$$x_{1,2} = \frac{y^2}{64} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{16}(50 - 60\sqrt{2} + 36) \\ \\ \frac{1}{16}(50 + 60\sqrt{2} + 36) \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{8}(43 - 30\sqrt{2}) \\ \\ \frac{1}{8}(43 + 30\sqrt{2}) \end{array}\right.$$

Точки пересечения:

$\left(\frac{1}{8}(43 - 30\sqrt{2}), 4(-6 + 5\sqrt{2})\right)$ и $\left(\frac{1}{8}(43 + 30\sqrt{2}), 4(-6 - 5\sqrt{2})\right)$

Решите самостоятельно:

5) Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если $y(M) = 6$ (Ответ: 6).

6) Написать уравнение параболы, если известны:
   а) фокус $F(4{,}3)$ и директриса $D:\ y + 1 = 0$;
   (Ответ: $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$);
   б) фокус $F(2, -1)$ и директриса $D:\ x - y - 1 = 0$;
   (Ответ: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$).

9. Матрицы

Определение

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \Bigg\updownarrow m \text{ строк} \tag{9.1}$$

Определение

Суммой матриц $\underset{m\times n}{A}$ и $\underset{m\times n}{B}$ называется матрица $C = A + B$ того же порядка $(m \times n)$, для каждого элемента которой выполнено: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\} \tag{9.2}$$

Определение

Для того, чтобы умножить матрицу A на число α, каждый ее элемент a_{ij} нужно умножить на число α.

$$\alpha A = \{\alpha a_{ij}\} \tag{9.3}$$

Определение
Произведение матриц:

$$\underset{m\times p}{C} = \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} \tag{9.4}$$

где для каждого элемента матрицы C выполнено: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.
Матрицы умножаются по правилу: строка на столбец. Элемент c_{ij} мы получим, если умножим i–тую строку матрицы A на j–тый столбец матрицы B.

Определение

$$A^T = \{a_{ji}\} \tag{9.5}$$

A^T– транспонированная матрица. У нее строки и столбцы переставлены местами.

Определение

$$[A, B] = AB - BA \tag{9.6}$$

$[A, B]$ – коммутатор матриц A и B (ибо в общем случае $AB \neq BA$, а иногда матрицы даже перемножать нельзя).

Определение
$\mathbb{O}$ – нулевая матрица. Все ее элементы равны 0.

Определение
I – единичная матрица. Определяется только для квадратных матриц.

$$\mathrm{I} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\updownarrow n \tag{9.7}$$

Если матрицу умножить на единичную, то она не изменится.

Задачи

1) Вычислить:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}}_{C}$$

Здесь возможны 2 варианта действий:

1) Перемножить A и B, затем результат домножить на C.
2) Перемножить B и C, затем A домножить на полученный результат.

$$B{\cdot}C = \begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-28\cdot 7+93\cdot 2 & -28\cdot 3+93\cdot 1\\ 38\cdot 7-126\cdot 2 & 38\cdot 3-126\cdot 1\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}-10 & 9\\ 14 & -12\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & 9\\ 14 & -12\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}4\cdot(-10)+3\cdot 14 & 4\cdot 9+3\cdot(-12)\\ 7\cdot(-10)+5\cdot 14 & 7\cdot 9+5\cdot(-12)\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}}$$

2)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}}_{C}$$

$$B\cdot C = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\cdot 4-1\cdot 1\\ 2\cdot 4+2\cdot 1\\ 1\cdot 4+1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\ 10\\ 5\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C) = 5\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1+2+2\\ -2+4+3\\ -3+6+4\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\\ 7\end{pmatrix} =$$
$$= \underline{\begin{pmatrix}5\\ 15\\ 25\\ 35\end{pmatrix}}$$

3)
$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$$
$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}}$$

4)
$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n, \quad a \in \mathbb{R}.$$
$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad n = 2.$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad n = 3.$$

По индукции.

Базу уже проверили, докажем переход $n \to n+1$.
$$\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & (n+1)a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

■

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

5) Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A:

$f(x) = x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

(Вместо 1 подразумевается I – единичная матрица)

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}$$
$$-3A = \begin{pmatrix}-3 & -6\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$A^2 - 3A + \mathrm{I} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

6) Найти все матрицы, перестановочные с данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Замечание
Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$.
Обозначим искомую матрицу за B.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + 3b_{12} & 2b_{11} + 4b_{12} \\ b_{21} + 3b_{22} & 2b_{21} + 4b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} + 2b_{21} = b_{11} + 3b_{12} \\ b_{12} + 2b_{22} = 2b_{11} + 4b_{12} \\ 3b_{11} + 4b_{21} = b_{21} + 3b_{22} \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 2b_{21} + 4b_{22} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} = \frac{3}{2}b_{12} \\ 2b_{22} - 2b_{11} - 3b_{12} = 0 \\ 3b_{11} + \frac{9}{2}b_{12} - 3b_{22} = 0 \\ b_{21} = \frac{3}{2}b_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} = \frac{3}{2}b_{12} \\ 6b_{22} - 6b_{11} - 9b_{12} = 0 \\ 6b_{11} + 9b_{12} - 6b_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} = \frac{3}{2}b_{12} \\ b_{22} = b_{11} + \frac{3}{2}b_{12} \end{cases}$$

Итак, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \frac{3}{2}b_{12} & b_{11} + \frac{3}{2}b_{12} \end{pmatrix}$, где b_{11} и b_{12} – любые числа.

7) Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны нулевой матрице $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим искомую матрицу за $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ca+dc&cb+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=0\\b(a+d)=0\\c(a+d)=0\\cb+d^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=0\\a=0\\d=0\\c-\text{любое}\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}\\ \begin{cases}c=0\\a=0\\d=0\\b-\text{любое}\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\\ \begin{cases}b\neq0\\c\neq0\\d=-a\\c=-\frac{a^2}{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b\\-\frac{a^2}{b}&-a\end{pmatrix},\ \text{где } b\neq0.\end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}a&b\\-\frac{a^2}{b}&-a\end{pmatrix}$, где a, b – любые числа, $b\neq0$.

8) Убедиться, что уравнению $X^2+X+A=0$, $A=\begin{pmatrix}-6&-5\\0&-6\end{pmatrix}$ удовлетворяют только две матрицы X_1, X_2, которые являются перестановочными и для них справедливы "Формулы Виета":

$$\begin{cases}X_1+X_2=-\mathrm{I}\\X_1X_2=A\end{cases}$$

Обозначим искомую матрицу за $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

$$X^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ca+dc&cb+d^2\end{pmatrix}$$

$$X^2+X+A=\begin{pmatrix}a^2+bc+a-6&ab+bd+b-5\\ca+dc+c&cb+d^2+d-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a^2+a+bc-6=0\\ab+bd+b-5=0\\ca+dc+c=0\\d^2+d+bc-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+a+bc-6=0&(1)\\b(a+d+1)-5=0&(2)\\c(a+d+1)=0&(3)\\d^2+d+bc-6=0&(4)\end{cases}\Leftrightarrow$$

Учитывая, что $c=0$ (в противоположном случае из уравнения (3) имеем: $a+d+1=0$, что противоречит уравнению (2)), получим:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a^2+a-6=0 \\ b(a+d+1)=5 \\ d^2+d-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ \left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=2 \end{array}\right. \\ b(a+d+1)=5 \\ \left[\begin{array}{l} d=-3 \\ d=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=0 \\ a=-3 \\ d=-3 \\ b(-3-3+1)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} c=0 \\ a=2 \\ d=-3 \\ b(2-3+1)=5 \leftarrow \text{неверно} \end{cases} \\ \begin{cases} c=0 \\ a=-3 \\ d=2 \\ b(-3+2+1)=5 \leftarrow \text{неверно} \end{cases} \\ \begin{cases} c=0 \\ a=2 \\ d=2 \\ b(2+2+1)=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=0 \\ a=-3 \\ d=-3 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} c=0 \\ a=2 \\ d=2 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X_1X_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X_2X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$X_1X_2 = X_2X_1$, следовательно, X_1 и X_2 являются перестановочными.

$$X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}$$

$$X_1X_2 = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = A$$

■

9) Найти все такие 2×2 матрицы A и B, что их коммутатор $[A,B]=\mathrm{I}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{22}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{pmatrix}$$

$$AB-BA=$$
$$=\begin{pmatrix}\cancel{a_{11}b_{11}}+a_{12}b_{21}-\cancel{b_{11}a_{11}}-b_{12}a_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}-b_{11}a_{12}-b_{12}a_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}-b_{21}a_{11}-b_{22}a_{21} & a_{21}b_{12}+\cancel{a_{22}b_{22}}-b_{21}a_{12}-\cancel{b_{22}a_{22}}\end{pmatrix}$$

Наблюдение

У единичной матрицы $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ сумма диагональных элементов равна 2.

У коммутатора $[A,B]=AB-BA$ сумма диагональных элементов равна 0.

Противоречие(?!), следовательно таких 2×2 матриц не существует.

Замечание

То же самое доказательство проходит для матриц размера $n\times n$.

9.1 Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A называется вырожденной(особенной), если $\det A=0$ и невырожденной(неособенной) в противном случае.

Определение

A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A, если:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\mathrm{I}.$$

Обратная матрица определяется только для невырожденной матрицы (то есть для квадратной с $\det A\neq 0$).

Теорема

Если обратная матрица существует, то она единственна.