Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Экстремальное число графа $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ – оценка решения некоторой оптимизационной задачи для данного графа (максимума или минимума целевой функции задачи).

Перечень основных экстремальных чисел графа

№	Оптимизационная задача на графах	Экстремальное число графа	Обозначение
1	Поиск максимального числа независимых циклов в графе	Цикломатическое число	$\sigma(G)$
2	Поиск наибольшего пустого подграфа в графе	Число внутренней устойчивости	$\alpha_0(G)$
3	Поиск наибольшего полного подграфа в графе	Кликовое число	$\varphi(G)$
4	Минимальная раскраска графа	Хроматическое число	$\chi(G)$
5	Минимальное вершинное покрытие графа	Число внешней устойчивости	$\beta_0(G)$
6	Поиск в графе максимального количества независимых ребер	Число паросочетания	$\alpha_1(G)$
7	Минимальное реберное покрытие графа	Число реберного покрытия	$\beta_1(G)$

Оптимизация на графах

- Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Цикломатическое число графа $\sigma(\mathbf{G})$ указывает на количество ребер, которое надо удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево (остовный лес).

$$\sigma(G) = m - n + k$$

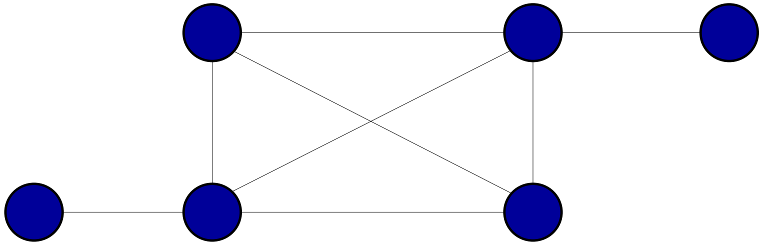
Для связного графа: $k = 1$

Теорема об основном свойстве цикломатического числа графа.

Цикломатическое число графа $\sigma(G)$ определяет максимальное количество независимых циклов в нем.

Доказательство теоремы

Пусть задан обыкновенный $n, m -$ граф $G(X, U)$.



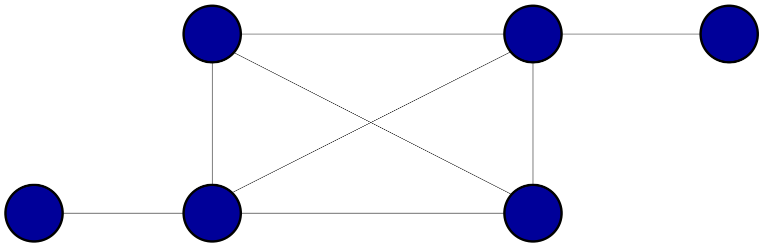
Цикломатическое число графа $\sigma(\mathbf{G})$ указывает на количество ребер, которое надо удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево (остовный лес).

$$\sigma(G) = m - n + k$$

Для связного графа: $k = 1$

Теорема об основном свойстве цикломатического числа графа.

Цикломатическое число графа $\sigma(G)$ определяет максимальное количество независимых циклов в нем.



Доказательство теоремы

Удалим из него все вершины вместе с инцидентными им ребрами:

$\forall x \in X : \rho(x) = 1$ (для неографа),

$\rho^{+}(x) = 1$ и (или) $\rho^{-}(x) = 1$ (для орграфа).

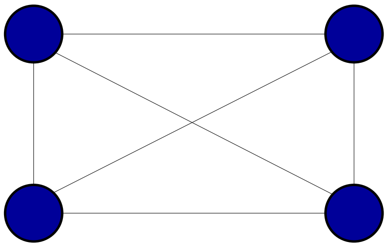
Цикломатическое число графа $\sigma(\mathbf{G})$ указывает на количество ребер, которое надо удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево (остовный лес).

$$\sigma(G) = m - n + k$$

Для связного графа: $k = 1$

Теорема об основном свойстве цикломатического числа графа.

Цикломатическое число графа $\sigma(G)$ определяет максимальное количество независимых циклов в нем.



Доказательство теоремы

Получим новый n^*, m^*- граф $G^*(X^*, U^*)$, причем $\sigma(G) = \sigma(G^*)$, т.к. удаленные ребра не входят ни в один цикл $n,\ m-$ графа $G(X,U)$.

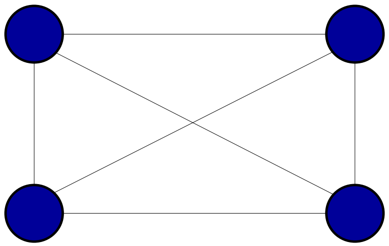
Цикломатическое число графа $\sigma(\mathbf{G})$ указывает на количество ребер, которое надо удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево (остовный лес).

$$\sigma(G) = m - n + k$$

Для связного графа: $k = 1$

Теорема об основном свойстве цикломатического числа графа.

Цикломатическое число графа $\sigma(G)$ определяет максимальное количество независимых циклов в нем.



Доказательство теоремы

Затем построим в графе $G^*(X^*, U^*)$ его остовное дерево – $n^*, (n^* - 1)-$граф T^*.

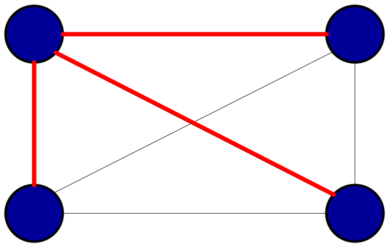
Цикломатическое число графа $\sigma(\mathbf{G})$ указывает на количество ребер, которое надо удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево (остовный лес).

$$\sigma(G) = m - n + k$$

Для связного графа: $k = 1$

Теорема об основном свойстве цикломатического числа графа.

Цикломатическое число графа $\sigma(G)$ определяет максимальное количество независимых циклов в нем.



Доказательство теоремы

Известно, что $\sigma(T^*) = 0$. Поэтому каждое ребро графа G^*, не вошедшее в T^*, образует в нем простой цикл (свойство деревьев №4).

Причем эти циклы являются независимыми (наличие одного ребра, входящего только в этот цикл).

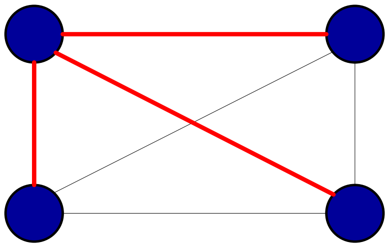
Цикломатическое число графа $\sigma(\mathbf{G})$ указывает на количество ребер, которое надо удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево (остовный лес).

$$\sigma(G) = m - n + k$$

Для связного графа: $k = 1$

Теорема об основном свойстве цикломатического числа графа.

Цикломатическое число графа $\sigma(G)$ определяет максимальное количество независимых циклов в нем.



Доказательство теоремы

Известно, что $\sigma(T^*) = 0$. Поэтому каждое ребро графа G^*, не вошедшее в T^*, образует в нем простой цикл (свойство деревьев №4).

Причем эти циклы являются независимыми (наличие одного ребра, входящего только в этот цикл).

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Число внутренней устойчивости (= число независимости, = число неплотности) графа $\alpha_0(\mathbf{G})$ – это максимальное количество вершин в графе, не смежных между собой.

$\alpha_0(G) = [1, n]$, причем $\alpha_0(G) = 1$ для полного графа, а $\alpha_0(G) = n$ для пустого графа.

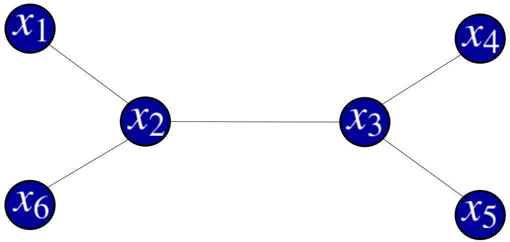
Внутренне устойчивым множеством (ВУМ) в графе $G(X, U)$ называется такое подмножество вершин $F \subseteq X$, для которого выполняется следующее свойство внутренней устойчивости – $\forall x \in F : F \cap \Gamma(x) = \varnothing$.

Каждое ВУМ порождает в графе $G(X, U)$ пустой подграф.

Максимальное ВУМ – это такое ВУМ, которое нельзя увеличить по мощности за счет других вершин графа без нарушения свойства внутренней устойчивости.

Наибольшее ВУМ – это максимальное ВУМ с наибольшим количеством вершин графа $G(X, U)$; количество вершин в таком ВУМ и определяет $\alpha_0(G)$.

Пример.



$$n = 6,\ m = 5$$

№	Максимальное ВУМ
1	$\{x_1, x_3, x_6\}$
2	$\{x_2, x_4, x_5\}$
3	$\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$

$$\alpha_0(G) = 4$$

Оценка верхней границы $\alpha_0(G)$ для связного остовного графа определяется как:

$$\alpha_0(G) \le \tfrac{1}{2} + \sqrt{(n - \tfrac{1}{2})^2 - 2m}$$

$$\tfrac{1}{2} + \sqrt{(6 - \tfrac{1}{2})^2 - 10} = \tfrac{1}{2} + \sqrt{20,25} \approx 5$$

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

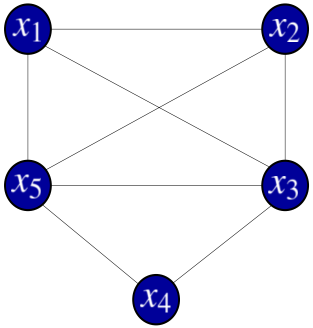
- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Кликовое число (=число зависимости, = число плотности) графа $\varphi(\mathbf{G})$ – это максимальное количество вершин в графе, смежных между собой.

$\varphi(G) = [1, n]$, причем $\varphi(G) = 1$ для пустого графа, а $\varphi(G) = n$ для полного графа.

Клика – это максимальный полный подграф (МПП) в графе, т.е. такой полный подграф (ПП), который нельзя расширить за счет других вершин графа без нарушения его полноты.

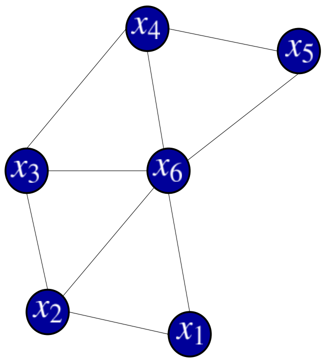
Наибольший полный подграф (НПП) – это клика графа с наибольшим количеством вершин; количество вершин в НПП и определяет $\varphi(G)$.



№	Клика
1	$\{x_3, x_4, x_5\}$
2	$\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$

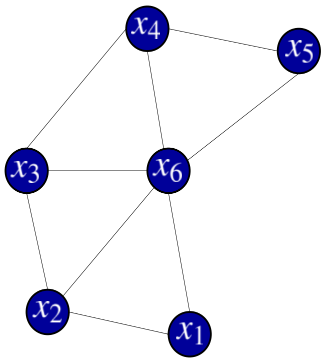
$\varphi(G) = 4$

Графом-дополнением скелетного графа $\mathbf{G}(\mathbf{X},\mathbf{U})$ называется новый граф $G_1(X,U_1)$, в котором $U_1 = U_n \backslash U$, где U_n – множество ребер полного графа, построенного на вершинах этого графа.



Для решения задачи поиска наибольшего полного подграфа в графе могут использоваться те же методы, что и для решения задачи поиска наибольших пустых подграфов в графе. Для этого необходимо, например, в методе Магу-Вейсмана в качестве исходных данных использовать граф-дополнение. Тогда пустые подграфы в графе-дополнении будут являться полными подграфами исходного графа.

Графом-дополнением скелетного графа $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ называется новый граф $G_1(X, U_1)$, в котором $U_1 = U_n \setminus U$, где U_n – множество ребер полного графа, построенного на вершинах этого графа.



Для решения задачи поиска наибольшего полного подграфа в графе могут использоваться те же методы, что и для решения задачи поиска наибольших пустых подграфов в графе. Для этого необходимо, например, в методе Магу-Вейсмана в качестве исходных данных использовать граф-дополнение. Тогда пустые подграфы в графе-дополнении будут являться полными подграфами исходного графа.

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

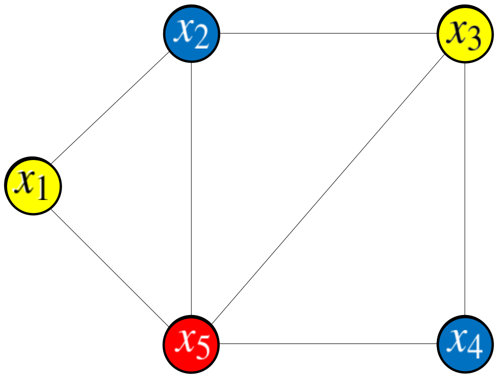
Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Хроматическое число графа $\chi(\mathbf{G})$ – это минимальное количество цветов для вершинной раскраски графа.

Вершинная раскраска графа – это операция, в результате выполнения которой любые две смежные вершины в графе раскрашиваются в разные цвета.

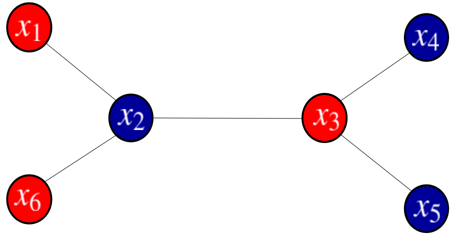
$\chi(G) = [1, n]$, причем $\chi(G) = 1$ для пустого графа, а $\chi(G) = n$ для полного графа.



$$\chi(G) = 3$$

Примечание.

1. Для раскраски вершин полного графа требуется n цветов, поэтому $\chi(G)=\rho(x)+1$, где $\rho(x)$ – локальная степень любой вершины полного графа. Тогда для любого связного графа – $\chi(G)\le\rho^*(x)+1$, где $\rho^*(x)=\max\limits_{i=1}^{n}\rho(x_i)$.
2. Т.к. вершины МВУМ можно раскрасить одним цветом, то между $\chi(G)$ и $\alpha_0(G)$ существует следующая связь: $\chi(G)\cdot\alpha_0(G)\ge n$.
   Пусть $|F_i|=n_i$ – количество вершин в МВУМ, $i=\overline{1,\chi(G)}$. Очевидно, что $n_i\le\alpha_0(G)$.
   Тогда $\chi(G)\cdot\alpha_0(G)\ge n$.



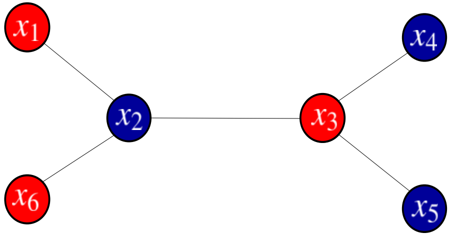
$$\alpha_0(G)=4\Rightarrow\chi(G)\ge\frac{6}{4}$$

$$\chi(G)=2$$

3. Любое дерево можно раскрасить двумя цветами, поэтому дерево называют бихроматическим графом.

Примечание.

1. Для раскраски вершин полного графа требуется n цветов, поэтому $\chi(G) = \rho(x) + 1$, где $\rho(x)$ – локальная степень любой вершины полного графа. Тогда для любого связного графа – $\chi(G) \le \rho^*(x) + 1$, где $\rho^*(x) = \max_{i=1}^{n} \rho(x_i)$.
2. Т.к. вершины МВУМ можно раскрасить одним цветом, то между $\chi(G)$ и $\alpha_0(G)$ существует следующая связь: $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \ge n$.
   Пусть $|F_i| = n_i$ – количество вершин в МВУМ, $i = \overline{1, \chi(G)}$. Очевидно, что $n_i \le \alpha_0(G)$.
   Тогда $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \ge n$.



$$\alpha_0(G) = 4 \Rightarrow \chi(G) \ge \frac{6}{4}$$

$$\chi(G) = 2$$

3. Любое дерево можно раскрасить двумя цветами, поэтому дерево называют бихроматическим графом.

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

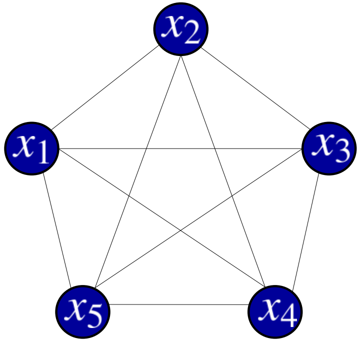
Оптимизация на графах

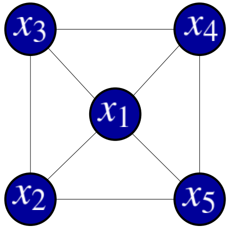
- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

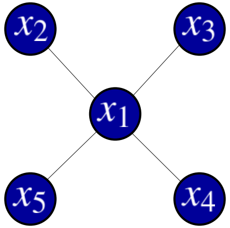
Число внешней устойчивости (= число вершинного покрытия, = число опоры) графа $\beta_0(\mathbf{G})$ – это минимальное количество вершин, образами которых являются все остальные вершины этого графа.

Примечание.

1. Графы, содержащие изолированные вершины, не имеют вершинного покрытия.
2. Если в графе $G(X,U)$ $\exists x \in X : \rho(x) = n-1$, то $\beta_0(G) = 1$.



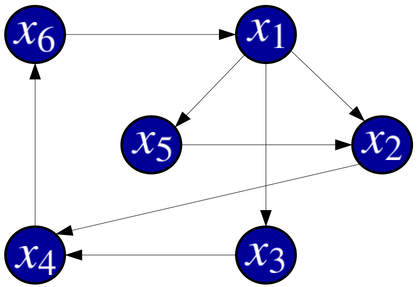




Внешне устойчивым множеством (=опорой) графа называется такое множество вершин $R \subseteq X$ со следующим свойством внешней устойчивости $R \cup \Gamma(R) = X$, где $\Gamma(R) = \bigcup_{\forall x \in R} \Gamma(x)$.

Минимальная опора – это такая опора в графе, которую нельзя уменьшить по мощности без нарушения свойства внешней устойчивости.

Наименьшая опора – это минимальная опора в графе с наименьшим количеством вершин; количество вершин в наименьшей опоре и определяет $\beta_0(G)$.



$\{x_1, x_4\}$ – наименьшая опора

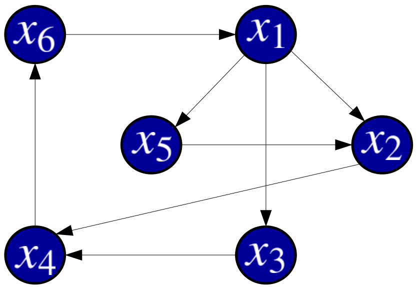
$\beta_0(G) = 2$

x	$\Gamma(x)$ – образы вершины x
x_1	$\{x_2, x_3, x_5\}$
x_2	$\{x_4\}$
x_3	$\{x_4\}$
x_4	$\{x_6\}$
x_5	$\{x_2\}$
x_6	$\{x_1\}$

Внешне устойчивым множеством (=опорой) графа называется такое множество вершин $R \subseteq X$ со следующим свойством внешней устойчивости $R \cup \Gamma(R) = X$, где $\Gamma(R) = \bigcup_{\forall x \in R} \Gamma(x)$.

Минимальная опора – это такая опора в графе, которую нельзя уменьшить по мощности без нарушения свойства внешней устойчивости.

Наименьшая опора – это минимальная опора в графе с наименьшим количеством вершин; количество вершин в наименьшей опоре и определяет $\beta_0(G)$.

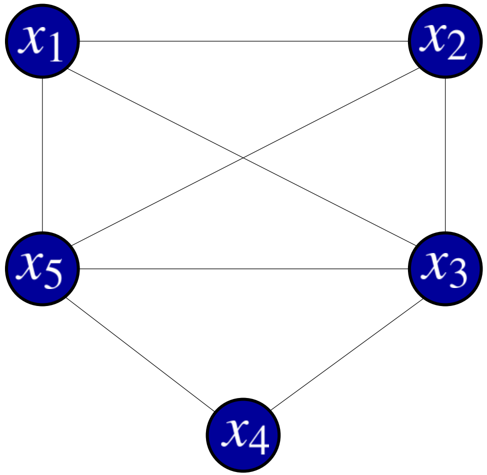


$\{x_1, x_4\}$ – наименьшая опора

$\beta_0(G) = 2$

x	$\Gamma(x)$ – образы вершины x
x_1	$\{x_2, x_3, x_5\}$
x_2	$\{x_4\}$
x_3	$\{x_4\}$
x_4	$\{x_6\}$
x_5	$\{x_2\}$
x_6	$\{x_1\}$

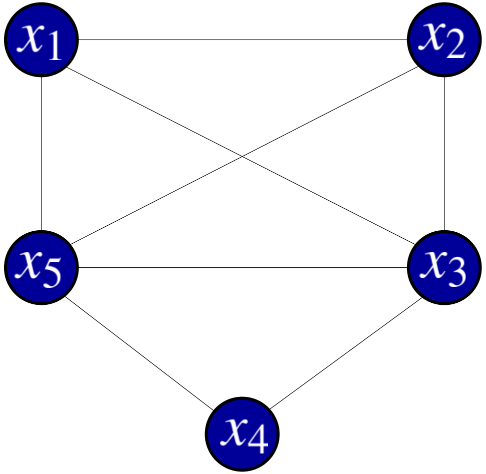
Наименьшее число клик для вершинного покрытия графа определяет число кликового покрытия $\beta_\varphi(G)$, причем $\beta_\varphi(G) \geq \beta_0(G)$.



$\beta_0(G) = 1$ ($\{x_3\}$ и $\{x_5\}$ – наименьшие опоры)

$\beta_\varphi(G) = 2$ ($\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ и $\{x_3, x_4, x_5\}$ – клики для покрытия вершин графа)

Наименьшее число клик для вершинного покрытия графа определяет число кликового покрытия $\beta_\varphi(G)$, причем $\beta_\varphi(G) \geq \beta_0(G)$.



$\beta_0(G) = 1$ ($\{x_3\}$ и $\{x_5\}$ – наименьшие опоры)

$\beta_\varphi(G) = 2$ ($\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ и $\{x_3, x_4, x_5\}$ – клики для покрытия вершин графа)

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

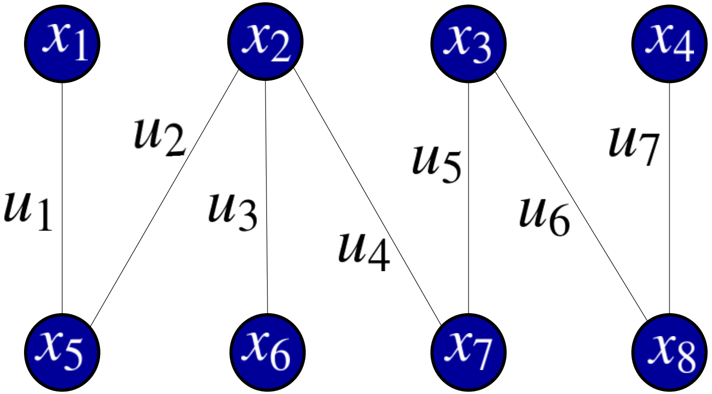
Число паросочетания (= число независимости ребер) графа $\alpha_1(\mathbf{G})$ – это максимальное количество несмежных между собой ребер графа. Число паросочетания орграфа $\alpha_1(G)$ определяется в графе, в котором дуги заменены на ребра. В связном графе $\alpha_1(G) \leq [\frac{n}{2}]$.

Паросочетание – это любое подмножество ребер графа, не смежных между собой.

Максимальное паросочетание – это паросочетание в графе, которое нельзя расширить за счет других ребер графа без нарушения свойства независимости ребер в данном паросочетании.

Наибольшее паросочетание – это максимальное паросочетание с наибольшим количеством ребер; количество ребер в наибольшем паросочетании и определяет $\alpha_1(G)$.

Пример.

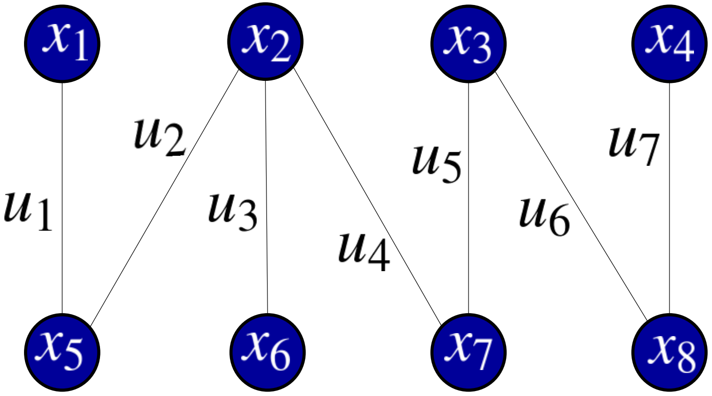


$n = 8,\ m = 7$

№	Максимальное паросочетание
1	$\{u_1, u_3, u_5, u_7\}$
2	$\{u_1, u_4, u_6\}$
3	$\{u_2, u_5, u_7\}$
4	$\{u_1, u_4, u_7\}$

Наибольшее паросочетание в данном графе $G - \{u_1, u_3, u_5, u_7\},\ \alpha_1(G) = 4.$

Пример.



$n = 8,\ m = 7$

№	Максимальное паросочетание
1	$\{u_1, u_3, u_5, u_7\}$
2	$\{u_1, u_4, u_6\}$
3	$\{u_2, u_5, u_7\}$
4	$\{u_1, u_4, u_7\}$

Наибольшее паросочетание в данном графе $G - \{u_1, u_3, u_5, u_7\},\ \alpha_1(G) = 4.$

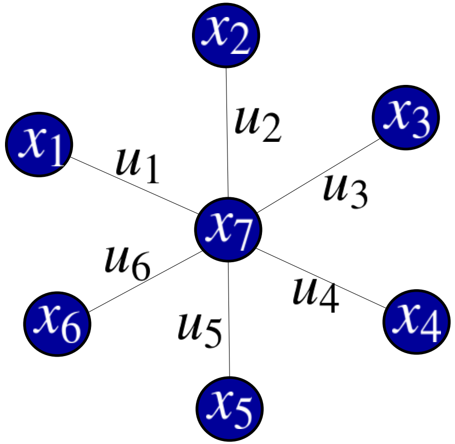
Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- Число реберного покрытия графа

Число реберного покрытия графа $\beta_1(G)$ – это минимальное количество ребер для покрытия всех вершин графа. Графы с изолированными вершинами не имеют реберного покрытия. В связном n, m – графе $\left[\frac{n}{2}\right] \leq \beta_1(G) \leq m$



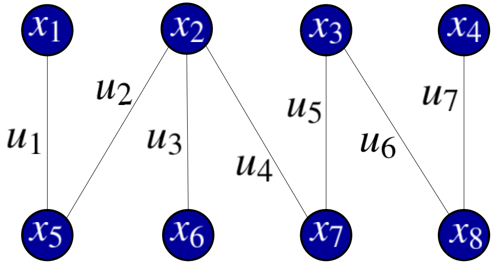
$n = 7,\ m = 6$

$\beta_1(G) = 6$

Реберное покрытие графа – это любое подмножество ребер графа, которое покрывает все вершины этого графа (каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру из этого подмножества).

Минимальное реберное покрытие графа – это такое реберное покрытие графа, которое нельзя уменьшить по количеству ребер без нарушения свойства вершинного покрытия ребрами данного графа.

Наименьшее реберное покрытие графа – это минимальное реберное покрытие графа с наименьшим количеством ребер; количество ребер в таком покрытии и определяет $\beta_1(G)$.



$$n = 8,\ m = 7$$

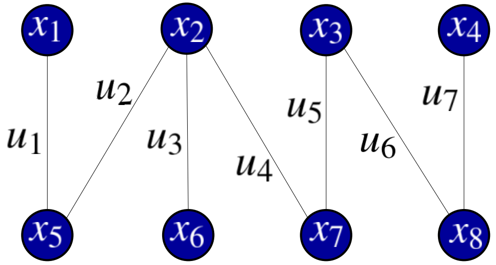
$$4 \le \beta_1(G) \le 7$$

Наименьшее реберное покрытие в данном графе $G - \{u_1, u_3, u_5, u_7\},\ \beta_1(G) = 4.$

Реберное покрытие графа – это любое подмножество ребер графа, которое покрывает все вершины этого графа (каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру из этого подмножества).

Минимальное реберное покрытие графа – это такое реберное покрытие графа, которое нельзя уменьшить по количеству ребер без нарушения свойства вершинного покрытия ребрами данного графа.

Наименьшее реберное покрытие графа – это минимальное реберное покрытие графа с наименьшим количеством ребер; количество ребер в таком покрытии и определяет $\beta_1(G)$.



$$n = 8,\ m = 7$$

$$4 \le \beta_1(G) \le 7$$

Наименьшее реберное покрытие в данном графе $G - \{u_1, u_3, u_5, u_7\},\ \beta_1(G) = 4.$

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- Число реберного покрытия графа

Оптимизация на графах

- ✓ Понятие экстремального числа графа
- ✓ Цикломатическое число графа
- ✓ Число внутренней устойчивости графа
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших пустых подграфов в графе
- ✓ Кликовое число графа, понятие графа-дополнения
- ✓ Алгоритмы поиска наибольших полных подграфов в графе
- ✓ Хроматическое число графа
- ✓ Алгоритмы минимальной раскраски графа
- ✓ Число внешней устойчивости графа
- ✓ Число паросочетания графа
- ✓ Число реберного покрытия графа