# Глава 4. Несобственные интегралы

При введении определенного интеграла предполагалось, что промежуток интегрирования – это конечный отрезок и всюду на нем подынтегральная функция определена и ограничена. Однако определение может быть расширено на случай бесконечного промежутка и неограниченной функции. Данная глава посвящена этому вопросу.

## 4.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами

***Определение***

Пусть функция $f(x)$ определена в полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема в любой конечной его части, то есть интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ имеет смысл для любого $A > a$. Предел этого интеграла при $A \to \infty$ (конечный или бесконечный) называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от $a$ до $+\infty$ и пишут:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} f(x)\,dx. \tag{4.1}$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, если не существует или бесконечен – расходится.

**Пример**

Пусть $a > 0$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ при различных $\lambda$.

$$\lambda \neq 1: \quad \int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda}\Big|_a^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\lambda}(A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) = \begin{cases} \infty, & \lambda < 1, \\ \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, & \lambda > 1. \end{cases}$$

$$\lambda = 1: \quad \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \ln x\Big|_a^A = \infty.$$

Итак, интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ ведет себя следующим образом:

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}: \qquad \begin{cases} \lambda \leqslant 1 & \text{– расходится,} \\ \lambda > 1 & \text{– сходится.} \end{cases} \tag{4.2}$$

***Определение***

Аналогично можно определить

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^a f(x)\,dx. \tag{4.3}$$

***Определение***

Интеграл по всей числовой оси можно ввести по аналогии с предыдущими двумя определениями:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty, A\to+\infty} \int\limits_B^A f(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Связь с определениями интегралов по полуосям устанавливается следующим образом. Пусть $a$ – произвольное вещественное число. Тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty, A\to+\infty} \Big( \int\limits_B^a f(x)\,dx + \int\limits_a^A f(x)\,dx \Big) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

**Пример**

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to-\infty, A\to+\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} B) = \pi.$$

**Утверждение**

Если на промежутке интегрирования функция $f(x)$ всюду имеет первообразную $F(x)$, то

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} (F(A) - F(a)). \tag{4.5}$$

### Следствие

Таким образом, условие сходимости данного интеграла – это условие существования конечного предела у первообразной:

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = F(\infty) < \infty. \tag{4.6}$$

### Пример

Найдем работу по перемещению материальной точки единичной массы под действием силы гравитации $F = -G \cdot \frac{m}{x^2}$ из точки $x = r$ на бесконечность:

$$A = -\int\limits_r^{+\infty} G\frac{m}{x^2}dx = G\frac{m}{x}\Big|_r^{\infty} = -\frac{m}{r} \cdot G.$$

Работа по удалению материальной точки единичной массы на бесконечность называется потенциалом силы (силового поля).

## 4.2 Теоремы о сходимости несобственных интегралов

### Теорема 1 (Аддитивность интеграла)

Если сходится интеграл по большему промежутку $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, то сходится также и интеграл по меньшему промежутку $\int\limits_b^{\infty} f(x)\,dx$, где $b > a$. При этом выполнено:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{\infty} f(x)\,dx. \tag{4.7}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\Big(\int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{A} f(x)\,dx\Big) =$$

$$= \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{\infty} f(x)\,dx.$$

■

**Теорема 2 (Теорема об остатке интеграла)**

Если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, то:

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_b^\infty f(x)\,dx = 0. \tag{4.8}$$

Доказательство:

Согласно, формуле (4.7) из теоремы 1,

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^b f(x)\,dx}_{\to\int\limits_a^\infty f(x)dx \text{ при } b\to\infty} + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_b^\infty f(x)\,dx \to 0 \text{ при } b\to\infty.$$

■

**Теорема 3 (Вынесение множителя за знак интеграла)**

Из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty Cf(x)\,dx$ (где $C = const$), причём:

$$\int\limits_a^\infty Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^\infty f(x)\,dx. \tag{4.9}$$

Доказательство:

$$\int\limits_a^\infty Cf(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A Cf(x)\,dx = C\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx = C\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

■

**Теорема 4 (Интеграл от суммы функций)**

Если интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходятся, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx$ и выполнено:

$$\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx. \tag{4.10}$$

Доказательство:

$$\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A (f(x) \pm g(x))dx =$$

$$\Big/ \text{Предел суммы равен сумме пределов} \Big/$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx \pm \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A g(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

■

**Несобственный интеграл от положительной функции**

Для положительной подынтегральной функции удается сформулировать более детальные теоремы о сходимости.

**Теорема 5 (Монотонность первообразной от положительной функции)**

Если подынтегральная функция положительна (точнее, неотрицательна: $f(x) \geqslant 0$), то функция $F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$ монотонно возрастает при $A \to \infty$.

Доказательство:

Действительно, пусть $A_2 > A_1$. Тогда:

$$F(A_2) = \int\limits_a^{A_2} f(x)\,dx = \int\limits_a^{A_1} f(x)\,dx + \underbrace{\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx}_{\geq 0} \geq \int\limits_a^{A_1} f(x)\,dx = F(A_1).$$

■

**Теорема 6 (Критерий сходимости интеграла от положительной функции)**

Если функция $f(x) \geqslant 0$, то для сходимости $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено:

$$\int\limits_a^A f(x)\,dx \leqslant L \quad (\text{где } L = const), \tag{4.11}$$

причем константа $L$ не зависит от $A$ (то есть $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ будет ограничен одной константой $L$ для любого $A$).

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим функцию $F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$. Как было доказано в теореме 5, функция $F(A)$ монотонно возрастает. Необходимое и достаточное условие сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ есть существование конечного предела первообразной $F(A)$ (смотри формулу (4.6)), что для монотонно возрастающей функции означает ограниченность.

■

**Теорема 7 (Признак сравнения)**

Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \geqslant a$. Тогда:

**1)** Из сходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

**2)** Из расходимости $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

<u>Доказательство:</u>

Введем функции $F(A)$ и $G(A)$ по правилу:

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx, \quad G(A) = \int\limits_a^A g(x)dx.$$

Докажем пункт 1. Проинтегрировав неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, получим: $0 \leqslant F(A) \leqslant G(A)$. Поскольку $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то по теореме 6 функция $G(A)$ ограничена, то есть существует $L$ такое, что $G(A) \leqslant L$ для любого $A$. Следовательно, $F(A) \leqslant L$ для любого $A$. Тогда по теореме 6 (формула (4.11)) интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится.

Докажем пункт 2. От противного. Пусть $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится, тогда по первой части доказательства $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ тоже сходится. Получили противоречие.

$\blacksquare$

***Замечание***

Поскольку отбрасывание интеграла по конечному промежутку не влияет на сходимость, то в условии теоремы 7 можно требовать выполнение неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ только при $x \geq b$, где $b \geq a$.

**Теорема 8 (Предельный признак сравнения)**

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad$ где $0 \leqslant K \leqslant \infty$. Тогда:

**1.** При $0 \leq K < \infty$ из сходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ вытекает сходимость $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

**2.** Если $0 < K \leq \infty$ из расходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

**3.** При $0 < K < \infty$ интегралы либо оба сходятся либо оба расходятся, то есть ведут себя одинаково.

<u>Доказательство:</u>

Докажем пункт 3. По определению предела,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists b:\; x > b: \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; (K-\varepsilon)g(x) < f(x) < (K+\varepsilon)g(x).$$

По неравенству $f(x) < (K+\varepsilon)g(x)$ в соответствии с теоремой 7 с учетом замечания получаем, что из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Поскольку $K > 0$, можно выбрать столь малое $\varepsilon$, что $K - \varepsilon > 0$. Тогда из неравенства $(K-\varepsilon)g(x) < f(x)$ следует что из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

Если предположить, что один из интегралов расходится, то и второй должен расходиться. Доказывается от противного. Действительно, если предположить, что второй интеграл сходится, то по доказанному должен сходиться и первый интеграл. Противоречие.

Для доказательства пунктов 1 и 2 нужно применить только половину из приведенных выше аргументов, а именно:

**1.** Если $0 \le K < \infty$, то имеем неравенство: $f(x) < (K+\varepsilon)g(x)$, из которого следует, что сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

**2.** Если $0 < K \le \infty$, то при достаточно малом $\varepsilon$ (таком, что $K - \varepsilon > 0$) имеем: $(K-\varepsilon)g(x) < f(x)$. Тогда по теореме 7 с учетом замечания получаем, что из расходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

■

***Замечание***

На практике в качестве одной из подынтегральных функций удобно выбирать функцию $\frac{1}{x^\lambda}$.

**Теорема 9 (Теорема о сравнении с эталонным интегралом)**

Рассмотрим сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$, где $a > 0, \quad \lambda > 0$. Тогда:

**1.** Пусть $\lambda > 1$ и для достаточно больших $x$ выполнено: $0 < \varphi(x) \leqslant C < \infty$. Тогда $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ сходится.

**2.** Пусть $0 < \lambda \leqslant 1$ и для достаточно больших $x$ выполнено: $\varphi(x) \geqslant C > 0$. Тогда $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ расходится.

Доказательство:

Докажем пункт 1. Пусть $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}$, $\quad g(x) = \frac{C}{x^\lambda}$. Из формулы (4.2) нам известно, что $\int\limits_a^\infty \frac{C}{x^\lambda}dx$ сходится при $\lambda > 1$. Так как $\varphi(x) \leqslant C$, то из теоремы 7 (пункт 1) получаем, что $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ также сходится.

Докажем пункт 2. Пусть $g(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}$, $\quad f(x) = \frac{C}{x^\lambda}$. Из формулы (4.2) нам известно, что $\int\limits_a^\infty \frac{C}{x^\lambda}dx$ расходится при $\lambda \leq 1$. Так как $\varphi(x) \geq C > 0$, то из теоремы 7 (пункт 2) получаем, что $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}dx$ также расходится.

■

**Теорема 10 (Теорема о сравнении с интегралом от эквивалентной бесконечно малой)**

Пусть при $x \to \infty$ функция $f(x)$ есть бесконечно малая, такая, что: $f(x) \sim \frac{C}{x^\lambda}$, где $\lambda > 0$, $\quad C > 0$. Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, если $\lambda > 1$ и расходится, если $\lambda \leqslant 1$.

Доказательство:

Пусть $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C > 0$. Следовательно, по предельному признаку сравнения (теорема 8, пункт 3), интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ ведут себя одинаково. Сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ нам известна из формулы (4.2). Такая же сходимость будет и у интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

■

**Пример 1**

Исследуем сходимость следующих интегралов:

**1)** $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$. Подынтегральная функция ведет себя следующим образом: $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Следовательно, по теореме 10 интеграл расходится.

**2)** Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ сходится, так как $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^2}$.

**Пример 2. "Почему ночью темно?"**

Выясним освещенность, создаваемую на Земле всеми звездами за исключением Солнца. Напомним, что освещённость равна световому потоку, падающему на участок поверхности единичной площади. Будем считать, что звёзды расположены во Вселенной равномерно с плотностью $\rho$ и обладают одинаковой светимостью $M$, то есть излучают одинаковую световую энергию. Введем в пространстве сферические координаты с центром на Земле. Найдем количество звезд, которые находятся в сферическом слое между сферами радиусами $r$ и $r + dr$. Объем этого сферического слоя равен $4\pi r^2 dr$. Тогда количество звезд равно $\rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Общая светимость сферического слоя равна $M\rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Освещенность, создаваемая на Земле сферическим слоем, обратно пропорциональна квадрату расстояния до него: $dE = k\frac{1}{r^2} \cdot M\rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Тогда полную освещенность, создаваемую на Земле всеми звездами, можно получить, проинтегрировав $dE$ по радиусу $r$ от нуля до бесконечности:

$$E = \int\limits_0^\infty k\frac{1}{r^2} \cdot M\rho \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi M\rho k \int\limits_0^\infty dr = \infty,$$

то есть интеграл расходится и освещенность, создаваемая звездами, бесконечно велика.

Полученный результат явно ошибочен, так как ночью темно. Ошибка состоит в том, что мы считали Вселенную стационарной системой. В 1922 году Александром Фридманом была предложена первая из нестационарных моделей Вселенной, которая устраняет данный парадокс. В данной модели все звёзды разлетаются друг от друга. При этом энергия излучаемого ими света тем меньше, чем быстрее звезда улетает. Скорость разлета звезд тем больше, чем дальше они друг от друга (скорость разлета пропорциональна расстоянию между звездами). В астрономии это называется красным смещением ибо красная часть спектра соответствует меньшей энергии излучаемых фотонов. Поэтому далекие звезды (из-за которых и возникала расходимость интеграла) почти не приносят энергии на Землю.

**Несобственный интеграл от произвольной функции. Общий случай.**

Вопрос о существовании несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, согласно его определению, приводится к вопросу о существовании конечного предела при $A \to \infty$ для функции от $A$ :

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx. \tag{4.12}$$

Применяя к этой функции признак Больцано-Коши, можно условие существования несобственного интеграла представить в следующей форме: Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечало такое число $A_0 > a$, чтобы при $A > A_0$ и $A' > A_0$ выполнялось неравенство:

$$|F(A') - F(A)| = \left| \int\limits_a^{A'} f(x)dx - \int\limits_a^{A} f(x)dx \right| = \left| \int\limits_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Этой критерий поззволяет доказать следующую теорему:

**Теорема 11 (Признак абсолютной сходимости)**
Если сходится $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, то сходится и $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.
<u>Доказательство:</u>

Действительно, применяя изложенный критерий к интегралу $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, который предполагаем сходящимся, видим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_0 > a$, что:

$$\int\limits_A^{A'} |f(x)|dx < \varepsilon \quad \text{при } A' > A > A_0.$$

Так как, очевидно, выполнено неравенство: $\left|\int\limits_A^{A'} f(x)dx\right| \le \int\limits_A^{A'} |f(x)|dx$, то для тех же $A,\ A'$ тем более будет выполнено неравенство:

$$\left|\int\limits_{A}^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

откуда, в силу критерия Больцано-Коши, вытекает сходимость инетграла $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.

■

***Замечание***

Отметим, что из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$, вообще говоря, не следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|dx$. Это обстоятельство дает основание особо отличать следующий случай.

***Замечание***

Если наряду с интегралом $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся, а функцию $f(x)$ – абсолютно интегрируемой в промежутке $[a,\ +\infty)$.

В случае же когда интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ называют неабсолютно (условно) сходящимся.

**Следствие**

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, \infty)$, а функция $g(x)$ ограничена, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ будет абсолютно интегрируемо на $[a, \infty)$.

Доказательство:

Поскольку функция $g(x)$ ограничена, найдется постоянная $L$, такая, что: $|g(x)| \leq L \ \ \forall x \in [a, \infty)$. Следовательно, будт выполнено неравенство:

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq L|f(x)|.$$

По условию, $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|dx$ сходится. Значит по признаку сравнения интегралов (теорема 7) сходится и интеграл от $\int\limits_a^\infty |f(x)\cdot g(x)|dx$.

■

**Пример**

Исследуем на сходимость следующий интеграл: $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 5x}{1+x^2}dx$.

Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ абсолютно интегрируема:

$$\int\limits_0^\infty |f(x)|dx = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Функция $\cos 5x$ ограничена: $|\cos 5x| \leqslant 1$.

Тогда по следствию из теоремы 11 интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 5x}{1+x^2}dx$ сходится, причём абсолютно.

**Теорема 12 (Признак Абеля)**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a,\,\infty)$ и выполнено:

**1)** $f(x)$ интегрируема в полуинтервале $[a,\,\infty)$, то есть $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится (хотя бы неабсолютно).

**2)** $g(x)$ монотонна и ограничена, то есть существует постоянная $L$, такая, что выполнено: $|g(x)| \leqslant L \quad \forall x \in [a,\,\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство:

Воспользуемся второй теоремой о среднем значении. Напомним ее формулировку. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\,b]$, функция $g(x)$ монотонна. Тогда найдется такая точка $\xi \in [a,\ b]$, что выполнено:

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx.$$

В соответствии с этой теоремой для любых $A' > A > a$ найдется такая точка $\xi \in [A,\ A']$, что выполнено:

$$\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx + g(A')\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx. \tag{4.14}$$

Поскольку $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится (пункт 1 теоремы 12), то по критерию Больцано-Коши (формула (4.13)) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ A_0 > a$, такое, что $\forall\ A \geq \xi \geq A' > A_0$ выполнено:

$$\left|\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \qquad \left|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}. \tag{4.15}$$

Из равенства (4.14) получим:

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(A)\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx + g(A')\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|g(A)|}_{\leq L}\cdot\underbrace{\left|\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2L}} + \underbrace{|g(A')|}_{\leq L}\cdot\underbrace{\left|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2L}} \leq$$

$$< L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Значит по критерию Больцано-Коши (4.13) интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

$\blacksquare$

**Теорема 13 (Признак Дирихле)**

Пусть:

**1)** Функция $f(x)$ интегрируема в любом конечном промежутке $[a,\ A]$ (где $A > a$) и все интегралы от нее ограничены одной константой:

$$\exists\ K \text{ такое, что: } \left|\int\limits_a^{A} f(x)\,dx\right| \leq K \quad \forall A \in [a,\ \infty).$$

**2)** Функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to \infty$ : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.
Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

***Замечание***

По сравнению с признаком Абеля первое условие ослаблено, второе – усилено.

Доказательство:

Аналогично доказательству теоремы Абеля, воспользуемся второй теоремой о среднем значении (формула (4.14)). В соответствии с этой теоремой для любых $A' > A > a$ найдется такая точка $\xi \in [A,\ A']$, что выполнено:

$$\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx + g(A')\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx. \tag{4.16}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, то функцию $g(x)$ можно сделать сколь угодно маленькой, взяв достаточно большое $x$, то есть: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_0 > a$, такое, что при $A' > A > a_0$ выполнено:

$$|g(A)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \qquad |g(A')| < \frac{\varepsilon}{4K}. \tag{4.17}$$

Оценим первый и второй интегралы из правой части формулы (4.16):

$$\Big|\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx\Big| = \Big|\int\limits_A^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx\Big| \le$$

$$\le \underbrace{\Big|\int\limits_A^{a} f(x)\,dx\Big|}_{\le K} + \underbrace{\Big|\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx\Big|}_{\le K} \le K + K = 2K. \tag{4.18}$$

Аналогично,

$$\Big|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\Big| \le 2K. \tag{4.19}$$

Воспользовавшись формулами (4.16)–(4.19), получим оценку для интеграла:

$$\Big|\int\limits_{A}^{A'} f(x)g(x)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \varepsilon. \tag{4.20}$$

Значит по критерию Больцано-Коши (4.13) интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

■

**Пример**

Исследуем сходимость следующих интегралов:

$$\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}dx \quad \text{где } a>0,\ \lambda>0.$$

Воспользуемся признаком Дирихле. Выберем $f(x)=\sin x, \quad g(x)=\frac{1}{x^\lambda}$ и проверим условия признака:

$$\Big|\int\limits_a^A \sin x dx\Big| = \Big|\cos a - \cos A\Big| \leqslant 2.$$

Аналогично для второго интеграла:

$$\Big|\int\limits_a^A \cos x dx\Big| \leqslant 2.$$

Функция $\frac{1}{x^\lambda}$ монотонно стремится к нулю при $\lambda>0$. Следовательно, по признаку Дирихле оба интеграла сходятся.

***Замечание***

Отметим, что признак Абеля непосредственно применить не удается, так как интегралы $\int\limits_a^\infty \sin x dx$ и $\int\limits_a^\infty \cos x dx$ расходятся.

Покажем, что $\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ (где $a>0$) сходится неабсолютно.

Доказажем от противного.

Пусть $\int\limits_a^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \Big/$так как $x > 0\Big/ = \int\limits_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ сходится. Поскольку $\sin^2 x \le |\sin x|$, то признаку сравнения (теорема 7) интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ тоже сходится. Тогда $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} dx = \int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ тоже сходится. Прибавим к нему интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx$ (выше было доказано, что он сходится). Получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}.$$

Сумма двух сходящихся интегралов есть сходящийся интеграл, то есть интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}$ тоже сходится. Противоречие ибо $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x} = \infty$. Аналогично можно доказать, что $\int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ (где $a > 0$) сходится неабсолютно.

***Замечание***

Функции

$$\mathrm{Si}(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

называются интегральным синусом и интегральным косинусом соответственно.

## 4.3 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a,\, b]$, но ограничена и интегрируема на отрезке $[a,\, b-\eta]$ $\forall \eta > 0$. В этом случае точка $b$ называется особой точкой функции $f(x)$.

***Определение***

Несобственным интегралом от $a$ до $b$ от неограниченной функции $f(x)$ называется следующий предел (если он существует и конечен):

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\eta \to +0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)\, dx, \tag{4.21}$$

Если же интеграл не существует либо равен бесконечности, то говорят,