Можно рассмотреть ориентированные по направлению обхода контура области. Положительный обход контура – против часовой стрелки (то есть область остается слева при обходе), отрицательный – по часовой стрелке. Тогда площадь берем со знаком "+" для положительно ориентированной области и со знаком "$-$" для отрицательно ориентированной. При таком определении площади изменится определение двойного интеграла. Двойной интеграл по ориентированной области $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ совпадет с данным ранее определением двойного интеграла при положительной ориентации области и будет отличаться знаком при отрицательной ориентации.

Формулы вычисления площади и замены переменных в криволинейных координатах также претерпят изменения. В частности, если ориентацию областей D и Γ согласовать, то:

$$S_D = \iint\limits_{\Gamma} J(u,v)dudv$$

и для согласованно ориентированных областей D и Γ формула (2.41) примет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Gamma} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) J(u,v)dudv, \tag{2.43}$$

то есть будет достигнута полная аналогия с определенным интегралом.

2.8 Несобственные двойные интегралы

1) Несобственные интегралы по неограниченной области

Рассмотрим неограниченную плоскую область D с границей, имеющей площадь 0 в каждой ограниченной своей части. Примером такой области может быть вся плоскость или ее часть: угол, внутренность параболы, внешность какой-либо замкнутой фигуры и так далее. Пусть также в области D задана некоторая функция $f(x,y)$, интегрируемая в каждой ограниченной и квадрируемой части области D. Проведем вспомогательную кривую K (с площадью меры 0) для того, чтобы отсечь от области D ограниченную и связную часть $\widetilde{D}$, в которой интеграл

$$\iint\limits_{\widetilde{D}} f(x,y)dxdy \tag{2.44}$$

по предположению существует.

Замечание

$\iint\limits_{\widetilde{D}} f(x,y)dxdy$ существует в силу того, что область $\widetilde{D}$ квадрируема. Это выполнено, так как мера ее границы равна 0, что является необходимым и достаточным условием квадрируемости.

Будем удалять кривую K на бесконечность так, чтобы наименьшее расстояние ρ от начала координат до точек этой кривой возрастало до бесконечности. Тогда каждая точка из D при достаточно большом ρ попадет в $\widetilde{D}$.

Определение

Предел (конечный или бесконечный) интеграла (2.44) при $\rho \to \infty$ называют несобственным интегралом от функции $f(x,y)$ в неограниченной области D и обозначают символом

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{\rho\to\infty} \iint\limits_{\widetilde{D}} f(x,y)dxdy. \tag{2.45}$$

Если предел конечен, то интеграл (2.45) называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Свойства несобственного интеграла аналогичны свойствам обычного интеграла, кроме одного. Из сходимости двойного интеграла от функции $f(x,y)$ по неограниченной области следует сходимость интеграла от $|f(x,y)|$ по этой области. Таким образом, здесь сходимость эквивалентна абсолютной сходимости. Подобного свойства у одномерного интеграла нет! Это существенно многомерный факт.

2) Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x,y)$ задана в ограниченной области D, но имеет особенности в точках $M_1, M_2, \ldots$ (обращается в них в бесконечность). Будем считать функцию $f(x,y)$ интегрируемой в любой части области D, не содержащей этих точек. Окружим особые точки $M_1, M_2, \ldots$ кусочно-гладкими кривыми $K_1, K_2, \ldots$ и удалим эти окрестности из области D. Тогда для получившейся области $\widetilde{D}$ интеграл

$$\iint\limits_{\widetilde{D}} f(x,y)dxdy \tag{2.46}$$

сходится. Будем стягивать кривые $K_1, K_2, \ldots$ в точки $M_1, M_2, \ldots$ соответственно так, чтобы диаметры ρ_i всех областей, ограниченных контурами K, стремились к нулю. Пусть $\rho = \max\limits_i \rho_i$.

Определение

Несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x,y)$ по области D определяется как предел интеграла (2.46) при $\rho \to 0$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{\widetilde{D}} f(x,y)dxdy. \tag{2.47}$$

Свойства интеграла от неограниченной функции эквивалентны свойствам обычного интеграла, кроме одного. Здесь также сходимость эквивалентна абсолютной сходимости.

Замечание

Процедура сведения двойного несобственного интеграла к повторному не отличается от обычной процедуры для двойного интеграла. Замена переменных также делается аналогично.

Пример

Найдем $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, где $D = \{(x,y): \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$.

С одной стороны:

$$I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2}dy = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2. \tag{2.48}$$

С другой стороны, можно перейти к полярным координатам:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = -\frac{\pi}{4} \cdot e^{-\rho^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}. \tag{2.49}$$

Из сравнения (2.48) и (2.49) получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ – интеграл Пуассона.} \tag{2.50}$$

2.9 Тройные интегралы

Перед тем как определять тройной интеграл, необходимо ввести меру области в трехмерном пространстве. Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^3$ определяется аналогично мере Жордана на плоскости, но вместо разбиения плоскости на квадраты мы будем разбивать пространство на кубы.

Условие существования объема для данного тела заключается в том, чтобы ограничивающая его поверхность имела объем, равный нулю. В дальнейшем только такие поверхности мы и будем рассматривать.

Пусть в некоторой пространственной области Ω задана функция $f(x, y, z)$. Разобъем эту область на элементарные части $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ с объемами $V_1, V_2, \ldots, V_n$. В каждой области Ω_k выберем произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ и вычислим значение функции в этой точке: $f(P_k)$.

Определение

Функция $f(P)$ называется интегрируемой по области Ω, если существует конечный предел интегральных сумм

$$\lim_{\max\limits_k d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot V_k, \tag{2.51}$$

не зависящий от способа разбиения области Ω и выбора точек P_k. Этот предел называется тройным интегралом от функции $f(P)$ по области Ω

и обозначается символом

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz. \tag{2.52}$$

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного.

2.10 Вычисление тройного интеграла

Тройной интеграл вычисляется через сведение к повторным интегралам. Пусть тело Ω ограничено сверху и снизу поверхностями $z = \psi_2(x,y)$ и $z = \psi_1(x,y)$ соответственно и однозначно проектируется на плоскость XOY. Обозначим эту проекцию за D.

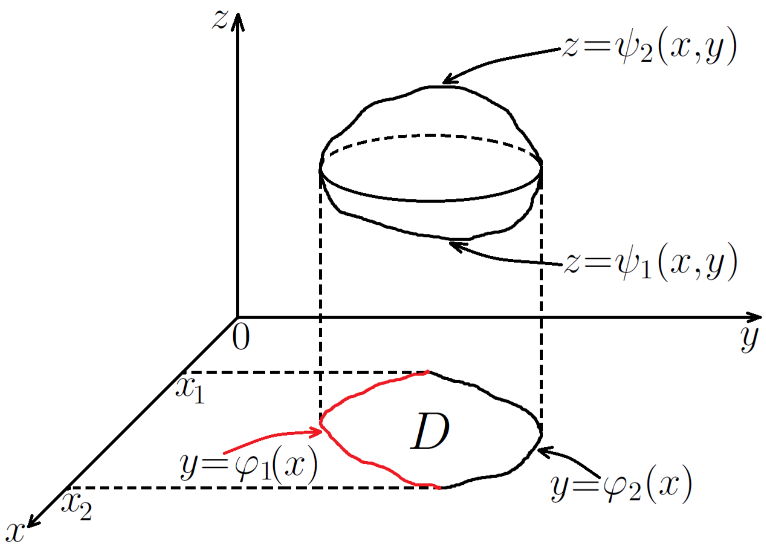

Рис. 17: Тело Ω

Тогда аналогично формуле для двойного интеграла получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2.53}$$

Замечание

Переход к трем повторным интегралам осуществляется с помощью расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле по области D.

2.11 Замена переменных в тройном интеграле

Переход к криволинейным координатам в тройном интеграле осуществляется по тому же правилу, что и в двойном. Рассмотрим две замкнутые области Ω и Ω_1. Пусть эти области связаны между собой взаимно однозначным непрерывным соответствием по формулам:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \tag{2.54}$$

Если якобиан перехода к новым переменным

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.55}$$

то справедлива формула:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f\left(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right) |J| dudvdw. \tag{2.56}$$

Выбор криволинейных координат обусловлен видом ограничивающих область поверхностей. Для областей, ограниченных цилиндрическими поверхностями, как правило, используются цилиндрические координаты. Если область ограничена сферическими поверхностями, то используются сферические координаты.

1) ***Цилиндрические координаты*** представляют собой соединение полярных координат в плоскости XOY с декартовой координатой z. Формулы, связывающие их с декартовыми, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{2.57}$$

Эти формулы отображают область

$$0 \leq \rho \leq +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

на все пространство xyz.

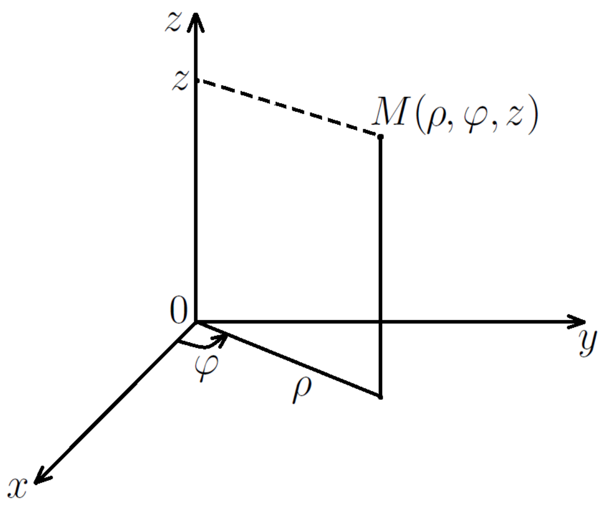

Рис. 18: Цилиндрическая система координат

Замечание

Прямая $\rho = 0, \quad z = z$ отображается в одну точку $(0, 0, z)$. Этим нарушается взаимная однозначность соответствия.

Обратное преобразование координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases} \tag{2.58}$$

Якобиан перехода к цилиндрическим координатам:

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho. \tag{2.59}$$

Координатные поверхности составляют 3 семейства:

а) $\rho = const$ – цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси OZ. Направляющими для них служат окружности на плоскости XOY с центром в начале координат.

б) $\varphi = const$ – полуплоскости, проходящие через ось OZ.

в) $z = const$ – плоскости, параллельные плоскости XOY.

2) ***Сферические координаты,*** назывемые иногда полярными координатами в пространстве, связаны с декартовыми формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{2.60}$$

Эти формулы отображают область

$$0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

на все пространство xyz.

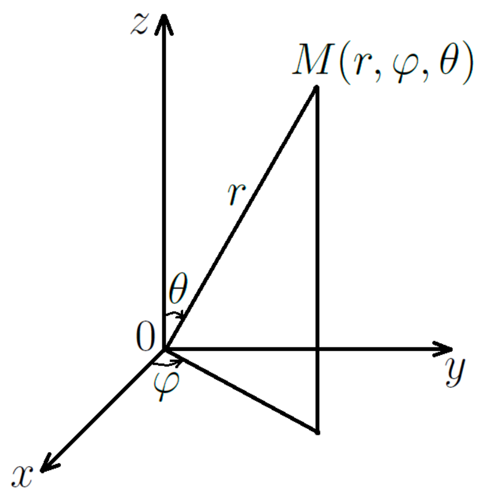

Рис. 19: Сферическая система координат

Замечание

Здесь мы снова сталкиваемся с нарушением взаимной однозначности соответствия: плоскость $r = 0$ пространства $r\theta\varphi$ отображается в начало координат $x = y = z = 0$, прямая $\varphi = 0(\pi)$, $r = r$ отображается в одну точку: $x = y = 0$, $z = r$.

Координатные поверхности составляют 3 семейства:

а) $r = const$ – концентрические сферы с центром в начале координат.

б) $\varphi = const$ – полуплоскости, проходящие через ось OZ.

в) $\theta = const$ – круговые конусы, осью которых служит ось OZ.

Якобиан перехода к сферическим координатам:

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos^2\varphi\sin^3\theta + r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^3\theta$$

$$= r^2\sin^3\theta\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cdot\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{=1} =$$

$$= r^2\sin\theta\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{=1} = r^2\sin\theta. \qquad (2.61)$$

Примеры вычисления интегралов в криволинейных координатах

1) Найдем интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xyz}{x^2+y^2} dxdydz$, где область Ω ограничена поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = xy$ и плоскостью $z = 0$ $(z \geq 0)$.

Исследуем уравнение поверхности.

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = xy \geq 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, область состоит из двух частей. Уравнение поверхности не меняется при одновременной замене x на $(-x)$, y на $(-y)$. Подынтегральная функция также не меняется при этой замене. Следовательно, интегралы по каждой из частей равны и интеграл по всей области равен удвоенному интегралу по одной из подобластей.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Уравнение поверхности примет вид:

$$r^4 = r^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta \ \Leftrightarrow\ r^2 = \cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta.$$

Ограничение для плоскости:

$$\left.\begin{array}{l} z\ge 0 \ \Leftrightarrow\ r\cos\theta\ge 0 \ \Leftrightarrow\ \cos\theta\ge 0 \\ \text{Пределы изменения координаты } \theta:\ 0\le\theta\le\pi \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Так как мы рассматриваем только одну из областей $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0, \end{cases}$ то $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\sin\theta}\frac{r^3\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\underbrace{r^2\sin\theta}_{J}dr =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\sin\theta} r^3\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin\theta dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin\theta\cdot r^4\Big|_0^{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos^3\varphi\sin^3\varphi}_{\frac{1}{8}\sin^3 2\varphi}\cdot\sin^5\theta\underbrace{\cos\theta d\theta}_{d(\sin\theta)} = \frac{1}{12}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\frac{1}{8}\sin^3 2\varphi\cdot\underbrace{\sin^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=1} =$$

$$= \frac{1}{96}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin^2 2\varphi}_{1-\cos^2 2\varphi}\cdot\underbrace{\sin 2\varphi d\varphi}_{-\frac{1}{2}d(\cos 2\varphi)} = -\frac{1}{192}\cdot\left(\underbrace{\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=-2} - \frac{1}{3}\underbrace{\cos^3 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=-2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{192}\cdot\left(-2+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{144}.$$

2) Найдем интеграл $\iiint\limits_{\Omega} e^{xyz}x^2ydxdydz$, где область Ω задана неравенствами: $x\ge 0,\ y\ge 1,\ z\ge 1,\ xyz\le 1$.

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = \frac{u+v}{u}, \\ z = \frac{u+v+w}{u+v}. \end{cases}$$

Посчитаем якобиан такой замены переменных:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \frac{1}{u} & 0 \\ \ldots & \ldots & \frac{1}{u+v} \end{vmatrix} = \frac{1}{u(u+v)}.$$

$x = u \geq 0$ (по условию).

$y = \frac{u+v}{u} = 1 + \frac{v}{u} \geq 1 \;\Rightarrow\; v \geq 0$ (так как $u \geq 0$).

$z = \frac{u+v+w}{u+v} = 1 + \frac{w}{u+v} \geq 1 \;\Rightarrow\; w \geq 0$ (так как $u+v \geq 0$).

$xyz \leq 1 \;\Rightarrow\; u+v+w \leq 1.$

Итак, в новых координатах область Ω принимает вид тетраэдра:

$$u, v, w \geq 0, \quad u+v+w \leq 1.$$

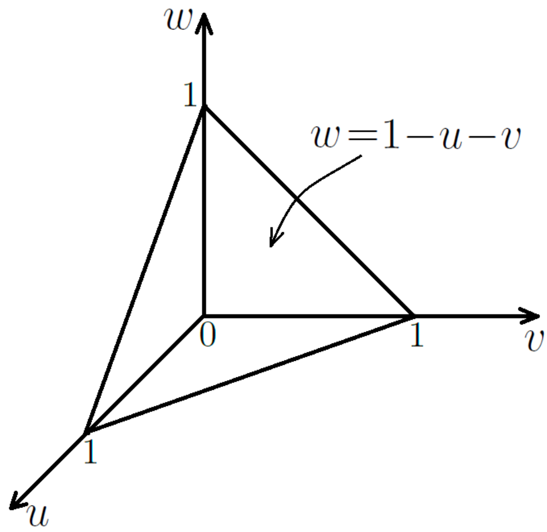

Рис. 20: Область Ω в координатах u, v, w.

Преобразуем исходный интеграл:

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{xyz} x^2 y\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} e^{u+v+w} \cdot u^2 \frac{u+v}{u} \underbrace{\frac{1}{u(u+v)}}_{J} dudvdw =$$

$$= \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} dv \int\limits_0^{1-u-v} e^{u+v+w} dw = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} dv (e - e^{u+v}) =$$

$$= \int\limits_0^1 du \Big(e \cdot v \Big|_0^{1-u} - e^{u+v} \Big|_0^{1-u} \Big) = \int\limits_0^1 \left(e(1-u) - e + e^u \right) du =$$

$$= \int\limits_0^1 (-eu + e^u)du = -e \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 + e^u\Big|_0^1 = -\frac{e}{2} + e - 1 = \frac{e}{2} - 1.$$

2.12 Приложения кратных интегралов

Кратные интегралы можно использовать для вычисления механических характеристик различных тел.

1) Площадь плоской фигуры D :

$$S = \iint\limits_D dxdy. \tag{2.62}$$

2) Объем тела Ω :

$$V = \iiint\limits_\Omega dxdydz. \tag{2.63}$$

Дальнейшие формулы мы будем выписывать для тройного интеграла. Аналогичные формулы можно написать и для двойного интеграла.

3) Масса тела с плотностью $\mu(x, y, z)$:

$$M = \iiint\limits_\Omega \mu(x, y, z)dxdydz. \tag{2.64}$$

4) Статические моменты.

Определение

Статическим моментом материальной точки массы M относительно плоскости называется произведение массы M на расстояние от точки до плоскости.

Напишем статические моменты для элементарных масс относительно координатных плоскостей:

$$dM_{yz} = xdM = x\mu dV,$$

$$dM_{zx} = ydM = y\mu dV,$$

$$dM_{xy} = zdM = z\mu dV.$$

Просуммируем их и найдем статические моменты всего тела относительно плоскостей ZOY, XOZ и XOY соответственно.

$$M_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x\mu dxdydz, \quad M_{zx} = \iiint\limits_{\Omega} y\mu dxdydz, \quad M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z\mu dxdydz. \tag{2.65}$$

5) Статические моменты позволяют определить координаты центра масс:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{M}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M}. \tag{2.66}$$

6) Момент инерции.

Определение

Момент инерции – скалярная физическая величина, мера инертности во вращательном движении вокруг оси, подобно тому, как масса ьела является мерой его инертности в поступательном движении. Характеризуется распределением масс в теле: момент инерции равен сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний до оси вращения.

Момент инерции относительно оси l :

$$J_l = \iiint\limits_{\Omega} (\rho(x,y,z))^2 \mu(x,y,z) dxdydz, \tag{2.67}$$

где $\rho(x,y,z)$ – расстояние от точки (x,y,z) до прямой l.

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$\begin{cases} J_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\mu dxdydz, \\ J_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+z^2)\mu dxdydz, \\ J_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\mu dxdydz. \end{cases} \tag{2.68}$$

Теорема 6 (теорема Штейнера)

Пусть J_l – момент инерции тела Ω относительно оси l, J_0 – момент инерции тела относительно оси l_0, параллельной l и проходящей через центр масс тела Ω. Тогда:

$$J_l = J_0 + Mh^2, \tag{2.69}$$

где h – расстояние между осями l и l_0.

Доказательство:

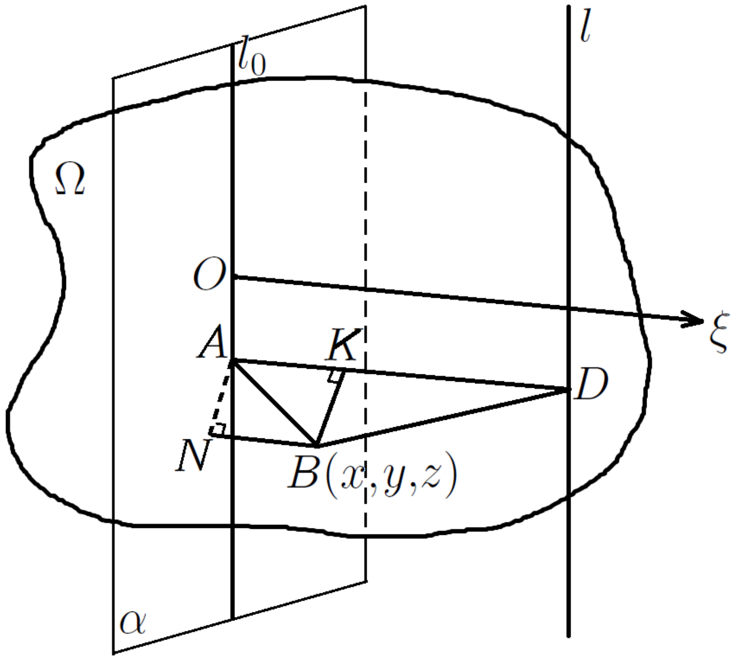

Рис. 21: К доказательству теоремы Штейнера

По формуле (2.67) напишем момент инерции тела относительно оси l :

$$J_l = \iiint\limits_{\Omega} (\rho(x, y, z))^2 \mu dxdydz, \tag{2.70}$$

где $\rho(x, y, z)$ – расстояние от точки (x, y, z) до прямой l.

Обозначим за точку $B(x, y, z)$ произвольную точку области Ω. Опустим из точки B перпендикуляры BD и BA на оси l и l_0 соответственно. Пусть $\rho_0 = |\overrightarrow{AB}|, \quad \rho = |\overrightarrow{BD}|, \quad h = |\overrightarrow{AD}|$. Тогда:

$$\rho^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}|^2 = \underbrace{|\overrightarrow{BA}|^2}_{=\rho_0^2} + \underbrace{|\overrightarrow{AD}|^2}_{=h^2} + 2\underbrace{|\overrightarrow{BA}|}_{=\rho_0} \cdot \underbrace{|\overrightarrow{AD}|}_{=h} \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}}).$$

Подставим полученное ρ^2 в формулу для момента инерции J_l :

$$J_l = \underbrace{\iiint\limits_{\Omega} \rho_0^2 \mu dxdydz}_{=J_0} + h^2 \underbrace{\iiint\limits_{\Omega} \mu dxdydz}_{=M} + 2h \underbrace{\iiint\limits_{\Omega} \rho_0 \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}}) \mu dxdydz}_{=0}. \tag{2.71}$$

Если мы покажем, что третий интеграл равен 0, то мы докажем теорему. Проведем плоскость α через прямую l_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AD}$. Опустим перпендикуляр BN на плоскость α. Введем координатную ось $O\xi$, перпендикулярную плоскости α. Тогда координата ξ точки B будет равна BN :

$$\xi = BN = \rho_0 \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}}).$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_{\Omega} \rho_0 \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}}) \mu dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \xi \mu dxdydz = M_\alpha \quad \text{(согласно (2.65))},$$

то есть представляет собой статический момент тела Ω относительно плоскости α. Координата ξ_c центра масс тела равна нулю, так как α проходит через центр масс тела. Следовательно, $M_\alpha = \xi_c \cdot M = 0$ и формула (2.71) принимает вид:

$$J_l = J_0 + Mh^2.$$

■

Пример

Посчитаем момент инерции однородного шара радиуса R с постоянной плотностью μ относительно оси l, касающейся шара.

Введем сферическую систему координат с осью OZ, параллельной оси l и проходящей через центр шара. Тогда по формуле (2.68):

$$J_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \mu \underbrace{r^2 \sin \theta}_{J} drd\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \mu r^4 \sin^3 \theta dr = \mu \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{R^5}{5} \sin^3 \theta =$$

$$= \frac{2\pi\mu R^5}{5}\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = -\frac{2\pi\mu R^5}{5}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{2\pi\mu R^5}{5}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2\pi\mu R^5}{5}\left(-1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{15}\pi\mu R^5 = \Big/ M = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\mu \Big/ = \frac{2}{5}MR^2.$$

Применим теорему Штейнера:

$$J_l = J_z + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2.$$

7) Потенциал гравитационного поля тела.

Потенциал гравитационного поля в точке A, созаваемого телом Ω с плотностью $\mu(x,y,z)$, находится по формуле:

$$U = G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mu(x,y,z)}{r}dxdydz, \tag{2.72}$$

где G – гравитационная постоянная.

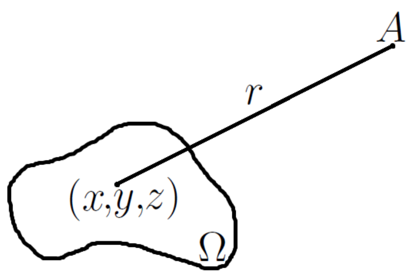

Рис. 22: Потенциал гравитационного поля тела в точке A

Пример

Найти потенциал гравитационного поля однородного цилиндра с плотностью $\mu = const$, радиусом R и высотой h в центре его основания.

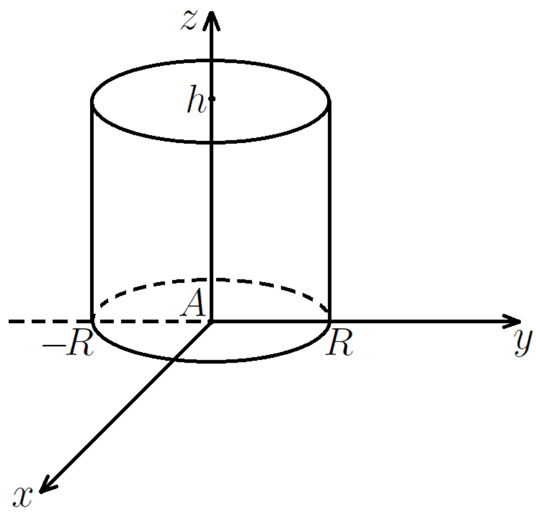

Рис. 23: Потенциал гравитационного поля однородного цилиндра в точке A

Согласно формуле (2.72):

$$U = G\mu \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r} dxdydz = G\mu \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz.$$

Перейдем в цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тогда:

$$U = G\mu \int\limits_0^h dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} d\rho = 2\pi G\mu \int\limits_0^h dz \int\limits_0^R (\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} d(\rho^2+z^2) =$$

$$= \pi G\mu \int\limits_0^h dz \cdot 2(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R = 2\pi G\mu \int\limits_0^h dz \left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right).$$

Вычислим $\int \sqrt{R^2+z^2}dz$ по частям.

$$I = \int \sqrt{R^2+z^2}dz = \Bigg/ \begin{matrix} u = \sqrt{R^2+z^2} & du = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \\ v = z & dv = dz \end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= z\sqrt{R^2+z^2} - \int \frac{z^2+R^2-R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} dz = z\sqrt{R^2+z^2} - \underbrace{\int \sqrt{R^2+z^2}dz}_{I} + R^2 \int \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} z\sqrt{R^2+z^2} + \frac{1}{2} R^2 \ln|z + \sqrt{R^2+z^2}| + C.$$

Тогда:

$$U = \pi G\mu h\sqrt{R^2+h^2} + \pi G\mu R^2 \left(\ln(h+\sqrt{R^2+h^2}) - \ln R\right) - \pi G\mu h^2 =$$

$$= \pi G\mu h(\sqrt{R^2+h^2} - h) + \pi G\mu R^2 \ln\frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R}.$$