1.3 Матрицы

Определение

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел (вещественных или комплексных):

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} m \text{ строк}. \tag{38}$$

Также матрицу можно задать как множество ее элементов:

$$A = \{a_{ik}\}_{i=1,\ k=1}^{i=m, k=n}. \tag{39}$$

Определение

Суммой матриц A и B размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ того же порядка $(m \times n)$, для каждого элемента которой выполнено:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \big/ A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\} \big/. \tag{40}$$

Определение

Для того чтобы умножить матрицу A на число α, каждый ее элемент a_{ij} нужно умножить на число α.

$$\alpha A = \{\alpha a_{ij}\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}). \tag{41}$$

Определение

Произведение матриц можно определить если размеры перемножаемых матриц связаны между собой следующим образом: число столбцов в первой матрице должно совпадать с числом строк во второй матрице. Тогда можно определить произведение по следующему правилу:

$$\underset{m \times p}{C} = \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B}, \tag{42}$$

где для каждого элемента матрицы C выполнено:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{43}$$

Матрицы умножаются по правилу: строка на столбец. Элемент c_{ij} мы получим, если умножим i-ую строку матрицы А на j-ый столбец матрицы B.

Замечания

1) Матрицу A можно умножать на матрицу B, только если число строк матрицы B равно числу столбцов матрицы A.

2) Квадратные матрицы можно умножить только если они имеют одинаковый порядок.

3) В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если выполняется равенство $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются коммутативными.

Определение

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \;\; \text{называется коммутатором матриц } A \text{ и } B. \tag{44}$$

Определение

$A^T = \{a_{ji}\}$ – транспонированная матрица. У неё строки и столбцы переставлены местами.

Определение

$\mathbb{O}$ – нулевая матрица. Все её элементы равны 0.

Определение

I – единичная матрица. Определяется только для квадратных матриц.

$$I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ строк}.$$

Если матрицу домножить на единичную, то она не изменится.

Альтернативные обозначения для единичной матрицы: E, $\mathbb{1}$.

Определение

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные не на главной диагонали, равны 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{11}, a_{22}, \ \ldots\ldots, a_{nn}] \,. \tag{45}$$

Свойства действий с матрицами

Сложение матриц:

1) $A + B = B + A$ – коммутативность (перестановочность);

2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ – ассоциативность (сочетательный закон);

3) $A + \mathbb{O} = A$;

Умножение матрицы на число:

4) $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$ – коммутативность относительно умножения на число;

5) $\lambda(\mu \cdot A) = (\lambda\mu)A$ – ассоциативность относительно умножения на число;

6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$ – дистрибутивность (распределительный закон) умножения матрицы на число относительно сложения чисел;

7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ – дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц;

Умножение матриц:

8) $\mathbb{O} \cdot A = A \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$;

9) $I_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n} \cdot I_{n\times n} = A_{m\times n}$;

10) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ – ассоциативность;

11) $(A+B)C = AC + BC$ – дистрибутивность умножения на матрицу справа относительно сложения матриц;

12) $A(B+C) = AB + AC$ – дистрибутивность умножения на матрицу слева относительно сложения матриц;

Транспонирование матриц:

13) $(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)^T = \alpha \cdot A^T + \beta \cdot B^T$;

14) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ – определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей. Данное свойство мы уже доказывали в теореме об умножении определителей (формула (25)).

15) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Доказательство:

Опишем последовательность действий при операции $(A \cdot B)^T$. Элемент c_{ij} матрицы $A \cdot B$ мы получим, если умножим i-ую строку матрицы A на j-ый столбец матрицы B. После операции $(A \cdot B)^T$ мы получим элемент c_{ji}.

Теперь рассмотрим операцию $B^T A^T$. После транспонирования матрицы B её j-ый столбец станет j-ой строкой. После транспонирования матрицы A её i-ая строка станет i-ым столбцом. После операции $B^T \cdot A^T$ j-ая строка матрицы B^T умножится на i-ый столбец матрицы A^T и мы получим тот же элемент c_{ji}.

■

Определение

Если $A^T = A$, то матрица называется симметрической.

Степени матриц, многочлены от матриц

Определение

Целой положительной степенью A^m $(m > 0)$ квадратной матрицы называется произведение m матриц, каждая из которых равна A.

Определение

Нулевой степенью квадратной матрицы A называется единичная матрица I того же порядка, что и A.

Таким образом, по определению:

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad A^m = A^{m-1} \cdot A. \quad (46)$$

Для любой квадратной матрицы и любых положительных целых чисел m и n справедливы равенства:

$$A^{m+n} = A^m \cdot A^n. \tag{47}$$

$$(A^m)^n = A^{m \cdot n}. \tag{48}$$

Определение

Пусть задан многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ \ldots\ldots \ + a_{n-1} x + a_n. \tag{49}$$

и квадратная матрица A. Выражение

$$P(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ \ldots\ldots \ + a_{n-1} A + a_n \cdot I. \tag{50}$$

называется многочленом от матрицы A. Если $P(A)$ нулевая матрица, то A называется корнем многочлена.

Пример

Найти значение многочлена $P(x) = 3x^2 - 2x + 3$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Так как $3 = 3x^0$, то:

$$P(A) = 3A^2 - 2A + 3I = 3\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}.$$

1.4 Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A называется вырожденной (особенной), если $\det A = 0$ и невырожденной (неособенной) в противном случае.

Определение

Матрица A^{-1} называется обратной матрицей по отношению к матрице A, если:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I. \tag{51}$$

Обратная матрица определяется только для невырожденной матрицы (то есть для квадратной с $\det A \neq 0$).

Теорема 1

Если обратная матрица существует, то она единственная.

Доказательство:

Пусть существуют 2 различные матрицы B_1, B_2, обратные к матрице A. Тогда выполнено:

$$B_1 \cdot A = A \cdot B_1 = I. \tag{52}$$

$$B_2 \cdot A = A \cdot B_2 = I. \tag{53}$$

$$B_1 = B_1 \cdot I \underset{\substack{\uparrow \\ (53)}}{=} B_1 \cdot A \cdot B_2 \underset{\substack{\uparrow \\ (52)}}{=} I \cdot B_2 = B_2, \tag{54}$$

то есть матрицы совпали.

■

Теорема 2

Для того, чтобы у матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы матрица была невырожденная (то есть $\det A \neq 0$)

Доказательство:

Необходимость

Пусть $\exists A^{-1} \;\Rightarrow\; A \cdot A^{-1} = I \;\Rightarrow\; \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$.

С другой стороны, по теореме об умножении определителей (формула (25)): $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$. Следовательно,

$$\det A \cdot \det A^{-1} = I \;\Rightarrow\; \det A \neq 0.$$

Достаточность

Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{i,j=n}$. Предъявим матрицу, которая будет являться обратной к A.

Рассмотрим матрицу $B = \{b_{ij}\}_{i,j=n}^{i,j=n}$. Здесь $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$, где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji}. Найдем $C = A \cdot B$.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} =$$

$$= \Big/ \begin{array}{c} \text{свойства определителя 8 и 9} \\ \text{(формулы (17) и (18))} \end{array} \Big/ =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\det A} \cdot \det A, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} = \delta_{ik}. \tag{55}$$

Таким образом, $A \cdot B = I$. Аналогично, $B \cdot A = I$. Следовательно, B есть обратная матрица к A : $\quad B = A^{-1}$

■

Замечание

При доказательстве теоремы был предложен способ вычисления обратной матрицы.

Метод присоединенной матрицы

Определение

Присоединенная матрица – это матрица, составленная из алгебраических дополнений исходной матрицы.

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ – исходная матрица.

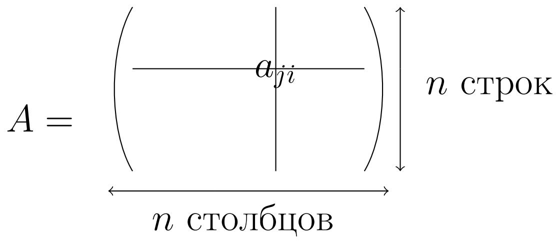
$A^{-1} = \{b_{ij}\}$ – искомая обратная матрица.

Элементы обратной матрицы находится по формуле:

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{detA}, \tag{56}$$

где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A. A_{ji} находится по правилу:

1) Вычеркнуть j-ую строку и i-ый столбец матрицы



2) Сосчитать определитель оставшийся матрицы (размером $(n-1)\times(n-1)$).

3) Домножить результат на $(-1)^{j+i}$.

Пример

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2\cdot(-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1)\cdot(3) - (-3)\cdot(-2)\cdot(-1) -$$
$$-3\cdot 3\cdot 2 = 8 + 3 + 6 - 18 = -1 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная и для нее существует обратная. Вычислим её по формуле (56).

$$b_{11} = -A_{11} = -(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$b_{12} = -A_{21} = -(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$b_{13} = -A_{31} = -(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 9,$$

$$b_{21} = -A_{12} = -(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$b_{22} = -A_{22} = -(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$b_{23} = -A_{32} = -(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$b_{31} = -A_{13} = -(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$b_{32} = -A_{23} = -(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$b_{33} = -A_{33} = -(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Тогда:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 9 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная матрица.

Определение

Квадратная матрица A называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$.

Свойства ортогональных матриц:

1)

$$|\det A| = 1. \tag{57}$$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} A^T = A^{-1} \Rightarrow A^T A = I \Rightarrow \det(A^T A) = 1 \\ \text{С другой стороны: } \det(A^T A) = \det(A^T)\det A = (\det A)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |\det A| = 1.$$

■

2) Ортонормированность строк (столбцов):

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ \ldots\ldots \ + a_{in}^2 = 1. \tag{58}$$

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ \ldots\ldots \ + a_{in}a_{jn} = 0. \tag{59}$$

Аналогично для столбцов.

Доказательство:

$$I = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}a_{ni} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}a_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}a_{2i} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравниванием элементы матриц в левой и правой частях уравнения и получаем требуемые равенства (58), (59).

Аналогичное рассмотрение $I = A^T A$ даёт свойство для столбцов.

■

Замечание

Из доказательства видно, что выполнение формул (58), (59) достаточно для того, чтобы матрица была ортогональной.

1.5 Ранг матрицы

Определение

Минором k-го порядка матрицы A называется определитель, элементы которого расположены на пересечениях любых k строк и любых k столбцов матрицы A.

Определение

Рангом матрицы A называется число r, если у неё имеется минор порядка r, не равный нулю, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю. Этот ненулевой минор порядка r называется базисным минором.

Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Обозначение: $rank\ A$.

Определение

Строки и столбцы, на которых построен базисный минор, называются базисными.

Замечание

Матрица может иметь несколько базисных миноров.

Пример:

Возьмем матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и будем рассматривать различные ее миноры. Ясно, что ненулевые миноры 1-го порядка есть – это элементы матрицы. Попробуем найти ненулевые миноры 2-го порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Итак, мы нашли ненулевой минор 2-го порядка. Большего порядка быть не может, так как минимальный из размеров матрицы A равен двум. Следовательно, $rank\ A = 2$.

Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Перечислим элементарные преобразования матрицы:

1) Умножение всех элементов какой-либо строки на число, не равное 0.

2) Добавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число.

3) Перестановка строк.

4) Те же преобразования столбцов.

Теорема 3

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Доказательство:

Так как ранг матрицы – это максимальный размер ненулевого минора, то нам нужно проверить сохраняется ли свойство определителя быть равным нулю (или не равным нулю) при элементарных преобразованиях.

При умножении строки на число определитель умножается на это число. При добавлении к одной строке другой строки, умноженной на любое число, определитель не меняется. При перестановке строк определитель меняет знак.

Ни одно из вышеперечисленных преобразований не приводит к нарушению свойства определителя быть равным нулю (или не равным нулю), то есть ранг матрицы сохраняется.

■

Метод вычисления ранга – приведение матрицы к трапециевидной форме с помощью элементарных преобразований. Ранг трапециевидной матрицы равен числу ненулевых элементов на диагонали:

$$rank \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = r. \tag{60}$$

■

Пример

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$rank A = rank \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= rank \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Линейная независимость строк (столбцов).

Выясним, как ранг матрицы связан с линейной зависимостью или независимостью её строк (столбцов). Строки (столбцы) можно складывать и умножать на число как матрицы размера $1 \times n$ или $(n \times 1)$.

Определение

Строки $A_1,\ A_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , A_n$ называются линейно независимыми, если $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 +\ .\ .\ .\ .\ .\ + \alpha_n A_n = (0,\ 0,\ .\ .\ .\ .\ .\ , 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 =\ .\ .\ .\ .\ .\ = \alpha_n = 0$.

В противном случае строки линейно зависимы.

Пример

Строки $(1, 2, 3)$ и $(2, 4, 6)$ линейно зависимы:

$2(1, 2, 3) + (-1)(2, 4, 6) = (0, 0, 0)$

Строки $(1, 2)$ и $(1, -1)$ линейно независимы:

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(1, -1) = (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) = (0, 0) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_1 \\ 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Теорема о базисном миноре

1) Базисные строки (столбцы) являются линейно независимыми.

2) Любую строку (столбец) матрицы можно представить в виде линейной комбинации её базисных строк (столбцов).

Доказательство:

1) От противного.

Пусть базисные строки линейно зависимы. Тогда с помощью элементарных преобразований со строками определителя мы можем получить строку из нулей и определитель (базисный минор) будет равен нулю.

Противоречие, так как базисный минор – это ненулевой минор.

2) Предположим для определённости, что базисный минор матрицы A расположен в первых r строках и первых r столбцах матрицы A. Пусть s – целое число от 1 до m, $\quad k$ – целое число от 1 до n.

Рассмотрим определитель $(r+1)$-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{2r} & a_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots\ldots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots\ldots & a_{kr} & a_{ks} \end{vmatrix}. \tag{61}$$

Если $k \leq r$, то $\Delta = 0$, так как в нём имеются две одинаковые строки.

Если $s \leq r$, то $\Delta = 0$, так как в нем имеются два одинаковых столбца.

Если $k > r$ и $s > r$, то определитель Δ также равен нулю как минор $(r+1)$-го порядка матрицы ранга r.

Следовательно, $\Delta = 0$ при любых k и s.

Разложим определитель Δ по последней строке:

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ \ldots\ldots \ + a_{kr}A_{kr} + a_{ks}A_{ks} = 0, \tag{62}$$

где числа $A_{k1},\ A_{k2},\ \ldots\ldots, A_{ks}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{k1},\ a_{k2},\ \ldots\ldots, a_{ks}$, находящихся в нижней строке определителя Δ.

Эти алгебраические дополнения не зависят от числа k, так как при их вычислении k-ая строка вычеркивается. Следовательно, мы можем ввести обозначения:

$A_{k1} = c_1, \quad A_{k2} = c_2, \quad \ldots\ldots, \quad A_{kr} = c_r, \quad A_{ks} = c_s.$

Подставляя в равенство (62) последовательно значения $k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots, n$, получим систему равенств:

$$\begin{cases} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \ \ldots\ldots \ + c_r a_{1r} + c_s a_{1s} = 0 \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \ \ldots\ldots \ + c_r a_{2r} + c_s a_{2s} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \ \ldots\ldots \ + c_r a_{nr} + c_s a_{ns} = 0 \end{cases} . \tag{63}$$

Число $c_s = A_{ks}$ отлично от нуля, так как A_{ks} есть базисный минор матрицы A. Разделим каждое из равенств (63) на c_s и выразим оттуда $a_{1s},\ a_{2s},\ \ldots\ldots, a_{ns}$.

Введём обозначения: $\lambda_j = -\frac{c_j}{c_s}$, где $j = 1, 2,\ \ldots\ldots, r$. Тогда получим :

$$\begin{cases} a_{1s} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ \ldots\ldots \ + \lambda_r a_{1r} \\ a_{2s} = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ \ldots\ldots \ + \lambda_r a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ns} = \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \ \ldots\ldots \ + \lambda_r a_{nr} \end{cases} . \tag{64}$$

Эти равенства показывают,что s-ый столбец матрицы A является линейной комбинацией первых r столбцов этой матрицы (с коэффициентами $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots, \lambda_r$). Поскольку s может быть любым числом от 1 до m, наша теорема доказана. Утверждение для строк доказывается аналогично.

■

Следствие 1

Всякие $(r+1)$ столбцов (строк) матрицы ранга r являются линейно зависимыми (по теореме о базисном миноре).

Следствие 2

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы совпадает с максимальным числом ее линейно независимых строк и равно рангу матрицы (так как базисных строк и базисных столбцов одинаковое количество, а все остальные строки (столбцы) выражаются через них (теорема о базисном миноре)).

Следствие 3 (Критерий равенства нулю определителя)

Для того, чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его столбцы (строки) были линейно зависимыми.

Доказательство:

Если строки линейно зависимы, то с помощью элементарных преобразований можно получить нулевую строку и определитель будет равен нулю. Если определитель равен нулю, то ранг его матрицы r меньше, чем размер определителя, поэтому по следствию 1 $(r+1)$-ый столбец может быть выражен через базисные столбцы.

■

1.6 Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \; \ldots\ldots, x_n$ имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \; \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \; \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{65}$$

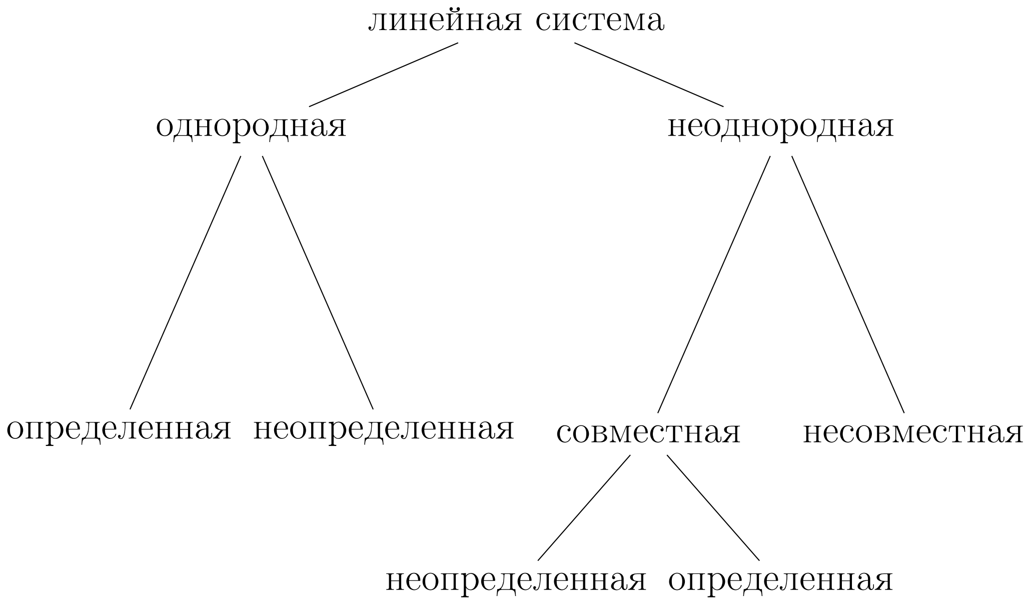
Определение

Если $b_1 = b_2 = \; \ldots\ldots = b_m = 0$, то система называется однородной. В противном случае – неоднородной.

Решением системы уравнений (65) называется упорядоченная совокупность n чисел $c_1, c_2, \; \ldots\ldots, c_n$, подстановка которых во все уравнения превращает их в тождества.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной.

Система называется определенной, если она имеет единственное решение и неопределённой, если у нее имеется более одного решения.



Систему линейных уравнений (65) можно записывать в виде матричного уравнения:

$$AX = B. \tag{66}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей системы.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ –матрица неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ –матрица свободных членов.

Решением матричного уравнения (66) является матрица $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Эту матрицу называют матрицей-решением системы (65).

Определение

Расширенной матрицей называется матрица:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{67}$$

Она получается дополнением матрицы системы A столбцом свободных членов.

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных уравнений (65) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы.

Доказательство:

Необходимость.

Пусть система совместна и $c_1, c_2, \ .\ .\ .\ .\ .\ , c_n$ – некоторые её решения:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ .\ .\ .\ .\ .\ + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ .\ .\ .\ .\ .\ + a_{2n}c_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ .\ .\ .\ .\ .\ + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases} \tag{68}$$

Но эти равенства означают, что последний столбец расширенной матрицы $\tilde{A}$ есть линейная комбинация остальных столбцов с коэффициентами $c_1,\ c_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ , c_n$. Следовательно, этот столбец можно вычеркнуть из матрицы, не меняя её ранга.

Достаточность.

Пусть $\tilde{A}$ и A имеют один и тот же ранг r. Рассмотрим r базисных столбцов. Они будут базисными и для $\tilde{A}$. Следовательно последний столбец матрицы $\tilde{A}$ есть линейная комбинация базисных столбцов, а значит и линейная комбинация всех столбцов матрицы A (коэффициенты перед не базисными столбцами мы можем взять равными нулю).

Обозначим за $c_1, c_2, \;.\;.\;.\;.\;.\;, c_n$ коэффициенты в этой линейной комбинации столбцов матрицы A. Тогда получим:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \;.\;.\;.\;.\;. + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \;.\;.\;.\;.\;. + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \;.\;.\;.\;.\;. + a_{mn}c_n = b_m \end{array}\right. . \tag{69}$$

Но это означает что $x_1 = c_1, \; x_2 = c_2, \;.\;.\;.\;.\;.\;, x_n = c_n$ – решение, то есть система совместна.

■

Однородная система

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \;.\;.\;.\;.\;. + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \;.\;.\;.\;.\;. + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \;.\;.\;.\;.\;. + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right. . \tag{70}$$

Однородная система всегда совместна, так как существует нулевое тривиальное решение $x_1 = x_2 = \;.\;.\;.\;.\;. = x_n = 0$.

Выясним, когда система (70) имеет нетривиальное решение. Существование ненулевого решения эквивалентно линейной зависимости столбцов матрицы A, а это имеет место тогда и только тогда, когда:

$rank\ A$ меньше числа столбцов матрицы A.

Итак, имеет место следующая теорема :

Теорема 4

$rank\ A = n \ \Rightarrow$ система (70) не имеет нетривиальных решений.

$rank\ A < n \ \Rightarrow$ система (70) имеет нетривиальные решения.

Следствие

Если число уравнений в системе (70) меньше числа неизвестных ($m < n$), то $rank\ A < n$ и ненулевые решения всегда существуют. Если $m = n$, то при $\det A \neq 0$ ненулевых решений нет (так как $rank\ A = n$ и нет линейной зависимости столбцов матрицы системы).

Если $m = n$ и $\det A = 0$, то ненулевое решение существует ($rank\ A < n$, так как минор порядка n равен нулю ($\det A = 0$), а ранг – это максимальный размер ненулевого минора).

Теорема (Альтернатива Фредгольма)

Для квадратных систем линейных уравнений (65) и (70) ($m = n$) выполнено:

Либо однородная система уравнений (70) имеет нетривиальное решение ($\Leftrightarrow$ определитель системы $= 0$), либо соответствующая неоднородная система (65) разрешима единственным образом при любой правой части ($\Leftrightarrow$ определитель системы $\neq 0$).

Доказательство:

Если $\det A \neq 0$, то системы (65) и (70) можно решать по формулам Крамера, которые дают единственное решение при любой правой части.

Для однородной системы (70) формулы Крамера дают нулевое решение, так как определители Δ_k в формулах Крамера будут содержать столбцы из нулей, то есть в этом случае у однородной системы только тривиальное решение.

Если $\det A = 0$, то столбцы матрицы A линейно зависимы, значит существует их линейная комбинация с нетривиальными коэффициентами, которая дает нулевой столбец. Но это и означает, что однородная система (70) имеет нетривиальное решение, которое дается коэффициентами данной линейной комбинации.

Докажем теперь, что при $\det A = 0$ неоднородная система (65) будет разрешима не при любой правой части. Так как строки матрицы A линейно зависимы, то можно составить их линейную комбинацию, которая обращается в нуль. Составив такую же линейную комбинацию уравнений системы (65), мы получим слева нуль, справа – линейную комбинацию правых частей b_i. Поскольку линейная комбинация b_i не обязательно обращается в нуль, то и система (65) будет разрешима не при любой правой части.

■

1.7 Метод Гаусса

Решение систем линейных уравнений

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных в системе линейных уравнений. Он позволяет привести матрицу системы к трапециевидной форме :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Решим систему линейных уравнений.

Запишем ее в матричном виде:

$$A \cdot X = B. \tag{71}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.