Замечание
Интегрирование и дифференцирование рядов можно использовать для вычисления сумм рядов.
Пример
Найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}}_{=S(x)\ (\text{обозначение})} = x \cdot S(x).$$

Проинтегрируем ряд $S(x)$:

$$\int\limits_0^x S(x)dx = \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \ \text{ при } |x| < 1.$$

/ Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии /
Продифференцируем полученный результат:

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Следовательно,

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xS(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}.$$

2.6 Ряд Тейлора

Связь коэффициентов степенного ряда с его суммой
Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots\ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots\ldots \tag{163}$$

сходится на интервале $|x-x_0| < R$. Обозначим через $f(x)$ его сумму.

По теореме 28 о дифференцировании степенных рядов, на интервале $|x-x_0| < R$ ряд (163) можно почленно дифференцировать любое число раз, то есть:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(n-k+1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-k}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots \tag{164}$$

При $x = x_0$ получим:

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = 1\cdot a_1, \quad f''(x_0) = 1\cdot 2\cdot a_2,\ \ldots\ldots,\ f^{(n)}(x_0) = n!\cdot a_n,\ \ldots\ldots \tag{165}$$

Таким образом, если $f(x)$ есть сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то коэффициенты этого ряда не могут быть ничем иным, как $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Такие коэффициенты называются коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Теперь рассмотрим обратный переход. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 задана бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$. Составим степенной ряд с коэффициентами $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{166}$$

Будет ли этот ряд сходится к $f(x)$? Исследования сходимости ряда недостаточно для ответа на этот вопрос ибо ряд может сходиться и к другой функции. Для выяснения сходимости именно к $f(x)$ заметим, что в окрестности точки x_0 всегда можно написать формулу Тейлора:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{S_n} + r_n(x), \tag{167}$$

которая связывает значения функции с частичной суммой S_n ряда Тейлора.
Здесь $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Поскольку левая часть $(f(x))$ в формуле (167) от n не зависит, то необходимое и достаточное условие того, что частичные суммы S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ сходятся к $f(x)$ – это условие $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 29
Для того, чтобы ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{168}$$

необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора при этом значении x стремился к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{169}$$

Формы остаточного члена в формуле Тейлора
Форма Пеано:

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n) \tag{170}$$

Форма Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \tag{171}$$

Форма Коши:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} \cdot (1-\theta)^n x^{n+1}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \tag{172}$$

Замечание
Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют рядом Маклорена.

2.7 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

В данном параграфе будем раскладывать функции в ряд Макорена, то есть в окрестности точки $x_0 = 0$.

Теорема 30
Если функция $f(x)$ в промежутке $[0, H]$ или $[-H, 0]$ $(H > 0)$ имеет производные всех порядков, и все эти производные при изменении x в указанном промежутке оказываются ограниченными по модулю одним и тем же числом:

$$\left|f^n(x)\right| \leq L, \tag{173}$$

то во всем промежутке имеет место разложение в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\ldots \tag{174}$$

Доказательство:
В силу теоремы 29 нам достаточно доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{175}$$

Рассмотрим остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \Big/ 0 \leq x \leq H \Big/ \leq L\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{176}$$

Докажем, что $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ и выясним его сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!H^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{H}{n+2} = 0 < 1, \tag{177}$$

то есть ряд сходится. Тогда, согласно необходимому условию сходимости, общий член ряда стремится к нулю:

$$\frac{H^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{178}$$

Следовательно, согласно неравенству (176), получаем, что $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, а это и означает, что ряд Маклорена $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ сходится к функции $f(x)$.

■

Воспользуемся теоремой 30 для разложения функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ в ряд Маклорена.

1) $f(x) = e^x$.

Поскольку $f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = 1, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$, то формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{179}$$

Так как для любого $H > 0$ выполнено:

$$|f^{(k)}(x)| = e^x \leq e^H, \quad x \in [-H, H] \quad \forall\, k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots, \tag{180}$$

то согласно теореме 30 остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$. Это означает, что функцию e^x на отрезке $[-H, H]$ можно разложить в сходящийся к ней ряд Маклорена по степеням x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{181}$$

2) $f(x) = \sin x$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad \forall\, n, \tag{182}$$

/ Это было доказано при выводе формулы Маклорена для $\sin x$ /
тогда:

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n = 2k, \\ (-1)^k & \text{при} \quad n = 2k+1. \end{cases} \tag{183}$$

Поскольку $|\sin x| \leq 1$, то по теореме 30 функцию $\sin x$ можно разложить в сходящийся к ней на интервале $(-\infty, \infty)$ ряд Маклорена по степеням x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{184}$$

3) $f(x) = \cos x$.

Так как

$$f^n(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad \forall n, \tag{185}$$

/ Это было доказано при выводе формулы Маклорена для $\cos x$ /
тогда:

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^k & \text{при} \quad n = 2k, \\ 0 & \text{при} \quad n = 2k+1. \end{cases} \tag{186}$$

Поскольку $|\cos x| \leq 1$, то по теореме 30 функцию $\cos x$ можно разложить в сходящийся к ней на интервале $(-\infty, +\infty)$ ряд Маклорена по степени x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{187}$$

4) $f(x) = \ln(1+x), \quad x > -1$.

Так как

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \forall\, n, \tag{188}$$

/ Это было доказано при выводе формулы Маклорена для $\ln(1+x)$ /
тогда:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \tag{189}$$

Напишем ряд Маклорена для функции $\ln(1+x)$ по степеням x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n}. \tag{190}$$

Найдем его область сходимости. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^n \cdot x^{n+1}|n}{(n+1)\cdot|(-1)^{n-1}\cdot x^n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{n}{n+1} = |x|. \tag{191}$$

При $|x| < 1$ ряд (190) сходится абсолютно, то есть сходится.
При $|x| > 1$ ряд (190) расходится абсолютно, следовательно расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходится есть только абсолютная сходимость).
Проверим крайние точки.
При $x = -1$ имеем: $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Это расходящийся отрицательный гармонический ряд.
При $x = 1$ получаем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$.
Поскольку этот ряд знакочередующийся, члены ряда монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то он сходится по признаку Лейбница. Итак, область сходимости ряда (190) – это полуинтервал $(-1, 1]$. Только в этом промежутке имеет смысл говорить о разложении функции в ряд и исследовать поведение остаточного члена $r_n(x)$.

Возьмем сначала $r_n(x)$ в форме Лагранжа (171).

Так как $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$, то:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{192}$$

При $0 \le x \le 1$ последний множитель не превосходит единицы. Следовательно,

$$|r_n(x)| \le \frac{1}{n+1}, \quad \text{то есть} \quad r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{193}$$

Однако, при $x < 0$ поведение этого множителя становится неясным и приходится прибегнуть к форме Коши (172) остаточного члена $r_n(x)$.
Оценим $|r_n(x)|$ при $-1 < x < 0$:

$$\begin{gathered}
|r_n(x)| = \left| (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (1-\theta)^n \cdot x^{n+1} \right| = \\
= \left| \frac{|x|^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot (1-\theta)^n \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x} \cdot \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^n} \le \\
\Big/ \left.\begin{matrix} 0 < \theta < 1 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow\ 1 + \theta x \ge 1 + x = 1 - |x| \Big/ \\
\le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n}_{<1}.
\end{gathered} \tag{194}$$

$$\Big/ \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \;\Leftrightarrow\; \Big/ \text{так как } 1+\theta x > 0 \;\text{ при }\; \begin{cases} x > -1, \\ 0 < \theta < 1 \end{cases} \Big/ \;\Leftrightarrow\; 1-\theta < 1+\theta x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\theta < \theta x \;\Leftrightarrow\; -1 < x \;\text{ (верно)}. \Big/$$

$|x|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при $-1 < x < 0$. Следовательно, согласно формуле (194), $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Итак, мы доказали, что при $-1 < x \le 1$ ряд (190) сходится к функции $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots\ldots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1. \end{aligned} \tag{195}$$

Замечание
В частности, при $x = 1$ мы получим уже известный нам знакочередующийся гармоничный ряд:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots\ldots \tag{196}$$

5) Биномиальный ряд. $f(x) = (1+x)^a$.
Если степень a – целое неотрицательное число, то функция $f(x)$ представляет собой полином, который можно получить по формуле бинома Ньютона:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{a} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{a} C_a^n x^n. \tag{197}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a \ne 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$
Так как

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(a-n+1)(1+x)^{a-n} \quad \forall\, n, \tag{198}$$

то

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(a-n+1). \tag{199}$$

Напишем ряд Маклорена для функции $(1+x)^a$ по степеням x:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(a-n+1)}{n!} x^n. \tag{200}$$

Установим, что биномиальный ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)(a-n+2)|\cdot|x|^{n+1}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1)} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{|a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)|\cdot|x|^n} =$$

$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{|a-n+2|}{n+1} = |x|. \tag{201}$$

При $|x| < 1$ ряд (200) сходится абсолютно, то есть сходится.
При $|x| > 1$ ряд (200) расходится абсолютно, следовательно расходится (так как по

теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость). Сходимость при $x = \pm 1$ зависит от величины a. Мы будем рассматривать разложение биномиальной функции в ряд Маклорена только при $-1 < x < 1$.

Рассмотрим остаточный член в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{a(a-1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(a-n)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot n}\ \cdot\ (1+\theta x)^{a-n-1}\cdot(1-\theta)^n\cdot x^{n+1} =$$
$$= \underbrace{\frac{(a-1)((a-1)-1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot((a-1)-n+1)}{n!}\cdot x^n}_{(I)}\cdot\underbrace{ax\cdot(1+\theta x)^{a-1}}_{(II)}\cdot\underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n}_{(III)}. \tag{202}$$

Сомножитель (I) – это общий член биномиального ряда для функции $(1+x)^{a-1}$, который сходится при $|x| < 1$. В силу необходимого условия сходимости общий член сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$.
Так как $0 < \theta < 1$ и $-1 < x < 1$, то сомножитель (II) можно оценивать с двух сторон:

$$|ax|\cdot(1-|x|)^{a-1} \leq |ax(1+\theta x)^{a-1}| \leq |ax\ \cdot(1+|x|)^{a-1}, \tag{203}$$

то есть сомножитель (II) ограничен. Сомножитель (III) также ограничен (доказывали в формуле (194)).
Таким образом, $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ как произведение бесконечно малой величины на ограниченную. Итак, мы доказали, что при $|x| < 1$ ряд (200) сходится к функции $(1+x)^a$:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}\cdot x^2 + \ldots\ldots + \frac{a(a-1)\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot(a-n+1)}{n!}\cdot x^n + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}\cdot x^n, \quad -1 < x < 1. \tag{204}$$

Формула (204) справедлива для любых значений a. При целых неотрицательных a ряд (204) будет представлять собой полином (конечную сумму).
Замечание
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии является частным случаем формулы (204):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \ldots\ldots + x^n + \ \ldots\ldots, \quad -1 < x < 1. \tag{205}$$

Определение
Множество значений x, при которых ряд Тейлора (Маклорена) для функции $f(x)$ сходится к значению функции $f(x)$, называется областью представимости функции рядом Тейлора (Маклорена).

Замечание
В приведенных выше разложениях область сходимости функции всегда совпадала с областью ее представимости рядом Маклорена. Однако это не всегда так.

Пример 1

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{206}$$

Покажем, что эта функция бесконечно дифференцируема при $x = 0$ и построим для неё ряд Маклорена. Мы вынуждены искать производную по определению, так как функция $f(x)$ “сшита” из двух функций, то есть не является элементарной.

$$f'(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\Big/\text{Замена: } y = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = \sqrt{y}\Big/$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} = \Big/\text{правило Лопиталя}\Big/ = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{y}e^y} = 0.$$

Этот результат является естественным, так как экспонента растет быстрее любой степени.

$$f''(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(0)}^{=0}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 2}{x\cdot x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

так как экспонента растет быстрее любой степени. Все следующие производные имеют вид:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0, \quad \text{где } P\left(\frac{1}{x}\right) - \text{полином от } \frac{1}{x}.$$

Итак, $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n$, то есть ряд Маклорена состоит из нулей:

$$0+0+0+\ldots\ldots+0+\ldots\ldots$$

Разумеется, этот ряд сходится на $(-\infty, +\infty)$. Однако ни в одной точке, кроме $x = 0$, ряд не представляет функцию $f(x)$ (ибо $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$). Таким образом, здесь область сходимости больше области представимости функции рядом.

Пример 2

Разложим в ряд по степеням $(x-3)$ функцию $\ln(5+2x)$.

$$\ln(5+2x) = \ln(5+2(x-3)+6) = \ln\Big(11\Big(1+\frac{2}{11}\Big(x-3\Big)\Big)\Big) = \ln 11 + \ln\Big(1+\frac{2}{11}\Big(x-3\Big)\Big).$$

Воспользуемся формулой (195) для разложения $\ln(1+z)$: $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot z^n}{n}$,

область сходимости: $-1 < z \leq 1$. В нашем случае роль z играет выражение $\frac{2}{11}(x-3)$.

Следовательно,

$$\underline{\ln(5+2x) = \ln 11 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{11}\right)^n \cdot \frac{(-1)^{n-1}\cdot(x-3)^n}{n},}$$

$$\text{область сходимости: } -1 < \frac{2}{11}(x-3) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{2}{11} < x-3 \leq \frac{11}{2} \;\Leftrightarrow\; \underline{-\frac{5}{2} < x \leq \frac{17}{2}}.$$

Пример 3

Разложим в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 19}{(x-3)^2(2x+5)}.$$

Разложим $f(x)$ на элементарные дроби:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 19}{(x-3)^2(2x+5)} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; A(x-3)^2 + B(2x+5)(x-3) + C(2x+5) = x^2 - 2x + 19 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; A(x^2 - 6x + 9) + B(2x^2 - 6x + 5x - 15) + C(2x+5) = x^2 - 2x + 19.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & A + 2B = 1 \\ x^1: & -6A - B + 2C = -2 \\ x^0: & 9A - 15B + 5C = 19 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - 2B \\ -6 + 12B - B + 2C = -2 \\ 9 - 18B - 15B + 5C = 19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - 2B & (I) \\ 11B + 2C = 4 & (II) \\ -33B + 5C = 10 & (III) \end{cases} \Leftrightarrow \Big/ (II)\cdot 3 + (III) \longrightarrow (III) \Big/ \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - 2B \\ 11B + 2C = 4 \\ 11C = 22 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 2, \\ B = 0, \\ A = 1. \end{cases}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{1}{2x+5} + \frac{2}{(x-3)^2}. \tag{207}$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}\right)$ разложим $\frac{1}{2x+5}$ в ряд:

$$\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2x}{5}\right)^n, \quad |x| < \frac{5}{2}. \tag{208}$$

Заметим, что:

$$\frac{2}{(x-3)^2} = \left(-\frac{2}{x-3}\right)'. \tag{209}$$

Дробь $\frac{2}{x-3}$ можно разложить в ряд как геометрическую прогрессию:

$$\frac{2}{x-3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad |x| < 3. \tag{210}$$

Тогда, учитывая формулу (209), получим:

$$\frac{2}{(x-3)^2} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}, \quad |x| < 3. \tag{211}$$

Складывая ряды (208) и (211), получаем итоговое разложение в ряд для функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2x}{5}\right)^n + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}}x^n\right), \quad |x| < \frac{5}{2}. \tag{212}$$