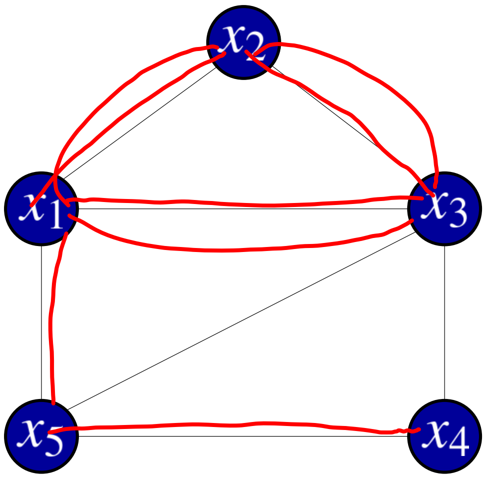
Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

Связность графов

- Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

Маршрут – упорядоченная последовательность ребер, в которой каждая пара соседних ребер смежна между собой. Длина маршрута определяется количеством ребер в последовательности.



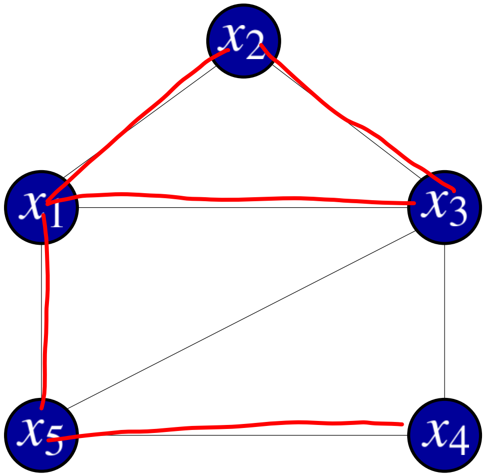
$$\mu_1 = ((x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_1),(x_1,x_5),(x_5,x_4))$$

или

$$\mu_1 = (x_1,x_2,x_3,x_1,x_2,x_3,x_1,x_5,x_4)$$

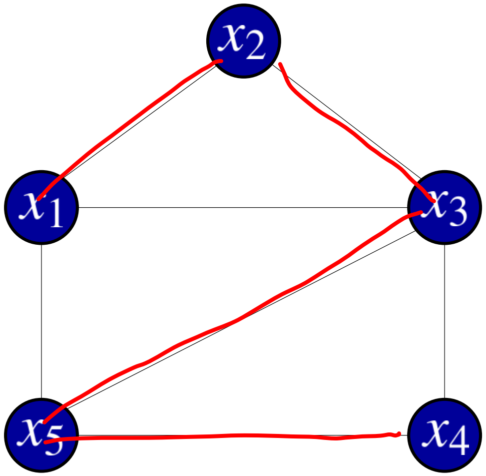
$$l_{\mu_1} = 8.$$

Цепь – маршрут, в котором все ребра различны.



$$\mu_2 = (x_1, x_2, x_3, x_1, x_5, x_4),\ l_{\mu_2} = 5.$$

Простая цепь – цепь, в котором все вершины различны.



$$\mu_2 = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_4),\ l_{\mu_2} = 4.$$

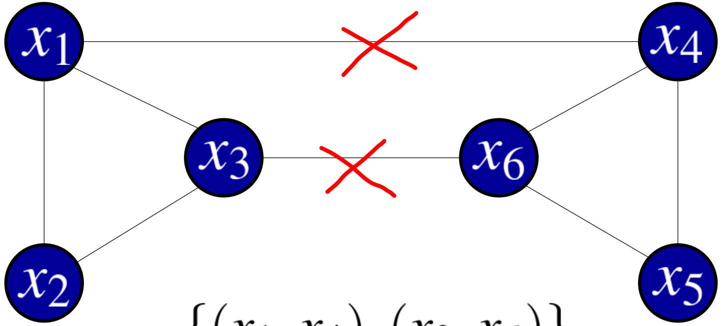
Неограф называется связным, если в нем любую пару вершин можно соединить хотя бы одной простой цепью; в противном случае неограф называется несвязным.

Несвязные части графа называются компонентами связности.

Связность графов

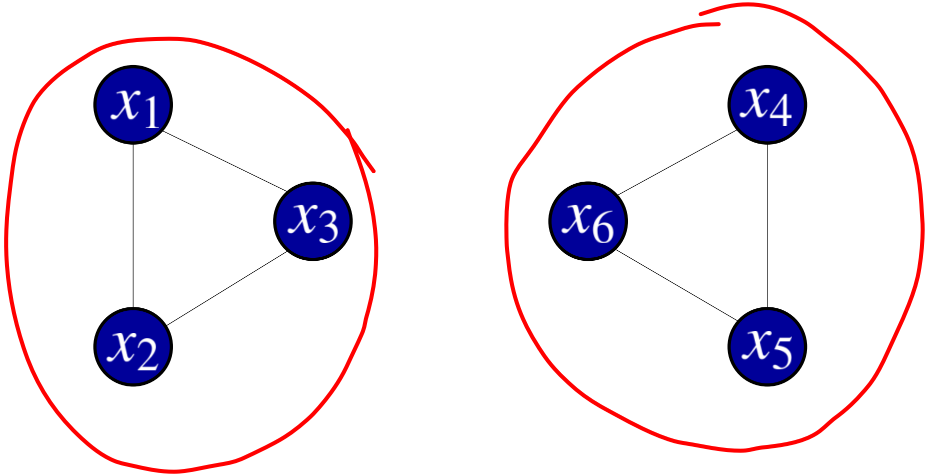
- ✓ Связность неографов
- Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

Из связного графа можно получить несвязный путем удаления некоторого множества ребер, называемого <u>разделяющим множеством</u>.

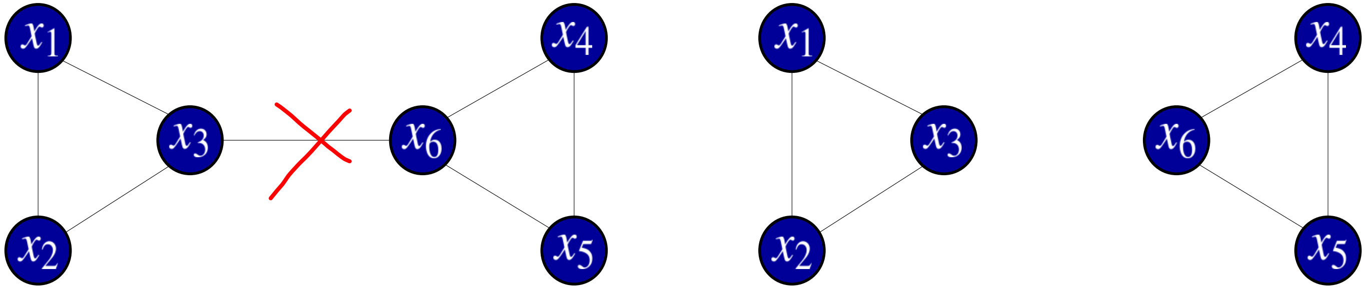


$$\{(x_1, x_4), (x_3, x_6)\}$$

Из связного графа можно получить несвязный путем удаления некоторого множества ребер, называемого <u>разделяющим множеством</u>.



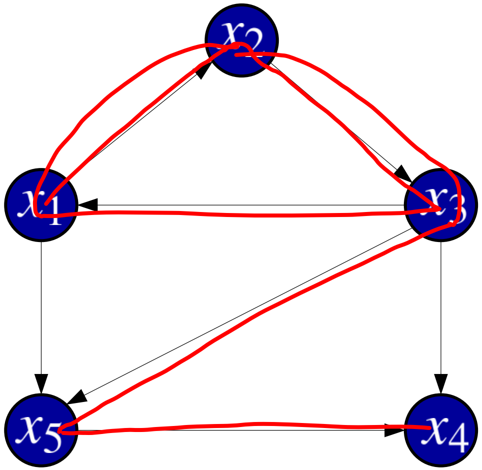
Исследование связности неографа связано с решением задачи поиска моста (= перешейка) графа, т.е. того единственного ребра, удаление которого приведет связный граф в несвязный.



Связность графов

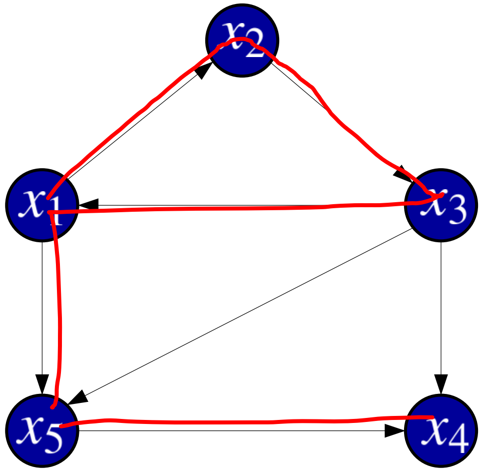
- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

Ориентированный маршрут – упорядоченная последовательность дуг, в которой каждая дуга имеет вершину истока, совпадающую с вершиной стока предыдущей дуги, и вершину стока, совпадающую с вершиной истока последующей дуги. Длина ориентированного маршрута определяется количеством дуг в последовательности.



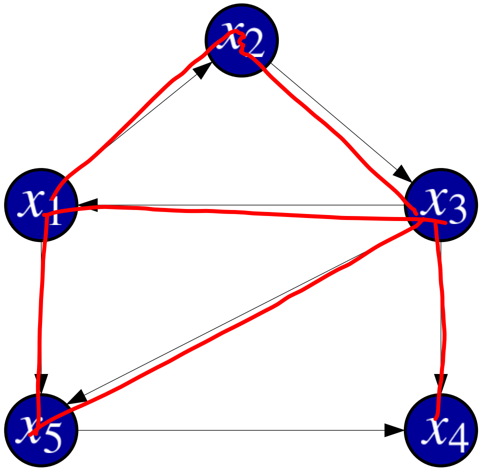
$$\vec{\mu}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_4),\ l_{\vec{\mu}_1} = 7.$$

Путь в орграфе является аналогом цепи в неографе, т.е. путь – ориентированный маршрут без повтора дуг.



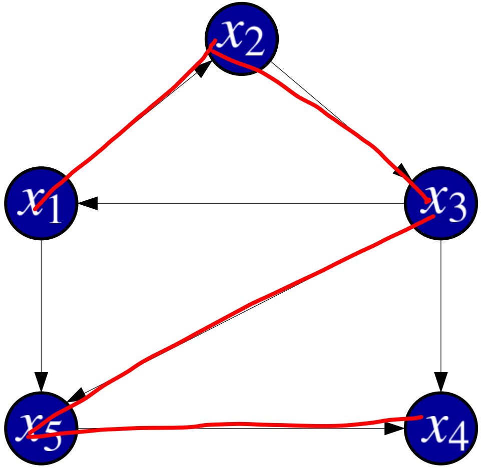
$$\vec{\mu}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_1, x_5, x_4), \ l_{\vec{\mu}_2} = 5.$$

Полупуть – это путь, построенный в орграфе без учета направления дуг.



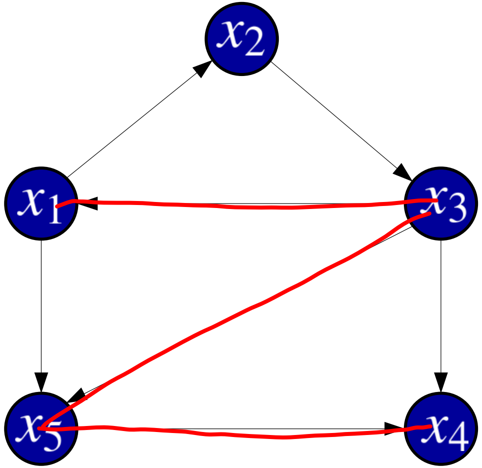
$$\mu_3 = (x_1, x_2, x_3, x_1, x_5, x_3, x_4),\ l_{\mu_3} = 6.$$

Простой путь – в орграфе является аналогом простой цепи в неографе, т.е. простой путь – путь без повтора вершин.



$$\vec{\mu}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_4), \; l_{\vec{\mu}_4} = 4.$$

Простой полупуть – это простой путь, построенный в орграфе без учета направления дуг.



$$\mu_5 = (x_1, x_3, x_5, x_4), \;\; l_{\mu_5} = 3.$$

Орграф называется связным, если в нем любую пару вершин можно соединить хотя бы одним простым полупутем. Поэтому доказательство связности орграфа аналогично доказательству связности неографа, полученного путем замены дуг в исходном орграфе на ребра.

Связные орграфы

сильные (= сильносвязные)

слабые (= слабосвязные)

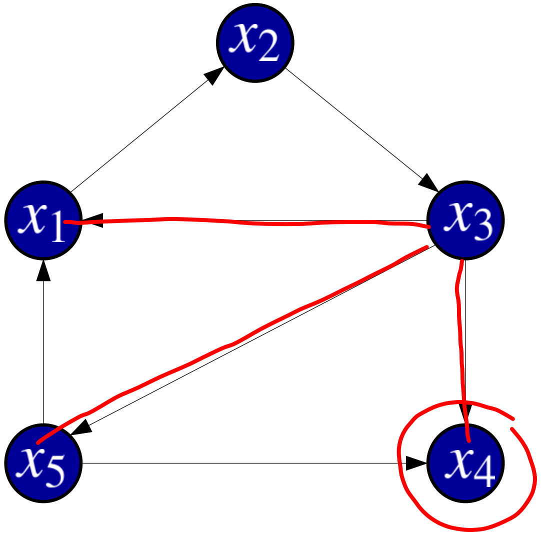
одностороннесвязные

Множество достижимости вершины x орграфа $R(x)$ состоит из тех вершин y, для которых есть простой путь $\mu = (x, \ldots y)$, причем $R(x) \neq \varnothing$.

$R(x) = \Gamma^0(x) \cup \Gamma^1(x) \cup \Gamma^2(x) \cup \ldots \cup \Gamma^l(x)$, где $\Gamma^i(x) = \Gamma(\Gamma^{i-1}(x))$,

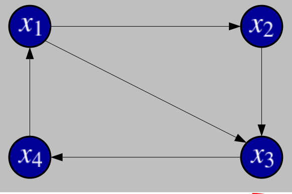
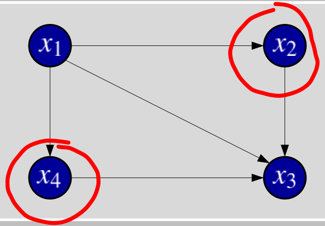
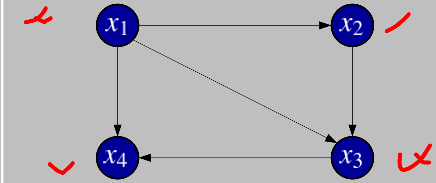
при условии, что $\Gamma^0(x) = \{x\}$,

l — длина пути μ, сопоставимая с количеством вершин орграфа n.



x	$R(x)$
x_1	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\} = X$
x_2	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\} = X$
x_3	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\} = X$
x_4	$\{x_4\}$
x_5	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\} = X$

$$R(x_1) = \{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\{x_3\}\cup\{x_1,x_4,x_5\} = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$$

Связность графа	Условие	Пример
Сильная	$\forall x \in X : R(x) = X$	
Слабая	$\exists x, y \in : x \notin R(y)\ \&\ y \notin R(x)$	
Односторонняя	$\begin{cases} \exists x \in X : R(x) \neq X \\ \nexists x, y \in X : x \notin R(y)\ \&\ y \notin R(x) \end{cases}$	

Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

Методика исследования связности графа:

1. Для заданного графа G построить ряд степенных графов $G^1, G^2, G^3, \ldots$

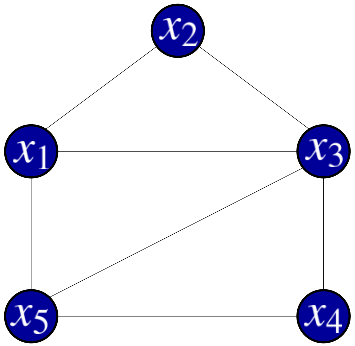
Построение завершить, если на некотором k-ом шаге выполняется условие:
$G^{k-1} = G^k$.

2. Если граф G^k - полный, то граф G является связным;

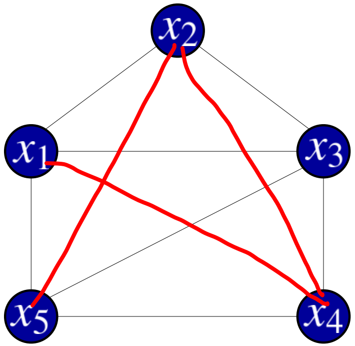
в противном случае граф G - несвязный.

Считаем, что $G = G^1$.

Граф G^2 - это граф G^1 с добавленными ребрами, соответствующими простым цепям в графе G с длиной $l_\mu = 2$.



G^1

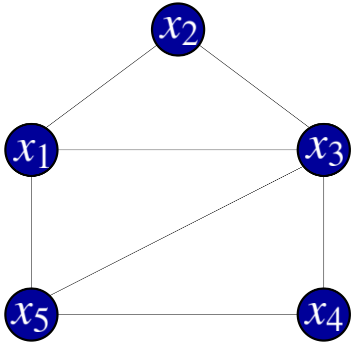


G^1

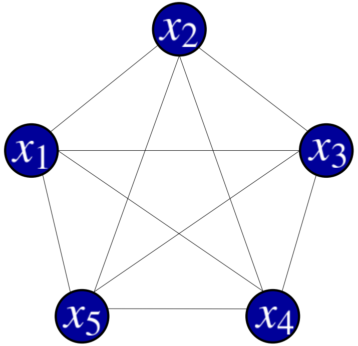
Считаем, что $G = G^1$.

Граф G^2 - это граф G^1 с добавленными ребрами, соответствующими простым цепям в графе G с длиной $l_\mu = 2$.

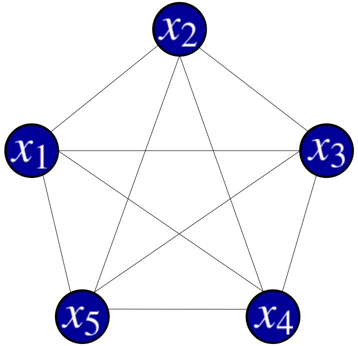
Граф G^3 - это граф G^2 с добавленными ребрами, соответствующими простым цепям в графе G с длиной $l_\mu = 3$ и т.д.



G^1



G^2



G^3

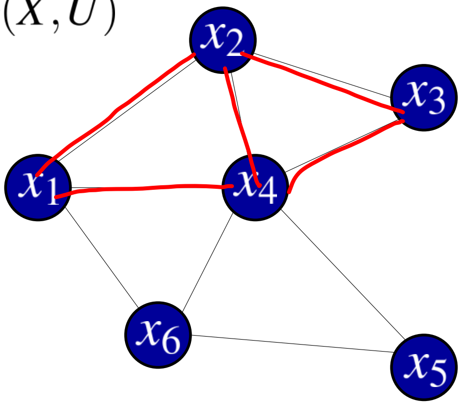
Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

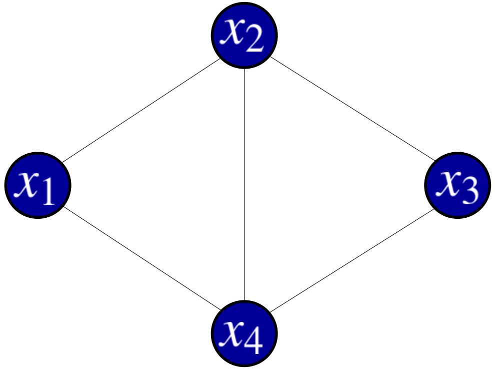
Пусть имеется орграф $G(X,U)$. Новый граф $G^*(X^*,U^*)$ называется графом-конденсатом для $G(X,U)$, если в нем сильные подграфы заменены вершинами.

Подграфом $G_1(X_1,U_1)$ графа $G(X,U)$ называется граф, порожденный множеством вершин $X_1 \subseteq X$ (если $|X_1| < |X|$, то подграф $G_1(X_1,U_1)$ называется собственным). Множество $U_1 \subseteq U$ строится по следующему правилу: $\forall (x,y) \in U_1 : x,y \in X_1$.

$G(X,U)$

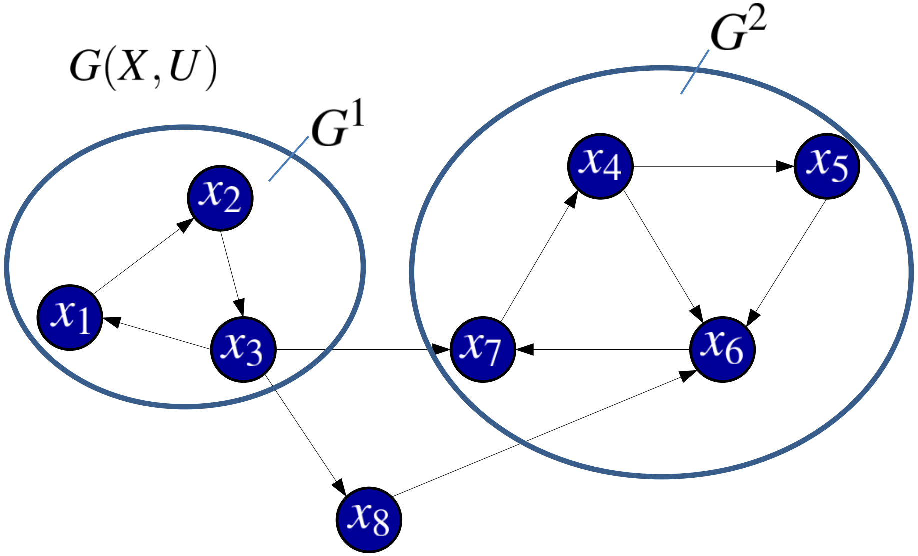


$G_1(X_1,U_1)$, где $X_1 = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$



Пусть имеется орграф $G(X,U)$. Новый граф $G^*(X^*,U^*)$ называется графом-конденсатом для $G(X,U)$, если в нем сильные подграфы заменены вершинами.

Граф-конденсат $G^*(X^*,U^*)$ сохраняет свойства связности исходного графа $G(X,U)$.



$G_1,\ G_2$ —сильные подграфы

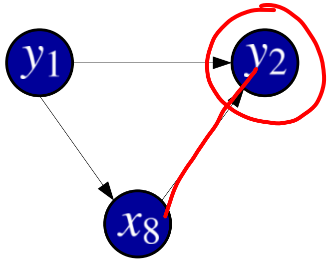
$G_1 \to y_1$

$G_2 \to y_2$

Пусть имеется орграф $G(X,U)$. Новый граф $G^*(X^*,U^*)$ называется графом-конденсатом для $G(X,U)$, если в нем сильные подграфы заменены вершинами.

Граф-конденсат $G^*(X^*,U^*)$ сохраняет свойства связности исходного графа $G(X,U)$.

$G^*(X^*,U^*)$



x	$R(x)$
y_1	$\{y_1, y_2, x_8\} = X^*$
y_2	$\{y_2\}$
x_8	$\{x_8, y_2\}$

G^*- одностороннесвязный граф $\Rightarrow G-$ одностороннесвязный граф.

Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

Минимальные маршруты в графе

по длине

по весу

Постановка задачи поиска минимального (по длине) маршрута в графе

Дано: псевдограф $G(X,U)$, x_c и x_f — начало и конец маршрута.

Найти: $\mu = (x_c, \ldots, x_f)$, $l_\mu \to \min$.

Постановка задачи поиска минимального (по весу) маршрута в графе

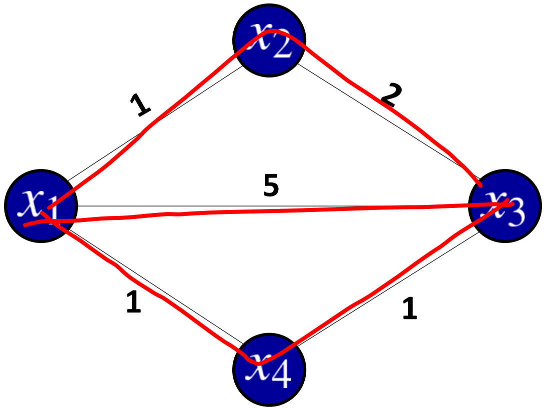
Дано: взвешенный псевдограф $G(X,U)$, x_c и x_f — начало и конец маршрута.

Найти: $\mu = (x_c, \ldots, x_f)$, $\sum\limits_{\forall u_i \in \mu} w_i \to \min.$

Минимальные маршруты в графе

по длине

по весу



$$x_c = x_1, \qquad x_f = x_3$$

№	Маршрут	Длина	Вес
1	(x_1, x_2, x_3)	2	3
2	(x_1, x_3)	1	5
3	(x_1, x_4, x_3)	2	2

Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа

Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- Метрические характеристики связного графа

Пусть дан связный псевдограф $G(X,U)$, в котором дуги заменены на ребра.

Расстоянием между вершинами x_i и x_j в графе $G(X,U)$ называется величина $d(x_i,x_j)$, определяемая длиной минимального маршрута между ними, такая, что:

1. $d(x_i,x_j) << \infty$;
2. $d(x_i,x_j) \geq 0$ $(d(x_i,x_j) = 0$, если $x_i = x_j)$;
3. $d(x_i,x_j) = d(x_j,x_i)$;
4. $d(x_i,x_j) \leq d(x_i,x_k) + d(x_k,x_j)$.

Пусть $x_i -$ произвольная вершина в графе. Тогда конечная величина $r(x_i)$ будет называться **максимальным удалением (= эксцентриситетом) вершины** x_i в графе $G(X,U)$ и определяться как $r(x_i) = \max\limits_{j=1}^{n} d(x_i, x_j)$.

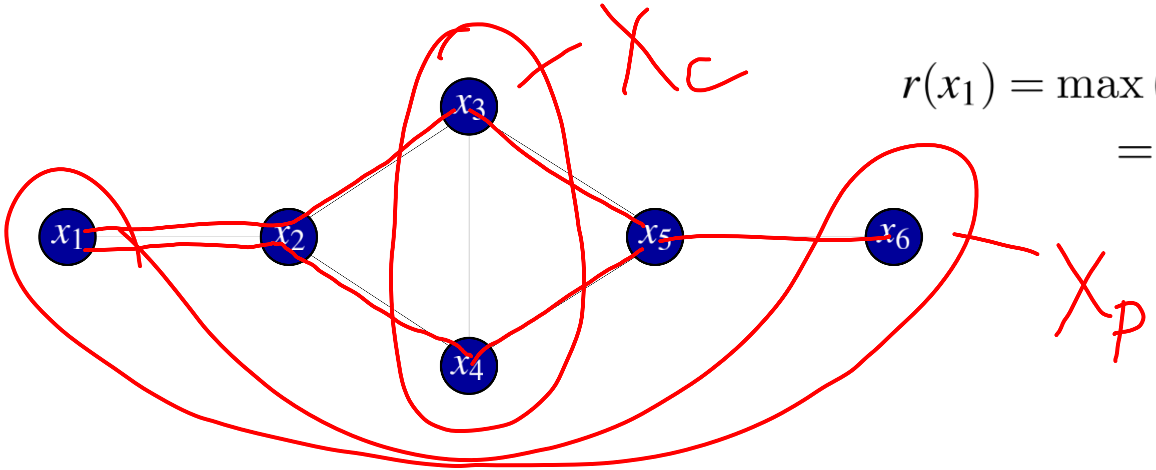
Диаметр графа $D(G)$ определяется как $D(G) = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} d(x_i, x_j) = \max\limits_{i=1}^{n} r(x_i)$.

Радиус графа $R(G)$ определяется как $R(G) = \min\limits_{i=1}^{n} r(x_i)$.

Центр графа $X_c \subseteq X -$ множество вершин, удовлетворяющие следующему условию:
$\forall x \in X_c : r(x) = R(G)$.

Периферия графа $X_p \subseteq X -$ множество вершин, удовлетворяющие следующему условию:
$\forall x \in X_p : r(x) = D(G)$.

Пусть дан связный псевдограф $G(X,U)$, в котором дуги заменены на ребра.



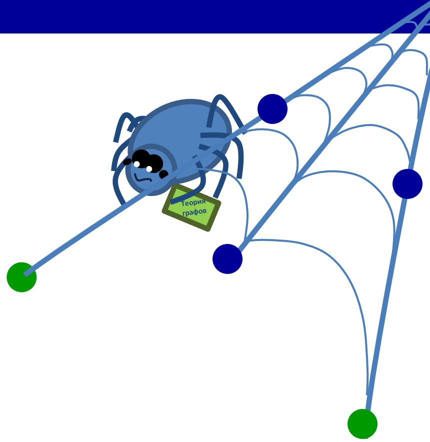
$$r(x_1) = \max\left(d(x_1,x_2), d(x_1,x_3), \ldots, d(x_1,x_6)\right) =$$
$$= \max(1,2,2,3,4) = 4$$

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$r(x)$	4	3	2	2	3	4

$D(G) = 4, \quad R(G) = 2, \quad X_c = \{x_3, x_4\}, \quad X_p = \{x_1, x_6\}$

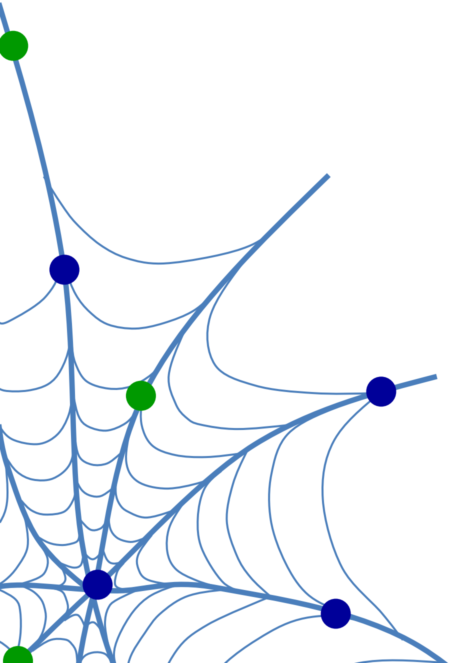
Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- Метрические характеристики связного графа



Связность графов

- ✓ Связность неографов
- ✓ Разделяющее множество связного графа
- ✓ Связность орграфов
- ✓ Методика исследования связности орграфов
- ✓ Конденсирование орграфов, понятие подграфа
- ✓ Минимальные маршруты в графе
- ✓ Алгоритмы поиска минимальных маршрутов в связном графе
- ✓ Метрические характеристики связного графа



Л.С. Лисицына

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО