Содержание

1 Матрицы и операции с ними

Определение 1.1 *Матрицей размера* $[m \times n]$ *называется объект вида*

$$A_{[m\times n]} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где a_{ij} *– элементы матрицы,* $i \in \{1, 2, ..., m\}$*,* $j \in \{1, 2, ..., n\}$*,* m *– количество строк матрицы,* n *– количество столбцов матрицы.*

Замечание 1.1 *В качестве элементов матрицы могут выступать как числа, так и функции.*

Замечание 1.2 *Для краткости будем писать* $A_{[m\times n]} = ||a_{ij}||$*, подразумевая, что имеется в виду матрица*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 1.2 *Если* $m = n$*, то матрица называется квадратной.*

Определение 1.3 *Матрица* $O_{[m\times n]}$ *называется нулевой, если все ее элементы равны нулю.*

Определение 1.4 *Две матрицы* $A_{[m\times n]} = ||a_{ij}||$ *и* $B_{[m\times n]} = ||b_{ij}||$ *называются равными, если* $a_{ij} = b_{ij}$ *при* $i \in \{1, 2, ..., m\}$*,* $j \in \{1, 2, ..., n\}$*.*

Определение 1.5 *Матрица* $C_{[m\times n]} = ||c_{ij}||$ *называется суммой матриц* $A_{[m\times n]} = ||a_{ij}||$ *и* $B_{[m\times n]} = ||b_{ij}||$*, если*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i \in \{1, 2, ..., m\}, \quad j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Сумму обозначают классическим образом: $C = A + B$*.*

Замечание 1.3 *Как видно из определения, складывать можно матрицы только одинаковых размеров. По сути дела сложение матриц производится поэлементно.*

Пример 1.1

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+3) & (3-1) & (-2+1)\\ (2+0) & (4+1) & (1+2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Лемма 1.1 *Операция сложения обладает следующими свойствами:*

1. $A + B = B + A$ *(коммутативность);*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(ассоциаивность);*
3. $A + O = A$ *(существования нейтрального элемента);*
4. *Для любой матрицы A существует матрица $(-A)$ такая, что $A + (-A) = O$ (существование противоположного элемента).*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Согласно определению,

$$A + B = ||a_{ij} + b_{ij}||, \quad B + A = ||b_{ij} + a_{ij}||,$$

причем размеры написанных матриц совпадают. Согласно свойствам вещественных чисел,

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij},$$

значит матрицы равны.
Второе и третье утверждения доказываются аналогично
Докажем четвертое утверждение. Пусть $A = ||a_{ij}||$. Положим $(-A) = ||-a_{ij}||$.
Легко проверить, что $A + (-A) = O$ $\square$

Определение 1.6 *Произведением матрицы $A_{[m\times n]} = ||a_{ij}||$ на вещественное число λ называется матрица $B_{[m\times n]} = ||b_{ij}||$, где $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$. Обозначение стандартно: $B = \lambda A$.*

Операция умножения на число обладает следующими свойствами:

1. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ (ассоциаивность);
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);
4. $1 \cdot A = A$ (существование нейтрального элемента).

Доказательство. Докажем, например, второе свойство. Пусть $A_{[m\times n]} = ||a_{ij}||$. Согласно определению,

$$(\lambda+\mu)A = ||(\lambda+\mu)a_{ij}|| = ||\lambda\cdot a_{ij}+\mu\cdot a_{ij}||,$$

где последнее равенство следует из свойств вещественных чисел. В то же время, согласно определению,

$$\lambda A = ||\lambda\cdot a_{ij}||,\ \mu A = ||\mu\cdot a_{ij}||.$$

Пользуясь определением суммы матриц получаем, что

$$\lambda A+\mu A = ||\lambda\cdot a_{ij}+\mu\cdot a_{ij}||.$$

Этим доказано, что левые и правые части совпадают.
Остальные пункты доказываются аналогично и остаются в качестве упражнения. □

Замечание 1.4 *По сути дела, умножение матрицы на число – это умножение каждого ее элемента на это число.*

Пример 1.2

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot(-2)\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -6\\ 6 & 9\end{pmatrix}.$$

Лемма 1.2 *Для любой матрицы A справедливо равенство*

$$(-A) = (-1)\cdot A.$$

Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. □

Определение 1.7 *Разностью матриц $A_{[m\times n]}$ и $B_{[m\times n]}$ называется матрица $C_{[m\times n]}$ такая, что $A = C+B$. При этом пишут $C = A-B$.*

Лемма 1.3 *В условиях предыдущего определения*

$$C = A+(-B) = A+(-1)\cdot B.$$

Доказательство. Нужно проверить, что $C+B=A$. Действительно,

$$C+B = A+(-B)+B = A+O = A.$$

Второе равенство следует из предыдущей леммы. □

Определение 1.8 *Произведением матрицы* $A_{[m\times n]} = ||a_{ij}||$ *на матрицу* $B_{[n\times k]} = ||b_{ij}||$ *называется матрица* $C_{[m\times k]} = ||c_{ij}||$, *где*

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}, \quad i \in \{1,2,...,m\}, \quad j \in \{1,2,...,k\}.$$

Пример 1.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 4\cdot 0 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 4 \\ (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 3 & 20 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}.$$

В следующей лемме мы предполагаем, что все написанные произведения определены.

Лемма 1.4 *Умножение матриц обладает следующими свойствами:*

1. $(AB)C = A(BC)$ *(ассоциативность);*
2. $(A + B)C = AC + BC$ *(дисстрибутивность);*

Доказательство. Докажем первое свойство. Пусть $A_{[m\times n]} = ||a_{ij}||$, $B_{[n\times k]} = ||b_{ij}||$ и $C_{[k\times l]} = ||c_{ij}||$. Согласно определению произведения матриц,

$$(AB)_{[m\times k]} = ||h_{ij}||,\ h_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}.$$

Далее,

$$((AB)C)_{[m\times l]} = \left|\left|\sum_{r=1}^{k} h_{ir}c_{rj}\right|\right| = \left|\left|\sum_{r=1}^{k}\sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pr}c_{rj}\right|\right|.$$

С другой стороны,

$$(BC)_{[n\times l]} = ||t_{ij}||,\ t_{ij} = \sum_{r=1}^{k} b_{ir}c_{rj}.$$

Далее,

$$(A(BC))_{[m\times l]} = \left|\left|\sum_{p=1}^{n} a_{ip}t_{pj}\right|\right| = \left|\left|\sum_{p=1}^{n} a_{ip}\sum_{r=1}^{k} b_{pr}c_{rj}\right|\right| = \left|\left|\sum_{r=1}^{k}\sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pr}c_{rj}\right|\right|,$$

где последнее равенство получено просто перегруппировкой членов суммы (изменение порядка суммирования). Тем самым, левая и правая части равны. Второе свойство доказывается аналогично. $\square$

Замечание 1.5 *Заметим, что умножение матриц, вообще говоря, не ассоциативно, то есть*
$$AB \neq BA.$$
Например, в ситуации перемножения
$$[m \times n] \cdot [n \times k], \ m \neq k,$$
перестановка сомножителей невозможна, так как $m \neq k$. Если же перемножаются матрицы
$$[m \times n] \cdot [n \times m], \ m \neq n,$$
то произведение
$$[n \times m] \cdot [m \times n]$$
определено, но в первом случае на выходе получается матрица $[m \times m]$, а во втором – $[n \times n]$.
Пусть теперь перемножаются квадратным матрицы. Рассмотрим произведение
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
С другой стороны,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Кроме того, последний пример показывает, что в случае матриц свойство
$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. ,$$
хорошо известное из свойств чисел, не справедливо. При перемножении ненулевых матриц можно получить нулевую.

Определение 1.9 *Говорят, что матрица $B_{[m\times n]} = ||b_{ij}||$ является транспонированной по отношению к матрице $A_{[n\times m]} = ||a_{ij}||$, если $b_{ij} = a_{ji}$. При этом пишут $B = A^T$. Сама операция называется операцией транспонирования.*

Операция транспонирования обладает следующими свойствами.

Лемма 1.5 *1.* $(A^T)^T = A$*;*

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$*;*

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$*;*

4. $(AB)^T = B^T A^T$*.*

Доказательство. Все равенства проверяются, исходя из определения. и остаются в качестве упражнения. □

2 Определитель

2.1 Перестановки и их свойства

Нам потребуется понятие перестановок для дальнейшей работы с определителями.

Определение 2.1 *Перестановкой называется упорядоченная совокупность чисел* $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ *таких, что*

1) $\sigma(i) \neq \sigma(j)$*, при* $i \neq j$

2) $\sigma(i) \in \{1, \ldots, n\} \ \ \forall i = 1, \ldots, n$

Замечание 2.1 *Легко понять, что из чисел* $1, 2, ..., n$ *можно образовать ровно* $n!$ *перестановок.*

Пример 2.1 *Для трех чисел* $1, 2, 3$ *имеем* $3! = 6$ *различных перестановок:* $(1,2,3), (3,1,2), (2,3,1), (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)$.

Определение 2.2 *Преобразование, при котором в перестановке меняются местами элементы* $\sigma(i), \sigma(j)$*, где* $i \neq j$*, называется транспозицией.*

Определение 2.3 *Если* $i < j$ *и* $\sigma(i) < \sigma(j)$*, то говорят, что элементы образуют порядок. В противном случае – инверсию.*

Определение 2.4 *Перестановка* σ *называется четной, если она имеет четное число инверсий, в противном случае – нечетной. Общее число инверсий будем обозначать через* $|\sigma|$

Пример 2.2 *Рассмотрим перестановку* $\sigma = (3, 1, 2)$ *чисел* $1, 2, 3$ *и определим ее четность. Число* 3 *образует две инверсии, так как оно стоит на первом месте, и больше чисел* 1 *и* 2*. Число* 1 *не образует инверсий с числом* 2*. Итого,* $|\sigma| = 2$*, а значит перестановка четная.*

Пример 2.3 *Рассмотрим перестановку $a = (3, 2, 1, 4, 7, 6, 5)$ и определим ее четность. Число 3 образует инверсию с числами $2, 1$. Число 2, к тому же, образует инверсию с числом 1. Число 1 не образует дополнительных инверсий. Число 7 образует инверсию с числами $6, 5$, число 6 – с числом 5. Итого, имеем $|\sigma| = 6$ инверсий, а значит перестановка четная.*

Легко видеть. что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 *Если в перестановке провести одну транспозицию, то четность перестановки меняется.*

Доказательство. Сначала покажем, что при перестановке двух соседних элементов перестановки, ее четность меняется. Действительно, для любых двух соседних (вообще-то, любых) элементов $\sigma(i), \sigma(i+1)$ перестановки выполнено либо $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, либо $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. В первой ситуации, при перемене местами $\sigma(i)$ и $\sigma(i+1)$ возникает одна дополнительная инверсия. Во втором же случае одна инверсия пропадает. Значит, в обоих случаях четность меняется.

Для доказательства общего факта заметим, что элементы $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ при $i < j$ можно поменять местами за $(j - i) + (j - i) - 1$ транспозиию с соседними элементами. Значит, четность поменяется нечетное число раз, то есть поменяется. $\square$

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу порядка n и свяжем с ней вполне определенную числовую характеристику, называемую определителем, соответствующим этой матрице.

2.2 Определитель и его свойства

Определение 2.5 *Рассмотрим матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Определителем матрицы A называется число $\det A$ (или Δ) такое, что

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам σ чисел $1, \ldots, n$.

Замечание 2.2 *В общем случае сумма $\det A$ содержит $n!$ членов, в каждом из которых в произведении никакие два элемента не принадлежат одной строке или одному столбцу.*

Отметим основные свойства определителя.

Лемма 2.1 $\det A = \det A^T$, *то есть*

$$\det A = \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{1\sigma(n)}.$$

Упорядочим сомножители каждого слагаемого так, чтобы вторые индексы у них возрастали. Тогда каждое слагаемое будет иметь вид $(-1)^{|\sigma|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n}$, где τ – какая-то перестановка чисел $1, ..., n$, причем $\sigma(\tau(i)) = i$. Но тогда перестановка τ имеет такую же четность, как и σ, тем самым для каждого слагаемого справедливо

$$(-1)^{|\sigma|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n} = (-1)^{|\tau|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n},$$

что и доказывает формулу. □

Следствие 2.2 *Строки и столбцы в определителе равноправны.*

Все дальнейшие свойства будем формулировать для строк. Для столбцов они аналогичны благодаря только что доказанному свойству.

Лемма 2.2 *При перестановке любых двух строк определителя, он меняет знак.*

Доказательство. Пусть в исходной матрице A переставили две строки. Полученную таким образом матрицу будем обозначать матрицей B. При перестановке двух строк слагаемые в определители сохраняются, но полученные слагаемые отличаются от исходных одной транспозицией, следовательно имеют разную четность, следовательно данные слагаемые входят в $\det B$ с обратным знаком, следовательно $\det A = -\det B$. □

Следствие 2.3 *Если в определителе есть 2 одинаковые строки, то он равен 0.*

Доказательство. Если в матрице поменять местами 2 одинаковые строки, то сама матрица не меняется, но при этом определитель меняет знак, то есть

$$\det A = -\det A$$
$$2 \det A = 0,$$

следовательно $\det A = 0$. □

Лемма 2.3 *Если в определителе есть строка, состоящая из нулей, то он равен 0.*

Доказательство. Каждое слагаемое будет содержать нулевой сомножитель, знаичт вся сумма равна нулю. □

Лемма 2.4 *Умножение определителя на число равносильно умножению любой его строки на это число.*

Доказательство.

$$k \cdot \det A = k \cdot \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n} = \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot (k a_{\tau(i)i}) \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n}.$$

□

Лемма 2.5 *Если какая-то строка в определителе распадается на сумму, т.е. $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, то и определитель распадается на сумму определителей с этими строками.*

Доказательство.

$$\det A = \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot (b_{\tau(i)i} + c_{\tau(i)i}) \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n} =$$

$$= \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot b_{\tau(i)i} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n} +$$

$$+ \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot c_{\tau(i)i} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n)n}.$$

□

Лемма 2.6 *Если к одной строке определителя прибавить другую, умноженную на число, определитель не изменится.*

Доказательство. Для доказательства достаточно разложить определитель на сумму двух определителей (в одном – исходная строка, во втором - строка, у множенная на число) и вынести число за опредлитель. Второй определитель будет равен нулю, так как содержит две одинаковые строки. □

2.3 Вычисление определителя. Фальшивое разложение. Определитель произведения

Определение 2.6 *Пусть дана матрица $A_{[n\times n]}$. Определитель порядка на единицу меньше, соответствующий той матрице, которая получается из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, называется минором элемента a_{ij} и обозначается M_{ij}.*

Определение 2.7 *Величина*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}.

Для вычисления определителя часто удобно использовать следующую теорему

Теорема 2.4 (Разложение по первой строке)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{1\sigma(n)}.$$

Сначала рассмотрим все такие слагаемые, в которых $\sigma(1) = 1$, потом, где $\sigma(1) = 2$ и так далее до $\sigma(1) = n$. Тогда выражение для определителя преобразуется к виду

$$a_{11} \left(\sum_{\sigma_1} (-1)^{|\sigma_1|} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \right) + a_{12} \left(\sum_{\sigma_2} (-1)^{|\sigma_2|} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \right) + ... +$$

$$+ a_{1n} \left(\sum_{\sigma_n} (-1)^{|\sigma_n|} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \right),$$

где $\sigma_i = (i, \sigma(2), ..., \sigma(n))$. Пусть $\tau_i = (\sigma(2), ..., \sigma(n))$. Ясно, что стоящая впереди число i в перестановке σ_i дает дополнительно к перестановке τ_i инверсии в количестве $i-1$. Значит, $(-1)^{|\sigma_i|} = (-1)^{i-1}(-1)^{|\tau_i|}$, а значит определитель можно переписать в виде

$$(-1)^{1-1} \cdot a_{11} \left(\sum_{\tau_1} (-1)^{|\tau_1|} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \right) +$$

$$+(-1)^{2-1} \cdot a_{12} \left(\sum_{\tau_2} (-1)^{|\tau_2|} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \right) + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot a_{1n} a_{1n} \left(\sum_{\tau_n} (-1)^{|\tau_n|} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \right).$$

Теперь видно, что каждоре выражение в скобках при элементе a_{1j} есть M_{1j}. Учитывая, что $(-1)^{j-1} = (-1)^{j+1}$, получаем требуемую формулу. □

Следствие 2.5 (Разложение по произвольной строке) *Для произвольной строки* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *справедлива формула*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно поставить i-ую строку на первое место таким образом, чтобы первая строчка станла второй и так далее. Такая перестановка приведет к перестановке строк в определителе $i-1$ раз, значит определитель умножится на $(-1)^{i-1}$. Далее остается воспользоваться только что доказанной теоремой. □

Теорема 2.6 (Фальшивое разложение определителя) *Сумма производений элементов одной строки на соответсвтующие алгебраические дополнения другой строки, равна нулю, то есть*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0, \ i \neq k.$$

Доказательство. Разложим определитель по k-ой строке, тогда

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

Так как алгебраические дополнения A_{kj} не зависят от элементов k-ой строки (исходя из определения), то написанное выражение – тождество относительно чисел $a_{k1}, ..., a_{kn}$. Поставим на их место числа $a_{i1}, ..., a_{in}$. Тогда получим разложение определителя, имеющего две одинаковые строки. Этот определитель, согласно свойтсвам, равен нулю. □

Теорема 2.7 (Определитель произведения) *Пусть* A, B *– квадратные матрицы размера* $[n \times n]$, *тогда*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство.

$$\det AB = \begin{vmatrix} \sum\limits_{p_1=1}^{n} a_{1p_1}b_{p_11} & \sum\limits_{p_1=1}^{n} a_{1p_1}b_{p_12} & \sum\limits_{p_1=1}^{n} a_{1p_1}b_{p_13} & \dots & \sum\limits_{p_1=1}^{n} a_{1p_1}b_{p_1n} \\ \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_21} & \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_22} & \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_23} & \dots & \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{np_n}b_{p_n1} & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_n2} & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_n3} & \dots & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_nn} \end{vmatrix}$$

Используя свойство линейности, по очереди получаем

$$\sum_{p_1=1}^{n} a_{1p_1} \begin{vmatrix} b_{p_11} & b_{p_12} & b_{p_13} & \dots & b_{p_1n} \\ \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_21} & \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_22} & \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_23} & \dots & \sum\limits_{p_2=1}^{n} a_{2p_2}b_{p_2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{np_n}b_{p_n1} & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_n2} & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_n3} & \dots & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{p_1=1}^{n} a_{1p_1} \sum_{p_2=1}^{n} a_{2p_2} \begin{vmatrix} b_{p_11} & b_{p_12} & b_{p_13} & \dots & b_{p_1n} \\ b_{p_21} & b_{p_22} & b_{p_23} & \dots & b_{p_2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{np_n}b_{p_n1} & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_n2} & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_n3} & \dots & \sum\limits_{p_n=1}^{n} a_{1p_n}b_{p_nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{p_1=1}^{n} a_{1p_1} \sum_{p_2=1}^{n} a_{2p_2} \dots \sum_{p_n=1}^{n} a_{np_n} \begin{vmatrix} b_{p_11} & b_{p_12} & b_{p_13} & \dots & b_{p_1n} \\ b_{p_21} & b_{p_22} & b_{p_23} & \dots & b_{p_2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p_n1} & b_{p_n2} & b_{p_n3} & \dots & b_{p_nn} \end{vmatrix}$$

В сумме есть всевозможные комбинации чисел $p_1, ..., p_n$, но ненулевые слагаемые получаются лишь в том случае, когда $p_i \neq p_j$, иначе определитель равен нулю, так как имеет две одинаковые строки. Значит по сути дела идет суммирование по всевозможным перестановкам чисел $1, 2, ..., n$, а значит, последнее выражение может быть переписано в виде

$$\sum_{\tau} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} \begin{vmatrix} b_{\tau(1)1} & b_{\tau(1)2} & b_{\tau(1)3} & \dots & b_{\tau(1)n} \\ b_{\tau(2)1} & b_{\tau(2)2} & b_{\tau(2)3} & \dots & b_{\tau(2)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\tau(n)1} & b_{\tau(n)2} & b_{\tau(n)3} & \dots & b_{\tau(n)n} \end{vmatrix}$$

Если перестановка τ не содержит инверсий, то определитель в правой части равен $\det B$. Если же перестановка содержит инверсии, то из нее можно сделать перестановку, не содержащую инверсий, переставив строки определителя нужное количество раз. При этом определитель умножится на $(-1)^{|\tau|}$. Тем самым, получим

$$\sum_{\tau}(-1)^{|\tau|}a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}...a_{n\tau(n)}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

□

3 Обратная матрица

Определение 3.1 *Квадратная матрица $E_{[n\times n]} = ||e_{ij}||$ называется единичной, если $e_{ii} = 1$ и $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$.*

Замечание 3.1 *Пусть $A_{[n\times n]}$ и $E_{[n\times n]}$ – единичная матрица, тогда*

$$AE = EA = A.$$

Пусть A – квадратная матрица порядка n, а E – единичная матрица того же порядка.

Определение 3.2 *Матрица B называется правой обратной к матрице A, если $AB = E$. Матрица C называется левой обратной к A, если $CA = E$*

Лемма 3.1 *Если для матрицы A существуют левая и правая обратные, то они равны.*

Доказательство. Действительно, пусть B, C – правая и левая обратные матрицы к матрице A соответственно. Используя ассоциативность умножения и определения левой и правой обратных матриц, получим

$$C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B.$$

□

Определение 3.3 *Если для квадратной матрицы A существуют правая и левая обратная, то по предыдущей лемме они равны. В этом случае говорят, что существует обратная матрица к матрице A, и обозначают ее A^{-1}.*

Описание обратной матрицы дает следующая теорема.

Теорема 3.1 *Для того, чтобы для матрицы существовали левая и правая обратные, необходимо и достаточно, чтобы* $\det A \neq 0$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует какая-нибудь из обратных матриц, например B. Тогда $AB = E$ и из теоремы об определителе произведения получим, что $\det(AB) = \det A \det B = \det E = 1$, откуда $\det A \neq 0$.
Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$D = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Покажем, что эта матрица является левой обратной для A. Действительно, рассмотрим произвольный элемент c_{ij} произведения DA.

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki}.$$

При $i = j$ получаем, что сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki}$ преобразуется в $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$ и является разложением определителя матрицы A по j-ому столбцу. Тогда все элементы $c_{jj} = 1$. Если же $i \neq j$, то согласно теореме о фальшивом разложении определителя сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki}$ равна нулю. Значит, $c_{ij} = 0$ и мы получаем определение единичной матрицы.
Аналогично доказывается, что D является правой обратной для A. □

Следствие 3.2 *Если* $\det A \neq 0$*, то*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Определение 3.4 *Квадратная матрица с отличным от нуля определителем называется невырожденной.*

Лемма 3.2 *Пусть для квадратной матрицы A существует A^{-1}, тогда*

1. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$;
2. $(A^{-1})^{-1} = A$;

3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. 1. Так как $\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det A \det A^{-1} = 1$ и $\det A \neq 0$, то

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

2. Так как $A^{-1} \cdot A = E$ и по предыдущему пункту $\det A^{-1} \neq 0$, то существует $(A^{-1})^{-1}$, а значит

$$(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot E = (A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A = E \cdot A = A.$$

3. Так как $A \cdot A^{-1} = E$, то

$$E = E^T = \left(A \cdot A^{-1}\right)^T = (A^{-1})^T A^T,$$

откуда и получается требуемое равенство.
4. Покажем, что $B^{-1}A^{-1}$ – правая обратная для AB. Действительно,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Аналогично показывается, что $B^{-1}A^{-1}$ является и левой обратной. Значит, она является обратной. $\square$

4 Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Определение 4.1 *Матриа $A_{[1\times n]}$ называется строкой длины n. Матрица $A_{[n\times 1]}$ назовается столбцом высоты n.*

Так как строки и столбцы являются матрицами, то к ним применимы операции сложения и умножения на число, введенные ранее для матриц. Все дальнейшее описывается для строк, но справедливо и для столбцов.

Определение 4.2 *Линейной комбинацией строк $A_1, ..., A_k$ длины n называется строка A вида*

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k,$$

где α_i – некоторые числа.

Если $A = ||a_{1i}||$, $A_t = ||a^t_{1i}||$, $i \in \{1, ..., n\}$, $t \in \{1, ..., k\}$, то последнее равенство примет вид

$$a_{1i} = \alpha_1 a^1_{1i} + \alpha_2 a^2_{1i} + ... + \alpha_k a^k_{1i}.$$

Определение 4.3 *Строки $A_1, ..., A_k$ длины n называются линейно независимыми (ЛНЗ), если равенство*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k = 0$$

возможно лишь в том случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$. Иначе строки называются линейно зависимыми (ЛЗ).

Лемма 4.1 *Строки $A_1, ..., A_k$ длины n ЛЗ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из строк является линейной комбинацией других.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k = 0$$

не при всех ненулеввых α_i (справа стоит не число 0, а нулевая строка). Не нарушая общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$A_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_k\right).$$

Достаточность. Не нарушая общности, пусть $A_1 = \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k$. Тогда

$$A_1 - \alpha_2 A_2 - ... - \alpha_k A_k = 0,$$

при этом коэффициент при A_1 не равен нулю. □

Определение 4.4 *Минором k-ого порядка матрицы $A_{[m\times n]}$ называется определитель, стоящий на пересечении каких-либо k строк и k столбцов этой матрицы ($k \leq \min(m, n)$).*

Рассмотрим матрицу $A_{[m\times n]}$ и число $\mathrm{Rg}A$. Если все элементы матрицы A равны нулю, то положим $\mathrm{Rg}A = 0$. Иначе найдем в матрице A минор максимального порядка k, отличный от нуля (то есть такой ненулевой минор, что все миноры большего пордяка, если они существуют, равны нулю) и положим $\mathrm{Rg}A = k$.

Определение 4.5 *Число $\mathrm{Rg}A$ называется рангом матрицы A. Ненулевой минор порядка $\mathrm{Rg}A > 0$ называется базисным минором матрицы A.*

Определение 4.6 *Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, называются базисными строками и столбцами.*

Теорема 4.1 (О базисном миноре) *Базисные строки и столбцы матрицы $A_{[m\times n]}$ ЛНЗ. Все строки и столбцы матрицы A могут быть представлены, как линейная комбинация базисных.*

Доказательство. Докажем утверждение для строк. Докажем линейную независимость. Если бы строки базисного минора были ЛЗ, то, согласно лемме, хотя бы одна из них являлась линейной комбинацией других. Но тогда, с помощью элементарных преобразований можно было бы получить в базисном миноре строку из нулей, и определитель был бы равен нулю, что противоречит определению базисного минора.
Докажем вторую часть утверждения. Пусть $\mathrm{Rg}A = r$. Не нарушая общности можно считать, что базисный минор стоит в левом верхнем углу матрицы A (если это не так, то этого можно добиться перестановкой строк и столбцов используя то, что при их перестановке определитель сохраняет свойство быть отличным от нуля). Припишем k-ый столбец справа и p-ую строку снизу и рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr} & a_{pk} \end{vmatrix}.$$

Если $k \in \{1, 2, ..., r\}$, то определитель $\Delta = 0$, так как в нем есть два одинаковых столбца. Если $k > r$, то $\Delta = 0$, так как получившийся определитель имеет порядок $(r+1)$, а порядок базисного минора равен r. Тем самым, $\Delta = 0$ для любого $k = 1, ..., n$. Разложим определитель Δ по последнему столбцу, получим

$$0 = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ... + a_{pk}A_{pk},$$

причем $A_{pk} \neq 0$, так как $A_{pk} = (-1)^{k+p}M_{pk}$, а M_{pk} – базисный минор. Значит,

$$a_{pk} = -\frac{1}{A_{pk}}\left(a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ...a_{rk}A_{rk}\right), \quad \forall k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

То есть строка с номером p является линейной комбинацией строк с номерами $1...r$. $\square$

Определение 4.7 *Элементарными операциями над строками (столбцами) матрицы называются следующие операции:*

- *перестановка двух строк (столбцов) местами;*
- *умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля;*
- *Добавление к одной строке (одному столбцу) другой (другого), умноженной (умноженного) на число.*

Отметим важное свойство ранга, часто используемое на практике.

Лемма 4.2 *Элементарные операции над строками (столбцами) не меняют ранг матрицы.*

Доказательство. Все описанные свойства сохраняют свойство определителя быть отличным от нуля. $\square$

Определение 4.8 *Говорят, что матрица $A_{[m\times n]}$ имеет ступенчатый вид, если*

- *все ненулевые строки расположены над нулевыми строками;*
- *если $a_{1k_1}, a_{2k_2}, ..., a_{rk_r}$ – первые ненулевые элементы ненулевых строк матрицы, отсчитанные слева направо, то $k_1 < k_2 < ... < k_r$.*

Лемма 4.3 *Любая матрица размера $[m\times n]$ может быть приведена к ступенчатому виду.*

Доказательство. Пусть в первом столбце матрицы $A_{[m\times n]}$ есть какой-то ненулевой элемент. Поставим строку с этим ненулевым элементом на первое место. Чтобы не вводить лишних обозначений предположим, что $a_{11} \neq 0$. Наша цель – обнулить все элементы a_{i1} при $i \in \{2, ..., m\}$. Для этого добавим к i-ой строке первую, умноженную на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ при $i \in \{2, ..., m\}$. Таким образом, все элементы первого столбца полученной матрицы, кроме a_{11}, будут равны нулю. Мысленно вычеркиваем первую строку и первый столбец, получаем матрицу $A_{[(m-1)\times(n-1)]}$, к ней применяем описанный алгоритм.
Если в первом столбце нет ненулевого элемента, мысленно вычеркиваем его, получая матрицу $A_{[m\times(n-1)]}$ и применяем к ней описанный алгоритм. $\square$

Лемма 4.4 *Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в ее ступенчатом виде*

Доказательство. Рассмотрим минор, стоящий на пересечении получившихся ненулевых строк и столбцов, содержащих первый ненулевой элемент каждой ненулевой строки. Такой определитель отличен от нуля, так как равен произведению элементов, стоящих на диагонали (проверьте это!). Взяв любой минор (если он существует) большего порядка, мы получим определитель, содержащий хотя бы одну строку из нулей. Согласно свойствам, такой определитель равен нулю. Значит, ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в ее ступенчатом виде. $\square$

5 Понятие линейного пространства

Определение 5.1 *Множество L с элементами $x, y, z, ...$ называется линейными (векторным) пространством, если*

1. *Введена операция сложения, которая любым двум элементам из L сопоставляет элемент из L, то есть*

$$x, y \in L \Rightarrow (x + y) \in L$$

2. *Введена операция умножения на число $\lambda \in R$, которая любому $x \in L$. сопоставляет $\lambda \cdot x \in L$,*

причем для любых $x, y, z \in L$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. *существует нейтральный элемент $0 \in L$ такой, что $0 + x = x$;*
4. *Для любого $x \in L$ существует противоположный элемент $(-x)$, что $x + (-x) = 0$;*
5. $1 \cdot x = x$;
6. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x)$;
7. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
8. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Пример 5.1 *Множество матриц размера $[m \times n]$ с введенными операциями сложения и умножения на число образуют линейное пространство. Все свойства были доказаны, когда изучались соответствующие операции. В частности, строки и столбцы длины n образуют линейное пространство.*

Пример 5.2 *Рассмотрим многочлены $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ степени не выше чем n со стандартными операциями сложения и умножения на число. Легко видеть, что они образуют линейное пространство.*

Пример 5.3 *Многочлены степени n не образуют линейное пространство. Почему?*

Во всех примерах, приведенных выше, сложение и умножение на число вводятся очень естественно. Приведем и менее естественные примеры.

Пример 5.4 *Векторы, подробно изученные в школе, образуют линейное пространство по отношению к операциям сложения векторов и умножения вектора на число.*

Пример 5.5 *Рассмотрим множество положительных чисел и положим для* $a, b > 0$
$$a + b = a \cdot b.$$
Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. *Положим*
$$\lambda \cdot a = a^{\lambda}.$$
Легко видеть, что множество положительных чисел с такими введенными операциями сложения и умножения образует линейное пространство.

Следствие 5.1 *Нейтральный элемент единственен*

Доказательство. Предположим, что существует два нейтральных элемента $0_1 \neq 0_2$. Используя свойства 4 и 1,
$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$
□

Следствие 5.2 *Для каждого* $x \in L$ *противоположный элемент* $(-x)$ *единственен.*

Доказательство. Предположим, что существует два противоположных элемента $(-x)_1 \neq (-x)_2$, тогда
$$(-x)_1 = (-x)_1 + 0 = (-x)_1 + (x + (-x)_2) = ((-x)_1 + x) + (-x)_2 = 0 + (-x)_2 = (-x)_2.$$
□

Лемма 5.1
$$0 \cdot x = 0.$$
Обратите внимание, что слева 0 – это число, а справа – элемент линейного пространства.

Доказательство.
$$0 \cdot x = x + (-x) + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x + (-x) = 1 \cdot x + 0 \cdot x + (-x) =$$
$$= (1 + 0) \cdot x + (-x) = 1 \cdot x + (-x) = x + (-x) = 0$$
□

Лемма 5.2
$$(-x) = (-1) \cdot x.$$
Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. □

6 Базис и размерность линейного пространства

Определение 6.1 *Линейной комбинацией элементов $x_1, ..., x_n$ из ЛП L называется элемент вида*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \quad \alpha_i \in R$$

Определение 6.2 *Элементы $x_1, ..., x_n$ из ЛП L называются ЛНЗ, если равенство*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

возможно в том и только том случае, когда $\alpha_i = 0$. Иначе элементы называются ЛЗ.

Пример 6.1 *Рассмотрим линейное пространство строк длины 3. Покажем, что строки*

$$x_1 = (1, 0, 0),\ x_2 = (0, 1, 0),\ x_3 = (0, 0, 1)$$

линейно независимы. Для этого рассмотрим равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = (0, 0, 0),$$

которое преобразуется в равенство

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Отсюда следует, что равенство возможно только когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

а значит элементы ЛНЗ.

Пример 6.2 *Рассмотрим линейное пространство многочленов степени не выше, чем n. Покажем, что многочлены*

$$1, x, x^2, ..., x^n$$

ЛНЗ. От противного, предположим, что найдутся не все нулевые коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$, что равенство

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n = 0,$$

справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$. Это значит, что наш многочлен имеет бесконечное число корней, что невозможно, так как многочлен степени n имеет не более n корней. Значит, наше предположение неверно, и функции ЛНЗ.

Определение 6.3 *Говорят, что элемент $x \in L$ является линейной комбинацией элементов $x_1, ..., x_n \in L$, если*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Справедлива теорема, аналогичная теореме, сформулированной и доказанной нами для строк.

Теорема 6.1 *Элементы ЛП $x_1, ..., x_n$ ЛЗ тогда и только тогда, когда хотя бы один из элементов является линейной комбинацией других.*

Доказательство. Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы для строк. □

Определение 6.4 *Набор ЛНЗ элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ из ЛП L называется базисом, если для любого $x \in L$ найдутся $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что*

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n.$$

При этом говорят, что x разложен по базису $e_1, e_2, ..., e_n$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются коэффициентами разложения элемента x по базису.

Пример 6.3 *Рассмотрим множество строк длины 3. Покажем, что строки*

$$e_1 = (1, 0, 0), \ e_2 = (0, 1, 0), \ e_3 = (0, 0, 1)$$

образуют базис. Линейная независимость была проверена выше. Осталось показать, что любую строку длины 3 можно представить, как линейную комбинацию данных. Действительно, если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – произвольная строка, то

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Пример 6.4 *Ясно, что функции*

$$1, x, x^2, ..., x^n$$

являются базисом в простарнстве многочленов степени не выше, чем n.

Лемма 6.1 *Разложение по базису единственно.*

Доказательство. Предположим, что существует два разложения:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

и
$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n.$$
Вычитая их, получим
$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)\, e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, e_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\, e_n.$$
Так как элементы $e_1, e_2, ..., e_n$ образуют базис, то они ЛНЗ, а значит приведенное равенство возможно тольок когда $\alpha_i - \beta_i = 0$ при всех i. То есть $\alpha^i = \beta^i$ и теорема доказана. $\square$

Если
$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$
и
$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n,$$
то, согласно свойствам линейного пространства и единственности разложения по базису, имеем
$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)\, e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, e_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)\,,$$
$$\lambda x = \lambda \alpha_1 e_1 + \lambda \alpha_2 e_2 + ... + \lambda \alpha_n e_n$$

Определение 6.5 *Говорят, что ЛП L имеет размерность n, если в нем найдется n ЛНЗ элементов, а любые $(n+1)$ элементов будут ЛЗ. Иначе пространство называется бесконечномерным. Обозначение* $\mathrm{dimL} = \mathrm{n}$ *(*$\mathrm{dimL} = \infty$*).*

Выясним связь базиса и размерности.

Лемма 6.2 *Пусть L – ЛП и* $\mathrm{dimL} = \mathrm{n}$. *Тогда любые n ЛНЗ элементов этого ЛП образуют базис.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – n ЛНЗ элементов ЛП L. Рассмотрим систему элементов $x, e_1, e_2, ..., e_n$. Эта система ЛЗ, так как $\mathrm{dimL} = \mathrm{n}$, а в системе $n+1$ элемент. Значит, равенство
$$\beta x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0$$
возможно не при всех нулевых коэффициентах. Заметим, что $\beta \neq 0$, так как иначе все $\alpha^i = 0$ в силу ЛНЗ набора $e_1, e_2, ..., e_n$. Так как x – произвольный элемент L, теорема доказана. $\square$

Лемма 6.3 *Пусть L – ЛП и $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис в нем. Тогда* $\mathrm{dimL} = \mathrm{n}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные $n+1$ элементов $x_1, ..., x_{n+1}$ ЛП L и разложим их по базису. Получим

$$x_i = \alpha_{i1}e_1 + \alpha_{i2}e_2 + ... + \alpha_{in}e_n.$$

Составим матрицу из коэффициентов разложения, записанных по строкам.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)n} \end{pmatrix}.$$

Так как размеры матрицы $[(n+1) \times n]$, то ее ранг не превосходит n. Значит, по теореме о базисном миноре хотя бы одна из строк является линейной комбинацией других.Тем самым, набор $x_1, ..., x_{n+1}$ ЛЗ. □

Пример 6.5 *Размерность пространства строк длины* 3 *равна* 3. *Размерность пространства многочленов степени не выше n равна* $(n+1)$.

7 Системы линейных алгебраических уравнений

7.1 Основные определения

Определение 7.1 *Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется объект вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

числа a_{ij} называются коэффициентами системы, x_i – неизвестными, b_i – свободными членами.

Определение 7.2 *Решением системы (1) называется набор из чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$ такой, что при подстановке их в каждое уравнение системы (1) получим верное равенство, то есть*

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}.$$

Определение 7.3 *Система (1) называется однородной, если все $b_i = 0$, иначе она называется неоднородной.*

Определение 7.4 *Система (1) называется определенной, если она имеет ровно одно решение, иначе она называется неопределенной.*

Определение 7.5 *Система (1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, иначе она называется несовместной.*

Замечание 7.1 *Рассмотрим вопрос о количестве решений системы, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Геометрически каждое уравнение (в случае, если $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 \neq 0$) задает прямую на плоскости. Ясно, что прямые могут пересекаться, тогда рассматриваемая система имеет ровно одно решение. Прямые могут быть параллельны, и тогда система не имеет решений вовсе. В конце концов, прямые могут совпадать, и тогда система имеет бесконечное число решений.
Аналогичные рассуждения можно провести, рассматривая три уравнения с тремя неизвестными. Каждое уравнение в этом случае будет задавать плоскость. Полезно рассмотреть и два уравнения с тремя неизвестными, и проанализировать, что получается.

Оказывается, однородная СЛАУ всегда имеет хотя бы одно решение.

Лемма 7.1 *Однородная система всегда совместна.*

Доказательство. Действительно, можно положить $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. $\square$

Определение 7.6 *Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей коэффициентов системы (1).

Определение 7.7 *Столбец*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

называется столбцом свободных членов системы (1).

Определение 7.8 *Матрица*

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется расширенной матрицей системы (1).

Из вида расширенной матрицы ясно, что по каждой системе линейных алгебраических уравнений выписывается расширенная матрица, и наоборот, по каждой расширенной матрице системы может быть выписана система линейных алгебраических уравнений.

Определение 7.9 *Столбец*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

называется столбцом неизвестных.

Замечание 7.2 *Система (1) может быть записана, как матричное уравнение*

$$AX = B$$

7.2 Равносильные системы линейных алгебраических уравнений

Зададимся вопросом о равносильных системах линейных алгебраических уравнений.

Определение 7.10 *Две системы линейных алгебраических уравнений называются равносильными, если они имеют одинаковое множество решений*

Так как между СЛАУ и расширенными матрицами СЛАУ имеется взаимно однозначное соответствие, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7.1 *Пусть A_p – расширенная матрица некоторой СЛАУ. Пусть матрица $\widetilde{A_p}$ получена из матрицы A_p путем элементарных преобразований строк. Тогда СЛАУ, отвечающие A_p и $\widetilde{A_p}$, равносильны.*

Доказательство. Обсудим каждое элементарное преобразование в отдельности.
Ясно, что перестановка строк расширенной матрицы СЛАУ соответствует перестановке уравнений в СЛАУ, что не меняет самой СЛАУ, а значит и множества ее решений.
Далее, умножение какой-то строки расширенной матрицы на число, отличное от нуля, равносильно умножению соответствующего уравнения на это число, что не меняет множества решений данного уравнения, а значит и СЛАУ.
Предположим, что к i-ой строке матрицы мы прибавили j-ую, умноженную на число k. Это будет соответствовать преобразованию i-ого уравнения в

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + k \cdot (a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n) = b_i + k \cdot b_j$$

Ясно, что если $(c_1, c_2, ..., c_n)$ – решение исходной СЛАУ, то

$$a_{i1}c_1 + ... + a_{in}c_n = b_i,$$

$$a_{j1}c_1 + ... + a_{jn}c_n = b_j,$$

а значит это же решение имеет и новая СЛАУ. Наоборот, пусть $(c_1, ..., c_n)$ – решение новой СЛАУ, тогда оно удовлетворяет j-ому уравнению, а значит

$$a_{j1}c_1 + ... + a_{jn}c_n = b_j.$$

Но тогда в i-ом уравнении

$$a_{i11} + ... + a_{inn} + k \cdot (a_{j11} + ... + a_{jnn}) = a_{i11} + ... + a_{inn} + k \cdot b_j = b_i + k \cdot b_j$$

и

$$a_{i11} + ... + a_{inn} = b_i,$$

что соответствует i-ому уравнению исходной СЛАУ. Так как другие уравнения сопадают, доказано, что системы эвивалентны. $\square$

7.3 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 7.2 (Кронекера-Капелли) *СЛАУ (1) совместна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p$.

Доказательство. Необхзодимость. Обозначим

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда (1) перепишется в виде

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B.$$

По условию существует набор чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ такой, что

$$A_1c_1 + A_2c_2 + ... + A_nc_n = B,$$

то есть столбец B является линейной комбинацией столбцов $A_1, ..., A_n$. Значит, существует базисный минор матрицы A_p, не содержащий столбца B. Так как матрица A_p отличается от матрицы A лишь столбцом B, то этот же минор будет базисным минором и для матрицы A_p. Значит, $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p$.
Достаточность. Возьмем в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так как $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p$, то он же будет и базисным минором для матрицы A_p. Тогда, по теореме о базисном миноре, столбец B является линейной комбинацией столбцов, входящих в базисный минор. То есть столбец B является линейной комбинацией столбцов $A_1, A_2, ..., A_n$ с, возможно, не всеми ненулевыми коэффициентами, что и доказывает теорему. □
Уточним теорему Кронекера-Капелли.

Теорема 7.3 *Рассмотрим (1). Пусть* $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p$. *Если* $\mathrm{Rg}A = n$, *то решение (1) единственно. Если* $\mathrm{Rg}A < n$, *то (1) имеет бесконечное число решений.*

Доказательство. Докажем первую часть утверждения. Если $\mathrm{Rg}A = n$, то базисный минор матрицы A содержит все ее столбцы. Ясно, что он же является и базисным для матрицы A_p. Значит, столбец B является линейной комбинацией базисных столбцов $A_1, ..., A_n$ матрицы A, а разложение по ним единственно.
Докажем вторую часть утверждения. Не нарушая общности, пусть первые r столбцов матрицы A входят в базисный минор, причем $r < n$. Так как этот же минор является базисным для A_p, то

$$B = c_1A_1 + ... + c_rA_r + 0 \cdot A_{r+1} + ... + 0 \cdot A_n.$$

В то же время, например,

$$A_{r+1} = \alpha_1A_1 + ... + \alpha_rA_r,$$

А значит

$$B = c_1 A_1 + ... + c_r A_r + \beta \cdot A_{r+1} - \beta \cdot A_{r+1} + ... + 0 \cdot A_n =$$
$$= (c_1 - \beta\alpha_1)A_1 + ... + (c_r - \beta\alpha_r) + \beta \cdot A_{r+1} + ... + 0 \cdot A_n.$$

Тем самым,

$$(c_1 - \beta\alpha_1, c_2 - \beta\alpha_2, ..., c_r - \beta\alpha_r, \beta, 0, ..., 0)$$

– решение (1). Так как β – произвольное число, то решений бесконечно много. □

7.4 Отыскание решений определенных систем линейных алгебраических уравнений: методы Крамера и обратной матрицы

Для начала рассмотрим метод Крамера решения определенных СЛАУ. Пусть задана СЛАУ, у которой число уравнений равно числу неизвестных (квадратная СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{2}$$

Обозначим за A_i матрицу, получающуюся из матрицы коэффициентов системы A заменой всех элементов ее i-ого столбца соответствующими элементами столбца свободных членов, т.е.

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.4 (Крамера) *Пусть дана СЛАУ (2) и определитель матрицы коэффициентов* $\det A \neq 0$. *Тогда система (2) имеет единственное решение* $(c_1, c_2, ..., c_n)$, *при этом*

$$c_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Доказательство. Так как $\det A \neq 0$, то $\mathrm{Rg}A = n$. Значит, $\mathrm{Rg}A_p = n$, и по следствию теоремы Кронекера-Капелли, решение системы (2) существует и единственно.

Как мы знаем, система (2) эквивалентна матричному уравнению

$$A \cdot X = B.$$

Раз $\det A \neq 0$, то существует A^{-1}, а значит

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

, то для элемента c_i справедливо соотношение

$$c_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} b_j.$$

Последняя сумма соответствует разложению определителя матрицы A_i по i-ому столбцу, а значит

$$c_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

□

Замечание 7.3 (Метод обратной матрицы) *Из доказательства предыдущей теоремы виден еще один способ нахождения решения определенной системы – с помощью обратной матрицы, а именно*

$$X = A^{-1} B.$$

7.5 Отыскание всех решений произвольной системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим общий способ получения всех решений произвольной СЛАУ. Пусть требуется решить систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (3)$$

Пусть $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p = r$ и, не нарушая общности предположим, что базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы (в противном случае этого можно добиться перестановкой строк системы и переобозначением переменных после перестановки соответствующих столбцов). Это значит, что уравнения системы с номерами $(r+1),...,m$ являются линейной комбинацией первых r уравнений, и могут не рассматриваться. Итого, эквивалентная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{cases},$$

Перенесем все слагаемые с неизвестными, начиная с $(r+1)$ в правую часть, получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases}.$$

Придадим переменным $x_{r+1},...,x_n$ произвольные значения $c_{r+1},...,c_n$, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}c_{r+1} - ... - a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}c_{r+1} - ... - a_{2n}c_n \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{1(r+1)}c_{r+1} - ... - a_{rn}c_n \end{cases}$$

из r уравнений с r неизвестными. Это определенная система, так как определитель матрицы коэффициентов совпадает с базисным минором исходной матрицы. Значит, из этой системы единственным образом можно найти $c_1,...,c_r$, например, используя формулы Крамера.
Покажем, что таким образом найдены все решения системы. Пусть имеется некоторое решение системы $(c_1^0,...,c_r^0,...,c_n^0)$. По значениям $c_{r+1} = c_{r+1}^0,...,c_n = c_n^0$ значения $c_1 = c_1^0,...,c_r = c_r^0$ согласно описанному выше, находятся единственным способом. Значит, данный алгоритм описывает способ получения всех решений произвольной системы.

Замечание 7.4 *Если* $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p = n$*, то произвольных постоянных* $c_{r+1},...,c_n$ *нет, и решение единственно.*

7.6 Метод Гаусса

Данный метод может быть использован для решения любых СЛАУ как определенных, так и неопределенных.
Рассмотрим матрицу A_p и приведем ее к ступенчатому виду. Как ранее сказано, мы получим эквивалентную исходной систему уравнений с матрицей $\widetilde{A_p}$.

Приводя к ступенчатому виду матрицу A_p, мы попутно привели к ступенчатому виду $\widetilde{A}$ и матрицу A (ее ступенчатый вид $\widetilde{A}$ получается из матрицы $\widetilde{A_p}$ путем выкидывания последнего столбца). Чтобы не нагромождать обозначения будем считать, что элементы $\widetilde{A_p}$ имеют те же обозначения, что и элементы исходной матрицы A_p. В итоге, возможны следующие три ситуации.

1. Если $\mathrm{Rg}A \neq \mathrm{Rg}A_p$, то исходная система эквивалентна системе с матрицей $\widetilde{A_p}$ вида

$$\widetilde{A_p} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1r_1} & a_{1(r_1+1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{2r_2} & \dots & \dots & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rr_r} & \dots & b_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

где $a_{ir_i} \neq 0$ и $b_{r+1} \neq 0$. Как видно, последняя строка матрицы соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n = b_{r+1},$$

которое не имеет решений. Это говорит нам и теорема Кронекера-Капелли.

2. Если $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p = n$, то исходная система эквивалентна системе с матрицей $\widetilde{A_p}$ вида

$$\widetilde{A_p} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$ при $i = 1...n$. Система, согласно теореме Кронекера-Капелли, имеет единственное решение, причем находится оно "снизу-вверх а именно. Из последнего уравнения сразу находим $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. Далее находится переменная x_{n-1}, используя значение переменной x_n. Вообще, справедливо равенство, выражающее переменную x_i через значения переменных $x_{i+1}, ..., x_n$:

$$x_i = \frac{b_i - a_{in}x_n - a_{i(n-1)}x_{n-1} - ... - a_{i(i+1)}x_{i+1}}{a_{ii}}$$

при $i = 1...n$.

3. Если $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p < n$, то исходная система эквивалентна системе с мат-

рицей $\widetilde{A_p}$ вида

$$\widetilde{A_p} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1r_1} & a_{1(r_1+1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{2r_2} & \dots & \dots & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rr_r} & \dots & b_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

где $a_{ir_i} \neq 0$. Базисный минор может быть образован в результате пересечения ненулевых строк и столбцов, содержащих переменные a_{ir_i}. Согласно общей схеме, описанной в предыдущем пункте, всем переменным, кроме переменных x_{r_1}, ..., x_{r_r}, припишем произвольные значения $c_{r+1}, ..., c_{n-r}$. Эти переменные назовем свободными. Напротив, переменные x_{r_1}, ..., x_{r_r} назовем базисными. Перенеся все свободные переменные вправо, а слева оставив только базисные, согласно предыдущему пункту, получим систему, у которой $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A_p = r$, и матрица коэффициентов приведена к ступенчатому виду. Способ нахождения базисных переменных через свободные описан в предыдущем пункте.

7.7 Структура общего решения СЛАУ

Для начала рассмотрим однородную СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Покажем, что множество ее решений образует линейное пространство. Для сохранения обозначений, будем отождествлять решение системы $(c_1, ..., c_n)$ со строкой $(c_1 \ ... \ c_n)$ длины n. Операции сложения строк и умножения строки на число переносятся на множество решений однородной СЛАУ.

Лемма 7.2 *Пусть $X_1 = (c_1, ..., c_n)$ и $X_2 = (d_1, ..., d_n)$ – решения СЛАУ (4), тогда*

1. $\lambda \cdot X_1 = (\lambda \cdot c_1, ..., \lambda \cdot c_n)$ *– решение (4) для любого числа λ;*
2. $X_1 + X_2 = (c_1 + d_1, ..., c_n + d_n)$ *– решение (4).*

Доказательство. 1. Действительно, подставим $(\lambda \cdot c_1, ..., \lambda \cdot c_n)$ в i-ое уравнение системы, получим

$$a_{i1}(\lambda \cdot c_1) + ... + a_{in}(\lambda \cdot c_n) = \lambda(a_{i1}c_1 + ... + a_{in}c_n) = 0,$$

где последнее равенство справедливо, так как $(c_1, ..., c_n)$ – решение (4).
2. Доказывается аналогично и остается в качестве упражнения. $\square$
Из того, что аксиомы линейного пространства справедливы для строк, вытекает следующее следствие.

Следствие 7.5 *Множество решений (4) образует линейное пространство.*

Найдем размерность линейного пространства решений однородной СЛАУ.

Теорема 7.6 (О размерности пространства решений однородной СЛАУ) *Размерность пространства решений однородной СЛАУ (4) равна* $(n-\mathrm{Rg}A)$, *где A – матрица коэффициентов (4).*

Доказательство. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу системы (4) к ступенчатому виду. Число ненулевых уравнений будет равно $r = \mathrm{Rg}A$, а значит, согласно предыдущему пункту, в системе будет r главных переменных и $(n-r)$ свободных. С точностью до перенумерации переменных можно считать, что $x_1, ..., x_r$ – главные. Придадим свободным переменным значения $c_{r+1}, ..., c_n$, перенесем их в правую часть, тогда система примет вид (снова, чтобы не нагромождать обозначения будем считать, что коэффициенты системы, отвечающей $\widetilde{A_p}$ обозначаются так же, как и коэффициенты системы, отвечающей исходной расширенной матрице A_p)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1(r+1)}c_{r+1} - ... - a_{1n}c_n \\ \quad a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2(r+1)}c_{r+1} - ... - a_{2n}c_n \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad a_{rr}x_r = -a_{1(r+1)}c_{r+1} - ... - a_{rn}c_n \end{cases}$$

Решив эту систему, получим выражение базисных переменных через свободные вида

$$\begin{cases} x_1 = \beta_{11}c_{r+1} + \beta_{12}c_{r+2} + ... + \beta_{1(n-r)}c_n \\ x_2 = \beta_{21}c_{r+1} + \beta_{22}c_{r+2} + ... + \beta_{2(n-r)}c_n \\ \quad \dots \\ x_r = \beta_{r1}c_{r+1} + \beta_{r2}c_{r+2} + ... + \beta_{r(n-r)}c_n \end{cases}$$

Придадим по очереди одному из значения $c_{r+1}, ..., c_n$ значение 1, а другим – 0 и получим решения

$$X_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, ..., \beta_{r1}, 1, 0, ..., 0)$$

$$X_2 = (\beta_{12}, \beta_{22}, ..., \beta_{r2}, 0, 1, ..., 0)$$

и так далее, причем

$$X_{n-r} = (\beta_{1r}, \beta_{2r}, ..., \beta_{rr}, 0, 0, ..., 1).$$

Покажем, что они являются базисом в пространстве решений, откуда и будет следовать утверждение теоремы. Для любых $c_{r+1}, ..., c_n$ линейная комбинация

$$c_{r+1}X_1 + ... + c_n X_{n-r}$$

является решением, в котором свободные неизвестные принимают значения $c_{r+1}, ..., c_n$. Так как значения базисных переменных определяются по значению свободных однозначно, то любое решение исходной СЛАУ является линейной комбинацией решения $X_1, ..., X_{n-r}$. Кроме того, набор $X_1, ..., X_{n-r}$ линейно независимый. Тем самым, теорема доказана $\square$

Определение 7.11 *Пусть* $\mathrm{Rg}A = (n-r)$. *Любые* $(n-r)$ *линейно независимых решений однородной СЛАУ (4) называются фундаментальной системой решений (ФСР).*

Определение 7.12 *Пусть* $X_1, ..., X_{n-r}$ *– ФСР системы (4), тогда множество*

$$\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_r$$

называется общим решением однородной СЛАУ (4).

Лемма 7.3 (Свойства общего решения) *Пусть* $X_1, ..., X_{n-r}$ *– ФСР системы (4). Тогда любое ее решение может быть записано, как*

$$\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$$

при некоторых значениях α_i, *и наоборот, выражение*

$$\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}$$

задает решение системы (4) при любых значениях α_i.

А как выглядит структура общего решения неоднородной СЛАУ? Рассмотрим неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (5)$$

Определение 7.13 *Говорят, что СЛАУ (4) является однородной СЛАУ, соответствующей неоднородной СЛАУ (5).*

Определение 7.14 *Любое фиксированное решение СЛАУ (5) называют ее частным решением*

Теорема 7.7 (О структуре общего решения неоднородной СЛАУ)
Пусть X_1 *– частное решение СЛАУ (5), а* X_0 *– общее решение соответствующей однородной СЛАУ (4). Множество всех решений* X *СЛАУ (5) представимо в виде*

$$X = X_0 + X_1$$

Доказательство.

$\square$