dz}{z^k} = \frac{A}{2(-k+1)}z^{-k+1} + C$$

$$\Big/\text{Замена:}\qquad t^2+q-\frac{p^2}{4} = z;\qquad dz = 2tdt;\qquad tdt = \frac{dz}{2}\ \Big/$$

Введём обозначение:

$$I_k = \int \frac{dt}{\big(t^2+a^2\big)^k},\qquad \text{где}\ \ a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C.$$

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+t^2-t^2)dt}{(t^2+a^2)^k}=$$
$$=\frac{1}{a^2}\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}}_{I_{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}=$$
$$\Big/\; u=t;\quad du=dt;\quad dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k};\quad v=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\;\Big/$$
$$=\frac{1}{a^2}\,I_{k-1}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{a^2}\,I_{k-1}-\frac{t}{2a^2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{2a^2(1-k)}\,I_{k-1}.$$

Получили рекуррентное соотношение.

Применяя это соотношение несколько раз, приходим к табличному интегралу I_1.

1.4 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Теорема 5

Пусть $x=a$ – корень полинома $Q(x)$ кратности k, то есть
$Q(x)=(x-a)^kQ_1(x)$, где $Q_1(a)\neq 0$.
Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)},\tag{1.11}$$

где $A=const\neq 0$, степень полинома $P_1(x)$ меньше степени полинома $(x-a)^{k-1}Q_1(x)$.

Доказательство:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}.\tag{1.12}$$

Выберем $A=\frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Тогда a будет корнем числителя, то есть числитель можно представить в виде: $P(x)-AQ_1(x)=(x-a)P_1(x)$, где степень полинома $P_1(x)$ меньше степени полинома $(x-a)^{k-1}Q_1(x)$. Подставляя $(x-a)P_1(x)$ вместо $P(x)-AQ_1(x)$ в формулу (1.12) и сокращая числитель и знаменатель на $(x-a)$, получаем искомое утверждение (1.11).

■

Применяя теорему 5 несколько раз, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ \ldots \ + \frac{A_{k-1}}{(x-a)} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}.$$

Теорема 6

Если $Q(x) = (x^2+px+q)^k\,Q_1(x)$, где многочлен $Q_1(x)$ не делится на x^2+px+q и $\frac{p^2}{4}-q<0$, то правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}, \qquad (1.13)$$

где $P_1(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2+px+q)^{k-1}\,Q_1(x)$.

Доказательство:

Напишем тождество:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\,Q_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)}{(x^2+px+q)^k\,Q_1(x)}, \qquad (1.14)$$

справедливое при любых M и N.

Определим M и N так, чтобы многочлен $P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)$ делился на x^2+px+q.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение $P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)=0$ имело те же корни $\alpha \pm i\beta$, что и многочлен x^2+px+q.

Следовательно, $P(\alpha+i\beta) - (M(\alpha+i\beta)+N)\,Q_1(\alpha+i\beta) = 0$ или $M(\alpha+i\beta)+N = \frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)}$.

Но $\frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)}$ есть определённое комплексное число, которое можно записать в виде $K+iL$, где $K, L \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $M(\alpha+i\beta)+N = K+iL$

Отсюда

$$\begin{cases} M\alpha + N = K \\ M\beta = L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \dfrac{L}{\beta} \\ N = \dfrac{K\beta - L\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

При этих значениях коэффициентов M и N многочлен

$P(x) - (Mx+N)\,Q_1(x)$ имеет корнем число $\alpha+i\beta$, следовательно, и сопряжённое число $\alpha - i\beta$ (см. соответствующую теорему из теории полиномов).

Значит многочлен без остатка разделится на разности $x-(\alpha+i\beta)$ и $x-(\alpha-i\beta)$, а следовательно, на их произведение x^2+px+q.

Обозначая частное от этого деления через $P_1(x)$ получим:

$$P(x) - (Mx+N)\,Q_1(x) = (x^2+px+q)\,P_1(x).$$

Сокращая последнюю дробь в равенстве (1.14) на x^2+px+q, получим равенство (1.13), причём ясно, что степень $P_1(x)$ меньше степени знаменателя.

■

Применяя теперь к правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ результаты теорем 5 и 6, мы можем выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $Q(x)$. Получаем следующий результат. Если $Q(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x-b)^l \cdot (x^2+px+q)^m \cdot \ldots \cdot (x^2+cx+d)^n$, то дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \ldots + \frac{B}{(x-b)^l} + \frac{B_1}{(x-b)^{l-1}} +$$

$$\ldots + \frac{B_{x-1}}{x-b} + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \ldots + \frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{x^2+px+q} +$$

$$\ldots + \frac{Gx+F}{(x^2+cx+d)^n} + \frac{G_1x+F_1}{(x^2+cx+d)^{n-1}} + \ldots + \frac{G_{m-1}x+F_{m-1}}{(x^2+cx+d)^{m-1}}. \qquad (1.15)$$

Написанное равенство есть тождество.

Поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A , A_1 , . . . , B , B_1 , ...

Этот метод нахождения коэффициентов называется методом неопределённых коэффициентов.

1.5 Процедура интегрирования рациональной дроби

Опишем процедуру интегрирования рациональной дроби общего вида:
$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx$

1) Пусть $m \geq n$ (то есть дробь неправильная: степень числителя $\geq$ степени знаменателя). Тогда в дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ нужно выделить целую часть. Это можно сделать с помощью деления многочленов в столбик. Например:

$$\frac{x^4+3x^2+x+2}{x^2+1} = x^2+2+\frac{x}{x^2+1}.$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +3x^2 & +x & +2 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
x^4 & +x^2 & & & x^2+2 \\ \cline{1-3}
& 2x^2 & +x & +2 & \\
& 2x^2 & & +2 & \\ \cline{2-4}
& & & x &
\end{array}$$

2) Мы получим правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ (степень числителя меньше степени знаменателя). Разложим правильную дробь на простейшие. Для этого нужно разложить знаменатель на множители:

$$Q_n(x) = a_0(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ \ldots$$

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ представляется в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами. При этом каждому множителю в знаменателе отвечают следующие слагаемые:

$$\frac{1}{(x-a_1)^{k_1}} \longmapsto \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ \ldots\ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}},$$

$$\frac{1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} \longmapsto \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots\ldots + \frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}.$$

Пример

$$\frac{x+3}{(x-1)^2\,(x+1)^3\,(x^2+x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} +$$
$$+\frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

3) Найдём коэффициенты в простейших дробях. Продемонстрируем это на примере.

$$\frac{x+3}{(x-1)\,(x+2)\,x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)\,(x+2)\,x} = \frac{Ax\,(x+2) + Bx\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x+2)}{(x-1)\,(x+2)\,x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+3 = Ax\,(x+2) + Bx\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x+2).$$

Приведем два способа нахождения коэффициентов A, B, C :

a) Можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x и получить систему уравнений.

b) Метод подстановки. Подставим в уравнение различные значения x и получим систему уравнений.

$$\left.\begin{array}{l|l} x=0 & 3 = C\cdot(-1)\cdot 2 \\ x=1 & 4 = A\cdot 3 \\ x=-2 & 1 = B\cdot(-2)\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = -\frac{3}{2}, \\ A = \frac{4}{3}, \\ B = \frac{1}{6}. \end{array}\right.$$

4) Последнее действие – интегрирование простейших дробей. Получаются стандартные интегралы, которые были найдены ранее в общем виде.

Пример

Вычислим $\int \frac{dx}{x^3-8}$. Для этого разложим дробь $\frac{1}{x^3-8}$ на простейшие:

$$\frac{1}{x^3-8} = \frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2: & A+B=0 \\ x^1: & 2A+C-2B=0 \\ x^0: & 4A-2C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=4B \\ -4B-8B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12}, \\ B=-\frac{1}{12}, \\ C=-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{(x+1)^2+3}dx =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\int \frac{x+1}{(x+1)^2+3}dx - \frac{1}{12}\int \frac{3}{(x+1)^2+3}dx =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\int \frac{d((x+1)^2+3)}{(x+1)^2+3}dx - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.6 Метод Остроградского

В предыдущем параграфе была описана процедура интегрирования рациональной дроби общего вида. Рациональная дробь раскладывалась на сумму простейших дробей, интегралы от которых известны. Однако в случае когда знаменатель дроби имеет кратные комплексные корни, то есть содержит сомножители вида $(x^2+px+q)^k$, процедура интегрирования соответствующей простейшей дроби $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ становится весьма трудоемкой. Здесь приходится использовать рекуррентную формулу для вычисления интеграла.

Метод Остроградского позволят упростить интегрирование рациональной дроби в случае когда ее знаменатель имеет кратные корни. После разложения такой рациональной дроби на простейшие появятся дроби вида: $\frac{Ax+B}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$. Интегралы от таких простейших дробей при $k > 1$ дают рациональные дроби. Заметим, что при $k = 1$ после интегрирования мы получим не рациональную дробь, а натуральный логарифм либо арктангенс (смотри раздел "Интегралы от простейших дробей" в параграфе **1.3**). После интегрирования дробей сумма полученных рациональных дробей даст алгебраическую часть интеграла, которая после приведения к общему знаменателю будет правильной рациональной дробью вида:

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\,(x-a_2)^{k_2-1}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-a_m)^{k_m-1}}. \tag{1.16}$$

Здесь $k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_m$ – кратности корней $a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_m$ соответственно. Степень полинома $\omega(x)$ меньше, чем степень знаменателя.

Запишем сумму оставшихся непроинтегрированных дробей при $k = 1$:

$$\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}=\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-a_m)}. \tag{1.17}$$

Здесь степень полинома $\omega_1(x)$ меньше, чем степень знаменателя. Заметим, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ могут быть комплексными.

Учитывая выражения (1.16) и (1.17), приходим к формуле Остроградского:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\underbrace{\frac{\omega(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(x-a_m)^{k_m-1}}}_{D(x)}+\int\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(x-a_m)}\,dx. \tag{1.18}$$

Дифференцируя это соотношение, получим равенство без интегралов, из которых можно найти $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$.

Пример

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3+1} + \int \frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}\,dx.$$

Полином x^3+1 имеет три корня первой кратности (это $\sqrt[3]{-1}$). Соответственно, полином $(x^3+1)^2$ будет иметь три корня второй кратности. Значит в алгебраической части интеграла и в непроинтегрированной дроби в знаменателе будет стоять x^3+1.

Продифференцируем последнее равенство. Мы получим:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{(x^3+1)^2} + \frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$1 = (2\alpha x+\beta)\left(x^3+1\right) - 3x^2\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) + \left(\delta x^2+\varepsilon x+\eta\right)\left(x^3+1\right)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\left.\begin{array}{c|l} x^5 & \delta = 0 \\ x^4 & \varepsilon - \alpha = 0 \\ x^3 & \eta - 2\beta = 0 \\ x^2 & -3\gamma + \delta = 0 \\ x^1 & 2\alpha + \varepsilon = 0 \\ x^0 & \beta + \eta = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \eta = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Вычислим оставшийся нтеграл, разложив дробь на простейшие:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} \Rightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1).$$

Вычисляем коэффициенты:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & A = \frac{1}{3} \\ x^2 & M = -\frac{1}{3} \\ x^0 & N = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Замечание

Знаменатели дробей в формуле Остроградского можно найти и не зная корней $Q(x)$. А именно, полином $D(x)$ – это наибольший общий делитель $Q(x)$ и $Q'(x)$.

Наибольший общий делитель полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ находится через последовательное деление полиномов (это обобщение алгоритма Евклида). Пусть степень полинома $f_1(x) \geq$ степени $f_2(x)$. Разделим $f_1(x)$ на $f_2(x)$, получим остаток $r_1(x)$. Затем $f_2(x)$ делим на $r_1(x)$, получим остаток $r_2(x)$. Потом $r_1(x)$ делим на $r_2(x)$, получим остаток $r_3(x)$. И так далее, пока не получим деление с остатком, равным 0. Последний остаток, отличный от 0, и является общим наибольшим делителем двух данных полиномов.

Пример

$$(x^3+1)^2 = x^6+2x^3+1 = Q(x), \quad Q'(x) = 6x^5+6x^2,$$

$$\begin{array}{rrr|l} x^6 & +2x^3 & +1 & 6x^5 \; +6x^2 \\ \cline{4-4} x^6 & +x^3 & & \frac{1}{6}x \\ \cline{1-3} & x^3 & +1 & \end{array}$$

Таким образом, $r_1(x) = x^3 + 1$. Разделим $f_2(x) = 6x^5 + 6x^2$ на $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rr|l} 6x^5 & +6x^2 & x^3 \quad +1 \\ \cline{3-3} 6x^5 & +6x^2 & 6x^2 \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Последнее деление выполнено без остатка, то есть наибольший общий делитель полиномов $Q(x) = x^6 + 2x^3 + 1$ и $Q'(x) = 6x^5 + 6x^2$ равен $x^3 + 1$.

1.7 Интегрирование тригонометрических функций

1) Интегралы вида $\int \sin^m x \, \cos^n x \, dx$.

а) Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное положительное число, тогда:

1. Отделяем от нечётной степени один сомножитель и вносим его под знак дифференциала.

2. С помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ выражаем оставшуюся чётную степень через дополнительную функцию. Приходим к табличному интегралу.

Пример

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \sin x \, dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \, d(\cos x) =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \, d(\cos x) = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C.$$

б) Если m и n – чётные неотрицательные числа, тогда степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$,
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,
$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

2) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$.

Здесь $R\left(\sin x, \cos x\right)$ – рациональная функция своих аргументов, не содержит дробных степеней (то есть функция, которая получается из $\sin x$

и $\cos x$ с помощью действий “ $+$ ”, “ $-$ ”, “ $\cdot$ ”, “ $:$ ”). Данные интегралы можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью замены переменной.

Универсальная замена (срабатывает всегда, однако, после замены под интегралом обычно получаем сложную функцию): $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

Поясним, что после такой замены мы получим интеграл от рациональной функции. Действительно,

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$x=2\operatorname{arctg} t;\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом, подынтегральное выражение есть рациональная дробь.

Если подынтегральная функция обладает свойствами симметрии, то можно использовать **более простые замены:**

а) Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\Rightarrow$ делаем замену: $\cos x=t$;

б) Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\Rightarrow$ делаем замену: $\sin x=t$;

в) Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)\Rightarrow$ делаем замену: $\operatorname{tg} x=t$.

Пример

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=\Big/\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\ \Big/=2\int\frac{dt}{(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5)(1+t^2)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{4-4t^2+6t+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=$$

$$=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C.$$

Интегрирование произведений синусов и косинусов

Интегралы такого типа вычисляются с использованием тригонометрических формул, заменяющих произведения синусов и косинусов на их суммы:

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$,

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$,

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$.

Пример

$$\int \sin 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-4x) + \sin 10x)\, dx = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C.$$

1.8 Интегрирование иррациональных функций

1) Интегралы вида $\int R(x, x^{\frac{l}{s}}, \ldots, x^{\frac{r}{q}})\, dx$.

Здесь R – рациональная функция.

Пусть n – общий знаменатель дробей $\frac{l}{s}, \ldots, \frac{r}{q}$. Тогда замена $t = x^{\frac{1}{n}}$ приводит к интегралу от рациональной функции.

Пример

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \Big/\; x^{\frac{1}{4}} = t \;\Big/ = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}t^3\, dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right) dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C = \frac{4}{3}(x^{\frac{3}{4}} - \ln|x^{\frac{3}{4}}+1|) + C.$$

2) Интегралы вида $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{l}{s}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{q}})\, dx$.

Здесь R – рациональная функция, n– общий знаменатель дробей $\frac{l}{s}, \ldots, \frac{r}{q}$.

Замена $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$ приводит к интегралу от рациональной функции.

Пример

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\, dx = \Big/\; \sqrt{x+1} = t \;\Big/ = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1}\right) dt = 2\ln|t-1| - \int \left(\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{t^2+t+1}\right) dt =$$

$$= 2\ln|t-1| - \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt =$$

$$= \ln(t-1)^2 - \ln(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Дифференциальный бином. Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$. Здесь m, n, p – рациональные числа.

Сделаем замену: $t = x^n$. Тогда $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt. \tag{1.19}$$

Если p или $\frac{m+1}{n}$ есть целое число, то это интеграл рассмотренного в пункте 2 вида. Если это не выполнено, то интеграл можно преобразовать к виду:

$$\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt = \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p\,dt. \tag{1.20}$$

В случае когда $\frac{m+1}{n}+p$ есть целое число, то это также интеграл рассмотренного в пункте 2 вида. Теорема Чебышёва говорит о том, что указанные три случая исчерпывают все случаи, в которых интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции. Разберем эти случаи подробнее.

1. Пусть p – целое число. Делаем замену: $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ есть наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ – целое число. Делаем замену: $t = \sqrt[\nu]{a+bx^n}$, где ν – знаменатель дроби p.

3. Пусть $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число. Делаем замену: $t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где ν – знаменатель дроби p.

Пример 1

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

$m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{m+1}{n} = 2$ – целое число, то здесь мы имеем дело со случаем 2. Следовательно, $\nu = 3$ и замена переменной имеет вид: $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \Rightarrow \; x = (t^3-1)^4 \Rightarrow dx = 12t^2(t^3-1)^3dt.$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{1}{(t^3-1)^2}\cdot\left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt = 12\int(t^6-t^3)\,dt =$$

$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C.$$

Пример 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx$$

Здесь $m=0,\; n=4,\; p=-\frac{1}{4}$. Так как $\frac{m+1}{n}+p = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0$ – целое число, то здесь мы имеем дело со случаем 3. Следовательно, $\nu = 4$ и замена переменной имеет вид:

$$t = \sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}} = \sqrt[4]{1+x^{-4}} \;\Rightarrow\; x^{-4} = t^4-1 \;\Rightarrow\; x = (t^4-1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Соответственно, $dx = -t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt.$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$-\int\left(1+(t^4-1)^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt = -\int\left(1+\frac{1}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt =$$

$$= -\int\left(\frac{t^4}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt = -\int\frac{\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}}{t}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt =$$

$$= -\int\frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^{-4}}+1}{\sqrt[4]{1+x^{-4}}-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^{-4}} + C.$$

4) Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Подстановки Эйлера.

Здесь R есть рациональная функция своих аргументов.

Для сведения данного интеграла к интегралу от рациональной функции используются нижеперечисленные замены.

1. Если $a > 0$, то новая переменная t вводится по правилу:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t. \tag{1.21}$$

2. Если $c > 0$, тогда:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}. \tag{1.22}$$

3. Если у полинома два вещественных корня x_1, x_2, тогда:

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \quad (\text{или } t(x-x_2)). \tag{1.23}$$

Пример

Вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Сделаем замену по формуле (1.21): $\sqrt{x^2+a} = -x + t$. Тогда:

$$\cancel{x^2} + a = \cancel{x^2} - 2xt + t^2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{t^2-a}{2t} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{x^2+a} = -x+t = -\frac{t^2-a}{2t}+t = \frac{t^2+a}{2t}; \quad dx = \frac{4t^2-2(t^2-a)}{4t^2} = \frac{t^2+a}{2t^2}dt.$$

Тогда после замены переменной интеграл примет вид:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

Тригонометрические подстановки.

а) Выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене.

б) Заменяем переменную: $u = x + \frac{b}{2a}$.

Тогда исходный интеграл сведется к интегралу одного из следующих типов:

1) $\int R(u, \sqrt{l^2 - u^2})\, du \;\Rightarrow\;$ замена: $u = l \sin t$ или $u = l \cos t$,

где l – некоторая постоянная.

2) $\int R(u, \sqrt{l^2 + u^2})\, du \;\Rightarrow\;$ замена: $u = l \operatorname{tg} t$ или $u = l \operatorname{ctg} t$.

3) $\int R(u, \sqrt{u^2 - l^2})\, du \;\Rightarrow\;$ замена: $u = \frac{l}{\sin t}$ или $u = \frac{l}{\cos t}$.

После замены интеграл сведётся к интегралу вида: $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$.

Пример

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx = \Big/\; x = \sin t;\; dx = \cos t dt \;\Big/ = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\, dt =$$

$$= -\operatorname{ctg} t - t + C = -\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} - \arcsin x + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}{x} - \arcsin x + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

Глава 2. Определенный интеграл

2.1 Определение и геометрический смысл определенного интеграла

В начале 17 века математикам были известны способы нахождения площадей многоугольников и некоторых криволинейных фигур, например, круга. Однако математический аппарат вычисления площадей фигур с криволинейной границей не был развит. Это подтолкнуло математиков к разработке новых методов вычисления площадей, основанных на разбиении фигур на малые части. Определим площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке. Она органичена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ слева и справа соответственно.

Разобъем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ .\ , x_n = b$. Площадь каждой из получившихся малых криволинейных трапеций приблизим площадью прямоугольника, построенного на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, высота которого определяется значением функции f в некоторой произвольной выбранной точке $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$. Тогда приближение S_n для площади криволинейной трапеции дается суммой площадей указанных прямоугольников.

Площадь каждого прямоугольника равна:
$f(\xi_i)\,\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Тогда:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i.$$

Приближение площади криволинейной трапеции будет тем лучше, чем мельче разбиение.

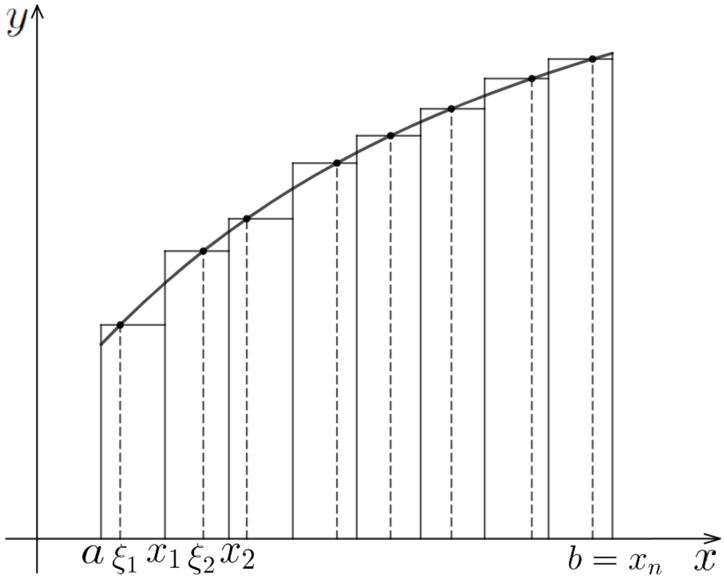


Рис. 1: Криволинейная трапеция

Введем понятие ранга разбиения λ по следующему правилу:

$$\lambda = \max_i (x_i - x_{i-1}).$$

При измельчении разбиения ($\lambda \to 0$) сумма площадей прямоугольников будет стремиться к площади криволинейной трапеции:

$$S \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Определение

Если предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_i, то он называется определённым интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{2.1}$$

Здесь a и b – нижний и верхний пределы интеграла, S_n – интегральная сумма.

Определение

Пусть m и M – наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a,\, b]$.

Пусть $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \quad M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},\, x_i]} f(x).$

Определим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу следующим образом:

$$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i, \quad \overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i. \tag{2.2}$$

Замечание

Очевидно, что имеют место неравенства:

$$m(b-a) \leqslant \underline{S_n} \leqslant \overline{S_n} \leqslant M(b-a). \tag{2.3}$$

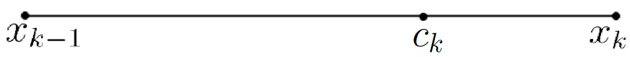
2.2 Свойства интегральных сумм

Свойство 1

При увеличении числа отрезков, на которые мы разбиваем отрезок $[a,\, b]$ путём добавления новых точек деления, нижняя интегральная сумма $\underline{S_n}$ может только возрастать, а верхняя интегральная сумма $\overline{S_n}$ может только убывать.

Доказательство:

Рассмотрим отрезок разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ на который попала дополнительная точка разбиения c_k.



В исходной сумме Дарбу $\underline{S_n}$ отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ отвечает одно слагаемое:

$m_k(x_k - x_{k-1}), \quad$ где $m_k = \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

После измельчения разбиения отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ будет отвечать два слагаемых:

$m'_k(c_k - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c_k)$,

где $m'_k = \min\limits_{x\in[x_{k-1},c_k]} f(x) \geqslant \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = m_k$;

$m''_k = \min\limits_{x\in[c_k,x_k]} f(x) \geqslant \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = m_k$.

Следовательно,

$m'_k(c_k - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c_k) \geqslant m_k(c_k - x_{k-1}) + m_k(x_k - c_k) = m_k(x_k - x_{k-1})$, то есть нижняя сумма Дарбу при измельчении разбиения может только возрастать (вернее, не убывать).

Аналогично доказывается для большего числа точек разбиения.

Аналогично доказывается, что верхняя сумма Дарбу не возрастает при измельчении разбиения.

■

Свойство 2

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы (возможно, отвечающей другому разбиению).

Доказательство:

Пусть $\underline{S}^{(1)}$ и $\overline{S}^{(1)}$ – суммы Дарбу, отвечающие некоторому разбиению, $\underline{S}^{(2)}$ и $\overline{S}^{(2)}$– суммы Дарбу для другого разбиения.

Нужно доказать, что: $\underline{S}^{(1)} \leqslant \overline{S}^{(2)}$.

Объединим точки первого и второго разбиений. Тем самым, получим третье разбиение, которое отвечает суммам $\underline{S}^{(3)}$ и $\overline{S}^{(3)}$. Так как третье разбиение получается добавлением точек к первому, то выполнено: $\underline{S}^{(1)} \leqslant \underline{S}^{(3)}$. С другой стороны, третье разбиение получается добавлением точек ко второму, значит: $\overline{S}^{(3)} \leqslant \overline{S}^{(2)}$ (по свойству 1). Но $\underline{S}^{(3)} \leqslant \overline{S}^{(3)}$. Следовательно, $\underline{S}^{(1)} \leqslant \overline{S}^{(2)}$.

■

Замечание

Так как множество $\{\underline{S}_n\}$ ограничено сверху, то оно имеет конечную точную верхнюю границу: $\inf\{\overline{S}_n\} = \overline{I}$. Аналогично, ввиду ограниченности снизу, найдется конечная точная нижняя граница: $\sup\{\underline{S}_n\} = \underline{I}$, причем sup и inf берутся по всем возможным разбиениям со сколь угодно большим числом отрезков разбиения. Числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ называются нижним и верхним интегралами Дарбу.

2.3 Теоремы о существовании определенного интеграла

Теорема 1 (Критерий существования определенного интеграла) Для существования определённого интеграла необходимо и достаточно, чтобы:

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство:

Необходимость. Существование определенного интеграла означает существование следующего предела из формулы (2.1):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i}_{S_n}.$$

Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \triangle x_i < \delta \;\Rightarrow\; |S_n - I| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; I-\varepsilon < S_n < I+\varepsilon. \tag{2.5}$$

Суммы Дарбу $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ при любом заданном разбиении промежутка являются для интегральных сумм S_n точными нижней и верхней границами. Значит они тоже будут удовлетворять неравентву (2.5), только нестрогому:

$$I-\varepsilon \leqslant \underline{S}_n \leqslant \overline{S}_n \leqslant I+\varepsilon \;\Rightarrow\; \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_n = I, \quad \lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_n = I \;\Rightarrow\; \lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0 \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = I$. Следовательно,

$$\underline{S}_n \leqslant \underbrace{\sup \underline{S}_n}_{=\underline{I}} = I = \underbrace{\inf \overline{S}_n}_{=\overline{I}} \leqslant \overline{S}_n.$$

Пусть S_n – одна из интегральных сумм, отвечающая тому же разбиению промежутков, что и $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$. Тогда $\underline{S}_n \leqslant S_n \leqslant \overline{S}_n$. Если по условию теоремы считать $\triangle x_i$ достаточно малыми, то $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ отличны менее чем на ε, но тогда $|S_n - I| < \varepsilon$, то есть I является пределом для S_n и интеграл существует.

■

Теорема 2

Непрерывная функция в промежутке $[a,\ b]$ интегрируема.

Доказательство:

Согласно теореме Кантора, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ то она равномерно непрерывна на $[a,\ b]$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ такое, что для любого отрезка $[x_{i-1},\ x_i]$ с длиной $\triangle x_i < \delta$ колебание функции на нем будет меньше ε, то есть: $M_i - m_i < \varepsilon$. Отсюда для такого разбиения выполнено:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\triangle x_i < \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i = \varepsilon(b-a),$$

то есть $\overline{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon(b-a)$, а значит эта разность может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, по критерию существования интеграла будет существовать $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

■

Теорема 3

Монотонная ограниченная функция $f(x)$ всегда интегрируема.

Доказательство:

Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает. Тогда на отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ максимум функции будет достигаться на правом конце отрезка, а минимум – на левом, то есть: $M_i - m_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Тогда если $\triangle x_i < \delta$, то:

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\triangle x_i < \delta\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, f – интегрируемая функция (по критерию существования интеграла).

■

Теорема 4

Любая интегрируемая функция ограничена.

Доказательство:

От противного. Пусть f не ограничена на $[a,\, b]$. Рассмотрим произвольное разбиение:

$\Pi = \{a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} = b\}$.

Хотя бы на одном отрезке $[x_i,\, x_{i+1}]$ функция не является ограниченной. Зафиксируем точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ во всех отрезках, кроме отрезка $[x_i,\, x_{i+1}]$.

Так как $f(x)$ не ограничена на отрезке $[x_i,\, x_{i+1}]$, то меняя ξ_i в этом промежутке, мы сможем получить сколь угодно большие по модулю значения интегральной суммы. Следовательно, значение интеграла будет зависеть от выбора точки ξ_i, что противоречит определению интеграла.

■

Теорема 5

Если $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,\, c]$ и $[c,\, b]$, то она интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Доказательство:

Пусть Π – разбиение отрезка $[a,\, b]$:

$\Pi = \{a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} \leqslant c \leqslant x_{m+2} \leqslant \ldots < x_{n+1} = b\}$.

Соответствующая интегральная сумма:

$S_\Pi = \sum\limits_{k=1}^{m} f(\xi_k)\triangle x_k + f(\xi_{m+1})\triangle x_m + \sum\limits_{k=m+2}^{n+1} f(\xi_k)\triangle x_k =$

/Распишем слагаемое $f(\xi_{m+1})\triangle x_m$ в виде суммы трех слагаемых/ $=$

$\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{m} f(\xi_k)\triangle x_k + f(c)\cdot(c - x_m)}_{S_{\Pi_1}} + (f(\xi_{m+1}) - f(c))\underbrace{(x_{m+1} - x_m)}_{\triangle x_m} +$

$$\underbrace{+ f(c)\cdot(x_{m+1}-c) + \sum_{k=m+2}^{n+1} f(\xi_k)\triangle x_k}_{S_{\Pi_2}} = S_{\Pi_1} + \underbrace{\left(f(\xi_{m+1})-f(c)\right)}_{\text{ограничена}}\underbrace{\triangle x_m}_{\to 0} + S_{\Pi_2}$$

/По Теореме 4 любая интегрируемая функция ограничена/

$$\xrightarrow[\lambda\to 0]{} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

■

Теорема 6

Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$, то она будет интегрируемой на отрезках $[a,\, c]$ и $[c,\, b]$, где $a < c < b$.

Доказательство:

Докажем для отрезка $[a,\, c]$.

Пусть Π – разбиение $[a,\, c]$:

$\Pi = \left\{a = x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} = c\right\}$. Дополним его до разбиения $\widetilde{\Pi}$ отрезка $[a,\, b]$:

$\widetilde{\Pi} = \left\{a = x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} \leqslant \xi_{m+1} \leqslant x_{m+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} = b\right\}$.

Сравним интегральные суммы для различных разбиений отрезка $[a,\, c]$: Π и Π'.

Пусть $\Pi' = \left\{a = x'_1 \leqslant \xi'_1 \leqslant x'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_{p+1} = c\right\}$.

Дополним его до разбиения $\widetilde{\Pi}'$ отрезка $[a,\, b]$ точно так же, как дополняли Π:

$\widetilde{\Pi}' = \left\{a = x'_1 \leqslant \xi'_1 \leqslant \xi'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_{p+1} \leqslant \xi_{m+1} \leqslant x_{m+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} = b\right\}$.

$f(x)$ интегрируема на $[a,\, b]$ $\Rightarrow$ по критерию существования интеграла будет выполнено:

$\lim\limits_{\lambda\to 0}(\underline{S_n} - \overline{S_n}) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \quad \lambda < \delta \Rightarrow \left|\overline{S_n} - \underline{S_n}\right| < \varepsilon.$

Разность двух интегральных сумм не превышает разности верхней и нижней сумм Дарбу:

$\left|S_{\Pi'} - S_{\Pi}\right| \leqslant \left|\overline{S_n} - \underline{S_n}\right|.$

Дополнения Π' и $\widetilde{\Pi}'$ на отрезок $[c,\, b]$ были построены одинаковым образом, поэтому при вычитании двух интегральных сумм $S_{\widetilde{\Pi}}$ и $S_{\widetilde{\Pi}'}$, отвечающих отрезку $[a,\, b]$, слагаемые, отвечающие отрезку $[c,\, b]$, сокращаются и выполнено:

$S_{\widetilde{\Pi}} - S_{\widetilde{\Pi'}} = S_{\Pi} - S_{\Pi'}$.

Следовательно, для любых разбиений Π и Π' с рангом дробления $\lambda < \delta$ выполнено: $\Big|S_{\Pi} - S_{\Pi'}\Big| < \varepsilon$.

В частности, если выбрать $S_{\Pi} = \overline{S_n}$, $S_{\Pi'} = \underline{S_n}$, получим: $\Big|\overline{S_n} - \underline{S_n}\Big| < \varepsilon$, то есть выполнен критерий существования интеграла на $[a,\, c]$. Аналогично для $[c,\, b]$.

■

2.4 Интегрируемость кусочно-непрерывных функций

Лемма 1

Пусть функция $h(x) \equiv 0$ внутри интервала $(a,\, b)$ и имеет произвольные значения на концах отрезка $[a,\, b]:\ h(a)$ и $h(b)$. Тогда $h(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b h(x)\, dx = 0.$$

Доказательство:

Устроим разбиение отрезка $[a,\, b]$ и составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i) \bigtriangleup x_i.$$

Поскольку $h(x) \equiv 0$ внутри интервала $(a,\, b)$, то все слагаемые интегральной суммы равны нулю, кроме, быть может, крайних: первое слагаемое при $\xi_1 = a$ и последнее слагаемое при $\xi_n = b$. Следовательно, от интегральной суммы останется не болше двух слагаемых:

$$S_n = h(\xi_1) \bigtriangleup x_1 + h(\xi_n) \bigtriangleup x_n \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0,$$

что и доказывает лемму.

■

Лемма 2

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,\, b]$. Пусть функция f_1 совпадает с f на интервале $(a,\, b)$ и имеет произвольные значения на концах отрезка $[a,\, b]:\ \ f_1(a)$ и $f_1(b)$. Тогда функция $f_1(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Доказательство:

Функция $h(x) = f_1(x) - f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, $h(x)$ интегрируема, и интеграл от нее равен нулю. А значит $f_1(x) = h(x) + f(x)$ интегрируема как сумма интегрируемых функций:

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^b h(x)dx}_{=0} + \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

■

Определение

Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a,\, b]$, если существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, что $f(x)$ непрерывна в любом интервале $(x_k,\ x_{k+1})$ и имеет конечные односторонние пределы в точках разбиения:

$$f(x_0+0),\quad f(x_1-0),\quad f(x_1+0),\ \ldots\ldots,\ f(x_n-0).$$

Теорема 7

Кусочно-непрерывная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,\, b]$, интегрируема на этом отрезке.

Доказательство:

Пусть $x_0,\ x_1,\ .\ .\ .\ .\ .\ x_n$ – точки разбиения отрезка $[a,\ b]$ из определения кусочно-непрерывной функции. Пусть функция $f_k(x)$ определена на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$, совпадает внутри интервала (x_k, x_{k+1}) с $f(x)$, а на концах отрезка принимает значения $f(x_k+0)$ и $f(x_{k+1}-0)$ соответственно. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ функция $f_k(x)$ будет непрерывна на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$. Значит по теореме 2 она интегрируема на этом отрезке. Функция $f(x)$ может отличаться от $f_k(x)$ только в крайних точках $[x_k,\ x_{k+1}]$, поэтому по лемме 2 она интегрируема на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$ и выполнено равенство:

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\,dx.$$

Воспользуемся свойством аддитивности интеграла и получим, что f интегрируема на $[a,\ b]$ и справедливо соотношение:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\,dx.$$

■

Теорема 8

Пусть кусочно-непрерывная функция $g(x) \geqslant 0$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b g(x)dx = 0. \tag{2.7}$$

Тогда $g(x)$ может быть отлична от нуля лишь в конечном числе точек.

Доказательство:

1) Пусть $g(x)$ – непрерывна. Тогда $g(x) \equiv 0$. Действительно, если $g(x) \not\equiv 0$, то существует точка $c \in [a,\ b]$ такая, что $g(c) > 0$. В силу непрерывности $g(x)$ существует отрезок $[\alpha,\ \beta]$, в котором она строго положительна:

$$g(x) \geqslant g_0 > 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta g(x)dx + \underbrace{\int\limits_{x\notin[\alpha,\beta]} g(x)dx}_{\geq 0} \geqslant \int\limits_\alpha^\beta g(x)dx \geqslant g_0(\beta-\alpha) > 0,$$

что противоречит условию (2.7).

2) Предположим теперь, что $g(x)$ – это кусочно-непрерывная функция, которой соответствует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда:

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = 0.$$

Так как $g(x) \geq 0$, то из последней формулы следует, что:

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = 0 \quad (k = 0, \ldots n-1).$$

Функция $g(x)$ непрерывна на интервале $(x_k,\, x_{k+1})$. Следовательно, $g(x) \equiv 0$ на $(x_k,\, x_{k+1})$. А значит возможными точками, где $g(x)$ положительна, могут быть лишь точки разрыва $x_0, x_1, \ldots,\, x_n$, которых конечное число.

■

2.5 Свойства определённого интеграла

1) $\int\limits_a^b Af(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Доказательство:

$\int\limits_a^b Af(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\triangle x_i = A\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = A\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

■

2) Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы, то:

$\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

Доказательство:

$\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i))\triangle x_i =$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\triangle x_i + \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\triangle x_i = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

■

3) Интегрирование неравенств. Пусть $a < b$. Если на отрезке $[a,\, b]$ всюду выполнено неравенство: $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то неравенство может быть проинтегрировано:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

Доказательство:

$\int\limits_a^b \varphi(x)dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b (\varphi(x)-f(x))dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(\varphi(\xi_i)-f(\xi_i))}_{\geqslant 0}\, \underbrace{\triangle x_i}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$

■

Изменение пределов интегрирования. До настоящего момента в определённом интеграле мы полагали, что нижний предел меньше верхнего: $a < b$. Можно распространить определение интеграла на случай $a > b$. Устроим разбиение отрезка $[b,\ a]$:

$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_i > x_{i+1} > \ldots > x_n = b$. Тогда интегральная сумма примет следующий вид:

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$, где $\triangle x_i = x_i - x_{i-1} < 0$.

Интегралом, как и ранее, назовем предел интегральных сумм при измельчении разбиения:

$$\lim_{\lambda\to 0} S_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Будем считать по определению, что $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

4) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

Доказательство очевидно в силу данного выше определения.

5) Аддитивность интеграла.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

если эти три интеграла существуют.

Доказательство:

Случай, когда точка $c \in (a,\ b)$ был разобран в теореме 5 (формула (2.6)). При $c = a$ или $c = b$ свойство очевидно в силу определения: $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$. Пусть теперь c не принадлежит отрезку $[a,\ b]$, например, $a < b < c$. Тогда по теореме 5:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \Big/\text{Свойство 4}\Big/ =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

■

6) Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x), \quad M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$, функция $f(x)$ – интегрируема. Тогда выполнено:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{2.8}$$

Доказательство:

По свойству 3 мы можем проинтегрировать неравенство: $m \leqslant f(x) \leqslant M$:

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M dx \ \Leftrightarrow\ m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

■

7) Теорема 9 (Теорема о среднем)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то существует точка $c \in [a,\,b]$ такая, что выполнено:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{2.9}$$

Доказательство:

Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$, $\quad M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$. Тогда по формуле (2.8) получим:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Поскольку $f(x)$ – непрерывная функция, то она принимает все значения между наименьшим m и наибольшим M. Следовательно, существует точка $c \in [a,\,b]$ такая, что:

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

■

2.6 Формула Ньютона-Лейбница

Будем рассматривать интеграл как функцию от его верхнего предела. Рассмотрим отрезок $[a,\ b]$. Если функция $f(x)$ интегрируема в $[a,\,b]$, то она интегрируема и в промежутке $[a,\,x]$, где $x \in [a,\,b]$ (по теореме 6). Поэтому мы можем определить следующую функцию:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{2.10}$$

Теорема 10

Если $f(x)$ – интегрируемая функция, то $\Phi(x)$ – непрерывна.

Доказательство:

$$|\Phi(x_2)-\Phi(x_1)| = \Big|\int\limits_a^{x_2} f(t)dt - \int\limits_a^{x_1} f(t)dt\Big| = \Big|\int\limits_{x_1}^{a} f(t)dt + \int\limits_a^{x_2} f(t)dt\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt\Big| \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \leqslant$$

/ По теореме 4 интегрируемая функция всегда ограничена: $|f(t)| \le M$ /

$$\le M|x_2-x_1| \xrightarrow[x_2\to x_1]{} 0.$$

■

Теорема 11 (Теорема Барроу)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x\in(a,\ b)$, то в этой точке $\Phi(x)$ дифференцируема и выполнено равенство:

$$\Phi'(x) = f(x). \tag{2.11}$$

Доказательство:

Составим приращение функции $\Phi(x)$. Пусть h таково, что $x+h\in[a,\ b]$. Тогда:

$$\Phi(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt = \int\limits_a^{x} f(t)dt + \int\limits_x^{x+h} f(t)dt.$$

$$\Phi(x+h)-\Phi(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt. \tag{2.12}$$

Пусть $m' = \min\limits_{t\in[x,\,x+h]} f(t), \quad M' = \max\limits_{t\in[x,\,x+h]} f(t)$. Тогда по свойству 6 (формула (2.8)) выполнено:

$$m'h \leqslant \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M'h \;\Leftrightarrow\; m' \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M'. \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), получаем:

$$m' \le \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \le M'. \tag{2.14}$$

Пусть $h \to 0$. Поскольку функция f непрерывна в точке x, то:
$m' \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ и $M' \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$. Следовательно, по формуле (2.14),

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x),$$

то есть функция $\Phi(x)$ дифференцируема в точке x и выполнено:
$\Phi'(x) = f(x)$.

■

Теорема Барроу позволяет вычислить **производную от интеграла по верхнему пределу:**

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \tag{2.15}$$

Следствие (Теорема 2 из главы 1)

Любая непрерывная функция имеет первообразную.

Доказательство:

В теореме Барроу было доказано, что функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ будет являться первообразной непрерывной функции $f(x)$, то есть был описан способ построения первообразной.

■

Теорема 12 (Формула Ньютона-Лейбница)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.16}$$

Доказательство:

Согласно теореме Барроу, $\Phi(x)$ есть первообразная от функции $f(x)$. Если $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то $F(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются друг от друга на некоторую постоянную $C: \quad \Phi(x) = F(x) + C$. Определим C. Пусть $x = a$. Тогда:

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \;\Rightarrow\; C = -F(a) \;\Rightarrow\; \Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Подставим в полученную формулу $x = b$, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

■

Примеры

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \sin(\pi x) dx = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi},$$

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{\pi}{8}.$$

2.7 Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$. Иногда интеграл удобнее вычислять, заменяя переменную интегрирования.

Теорема 13 (Замена переменной в определенном интеграле)

Пусть $x = \varphi(t)$ и выполнены следующие условия:

1) Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[\alpha,\ \beta]$ и значение $\varphi(t)$ не выходит за пределы отрезка $[a,\ b]$ при изменении $t \in [\alpha,\ \beta]$ (если $f(x)$ непрерывна в бо́льшем промежутке, то можно предполагать, что $\varphi(t)$ не выходит за пределы этого бо́льшего промежутка).

2) $\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b$;

3) Существует производная $\varphi'(t)$, непрерывная на отрезке $[\alpha,\ \beta]$.

Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{2.17}$$

<u>Доказательство:</u>

Согласно теоремам 2 из глав 1 и 2, из непрерывности производной $\varphi'(t)$

следует существование определённого и неопределённого интегралов. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$.
Тогда $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Значит $F(\varphi(t))$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

то есть эти интегралы равны, что и доказывает формулу (2.17).

■

Замечание

В неопределённых интегралах надо было возвращаться к старой переменной x, здесь же в этом нет необходимости.

Пример

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big/ x = \sin t; dx = \cos t\,dt \Big/ = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\Big(t - \frac{\sin 2t}{2}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Интегрирование по симметричному промежутку

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = /t = -x/ = \int\limits_0^a f(-t)dt + \int\limits_0^a f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^a (f(-x) + f(x))dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ – нечетная функция,} \\ 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, & f(x) \text{ – четная.} \end{cases}$$

Теорема 14 (Формула интегрирования по частям)

Пусть u и v – дифференцируемые функции на отрезке $[a,\ b]$. Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du. \tag{2.18}$$

<u>Доказательство:</u>

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b u dv = \left(\int u dv\right)\Big|_a^b =$$

/Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла/

$$= \left(uv - \int v du\right)\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \left(\int v du\right)\Big|_a^b =$$

/Формула Ньютона-Лейбница в обратную сторону для второго слагаемого/

$$= uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

$\blacksquare$

Пример

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{x\cdot}_{u} \underbrace{\mathrm{tg}^2\, x dx}_{dv} =$$

$$\Big/ u = x, \quad du = dx, \quad dv = \mathrm{tg}^2\, x dx, \quad v = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x - x \Big/$$

$$= x(\mathrm{tg}\, x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}\, x - x) dx = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \ln\sqrt{2} + \frac{\pi^2}{32}.$$

2.8 Вторая теорема о среднем значении

Теорема 9 (теорема о среднем, формула (2.9)) позволяла дать интегралу неинтегральную оценку. Однако при этом на функцию накладывалось условие непрерывности. Непрывность позволяла утверждать, что найдется точка, в которой подынтегральная функция равна ее среднему значению по всему промежутку. В некоторых случаях удается ослабить условие непрерывности, но при этом оценка для интеграла будет содержать другой интеграл.

Теорема 14 (Вторая теорема о среднем значении)

Если на отрезке $[a,\, b]$, где $a < b$, функция $f(x)$ монотонно убывает и неотрицательна, а функция $g(x)$ интегрируема, то существует точка $\xi \in [a,\, b]$, такая, что:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)dx. \tag{2.19}$$

Доказательство:

Разобъем отрезок интегрирования $[a,\, b]$ точками x_i и запишем исходный интеграл в виде суммы интегралов:

$$I = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(x_i))g(x)dx}_{I_2}.$$

Проведем оценки для интегралов I_1 и I_2. Введем некоторые вспомогательные обозначения. Пусть $L = \sup\limits_{[a,\, b]} |g(x)| < \infty$. Последнее неравенство выполнено, так как интегрируемая функция всегда ограничена. Обозначим за ω_i колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_i,\, x_{i+1}]$:

$\omega_i = \max\limits_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x) - \min\limits_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x)$. Тогда:

$$|I_2| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{\le \omega_i} \underbrace{|g(x)|}_{\le L} dx \le L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \underbrace{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx}_{\triangle x_i} =$$

$$= L\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \max_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x) \triangle x_i}_{\overline{S_n}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \min_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x) \triangle x_i}_{\underline{S_n}} \right), \tag{2.20}$$

где $\overline{S_n}$ и $\underline{S_n}$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно.
Функция f – монотонна, следовательно, по теореме 3, она интегрируема.
Значит, согласно критерию интегрируемости функции (теорема 1),

$$\overline{S_n} - \underline{S_n} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0, \quad \text{где } \lambda = \max_i \triangle x_i.$$

Следовательно,

$$I_2 \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0, \qquad \text{то есть: } I = \lim_{\lambda \to 0} I_1.$$

Теперь оценим интеграл I_1. Пусть $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$. Тогда:

$$I_1 = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) =$$

$$= \underbrace{f(x_0)}_{=f(a)} G(x_1) - \underbrace{f(x_0)G(x_0)}_{=f(a)G(a)=0} + f(x_1)G(x_2) - f(x_1)G(x_1) + \ .\ .\ .\ .\ .$$

$$.\ .\ .\ .\ . + f(x_{n-2})G(x_{n-1}) - f(x_{n-2})G(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) \underbrace{G(x_n)}_{=G(b)} - f(x_{n-1})G(x_{n-1}) =$$

$$\Big/ \text{Собираем подобные члены при одинаковых } G(x_i) \Big/$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(\underbrace{f(x_{i-1}) - f(x_i)}_{\geqslant 0}) + G(b) \underbrace{f(x_{n-1})}_{\geqslant 0}. \tag{2.21}$$

Поскольку функция $g(x)$ интегрируема, то $G(x)$ непрерывна (по теореме 10). Следовательно, функция $G(x)$ достигает на отрезке $[a,\, b]$ своих наибольшего и наименьшего значений: $\sup\limits_{[a,b]} G(x) = M, \quad \inf\limits_{[a,b]} G(x) = m$. Заменяя $G(x_i)$ на M либо m, получим оценки для интеграла I_1 сверху и снизу соответственно (при такой замене в формуле (2.21) сократятся все слагаемые, кроме одного):

$$mf(a) \leqslant I_1 \leqslant Mf(a) \Rightarrow mf(a) \leqslant I \leqslant Mf(a) \Rightarrow$$

Следовательно, найдется некоторое число $\mu : \quad m \leqslant \mu \leqslant M$, что выполнено: $I = \mu f(a)$. Поскольку функция $G(x)$ непрерывна, то она принимает все значения между наименьшим и наибольшим, то есть найдется $\xi \in [a,\, b]$, такая, что: $\mu = G(\xi)$. Следовательно,

$$I = f(a)G(\xi) = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)dx,$$

что и доказывает теорему.

■

Замечание

Если функция $f(x)$ возрастает и $f \geqslant 0$, то можно получить аналог формулы (2.19):

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int\limits_{\xi}^{b} g(x)dx, \quad a \leqslant \xi \leqslant b. \tag{2.22}$$

Эти формулы называются формулами Бонне.

Замечание

Если функция f монотонна (не обязательно неотрицательна), то можно доказать, что существует точка $\xi \in [a,\, b]$ такая, что:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int\limits_{\xi}^{b} g(x)dx. \tag{2.23}$$

2.9 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке [a, b]. Тогда для разности $f(b)-f(a)$ можно получить следующее представление:

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b \underbrace{f'(x)}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \Big/\text{Интегрируем по частям}\Big/$$

$$\Big/\ u=f'(x),\quad du=f''(x)dx,\quad dv=dx,\quad v=x-b=-(b-x)\ \Big/$$

$$=-(b-x)f'(x)\Big|_a^b+\int\limits_a^b (b-x)f''(x)dx=$$

$$=f'(a)(b-a)+\int\limits_a^b f''(x)(b-x)dx=\Big/\text{Интегрируем по частям}\Big/$$

$$=f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2+\frac{1}{2}\int\limits_a^b f'''(x)(b-x)^2dx=\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\Big/\text{Интегрируем по частям } n \text{ раз}\Big/$$

$$=f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^ndx.$$

Последний оставшийся интеграл представляет собой остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме:

$$R_n=\frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^ndx. \qquad (2.24)$$

Следствие

Нетрудно получить оценки сверху и снизу остаточного члена в формуле Тейлора:

$$R_n\leqslant\frac{1}{n!}\max_{[a,\ b]}f^{(n+1)}(x)\cdot\int\limits_a^b(b-x)^ndx=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a,\ b]}f^{(n+1)}(x). \qquad (2.25)$$

$$R_n \geqslant \frac{1}{n!}\min_{[a,\ b]} f^{(n+1)}(x) \cdot \int\limits_a^b (b-x)^n dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\min_{[a,\ b]} f^{(n+1)}(x). \quad (2.26)$$

Если производная $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна, то она принимает все значения между наибольшим и наименьшим, то есть существует точка c такая, что:

$$R_n = f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{– остаточный член в форме Лагранжа.} \quad (2.27)$$

Глава 3. Приложения определённых интегралов

3.1 Площадь плоской фигуры

Определенный интеграл был введен для вычисления площадей плоских фигур с кривой границей. При введении определлнного интеграла находилась площадь криволинейной трапеции. Однако плоские фигуры могут иметь и более сложную форму. Способы задания фигур тоже могут быть различны: в декартовых или полярных координатах либо параметрически. Но даже в этих случаях определенный интеграл можно использовать для вычисления площади. Рассмотрим эти ситуации боле подробно.

1. Кривая задана в декартовых координатах

Найдем площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 2. Разобъем фигуру на три криволинейных трапеции и найдем площадь каждой из них. Если график функции $f(x)$ проходит выше оси абсцисс, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ дает нам площадь соответствующей области. Если же график $f(x)$ проходит ниже оси абсцисс, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ дает нам соответствующую площадь со знаком минус. Площадь всей фигуры равна сумме площадей составляющих ее частей.

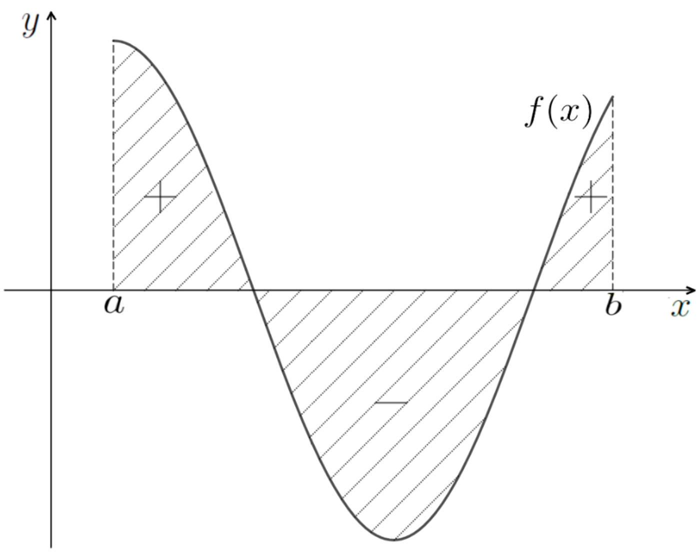
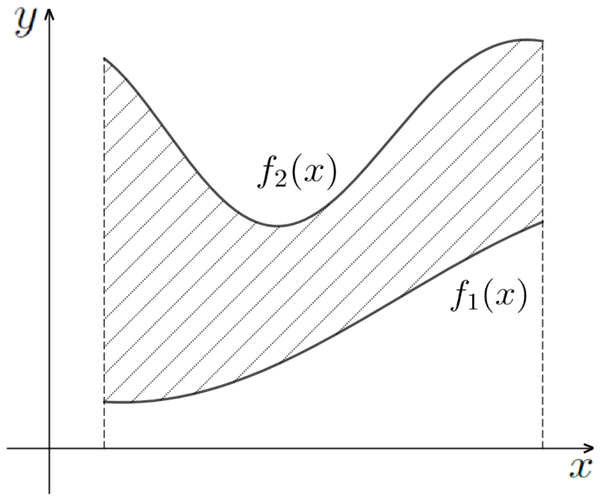


Рис. 2: Составная фигура

Рассмотрим теперь кривую, изображенную на рисунке 3. Она ограничена сверху кривой $y = f_2(x)$, снизу – кривой $y = f_1(x)$.



Площадь такой фигуры дается следующим интегралом:

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (3.1)$$

Рис. 3: Область между двумя кривыми

2. Кривая задана параметрически

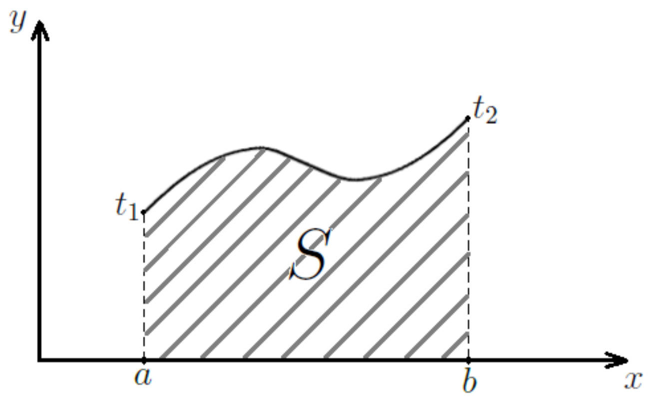


Рис. 4: Фигура, граница которой задана параметрически

Пусть кривая, ограничивающая фигуру, задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } t_1 \leq t \leq t_2$$

Тогда ее площадь можно посчитать по формуле:

$$S = \int\limits_a^b y(x)dx = \Big/ \text{Замена переменной } x \mapsto t \Big/ = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \quad (3.2)$$

Формула $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ работает и в случае замкнутой кривой, если при изменении t от t_1 до t_2 граница обходится по часовой стрелке.

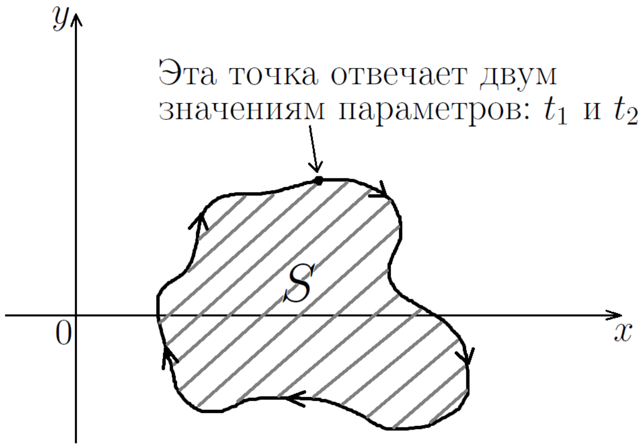


Рис. 5: Фигура, ограниченная замкнутой кривой

Пример 1

Найдем площадь под одной аркой циклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

$$S = \int\limits_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2 \left(t - 2\sin t\right)\Big|_0^{2\pi} + a^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2\pi a^2 + a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Пример 2

Вычислим площадь эллипса, заданного уравнениями:

$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$

Эллипс – замкнутая кривая. Для того, чтобы обойти эллипс по часовой стрелке, параметр t следует изменять от 2π до 0. Согласно формуле (3.2), площадь эллипса будет равна:

$$S = \int\limits_{2\pi}^{0} y(t)x'(t)dt = \int\limits_{2\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -ab \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{2\pi}^{0} = \pi ab.$$

3. Кривая задана в полярных координатах

Найдем площаль криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$.

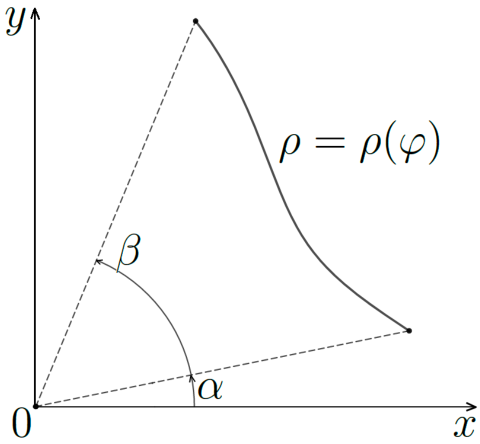


Рис. 6: Криволинейный сектор

Площадь сектора дается следующей формулой:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3.3)$$

Пример

Найдем площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной в полярных координатах уравнением: $\rho(\varphi) = 2a(1 + \cos\varphi)$.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} 4a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= 2a^2(\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} + 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 + 2a^2\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi a^2.$$

3.2 Длина кривой

Исследуем возможность вычисления длины кривой при помощи определенного интеграла.

Определение

Рассмотрим произвольную кривую AB (смотри рисунок 7). Впишем в кривую ломаную и будем увеличивать число её сторон так, чтобы наибольшая сторона стремилась к 0. Если при этом периметр ломаной стремится к конечному пределу, то говорят, что кривая AB спрямляема и этот предел называют длиной этой кривой.

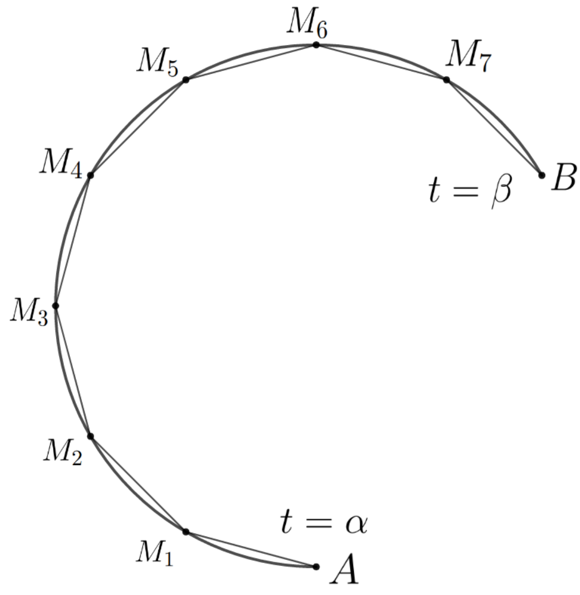


Рис. 7: Кривая AB

1. Кривая задана в декартовых координатах

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Разобъем отрезок $[a,\ b]$ на части точками деления: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Впишем в кривую ломаную, соответствующую точкам деления, и найдем ее периметр P по теореме Пифагора.

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y_i}{\triangle x_i}\right)^2} \triangle x_i =$$

$$\Big/ \text{Согласно теореме Лагранжа, существует точка } \ \xi_i \in (x_{i-1},\ x_i),$$

$$\text{такая, что: } \frac{\triangle y_i}{\triangle x_i} = f'(\xi_i) \Big/$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \triangle x_i, \quad \text{где } x_{i-1} < \xi_i < x_i. \tag{3.4}$$

Поскольку f непрерывно дифференцируема, то функция $\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$ будет непрерывной, а значит интегрируемой. Следовательно, полученная интегральная сумма стремится к интегралу, который и дает длину кривой:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{3.5}$$

Пример

Определим длину кривой, заданной уравнением $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ на отрезке $[-1,\ 1]$.

$$l = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}.$$

2. Кривая задана параметрически

Пусть кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где функции $\varphi,\ \psi$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Впишем в кривую ломаную и найдем ее периметр:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\underbrace{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}_{\triangle x_i})^2 + (\underbrace{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}_{\triangle y_i})^2} =$$

/Согласно теореме Лагранжа, существуют точки $\tau_i,\ \widetilde{\tau_i} \in (t_{i-1},\ t_i)$, такие, что: $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i) \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\widetilde{\tau_i}) \cdot (t_i - t_{i-1})$/

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\widetilde{\tau_i}))^2} \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad \text{где } t_{i-1} < \tau_i,\ \widetilde{\tau_i} < t_i. \tag{3.6}$$

Непрерывность функций φ и ψ означает, что стремление к нулю длины звена ломаной экивалентно тому, что $t_i - t_{i-1} \to 0$. Заметим, что полученная сумма интегральной суммой не является, так как точки τ_i и $\widetilde{\tau_i}$ различны. Введём интегральную сумму

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2}\,(t_i - t_{i-1}) \tag{3.7}$$

и докажем, что разность $P-Q$ будет бесконечно малой при измельчении разбиения.

$$P-Q=\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i))^2}\right](t_i-t_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cancel{(\varphi'(\tau_i))^2}+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2-\cancel{(\varphi'(\tau_i))^2}-(\psi'(\tau_i))^2}{\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}+\sqrt{(\varphi'(\widetilde{\tau}))^2+(\psi'(\tau_i))^2}}(t_i-t_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi'(\widetilde{\tau}_i)+\psi'(\tau_i)}{\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}+\sqrt{(\varphi'(\widetilde{\tau}))^2+(\psi'(\tau_i))^2}}(\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i))(t_i-t_{i-1})\leqslant$$

$$\Big/\ \psi'(\widetilde{\tau}_i)+\psi'(\tau_i)\leqslant\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}+\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i))^2}\ \Big/$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i))(t_i-t_{i-1})\leq\max_i|\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i)|\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=$$

/ Функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Следовательно, $\psi'(t)$ будет непрерывной на замкнутом промежутке $[\alpha, \beta]$. Тогда по теореме Кантора функция $\psi'(t)$ будет равномерно непрерывной на отрезке $[\alpha,\ \beta]$, то есть из условия $\max\limits_i(t_i-t_{i-1})\to 0$ следует, что:
$\delta=\max\limits_i|\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i)|\to 0$ /

$$=\delta\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=\delta(\beta-\alpha)\to 0\quad\text{при измельчении разбиения.}\tag{3.8}$$

Но интегральные суммы Q при измельчении разбиения стремятся к интегралу. А значит и суммы P стремятся к тому же интегралу, то есть длина кривой дается формулой:

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt.\tag{3.9}$$

Пример

Найдем длину одной арки циклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt =$$

$$= a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = 2a \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\sin \frac{t}{2}}_{\geq 0} dt = 2a \left(-2\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

3. Кривая задана в полярных координатах

Пусть кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тогда эту кривую можно задать параметрически следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой (3.9) для кривой, заданной параметрически.

$$x' = \cos \varphi \cdot \rho' - \rho \sin \varphi, \quad y' = \sin \varphi \cdot \rho' + \rho \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\cos \varphi \cdot \rho' - \rho \sin \varphi)^2 + (\sin \varphi \cdot \rho' + \rho \cos \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + (\rho')^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\big(\rho(\varphi)\big)^2 + \big(\rho'(\varphi)\big)^2} d\varphi.$$

Таким образом, формула для вычисления длины кривой, заданной в полярных координатах, такова:

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\big(\rho(\varphi)\big)^2 + \big(\rho'(\varphi)\big)^2} d\varphi. \tag{3.10}$$

Пример

Найдем длину кардиоиды, заданной в полярных координатах уравнением: $\rho(\varphi) = 2a(1 + \cos \varphi)$. Поскольку кривая симметрична относительно полярной оси, достаточно найти длину ее половины при изменении угла φ от 0 до π и удвоить полученный результат.

$$l = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi}d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\underbrace{1+\cos\varphi}_{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}}d\varphi = 8a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 16a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 16a.$$

4. Кривая в трёхмерном пространстве

Аналогично случаю плоской кривой можно получить формулу для длины кривой, заданной параметрически, в трехмерном пространстве.

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta. \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

Длина кривой равна:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt. \tag{3.11}$$

Пример

Найдем длину одного витка винтовой линии:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z = bt, \end{cases}$$

Длина кривой равна:

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + b^2}dt = \sqrt{R^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{R^2+b^2}.$$

3.3 Объём тела вращения

В данном параграфе мы рассмотрим только некоторый частный случай вычисления объема тела. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться в теме “Тройные интегралы”.

Пусть тело образовано вращением непрерывной кривой $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a,\ b]$ вокруг оси OX.

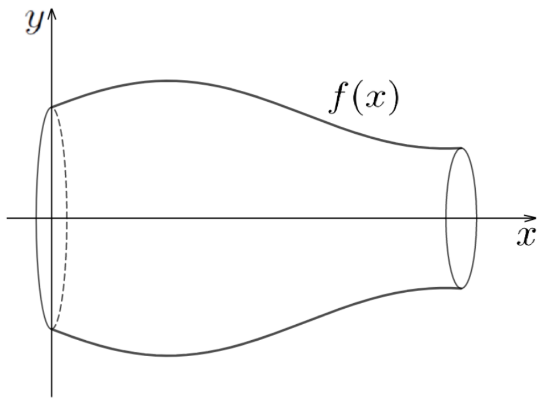


Рис. 8: Объем тела вращения

Разобъем отрезок $[a,\ b]$ на n частей точками деления:
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Проведем плоскости, перпендикулярные оси OX через точки деления. В каждом из промежутков $[x_{i-1},\ x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i и построим в слое между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ цилиндр радиусом $f(\xi_i)$. Объем тела, составленного из цилиндров, при измельчении разбиения будет стремиться к объему V всего тела вращения.

С другой стороны, объем тела, составленного из цилиндров, есть интегральная сумма: $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i) \triangle x_i$, которая при измельчении разбиения стремится к интегралу $\pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$. Таким образом,

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx. \tag{3.12}$$

Пример

Вычислим объем тела, образованного вращением параболы $y^2 = 2x$ вокруг оси OX при $0 \le x \le 1$.

$$V = \pi \int\limits_0^1 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^1 = \pi.$$

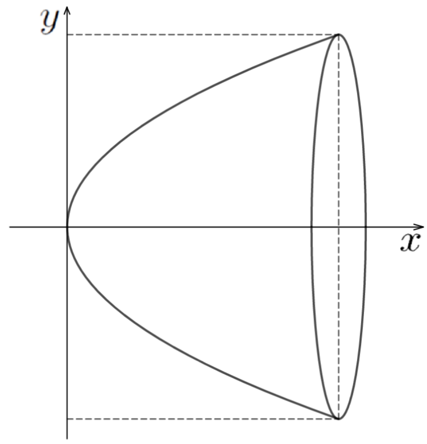


Рис. 9: Параболоид вращения

3.4 Площадь поверхности тела вращения

Площадь произвольной криволинейной поверхности в общем случае не удается ввести по аналогии с определением длины кривой. Однако если поверхность есть поверхность тела вращения, то подобное определение становится корректным. Именно о нем пойдет речь в настоящем параграфе. Общее определение площади поверхности будет дано позже при рассмотрении поверхностных интегралов.

Определение

Пусть поверхность Σ образована вращением вокруг оси OX плоской спрямляемой кривой. Впишем в кривую ломаную $M_0M_1 \ldots M_n$. Обозначим за S_n площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX данной ломаной. Рассмотрим предел S_n при измельчении разбиения кривой (то есть при $\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0$). Если данный предел существует и конечен и не зависит от выбора точек M_i, то он называется площадью поверхности вращения Σ:

$$S = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} S_n. \tag{3.13}$$

Найдем формулу для вычисления площади поверхности. Площадь поверхности, полученной вращением ломаной, равна сумме площадей боковых поверхностей усеченных конусов ($S_{\text{усеч.конус}} = \pi(r + R)L$, где R – радиус нижнего основания усеченного конуса, r – радиус верхнего основания, L – образующая):

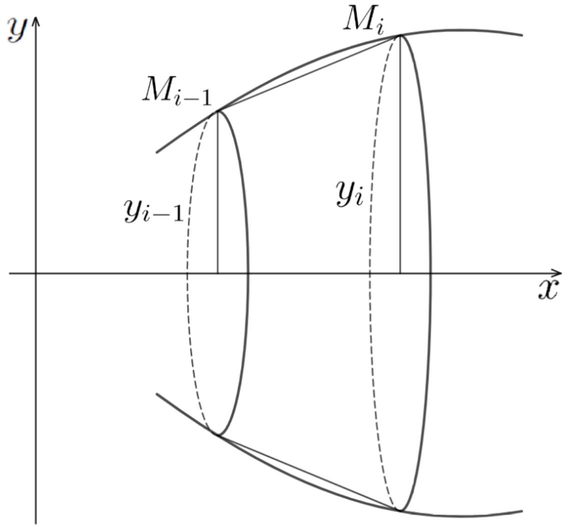


Рис. 10: Усеченный конус, вписанный в поверхность

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi(y_{i-1} + y_i) \cdot |M_{i-1}M_i| =$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} (2y_{i-1} + y_i - y_{i-1}) \cdot |M_{i-1}M_i| =$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot |M_{i-1}M_i| + \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot |M_{i-1}M_i|. \tag{3.14}$$

Покажем, что второе слагаемое стремится к нулю при измельчении разбиения. Так как

$$\max_i |y_i - y_{i-1}| \le \Big/ \text{Катет меньше гипотенузы} \Big/ \le \max_i |M_{i-1}M_i| \to 0,$$

то для второго слагаемого будет выполнено:

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot |M_{i-1}M_i| \Big| \le \sum_{i=1}^{n} |y_i - y_{i-1}| \cdot |M_{i-1}M_i| \le$$

$$\le \max_i |y_i - y_{i-1}| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|}_{\le l} \leqslant \max_i |y_i - y_{i-1}| \cdot l \to 0,$$

где l – длина кривой. Сделав предельный переход в формуле (3.14), получим:

$$S = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} S_n = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot |M_{i-1}M_i|. \qquad (3.15)$$

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $x \in [a,\ b]$. Согласно формуле (3.4), длина отрезка ломаной равна $\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1})$. Следовательно,

$$S = \lim_{\max\limits_i |M_{i-1}M_i| \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_{i-1})}_{y_{i-1}} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Полученная сумма не является интегральной, поскольку функции f и f' вычислены в разных точках, но можно доказать что она имеет тот же предел. Делается по аналогии с получением формулы для длины кривой, заданной параметрически (параграф 3.2, формула (3.8)). Таким образом, **площадь поверхности тела вращения равна:**

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.}_{dl} \qquad (3.16)$$

Здесь dl – это дифференциал длины дуги кривой.

Замечание

В случае если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то формула (3.16) сохраняется с точностью до замены dl на соответсвующее выражение в данных координатах.

Пример

Найдем площадь поверхности удлиннённого эллипсоида вращения (то есть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вращаемого вокруг большой оси):

$$S = 2\pi \int\limits_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{y^2+(yy')^2}dx.$$

Продифференцируем уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получим:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{1}{b^2}\cdot 2yy'=0 \;\Rightarrow\; yy'=-\frac{b^2x}{a^2}.$$

Кроме того,

$$y^2=b^2\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big).$$

Следовательно,

$$S=2\pi\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^4x^2}{a^4}}dx=2\pi b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}\Big(1-\frac{b^2}{a^2}\Big)}dx=$$

$$\Big/\text{Эксцентриситет}\;\; e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}\Big/$$

$$=2\pi b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}dx=$$

$$\Big/\text{Интеграл от четной функции по симметричному промежутку}\Big/$$

$$=4\pi b\int\limits_{0}^{a}\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}dx=\frac{4\pi ba}{e}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{1-\Big(\frac{ex}{a}\Big)^2}\,d\Big(\frac{ex}{a}\Big)=$$

$$=\Big/t=\frac{ex}{a}\Big/=\frac{4\pi ba}{e}\int\limits_{0}^{e}\sqrt{1-t^2}dt.$$

Вычислим $\int\sqrt{1-t^2}dt$.

$$\int\sqrt{1-t^2}dt=\Big/u=\sqrt{1-t^2},\;dv=dt,\quad v=t,\;du=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt\Big/$$

$$=t\sqrt{1-t^2}+\int\frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}dt=t\sqrt{1-t^2}-\int\sqrt{1-t^2}dt+\underbrace{\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}_{\arcsin t+C}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{1-t^2}dt=\frac{1}{2}(t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t+C).$$

Следовательно,

$$S=\frac{4\pi ba}{e}\cdot\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2}\Big|_0^e+\arcsin t\Big|_0^e\right)=2\pi ba\Big(\sqrt{1-e^2}+\frac{\arcsin e}{e}\Big)=$$

$$=\Big/\text{Эксцентриситет эллипса}\;e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\Big/=2\pi b^2+2\pi ba\frac{\arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}.$$

3.5 Центр тяжести

В физических задачах важную роль играет понятие центра масс. Центр масс – это точка, положение которой определяется распределением массы в теле, а перемещение характеризует движение тела или механической системы как целого. В случае систем материальных точек и тел с однородной по объёму плотностью в однородном гравитационном поле центр масс совпадает с центром тяжести (то есть с точкой приложения равнодействующей гравитационных сил), хотя в общем случае это разные понятия. Например, если рассматривать малое тело на поверхности Земли, то силы тяжести во всех его точках можно считать одинаковыми по величине и параллельными друг другу. В этой ситуации точка приложения равнодействующей этих сил (центр тяжести) совпадет с центром масс. Если же рассматривать достаточно большое тело (настолько большое, что в пределах этого тела кривизна земной поверхности начинает играть существенную роль), то гравитационные силы в разных его точках будут непараллельны и могут отличаться по величине. Здесь точка приложения равнодействующей этих сил (центр тяжести) уже не будет совпадать с центром масс.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать физические тела относительно малого размера, для которых описанное различие между центром тяжести и центром масс пренебрежимо мало. То есть мы будем отождествлять эти понятия. Найдем центры тяжести различных геометрических объектов.

1. Центр тяжести системы материальных точек

Положение центра масс системы материальных точек определяется следующим образом:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \tag{3.17}$$

где $(x_c,\ y_c)$ – координаты центра масс, x_i – координата i-ой точки с массой m_i.

Замечание

В трехмерном пространстве к вышеперечисленным координатам следует добавить еще одну:

$$z_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

2. Центр тяжести плоской кривой

Рассмотрим плоскую кривую с плотностью $\rho(x,\ y)$, заданную уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,\ b]$. Под плотностью мы подразумеваем линейную плотность распределения массы, то есть массу, приходящуюся на единицу длины кривой. Координаты центра тяжести плоской кривой определяются формулами:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{M} \int\limits_a^b \rho(x, f(x)) \cdot x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx, \\ y_c = \frac{1}{M} \int\limits_a^b \rho(x, f(x)) \cdot f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx, \end{cases} \tag{3.18}$$

где $M = \displaystyle\int\limits_a^b \rho(x, f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ – масса кривой. (3.19)

Теорема 1 (Первая теорема Гульдина)

Площадь поверхности, полученной при вращении дуги однородной плоской кривой ($\rho = 1$) вокруг некоторой оси (лежащей в её плоскости и не пересекающей её), равняется произведению длины вращающейся дуги на длину пути, описанного при этом вращении центром тяжести дуги.

Доказательство:

Пусть кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,\ b]$, вращается вокруг оси OX.

Так как $\rho = 1$, то масса кривой согласно формуле (3.19), будет равна:

$$M = \int\limits_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}_{dl} = l. \tag{3.20}$$

Тогда по формуле (3.18):

$$My_c = ly_c = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{3.21}$$

Согласно формуле (3.16), площадь поверхности тела вращения равна:

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi y_c \cdot l. \tag{3.22}$$

Заметим, что $2\pi y_c$ – это длина окружности, пройденная центром тяжести кривой при вращении. Что и требовалось доказать.

■

3. Центр тяжести плоской фигуры

Найдем центр тяжести однородной плоской фигуры с плотностью $\rho = 1$, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ снизу и сверху соответственно, а также вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ с боков.

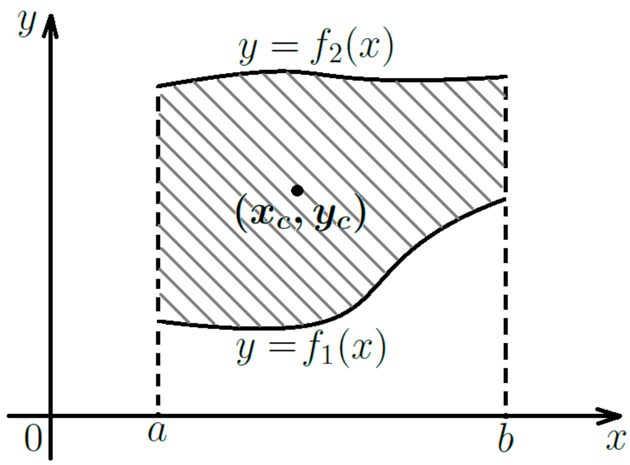


Рис. 11: Центр тяжести плоской фигуры

Координаты центра тяжести данной фигуры даются формулами:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{S}\int\limits_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx, \\ y_c = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\text{где} \quad S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \ \text{ – площадь фигуры.} \tag{3.24}$$

Теорема 2 (Вторая теорема Гульдина)

Объём тела, полученный при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси (лежащей в её плоскости и не пересекающей её), равен произведению площади вращающейся фигуры на длину пути, описанного её центром тяжести при вращении.

Доказательство:

Пусть плоская фигура, описанная выше, вращается вокруг оси OX. По формуле (3.23) получим:

$$2y_c \cdot S = \int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx. \tag{3.25}$$

Тогда согласно формуле (3.12), объем полученного тела вращения можно вычислить как разность двух объемов, полученных при вращении кривых $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ соответственно:

$$V = \pi\int\limits_a^b f_2^2(x)dx - \pi\int\limits_a^b f_1^2(x)dx = \pi\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx = 2\pi y_c \cdot S. \tag{3.26}$$

Заметим, что $2\pi y_c$ – это длина окружности, пройденная центром тяжести фигуры при вращении. Что и требовалось доказать.

■

Пример 1

Найдем объём тора, образованного вращением круга радиуса r вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости круга на расстоянии a от его центра. По второй теореме Гульдина (формула (3.26)) получим:

$$V = 2\pi a \cdot S = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 ar^2.$$

Пример 2

Найдем площадь поверхности тора, образованного вращением круга радиуса r вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости круга на расстоянии a от его центра. По первой теореме Гульдина (формула (3.22)) получим:

$$S = 2\pi a \cdot l = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar.$$

Пример 3

Найдем координаты центра тяжести полукруга радиуса R (смотри рисунок (3.5)). Для этого рассмотрим его вращение вокруг оси OX, в результате которого получается шар радиуса R. Объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Площадь вращающегося полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Следовательно, по второй теореме Гульдина (формула (3.26)) получим:

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{V} = 2\pi y_c \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2}R^2}_{S} \Rightarrow y_c = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.$$

Из симметрии полукруга ясно, что $x_c = 0$.

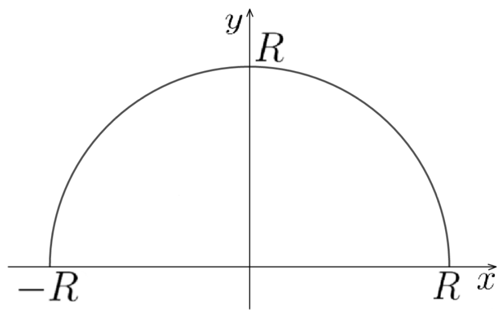


Рис. 12: Полукруг радиуса R

Пример 4

Найдем центр тяжести полуокружности радиуса R. Аналогично примеру 3, рассмотрим ее вращение вокруг оси OX, в результате которого получается сфера радиуса R. Площадь поверхности сферы известна: $S = 4\pi R^2$. Длина вращающейся полуокружности равна $l = \pi R$. Тогда по первой теореме Гульдина (формула (3.22)) получим:

$$\underbrace{4\pi R^2}_{S} = 2\pi y_c \cdot \underbrace{\pi R}_{l} \;\Rightarrow\; y_c = \frac{2}{\pi}R.$$

Из симметрии полуокружности очевидно, что $x_c = 0$.

Глава 4. Несобственные интегралы

При введении определенного интеграла предполагалось, что промежуток интегрирования – это конечный отрезок и всюду на нем подынтегральная функция определена и ограничена. Однако определение может быть расширено на случай бесконечного промежутка и неограниченной функции. Данная глава посвящена этому вопросу.

4.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема в любой конечной его части, то есть интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ имеет смысл для любого $A > a$. Предел этого интеграла при $A \to \infty$ (конечный или бесконечный) называют несобственным интегралом 1 рода от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ и пишут:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{4.1}$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, если не существует или бесконечен – расходится.

Замечание. При введении определенного интеграла мы находили площадь ограниченной области. С помощью несобственного интеграла можно определить и вычислить площадь неограниченной области:

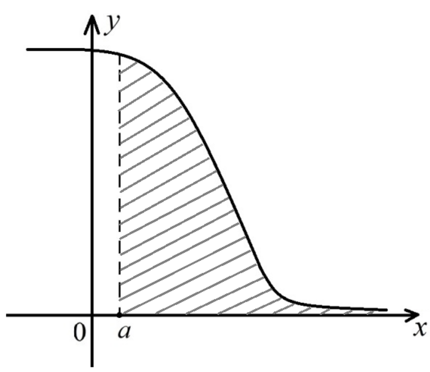


Рис. 13: Интеграл с бесконечным верхним пределом

Пример

Пусть $a > 0$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ при различных λ.

$$\lambda \neq 1: \quad \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda}\Big|_a^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\lambda}(A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) = \begin{cases} \infty, & \lambda < 1, \\ \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, & \lambda > 1. \end{cases}$$

$$\lambda = 1: \quad \int\limits_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \ln x\Big|_a^A = \infty.$$

Итак, интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ ведет себя следующим образом:

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}: \qquad \begin{cases} \lambda \leqslant 1 & \text{– расходится,} \\ \lambda > 1 & \text{– сходится.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Определение

Аналогично можно определить

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^a f(x)\,dx. \tag{4.3}$$

Определение

Интеграл по всей числовой оси можно ввести по аналогии с предыдущими двумя определениями:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty, A\to+\infty} \int\limits_B^A f(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Связь с определениями интегралов по полуосям устанавливается следующим образом. Пусть a – произвольное вещественное число. Тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty, A\to+\infty} \Big(\int\limits_B^a f(x)\,dx + \int\limits_a^A f(x)\,dx \Big) =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Пример

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to-\infty, A\to+\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} B) = \pi.$$

Утверждение

Если на промежутке интегрирования функция $f(x)$ всюду имеет первообразную $F(x)$, то

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} (F(A) - F(a)). \tag{4.5}$$

Следствие

Таким образом, условие сходимости данного интеграла – это условие существования конечного предела у первообразной:

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = F(\infty) < \infty. \tag{4.6}$$

Пример

Найдем работу по перемещению материальной точки единичной массы под действием силы гравитации $F = -G \cdot \frac{m}{x^2}$ из точки $x = r$ на бесконечность:

$$A = -\int_{r}^{+\infty} G\frac{m}{x^2}dx = G\frac{m}{x}\Big|_{r}^{\infty} = -\frac{m}{r} \cdot G.$$

Работа по удалению материальной точки единичной массы на бесконечность называется потенциалом силы (силового поля).

4.2 Теоремы о сходимости несобственных интегралов

Теорема 1 (Аддитивность интеграла)

Если сходится интеграл по большему промежутку $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, то сходится также и интеграл по меньшему промежутку $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$, где $b > a$. При этом выполнено:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx. \tag{4.7}$$

Доказательство:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\Big(\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^A f(x)\,dx\Big) =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

$\blacksquare$

Теорема 2 (Теорема об остатке интеграла)

Если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, то:

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_b^\infty f(x)\,dx = 0. \tag{4.8}$$

Доказательство:

Согласно, формуле (4.7) из теоремы 1,

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^b f(x)\,dx}_{\to\int\limits_a^\infty f(x)dx \text{ при } b\to\infty} + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

Следовательно,
$$\int\limits_b^\infty f(x)\,dx \to 0 \text{ при } b\to\infty.$$

■

Теорема 3 (Вынесение множителя за знак интеграла)
Из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty Cf(x)\,dx$ (где $C = const$), причём:
$$\int\limits_a^\infty Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^\infty f(x)\,dx. \tag{4.9}$$

Доказательство:
$$\int\limits_a^\infty Cf(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A Cf(x)\,dx = C\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx = C\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

■

Теорема 4 (Интеграл от суммы функций)
Если интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходятся, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty (f(x)\pm g(x))dx$ и выполнено:
$$\int\limits_a^\infty (f(x)\pm g(x))dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx. \tag{4.10}$$

Доказательство:
$$\int\limits_a^\infty (f(x)\pm g(x))dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A (f(x)\pm g(x))dx =$$

/Предел суммы равен сумме пределов/

$$= \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx \pm \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A g(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx. \quad \blacksquare$$

Несобственный интеграл от положительной функции

Для положительной подынтегральной функции удается сформулировать более детальные теоремы о сходимости.

Теорема 5 (Монотонность первообразной от положительной функции)

Если подынтегральная функция положительна (точнее, неотрицательна: $f(x) \geqslant 0$), то функция $F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$ монотонно возрастает при $A \to \infty$.

Доказательство:

Действительно, пусть $A_2 > A_1$. Тогда:

$$F(A_2) = \int\limits_a^{A_2} f(x)\,dx = \int\limits_a^{A_1} f(x)\,dx + \underbrace{\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx}_{\geq 0} \geq \int\limits_a^{A_1} f(x)\,dx = F(A_1).$$

$\blacksquare$

Теорема 6 (Критерий сходимости интеграла от положительной функции)

Если функция $f(x) \geqslant 0$, то для сходимости $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено:

$$\int\limits_a^A f(x)\,dx \leqslant L \quad (\text{где } L = const), \tag{4.11}$$

причем константа L не зависит от A (то есть $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ будет ограничен одной константой L для любого A).

Доказательство:

Рассмотрим функцию $F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$. Как было доказано в теореме 5, функция $F(A)$ монотонно возрастает. Необходимое и достаточное условие сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ есть существование конечного предела первообразной $F(A)$ (смотри формулу (4.6)), что для монотонно возрастающей функции означает ограниченность.

$\blacksquare$

Теорема 7 (Признак сравнения)
Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \geqslant a$. Тогда:
1) Из сходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.
2) Из расходимости $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.
<u>Доказательство:</u>
Введем функции $F(A)$ и $G(A)$ по правилу:

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx, \quad G(A) = \int\limits_a^A g(x)dx.$$

Докажем пункт 1. Проинтегрировав неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, получим: $0 \leqslant F(A) \leqslant G(A)$. Поскольку $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то по теореме 6 функция $G(A)$ ограничена, то есть существует L такое, что $G(A) \leqslant L$ для любого A. Следовательно, $F(A) \leqslant L$ для любого A. Тогда по теореме 6 (формула (4.11)) интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится.

Докажем пункт 2. От противного. Пусть $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится, тогда по первой части доказательства $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ тоже сходится. Получили противоречие.

$\blacksquare$

Замечание
Поскольку отбрасывание интеграла по конечному промежутку не влияет на сходимость, то в условии теоремы 7 можно требовать выполнение неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ только при $x \geq b$, где $b \geq a$.

Теорема 8 (Предельный признак сравнения)

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ где $0\leqslant K\leqslant\infty$. Тогда:

1. При $0\leq K<\infty$ из сходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ вытекает сходимость $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

2. Если $0<K\leq\infty$ из расходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

3. При $0<K<\infty$ интегралы либо оба сходятся либо оба расходятся, то есть ведут себя одинаково.

Доказательство:

Докажем пункт 3. По определению предела,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\exists b:\; x>b:\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; K-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; (K-\varepsilon)g(x)<f(x)<(K+\varepsilon)g(x).$$

По неравенству $f(x)<(K+\varepsilon)g(x)$ в соответствии с теоремой 7 с учетом замечания получаем, что из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Поскольку $K>0$, можно выбрать столь малое ε, что $K-\varepsilon>0$. Тогда из неравенства $(K-\varepsilon)g(x)<f(x)$ следует что из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

Если предположить, что один из интегралов расходится, то и второй должен расходиться. Доказывается от противного. Действительно, если предположить, что второй интеграл сходится, то по доказанному должен сходиться и первый интеграл. Противоречие.

Для доказательства пунктов 1 и 2 нужно применить только половину из приведенных выше аргументов, а именно:

1. Если $0\leq K<\infty$, то имеем неравенство: $f(x)<(K+\varepsilon)g(x)$, из которого следует, что сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

2. Если $0 < K \leq \infty$, то при достаточно малом ε (таком, что $K - \varepsilon > 0$) имеем: $(K - \varepsilon)g(x) < f(x)$. Тогда по теореме 7 с учетом замечания получаем, что из расходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

■

Замечание

На практике в качестве одной из подынтегральных функций удобно выбирать функцию $\frac{1}{x^\lambda}$.

Теорема 9 (Теорема о сравнении с эталонным интегралом)

Рассмотрим сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$, где $a > 0, \quad \lambda > 0$. Тогда:

1. Пусть $\lambda > 1$ и для достаточно больших x выполнено: $0 < \varphi(x) \leqslant C < \infty$. Тогда $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ сходится.

2. Пусть $0 < \lambda \leqslant 1$ и для достаточно больших x выполнено: $\varphi(x) \geqslant C > 0$. Тогда $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ расходится.

<u>Доказательство:</u>

Докажем пункт 1. Пусть $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}, \quad g(x) = \frac{C}{x^\lambda}$. Из формулы (4.2) нам известно, что $\int\limits_a^\infty \frac{C}{x^\lambda}dx$ сходится при $\lambda > 1$. Так как $\varphi(x) \leqslant C$, то из теоремы 7 (пункт 1) получаем, что $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ также сходится.

Докажем пункт 2. Пусть $g(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}, \quad f(x) = \frac{C}{x^\lambda}$. Из формулы (4.2) нам известно, что $\int\limits_a^\infty \frac{C}{x^\lambda}dx$ расходится при $\lambda \leq 1$. Так как $\varphi(x) \geq C > 0$, то из теоремы 7 (пункт 2) получаем, что $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ также расходится.

■

Теорема 10 (Теорема о сравнении с интегралом от эквивалентной бесконечно малой)

Пусть при $x \to \infty$ функция $f(x)$ есть бесконечно малая, такая, что: $f(x) \sim \frac{C}{x^\lambda}$, где $\lambda > 0, \quad C > 0$. Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, если $\lambda > 1$ и расходится, если $\lambda \leqslant 1$.

Доказательство:

Пусть $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C > 0$. Следовательно, по предельному признаку сравнения (теорема 8, пункт 3), интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ ведут себя одинаково. Сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ нам известна из формулы (4.2). Такая же сходимость будет и у интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

■

Пример 1

Исследуем сходимость следующих интегралов:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$. Подынтегральная функция ведет себя следующим образом: $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Следовательно, по теореме 10 интеграл расходится.

2) Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ сходится, так как $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^2}$.

Пример 2. "Почему ночью темно?"

Выясним освещенность, создаваемую на Земле всеми звездами за исключением Солнца. Напомним, что освещённость равна световому потоку, падающему на участок поверхности единичной площади. Будем считать, что звёзды расположены во Вселенной равномерно с плотностью ρ и обладают одинаковой светимостью M, то есть излучают одинаковую световую энергию. Введем в пространстве сферические координаты с центром на Земле. Найдем количество звезд, которые находятся в сферическом слое между сферами радиусами r и $r + dr$. Объем этого сферического слоя равен $4\pi r^2 dr$. Тогда количество звезд равно $\rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Общая светимость сферического слоя равна $M\rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Освещенность, создаваемая на Земле сферическим слоем, обратно пропорциональна квадрату расстояния до него: $dE = k\frac{1}{r^2} \cdot M\rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Тогда полную освещенность, создаваемую на Земле всеми звездами, можно получить, проинтегрировав dE по радиусу r от нуля до бесконечности:

$$E = \int\limits_0^\infty k\frac{1}{r^2} \cdot M\rho \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi M\rho k \int\limits_0^\infty dr = \infty,$$

то есть интеграл расходится и освещенность, создаваемая звездами, бесконечно велика.

Полученный результат явно ошибочен, так как ночью темно. Ошибка состоит в том, что мы считали Вселенную стационарной системой. В 1922 году Александром Фридманом была предложена первая из нестационарных моделей Вселенной, которая устраняет данный парадокс. В данной модели все звёзды разлетаются друг от друга. При этом энергия излучаемого ими света тем меньше, чем быстрее звезда улетает. Скорость разлета звезд тем больше, чем дальше они друг от друга (скорость разлета пропорциональна расстоянию между звездами). В астрономии это называется красным смещением ибо красная часть спектра соответствует меньшей энергии излучаемых фотонов. Поэтому далекие звезды (из-за которых и возникала расходимость интеграла) почти не приносят энергии на Землю.

Несобственный интеграл от произвольной функции. Общий случай.

Вопрос о существовании несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, согласно его определению, приводится к вопросу о существовании конечного предела при $A \to \infty$ для функции от $F(A)$:

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx. \qquad (4.12)$$

Применяя к этой функции признак Больцано-Коши, можно условие существования несобственного интеграла представить в следующей форме:

Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечало такое число $A_0 > a$, чтобы при $A > A_0$ и $A' > A_0$ выполнялось неравенство:

$$|F(A') - F(A)| = \left|\int\limits_a^{A'} f(x)dx - \int\limits_a^{A} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon. \qquad (4.13)$$

Этой критерий поззволяет доказать следующую теорему:

Теорема 11 (Признак абсолютной сходимости)
Если сходится $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, то сходится и $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.
Доказательство:

Действительно, применяя изложенный критерий к интегралу $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, который предполагаем сходящимся, видим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_0 > a$, что:

$$\int\limits_A^{A'} |f(x)|dx < \varepsilon \quad \text{при } A' > A > A_0.$$

Так как, очевидно, выполнено неравенство: $\left|\int\limits_A^{A'} f(x)dx\right| \leq \int\limits_A^{A'} |f(x)|dx$, то для тех же $A,\ A'$ тем более будет выполнено неравенство:

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

откуда, в силу критерия Больцано-Коши, вытекает сходимость инетграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

■

Замечание
Отметим, что из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, вообще говоря, не следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$. Это обстоятельство дает основание особо отличать следующий случай.

Замечание

Если наряду с интегралом $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся, а функцию $f(x)$ – абсолютно интегрируемой в промежутке $[a,\ +\infty)$.

В случае же когда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называют неабсолютно (условно) сходящимся.

Следствие

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a,\, \infty)$, а функция $g(x)$ ограничена, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ будет абсолютно интегрируемо на $[a,\, \infty)$.

Доказательство:

Поскольку функция $g(x)$ ограничена, найдется постоянная L, такая, что: $|g(x)| \le L\ \ \forall x \in [a,\, \infty)$. Следовательно, будт выполнено неравенство:

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \le L|f(x)|.$$

По условию, $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ сходится. Значит по признаку сравнения интегралов (теорема 7) сходится и интеграл от $\int\limits_a^\infty |f(x) \cdot g(x)|dx$.

■

Пример

Исследуем на сходимость следующий интеграл: $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 5x}{1+x^2}dx$.

Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ абсолютно интегрируема:

$$\int\limits_0^\infty |f(x)|dx = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Функция $\cos 5x$ ограничена: $|\cos 5x| \leqslant 1$.

Тогда по следствию из теоремы 11 интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 5x}{1+x^2}dx$ сходится, причём абсолютно.

Теорема 12 (Признак Абеля)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a, \infty)$ и выполнено:

1) $f(x)$ интегрируема в полуинтервале $[a, \infty)$, то есть $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится (хотя бы неабсолютно).

2) $g(x)$ монотонна и ограничена, то есть существует постоянная L, такая, что выполнено: $|g(x)| \leqslant L \quad \forall x \in [a, \infty)$.

Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство:

Воспользуемся второй теоремой о среднем значении. Напомним ее формулировку. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, функция $g(x)$ монотонна. Тогда найдется такая точка $\xi \in [a,\ b]$, что выполнено:

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx.$$

В соответствии с этой теоремой для любых $A' > A > a$ найдется такая точка $\xi \in [A,\ A']$, что выполнено:

$$\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int\limits_A^\xi f(x)\,dx + g(A')\int\limits_\xi^{A'} f(x)\,dx. \qquad (4.14)$$

Поскольку $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится (пункт 1 теоремы 12), то по критерию Больцано-Коши (формула (4.13)) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ A_0 > a$, такое, что $\forall\ A \geq \xi \geq A' > A_0$ выполнено:

$$\left|\int\limits_A^\xi f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \qquad \left|\int\limits_\xi^{A'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}. \qquad (4.15)$$

Из равенства (4.14) получим:

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(A)\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx + g(A')\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|g(A)|}_{\leq L}\cdot\underbrace{\left|\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2L}} + \underbrace{|g(A')|}_{\leq L}\cdot\underbrace{\left|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2L}} \leq$$

$$< L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Значит по критерию Больцано-Коши (4.13) интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

■

Теорема 13 (Признак Дирихле)

Пусть:

1) Функция $f(x)$ интегрируема в любом конечном промежутке $[a,\ A]$ (где $A > a$) и все интегралы от нее ограничены одной константой:

$$\exists\ K \text{ такое, что: } \left|\int\limits_a^{A} f(x)\,dx\right| \leq K \quad \forall A \in [a,\ \infty).$$

2) Функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Замечание

По сравнению с признаком Абеля первое условие ослаблено, второе – усилено.

Доказательство:

Аналогично доказательству теоремы Абеля, воспользуемся второй теоремой о среднем значении (формула (4.14)). В соответствии с этой теоремой для любых $A' > A > a$ найдется такая точка $\xi \in [A,\ A']$, что выполнено:

$$\int\limits_{A}^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int\limits_{A}^{\xi} f(x)\,dx + g(A')\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx. \qquad (4.16)$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, то функцию $g(x)$ можно сделать сколь угодно маленькой, взяв достаточно большое x, то есть: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_0 > a$, такое, что при $A' > A > a_0$ выполнено:

$$|g(A)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \qquad |g(A')| < \frac{\varepsilon}{4K}. \qquad (4.17)$$

Оценим первый и второй интегралы из правой части формулы (4.16):

$$\Big|\int\limits_{A}^{\xi} f(x)\,dx\Big| = \Big|\int\limits_{A}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx\Big| \le$$

$$\le \underbrace{\Big|\int\limits_{A}^{a} f(x)\,dx\Big|}_{\le K} + \underbrace{\Big|\int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx\Big|}_{\le K} \le K + K = 2K. \qquad (4.18)$$

Аналогично,

$$\Big|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\Big| \le 2K. \qquad (4.19)$$

Воспользовавшись формулами (4.16)–(4.19), получим оценку для интеграла:

$$\Big|\int\limits_{A}^{A'} f(x)g(x)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \varepsilon. \qquad (4.20)$$

Значит по критерию Больцано-Коши (4.13) интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

■

Пример

Исследуем сходимость следующих интегралов:

$$\int\limits_{a}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{a}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\lambda}}dx \quad \text{где } a > 0,\ \lambda > 0.$$

Воспользуемся признаком Дирихле. Выберем $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ и проверим условия признака:

$$\Big|\int\limits_a^A \sin x dx\Big| = \Big|\cos a - \cos A\Big| \leqslant 2.$$

Аналогично для второго интеграла:

$$\Big|\int\limits_a^A \cos x dx\Big| \leqslant 2.$$

Функция $\frac{1}{x^\lambda}$ монотонно стремится к нулю при $\lambda > 0$. Следовательно, по признаку Дирихле оба интеграла сходятся.

Замечание

Отметим, что признак Абеля непосредственно применить не удается, так как интегралы $\int\limits_a^\infty \sin x dx$ и $\int\limits_a^\infty \cos x dx$ расходятся.

Покажем, что $\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ (где $a > 0$) сходится неабсолютно.

Доказажем от противного.

Пусть $\int\limits_a^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \Big/$так как $x > 0\Big/ = \int\limits_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ сходится. Поскольку $\sin^2 x \leq |\sin x|$, то признаку сравнения (теорема 7) интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ тоже сходится. Тогда $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} dx = \int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ тоже сходится. Прибавим к нему интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx$ (выше было доказано, что он сходится). Получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}.$$

Сумма двух сходящихся интегралов есть сходящийся интеграл, то есть интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}$ тоже сходится. Противоречие ибо $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x} = \infty$. Аналогично можно доказать, что $\int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ (где $a > 0$) сходится неабсолютно.

Замечание

Функции

$$\mathrm{Si}(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

называются интегральным синусом и интегральным косинусом соответственно.

4.3 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a,\, b]$, но ограничена и интегрируема на отрезке $[a,\, b-\eta]$ $\forall \eta > 0$. В этом случае точка b называется особой точкой функции $f(x)$.

Определение

Несобственным интегралом 2 рода в пределах от a до b от неограниченной функции $f(x)$ называется следующий предел (если он существует и конечен):

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\eta \to +0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)\, dx, \tag{4.21}$$

Если же интеграл не существует либо равен бесконечности, то говорят, что интеграл расходится.

Замечание

Как и в случае несобственного интеграла по бесконечному промежутку, интеграл от неограниченной функции позволяет определить и вычислить площадь неограниченной области:

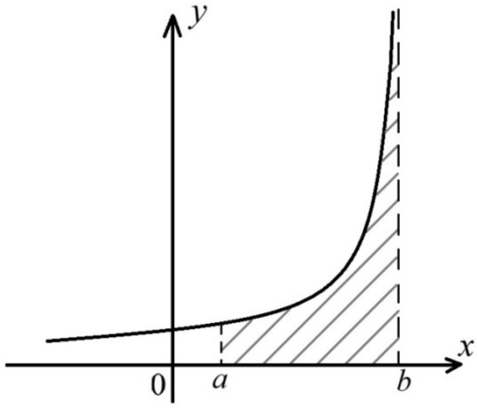


Рис. 14: Интеграл от неограниченной функции. Точка разрыва лежит на границе промежутка интегрирования

Замечание

Можно определять несобственный интеграл по-другому. Этот способ впервые был предложен французским математиком Анри Леоном Лебегом в 1901 году.

Введем ограниченную функцию $f_M(x)$ по правилу:

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & \text{если } f(x) > M, \\ f(x), & \text{если } -M \leqslant f(x) \leqslant M, \\ -M, & \text{если } f(x) < -M. \end{cases}$$

Функция $f_M(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$. Тогда несобственный интеграл в пределах от a до b от неограниченной функции $f(x)$ можно ввести следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int\limits_a^b f_M(x)dx. \tag{4.22}$$

Продемонстриуем на примере, что в случае одной особой точки определения интегралов по Риману и Лебегу эквивалентны друг другу.

Пример

Вычислим интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Найдем интеграл в соответствии с определением Римана:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\eta\to0}\int\limits_{-1}^{0-\eta}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\eta\to0}\Big(\frac{3}{2}\Big((-\eta)^{\frac{2}{3}}-(-1)^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)=-\frac{3}{2}.$$

Теперь воспользуемся определением интеграла по Лебегу. Введем функцию $f_M(x)$ по правилу:

$$f_M(x)=\begin{cases}-M, & \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}<-M,\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & -M\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\leqslant M,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Big/$ Мы рассматриваем функцию $f_M(x)$ на промежутке $[-1,\ 0)$. Определим пределы изменения по x, решив неравенство: $-M\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\leqslant M$. Правое неравенство выполнено автоматически, так как $x\in[-1,\ 0)$. Решим левое неравенство:

$$-M\le\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ \Leftrightarrow\ \Big/\text{так как } x<0\Big/\ \Leftrightarrow\ -M\sqrt[3]{x}\ge1\ \Leftrightarrow\ \sqrt[3]{x}\le-\frac{1}{M}\ \Leftrightarrow\ x\le-\frac{1}{M^3}\Big/$$

$$\Leftrightarrow\ f_M(x)=\begin{cases}-M, & -\dfrac{1}{M^3}<x<0,\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & -1\leqslant x\leqslant-\dfrac{1}{M^3},\end{cases}$$

Тогда:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{M\to\infty}\Big(\int\limits_{-\frac{1}{M^3}}^{0}(-M)dx+\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{M^3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\Big)=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\Big((-M)\frac{1}{M^3}+\frac{3}{2}\Big(\Big(-\frac{1}{M^3}\Big)^{\frac{2}{3}}-\Big(-1\Big)^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)=-\frac{3}{2}.$$

Как видим, результаты совпали.

Определение

Если особая точка – левый конец отрезка $[a,\ b]$, то несобственный интеграл вводится следующим образом:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=\lim_{\eta\to+0}\int\limits_{a+\eta}^{b}f(x)\,dx. \tag{4.23}$$

Если особая точка $c \in (a,\ b)$, то несобственный интеграл по отрезку $[a,\ b]$ вводится как сумма двух несобственных интегралов по отрезкам $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$, причем этот интеграл сходится, если сходятся интегралы по обоим отрезкам и расходится, если расходится хотя бы один из них:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\eta_1 \to +0} \int_a^{c-\eta_1} f(x)\,dx + \lim_{\eta_2 \to +0} \int_{c+\eta_2}^b f(x)\,dx. \tag{4.24}$$

Аналогично в случае, когда на отрезке конечное число особых точек.

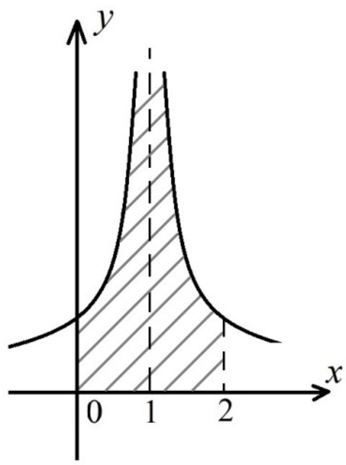


Рис. 15: Интеграл от неограниченной функции. Точка разрыва лежит внутри промежутка интегрирования

Пример

Вычислим эталонный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$.

$$\lambda \neq 1: \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\eta \to 0+} \int_\eta^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\eta \to 0+} \left(\frac{1}{1-\lambda} (1 - \eta^{1-\lambda}) \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda}, & \lambda < 1, \\ +\infty, & \lambda > 1. \end{cases}$$

$$\lambda = 1: \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \to 0+} \int_\eta^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \to 0+} (-\ln \eta) = \infty,$$

то есть интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$.

Использование первообразной при вычислении несобственного интеграла

Если $F(x)$ – первообразная $f(x)$, то имеет место равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0}\Big(F(b-\eta)-F(a)\Big). \tag{4.25}$$

Если первообразная $F(x)$ непрерывна в точке b, то $\lim\limits_{\eta\to 0} F(b-\eta)$ можно найти по непрерывности. Тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{4.26}$$

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций

Признаки сходимости, а также их доказательства аналогичны случаю интеграла по бесконечному промежутку. Приведем их для интеграла от положительной функции, имеющей особенность на правом конце промежутка $[a,\ b]$.

Теорема 14 (Критерий сходимости интеграла от положительной функции)

Если функция $f(x)\geqslant 0$, то для сходимости $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено:

$$\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx \leqslant L \quad \forall\eta>0 \ \ (\text{где } L=const), \tag{4.27}$$

причем константа L не зависит от η (то есть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет ограничен одной константой L для любого η).

Теорема 15 (Признак сравнения)

Пусть $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ при $x\in[a,\ b]$. Тогда:

1) Из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2) Из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Теорема 16 (Предельный признак сравнения)

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ где $0\leqslant K\leqslant\infty$. Тогда:

1. При $0\leq K<\infty$ из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ вытекает сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2. При $0<K\leq\infty$ из расходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3. При $0<K<\infty$ интегралы либо оба сходятся либо оба расходятся, то есть ведут себя одинаково.

Теорема 17 (Теорема о сравнении с эталонным интегралом)

Рассмотрим сходимость интеграла $\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda}dx$, где $a>0$. Тогда:

1. Пусть $\lambda<1$ и при $x\in[a,\ b]$ выполнено:

$0<\varphi(x)\leqslant C<\infty$. Тогда $\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda}dx$ сходится.

2. Пусть $\lambda\geqslant 1$ и при $x\in[a,\ b]$ выполнено:

$\varphi(x)\geqslant C>0$. Тогда $\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda}dx$ расходится.

Теорема 18 (Теорема о сравнении с интегралом от эквивалентной бесконечно большой)

Пусть при $x\to b-0$ функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что: $f(x)\sim\frac{C}{(b-x)^\lambda}$, где $C>0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится при $\lambda<1$ и расходится при $\lambda\geq 1$.

Замечание

Для знакопеременной функции $f(x)$ сохраняется признак абсолютной сходимости.

Теорема 19 (Признак абсолютной сходимости)

Если сходится $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пример

Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = -\lim_{\eta_1 \to +0} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\eta_1} \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \lim_{\eta_2 \to +0} \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\eta_2}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= -\lim_{\eta_1 \to 0} \left(\underbrace{\ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right) \right|}_{\to \infty} - \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| \right) -$$

$$- \lim_{\eta_2 \to 0} \left(\ln \left| \cos \frac{3\pi}{4} \right| - \underbrace{\ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \eta_2\right) \right|}_{\to \infty} \right).$$

Таким образом, интеграл расходится.

Замечание

Если не заметить особую точку $\frac{\pi}{2}$, то получится неверный ответ $\ln \left|\cos \frac{\pi}{4}\right| - \ln \left|\cos \frac{3\pi}{4}\right|$.

4.4 Главные значения несобственных интегралов

Рассмотрим подробно случаи расходимости несобственного интеграла от неограниченной функции в ситуации, когда особая точка c лежит внутри промежутка интегрирования $(a,\, b)$. Напомним определение несобственного интеграла (4.24):

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\eta_1 \to +0} \int\limits_a^{c-\eta_1} f(x)\, dx + \lim_{\eta_2 \to +0} \int\limits_{c+\eta_2}^b f(x)\, dx =$$

$$= \lim_{\eta_1 \to +0, \eta_2 \to +0} \left(\int\limits_a^{c-\eta_1} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\eta_2}^b f(x)\, dx \right). \tag{4.28}$$

где η_1 и η_2 стремятся к 0 независимо друг от друга.

Если двойной предел в формуле (4.28) не существует или равен бесконечности, то можно рассмотреть его частный случай при $\eta_1 = \eta_2 \to 0$.

Если этот предел существует и конечен, то его называют главным значением интеграла:

$$V.p. \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0}\left\{\int\limits_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx\right\}. \tag{4.29}$$

Замечание

V.p. – начальные буквы французских слов "valeur principal", обозначающих "главное значение".

Пример

Исследуем на сходимость следующий интеграл: $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$.

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \lim_{\eta_1\to+0,\eta_2\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\eta_1}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\eta_2}^{2}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\eta_1\to+0,\eta_2\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\eta_1}+\ln|x|\Big|_{\eta_2}^{2}\right) =$$

$$= \lim_{\eta_1\to+0,\eta_2\to+0}(\underbrace{\ln\eta_1}_{\to\infty} - \underbrace{\ln 1}_{=0} + \ln 2 - \underbrace{\ln\eta_2}_{\to\infty}).$$

Интеграл расходится, так как разность двух бесконечно больших $\ln\eta_1$ и $\ln\eta_2$ может принимать любое значение ибо η_1 и η_2 стремятся к нулю независимо друг от друга. Теперь рассмотрим этот интеграл в смысле главного значения.

$$V.p.\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\eta}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\eta}^{2}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\eta\to 0}\Big(\ln\eta+\ln 2-\ln\eta\Big) = \ln 2.$$

4.5 Замена переменной в несобственном интеграле

В несобственном интеграле можно сделать замену переменной. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в конечном или бесконечном промежутке $[a,\ b)$. Тогда $f(x)$ интегрируема в собственном смысле в каждой части этого отрезка, не содержащей точки b, причем может быть, что $b = +\infty$. Мы предполагаем, что точка b является единственной особой точкой для функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь монотонно возрастающую функцию $x = \varphi(t)$, непрерывную вместе со своей производной $\varphi'(t)$ в промежутке $[\alpha,\ \beta)$, где β может быть равна $+\infty$. Пусть также выполнено: $\varphi(\alpha) = a$, и $\varphi(\beta) = b$. Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t) = b$. Тогда имеет место равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \tag{4.30}$$

в предположении, что существует один из этих интегралов (существование другого отсюда следует). Второй интеграл будет либо собственным, либо несобственным – с единственной особой точкой β.

Аналогичное рассуждение применимо в случае, если $a = -\infty$ или оба предела бесконечны, либо в случае монотонно убывающей функции $\varphi(t)$, когда $\alpha > \beta$.

Пример

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{arctg}^2 x d(\operatorname{arctg} x) = \Big/ t = \operatorname{arctg} x \Big/ = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{12}.$$

Как видим, после замены переменной интеграл может перестать быть несобственным.

Глава 5. Интегралы, зависящие от параметра

5.1 Основные понятия

Рассмотрим функцию $f(x,y)$ двух переменных, определенную для всех значений x в некотором промежутке $[a,\ b]$ и всех значений y в множестве $Y = \{y\}$. Пусть, при каждом постоянном значении y из Y, $f(x,y)$ будет интегрируема в промежутке $[a,\ b]$, в собственном или несобственном смысле. Тогда интеграл

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)\, dx \tag{5.1}$$

будет являться функцией от параметра y.

Равномерная сходимость по параметру y

Определение

Пусть функция $f(x,y)$ определена в двумерном множестве $M = X \times Y$, где X и Y означают множества значений, принимаемых порознь переменными x и y. Пусть выполнено:

1) Для функции $f(x,\, y)$ при $y \to y_0$ существует конечная предельная функция

$$\lim_{y \to y_0} f(x,\, y) = \varphi(x), \quad \text{где } x \in X. \tag{5.2}$$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in X:\ |y - y_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x,\, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,$ (5.3)

Тогда говорят, что $f(x,\, y)$ стремится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно относительно x в области X.

Замечание

Здесь первый пункт определяет сходимость, а второй – уточняет эту сходимость, делая ее равномерной (то есть для любого ε найдется δ, подходящее для всех x сразу).

Предельный переход под знаком интеграла

Рассмотрим интеграл (5.1), зависящий от параметра y. Будем считать промежуток $[a,\ b]$ конечным, а функцию – интегрируемой в собственном смысле. Поставим вопрос о пределе функции (5.1) при $y \to y_0$.

Теорема 1 (Предельный переход под знаком интеграла)
Если функция $f(x,\ y)$ при постоянном y интегрируема по x в $[a,\ b]$ и при $y \to y_0$ стремится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно относительно x, то имеет место равенство:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,\ y)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx. \qquad (5.4)$$

Доказательство:
Заметим, что если $f(x,\ y)$ интегрируема по x при любом значении y, то равномерный предел будет интегрируемой функцией. Здесь мы этот факт доказывать не будем.

Так как $f(x,y) \to \varphi(x)$ при $y \to y_0$, то выполнено:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \forall x:\ \ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,\ y) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Тогда при $|y - y_0| < \delta$ можно оценить по модулю разность интегралов:

$$\left|\int\limits_a^b f(x,\ y)dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b [f(x,\ y) - \varphi(x)]dx\right| \le \int\limits_a^b \Big|f(x,\ y) - \varphi(x)\Big|dx <$$

$$\Big/ |f(x,\ y) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \text{ при } \ |y - y_0| < \delta \Big/$$

$$< \varepsilon(b - a), \text{ что и доказывает формулу (5.4).}$$

■

Формула (5.4) может быть переписана в виде:

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,\ y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,\ y)dx. \qquad (5.5)$$

Теорема 2 (Непрерывность интеграла от непрерывной функции)

Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна, как функция двух переменных, в прямоугольнике $[a,\ b] \times [c,\ d]$, то интеграл (5.1) будет непрерывной функцией от параметра y в промежутке $[c,\ d]$.

Доказательство:

По условию теоремы функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике, то есть на замкнутом ограниченном множестве. Следовательно, для нее будет выполнен многомерный аналог теоремы Кантора, а именно: из непрерывности функции $f(x, y)$ будет следовать ее равномерная непрерывность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенств

$$|x'' - x'| < \delta, \qquad |y'' - y'| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Положим $x'' = x' = x,\ y' = y_0,\ y'' = y$. Тогда при $|y - y_0| < \delta$, вне зависимости от x, будем иметь:

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, функция $f(x, y)$, при стремлении y к любому частному значению y_0, стремится к $f(x, y_0)$ равномерно относительно x. Тогда по теореме 1 будет выполнено:

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,\ y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,\ y)dx = \int\limits_a^b f(x,\ y_0)dx$$

или

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0),$$

что и доказывает наше утверждение.

■

Пример

Так, например, не вычисляя интегралов

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx, \qquad \int_0^1 \ln(x^2+y^2)dx,$$

сразу видим, что они представляют собой непрерывные функции от параметра y для любого y из конечного отрезка положительной полуоси. Точку $y=0$ в отрезок включать нельзя, так как подынтегральные функции теряют там непрерывность.

5.2 Дифференцирование под знаком интеграла

При изучении свойств функции (5.1), которая задана интегралом, содержащим параметр y, важное значение имеет вопрос производной этой функции по параметру.

В предположении существования частной производной $f'_y(x,y)$ (то есть производной функции $f(x,y)$ по переменной y при условии, что x считается постоянной), Лейбниц дал для вычисления производной $I'(y)$ правило:

$$I'(y) = \Big(\int_a^b f(x,\,y)dx\Big)'_y = \int_a^b f'_y(x,\,y)dx. \tag{5.6}$$

Если такое внесение производной под знак интеграла возможно, то говорят, что функцию (5.1) можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла. Следующая теорема устанавливает достаточные условия для применимости этого правила.

Теорема 3 (Правило Лейбница)

Пусть $f(x,\,y)$ определенная в прямоугольнике $[a,\,b]\times[c,\,d]$, будет непрерывна по x в $[a,\,b]$ при любом постоянном y в $[c,\,d]$. Пусть также во всей области существует частная производная $f'_y(x,\,y)$, непрерывная как функция двух переменных. Тогда при любом $y\in[c,\,d]$ имеет место формула (5.6):

$$I'(y) = \Big(\int\limits_a^b f(x,\, y)dx\Big)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x,\, y)dx. \tag{5.7}$$

<u>Доказательство:</u>

По условию теоремы функция $f'_y(x,\, y)$ непрерывна. Следовательно, функция $f(x,\, y)$ непрерывна, а значит интеграл $\int\limits_a^b f(x,\, y)dx$ существует.

Зафиксируем любое значение $y = y_0$ и придадим ему приращение $\Delta y = h$. Тогда:

$$I(y_0) = \int\limits_a^b f(x,\, y_0)dx, \qquad I(y_0+h) = \int\limits_a^b f(x, y_0+h)dx.$$

Следовательно,

$$\frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h} = \int\limits_a^b \frac{f(x,\ y_0+h) - f(x,\ y_0)}{h}dx. \tag{5.8}$$

Интеграл справа зависит от параметра h. Докажем, что при $h \to 0$ допустим предельный переход под знаком интеграла. Тем самым, мы установим существование производной

$$I'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h}, \tag{5.9}$$

и наличие требуемого равенства

$$I'(y_0) = \lim_{h\to 0}\int\limits_a^b \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h}dx =$$

$$= \int\limits_a^b \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h}dx = \int\limits_a^b f'_y(x,\, y_0)dx. \tag{5.10}$$

С этой целью по формуле Лагранжа напишем:

$$\frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h} = f'_y(x, y_0+\theta h), \quad 0 < \theta < 1. \tag{5.11}$$

Так как функция $f'_y(x,\, y)$ непрерывна как функция двух переменных, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ что при

$$|x'' - x'| < \delta \ \text{ и } \ |y'' - y'| < \delta$$

будет выполняться неравенство:

$$|f'_y(x'',\, y'') - f'_y(x',\, y')| < \varepsilon.$$

Полагая здесь $x' = x'' = x, \quad y' = y_0, \quad y'' = y_0 + \theta h$ и считая $|h| < \delta$, получим, с учетом формулы (5.11), что для всех x будет выполнено:

$$\Big|\underbrace{\frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}}_{=f'_y(x, y_0+\theta h)} - f'_y(x, y_0)\Big| < \varepsilon. \tag{5.12}$$

Отсюда ясно, что подынтегральная функция (5.11) при $h \to 0$ равномерно (относительно x) стремится к предельной функции $f'_y(x, y_0)$. Тогда, согласно теореме 1, можно делать предельный переход под знаком интеграла (5.8).

■

Случай, когда пределы интеграла зависят от параметра

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда не только подынтегральное выражение содержит параметр, но и сами пределы зависят от него. В этом случае интеграл имеет вид:

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\, y)dx. \tag{5.13}$$

Теорема 4 (Непрерывность интеграла по параметру)

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a,\ b] \times [c,\ d]$, а кривые

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y), \qquad \text{где } c \le y \le d,$$

непрерывны и не выходят за его пределы. Тогда интеграл (5.13) представляет собой непрерывную функцию от y в $[c,\ d]$.

Доказательство теоремы будет приведено позже в разделе "Функции нескольких переменных".

Теорема 5 (Дифференцирование интеграла по параметру) Если, сверх сказанного в теореме 4, функция $f(x, y)$ имеет в прямоугольнике $[a,\ b] \times [c,\ d]$ непрерывную производную, а также существуют производные $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$, то интеграл (5.13) можно продифференировать по параметру:

$$I'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,\, y)dx + f(\beta(y),\, y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y),\, y) \cdot \alpha'(y). \qquad (5.14)$$

Доказательство теоремы будет приведено позже в разделе "Функции нескольких переменных".

5.3 Интегрирование под знаком интеграла

Попробуем найти интеграл по y от функции (5.1) в промежутке $[c,\ d]$. Нас будет интересовать случай, когда этот интеграл выразится формулой:

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx,$$

которую обычно записывают в следующем виде:

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (5.15)$$

В этом случае говорят, что функцию (5.1) можно интегрировать по параметру y под знаком интеграла. Простейшие условия, достаточные для равенства двух повторных интегралов (5.15), дает следующая теорема:

Теорема 6 (Интегрирование под знаком интеграла)
Если функция $f(x,\, y)$ непрерывна по обеим переменным в прямоугольнике $[a,\ b] \times [c,\ d]$, то имеет место формула (5.15).
Доказательство:
Докажем более общее равенство:

$$\int\limits_c^\eta dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\eta f(x,y)dy, \qquad \text{где } c \le \eta \le d. \tag{5.16}$$

В левой и правой его частях мы имеем две функции от параметра η. Вычислим их производные по η.

Внешний интеграл в левой части имеет подынтегральную функцию (5.1), непрерывную по y в силу теоремы 2. Следовательно, этот интеграл можно дифференцировать по теореме Барроу и его производная по переменному верхнему пределу будет равна подынтегральной функции, вычисленной при $y = \eta$, то есть интегралу

$$I(\eta) = \int\limits_a^b f(x,\eta)dx. \tag{5.17}$$

В правой части (5.16) стоит интеграл

$$\int\limits_a^b \varphi(x,\eta)dx, \quad \text{где } \varphi(x,\eta) = \int\limits_c^\eta f(x,y)dy.$$

Функция $\varphi(x,\eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 (правило Лейбница). Действительно, функция $\varphi(x,\eta)$ непрерывна по x, в силу теоремы 2. Тогда к $\varphi(x,\eta)$ можно применить теорему Барроу и продифференцировать ее по верхнему пределу:

$$\varphi'_\eta(x,\eta) = f(x,\eta).$$

Мы получили функцию $f(x,\eta)$, которая непрерывна как функция двух переменных. Таким образом, мы доказали, что функция $\varphi(x,\eta)$ непрерывно дифференцируема в прямоугольнике $[a,\ b]\times[c,\ d]$ и к ней применимо правило Лейбница:

$$\left(\int\limits_a^b \varphi(x,\eta)dx\right)'_\eta = \int\limits_a^b \varphi'_\eta(x,\eta)dx = \int\limits_a^b f(x,\eta)dx = I(\eta).$$

Мы получили, что левая и правая части равенства (5.16), как функции от η, имеют равные производные, а значит могут отличаться лишь на константу. Но при $\eta = c$ оба упомянутых выражения из формулы (5.16) обращаются в нуль. Следовательно они тождественны при всех значениях η и равенство (5.16) доказано.

В частности, при $\eta = d$ из (5.16) мы получим равенство (5.15).

■

Пример

Пусть $f(x,y) = x^y$ в прямоугольнике $[0,\ 1]\times[a,\ b]$, где $0 < a < b$. Условия теоремы 4 соблюдены. Тогда:

$$\int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy.$$

Слева легко получается окончательный результат:

$$\int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y dx = \int\limits_a^b dy \cdot \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln|y+1|\Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}. \quad (5.18)$$

Справа же мы приходим к интегралу, который не берется в элементарных функциях:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_0^1 dx \cdot \frac{x^y}{\ln x}\Big|_a^b = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx. \quad (5.19)$$

Сравнивая формулы (5.18) и (5.19), получаем выражение для интеграла:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \ln\frac{b+1}{a+1}. \quad (5.20)$$

Отметим, что вычисление данного интеграла стало возможным благодаря перестановке интегралов.

5.4 Эйлеров интеграл 1 рода (Бета-функция Эйлера)

Определение

Эйлеровым интегралом 1 рода (бета-функцией Эйлера) называется интеграл вида

$$B(a,\, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a > 0, \\ b > 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

Он представляет собой функцию двух переменных a и b, где a и b – параметры интеграла.

Теорема 7 (Область определения бета-функции)

Интеграл (5.21) сходится при $a > 0$, $b > 0$ и расходится при $a \leqslant 0$ или $b \leqslant 0$.

Доказательство:

Данный несобственный интеграл имеет особые точки на концах промежутка $[0,\ 1]$.

1. Рассмотрим особенность на правом конце промежутка, в точке 1. Ясно, что при $x \to 1$ выполнено:

$$\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1-x)^{b-1}} = x^{a-1} \to 1,$$

то есть $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ и $(1-x)^{b-1}$ есть эквивалентные бесконечно большие при $x \to 1$.

Согласно теореме 18 (глава 4), если при $x \to 1-0$ подынтегральная функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что $f(x) \sim \frac{C}{(1-x)^\lambda}$, $C > 0$, то интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$. В нашем случае $\lambda = 1-b$, то есть ннтеграл сходится при $1-b < 1 \ \Leftrightarrow\ b > 0$ и расходится при $1-b \geq 1 \ \Leftrightarrow\ b \leq 0$.

2. Теперь рассмотрим особенность на левом конце промежутка, в точке 0. Очевидно, что $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \sim x^{a-1}$ при $x \to 0$.

Аналогично теореме 18 (глава 4), если при $x \to +0$ подынтегральная функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что $f(x) \sim \frac{C}{x^\lambda}$, $C > 0$, то интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$. В нашем случае $\lambda = 1 - a$, то есть ннтеграл сходится при $1 - a < 1 \;\Leftrightarrow\; a > 0$ и расходится при $1 - a \geq 1 \;\Leftrightarrow\; a \leq 0$. Выводы о сходимости из пунктов 1 и 2 доказывают теорему.

$\blacksquare$

Свойства бета-функции Эйлера

1) $B(a,\, b) = B(b,\, a)$ (Симметричность)

Доказательство:

$$B(a,\, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \Bigg/ \begin{matrix} \text{Замена: } t = 1 - x \\ dt = -dx \end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= -\int\limits_1^0 (1-t)^{a-1} t^{b-1}\,dt = \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}\,dt = B(b,\, a).$$

$\blacksquare$

Формулы приведения:

2.1) $B(a,\, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a,\, b-1)$,

2.2) $B(a,\, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1,\, b)$.

Доказательство:

В силу первого свойства достаточно доказать только первое соотношение.

$$B(a,\, b) = \int\limits_0^1 (1-x)^{b-1}\, x^{a-1} dx =$$

$$\Bigg/ u = (1-x)^{b-1}; \quad dv = x^{a-1}dx; \quad du = -(b-1)(1-x)^{b-2}dx; \quad v = \frac{x^a}{a} \Bigg/$$

$$= \underbrace{\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\Bigg|_0^1}_{=0} + \frac{b-1}{a} \int\limits_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx =$$

$$\Bigg/ \text{Воспользуемся тождеством: } \; x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x) \Bigg/$$

$$= \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}B(a,\, b-1) - \frac{b-1}{a}B(a,\, b).$$

Из последнего соотношения выразим $B(a,\, b)$, решив уравнение:

$$B(a,\, b)\left(1+\frac{b-1}{a}\right) = \frac{b-1}{a}B(a,\, b-1) \;\Rightarrow\; B(a,\, b) = \frac{b-1}{a+b-1}\,B(a,\, b-1).$$

■

Следствие 1

Если $b = n$ – целое число, то:

$$B(a,\, n) = B(n,\, a) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}. \tag{5.22}$$

Доказательство:

Применяя $(n-1)$ раз второе свойство, получим:

$$B(a,\, n) = \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\cdot B(a,\, 1).$$

$B(a,\, 1)$ нетрудно найти:

$$B(a,\, 1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \left.\frac{x^a}{a}\right|_0^1 = \frac{1}{a}.$$

Подставляя $B(a,\, 1)$ в предыдущую формулу, получаем требуемое равенство.

■

Следствие 2

Если $\begin{cases} a = m, \\ b = n, \end{cases}$ – целые числа, то:

$$B(m,\, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{5.23}$$

Доказательство:

Если в формулу (5.22) подставить $a = m$ (целое число), то знаменатель можно представить в виде отношения факториалов:

$$m(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n-1) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}. \qquad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в формулу (5.22), получаем требуемое соотношение.

■

3) $B(a,\, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \qquad 0 < a < 1.$

Доказательство:

Данное соотношение обычно доказывают при помощи разложения функции в ряд. Поэтому мы на данном этапе оставим его без доказательства.

5.5 Эйлеров интеграл 2 рода (Гамма-функция Эйлера)

Определение

Эйлеровым интегралом 2 рода (гамма-функцией Эйлера) называется интеграл вида

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \qquad a > 0. \qquad (5.25)$$

Теорема 8 (Область определения гамма-функции)

Интеграл (5.25) сходится при $a > 0$ и расходится при $a \leqslant 0$.

Доказательство:

$\Gamma(a)$ представляет собой несобственный интеграл как первого, так и второго рода по полуоси $[0,\ \infty)$ с особой точкой в нуле. Разобъем его на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \int\limits_0^A x^{a-1}e^{-x}dx + \int\limits_A^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \quad \text{где } A > 0.$$

1. Рассмотрим сходимость первого интеграла с особенностью в точке 0.

Ясно, что при $x \to 0$ выполнено:

$$\frac{x^{a-1}e^{-x}}{x^{a-1}} = e^{-x} \to 1,$$

то есть $x^{a-1}e^{-x}$ и x^{a-1} есть эквивалентные бесконечно большие при $x \to 0$.

Согласно теореме 18 (глава 4), если при $x \to +0$ подынтегральная функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что $f(x) \sim \frac{C}{x^\lambda}$, $C > 0$, то интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$. В нашем случае $\lambda = 1-a$, то есть ннтеграл сходится при $1-a < 1 \;\Leftrightarrow\; a > 0$ и расходится при $1 - a \geq 1 \;\Leftrightarrow\; a \leq 0$.

2. Рассмотрим сходимость второго интеграла на бесконечности. Здесь мы воспользуемся теоремой 8 (глава 4). Напомним первый пункт этой теоремы.

Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, где $0 \leq K < \infty$, то из сходимости $\int\limits_A^\infty g(x)dx$ вытекает сходимость $\int\limits_A^\infty f(x)\,dx$. Пусть $A > 0$, $f(x) = x^{a-1}e^{-x}$, $g(x) = x^{-2}$. Тогда:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{a-1}e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = \Big/\text{по правилу Лопиталя}\Big/ = 0.$$

$$\int\limits_A^\infty g(x)dx = \int\limits_A^\infty x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_A^\infty = \frac{1}{A},$$

то есть интеграл сходится. Следовательно, по теореме 18 будет сходиться и интеграл $\int\limits_A^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ (при любом a).

Выводы о сходимости из пунктов 1 и 2 доказывают теорему.

■

Свойства гамма-функции Эйлера

1) Дифференцируемость гамма-функции.

Гамма-функция при всех значениях $a > 0$ непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков.

Доказательство:

Докажем существование производных. Дифференцируя интеграл (5.25) под знаком интеграла, получим:

$$\Gamma'(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx. \tag{5.26}$$

Применение правила Лейбница о внесении производной под знак интеграла оправдано тем, что оба интеграла

$$\int\limits_0^1 x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx \quad \text{и} \quad \int\limits_1^\infty x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx$$

сходятся равномерно относительно a. Первый интеграл имеет особенность в точке 0. Его равномерная сходимость обеспечивается тем, что при $a \geq a_0 > 0$ подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту $x^{a_0-1}|\ln x|$. Второй интеграл на бесконечности сходится равномерно, так как при $a \leq A < \infty$ у подынтегральной функции есть интегрируемая мажоранта $x^A e^{-x}$. Здесь мы воспользовались теоремами из теории интегралов, зависящих от параметров, а именно: правилом Лейбница и признаками равномерной сходимости для несобственных интегралов. Более подробно этот вопрос рссмотрен в книге [6] (глава 14, параграф 2).

Таким же путем можно убедиться в существовании второй производной

$$\Gamma''(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} (\ln x)^2 \cdot e^{-x} dx \tag{5.27}$$

и всех дальнейших. Формула для k-ой производной будет иметь вид:

$$\Gamma^{(k)}(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} (\ln x)^k \cdot e^{-x} dx. \tag{5.28}$$

Показав существование производной от гамма-функции любого порядка, мы тем самым доказали и непрерывность этих производных.

■

2) Формула приведения.

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a). \tag{5.29}$$

<u>Доказательство:</u>

$$a\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty a x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = \underbrace{e^{-x} \cdot x^a \Big|_0^\infty}_{=0} + \int\limits_0^\infty x^a e^{-x} dx = \Gamma(a+1).$$

$$\Big/ u = e^{-x}; \quad dv = a x^{a-1} dx; \quad du = -e^{-x} dx; \quad v = x^a \Big/$$

■

Следствие 1

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\,(a+n-2) \cdot \ldots \cdot (a+1)a \cdot \Gamma(a), \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}. \tag{5.30}$$

то есть вычисление $\Gamma(a+n)$ можно свести к вычислению $\Gamma(a)$, где $a \leqslant 1$.

Следствие 2

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}. \tag{5.31}$$

<u>Доказательство:</u>

По первому следствию: $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1)$.

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

■

Замечание

Гамма-функция $\Gamma(a)$ является обобщением факториала на нецелые значения аргумента. В целых точках гамма-функция совпадает с факториалом (по второму следствию).

3) Связь бета и гамма-функций.

$$B(a,\,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{5.32}$$

Доказательство:

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \Big/ \text{Замена: } x = ty, \ \text{ параметр } t > 0 \Big/ = t^a \int\limits_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy.$$

Получили соотношение:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int\limits_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy. \tag{5.33}$$

Заменим в формуле (5.33) параметр a на $a+b$ и t на $1+t$:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy. \tag{5.34}$$

Домножим равенство (5.34) на t^{a-1} и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = \int\limits_0^\infty dt \cdot t^{a-1}\int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy =$$

/ Переставим местами порядок интегрирования. Возможность такой перестановки мы здесь обосновывать не будем /

$$= \int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy\int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt =$$

$$\Big/ \text{Согласно формуле (5.33): } \int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt = \frac{\Gamma(a)}{y^a} \Big/$$

$$= \int\limits_0^\infty y^{a+b-1}\cdot e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy = \Gamma(a)\underbrace{\int\limits_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy}_{\Gamma(b)} = \Gamma(a)\cdot\Gamma(b). \tag{5.35}$$

С другой стороны:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt =$$

$$\Big/ \text{Замена: } z = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow 1+t = \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow t = 1 - \frac{1}{1-z}; \quad dt = \frac{dz}{(1-z)^2} \Big/$$

$$= \Gamma(a+b) \int\limits_0^1 z^{a-1} \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)^{-b-1} \cdot \frac{dz}{(1-z)^2} = \Gamma(a+b) \underbrace{\int\limits_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz}_{B(a,b)} =$$

$$= \Gamma(a+b) \cdot B(a,\, b). \tag{5.36}$$

Сравнивая формулы (5.35) и (5.36), получаем:

$$B(a,\, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

■

4) Формула дополнения.

При $0 < a < 1$ выполнено:

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}. \tag{5.37}$$

Доказательство:

В формулу $B(a,\, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ подставим $b = 1 - a$ и воспользуемся свойством: $B(a,\, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$:

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Big/ \Gamma(1) = 1 \Big/ = \Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a).$$

■

Замечание

Свойство 4 можно использовать для определения гамма-функции $\Gamma(a)$ при отрицательных значениях a. Если $a < 0$, то $1 - a > 0$ и $\Gamma(1-a)$ определено. Тогда мы можем определить $\Gamma(a)$ по правилу:

$$\Gamma(a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)\Gamma(1-a)}. \tag{5.38}$$

Здесь $a \notin \mathbb{Z}$, так как в целых точках знаменатель обращается в ноль. Заметим, что $\Gamma(1-a)$ в ноль не обращается, так как это интеграл от положительной функции:

$$\Gamma(1-a)=\int\limits_0^\infty x^{-a}\cdot e^{-x}dx>0.$$

Следствие 1

Формула (5.37) при $a=\frac{1}{2}$ примет вид:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\ \Rightarrow\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{5.39}$$

При извлечении корня выбрали знак "+", так как гамма-функция положительна (ибо это интеграл от положительной функции).

Следствие 2

Пользуясь формулами приведения (5.30), можно вычислять значения гамма-функции во всех полуцелых точках:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{5.40}$$

Следствие 3

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad \text{– интеграл Пуассона.} \tag{5.41}$$

Доказательство:

$$\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\Big/\text{Замена: } x=z^2;\ \ dx=2zdz\Big/=2\int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz.$$

■

Пример 1

Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta$. Сделаем замену переменной:

$$x=\sin\theta\ \Rightarrow\ \cos\theta=(1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}};\quad dx=\cos\theta d\theta.$$

Тогда интеграл примет вид:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta=\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dx=$$

$$\Big/ \text{Замена: } x = y^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{2y^{\frac{1}{2}}} \Big/$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{1}{4}}dy = \Big/ B(a,\,b) = \int\limits_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2}B\Big(\frac{5}{4},\,\frac{3}{4}\Big) = \Big/ \text{формула (5.32)} \Big/ = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} =$$

$\Big/$ По формуле приведения $\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a)$ вычислим $\Gamma(2)$ и $\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)$:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1,$$

$$\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{4}+1\Big) = \frac{1}{4}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) \qquad \Big/$$

$$= \frac{1}{8}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big) = \Bigg/ \begin{array}{c} \text{Формула дополнения: } \Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)} \\ \Gamma\Big(\dfrac{1}{4}\Big)\cdot\Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big) = \Gamma\Big(\dfrac{1}{4}\Big)\cdot\Gamma\Big(1-\dfrac{1}{4}\Big) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2} \end{array} \Bigg/ =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Пример 2

Вычислим интеграл $I(a)$, зависящий от параметра:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cdot\cos 2ax\,dx.$$

Найдем производную от интеграла $I(a)$ по параметру a. Мы можем внести производную под знак интеграла по правилу Лейбница, так как интеграл от производной сходится (в силу экспоненциального убывания подынтегральной функции на бесконечности).

$$\frac{dI}{da} = -\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cdot 2x\sin 2ax\,dx =$$

$$\Big/ \begin{aligned} u &= \sin 2ax; \quad du = 2a\cos 2ax\,dx \\ v &= e^{-x^2}; \quad dv = -e^{-x^2}\cdot 2xdx \end{aligned} \Big/$$

$$= \underbrace{e^{-x^2}\cdot \sin 2ax\Big|_0^{\infty}}_{=0} - 2a\underbrace{\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2ax\,dx}_{I(a)} = -2aI(a)$$

Таким образом, производная от интеграла $I(a)$ выразилась через сам интеграл. Решим уравнение относительно $I(a)$:

$$\frac{dI}{da} = -2aI \;\Leftrightarrow\; \frac{dI}{I} = -2a\,da$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим:

$$\left.\begin{aligned} \ln|I| = -a^2 + C_1 \Leftrightarrow I = C\cdot e^{-a^2} \\ \text{При}\, a = 0 : I(0) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

Пример 3

Вычислим следующий интеграл, зависящий от параметра:

$$I(x) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t(x+1)}}{t}\,dt, \quad \text{где параметр } x > -1.$$

Условие $x > -1$ необходимо для сходимости интеграла (чтобы $e^{-t(x+1)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$). Заметим, что при $t \to 0$ подынтегральная функция особенности не имеет:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t} - e^{-t(x+1)}}{t} = \Big/\text{по правилу Лопиталя}\Big/ = \lim_{t\to 0}\frac{-e^{-t} + (x+1)e^{-t(x+1)}}{1} = x$$

– конечное число, то есть особенности в нуле нет.

Найдем производную от интеграла $I(x)$ по параметру x. Мы можем внести производную под знак интеграла по правилу Лейбница, так как интеграл от производной сходится (в силу экспоненциального убывания подынтегральной функции на бесконечности).

$$I'(x) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cancel{t}\cdot e^{-t(x+1)}}{\cancel{t}}\,dt = -\frac{1}{x+1}e^{-t(x+1)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$I(x) = \int \frac{dx}{x+1} = \Big/ x > -1 \Big/ = \ln(x+1) + C.$$

При $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} I(0) &= \ln 1 + C = C \\ I(0) &= \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-t}}{t} dt = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 0.$$

Итак, $I(x) = \ln(x+1)$.

Список литературы

[1] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. Москва: “Интеграл-Пресс”, 2006, 416 с.

[2] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 2. Москва: “Интеграл-Пресс”, 2006, 544 с.

[3] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 1. 24-е изд. Санкт-Петербург: “БХВ-Петербург”, 2008, 624 с.

[4] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 2. 24-е изд. Санкт-Петербург: “БХВ-Петербург”, 2008, 848 с.

[5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. 13-е изд., стер. Санкт-Петербург: “Лань”, 2021, 608 с.

[6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. 15-е изд., стер. Санкт-Петербург: “Лань”, 2021, 800 с.