ющих отрезку $[a,\, b]$, слагаемые, отвечающие отрезку $[c,\, b]$, сокращаются и выполнено:

$S_{\widetilde{\Pi}} - S_{\widetilde{\Pi'}} = S_{\Pi} - S_{\Pi'}$.

Следовательно, для любых разбиений Π и Π' с рангом дробления $\lambda < \delta$ выполнено: $\Big| S_{\Pi} - S_{\Pi'} \Big| < \varepsilon$.

В частности, если выбрать $S_{\Pi} = \overline{S_n}$, $S_{\Pi'} = \underline{S_n}$, получим: $\Big| \overline{S_n} - \underline{S_n} \Big| < \varepsilon$, то есть выполнен критерий существования интеграла на $[a,\, c]$. Аналогично для $[c,\, b]$.

■

2.4 Интегрируемость кусочно-непрерывных функций

Лемма 1

Пусть функция $h(x) \equiv 0$ внутри интервала $(a,\, b)$ и имеет произвольные значения на концах отрезка $[a,\, b]$: $h(a)$ и $h(b)$. Тогда $h(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b h(x)\, dx = 0.$$

Доказательство:

Устроим разбиение отрезка $[a,\, b]$ и составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i) \triangle x_i.$$

Поскольку $h(x) \equiv 0$ внутри интервала $(a,\, b)$, то все слагаемые интегральной суммы равны нулю, кроме, быть может, крайних: первое слагаемое при $\xi_1 = a$ и последнее слагаемое при $\xi_n = b$. Следовательно, от интегральной суммы останется не болше двух слагаемых:

$$S_n = h(\xi_1) \triangle x_1 + h(\xi_n) \triangle x_n \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0,$$

что и доказывает лемму.

■

Лемма 2

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,\, b]$. Пусть функция f_1 совпадает с f на интервале $(a,\, b)$ и имеет произвольные значения на концах отрезка $[a,\, b]:\ \ f_1(a)$ и $f_1(b)$. Тогда функция $f_1(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

<u>Доказательство:</u>

Функция $h(x) = f_1(x) - f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, $h(x)$ интегрируема, и интеграл от нее равен нулю. А значит $f_1(x) = h(x) + f(x)$ интегрируема как сумма интегрируемых функций:

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^b h(x)dx}_{=0} + \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

■

Определение

Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a,\, b]$, если существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, что $f(x)$ непрерывна в любом интервале $(x_k,\ x_{k+1})$ и имеет конечные односторонние пределы в точках разбиения:

$$f(x_0+0),\quad f(x_1-0),\quad f(x_1+0),\ \ldots\ldots,\ f(x_n-0).$$

Теорема 7

Кусочно-непрерывная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,\, b]$, интегрируема на этом отрезке.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $x_0,\ x_1,\ .\ .\ .\ .\ .\ x_n$ – точки разбиения отрезка $[a,\ b]$ из определения кусочно-непрерывной функции. Пусть функция $f_k(x)$ определена на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$, совпадает внутри интервала (x_k, x_{k+1}) с $f(x)$, а на концах отрезка принимает значения $f(x_k+0)$ и $f(x_{k+1}-0)$ соответственно. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ функция $f_k(x)$ будет непрерывна на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$. Значит по теореме 2 она интегрируема на этом отрезке. Функция $f(x)$ может отличаться от $f_k(x)$ только в крайних точках $[x_k,\ x_{k+1}]$, поэтому по лемме 2 она интегрируема на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$ и выполнено равенство:

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\,dx.$$

Воспользуемся свойством аддитивности интеграла и получим, что f интегрируема на $[a,\ b]$ и справедливо соотношение:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\,dx.$$

■

Теорема 8

Пусть кусочно-непрерывная функция $g(x) \geqslant 0$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b g(x)dx = 0. \tag{2.7}$$

Тогда $g(x)$ может быть отлична от нуля лишь в конечном числе точек.

Доказательство:

1) Пусть $g(x)$ – непрерывна. Тогда $g(x)\ \equiv\ 0$. Действительно, если $g(x) \not\equiv 0$, то существует точка $c \in [a,\ b]$ такая, что $g(c) > 0$. В силу непрерывности $g(x)$ существует отрезок $[\alpha,\ \beta]$, в котором она строго положительна:

$$g(x) \geqslant g_0 > 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta g(x)dx + \underbrace{\int\limits_{x \notin [\alpha,\beta]} g(x)dx}_{\geq 0} \geqslant \int\limits_\alpha^\beta g(x)dx \geqslant g_0(\beta - \alpha) > 0,$$

что противоречит условию (2.7).

2) Предположим теперь, что $g(x)$ – это кусочно-непрерывная функция, которой соответствует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда:

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = 0.$$

Так как $g(x) \geq 0$, то из последней формулы следует, что:

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = 0 \quad (k = 0, \ldots n-1).$$

Функция $g(x)$ непрерывна на интервале $(x_k,\, x_{k+1})$. Следовательно, $g(x) \equiv 0$ на $(x_k,\, x_{k+1})$. А значит возможными точками, где $g(x)$ положительна, могут быть лишь точки разрыва $x_0, x_1, \ldots,\ x_n$, которых конечное число.

■

2.5 Свойства определённого интеграла

1) $\int\limits_a^b Af(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Доказательство:

$$\int\limits_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Af(\xi_i)\triangle x_i = A\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\triangle x_i = A\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

■

2) Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы, то:

$$\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

<u>Доказательство:</u>
$\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i))\triangle x_i =$
$= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\triangle x_i + \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\triangle x_i = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

■

3) Интегрирование неравенств. Пусть $a < b$. Если на отрезке $[a,\, b]$ всюду выполнено неравенство: $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то неравенство может быть проинтегрировано:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

<u>Доказательство:</u>
$\int\limits_a^b \varphi(x)dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b(\varphi(x)-f(x))dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\underbrace{(\varphi(\xi_i)-f(\xi_i))}_{\geqslant 0}\underbrace{\triangle x_i}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$

■

Изменение пределов интегрирования. До настоящего момента в определённом интеграле мы полагали, что нижний предел меньше верхнего: $a < b$. Можно распространить определение интеграла на случай $a > b$. Устроим разбиение отрезка $[b,\ a]$:
$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_i > x_{i+1} > \ldots > x_n = b$. Тогда интегральная сумма примет следующий вид:
$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i,\quad$ где $\triangle x_i = x_i - x_{i-1} < 0.$
Интегралом, как и ранее, назовем предел интегральных сумм при измельчении разбиения:

$$\lim_{\lambda\to 0} S_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Будем считать по определению, что $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

4) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$
Доказательство очевидно в силу данного выше определения.

5) Аддитивность интеграла.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

если эти три интеграла существуют.

Доказательство:

Случай, когда точка $c \in (a,\ b)$ был разобран в теореме 5 (формула (2.6)). При $c = a$ или $c = b$ свойство очевидно в силу определения: $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$. Пусть теперь c не принадлежит отрезку $[a,\ b]$, например, $a < b < c$. Тогда по теореме 5:

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx = \Big/ \text{Свойство 4} \Big/ =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

$\blacksquare$

6) Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x), \quad M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$, функция $f(x)$ – интегрируема. Тогда выполнено:

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (2.8)$$

Доказательство:

По свойству 3 мы можем проинтегрировать неравенство: $m \leqslant f(x) \leqslant M$:

$$\int\limits_a^b m dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M dx \ \Leftrightarrow\ m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

■

7) Теорема 9 (Теорема о среднем)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, то существует точка $c \in [a,\, b]$ такая, что выполнено:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{2.9}$$

<u>Доказательство:</u>

Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x), \quad M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$. Тогда по формуле (2.8) получим:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Поскольку $f(x)$ – непрерывная функция, то она принимает все значения между наименьшим m и наибольшим M. Следовательно, существует точка $c \in [a,\, b]$ такая, что:

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

■

2.6 Формула Ньютона-Лейбница

Будем рассматривать интеграл как функцию от его верхнего предела. Рассмотрим отрезок $[a,\ b]$. Если функция $f(x)$ интегрируема в $[a,\, b]$, то она интегрируема и в промежутке $[a,\, x]$, где $x \in [a,\, b]$ (по теореме 6). Поэтому мы можем определить следующую функцию:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{2.10}$$

Теорема 10

Если $f(x)$ – интегрируемая функция, то $\Phi(x)$ – непрерывна.

Доказательство:

$$|\Phi(x_2)-\Phi(x_1)| = \Big|\int\limits_a^{x_2} f(t)dt - \int\limits_a^{x_1} f(t)dt\Big| = \Big|\int\limits_{x_1}^{a} f(t)dt + \int\limits_a^{x_2} f(t)dt\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt\Big| \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \leqslant$$

/По теореме 4 интегрируемая функция всегда ограничена: $|f(t)| \le M$ /

$$\le M|x_2 - x_1| \xrightarrow[x_2\to x_1]{} 0.$$

■

Теорема 11 (Теорема Барроу)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in (a,\ b)$, то в этой точке $\Phi(x)$ дифференцируема и выполнено равенство:

$$\Phi'(x) = f(x). \tag{2.11}$$

Доказательство:

Составим приращение функции $\Phi(x)$. Пусть h таково, что $x+h \in [a,\ b]$. Тогда:

$$\Phi(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt = \int\limits_a^{x} f(t)dt + \int\limits_x^{x+h} f(t)dt.$$

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt. \tag{2.12}$$

Пусть $m' = \min\limits_{t\in[x,\,x+h]} f(t), \quad M' = \max\limits_{t\in[x,\,x+h]} f(t)$. Тогда по свойству 6 (формула (2.8)) выполнено:

$$m'h \leqslant \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M'h \ \Leftrightarrow\ m' \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M'. \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), получаем:

$$m' \le \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \le M'. \tag{2.14}$$

Пусть $h \to 0$. Поскольку функция f непрерывна в точке x, то:
$m' \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ и $M' \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$. Следовательно, по формуле (2.14),

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x),$$

то есть функция $\Phi(x)$ дифференцируема в точке x и выполнено:
$\Phi'(x) = f(x)$.

■

Теорема Барроу позволяет вычислить **производную от интеграла по верхнему пределу:**

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \tag{2.15}$$

Следствие (Теорема 2 из главы 1)

Любая непрерывная функция имеет первообразную.

Доказательство:

В теореме Барроу было доказано, что функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ будет являться первообразной непрерывной функции $f(x)$, то есть был описан способ построения первообразной.

■

Теорема 12 (Формула Ньютона-Лейбница)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.16}$$

Доказательство:

Согласно теореме Барроу, $\Phi(x)$ есть первообразная от функции $f(x)$. Если $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то $F(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются друг от друга на некоторую постоянную $C: \quad \Phi(x) = F(x) + C$. Определим C. Пусть $x = a$. Тогда:

$$\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \;\Rightarrow\; C = -F(a) \;\Rightarrow\; \Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Подставим в полученную формулу $x = b$, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

■

Примеры

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \sin(\pi x)dx = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi},$$

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{\pi}{8}.$$

2.7 Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$. Иногда интеграл удобнее вычислять, заменяя переменную интегрирования.

Теорема 13 (Замена переменной в определенном интеграле)

Пусть $x = \varphi(t)$ и выполнены следующие условия:

1) Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[\alpha,\ \beta]$ и значение $\varphi(t)$ не выходит за пределы отрезка $[a,\ b]$ при изменении $t \in [\alpha,\ \beta]$ (если $f(x)$ непрерывна в бо́льшем промежутке, то можно предполагать, что $\varphi(t)$ не выходит за пределы этого бо́льшего промежутка).

2) $\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b$;

3) Существует производная $\varphi'(t)$, непрерывная на отрезке $[\alpha,\ \beta]$.

Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{2.17}$$

<u>Доказательство:</u>

Согласно теоремам 2 из глав 1 и 2, из непрерывности производной $\varphi'(t)$

следует существование определённого и неопределённого интегралов. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$.
Тогда $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Значит $F(\varphi(t))$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

то есть эти интегралы равны, что и доказывает формулу (2.17).

■

Замечание

В неопределённых интегралах надо было возвращаться к старой переменной x, здесь же в этом нет необходимости.

Пример

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big/ x = \sin t; dx = \cos t\,dt \Big/ = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\Big(t - \frac{\sin 2t}{2}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Интегрирование по симметричному промежутку

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = /t = -x/ = \int\limits_0^a f(-t)dt + \int\limits_0^a f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^a (f(-x) + f(x))dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ – нечетная функция,} \\ 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, & f(x) \text{ – четная.} \end{cases}$$

Теорема 14 (Формула интегрирования по частям)

Пусть u и v – дифференцируемые функции на отрезке $[a,\ b]$. Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du. \tag{2.18}$$

<u>Доказательство:</u>

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b u dv = \Big(\int u dv\Big)\Big|_a^b =$$

$\Big/$Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла$\Big/$

$$= \Big(uv - \int v du\Big)\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \Big(\int v du\Big)\Big|_a^b =$$

$\Big/$Формула Ньютона-Лейбница в обратную сторону для второго слагаемого$\Big/$

$$= uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

$\blacksquare$

Пример

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{x\cdot}_{u} \underbrace{\operatorname{tg}^2 x dx}_{dv} =$$

$$\Big/ u = x, \quad du = dx, \quad dv = \operatorname{tg}^2 x dx, \quad v = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x \Big/$$

$$= x(\operatorname{tg} x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - x) dx = \frac{\pi}{4}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) - \ln\sqrt{2} + \frac{\pi^2}{32}.$$