Глава 3. Интегрирование тригонометрических функций

3.1 Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

а) Если хотя бы одно из чисел m или n - нечётное положительное число, тогда:

1. Отделяем от нечётной степени один сомножитель.

2. С помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ выражаем оставшуюся чётную степень через дополнительную функцию и приходим к табличному интегралу.

Пример

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \sin x dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} d(\cos x) =$$
$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} d(\cos x) = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C.$$

б) Если m и n - чётные неотрицательные числа, тогда степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \tag{3.1}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{3.2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{3.3}$$

Пример

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx +$$

$$+\frac{1}{16}\int \sin^2 x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

1) $$\int \cos^7 x dx = \int \cos^6 x d(\sin x) = \int \left(1-\sin^2 x\right)^3 d(\sin x) =$$
$$= \Big/ \text{Замена: } y = \sin x \Big/ = \int \left(1-y^2\right)^3 dy = \int \left(1-y^2\right)\left(1-2y^2+y^4\right) dy =$$
$$= \int \left(1-2y^2+y^4-y^2+2y^4-y^6\right) dy = \int \left(1-3y^2+3y^4-y^6\right) dy =$$
$$= y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7 + C = \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

2) $$\int \cos^6 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8}\int \cos^2 x d(\sin 2x) =$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 x + C.$$

3.2 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

$R(\sin x, \cos x)\, dx$ – рациональная функция (то есть функция, которая получается из $\sin x$ и $\cos x$ только действиями “+”, “−”, “·”, “:”).

Универсальная замена (срабатывает всегда):

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t; \tag{3.4}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \tag{3.5}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{3.6}$$

Более простые замены (но работают не всегда!):

а) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ делаем замену: $\cos x = t$.

б) Если $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ делаем замену: $\sin x = t$.

в) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ делаем замену:

$\operatorname{tg} x = t$, тогда: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Пример

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 5\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{4 - 4t^2 + 6t + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C.$$

3) $$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}} = (\operatorname{tg} x = t) = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3} dt =$$

$$= \int \frac{1 + 2t^2 + t^4}{t^3} dt = \int \left(t^3 + 2t^{-1} + t\right) dt = \frac{t^{-2}}{-2} + 2\ln|t| + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 2\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

4) $$\int \frac{\sin 2x}{1 + 4\cos^2 x} dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{1 + 4\cos^2 x} dx =$$

$$= \Bigg/ \begin{array}{l} R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \text{ замена: } \cos x = t \\ x = \arccos t; \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{array} \Bigg/ =$$

$$= -2\int \frac{\sqrt{1-t^2}\cdot t}{1+4t^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -2\int \frac{tdt}{1+4t^2} = -\frac{d\left(t^2\right)}{1+4t^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{d\left(1+4t^2\right)}{1+4t^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|1+4t^2\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|1+4\cos^2 x\right| + C.$$

5) $$\int \frac{dx}{2 - \cos x} = \Big/ \text{Замена: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Big/ = \int \frac{2dt}{\left(2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{2 + 2t^2 - 1 + t^2} = 2\int \frac{dt}{1+3t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}t)}{1 + (\sqrt{3}t)2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Решите самостоятельно:

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x+2}$

3.3 Интегрирование произведений синусов и косинусов

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) \tag{3.7}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \tag{3.8}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)) \tag{3.9}$$

Пример

$$\int \cos 9x\cos 5x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 14x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{28}\sin 14x + C.$$

8) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx = \int\left(\frac{1}{2}\left(\sin\left(-\frac{x}{3}\right)+\sin x\right)\right)dx =$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{3}dx + \frac{1}{2}\int\sin x dx = \frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C.$

9) $\displaystyle\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx = \int\frac{1}{2}\Big(\cos(-x)-\cos 3x\Big))\sin 3x dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int\cos x\sin 3x dx - \frac{1}{2}\int\cos 3x\sin 3x dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 4x)dx-$

$\displaystyle-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\sin 6x dx = \frac{1}{4}\int\sin 2x dx + \frac{1}{4}\int\sin 4x dx - \frac{1}{4}\int\sin 6x dx =$

$\displaystyle= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x + C.$

Решите самостоятельно:

10) $\displaystyle\int \cos x\cos^2 3x dx.$