Пример

Вычислим $\int \frac{dx}{x^3-8}$. Для этого разложим дробь $\frac{1}{x^3-8}$ на простейшие:

$$\frac{1}{x^3-8} = \frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 1 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2: & A+B=0 \\ x^1: & 2A+C-2B=0 \\ x^0: & 4A-2C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=4B \\ -4B-8B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12}, \\ B=-\frac{1}{12}, \\ C=-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{(x+1)^2+3}dx =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\int \frac{x+1}{(x+1)^2+3}dx - \frac{1}{12}\int \frac{3}{(x+1)^2+3}dx =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\int \frac{d((x+1)^2+3)}{(x+1)^2+3}dx - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.6 Метод Остроградского

В предыдущем параграфе была описана процедура интегрирования рациональной дроби общего вида. Рациональная дробь раскладывалась на сумму простейших дробей, интегралы от которых известны. Однако в случае когда знаменатель дроби имеет кратные комплексные корни, то есть содержит сомножители вида $(x^2+px+q)^k$, процедура интегрирования соответствующей простейшей дроби $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ становится весьма трудоемкой. Здесь приходится использовать рекуррентную формулу для вычисления интеграла.

Метод Остроградского позволят упростить интегрирование рациональной дроби в случае когда ее знаменатель имеет кратные корни. После разложения такой рациональной дроби на простейшие появятся дроби вида: $\frac{Ax+B}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$. Интегралы от таких простейших дробей при $k > 1$ дают рациональные дроби. Заметим, что при $k = 1$ после интегрирования мы получим не рациональную дробь, а натуральный логарифм либо арктангенс (смотри раздел "Интегралы от простейших дробей" в параграфе **1.3**). После интегрирования дробей сумма полученных рациональных дробей даст алгебраическую часть интеграла, которая после приведения к общему знаменателю будет правильной рациональной дробью вида:

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\,(x-a_2)^{k_2-1}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-a_m)^{k_m-1}}. \tag{1.16}$$

Здесь $k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_m$ – кратности корней $a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_m$ соответственно. Степень полинома $\omega(x)$ меньше, чем степень знаменателя.

Запишем сумму оставшихся непроинтегрированных дробей при $k = 1$:

$$\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}=\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-a_m)}. \tag{1.17}$$

Здесь степень полинома $\omega_1(x)$ меньше, чем степень знаменателя. Заметим, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ могут быть комплексными.

Учитывая выражения (1.16) и (1.17), приходим к формуле Остроградского:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{\omega(x)}{\underbrace{(x-a_1)^{k_1-1}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(x-a_m)^{k_m-1}}_{D(x)}}+\int\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(x-a_m)}\,dx. \tag{1.18}$$

Дифференцируя это соотношение, получим равенство без интегралов, из которых можно найти $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$.

Пример

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3+1} + \int \frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}\,dx.$$

Полином x^3+1 имеет три корня первой кратности (это $\sqrt[3]{-1}$). Соответственно, полином $(x^3+1)^2$ будет иметь три корня второй кратности. Значит в алгебраической части интеграла и в непроинтегрированной дроби в знаменателе будет стоять x^3+1.

Продифференцируем последнее равенство. Мы получим:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{(x^3+1)^2} + \frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$1 = (2\alpha x+\beta)\left(x^3+1\right) - 3x^2\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) + \left(\delta x^2+\varepsilon x+\eta\right)\left(x^3+1\right)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\left.\begin{array}{l|l} x^5 & \delta = 0 \\ x^4 & \varepsilon - \alpha = 0 \\ x^3 & \eta - 2\beta = 0 \\ x^2 & -3\gamma + \delta = 0 \\ x^1 & 2\alpha + \varepsilon = 0 \\ x^0 & \beta + \eta = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \eta = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Вычислим оставшийся нтеграл, разложив дробь на простейшие:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} \Rightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1).$$

Вычисляем коэффициенты:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & A = \frac{1}{3} \\ x^2 & M = -\frac{1}{3} \\ x^0 & N = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

<u>Ответ:</u>

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Замечание

Знаменатели дробей в формуле Остроградского можно найти и не зная корней $Q(x)$. А именно, полином $D(x)$ – это наибольший общий делитель $Q(x)$ и $Q'(x)$.

Наибольший общий делитель полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ находится через последовательное деление полиномов (это обобщение алгоритма Евклида). Пусть степень полинома $f_1(x) \geq$ степени $f_2(x)$. Разделим $f_1(x)$ на $f_2(x)$, получим остаток $r_1(x)$. Затем $f_2(x)$ делим на $r_1(x)$, получим остаток $r_2(x)$. Потом $r_1(x)$ делим на $r_2(x)$, получим остаток $r_3(x)$. И так далее, пока не получим деление с остатком, равным 0. Последний остаток, отличный от 0, и является общим наибольшим делителем двух данных полиномов.

Пример

$$(x^3+1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 = Q(x), \quad Q'(x) = 6x^5 + 6x^2,$$

$$\begin{array}{llll|l}
x^6 & & +2x^3 & +1 & 6x^5 \quad +6x^2 \\ \cline{5-5}
x^6 & +x^3 & & & \frac{1}{6}x \\ \cline{1-4}
 & x^3 & & +1 &
\end{array}$$

Таким образом, $r_1(x) = x^3 + 1$. Разделим $f_2(x) = 6x^5 + 6x^2$ на $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rr|l} 6x^5 & +6x^2 & x^3 \quad +1 \\ \cline{3-3} \underline{6x^5} & \underline{+6x^2} & 6x^2 \\ & 0 & \end{array}$$

Последнее деление выполнено без остатка, то есть наибольший общий делитель полиномов $Q(x) = x^6 + 2x^3 + 1$ и $Q'(x) = 6x^5 + 6x^2$ равен $x^3 + 1$.

1.7 Интегрирование тригонометрических функций

1) Интегралы вида $\int \sin^m x \, \cos^n x \, dx$.

а) Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное положительное число, тогда:

1. Отделяем от нечётной степени один сомножитель и вносим его под знак дифференциала.

2. С помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ выражаем оставшуюся чётную степень через дополнительную функцию. Приходим к табличному интегралу.

Пример

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \sin x \, dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \, d(\cos x) =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \, d(\cos x) = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C.$$

б) Если m и n – чётные неотрицательные числа, тогда степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$,
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,
$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

2) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$.

Здесь $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция своих аргументов, не содержит дробных степеней (то есть функция, которая получается из $\sin x$

и $\cos x$ с помощью действий " + ", " − ", " · ", " : "). Данные интегралы можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью замены переменной.

Универсальная замена (срабатывает всегда, однако, после замены под интегралом обычно получаем сложную функцию): $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

Поясним, что после такой замены мы получим интеграл от рациональной функции. Действительно,

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$x = 2\operatorname{arctg} t; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом, подынтегральное выражение есть рациональная дробь.

Если подынтегральная функция обладает свойствами симметрии, то можно использовать **более простые замены:**

а) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ делаем замену: $\cos x = t$;

б) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ делаем замену: $\sin x = t$;

в) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ делаем замену: $\operatorname{tg} x = t$.

Пример

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = \Big/ \ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Big/ = 2\int \frac{dt}{(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 5)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{4 - 4t^2 + 6t + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C.$$

Интегрирование произведений синусов и косинусов

Интегралы такого типа вычисляются с использованием тригонометрических формул, заменяющих произведения синусов и косинусов на их суммы:

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$,

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$,

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

Пример

$$\int \sin 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-4x) + \sin 10x)\, dx = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C.$$

1.8 Интегрирование иррациональных функций

1) Интегралы вида $\int R(x, x^{\frac{l}{s}}, \ldots, x^{\frac{r}{q}})\, dx.$

Здесь R – рациональная функция.

Пусть n – общий знаменатель дробей $\frac{l}{s}, \ldots, \frac{r}{q}$. Тогда замена $t = x^{\frac{1}{n}}$ приводит к интегралу от рациональной функции.

Пример

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \Big/\ x^{\frac{1}{4}} = t\ \Big/ = 4\int \frac{t^2}{t^3+1} t^3\, dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right) dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C = \frac{4}{3}(x^{\frac{3}{4}} - \ln|x^{\frac{3}{4}}+1|) + C.$$

2) Интегралы вида $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{l}{s}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{q}})\, dx.$

Здесь R – рациональная функция, n– общий знаменатель дробей $\frac{l}{s}, \ldots, \frac{r}{q}$.

Замена $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$ приводит к интегралу от рациональной функции.

Пример

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\, dx = \Big/\ \sqrt{x+1} = t\ \Big/ = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1}\right) dt = 2\ln|t-1| - \int \left(\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{t^2+t+1}\right) dt =$$

$$= 2\ln|t-1| - \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt =$$

$$= \ln(t-1)^2 - \ln(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Дифференциальный бином. Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$. Здесь m, n, p – рациональные числа.

Сделаем замену: $t = x^n$. Тогда $x = t^{\frac{1}{n}},\ dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. Следовательно, интеграл примет вид:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt. \tag{1.19}$$

Если p или $\frac{m+1}{n}$ есть целое число, то это интеграл рассмотренного в пункте 2 вида. Если это не выполнено, то интеграл можно преобразовать к виду:

$$\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt = \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p\,dt. \tag{1.20}$$

В случае когда $\frac{m+1}{n}+p$ есть целое число, то это также интеграл рассмотренного в пункте 2 вида. Теорема Чебышёва говорит о том, что указанные три случая исчерпывают все случаи, в которых интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции. Разберем эти случаи подробнее.

1. Пусть p – целое число. Делаем замену: $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ есть наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ – целое число. Делаем замену: $t = \sqrt[\nu]{a+bx^n}$, где ν – знаменатель дроби p.

3. Пусть $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число. Делаем замену: $t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где ν – знаменатель дроби p.

Пример 1

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

$m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{m+1}{n} = 2$ – целое число, то здесь мы имеем дело со случаем 2. Следовательно, $\nu = 3$ и замена переменной имеет вид: $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \Rightarrow\ x=(t^3-1)^4 \Rightarrow dx=12t^2(t^3-1)^3dt.$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx=\int\frac{1}{(t^3-1)^2}\cdot\left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt=12\int(t^6-t^3)\,dt=$$

$$=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C=\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}+C.$$

Пример 2

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx$$

Здесь $m=0,\ n=4,\ p=-\frac{1}{4}$. Так как $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$ – целое число, то здесь мы имеем дело со случаем 3. Следовательно, $\nu=4$ и замена переменной имеет вид:

$$t=\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}}=\sqrt[4]{1+x^{-4}}\ \Rightarrow\ x^{-4}=t^4-1\ \Rightarrow\ x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Соответственно, $dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt.$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$-\int\left(1+(t^4-1)^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt=-\int\left(1+\frac{1}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt=$$

$$=-\int\left(\frac{t^4}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt=-\int\frac{\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}}{t}t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt=$$

$$=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^{-4}}+1}{\sqrt[4]{1+x^{-4}}-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^{-4}} + C.$$

4) Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Подстановки Эйлера.

Здесь R есть рациональная функция своих аргументов.

Для сведения данного интеграла к интегралу от рациональной функции используются нижеперечисленные замены.

1. Если $a > 0$, то новая переменная t вводится по правилу:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t. \tag{1.21}$$

2. Если $c > 0$, тогда:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}. \tag{1.22}$$

3. Если у полинома два вещественных корня x_1, x_2, тогда:

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \quad (\text{или } t(x-x_2)). \tag{1.23}$$

Пример

Вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Сделаем замену по формуле (1.21): $\sqrt{x^2+a} = -x + t$. Тогда:

$$\cancel{x^2} + a = \cancel{x^2} - 2xt + t^2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{t^2-a}{2t} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{x^2+a} = -x+t = -\frac{t^2-a}{2t}+t = \frac{t^2+a}{2t}; \quad dx = \frac{4t^2-2(t^2-a)}{4t^2} = \frac{t^2+a}{2t^2}dt.$$

Тогда после замены переменной интеграл примет вид:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C.$$

Тригонометрические подстановки.

а) Выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене.

б) Заменяем переменную: $u = x + \frac{b}{2a}$.

Тогда исходный интеграл сведется к интегралу одного из следующих типов:

1) $\int R(u, \sqrt{l^2 - u^2})\, du \;\Rightarrow\;$ замена: $u = l \sin t$ или $u = l \cos t$,

где l – некоторая постоянная.

2) $\int R(u, \sqrt{l^2 + u^2})\, du \;\Rightarrow\;$ замена: $u = l \operatorname{tg} t$ или $u = l \operatorname{ctg} t$.

3) $\int R(u, \sqrt{u^2 - l^2})\, du \;\Rightarrow\;$ замена: $u = \frac{l}{\sin t}$ или $u = \frac{l}{\cos t}$.

После замены интеграл сведётся к интегралу вида: $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$.

Пример

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx = \Big/\, x = \sin t;\; dx = \cos t dt \,\Big/ = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}\, dt =$$

$$= -\operatorname{ctg} t - t + C = -\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} - \arcsin x + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}{x} - \arcsin x + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$