Глава 1. Неопределённый интеграл

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, если для всех x из промежутка $[a,\, b]$ выполняется $F'(x) = f(x)$.

Пример

Если $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, то $F(x) = \operatorname{tg} x$ есть первообразная от функции $f(x)$.

Теорема 1

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ есть две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, то их разность $F_1(x) - F_2(x) = C$.

<u>Доказательство:</u>

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) = f(x) = F_2'(x) \\ \text{Пусть } F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,\, b] \Rightarrow \varphi(x) = C$$

$\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:
$\forall\ x \in [a, b]$ $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, x]$ и дифференцируема в интервале (a, x). Следовательно,
$\forall x : \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c)(x-a) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) = const.$

■

Если для $f(x)$ найдена какая-то первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная имеет вид $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Определение

Множество всех первообразных от функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \underbrace{F(x) + C.}_{\text{мн-во всех первообразных}} \tag{1.1}$$

Здесь $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Теорема 2

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,\, b]$, то она имеет первообразную.

Доказательство:

Доказывается через понятие определённого интеграла.

Пока оставим без доказательства.

Свойства:

1.а) $$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x). \tag{1.2}$$

1.б) $$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{1.3}$$

1.в) $$\int df(x) = f(x) + C. \tag{1.4}$$

$\Big/ \int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C \Big/$

2) $$\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Доказательство:

Докажем, что производные от левой и правой частей равенства (1.5) совпадают.

$$\left.\begin{aligned} \Big(\int (f_1(x) + f_2(x))dx\Big)' = f_1(x) + f_2(x) \\ \Big(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\Big)' = f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ левая и правая части равенства (1.5) являются первообразными одной и той же функции. По теореме 1 эти первообразные отличаются друг от друга на постоянную C. Следовательно, неопределённые интегралы равны.

■

3) $$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \qquad (1.6)$$

<u>Доказательство:</u>

$$\left.\begin{aligned}\Big(a\int f(x)dx\Big)' = af(x)\\ \Big(\int af(x)dx\Big)' = af(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Первообразные отличаются на постоянную C, то есть неопределенные интегралы равны.

■

4) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то выполнено:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C. \qquad (1.7)$$

<u>Доказательство:</u>

Докажем, что производные от левой и правой частей равенства (1.7) совпадают.

$$\Big(\int f(ax+b)dx\Big)' = f(ax+b),$$

$$\Big(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\Big)' = \frac{1}{a}(F(ax+b))'_x = \frac{1}{a}\left(F'(ax+b)\cdot(ax+b)'_x\right) = f(ax+b).$$

■

Таблица интегралов

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1),$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln\left|x\right| + C,$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|.$$

Примеры

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+3\right| + C,$$
$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

1.2 Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям

Теорема 3 (Замена переменной в неопределенном интеграле) Пусть переменные x и t связаны соотношением: $x = \varphi(t)$, где $\varphi \in C^1$. Пусть также выполнено:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.8}$$

Тогда равенство (1.8) эквивалентно следующему:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{1.9}$$

Доказательство:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$
$$\left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right)' = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Таким образом, производные от левой и правой частей равенства (1.9) равны, то есть неопределенные интегралы равны.

■

Замечание

Переход (1.8) $\Rightarrow$ (1.9) называется заменой переменной $x \to t$.

Переход (1.9) $\Rightarrow$ (1.8) называется внесением под знак дифференциала.

$$\varphi'(t)dt = d(\varphi(t)) = dx.$$

Пример 1

$$\int \ln x \frac{dx}{x} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$
$$\Big/ \; t = \ln x \quad dt = \frac{1}{x}dx \; \Big/$$

Пример 2

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$
$$\Big/ \; x = a\sin t, \; \Rightarrow \; dx = a\cos t\,dt, \; \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \; t = \arcsin\frac{x}{a} \; \Big/$$
$$= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}(\sin t \cos t) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Теорема 4 (Формула интегрирования по частям)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.10}$$

<u>Доказательство:</u>

$$d(uv) = udv + vdu \;\Rightarrow\; udv = d(uv) - vdu \;\Rightarrow\; \int u\,dv = \underbrace{\int d(uv)}_{=uv} - \int v\,du.$$

■

Пример 1

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$\Big/\ u = x; \qquad dv = \sin x\,dx; \qquad du = dx; \qquad v = -\cos x\ \Big/$

Пример 2

$$\int \ln x \frac{dx}{x} = \ln^2 x - \int \ln x \frac{dx}{x} \Rightarrow\ I = \ln^2 x - I + C \Rightarrow\ I = \frac{1}{2}\ln^2 x + \widetilde{C}.$$

$\Big/\ u = \ln x; \qquad dv = \frac{dx}{x}; \qquad du = \frac{dx}{x}; \qquad v = \ln x\ \Big/$

$\ln x$ определён только при $x > 0 \Rightarrow$ при взятии первообразной от $\frac{1}{x}$ нет необходимости писать $\ln|x|$.

1.3 Интегрирование рациональных дробей

Определение

Рациональная дробь есть отношение двух полиномов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ \ldots\ + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ \ldots\ + b_n}.$$

Дробь называется правильной, если $n > m$ и неправильной, если $n \leq m$. Интегрирование правильной рациональной дроби осуществляется с помощью ее разложения на простейшие. Простейшими дробями называются дроби вида:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где $D = p^2 - 4q < 0 \qquad A\,,\ B\,,\ a\,,\ p\,,\ q\ = const.$

$D < 0 \Rightarrow$ знаменатель $x^2 + px + q$ нельзя разложить на вещественные множители.

Интегралы от простейших дробей

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A(x+\frac{p}{2}) + B - \frac{Ap}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{A(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$\Big/ \ \Big(x+\frac{p}{2}\Big)\,d\Big(x+\frac{p}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,d\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 \ \Big/$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d\Big(\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big)}{\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4}} + \Big(B - \frac{Ap}{2}\Big)\int \frac{d\Big(x+\frac{p}{2}\Big)}{\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{A\Big(x+\frac{p}{2}\Big) + B - \frac{Ap}{2}}{\Big(\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big)^k}\,dx =$$

$$\Big/\text{Замена:} \qquad x + \frac{p}{2} = t; \qquad dx = dt\Big/$$

$$= \int \frac{At + B - \frac{Ap}{2}}{\Big(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big)^k}\,dt = \int \frac{Atdt}{\Big(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big)^k} + \Big(B - \frac{Ap}{2}\Big)\int \frac{dt}{\Big(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big)^k}$$

$$\int \frac{Atdt}{(t^2+q-\frac{p^2}{4})^k} = \frac{A}{2}\int \frac{dz}{z^k} = \frac{A}{2(-k+1)}z^{-k+1} + C$$

$$\Big/\text{Замена:} \qquad t^2 + q - \frac{p^2}{4} = z; \qquad dz = 2tdt; \qquad tdt = \frac{dz}{2}\ \Big/$$

Введём обозначение:

$$I_k = \int \frac{dt}{\Big(t^2+a^2\Big)^k}, \qquad \text{где} \ \ a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C.$$

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+t^2-t^2)dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}}_{I_{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$\Big/\ u = t; \quad du = dt; \quad dv = \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}; \quad v = \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\ \Big/$$

$$= \frac{1}{a^2}\, I_{k-1} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\, I_{k-1} - \frac{t}{2a^2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2a^2(1-k)}\, I_{k-1}.$$

Получили рекуррентное соотношение.

Применяя это соотношение несколько раз, приходим к табличному интегралу I_1.

1.4 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Теорема 5

Пусть $x = a$ – корень полинома $Q(x)$ кратности k, то есть
$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(a) \neq 0$.
Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}, \tag{1.11}$$

где $A = const \neq 0$, степень полинома $P_1(x)$ меньше степени полинома $(x-a)^{k-1}Q_1(x)$.

Доказательство:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}. \tag{1.12}$$

Выберем $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Тогда a будет корнем числителя, то есть числитель можно представить в виде: $P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x)$, где степень полинома $P_1(x)$ меньше степени полинома $(x-a)^{k-1}Q_1(x)$. Подставляя $(x-a)P_1(x)$ вместо $P(x)-AQ_1(x)$ в формулу (1.12) и сокращая числитель и знаменатель на $(x-a)$, получаем искомое утверждение (1.11).

■

Применяя теорему 5 несколько раз, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ \ldots \ + \frac{A_{k-1}}{(x-a)} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}.$$

Теорема 6

Если $Q(x) = (x^2+px+q)^k\, Q_1(x)$, где многочлен $Q_1(x)$ не делится на x^2+px+q и $\frac{p^2}{4}-q<0$, то правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}, \tag{1.13}$$

где $P_1(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2+px+q)^{k-1}\,Q_1(x)$.

Доказательство:

Напишем тождество:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\,Q_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)}{(x^2+px+q)^k\,Q_1(x)}, \tag{1.14}$$

справедливое при любых M и N.

Определим M и N так, чтобы многочлен $P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)$ делился на x^2+px+q.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение $P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)=0$ имело те же корни $\alpha \pm i\beta$, что и многочлен x^2+px+q.

Следовательно, $P(\alpha+i\beta) - (M(\alpha+i\beta)+N)\,Q_1(\alpha+i\beta) = 0$ или $M(\alpha+i\beta)+N = \frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)}$.

Но $\frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)}$ есть определённое комплексное число, которое можно записать в виде $K+iL$, где $K, L \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $M(\alpha+i\beta)+N = K+iL$

Отсюда

$$\begin{cases} M\alpha + N = K \\ M\beta = L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \dfrac{L}{\beta} \\ N = \dfrac{K\beta - L\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

При этих значениях коэффициентов M и N многочлен $P(x) - (Mx+N)\,Q_1(x)$ имеет корнем число $\alpha+i\beta$, следовательно, и сопряжённое число $\alpha - i\beta$ (см. соответствующую теорему из теории полиномов).

Значит многочлен без остатка разделится на разности $x-(\alpha+i\beta)$ и $x-(\alpha-i\beta)$, а следовательно, на их произведение x^2+px+q.

Обозначая частное от этого деления через $P_1(x)$ получим:

$$P(x) - (Mx+N)\,Q_1(x) = (x^2+px+q)\,P_1(x).$$

Сокращая последнюю дробь в равенстве (1.14) на x^2+px+q, получим равенство (1.13), причём ясно, что степень $P_1(x)$ меньше степени знаменателя.

■

Применяя теперь к правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ результаты теорем 5 и 6, мы можем выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $Q(x)$. Получаем следующий результат. Если $Q(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x-b)^l \cdot (x^2+px+q)^m \cdot \ldots \cdot (x^2+cx+d)^n$, то дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \ldots + \frac{B}{(x-b)^l} + \frac{B_1}{(x-b)^{l-1}} +$$

$$\ldots + \frac{B_{x-1}}{x-b} + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \ldots + \frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{x^2+px+q} +$$

$$\ldots + \frac{Gx+F}{(x^2+cx+d)^n} + \frac{G_1x+F_1}{(x^2+cx+d)^{n-1}} + \ldots + \frac{G_{m-1}x+F_{m-1}}{(x^2+cx+d)^{m-1}}. \qquad (1.15)$$

Написанное равенство есть тождество.

Поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A , A_1 , . . . , B , B_1 , ...

Этот метод нахождения коэффициентов называется методом неопределённых коэффициентов.

1.5 Процедура интегрирования рациональной дроби

Опишем процедуру интегрирования рациональной дроби общего вида: $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx$

1) Пусть $m \geq n$ (то есть дробь неправильная: степень числителя $\geq$ степени знаменателя). Тогда в дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ нужно выделить целую часть. Это можно сделать с помощью деления многочленов в столбик. Например:

$$\frac{x^4+3x^2+x+2}{x^2+1} = x^2+2+\frac{x}{x^2+1}.$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +3x^2 & +x & +2 & x^2-1 \\ \cline{5-5}
x^4 & +x^2 & & & x^2+2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^2 & +x & +2 & \\
 & 2x^2 & & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & & x &
\end{array}$$

2) Мы получим правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ (степень числителя меньше степени знаменателя). Разложим правильную дробь на простейшие. Для этого нужно разложить знаменатель на множители:

$$Q_n(x) = a_0(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot \ \ldots\ldots \ \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot \ \ldots$$

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ представляется в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами. При этом каждому множителю в знаменателе отвечают следующие слагаемые:

$$\frac{1}{(x-a_1)^{k_1}} \longmapsto \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ \ldots\ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}},$$

$$\frac{1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} \longmapsto \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots\ldots + \frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}.$$

Пример

$$\frac{x+3}{(x-1)^2\,(x+1)^3\,(x^2+x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} +$$

$$+\frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

3) Найдём коэффициенты в простейших дробях. Продемонстрируем это на примере.

$$\frac{x+3}{(x-1)\,(x+2)\,x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)\,(x+2)\,x} = \frac{Ax\,(x+2) + Bx\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x+2)}{(x-1)\,(x+2)\,x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = Ax\,(x+2) + Bx\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x+2).$$

Приведем два способа нахождения коэффициентов A, B, C :

a) Можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x и получить систему уравнений.

b) Метод подстановки. Подставим в уравнение различные значения x и получим систему уравнений.

$$\left.\begin{array}{l|l} x=0 & 3 = C\cdot(-1)\cdot 2 \\ x=1 & 4 = A\cdot 3 \\ x=-2 & 1 = B\cdot(-2)\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = -\frac{3}{2}, \\ A = \frac{4}{3}, \\ B = \frac{1}{6}. \end{array}\right.$$

4) Последнее действие – интегрирование простейших дробей. Получаются стандартные интегралы, которые были найдены ранее в общем виде.