Теоретические основы метода потенциалов для поиска оптимального плана

Идея метода базируется на следующих теоремах.

Теорема 1. Для того, чтобы некоторый план ТЗ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала такая система $m+n$ чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$, для которой выполняются условия:

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0 \qquad (1)$$

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0 \qquad (2)$$

где v_j - потенциал пункта поставки, u_i - потенциал пункта потребления.

Условия 1-2 являются условием потенциальности плана.

Теорема 2. Для того, чтобы некоторый план ТЗ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы он был потенциален.

Алгоритм для поиска оптимального плана на основе метода потенциалов

В алгоритме решается эквивалентная задача для построения системы $m+n$ чисел $-u_1$, $-u_2, \ldots, -u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Поэтому в условиях 1-2 потенциалы пунктов поставки и потребления суммируются. Алгоритм состоит из предварительного этапа и основного этапа, который повторяется в цикле до тех пор, пока план не станет потенциальным.

Предварительный этап.

1. Каким-либо способом ищется допустимый опорный план *X,* например, методом северо-западного угла или методом минимальной стоимости. Для полученного плана строится система $m+n$ чисел $-u_1, -u_2, \ldots, -u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ таких, что $v_j + u_i = c_{ij}$ для всех $x_{ij} > 0$. Предполагается в начале, что $u_1=0$.

2. Построенная система исследуется на потенциальность. Для этого проверяется $v_j + u_i \le c_{ij}$ для всех $x_{ij} = 0$.

3. Если система не потенциальна, то переходят к основному этапу (т.к. план не оптимален), иначе найден оптимальный план X.

Основной этап.

1. Среди ребер графа К, не включенных в дерево плана, находим такое ребро, где нарушение условия потенциальности $v_j + u_i \le c_{ij}$ максимально.

2. Включаем это ребро в дерево. При этом образуется простой цикл четной длины. Разметим ребра найденного цикла знаками «+» и «-», начиная с добавленного ребра.

3. Построим новый план X'. Для этого выберем среди ребер цикла с метками «-» ребро с минимальным значением x_{ij} - θ (это ребро удаляется из цикла) и пересчитаем веса ребер графа по следующему правилу:

$x'_{ij} := x_{ij} - \theta$, если данное ребро имеет метку «-»;

$x'_{ij} = x_{ij} + \theta$, если данное ребро имеет метку «+»;

$x'_{ij} = x_{ij}$, если данное ребро не имеет метки.

Определим оценку плана L(X').

4. Для плана X' строим новую систему -u'$_1$,-u'$_2$,…,-u'$_m$ и v'$_1$,v'$_2$,…,v'$_n$ таких, что $v'_j + u'_i = c_{ij}$ для всех $x'_{ij} > 0$.

5. Исследуем систему на потенциальность. Для этого проверяется условие $v_j + u_i \le c_{ij}$ для всех $x_{ij} = 0$.

6. Если система не потенциальна, то в качестве опорного плана считаем X =X' и переходим на п.1 основного этапа. Иначе найден оптимальный план X =X'.

Пример. Необходимо провести оптимизацию опорного плана методом потенциалов для следующей транспортной задачи.

Матрица С

	1	2	3	4	5	**A**
1	2	4	2	3	8	120
2	3	5	6	6	2	30
3	6	8	7	4	5	40
4	3	4	2	1	4	60

B	30	80	20	30	90	250

Матрица X (опорный план)

	1	2	3	4	5
1	30	80	10		
2			10	20	
3				10	30
4					60

L(X)=30x2+80x4+10x2+10x6+20x6+10x4+30x5+60x4=1010.

Решение

Предварительный этап.

1. Расчет потенциалов для пунктов потребления и поставки товаров по условию
$v_j + u_i = c_{ij}$ для всех $x_{ij} > 0$.
$u_1 = 0$.
$v_1 = c_{11} - u_1 = 2 + 0 = 2$
$v_2 = c_{12} - u_1 = 4 + 0 = 4$
$v_3 = c_{13} - u_1 = 2 + 0 = 2$
$u_2 = c_{23} - v_3 =$ 6 -2= 4
$v_4 = c_{24} - u_2 = 6 - 4 = 2$

$u_3 = c_{34} - v_4 = 4\text{-}2 = 2$

$v_5 = c_{35} - u_3 = 5 - 2 = 3$

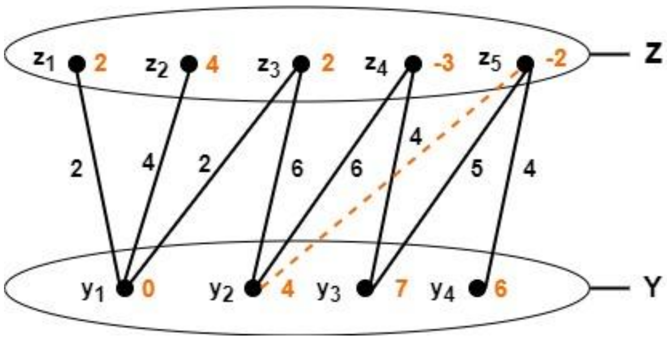
$u_4 = c_{45} - v_5 = 4\text{-}3 = 1$

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=2	V5=3
U1=0	2	4	2		
U2= 4			6	6	
U3= 2				4	5
U4= 1					4

2. Проверка на потенциальность плана по условию $v_j + u_i \le c_{ij}$ для всех $x_{ij} = 0$. Для этого в каждой незанятой клетке матрицы найдем значение, например, $v_2 + u_3 = 4 + 2 = 6$, при этом $c_{32} = 8$ (эти значения приведены в соответствующей клетке матрицы – 8(6)). Полужирным шрифтом здесь выделены те клетки матрицы, где есть нарушения условия потенциальности плана, всего 6 нарушений.

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=2	V5=3
U1=0	x	x	x	3(2)	8(3)
U2= 4	**3(6)**	**5(8)**	x	x	**2(7)**
U3= 2	6(4)	8(6)	7(4)	x	x
U4= 1	3(3)	**4(5)**	**2(3)**	**1(3)**	x

Ниже на рисунке представлена графовая интерпретация выбора ребра.



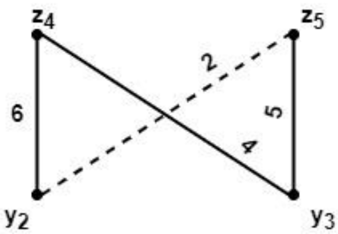
3. Т.к. план X не оптимален, то переходим к основному этапу.

Основной этап (1 итерация).

1. Определим клетку с максимальным нарушением потенциальности (она выделена выше голубым цветом, здесь нарушение в 5 ед.).

2. Включаем это ребро в дерево плана X. При этом образуется простой цикл четной длины. Разметим ребра найденного цикла знаками «+» и «-», начиная с добавленного ребра.

	1	2	3	4	5
1	30	80	10		
2			10	20 –	0 +
3				10 +	30 –
4					60

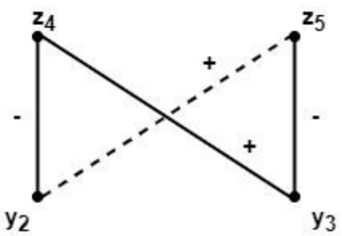


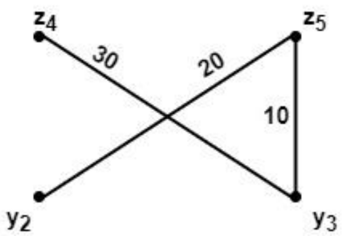
3. Построим новый план X’. Для этого выберем среди ребер цикла с метками «-» ребро с минимальным значением x_{ij} - θ (θ=20, это ребро удаляется из цикла) и пересчитаем веса ребер графа по следующему правилу:

$x'_{ij} := x_{ij} - \theta$, если данное ребро имеет метку «-»;

$x'_{ij} = x_{ij} + \theta$, если данное ребро имеет метку «+»;

$x'_{ij} = x_{ij}$, если данное ребро не имеет метки.





Матрица X’

	1	2	3	4	5
1	30	80	10		
2			10		20
3				30	10
4					60

Определим суммарную стоимость перевозок по плану X’:
L(X’)=30x2+80x4+10x2+10x6+30x4+20x2+10x5+60x4=910.

4. Для плана X' строим новую систему $-u'_1, -u'_2, \ldots, -u'_m$ и $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ таких, что $v'_j + u'_i = c_{ij}$ для всех $x'_{ij} > 0$.

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=-3	V5=-2
U1=0	2	4	2		
U2= 4			6		2
U3= 7				4	5
U4=6					4

5. Исследуем найденный план X’ на потенциальность. Проверка на потенциальность плана по условию $v_j + u_i \leq c_{ij}$ для всех $x_{ij} = 0$. Полужирным шрифтом здесь выделены те клетки матрицы, где есть нарушения условия потенциальности плана, всего 9 нарушений.

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=-3	V5=-2
U1=0	x	x	x	3(-3)	8(-2)
U2= 4	**3(6)**	**5(8)**	x	6(1)	x
U3=7	**6(9)**	**8(11)**	**7(9)**	x	x
U4=6	**3(8)**	**4(10)**	**2(8)**	**1(3)**	x

6. Т.к. система не потенциальна, то в качестве опорного плана считаем X =X’ и переходим на п.1 основного этапа.

Основной этап (2 итерация).

1. Определим клетку с максимальным нарушением потенциальности (она выделена выше голубым цветом, здесь нарушение в 6 ед.).

2. Включаем это ребро в дерево плана X. При этом образуется простой цикл четной длины. Разметим ребра найденного цикла знаками «+» и «-», начиная с добавленного ребра.

	1	2	3	4	5
1	30	80 -	10 +		
2			10 -		20 +
3				30	10
4		0 +			60 -

3. Построим новый план X’. Для этого выберем среди ребер цикла с метками «-» ребро с минимальным значением x_{ij} - θ (θ=10, это ребро удаляется из цикла) и пересчитаем веса ребер графа по следующему правилу:
   $x'_{ij} := x_{ij} - \theta$, если данное ребро имеет метку «-»;
   $x'_{ij} = x_{ij} + \theta$, если данное ребро имеет метку «+»;
   $x'_{ij} = x_{ij}$, если данное ребро не имеет метки.
   Матрица X’

	1	2	3	4	5
1	30	70	20		
2					30
3				30	10
4		10			50

Определим суммарную стоимость перевозок по плану X’:
L(X’)=30x2+70x4+20x2+30x2+30x4+10x5+10x4+50x4=830.

4. Для плана X' строим новую систему $-u'_1, -u'_2, \ldots, -u'_m$ и $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ таких, что $v'_j + u'_i = c_{ij}$ для всех $x'_{ij} > 0$.

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=3	V5=4
U1=0	2	4	2		
U2=-2					2
U3=1				4	5
U4= 0		4			4

5. Исследуем найденный план X’ на потенциальность. Проверка на потенциальность плана по условию $v_j + u_i \le c_{ij}$ для всех $x_{ij} = 0$. Полужирным шрифтом здесь выделена клетка матрицы, где есть нарушения условия потенциальности плана, всего 1 нарушение.

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=3	V5=4
U1=0	x	x	x	3(3)	8(4)
U2=-2	3(0)	5(2)	6(0)	6(1)	x
U3=1	6(3)	8(5)	7(3)	x	x
U4= 0	3(2)	x	2(2)	**1(3)**	x

6. Т.к. система не потенциальна, то в качестве опорного плана считаем X =X’ и переходим на п.1 основного этапа.

Основной этап (3 итерация).

1. Определим клетку с максимальным нарушением потенциальности (она выделена выше голубым цветом, здесь нарушение в 2 ед.).

2. Включаем это ребро в дерево плана X. При этом образуется простой цикл четной длины. Разметим ребра найденного цикла знаками «+» и «-», начиная с добавленного ребра.

	1	2	3	4	5
1	30	70	20		
2					30
3				30 -	10 +
4		10		0 +	50 -

3. Построим новый план X'. Для этого выберем среди ребер цикла с метками «-» ребро с минимальным значением x_{ij} - θ (θ =30, это ребро удаляется из цикла) и пересчитаем веса ребер графа по следующему правилу:

$x'_{ij} := x_{ij} - \theta$, если данное ребро имеет метку «-»;

$x'_{ij} = x_{ij} + \theta$, если данное ребро имеет метку «+»;

$x'_{ij} = x_{ij}$, если данное ребро не имеет метки.

Матрица X'

	1	2	3	4	5
1	30	70	20		
2					30
3					40
4		10		30	20

Определим суммарную стоимость перевозок по плану X':
L(X')=30x2+70x4+20x2+30x2+40x5+10x4+30x1+20x4=790.

4. Для плана X' строим новую систему $-u'_1, -u'_2, \ldots, -u'_m$ и $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ таких, что $v'_j + u'_i = c_{ij}$ для всех $x'_{ij} > 0$.

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=1	V5=4
U1=0	2	4	2		
U2=-2					2
U3=1					5
U4= 0		4		1	4

5. Исследуем найденный план X’ на потенциальность. Проверка на потенциальность плана по условию $v_j + u_i \le c_{ij}$ для всех $x_{ij} = 0$. Нарушений нет.

	V1=2	V2=4	V3=2	V4=1	V5=4
U1=0	x	x	x	3(3)	8(4)
U2=-2	3(0)	5(2)	6(0)	6(-1)	x
U3= 1	6(3)	8(5)	7(3)	4(2)	x
U4= 0	3(2)	x	2(2)	x	x

6. Т.к. система потенциальна, то найден оптимальный план *X*=X’.

Ответ.

Оптимальный план перевозок (матрица X) с оценкой L(X)= 790.

	1	2	3	4	5
1	30	70	20		
2					30
3					40
4		10		30	20

Ниже на рисунке представлена графовая модель полученного решения. Модель является остовным деревом для двудольного графа (рис.1)