Затухающие колебания

На осциллятор действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости

$$F_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\beta = \frac{r}{2m}$$ коэффициент затухания

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ собственная частота

Затухающие колебания

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

Характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\boxed{\beta < \omega_0}$$

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t}\right)$$

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos\ \omega t + \varphi_0}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

частота затухающих колебаний

Формулы Эйлера

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

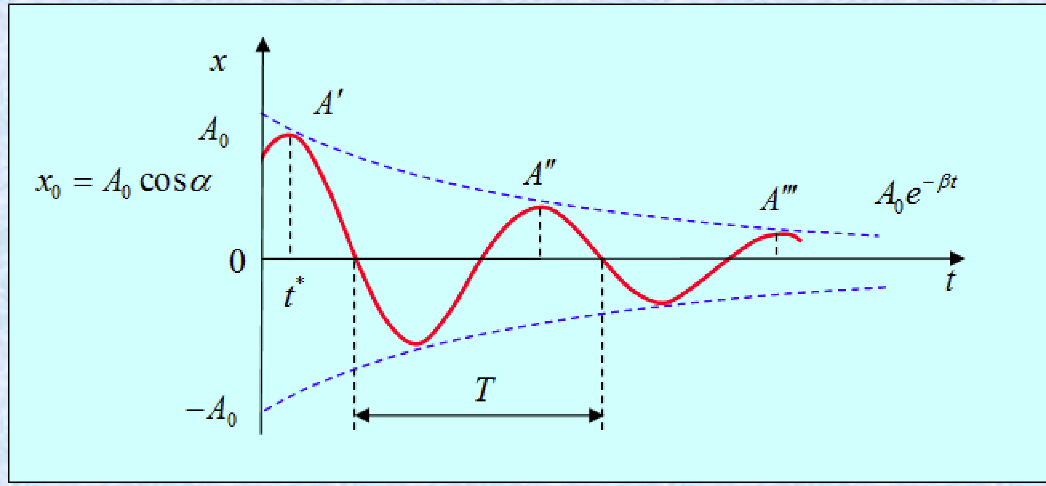
$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

Параметры затухающих колебаний

$$x(t) = A_0e^{-\beta t}\cos\;\;\omega t+\varphi_0$$

$A(t)$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$



Время затухания $\tau = 1/\beta$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A\;\;t+T} = \ln\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta t}e^{-\beta T}}$$

$$\boxed{\lambda = \beta T}$$

Логарифмический декремент затухания обратен числу колебаний за время затухания

Добротность

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)}$$

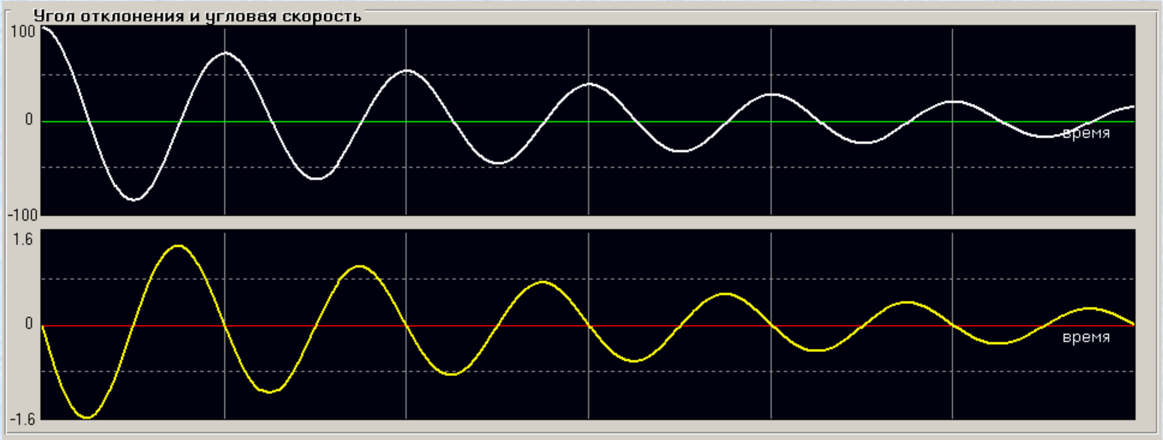
Добротность пропорциональна отношению энергии, запасенной в осцилляторе к потерям энергии за период

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda}}$$

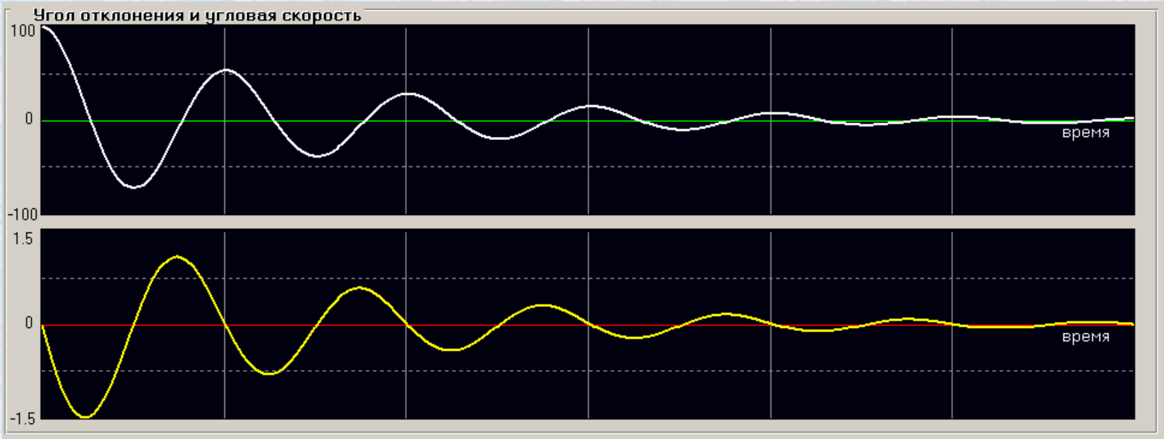
При малом затухании $$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Вопрос: Каков будет характер движения осциллятора при наличии трения скольжения с коэффициентом трения μ?

Графики колебаний

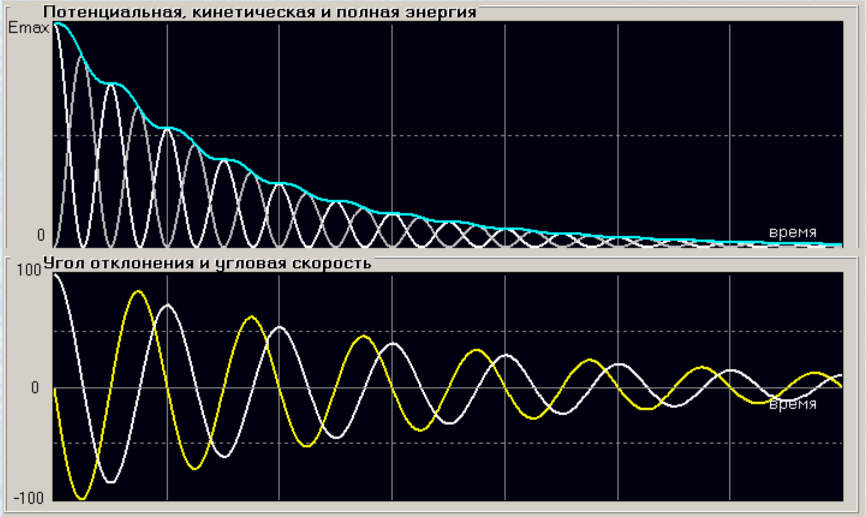


$Q = 10$

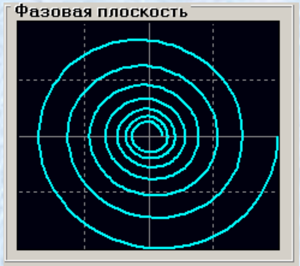


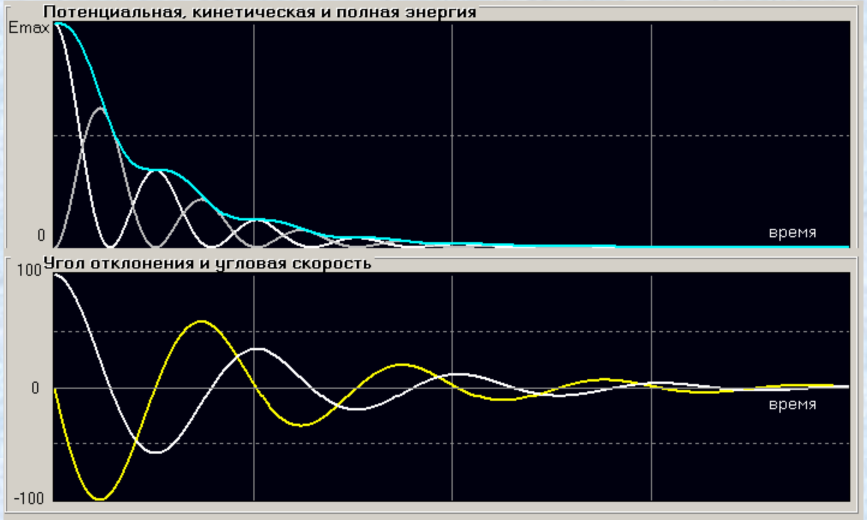
$Q = 3$

Превращения энергии

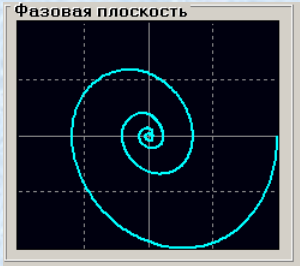


$Q = 10$





$Q = 3$



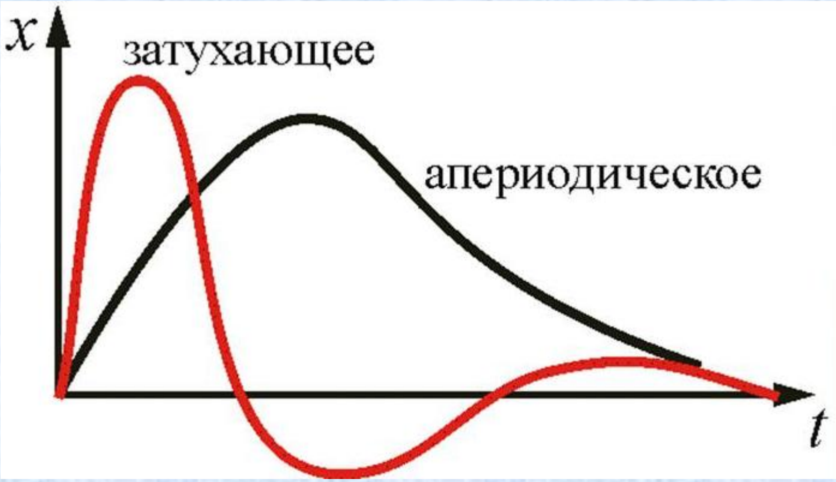
Критическое затухание

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \qquad \alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

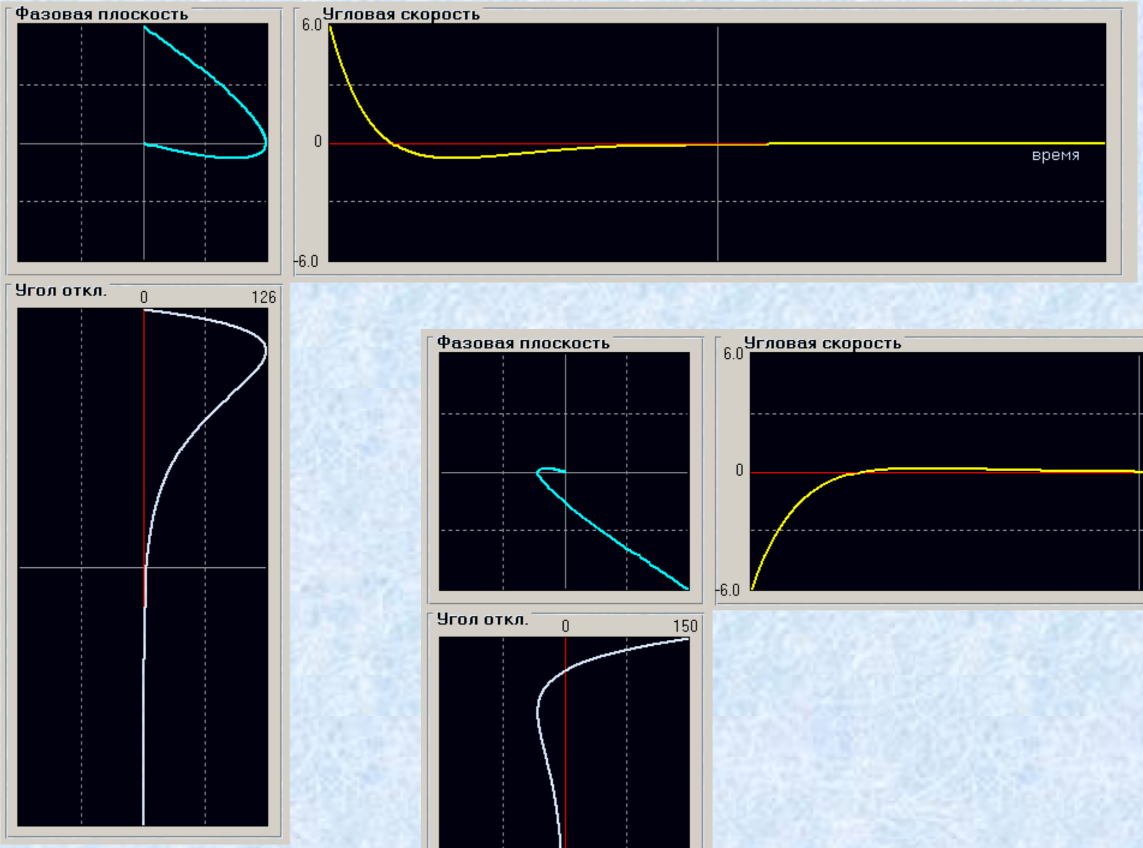
Если $\beta > \omega_0$

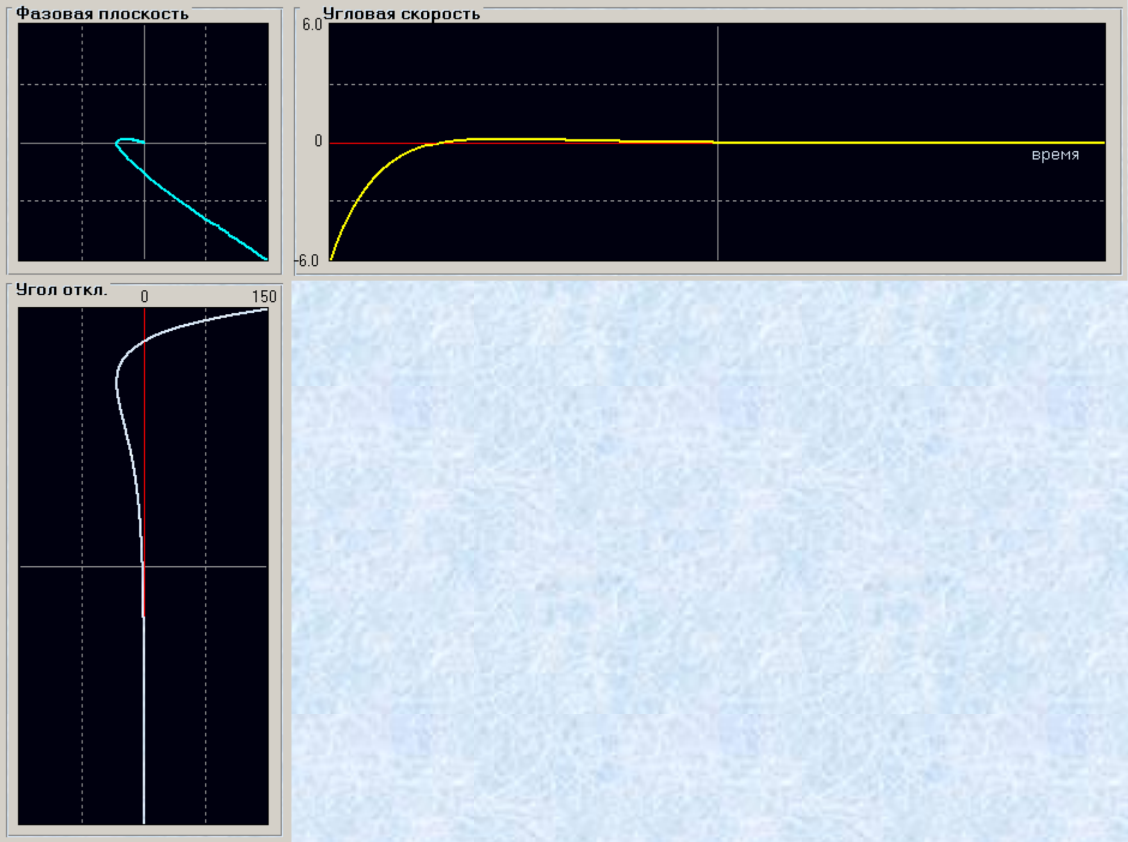
$$x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} \right)$$

Движение становится апериодическим



Критическое затухание





Вынужденные колебания

На осциллятор действует внешняя сила $F = F_0 \cos \omega t$

Было

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Стало

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \qquad \left(f_0 = \frac{F_0}{m} \right)$$

$$x(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A \cos(\omega t - \varphi)$$

Общее решение однородного уравнения, затухнет

Частное решение неоднородного уравнения, останется

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Резонанс

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]' = 0$$

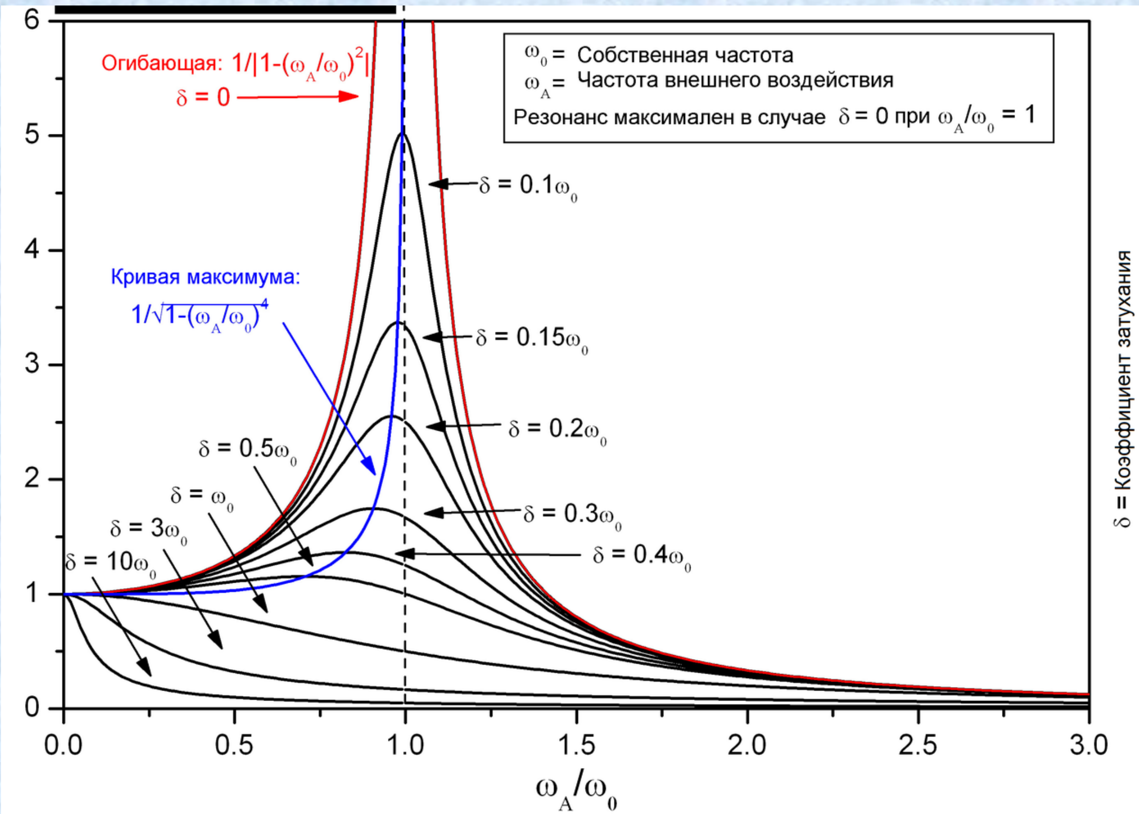
$$2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(-2\omega\right) + 8\beta^2\omega = 0$$

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \qquad \boxed{A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}}$$

Резонанс: резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебательной системы.

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ)

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad A\left(\omega = 0\right) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \qquad A\left(\omega \to \infty\right) \to 0$$

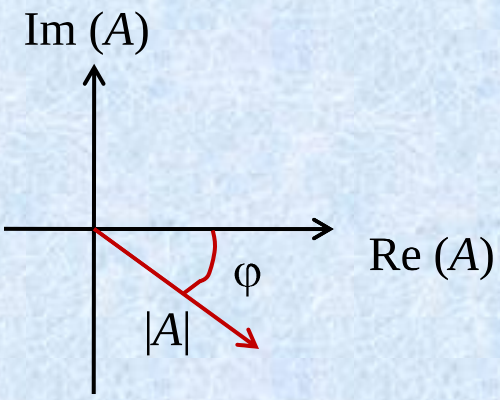


Фазово-частотные характеристики (ФЧХ)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t} \qquad\qquad x(t) = Ae^{i\omega t}$$

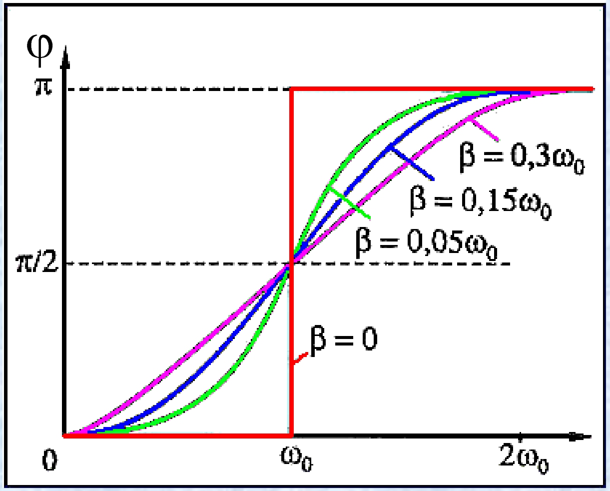
$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\beta i\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} = \frac{f_0\left(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta i\omega\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$



$$A = |A|e^{-i\varphi} \qquad\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Фазово-частотные характеристики (ФЧХ)



$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Добротность и резонанс

При малом затухании ($\beta << \omega_0$, $\omega_{рез} \approx \omega_0$)

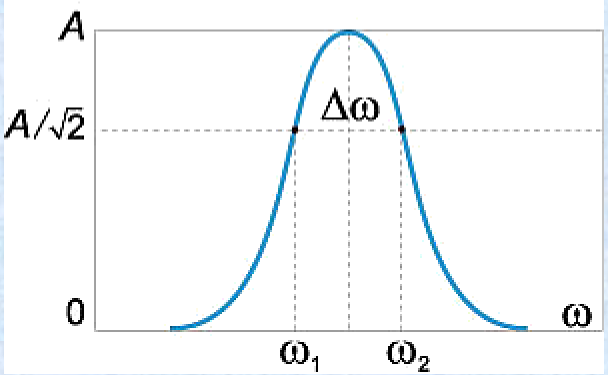
$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \qquad f_0 = \frac{F_0}{m} = \omega_0^2 x_0 \qquad Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

$$\boxed{Q \approx \frac{A_{рез}}{x_0}}$$

Добротность показывает, во сколько раз амплитуда колебаний при резонансе превышает амплитуду возбуждающего воздействия

Добротность и резонанс

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$



$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = 4\beta^2\omega^2 \qquad \left|\omega_0 - \omega\right| 2\omega = 2\beta\omega$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \beta$$

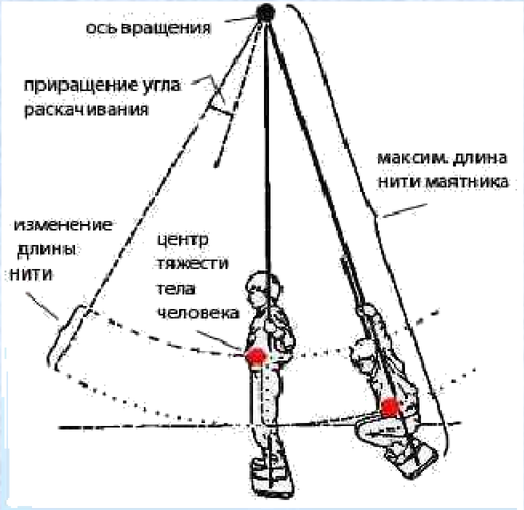
$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$$

Добротность показывает, во сколько раз ширина резонансной кривой меньше собственной частоты контура

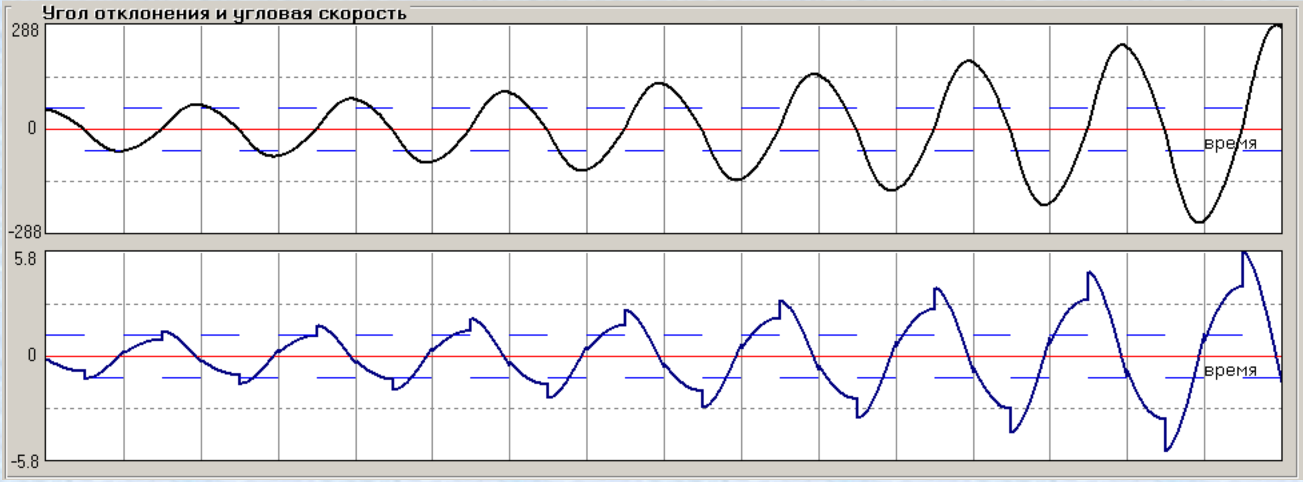
Параметрический резонанс

Параметрический резонанс: нарастание колебаний обусловлено не внешним воздействием, а периодическим изменением какого-либо параметра колебательной системы.

$$m\ddot{x} + k(t)x = 0 \qquad k(t+T) = k(t)$$

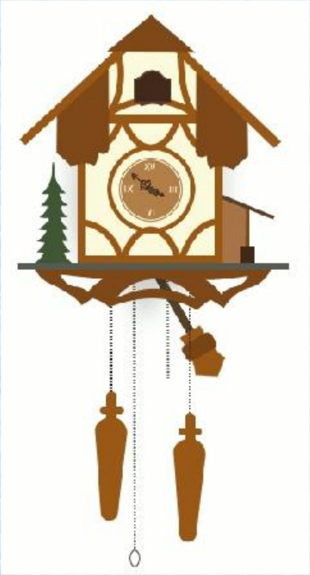


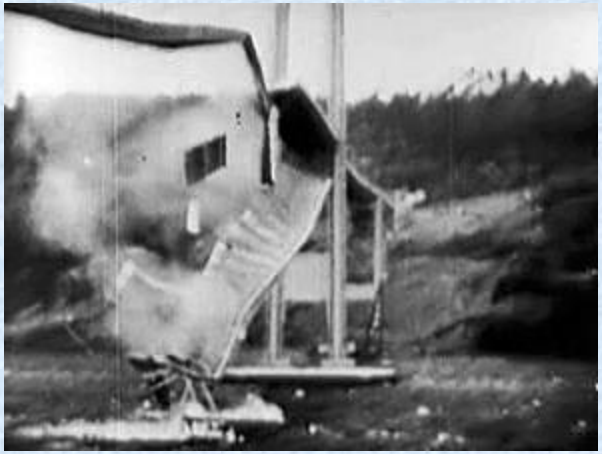
Параметрический резонанс



Автоколебания

Автоколебания — незатухающие колебания в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного, то есть непериодического внешнего воздействия.





Разрушение Тэкомского моста (США, штат Вашингтон) 7 ноября 1940 года вследствие автоколебаний, возникших под действием ветра.

Флаттер: быстрое нарастание вибраций самолета с разрушением конструкции