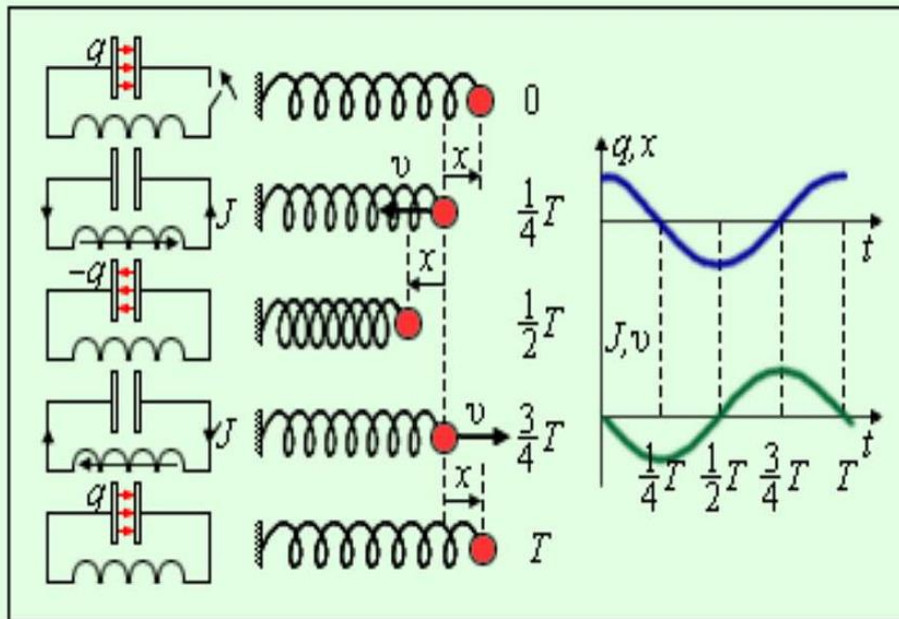
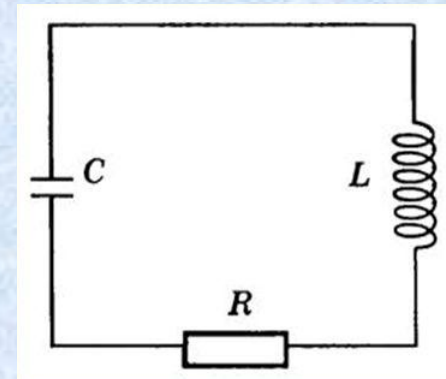


Электрические колебания

Электрический колебательный контур

Условие квазистационарности $l/c \ll T$



Колебательный контур

$$U_C + U_R = \mathcal{E}_{\text{si}}$$

$$U_C = \frac{q}{C} \quad U_R = RI = R \frac{dq}{dt} \quad \mathcal{E}_{\text{si}} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

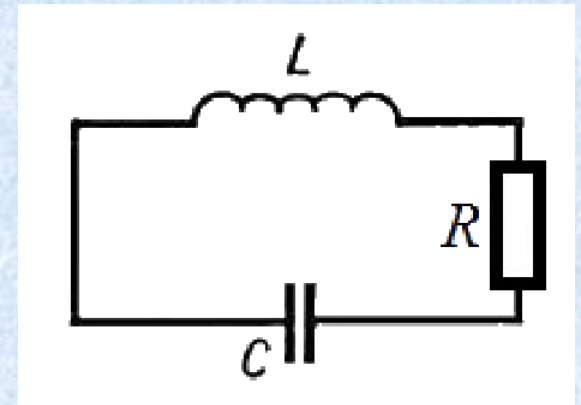
Уравнение затухающих колебаний

$$2\beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Формула Томсона



Затухающие колебания

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

Характеристическое
уравнение

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\beta < \omega_0$$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} \right)$$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t + \varphi_0$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

частота затухающих колебаний

Формулы Эйлера

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

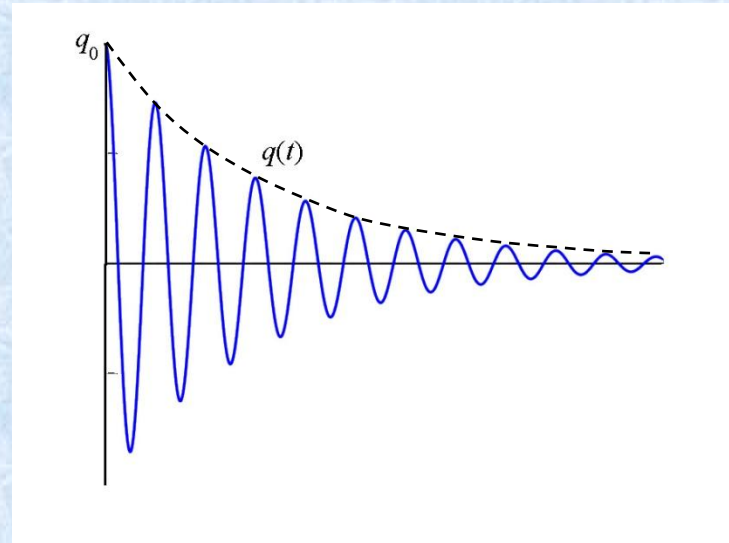
$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

Напряжение в контуре

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega t + \varphi_0$$

$$U = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos \omega t + \varphi_0$$

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$



Ток в контуре

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega t + \varphi_0$$

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\beta t} \left[-\beta \cos \omega t + \varphi_0 - \omega \sin \omega t + \varphi_0 \right]$$

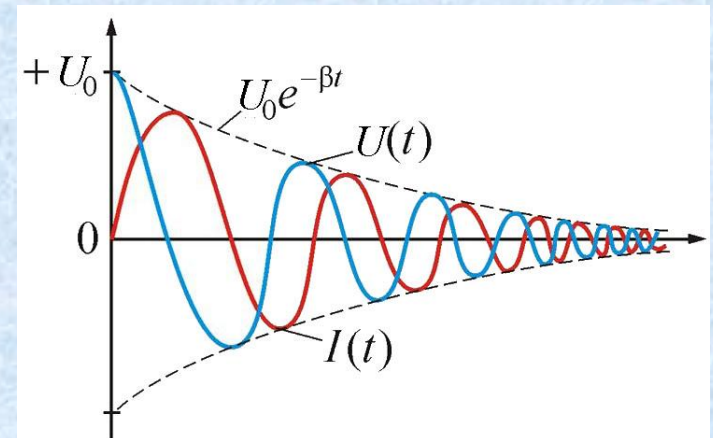
$$\cos \omega t + \varphi_0 + \delta$$

δ – сдвиг фаз между напряжением и током

$$\cos \delta = \frac{\beta}{\omega_0} \quad \sin \delta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Если $R = 0$, то $\delta = \pi/2$

При наличии активного сопротивления ток опережает напряжение по фазе более, чем на $\pi/2$



Параметры затухающих колебаний

Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

Логарифмический декремент затухания

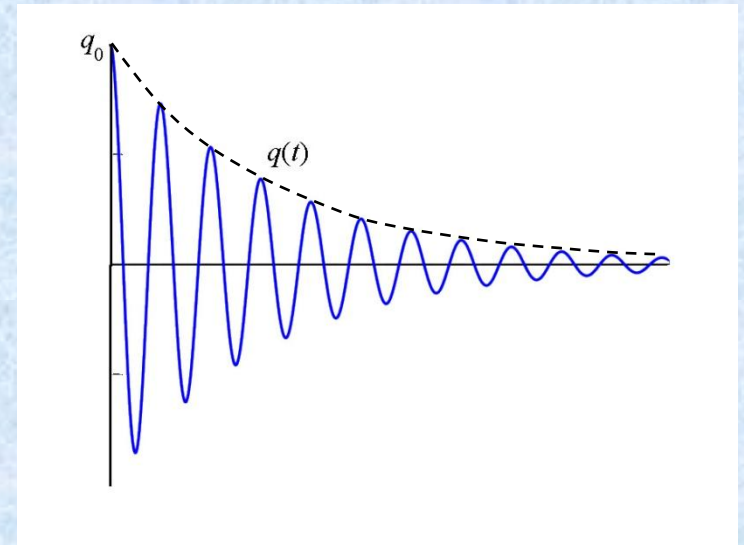
$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

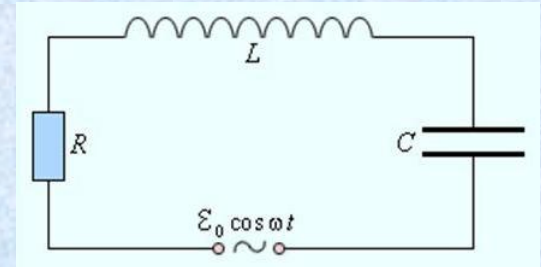
Критическое сопротивление

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Вынужденные э/м колебания

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t$$



$$q = q_0 \cos \omega t - \psi$$

ψ – разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

$$I = -\omega q_0 \sin \omega t - \psi = I_0 \cos \omega t - \psi + \pi/2$$

$\delta = \psi - \pi/2$ – сдвиг фаз между током и внешней ЭДС

Вынужденные э/м колебания

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

Red circles highlight the terms $L \frac{d^2 q}{dt^2}$, $R \frac{dq}{dt}$, and $\frac{q}{C}$. Red arrows point from these terms to the corresponding voltage equations below.

$$U_C = \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t - \psi = \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t - \delta - \pi/2$$
$$U_R = RI_0 \cos \omega t - \delta$$

$$U_L = -\omega LI_0 \sin \omega t - \delta = \omega LI_0 \cos \omega t - \delta + \pi/2$$

U_R находится в фазе с током,
 U_C отстает от тока на $\pi/2$,
 U_L опережает ток на $\pi/2$

Векторная диаграмма

Полное сопротивление
(импеданс)

$$Z = R + iX = R + i X_L - X_C$$

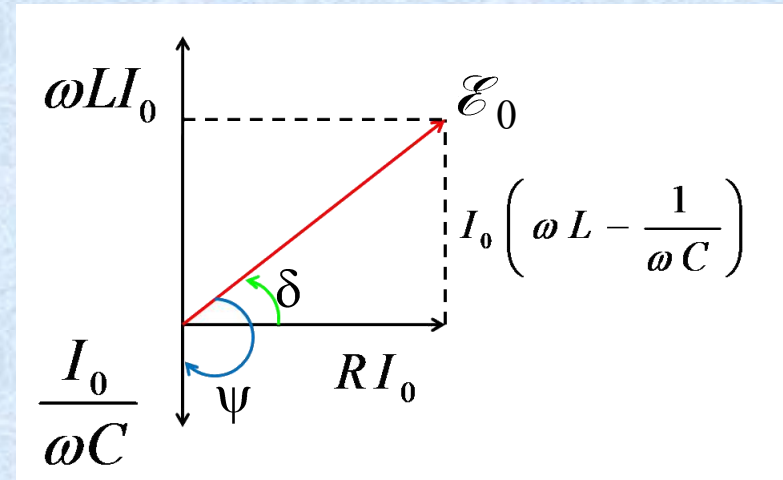
Активное
сопротивление

Реактивное
индуктивное
сопротивление

$$X_L = \omega L$$

Реактивное
емкостное
сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$



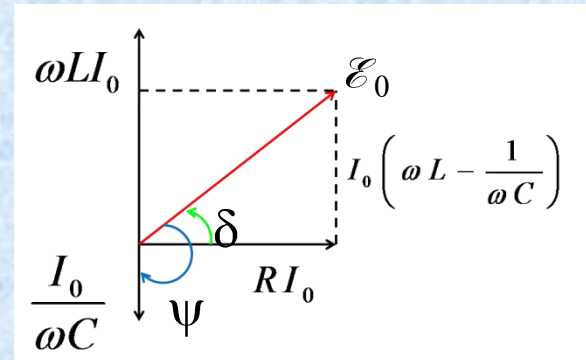
$X > 0$ – элемент проявляет
свойства индуктивности

$X < 0$ – элемент проявляет
емкостные свойства

Резонанс

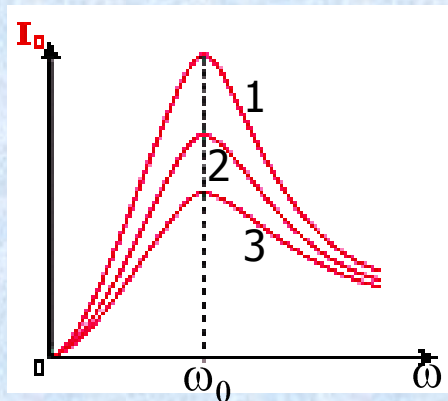
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$|Z|$

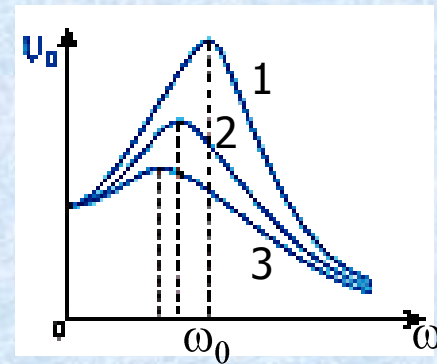


$$\omega_{I_{\text{рез}}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

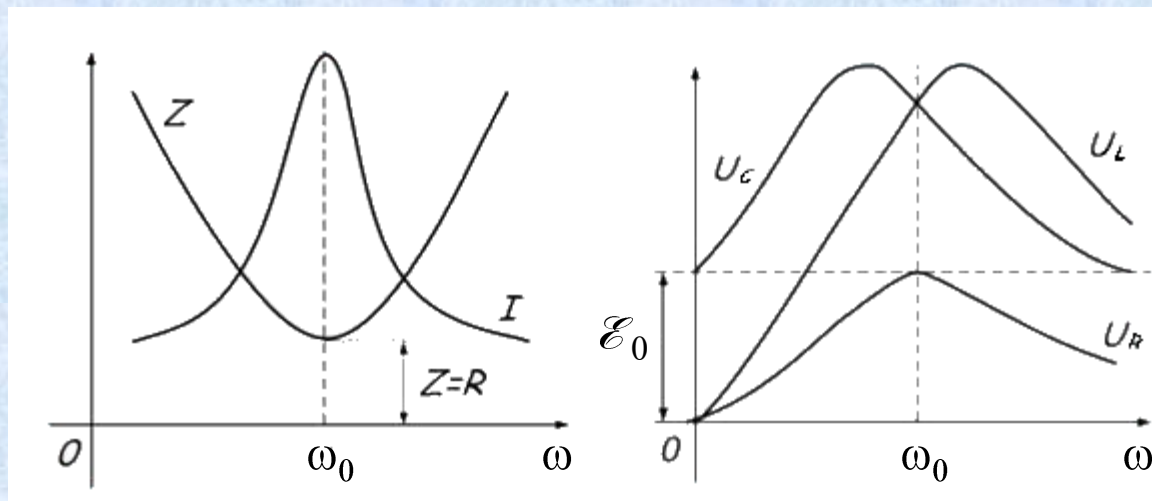
$$q_0 = \frac{I_0}{\omega} \Rightarrow \omega_{q_{\text{рез}}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



$$R_1 < R_2 < R_3$$



Резонанс



Добротность и резонанс

При малом затухании ($\beta \ll \omega_0$, $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega L - 1/\omega C}^2} \Rightarrow I_{0\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad U_{C\text{рез}} = \frac{I_{0\text{рез}}}{\omega C} = \frac{\mathcal{E}}{\omega RC}$$

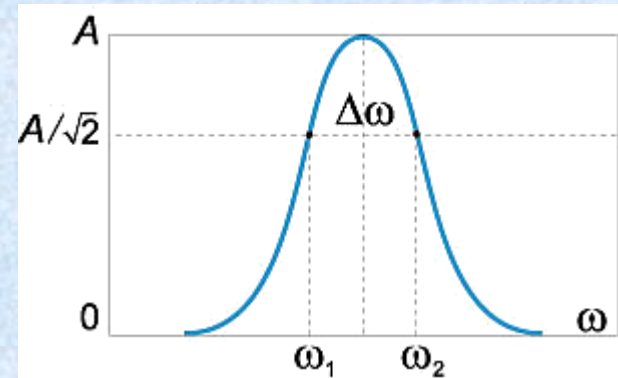
$$\frac{U_{C\text{рез}}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q$$

$$Q = \frac{U_{C\text{рез}}}{\mathcal{E}}$$

Добротность показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе (и на индуктивности) при резонансе превышает амплитуду внешней ЭДС

Добротность и резонанс

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega L - 1/\omega C}^2}$$



$$\omega L - 1/\omega C = R \qquad \omega^2 LC - 1 = R\omega C$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = R \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} + 1 \right) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Добротность показывает, во сколько раз ширина резонансной кривой меньше собственной частоты контура

Переменный ток

$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$I = I_0 \cos \omega t - \varphi$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega L - 1/\omega C}^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$P(t) = UI = U_0 I_0 \cos \omega t \cos \omega t - \varphi$$

$$P(t) = U_0 I_0 \cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$$

Переменный ток

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$$

$$U_0 \cos \varphi = R I_0$$

$$P(t) = \frac{1}{2} R I_0^2$$

Действующие значения тока и напряжения

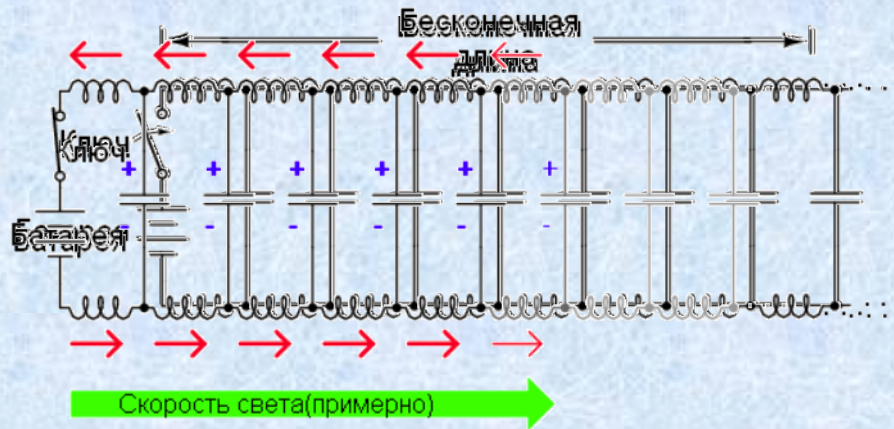
$$I = I_0 / \sqrt{2}, \quad U = U_0 / \sqrt{2}$$

$$\langle P \rangle = UI \cos \varphi$$

При большом реактивном сопротивлении энергия колеблется между генератором и внешней цепью

Только активное сопротивление определяет переход энергии в неэлектромагнитные формы (джоулева теплота, механическая работа)

Волновое сопротивление



Волновое сопротивление

Волновое сопротивление линии

$$Z_0 = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

