$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}}>1$ при $-2<x<-\dfrac{17}{9}$.
Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|>1$, а значит нарушено необходимое условие сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\neq 0$). Следовательно, ряд расходится.

Ответ: область сходимости: $\left[-\dfrac{17}{9},+\infty\right)$.

Задачи

Найти области сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

По признаку сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^{\frac{3}{2}}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^{\frac{3}{2}}}$ тоже сходится, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится.

Область сходимости: $(-\infty;+\infty)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$

По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n^2x}}=\lim_{n\to\infty}e^{-nx}=\begin{cases}0 \text{ при } x>0 \ \Rightarrow \text{ ряд сходится;}\\ 1 \text{ при } x=0;\\ \infty \text{ при } x<0 \ \Rightarrow \text{ ряд расходится.}\end{cases}$$

При $x=0$ ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=\infty \ \Rightarrow$ ряд расходится.

Область сходимости: $(0,\infty)$.

8.1 Степенные ряды

Ряд

$$C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\ldots+C_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \tag{8.2}$$

называется степенным по степеням $(x-x_0)$.

В частности, при $x_0=0$ получаем степенной ряд по степеням x :

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ +C_nx^n+\ .\ .\ .\ .\ .\ =\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \tag{8.3}$$

Теорема Абеля
Если ряд сходится в некоторой точке x_1, то он сходится, причем абсолютно, на целом интервале, симметричном относительно точки x_0.

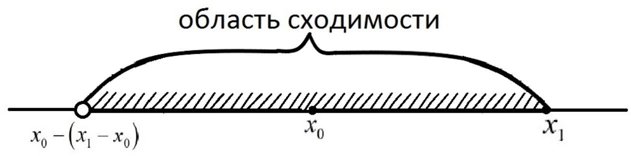

Рис. 60: Область сходимости

Область абсолютной сходимости – это область сходимости без точки x_1.
Следствие
Область сходимости степенного ряда – интервал, симметричный относительно точки x_0 :

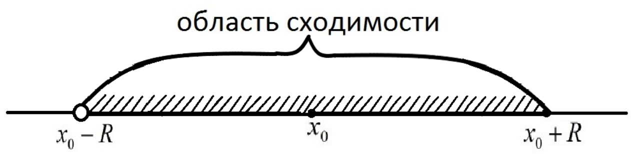

Рис. 61: Область сходимости

Здесь R – это радиус сходимости степенного ряда.
Итак, из теоремы Абеля следует:

$$\begin{cases} x \in (x_0-R, x_0+R) \text{ – ряд сходится;} \\ |x-x_0| > R \qquad \text{ – ряд расходится;} \\ \text{Точки } (x_0-R) \text{ и } (x_0+R) \text{ – нет информации о сходимости.} \end{cases}$$

Задачи

1) Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$.

Проверим по признаку Даламбера абсолютную сходимость этого ряда.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 2^n}{|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^2}_{\to 1} = \frac{|x-1|}{2}.$$

$\frac{|x-1|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$ – ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд сходится.

$\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -1 \end{array}\right.$ – ряд расходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).

Проверим точки $x = 3$ и $x = -1$:

$x = 3: \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3-1)^n}{n^2 \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – сходится.

$x = -1: \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1-1)^n}{n^2 \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ – сходится абсолютно $\Rightarrow$ сходится.

Ответ: Область сходимости $[-1, 3]$.

2) Найти область сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{3n-2}$$

Проверяем абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,|x|^{n+1}}{(3n+1)} \cdot \frac{3n-2}{n\,|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 3n - 2}{3n^2 + n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{6n+1} = |x|$$

$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ – ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд сходится.

$|x| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right.$ – ряд расходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).

Проверим точки $x = 1$ и $x = -1$:

$$x = 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n-2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n-2} = \dfrac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow$ нарушено необходимое условие сходимости $\Rightarrow$ ряд расходится.

$$x = -1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n\,(-1)^n}{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n-2} = \dfrac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Ответ: Область сходимости : $(-1{,}1)$.

3) Найти область сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

Проверяем абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n}_{\to\frac{1}{e}} = \frac{|x|}{e}.$$

$|x| < e \;\Leftrightarrow\; -e < x < e$ – ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд сходится.

$|x| > e \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x > e \\ x < -e \end{array}\right.$ – ряд расходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).

Проверим точки $x = e$ и $x = -e$.

$$x = e: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n.$$

Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} e^n =$$

$$\Big/ \text{Воспользуемся формулой Стирлинга:} \quad n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \Big/$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{n^n} \cdot e^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} = \infty.$$

Следовательно, нарушено необходимое условие сходимости и ряд расходится.

$x = -e$: здесь также нарушено необходимое условие сходимости.

Ответ: Область сходимости: $(-e, e)$.

4) Найти область сходимости:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n \cdot 2^n \cdot \ln^2 n}$$

Проверяем абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^{2n+2}}{(n+1)\,2^{n+1}\ln^2(n+1)}\cdot\frac{n\cdot 2^n\ln^2 n}{|x-3|^{2n}}=\frac{|x-3|^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln^2 n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=$$

$$=\frac{|x-3|^2}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln^2(n+1)}=\frac{|x-3|^2}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n\cdot\frac{1}{n}}{2\ln(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\frac{|x-3|^2}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\frac{|x-3|^2}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\frac{|x-3|^2}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{|x-3|^2}{2}$$

$\dfrac{|x-3|^2}{2}<1\Leftrightarrow|x-3|^2<2\Leftrightarrow|x-3|<\sqrt{2}\Leftrightarrow-\sqrt{2}<x-3<\sqrt{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}\Rightarrow$ ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд сходится.
$\left[\begin{array}{l}x>3+\sqrt{2}\\ x<3-\sqrt{2}\end{array}\right.$ – ряд расходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд расходится (так как по теореме Абеля внутри интервала сходимости есть только абсолютная сходимость).
Проверим точки $x=3+\sqrt{2}$ и $x=3-\sqrt{2}$.

$$x=3+\sqrt{2}:\quad\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n}}{n\cdot 2^n\cdot\ln^2 n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$$

Проверим сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$ по интегральному признаку Коши:

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{\infty}=-\underbrace{\frac{1}{\ln\infty}}_{=0}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$$

Интеграл сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$ также сходится.

$x=3-\sqrt{2}:\quad\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\left(-\sqrt{2}\right)^{2n}}{n\cdot 2^n\cdot\ln^2 n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$ – сходится.
Ответ: Область сходимости: $\left[3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\right]$.

8.2 Ряд Тейлора

Ряд Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 – это ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x). \tag{8.4}$$

Замечание
Равенство имеет смысл только когда степенной ряд сходится. Уточним, что степенной ряд не обязан сходиться к значению функции $f(x)$. Но для элементарных функций: $x^a, a^x, \ln x, \sin x$ и так далее, это всегда выполняется.
Замечание
Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называют рядом Маклорена.
Для элементарных функций ряды Маклорена известны (после запятой указана область сходимости ряда):

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ + \frac{x^n}{n!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ .\ .\ .\ .\ .\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$

3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1;$

5) $(1+x)^a = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1;$

6) Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1.$

Пример
Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и указать область сходимости:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = \frac{3}{2}.$$

Поскольку x находится где-то в окрестности точки $\frac{3}{2}$, введём новую переменную t, меняющуюся в окрестности точки 0, по правилу:

$$t = x - x_0 = x - \frac{3}{2}.$$

$$\ln(1+x) = \ln\left(1+\frac{3}{2}+t\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\left(1+\frac{2t}{5}\right)\right) =$$

$$= \ln\frac{5}{2} + \ln\left(1+\frac{2t}{5}\right) = \ln\frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{2}{5}t\right)^n}{n} =$$

$$= \ln\frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{2}{5}t\right)^n}{n}, \quad -1 < \frac{2t}{5} \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < t \leqslant \frac{5}{2}$$

$$= \ln\frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{5^n}\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^n}{n}, \quad -\frac{5}{2} < x-\frac{3}{2} \leqslant \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 < x \leqslant 4$$

Задачи

1. Разложить функцию $f(x) = \log_2(3+2x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и указать область сходимости.

2. Разложить функцию $f(x) = \sin(2x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и указать область сходимости.

3. Разложить функцию $f(x) = e^{2x+1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -\frac{1}{2}$ и указать область сходимости.

4. Разложить функцию $f(x) = 3^{4x+1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и указать область сходимости.

5. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{2+x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и указать область сходимости.

1) Разложить функцию $f(x) = \log_2(3+2x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и указать область сходимости.

$$\log_2(3+2x) = \frac{\ln(3+2x)}{\ln 2}$$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, так как c можно взять любое, например: $c = e$.

Пусть $t = x - x_0 = x - 1$.

$$\ln(3+2x) = \ln(5+2t) = \ln\left(5\left(1+\frac{2}{5}t\right)\right) = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{2}{5}t\right) =$$

$$= \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{2}{5}t\right)^n}{n}, \quad -1 < \frac{2}{5}t \leqslant 1$$

$$= \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{5^n}\frac{(x-1)^n}{n}, \quad -\frac{5}{2} < x-1 \leqslant \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x \leqslant \frac{7}{2}$$

$$\log_2(3+2x) = \frac{\ln 5}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{5^n}\frac{(x-1)^n}{n}, \quad -\frac{3}{2} < x \leqslant \frac{7}{2}$$

2) Разложить функцию $f(x) = \sin(2x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и указать область сходимости.
Пусть $t = x - \frac{\pi}{2}$.

$$\sin(2x) = \sin(2t+\pi) = -\sin 2t = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Разложить функцию $f(x) = e^{2x+1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -\frac{1}{2}$ и указать область сходимости.
Пусть $t = x - x_0 = x + \frac{1}{2}$.

$$e^{2x+1} = e^{2t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) Разложить функцию $f(x) = 3^{4x+1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и указать область сходимости.
Пусть $t = x - 1$.

$$3^{4x+1} = (e^{\ln 3})^{4x+1} = e^{\ln 3\cdot(4x+1)} = e^{\ln 3\cdot(4t+5)} = e^{5\ln 3}\cdot e^{4\ln 3\cdot t} =$$

$$= e^{5\ln 3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\ln 3\cdot t)^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= e^{5\ln 3}\sum_{n=0}^{\infty}(4\ln 3)^n\cdot\frac{(x-1)^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

5) Разложить функцию $f(x)=\sqrt{2+x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$ и указать область сходимости.
Пусть $t=x+1$.

$$\sqrt{2+x}=(x+2)^{\frac{1}{2}}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot t^n,\ -1<t<1$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot(x+1)^n,\ -2<x<0$$

Задачи

6. Разложить функцию $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=\frac{\pi}{2}$ и указать область сходимости.
7. Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=\frac{3\pi}{2}$ и указать область сходимости.
8. Разложить функцию $f(x)=\log_5(7x+3)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ и указать область сходимости.
9. Разложить функцию $f(x)=(4+x)^{\frac{1}{4}}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ и указать область сходимости.

6) Разложить функцию $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=\frac{\pi}{2}$ и указать область сходимости.
Пусть $t=x-\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\Big/\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\ \Big/$$

$$=-\sin t\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right),\quad t\in\mathbb{R}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

7) Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ и указать область сходимости.
Пусть $t = x - \frac{3\pi}{2}$.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t + 3\pi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x-3\pi)^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8) Разложить функцию $f(x) = \log_5(7x+3)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ и указать область сходимости.
Пусть $t = x - 1$. Логарифм по основанию 5 представим в виде отношения двух натуральных логарифмов:

$$\log_5(7x+3) = \frac{\ln(7x+3)}{\ln 5}.$$

$$\ln(7x+3) = \ln(7t+10) = \ln\left(10\left(1 + \frac{7t}{10}\right)\right) = \ln 10 + \ln\left(1 + \frac{7t}{10}\right) =$$

$$= \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{7t}{10}\right)^n}{n}, \quad -1 < \frac{7t}{10} \leqslant 1$$

$$= \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7^n}{10^n}\frac{(x-1)^n}{n}, \quad -\frac{10}{7} < x - 1 \leqslant \frac{10}{7} \Leftrightarrow -\frac{3}{7} < x \leqslant \frac{17}{7}$$

$$\log_5(7x+3) = \frac{\ln 10}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7^n}{10^n}\frac{(x-1)^n}{n}, \quad -\frac{3}{7} < x \leqslant \frac{17}{7}.$$

9) Разложить функцию $f(x) = (4+x)^{\frac{1}{4}}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и указать область сходимости.
Пусть $t = x - 2$.

$$(4+x)^{\frac{1}{4}} = (6+t)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{t}{6}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 6^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{t}{6}\right)^n\right), \quad -1 < \frac{t}{6} < 1$$

$$= 6^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{x-2}{6}\right)^n\right), \quad \left\{\begin{array}{l} -6 < x-2 < 6 \\ \Leftrightarrow -4 < x < 8. \end{array}\right.$$