Мы доказали, что это эквивалентно тому, что $\frac{MK}{\rho} \to 0$.

$$\frac{MK}{\rho} = \frac{|\triangle z - (A\triangle x + B\triangle y)|}{\rho} \to 0 \;\Leftrightarrow\; |\triangle z - (A\triangle x + B\triangle y)| = o(\rho) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \triangle z - (A\triangle x + B\triangle y) = o(\rho) \;\Leftrightarrow\; \triangle z = A\triangle x + B\triangle y + o(\rho),$$

а это означает что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$. Итак, мы доказали следующую теорему:

**Теорема 9**

Поверхность $z = f(x, y)$ имеет касательную плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\Leftrightarrow$ функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$. По теореме 8 получаем, что: $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Тогда уравнение касательной плоскости (1.16) примет вид:

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0). \tag{1.26}$$

## 1.7 Производные от сложных функций

Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$, определенную в некоторой открытой области $D$, где $x, y, z$ являются функциями от переменной $t$ :

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),$$

где $\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)$ – дифференцируемые функции.

Пусть в области $D$ существуют непрерывные производные $u'_x,\ u'_y,\ u'_z$. Тогда по теореме 7 приращение функции $u = f(x, y, z)$ может быть представлено в виде:

$$\triangle u = u'_x\triangle x + u'_y\triangle y + u'_z\triangle z + \alpha\triangle x + \beta\triangle y + \gamma\triangle z, \tag{1.27}$$

где $\alpha = \alpha\left(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}\right)$, $\beta = \beta\left(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}\right)$, $\gamma = \gamma\left(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}\right)$. Так как разложение (1.27) имеет место, то функция $u$ дифференцируема (по определению). Разделим обе части уравнения (1.27) на $\triangle t$ :

$$\frac{\triangle u}{\triangle t} = u'_x\frac{\triangle x}{\triangle t} + u'_y\frac{\triangle y}{\triangle t} + u'_z\frac{\triangle z}{\triangle t} + \alpha\frac{\triangle x}{\triangle t} + \beta\frac{\triangle y}{\triangle t} + \gamma\frac{\triangle z}{\triangle t}. \tag{1.28}$$

Устремим $\triangle t$ к 0. Тогда:

$$\frac{\triangle x}{\triangle t} \to x'_t, \quad \frac{\triangle y}{\triangle t} \to y'_t, \quad \frac{\triangle z}{\triangle t} \to z'_t.$$

Мы предположили, что $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$ – дифференцируемые функции. Следовательно, $\triangle x,\ \triangle y,\ \triangle z$ будут стремиться к нулю при $\triangle t \to 0$. А значит $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ также будут стремиться к нулю. Итак, в пределе при $\triangle t \to 0$ уравнение (1.28) примет следующий вид:

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t. \tag{1.29}$$

Мы получили формулу для производной сложной функции. Формулу нетрудно распространить на случай функции $n$ переменных:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ \ldots\ + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \tag{1.30}$$

Если $x = \varphi(t,s),\ y = \psi(t,s),\ z = \chi(t,s)$, то формулы (1.29) и (1.30) сохраняются, только под $x'_t,\ y'_t,\ z'_t$ нужно понимать частные производные:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{1.31}$$

Если функция $u$ явно зависит от $t$, то есть $u = u(t,x,y,z)$, то:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{1.32}$$

## 1.8 Производная функции $u = (\varphi(t))^{\psi(t)}$.

Введем новые переменные. Пусть $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Тогда функция $u = (\varphi(t))^{\psi(t)}$ примет вид: $u = u(x,y) = x^y$.
Найдем $\frac{du}{dt}$ по формуле (1.29):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = yx^{y-1}\frac{dx}{dt} + x^y \ln x \frac{dy}{dt} =$$

$$= \psi(t) \cdot (\varphi(t))^{\psi(t)-1} \cdot \varphi'(t) + (\varphi(t))^{\psi(t)} \cdot \ln\varphi(t) \cdot \psi'(t) =$$

$$= (\varphi(t))^{\psi(t)} \cdot \left(\psi(t) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + \ln\varphi(t) \cdot \psi'(t)\right). \tag{1.33}$$

**Пример**

Найдем производную от функции $u = t^{\sin t}$. Введем новые переменные. Пусть $x = \varphi(t) = t,\ y = \psi(t) = \sin t$. Тогда:

$$\frac{du}{dt} = t^{\sin t}\left(\sin t \cdot \frac{1}{t} + \ln t \cdot \cos t\right).$$

## 1.9 Дифференцирование функционального определителя

Рассмотрим определитель следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = u(a_{11}, a_{12},\ \ldots,\ a_{nn}), \tag{1.34}$$

где $a_{ik} = a_{ik}(t),\ \ 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le n.$

Каждый элемент определителя является функцией от переменной $t$. Тогда определитель можно рассматривать как функцию $u(a_{11}, a_{12},\ \ldots,\ a_{nn})$ многих переменных (всего $n^2$ переменных). Найдем производную от определителя, $\frac{du}{dt}$. Для этого нам понадобится выражение для $\frac{\partial u}{\partial a_{ik}},\ \ 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le n.$

Разложим опеределитель по $k$-му столбцу.

$$u = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} +\ \ldots\ a_{nk}A_{nk}. \tag{1.35}$$

Здесь $A_{jk}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{jk}$. Заметим, что $A_{ik}$ при любом $i$ не содержит $a_{ik}$, поскольку $A_{ik}$ есть определитель, полученный вычеркиванием из $u$ $i$-ой строки и $k$-го столбца, умноженного на $(-1)^{i+k}$. Таким образом, $A_{ik}$ не содержит элементов $k$-го столбца, в частности, $a_{ik}$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial}{\partial a_{ik}}\left(a_{1k}A_{1k} +\ \ldots\ a_{ik}A_{ik} +\ \ldots\ a_{nk}A_{nk}\right) = A_{ik}. \tag{1.36}$$

Напишем формулу (1.30):

$$\frac{du}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial a_{ik}}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\frac{da_{ik}}{dt}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{da_{1k}}{dt}A_{1k}+\frac{da_{2k}}{dt}A_{2k}+\ \dots\ \frac{da_{nk}}{dt}A_{nk}\right)}_{\text{разложение определителя по } k\text{-му столбцу}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \frac{da_{1k}}{dt} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & \frac{da_{2k}}{dt} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & \frac{da_{nk}}{dt} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}. \tag{1.37}$$

***Замечание***

Аналогично можно продифференцировать опеределитель по всем строкам.

$$\frac{du}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n}\\ \dots & \dots\dots & \dots\\ \frac{da_{i1}}{dt} & \dots\dots & \frac{da_{in}}{dt}\\ \dots & \dots\dots & \dots\\ a_{n1} & \dots\dots & a_{nn}\end{vmatrix}. \tag{1.38}$$

## 1.10 Формула конечных приращений

Формулой конечных приращений называют теорему Лагранжа. Напишем ее в многомерном случае.

**Теорема 10**

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и непрерывна в замкнутой области $D$ и имеет внутри $D$ непрерывные частные производные $f'_x,\ f'_y,\ f'_z$. Пусть точки $M_0(x_0,y_0,z_0),\quad M_1(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y,z_0+\triangle z)$, а также соединяющий их отрезок $M_0M_1$ принадлежат области $D$. Тогда существует число $\theta:\ 0<\theta<1$, что выполнено:

$$\triangle f(x_0, y_0, z_0) = f(M_1) - f(M_0) = f'_x(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y, z_0 + \theta\triangle z)\triangle x+$$
$$+f'_y(x_0+\theta\triangle x, y_0+\theta\triangle y, z_0+\theta\triangle z)\triangle y+f'_z(x_0+\theta\triangle x, y_0+\theta\triangle y, z_0+\theta\triangle z)\triangle z. \tag{1.39}$$

Доказательство:

Напишем параметрическое уравнение отрезка $M_0M_1$. Пусть $0 \leq t \leq 1$. Тогда: $x = x_0 + t\triangle x,\ y = y_0 + t\triangle y,\ z = z_0 + t\triangle z$. Тогда на отрезке $M_0M_1$ функция $f(x, y, z)$ будет функцией только одной переменной $t$ :

$$f(x, y, z)\Big|_{M_0M_1} = f\left(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y, z_0 + t\triangle z\right) = g(t).$$

$$g'(t) = f'_x\left(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y, z_0 + t\triangle z\right)\frac{dx}{dt}+$$
$$+f'_y\left(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y, z_0 + t\triangle z\right)\frac{dy}{dt}+$$
$$+f'_z\left(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y, z_0 + t\triangle z\right)\frac{dz}{dt} =$$
$$= f'_x\left(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y, z_0 + t\triangle z\right)\triangle x+$$
$$+f'_y\left(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y, z_0 + t\triangle z\right)\triangle y+$$
$$+f'_z\left(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y, z_0 + t\triangle z\right)\triangle z.$$

Функция $g(t)$ зависит только от одной переменной, значит для нее будет выполнена одномерная теорема Лагранжа, а именно: существует число $\theta:\ 0 < \theta < 1$, что выполнено:

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)\cdot(1 - 0) = g'(\theta), \tag{1.40}$$

что эквивалентно:

$$g(1) - g(0) = f'_x\left(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y, z_0 + \theta\triangle z\right)\triangle x+$$
$$+f'_y\left(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y, z_0 + \theta\triangle z\right)\triangle y+$$
$$+f'_z\left(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y, z_0 + \theta\triangle z\right)\triangle z. \tag{1.41}$$

С другой стороны,

$$g(1) - g(0) = f(M_1) - f(M_2). \tag{1.42}$$

Сравнивая выражения (1.41) и (1.42), получаем формулу (1.39), что и доказывает теорему.

■

## 1.11 Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $u = f(x, y, z)$, при этом переменные $x,\ y,\ z$ сами являются функциями от $t$ и $s$ :

$$x = \varphi(t, s),\ y = \psi(t, s),\ z = \chi(t, s).$$

Пусть $f,\ \varphi,\ \psi,\ \chi$ – дифференцируемые функции. Если подставить $x,\ y,\ z$ в выражение для $u = f(x, y, z)$, то получим функцию двух переменных: $u = u(t, s)$, для которой можно найти дифференциал:

$$du = u'_t dt + u'_s ds. \tag{1.43}$$

Если считать $x,\ y,\ z$ независимыми переменными (то есть не связанными между собой через переменные $t$ и $s$), то выражение для дифференциала примет вид:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz. \tag{1.44}$$

Покажем, что выражения (1.43) и (1.44) эквивалентны друг другу. По формуле (1.29) получаем:

$$u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t, \tag{1.45}$$

$$u'_s = u'_x x'_s + u'_y y'_s + u'_z z'_s. \tag{1.46}$$

Подставим (1.45) и (1.46) в (1.43):

$$du = u'_t dt + u'_s ds = \left(u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t\right) dt + \left(u'_x x'_s + u'_y y'_s + u'_z z'_s\right) ds =$$

$$= u'_x\left(x'_t dt + x'_s ds\right) + u'_y\left(y'_t dt + y'_s ds\right) + u'_z\left(z'_t dt + z'_s ds\right) = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz. \tag{1.47}$$

Таким образом, для дифференциала $du$ не имеет значения, будут ли переменные $x,\ y,\ z$ зависимыми или нет.

## 1.12 Производные высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных $x,\ y,\ z$ сами являются функциями от $x,\ y,\ z$. Если эти производные продифференцировать еще раз, получим частные производные второго порядка.

**Обозначение**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (u'_x)'_x = u'_{x^2} = u''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (u'_y)'_x = u'_{x^2} = u''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = (u'_x)'_y = u'_{x^2} = u''_{xy}.$$

***Замечание***

Иногда в обозначении смешанной производной в виде дроби порядок дифференцирования указывают по-другому:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (u'_x)'_y = u''_{xy}.$$

**Теорема 11** (теорема о смешанных производных)

**1)** Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой открытой области $D$.

**2)** Пусть в области $D$ также существуют производные $f'_x,\ f'_y,\ f''_{xy},\ f''_{yx}$.

**3)** Пусть производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ непрерывны в некоторой точке $(x_0, y_0) \in D$. Тогда в этой точке смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство:

Мы будем строить смешанные производные, используя конечные приращения функции и одномерную теорему Лагранжа. Пусть $h$ и $k$ – малые числа, такие, что прямоугольник $[x_0, x_0+h;\ y_o, y_0+h] \subset D$. Введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$ по следующему правилу:

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}. \tag{1.48}$$

Тогда

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x, y_0)}{k}. \tag{1.49}$$

Теперь рассмотрим функцию $W$, связанную с приращением функции $\varphi$ :

$$W = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}. \tag{1.50}$$

Подставим формулу (1.48) для $\varphi(x)$ в выражение (1.50):

$$W = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk}. \tag{1.51}$$

Функция $\varphi(x)$ зависит только от одной переменной. Тогда для нее можно написать одномерную теорему Лагранжа на отрезке $[x_0, x_0+h]$ : существует число $\theta :\ 0 < \theta < 1$, что выполнено:

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\theta h)\cdot h. \tag{1.52}$$

Тогда

$$W = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ (1.52)}}{=} \varphi'(x_0+\theta h) \underset{\substack{\uparrow \\ (1.49)}}{=}$$

$$= \frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k}. \tag{1.53}$$

Напишем теорему Лагранжа для функции $f'_x(x_0+\theta h, y)$ как функции от одной переменной $y$ на отрезке $[y_0, y_0+k]$ : существует число $\theta_1$ : $0 < \theta_1 < 1$, что выполнено:

$$f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0) = f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k)\cdot k. \tag{1.54}$$

Сравнивая формулы (1.53) и (1.54), получаем, что: существуют такие числа $\theta,\ \theta_1$ : $\begin{cases} 0 < \theta < 1 \\ 0 < \theta_1 < 1 \end{cases}$, что выполнено:

$$W = f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k). \tag{1.55}$$

Аналогично, введя функцию $\psi(y) = \frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h}$, получим, что: существуют такие числа $\theta_2,\ \theta_3$ : $\begin{cases} 0 < \theta_2 < 1 \\ 0 < \theta_3 < 1 \end{cases}$, что выполнено:

$$W = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_3 k). \tag{1.56}$$

Тогда из (1.55) и (1.56) получаем:

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_3 k). \tag{1.57}$$

Так как производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ непрерывны в точке $(x_0, y_0)$, мы можем сделать предельный переход в уравнении (1.57) при $h \to 0,\ k \to 0$ :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{1.58}$$

$\blacksquare$

***Замечание***

Теорема 11 о смешанных производных будет верна для смешанных производных любого порядка, а не только второго.

## 1.13 Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n)$, заданную в области $D$. Пусть эта функция имеет непрерывные частные производные первого порядка. Тогда дифференциал $du$ имеет следующий вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 +\ \ldots\ + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n. \tag{1.59}$$

Здесь $dx_1, dx_2,\ \ldots\ dx_n$ – произвольные приращения независимых переменных $x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Как видим из формулы (1.59), $du$ есть функция от переменных $x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n$. Если мы предположим, что функция $u$ имеет производные второго порядка, то можно найти дифференциал от дифференциала $du$. Он называется дифференциалом второго порядка от функции $u$ и обозначается символом $d^2u$. Заметим, что дифференциалы $dx_1, dx_2,\ \ldots\ dx_n$

мы считаем постоянными величинами. Тогда:

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \ \ldots \ + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx_2 + \ \ldots \ + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)dx_n,$$

что эквивалентно:

$$d^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}dx_2 + \ \ldots \ + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}dx_n\right) \cdot dx_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2 + \ \ldots \ + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n}dx_n\right) \cdot dx_2 + \ \ldots$$

$$\ldots \ + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2}dx_2 + \ \ldots \ + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}dx_n\right) \cdot dx_n =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \ \ldots \ + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}dx_n^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1 dx_3 + \ \ldots \ + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1 dx_n +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}dx_2 dx_3 + \ \ldots \ + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}dx_{n-1} dx_n.$$

Аналогично определяются дифференциалы следующих порядков:

$$d^3u = d(d^2u), \ \ldots\ldots, \ d^nu = d(d^{n-1}u).$$

Для упрощения записи дифференциалов используют следующую символьную запись:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ \ldots \ + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)u,$$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ \ldots \ + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 u.$$

Третий и последующие дифференциалы записываются аналогично:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ \ldots \ + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n u. \tag{1.60}$$

Формулу (1.60) можно доказать по индукции. Не будем здесь приводить это доказательство.

**Теорема 12**

Дифференциалы порядка выше первого не обладают свойством инвариантности формы.

Доказательство:

Пусть дифференциалы $dx_1, dx_2, \ \ldots, \ dx_n$ не постоянны, то есть сами являются функциями. Тогда:

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1 + \ \ldots \ + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)dx_n + \frac{\partial u}{\partial x_1}d(dx_1) + \ \ldots \ + \frac{\partial u}{\partial x_n}d(dx_n) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ \ldots \ \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2 + \ \ldots \ \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d^2x_n. \tag{1.61}$$

Таким образом, высшие дифференциалы не обладают свойством инвариантности формы.

■

***Замечание Коши***

Рассмотрим частный случай, когда $x_1, x_2, \ \ldots \ x_n$ являются линейными функциями от $t_1, t_2, \ \ldots \ t_n$ :

$$x_i = \alpha_{i1}t_1 + \alpha_{i2}t_2 + \ \ldots \ + \alpha_{im}t_m + \beta_i. \tag{1.62}$$

Тогда

$$dx_i = \alpha_{i1}dt_1 + \alpha_{i2}dt_2 + \ \ldots \ + \alpha_{im}dt_m, \tag{1.63}$$

то есть $dx_i$ являются постоянными величинами, а значит $d^2x_i = 0$. Таким образом, если $x_1, x_2, \ \ldots \ x_n$ зависят от других переменных линейно, то инвариантность есть.

## 1.14 Формула Тейлора

Согласно одномерной формуле Тейлора, если у функции $F(t)$ существуют производные вплоть до $(n+1)$-го порядка включительно, то она может быть разложена по формуле Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2!}F''(t_0)(t-t_0)^2 + \ \ldots \ + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)\cdot(t-t_0)^n +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1. \tag{1.64}$$

Пусть $t-t_0=\triangle t=dt,\quad F(t)-F(t_0)=\triangle F(t_0)$. Тогда формулу Тейлора (1.64) можно переписать в следующем виде:

$$\triangle F(t_0)=dF(t_0)+\frac{1}{2!}d^2F(t_0)+\ \dots\ +\frac{1}{n!}d^nF(t_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\triangle t),\quad 0<\theta<1. \tag{1.65}$$

Заметим, что при этом $dt=t-t_0=\triangle t$.

Формулу Тейлора, записанную в форме (1.65), можно распространить на случай функции нескольких переменных. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y)$. Пусть в окрестности некоторой точки $(x_0,y_0)$ она имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка включительно. Предположим также, что отрезок, соединяющий точки $(x_0,y_0)$ и $(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)$, целиком лежит в рассматриваемой окрестности точки $(x_0,y_0)$. Тогда:

$$\triangle f(x_0,y_0)=f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\dots$$

$$\dots\ +\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\triangle x,y_0+\theta\triangle y),\quad 0<\theta<1, \tag{1.66}$$

причем $\triangle x=dx,\quad \triangle y=dy$.

Докажем формулу (1.66). Введем новую переменную $t$ следующим образом:

$$x=x_0+t\cdot\triangle x,\quad y=y_0+t\cdot\triangle y,\quad 0\le t\le 1. \tag{1.67}$$

Подставим $x$ и $y$ в функцию $f(x,y)$. Мы получим новую функцию $F(t)$, зависящую только от одной переменной $t$ :

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\triangle x,y_0+t\triangle y). \tag{1.68}$$

Формулы (1.67) параметрически задают отрезок, соединяющий точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)$. Тогда вместо приращения функции двух переменных $\triangle f(x_0,y_0)$ мы можем рассматривать приращение функции одной переменной $F(t)$ ибо эти приращения равны. Но для функции одной переменной $F(t)$ можно применить одномерную формулу Тейлора:

$$\triangle F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \ \dots\ + \frac{1}{n!}d^nF(0) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta), \quad 0 < \theta < 1, \tag{1.69}$$

при этом $dt = \triangle t = 1 - 0 = 1$.

Теперь воспользуемся замечанием Коши. При линейной замене переменных высшие дифференциалы будут обладать свойством инвариантности формы. Тогда:

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = df(x_0, y_0),$$

$$d^2F(0) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0) = d^2f(x_0, y_0),$$

и так далее. Для $(n+1)$-го дифференциала получим следующую формулу:

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y),$$

что и доказывает формулу (1.66). Заметим, что здесь диффферернциалы $dx$ и $dy$ совпадают с ранее взятыми приращениями $\triangle x$ и $\triangle y$ :

$$dx = \triangle x \cdot dt = \triangle x, \quad dy = \triangle y \cdot dt = \triangle y.$$

## 1.15 Экстремумы функции нескольких переменных

Пусть $P_0\left(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0\right)$ – внутренняя точка области определения функции $f\left(x_1,\ \dots,\ x_n\right)$.

***Определение***

Функция $u = f\left(P\right)$ имеет максимум (минимум) в точке $P_0\left(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0\right)$, если существует окрестность точки $P_0$ для всех точек $P\left(x_1,\ \dots,\ x_n\right)$ которой выполняется неравенство $f(P) \leq f\left(P_0\right) \quad \left(f(P) \geq f\left(P_0\right)\right)$.

***Замечание***

Для обозначения максимума и минимума используется общий термин – экстремум.

**Теорема 13** (**Необходимое условие экстремума**)

Если дифференцируемая функция $f(P)$ достигает экстремума в точке $P_0\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$, то в этой точке все ее частные производные равны нулю:

$$\begin{cases} f'_{x_1}\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right) = 0. \end{cases} \tag{1.70}$$

Точки, в которых выполнены эти условия, называются стационарными точками функции $u = f(P)$.

Доказательство:

Пусть $x_2 = x_2^0,\ \ldots,\ x_n = x_n^0$. Мы зафиксировали все переменные кроме $x_1$ и получили функцию одной переменной: $u = f\left(x_1,\ \ldots,\ x_n^0\right)$. По условию теоремы мы предположили, что функция достигает экстремума в точке $P_0\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$, пусть для определенности это будет экстремум-максимум. Тогда в некоторой окрестности $(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta)$ будет выполнено неравенство: $f\left(x_1, x_2^0\ \ldots,\ x_n^0\right) \le f\left(x_1^0, x_2^0\ \ldots,\ x_n^0\right)$. Таким образом, функция одной переменной достигает в точке $x_1 = x_1^0$ максимума, откуда по теореме Ферма следует, что:

$$f'_{x_1}\left(x_1^0, x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right) = 0. \tag{1.71}$$

Аналогично доказывается, что в точке $\left(x_1^0, x_2^0\ \ldots,\ x_n^0\right)$ остальные производные также равны 0.

■

***Замечание***

К точкам, подозрительным на экстремум, кроме стационарных относятся также точки, где частные производные не существуют либо равны $\infty$.

**Достаточные условия экстремума функции двух переменных**

Пусть $(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $f(x, y)$. Предположим также, что функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности точки $(x_0, y_0)$. В стационарной точке $(x_0, y_0)$ будут выполнены условия:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{1.72}$$

Рассмотрим разность $\triangle = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ и разложим ее по формуле Тейлора, взяв первые два члена. Первый член будет равен нулю, так как точка $(x_0, y_0)$ – стационарная. Тогда:

$$\triangle = \frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y)\triangle x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y)\triangle x\triangle y +$$

$$+ f''_{yy}(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y)\triangle y^2\Big).$$

Здесь $0 < \theta < 1, \quad \triangle x = x - x_0, \quad \triangle y = y - y_0$. Введем обозначения для значений производных в точке $(x_0, y_0)$ :

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0). \tag{1.73}$$

В сдвинутой точке $(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y)$ положим

$$f''_{xx}(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y) = a_{11} + \alpha_{11},$$

$$f''_{xy}(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y) = a_{12} + \alpha_{12},$$

$$f''_{yy}(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y) = a_{22} + \alpha_{22},$$

где $\alpha_{11} = \alpha_{11}\left(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}\right), \quad \alpha_{12} = \alpha_{12}\left(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}\right),$
$\alpha_{22} = \alpha_{22}\left(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}\right)$ – бесконечно малые при $\triangle x \to 0, \ \triangle y \to 0$.
С учетом введенных обозначений, разность $\triangle$ примет вид:

$$\triangle = \frac{1}{2}\Big(a_{11}\triangle x^2 + 2a_{12}\triangle x\triangle y + a_{22}\triangle y^2 + \alpha_{11}\triangle x^2 + 2\alpha_{12}\triangle x\triangle y + \alpha_{22}\triangle y^2\Big). \tag{1.74}$$

Как будет показано в дальнейшем, поведение разности $\triangle$ зависит от знака выражения $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Введем полярные координаты, взяв за начало координат точку $(x_0, y_0)$ и проведя через нее полярную ось параллельно оси $OX$ :

$$\begin{cases} \triangle x = \rho\cos\varphi, \\ \triangle y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.75}$$

Тогда расстояние между точками $(x_0, y_0)$ и $(x, y)$ примет вид:
$\rho = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$. Перепишем выражение для $\triangle$ в новых координатах:

$$\triangle = \frac{\rho^2}{2}\Big( \big(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi\big) +$$

$$+ \big(\alpha_{11}(\rho)\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}(\rho)\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}(\rho)\sin^2\varphi\big)\Big). \tag{1.76}$$

Рассмотрим различные случаи для знака выражения $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.
**1 случай.** $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Для выполнения этого неравенства необходимо чтобы было выполнено: $a_{11}a_{22} > 0$, следовательно $a_{11} \neq 0$. Тогда первый трехчлен в скобках можно представить в виде:

$$\frac{1}{a_{11}}\Big(\underbrace{(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2}_{>0} + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi}_{>0}\Big), \tag{1.77}$$

то есть это выражение при всех $\varphi$ сохраняет знак коэффициента $a_{11}$. Следовательно, его абсолютная величина как непрерывная по $\varphi$ функция на замкнутом промежутке $[0, 2\pi]$ достигает своего наименьшего значения $m$ (по второй теореме Вейерштрасса):

$$|a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi| \geq m > 0. \tag{1.78}$$

С другой стороны, $\alpha_{11}(\rho)$, $\alpha_{12}(\rho)$, $\alpha_{22}(\rho)$ – бесконечно малые величины, а значит в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$ будет выполнено:

$$\big|\alpha_{11}(\rho)\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}(\rho)\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}(\rho)\sin^2\varphi\big| \leq$$

$$\leq |\alpha_{11}(\rho)| + 2|\alpha_{12}(\rho)| + |\alpha_{22}(\rho)| < m$$

для любого $\varphi$ при достаточно малых $\rho$. Тогда из оценок (1.77) и (1.78) получаем, что разность $\triangle$ будет сохранять знак $a_{11}$ в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$. Подведем итог. Если $a_{11} > 0$, то $\triangle > 0$ и в точке $(x_0, y_0)$ достигается минимум. Если $a_{11} < 0$, то $\triangle < 0$ и в точке $(x_0, y_0)$ будет максимум.

**2 случай.** $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

**а)** $a_{11} \neq 0$. Тогда при $\varphi = \varphi_1 = 0$ выражение в скобках в (1.77) сведется к $a_{11}^2$, то есть будет положительно. Если же определить $\varphi = \varphi_2$ из условия:

$$a_{11}\cos\varphi_2 + a_{12}\sin\varphi_2 = 0, \quad \text{где } \sin\varphi_2 \neq 0,$$

то выражение в скобках в(1.77) сведется к $\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)\sin^2\varphi_2$ и будет отрицательно. При достаточно малых $\rho$ второй трехчлен в формуле (1.76) для $\triangle$ будет сколь угодно мал и знак $\triangle$ определится знаком первого трехчлена. Таким образом, в любой окрестности точки $(x_0, y_0)$ найдутся лучи $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, на которых $\triangle$ будет иметь значения разных знаков. А значит экстремума в точке $(x_0, y_0)$ быть не может.

**б)** $a_{11} = 0$. Тогда первый трехчлен в скобках в формуле (1.76) для $\triangle$ сведется к выражению:

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = \sin\varphi\left(2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi\right).$$

Так как $a_{12} \neq 0$ (ибо мы рассматриваем случай $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0, \;\; a_{11} = 0$), то можно найти угол $\varphi_1 \neq 0$, для которого будет выполнено:

$$|a_{22}||\sin\varphi_1| < 2|a_{12}||\cos\varphi_1|.$$

Но тогда при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = -\varphi_1$ трехчлен будет иметь противоположные знаки, то есть нашлись направления на которых $\triangle$ принимает разные знаки и экстремума в точке $(x_0, y_0)$ быть не может. ■

**Теорема 14** (**Достаточные условия экстремума**)

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то в рассматриваемой стационарной точке $(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет экстремум: максимум при $a_{11} < 0$ и минимум при

$a_{11} > 0$. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то экстремума нет.

***Замечание***

Случай $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ не рассмотрен. Здесь для решения вопроса нужно использовать высшие производные.

**Достаточные условия экстремума. Случай $n$ переменных.**

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные проивзводные первого и второго порядков в окрестности некоторой стационарной точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Разложим разность $\triangle = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ по формуле Тейлора, взяв первые два члена. Первый член будет равен нулю, так как точка $(x_0, y_0)$ – стационарная. Тогда:

$$\triangle = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} f''_{x_i x_k}\left(x_1^0 + \theta\triangle x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\triangle x_n\right)\triangle x_i \triangle x_k.$$

Здесь $0 < \theta < 1$, $\triangle x_i = x_i - x_i^0$. Введем обозначения для значений производных в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ :

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = a_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.79}$$

Кроме того, положим

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0 + \theta\triangle x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\triangle x_n) = a_{ik} + \alpha_{ik},$$

где $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}\left(\sqrt{\triangle x_1^2 + \ldots + \triangle x_n^2}\right)$ – бесконечно малые при $\triangle x_1 \to 0, \ldots, \triangle x_n \to 0$. Ясно, что $a_{ik} = a_{ki}$, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

С учетом введенных обозначений, разность $\triangle$ примет вид:

$$\triangle = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\triangle x_i \triangle x_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\triangle x_i \triangle x_k\Big). \tag{1.80}$$

Первая из сумм – это второй диффререренциал функции $f$ в рассматриваемой точке. Такую функцию называют квадратичной формой от переменных $\triangle x_1, \ldots, \triangle x_n$.

***Определение***

Квадратичную форму

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \tag{1.81}$$

называют положительно определенной (отрицательно определенной), если она имеет положительные (отрицательные)значения при всех значениях аргументов, не равных одновременно нулю. Например, форма

$$-2\triangle x_1^2 + 4\triangle x_1 \triangle x_2 - 3\triangle x_2^2 - 3\triangle x_3^2 = -2(\triangle x_1 - \triangle x_2)^2 - \triangle x_2^2 - 3\triangle x_3^2$$

будет отрицательно определенной.

**Теорема 15** (**Критерий Сильвестра**)

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась цепочка неравенств:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots\ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{1.82}$$

Так как отрицательно определенная форма при изменении знака всех ее членов перейдет в положительно определенную, то, учитывая особенности вынесения знака из определителя, несложно получить характеристику отрицательной формы:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots\ldots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{1.83}$$

Критерий доказывается в курсе линейной алгебры.

**Теорема 16** (**Достаточные условия экстремума функции** $n$ **переменных**)

Если второй дифференциал, то есть квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \triangle x_i \triangle x_k, \quad \text{где } a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0) \tag{1.84}$$

оказывается положительно определенной, то в проверяемой стационарной точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ будет минимум (максимум).

Доказательство:

Введем расстояние между точками $P_0(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ и $P(x_1,\ \ldots\ x_n)$ :

$$\rho = \sqrt{\triangle x_1^2 + \ \ldots\ + \triangle x_n^2}.$$

Введем обозначение:

$$\frac{\triangle x_i}{\rho} = \xi_i, \quad i = 1, 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда выражение для $\triangle$ примет вид:

$$\triangle = \frac{\rho^2}{2}\Big(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k\Big). \tag{1.85}$$

Числа $\xi_i$ не обращаются в нуль одновременно, поэтому если форма (1.84) положительно определенная, то первая сумма в формуле (1.85) также будет положительной. Более того, так как

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1, \tag{1.86}$$

то найдется такое положительное число $m$, что для любого $\xi_i$ будет выполнено:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geq m. \tag{1.87}$$

Объясним последнее неравенство. Данная сумма представляет собой непрерывную функцию от аргументов $\xi_i$ во всем пространстве, в частности, на множестве $M$ тех точек, которые представляют собой сферическую поверхность, определяемую соотношением (1.86). Множество $M$ замкнутое (то есть содержит все свои точки сгущения). Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса сумма из формулы (1.87) будет достигать на множестве $M$ своего наименьшего значения, причем это значение будет положительным (как и все значения в $M$).

С другой стороны, вторая сумма в (1.85) при достаточно малых $\rho$ будет меньше числа $m$, то есть вся скобка будет положительной величиной. Таким образом, в достаточно малой сфере с центром в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ разность $\triangle$ будет положительна, то есть в этой точке функция $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ имеет минимум.

Аналогично доказывается случай, когда форма (1.84) будет отрицательно определенной.

■

**Условия отсутствия экстремума**

Квадратичная форма (1.81) называется неопределенной, если она может принимать значения противоположных знаков. Приведем пример. Рассмотрим квадратичную форму

$$8y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1y_2 - y_1y_3 - 6y_2y_3.$$

При $y_1 = 5,\ y_2 = 1,\ y_3 = 1$ значение формы равно $+186$.
При $y_1 = 0,\ y_2 = 5,\ y_3 = 6$ значение формы равно $-119$.

Теперь мы можем дополнить теорему 16 о достаточных условиях экстремума функции $n$ переменных.

***Замечание к теореме 16***

Если квадратичная форма будет неопределенной, то в проверяемой стационарной точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ нет экстремума.

Доказательство:

Пусть при $\triangle x_i = h_i,\quad i = 1, 2,\ \ldots,\ n$ форма (1.84) принимает положительное значение:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}h_ih_k > 0, \tag{1.88}$$

а при $\triangle x_i = g_i,\quad i = 1, 2,\ \ldots,\ n$ – отрицательное:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}g_ig_k < 0. \tag{1.89}$$

Зададим прямую, проходящую через две точки $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ и $(x_1^0+h_1,\ \ldots,\ x_n^0+h_n):$

$$\triangle x_i = h_i t, \quad 0 < t \leq 1,\ i = 1, 2,\ \ldots,\ n.$$

В формуле (1.80) для $\triangle$ вынесем за скобки $t^2:$

$$\triangle = \frac{t^2}{2}\Big(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}h_i h_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}h_i h_k\Big). \tag{1.90}$$

Первая сумма в скобках есть некоторое положительное число (в силу (1.88)). Вторая сумма будет сколь угодно мала при $\triangle x_i \to 0$. Следовательно, $\triangle$ будет положительным, то есть в некоторой окрестности точки $(x_1^0,\ \ldots,\ \ x_n^0)$ будет выполнено:

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n) > f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0).$$

С другой стороны, если взять другую прямую, соединяющую две точки $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ и $(x_1^0+g_1,\ \ldots,\ x_n^0+g_n):$

$$\triangle x_i = g_i t, \quad 0 < t \leq 1,\ i = 1, 2,\ \ldots,\ n,$$

то в ее точках в некоторой окрестности точки $(x_1^0,\ \ldots,\ \ x_n^0)$ будет выполнено:

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n) < f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0).$$

Таким образом, мы доказали, что в проверяемой стационарной точке не может быть ни максимума, ни минимума. ■

***Замечание***

Может оказаться, что форма не может принимать значения разных знаков, но при этом не является определенной, так как обращается в нуль не только при нулевых значениях аргументов. Например, форма

$$-y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2 - y_3^2 = -(y_1+y_2)^2 - y_3^2 \leq 0$$

положительных значений не принимает, но обращается в нуль при $y_3 = 0,\ y_1 = y_2 \neq 0.$

В случае полуопределенной квадратичной формы экстремум функции может быть, а может и не быть. Это зависит от поведения высших производных. Данный случай мы изучать не будем.

## 1.16 Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области $D$ и имеет в этой области конечные частные производные. Тогда по второй теореме Вейерштрасса в этой области найдется точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, в которой функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения. Если эта точка лежит внутри области $D$, то в ней будет достигнут экстремум-максимум (минимум). Однако, своего наибольшего (наименьшего) значения функця может достигать и на границе области. Поэтому алгоритм действий таков. Сначала нужно найти все внутренние точки, подозрительные на экстремум и вычислить в них значения функции. Затем эти значения сравниваются со значениями функции на границе области, из них выбирается наибольшее и наименьшее.

***Пример***

Найдем наибольшее значение функции $u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ в прямоугольной области: $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi$.

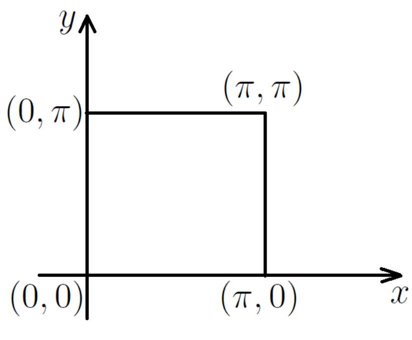


Рис. 4: Область $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi$.

Для начала из необходимого условия экстремума определим стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ u'_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos y \\ \cos(x+y) = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ \cos 2x = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ \cos x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{1.91}$$

то есть $x = y = \frac{2\pi}{3}$. Значение функции в стационарной точке:

$$u\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Посчитаем значения функции на границах области. На прямых $x = 0$ и $y = 0$ функция будет равна 0.

$$x = \pi: \ u = 2\sin y \ \Rightarrow \ u' = 2\cos y = 0 \ \Rightarrow \ y = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ u\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

$$y = \pi: \ u = 2\sin x \ \Rightarrow \ u' = 2\cos x = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ u\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

В угловых точках: $u(0,0) = u(0,\pi) = u(\pi,0) = u(\pi,\pi) = 0$. Сравнивая все найденные значения функции, получаем, что:

$$u_{\text{наибольшее}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{достигается в точке } \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

## 1.17 Неявные функции

Рассмотрим функцию двух переменных $F(x, y)$, заданную в некоторой области $D$, для которой выполнено уравнение:

$$F(x, y) = 0. \tag{1.92}$$

Если для любого $x$ существует одно или несколько значений $y$ таких, что $(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.92), то говорят, что уравнение (1.92) определяет однозначную или многозначную функцию $y = f(x)$, для которой будет выполнено:

$$F(x, f(x)) = 0. \tag{1.93}$$

***Пример 1***

Рассмотрим эллипс:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1.94}$$

Решение уравнения (1.94) представляет из себя двузначную функцию от $x$ на отрезке $[-a, a]$ :

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{1.95}$$

Здесь удалось получить явное аналитическое выражение для функции $y = f(x)$. Такое выражение удается получить не всегда.

***Пример 2***

$$y \sin x + x \cos y = 0. \tag{1.96}$$

Здесь явное выражение для функции получить не удается.

***Определение***

Функция $y = f(x)$ называется неявной, если она задана при помощи неразрешенного относительно $y$ уравнения (1.92).

**Теорема 17** (**Теорема о неявной функции**)

Пусть для функции $F(x, y)$ выполнены следующие условия:

**1)** Функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $D = [x_0 - \triangle, x_0 + \triangle; y_0 - \triangle', y_0 + \triangle']$.

**2)** Частные производные существуют и непрерывны в $D$.

**3)** $F(x_0, y_0) = 0$.

**4)** $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда:

**а)** В окрестности точки $(x_0, y_0)$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет однозначную функцию $y = f(x)$.

**б)** При $x = x_0 : \quad f(x_0) = y_0$.

**в)** Функция $f(x)$ непрерывна.

**г)** Функция $f(x)$ имеет непрерывную производную.

Оставим эту теорему без доказательства.

***Замечание***

Важность условия 4 показывает пример 1.

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Тогда $F'_y = \frac{2}{b^2}y$, то есть $F'_y \neq 0$ всюду кроме вершин большой оси эллипса: $(-a,0)$ и $(a,0)$.

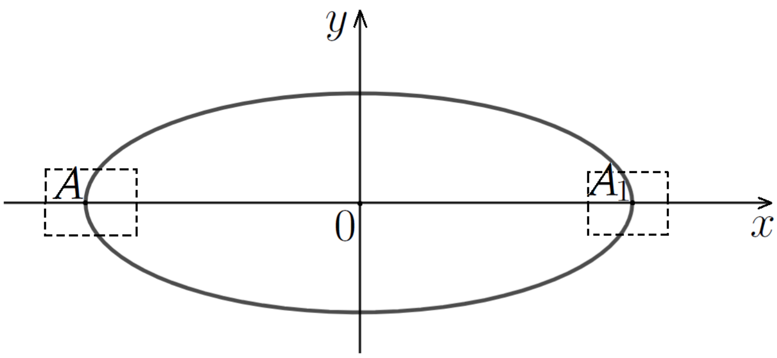


Рис. 5: Эллипс. Иллюстрация к примеру 1

В окрестностях точек $A$ и $A_1$ (выделены пунктирными прямоугольниками на рисунке) эллипс не задает однозначно функцию $y = f(x)$, поскольку в любых сколь угодно малых окрестностях этих точек у уравнения будет два решения:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

**Производные от неявно заданной функции**

Пусть в некоторой области $D$ выполнены условия теоремы о неявной функции. Тогда в этой области можно найти производную $y'_x$ от неявно заданной функции. Продифференцируем уравнение $F(x,y) = 0$ по переменной $x$ :

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'_x = 0 \;\Leftrightarrow\; y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (1.97)$$

Если предположить существование непрерывных вторых производных $F''_{xx}$, $F''_{xy}$, $F''_{yx}$, $F''_{yy}$, то можно найти вторую производную $y''_{xx}$, продифференцировав соотношение (1.97):

$$y''_{xx} = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot y'_x)F'_y - (F''_{yx} + F''_{yy} \cdot y'_x)F'_x}{(F'_y)^2}. \qquad (1.98)$$

Подставим сюда выражение для $y'_x$ из (1.97):

$$y''_{xx} = -\frac{(F''_{xx} - F''_{xy} \cdot \frac{F'_x}{F'_y})F'_y - (F''_{yx} + F''_{yy} \cdot \frac{F'_x}{F'_y})F'_x}{(F'_y)^2}. \qquad (1.99)$$

**Неявные функции от нескольких переменных**

Теорему о неявной функции можно сформулировать и для функции $n$ переменных:

$$F(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n, y) = 0. \qquad (1.100)$$

В самом общем случае может быть задана система из $m$ уравнений с $n+m$ переменными:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ \ldots, \ x_n, y_1, \ \ldots, \ y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ \ldots, \ x_n, y_1, \ \ldots, \ y_m) = 0. \end{cases} \qquad (1.101)$$

***Определение***

Говорят, что в $(n+m)$-мерном параллелепипеде

$$(a_1, b_1; \ \ldots \ a_n, b_n; c_1, d_1; \ \ldots \ c_m, d_m)$$

система (1.101) определяет $y_1, \ \ldots, \ y_m$ как однозначные функции от $x_1, \ \ldots, \ x_n$, если для каждой точки $(x_1, \ \ldots, \ x_n)$ в $n$-мерном параллелепипеде $(a_1, b_1; \ \ldots \ a_n, b_n)$ эта система уравнений имеет одну и только одну систему решений $y_1, \ \ldots, \ y_m$, принадлежащую $m$-мерному параллелепипеду $(c_1, d_1; \ \ldots \ c_m, d_m)$.

***Замечание***

В вопросе о существовании неявной функции, определяемой уравнением (1.92), основную роль играло условие: $F'_y \neq 0$. Для системы неявных функций аналогичную роль будет играть якобиан:

$$J = \frac{D(F_1, \ \ldots, \ F_m)}{D(y_1, \ \ldots, \ y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}. \qquad (1.102)$$

**Теорема 18** (**Система** $m$ **неявных функций** $n+m$ **переменных**)
Предположим, что:
**1)** Функции $F_1,\ \ldots,\ F_m$ определены и непрерывны в $(n+m)$-мерном прямоугольном параллелепипеде

$$D=[x_1^0-\triangle_1,x_1^0+\triangle_1;\ \ldots\ x_n^0-\triangle_n,x_n^0+\triangle_n;\ y_1^0-\triangle'_1,y_1^0+\triangle'_1;\ \ldots\ y_m^0-\triangle'_m,y_m^0+\triangle'_m]$$

с центром в точке $\left(x_1^0,\ \ldots\ x_n^0;y_1^0,\ \ldots\ y_m^0\right)$.
**2)** Частные производные от этих функций в $D$ существуют и непрерывны по всем аргументам.
**3)** Точка $\left(x_1^0,\ \ldots\ y_m^0\right)$ удовлетворяет системе (1.101).
**4)** Якобиан $J\neq 0$ в точке $\left(x_1^0,\ \ldots\ y_m^0\right)$.
Тогда:
**а)** В окрестности точки $\left(x_1^0,\ \ldots\ y_m^0\right)$ система уравнений (1.101) определяет $y_1,\ \ldots,\ y_m$ как однозначные функции от $x_1,\ \ldots,\ x_n$ :

$$y_1=f_1(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ y_m=f_m(x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

**б)** При $x_1=x_1^0,\ \ldots,\ x_n=x_n^0$ эти функции равны, соответственно $y_1^0,\ \ldots,\ y_m^0$.
**в)** Функции $f_1,\ \ldots,\ f_m$ непрерывны.
**г)** Функции $f_1,\ \ldots,\ f_m$ имеют непрерывные частные производные по всем аргументам.
Эту теорему также оставим без доказательства.

## 1.18 Условный экстремум

Рассмотрим вопрос об экстремуме функции $f(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m})$ в предположении, что переменные $x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}$ подчинены $m$ уравнениям связи:

$$\Phi_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}\right)=0,\quad i=1,2,\ \ldots,\ m. \tag{1.103}$$

***Определение***
Говорят, что в точке $M_0(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n+m}^0)$, удовлетворяющей уравнениям

связи, функция $f(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m})$ имеет условный максимум (минимум), если неравенство

$$f\left(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}\right) \le f\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n+m}^0\right)$$
$$\Big(f\left(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}\right) \ge f\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n+m}^0\right)\Big)$$

выполняется в некоторой окрестности точки $M_0$ для всех ее точек, удовлетворяющих уравнениям связи.

Пусть выполнены условия теоремы о неявной функции и из уравнений связи можно выразить $x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}$ через $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Тогда полученные выражения можно подставить в функцию $f$ и найти у полученной функции $n$ переменных обычный экстремум. Если $x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}$ явно выразить не удается, то рассмотрим дифференциал $df$. По свойству инвариантности формы:

$$df = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

где $dx_{n+1},\ \ldots,\ dx_{n+m}$ – дифференциалы неявных функций, определяемых уравнениями связи:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, 2,\ \ldots\ m. \tag{1.104}$$

Выразим $dx_{n+1},\ \ldots,\ dx_{n+m}$ через $dx_1,\ \ldots,\ dx_n$ из системы соотношений (1.104) и подставим их в выражение для дифференциала $df$. Затем приведем подобные члены и приравняем к нулю коэффициенты при каждом $dx_i$. Мы получим необходимые условия условного экстремума.

## 1.19 Метод неопределенных множителей Лагранжа

Найдем экстремум функции $f(x, y)$ при условии: $g(x, y) = C$. Необходимое условие экстремума для функции $f(x, y)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ df = f'_x dx + f'_y dy = 0. \tag{1.105}$$

Дифференциалы $dx$ и $dy$ здесь не являются независимыми:

$$dg = g'_x dx + g'_y dy = 0 \;\Leftrightarrow\; dy = -\frac{g'_x}{g'_y}dx. \tag{1.106}$$

Подставим выражение для $dy$ из (1.106) в уравнение (1.105):

$$f'_x dx - f'_y \cdot \frac{g'_x}{g'_y}dx = 0 \;\Leftrightarrow\; /dx \neq 0/ \;\Leftrightarrow\; f'_x = f'_y \cdot \frac{g'_x}{g'_y}. \tag{1.107}$$

Мы считаем, что уравнение $g(x,y) = C$ определяет кривую. Следовательно, $g'_x \neq 0,\; g'_y \neq 0$ ибо в ином случае были бы выполнены необходимые условия экстремума ($g'_x = 0,\; g'_y = 0$) и уравнение $g(x,y) = C$ определяло бы не кривую, а точки на плоскости (либо всю плоскость). С учетом сказанного, формулу (1.107) можно переписать в виде:

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \lambda, \quad \text{(обозначение)} \tag{1.108}$$

что эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} f'_x - \lambda g'_x = 0, \\ f'_y - \lambda g'_y = 0. \end{cases} \tag{1.109}$$

Система (1.109) задает необходимые условия экстремума для функции $f - \lambda g$ без условий связи.

**Геометрический смысл условия 1.108**

Нарисуем линии уровня для функции $f(x,y): \quad f(x,y) = const.$

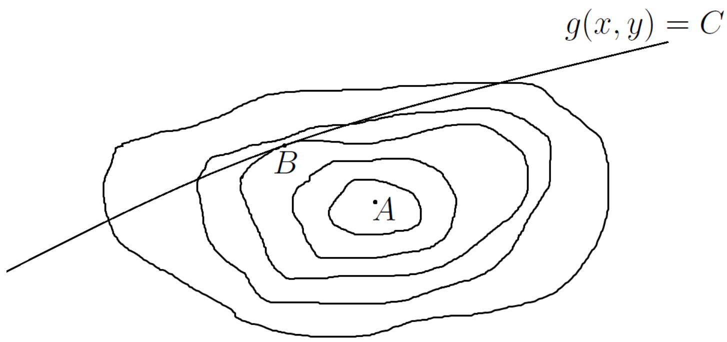


Рис. 6: Линии уровня функции $f(x,y)$

Здесь точка $A$ – это точка максимума функции $f(x,y)$. Данный рисунок можно рассматривать как карту рельефа местности, точку $A$ –

как вершину горы, условие связи $g(x, y) = C$ как дорогу, по которой мы движемся. Точка $B$ соответствует наивысшей точке дороги. Мы ее достигнем, когда будем двигаться по дороге параллельно линии уровня $f(x, y) = const$. Из уравнения 1.105 следует, что касательный вектор к линии уровня будет иметь координаты $(f'_x, f'_y)$. Касательный вектор к линии дороги $g(x, y) = C$ будет иметь координаты $(g'_x, g'_y)$. Условие параллельности этих векторов – это пропорциональность их координат:

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y}.$$

Точка $B$ называется точкой условного экстремума.

***Замечание***

Метод неопределенных множителей Лагранжа работает и при произвольном числе уравнений связи:

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(x_1,\ \ldots,\ x_n) = C_m. \end{cases} \tag{1.110}$$

В этом случае нужно искать экстремум функции $f - \lambda_1\Phi_1 - \lambda_2\Phi_2 - \ \ldots\ - \lambda_m\Phi_m$. Координаты стационарных точек будут зависеть от $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m$. Тогда коэффициенты $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m$ можно найти из условий связи (1.110).

**Вывод закона преломления света из принципа Ферма**

Принцип Ферма: свет распространяется по траектории, требующей наименьшего времени прохождения. Выведем закон преломления света при переходе из одной однородной среды в другую.

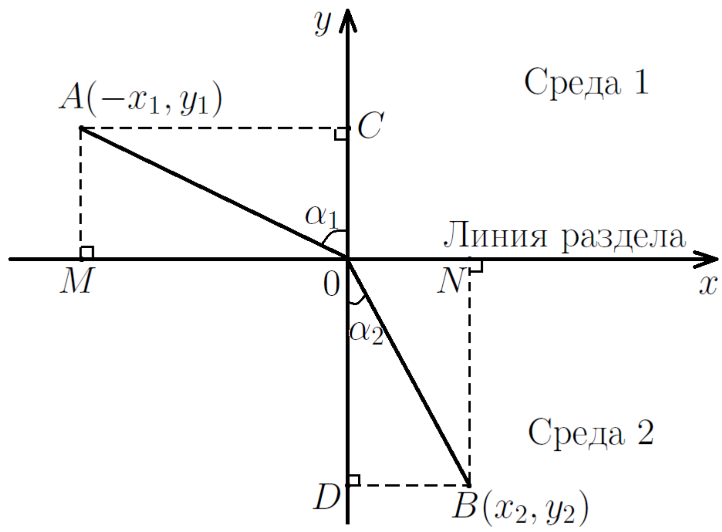


Рис. 7: Преломление света при переходе из среды 1 в среду 2

Пусть $v_1$ и $v_2$ – скорость света в среде 1 и 2 соответственно. Найдем связь между углом падения $\alpha_1$ и преломления $\alpha_2$. Луч света попадает из точки $A(-x_1, y_1)$ в точку $B(x_2, y_2)$. Запишем это в виде условия связи.

$$MN = MO + ON = AC + BD = x_2 - (-x_1) = x_2 + x_1. \tag{1.111}$$

С другой стороны:

$$AC = y_1 \operatorname{tg} \alpha_1, \quad BD = y_2 \operatorname{tg} \alpha_2.$$

$$\text{Тогда } AC + BD = y_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_2. \tag{1.112}$$

Сравнивая (1.111) и (1.112), получаем условие связи:

$$y_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = x_2 + x_1. \tag{1.113}$$

Согласно принципу Ферма, нам нужно минимизировать функцию времени прохождения света:

$$t_{\text{прохождения}} = \frac{AO}{v_1} + \frac{BO}{v_2} = \frac{y_1}{v_1 \cos \alpha_1} + \frac{y_2}{v_2 \cos \alpha_2}. \tag{1.114}$$

Найдем экстремум функции (1.114) при условии (1.113).

$$g(\alpha_1, \alpha_2) = y_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - x_2 - x_1 = 0. \tag{1.115}$$

Согласно методу Лагранжа, вместо поиска условного экстремума функции (1.114) мы будем искать безусловный экстремум для функции

$$t_{\text{прохождения}} - \lambda g = \frac{y_1}{v_1 \cos \alpha_1} + \frac{y_2}{v_2 \cos \alpha_2} - \lambda \left( y_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - x_2 - x_1 \right). \tag{1.116}$$

Напишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( t_{\text{прохождения}} - \lambda g \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( t_{\text{прохождения}} - \lambda g \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y_1 \sin \alpha_1}{v_1 \cos^2 \alpha_1} - \frac{\lambda y_1}{\cos^2 \alpha_1} = 0 \\ \frac{y_2 \sin \alpha_2}{v_2 \cos^2 \alpha_2} - \frac{\lambda y_2}{\cos^2 \alpha_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \\ \lambda = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{1.117}$$

Таким из необходимых условий экстремума для функции мы получили связь $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Это так называемый закон Снеллиуса (закон преломления света).

## 1.20 Векторная функция скалярного аргумента

Поставим в соответствие каждому значению аргумента $t$ некоторый вектор $\overrightarrow{a}(t)$ :

$$\overrightarrow{a}(t) = a_x(t)\overrightarrow{i} + a_y(t)\overrightarrow{j} + a_z(t)\overrightarrow{k}. \tag{1.118}$$

***Определение***

Годографом вектора $\overrightarrow{a}(t)$ называется кривая, которую вычерчивает конец вектора $\overrightarrow{a}(t)$ при изменении параметра $t$ при условии, что начало вектора $\overrightarrow{a}(t)$ находится в точке $(0, 0, 0)$.

**Пример**

Вектор $\overrightarrow{a}(t) = 4\cos t\,\overrightarrow{i} + 4\sin t\,\overrightarrow{j} + 2t\,\overrightarrow{k}$ задает винтовую линию. Запишем уравнение ее первого витка параметрически:

$$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 2t, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

***Определение***

Вектор $\overrightarrow{a}$ называется пределом вектор-функции $\overrightarrow{a}(t)$ при $t \to t_0$, если $|\overrightarrow{a}(t) - \overrightarrow{a}| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$.

***Определение***

Производной вектор-функции $\overrightarrow{a(t)}$ в данной точке $t$ называется

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\overrightarrow{a}(t + \triangle t) - \overrightarrow{a}(t)}{\triangle t} = \overrightarrow{a}'(t). \tag{1.119}$$

Пусть вектор задан в координатной форме: $\overrightarrow{a}(t) = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$. Тогда:

$$\overrightarrow{a}'(t) = a'_x \overrightarrow{i} + a'_y \overrightarrow{j} + a'_z \overrightarrow{k}.$$

Если мы зададим годограф параметрически:

$$\begin{cases} x = a_x(t), \\ y = a_y(t), \\ z = a_z(t), \end{cases}$$

то касательный вектор к годографу имеет координаты $(a'_x, a'_y, a'_z)$. Таким образом, $\overrightarrow{a}'(t)$ задает касательный вектор к годографу.

**Пример**

Пусть $\overrightarrow{r}(t)$ – это вектор перемещения точки. Тогда вектор $\overrightarrow{r}'(t)$ задает скорость движения точки.

## 1.21 Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой

Пусть прямая – это годограф вектора $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$. Тогда параметрическое задание кривой имеет вид:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Пусть $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0)$ – некоторая точка на этой кривой. Касательный вектор к кривой можно задать через производную от годографа $\overrightarrow{r}'(t)$. Это направляющий вектор касательной к кривой. Тогда уравнение касательной, проходящей через данную точку $(x_0, y_0, z_0)$, примет вид:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{1.120}$$

***Замечание***

Уравнение касательной к плоской кривой $y = f(x)$ является частным случаем уравнения касательной к пространственной кривой:

$$y - f(x_0) = y'(x_0)(x - x_0). \tag{1.121}$$

***Определение***

Плоскость, перпендикулярная к касательной прямой в точке $(x_0, y_0, z_0)$, называется нормальной плоскостью к кривой.

Вектор $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ перпендикулярен плоскости. Следовательно, уравнение нормальной плоскости, проходящей через точку $(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0. \tag{1.122}$$

**Пример**

Найдем касательную прямую и нормальную плоскость к винтовой линии:

$$\overrightarrow{r}(t) = 4\cos t \cdot \overrightarrow{i} + 4\sin t \cdot \overrightarrow{j} + 2t \cdot \overrightarrow{k} \quad \text{в точке } t_0 = \frac{3\pi}{4}.$$

Посчитаем производные:

$$x'(t_0) = -4\sin t_0, \quad y'(t_0) = 4\cos t_0, \quad z' = 2.$$

Тогда уравнение касательной прямой в точке $t_0 = \frac{3\pi}{4}$ будет иметь вид:

$$\frac{x + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - \frac{3\pi}{2}}{2}.$$

Уравнение нормальной плоскости в точке $t_0 = \frac{3\pi}{4}$ :

$$-2\sqrt{2}(x + 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}(y - 2\sqrt{2}) + 2\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

## 1.22 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$.

***Определение***

Прямая называется касательной к поверхности, если она касательная к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через данную точку.

**Теорема 19**

Если хотя бы одна из производных $F'_x,\ F'_y,\ F'_z$ в данной точке не равна нулю, то все касательные прямые к поверхности в данной точке лежат в одной плоскости. Эта плоскость называется касательной к поверхности.

***Следствие из теоремы 19***

Уравнение касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cdot(z-z_0)=0. \tag{1.123}$$

***Определение***

Прямая, проведенная через точку поверхности перпендикулярно касательной плоскости, называется нормалью к поверхности.

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}. \tag{1.124}$$

Вектор с координатами $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$ является направляющим вектором нормали.

**1)** В случае, если поверхность задается явным уравнением

$$z = z(x, y) \ \Leftrightarrow\ z - z(x, y) = 0, \tag{1.125}$$

координаты нормального вектора имеют вид:

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right).$$

Введем обозначения: $p = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ и нормируем вектор $(-p, -q, 1)$. Мы получим вектор единичной длины

$$\left(\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\right),$$

компоненты которого имеют смысл направляющих косинусов нормали с осями координат:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{1.126}$$

**2)** Общий случай.

Пусть поверхность задана параметрически:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{1.127}$$

Тогда направляющие косинусы нормали к поверхности будут даваться формулами:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{1.128}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \tag{1.129}$$

**Пример**

Найдем касательную плоскость и нормаль к поверхности $x^2+y^2+z^2 = 14$ в точке $P(1, 2, 3)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке $P(1, 2, 3)$ примет вид:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ в точке $P(1, 2, 3)$ :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$