3.4 Тригонометрические ряды Фурье

Общий ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E имеет вид (252):

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n, \qquad \text{где } C_n = (f, \varphi_n). \tag{273}$$

Рассмотрим пространство $L_2(-\pi, \pi)$ со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\psi(x)dx. \tag{274}$$

Возьмем тригонометрическую систему функций
$\{\varphi_n\} = \Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots\ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \ldots\ldots \Big\}$,
которая является ортонормированной в $L_2(-\pi, \pi)$ (ортонормированность ранее уже проверялась, формула (251)).

Теорема 38 (Теорема о полноте системы тригонометрических функций)
Система тригонометрических функций

$$\{\varphi_n\} = \Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots\ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \ldots\ldots \Big\} \tag{275}$$

полна в $L_2(-\pi, \pi)$.
Без доказательства.

Напишем ряд Фурье для функции $f \in L_2(-\pi, \pi)$ по ортонормированной системе функций (275):

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n. \tag{276}$$

Рассмотрим один из членов ряда Фурье, содержащий функцию $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$. Соответствующий коэффициент Фурье имеет вид:

$$C_n = (f, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\ dx. \tag{277}$$

Следовательно, слагаемое ряда Фурье таково:

$$(f, \varphi_n)\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx = \Big(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \Big) \cos nx. \tag{278}$$

Проводя аналогичные преобразования с другими членами ряда, получаем **тригонометрический ряд Фурье**:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{279}$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{280}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.. \tag{281}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.. \tag{282}$$

3.5 Сходимость рядов Фурье. Теорема Дирихле

Если функция $f(x)$ непрерывна (или хотя бы кусочно-непрерывна) на отрезке $[-\pi, \pi]$, то можно говорить о ряде Фурье для этой функции и его сходимости. Обычно сумма ряда Фурье функции $f(x)$ существует и равна самой функции $f(x)$, но может оказаться, что ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ не сходится вовсе или же сходится, но к какой-нибудь другой функции.

На вопросы сходимости отвечает теорема Дирихле. Но перед этим введем некоторые понятия.

Определение
Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок разбивается на конечное число отрезков

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \ldots.., [x_n, b],$$

в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

В теории пределов было доказано, что монотонная функция всегда имеет предел: конечный или бесконечный. Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна на отрезке $[a, b]$, то в любой внутренней точке этого отрезка существуют левый и правый пределы её значений:
$\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = f(c-0)$,
$\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$.

Теорема 39 (Теорема Дирихле)
Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и является на нем кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной. Тогда её тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$, причем сумма ряда $S(x)$ такова: во всех точках непрерывности этой функции

$$S(x) = f(x), \tag{283}$$

а во всех точках разрыва

$$S(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)). \tag{284}$$

На краях отрезка сумма ряда равна:

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)). \tag{285}$$

Без доказательства.

3.6 Изменение сегмента разложения

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье на произвольном отрезке $[a, b]$. Сделаем это в 2 этапа.

1. Сдвиг сегмента разложения

Лемма

Для любой периодической функции φ с периодом T будет выполнено:

$$\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x)dx = \int\limits_{a}^{a+T} \varphi(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{286}$$

Доказательство:

$$\int\limits_{a}^{a+T} \varphi(x)dx = \int\limits_{a}^{-\frac{T}{2}} \varphi(x)dx + \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x)dx + \int\limits_{\frac{T}{2}}^{a+T} \varphi(x)dx.$$

Сделаем замену: $y = x - T \Leftrightarrow x = y + T$.
Тогда:

$$\int\limits_{\frac{T}{2}}^{a+T} \varphi(x)dx = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{a} \varphi(y+T)dy = \Big/ \varphi(y+T) = \varphi(y) \Big/ = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{a} \varphi(y)dy = -\int\limits_{a}^{-\frac{T}{2}} \varphi(y)dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{a}^{a+T} \varphi(x)dx = \int\limits_{a}^{-\frac{T}{2}} \varphi(x)dx + \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x)dx - \int\limits_{a}^{-\frac{T}{2}} \varphi(y)dy = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x)dx.$$

■

Лемма показывает, что система функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной не только на отрезке $[-\pi, \pi]$, но и на любом отрезке вида $[a, a + 2\pi]$, так как понятие ортонормированности определялось с помощью интегралов, которые не изменяют своего значения при сдвиге сегмента.

Таким образом, при вычислении коэффициентов Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно интегрировать по любому другому отрезку вида $[a, a + 2\pi]$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\ dx, \tag{287}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\; dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\; dx. \tag{288}$$

2. Изменение длины сегмента разложения

Разложим функцию $f(x)$ на произвольном отрезке вида $[a, a+2l]$. Сделаем замену переменной:

$$x = \frac{l}{\pi}t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\pi}{l}x. \tag{289}$$

Тогда функция $f(x) = f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)$ будет как функция от t задана на отрезке $\Big[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l} + 2\pi\Big]$, длина которого 2π. Для этой функции будет справедливо разложение в ряд Фурье (279):

$$f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nt + b_n \cdot \sin nt), \tag{290}$$

где коэффициенты Фурье находится по формулам (287), (288):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l}+2\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)\cdot\cos nt\; dt, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots \tag{291}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l}+2\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)\cdot\sin nt\; dt, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots \tag{292}$$

Так как $f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)$ – это 2π-периодическая функция, то можно сдвинуть промежуток интегрирования:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)\cdot\cos nt\; dt, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots \tag{293}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)\cdot\sin nt\; dt, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots \tag{294}$$

Сделаем обратную замену $t = \frac{\pi}{l}x$ в формулах (290), (293), (294) и получим разложение функции $f(x)$ на произвольном отрезке $[a, a+2l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\Big), \tag{295}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \tag{296}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}xdx. \tag{297}$$

3.7 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Четные и нечетные функции

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то есть является на $[-\pi,\pi]$ кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной. Условие кусочной непрерывности и ограниченности означает, что на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция может иметь лишь конечное число разрывов типа скачка.

Рассмотрим 2 частных случая функции $f(x)$:

1) Если функция четная, то $f(-x)=f(x)$ и выполнено:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx. \tag{298}$$

$$\Big/ \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \Big/ \text{Замена: } {\scriptstyle x=-y \atop dx=-dy} \Big/ =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} f(-y)d(-y) + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \Big/ f(-y)=f(y) \Big/ =$$

$$= -\int\limits_{\pi}^{0} f(y)dy + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} f(y)dy + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx \Big/$$

2) Если функция нечетная, то $f(-x)=-f(x)$ и выполнено:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0. \tag{299}$$

$$\Big/ \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \Big/ \text{Замена: } {\scriptstyle x=-y \atop dx=-dy} \Big/ =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} f(-y)d(-y) + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \Big/ f(-y)=-f(y) \Big/ =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} f(y)dy + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = 0 \Big/$$

Замечание

Четность функций изменяется при их дифференцировании и интегрировании.

Разложение четной функции в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi,\pi]$, удовлетворяет условиям Дирихле и является четной. Тогда $f(x)\cdot\sin nx$ – нечетная функция и выполнено:

$$b_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\;dx = 0. \tag{300}$$

$f(x) \cdot \cos nx$ будет четной функцией. Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье примет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx, \tag{301}$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,. \tag{302}$$

Такое разложение в ряд Фурье называется разложением функции $f(x)$ **в ряд "по косинусам".**

Разложение нечетной функции в ряд Фурье
Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условиям Дирихле и является нечетной. Тогда $f(x) \cdot \cos nx$ – тоже нечетная функция и выполнено:

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = 0. \tag{303}$$

$f(x) \cdot \sin nx$ будет четной функцией. Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье примет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx, \tag{304}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\,. \tag{305}$$

Такое разложение в ряд Фурье называется разложение функции $f(x)$ **в ряд "по синусам".**

3.8 Разложение в ряд Фурье функций на отрезке $[0, \pi]$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, \pi]$. Разложим её в ряд Фурье на этом отрезке. Для этого нужно доопределить $f(x)$ на $[-\pi, 0]$. Мы получим функцию, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$. Так как функция $f(x)$ в реальности задана только на отрезке $[0, \pi]$, то и полученный ряд Фурье нужно рассматривать только для тех значений x, которые расположены на отрезке $[0, \pi]$.

Очевидно, что получившийся ряд будет зависеть от того, как именно мы произведем доопределение на $[-\pi, 0]$. Рассмотрим 2 варианта.
1) Продолжим функцию $f(x)$ четным образом:

$$f(-x) = f(x), \quad 0 \le x \le \pi.$$

Тогда мы получим четную функцию, которая раскладывается в ряд по косинусам.
2) Продолжим функцию $f(x)$ нечетным образом на $(-\pi, 0)$:
$f(-x) = -f(x),\ 0 < x < \pi.$

Возьмем $f(-\pi) = -f(\pi)$. Полученная функция будет нечетной или, возможно, отличается от нечетной в точке $x = 0$ (если $f(0) \neq -\lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$). Однако, изменение значения функции в одной точке не влияет на значение интеграла от неё. Таким образом, мы получим нечетную функцию, которая раскладывается в ряд по синусам.

Два различных ряда Фурье получились, так как мы раскладывали в ряды различные функции на $[-\pi, \pi]$. Однако на отрезке $[0, \pi]$ эти функции совпадают. Если не рассматривать значения аргумента из промежутка $[-\pi, 0)$, то мы получили два различных разложения для функции $f(x)$ на промежутке $[0, \pi]$.

Пример 1

Пусть функция $f(x) = x$ задана на отрезке $[0, \pi]$. Разложим её в ряд Фурье по косинусам. Для этого продолжим функцию $f(x)$ четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$:

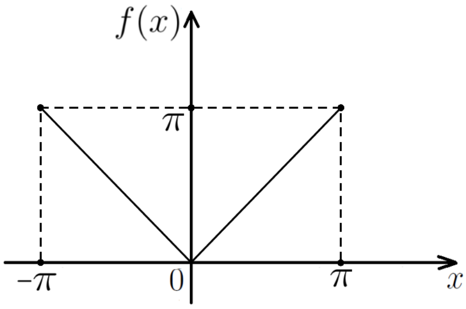

Рис. 4: Функция $f(x)$ продолжена четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$

Полученную функцию продолжим периодически:

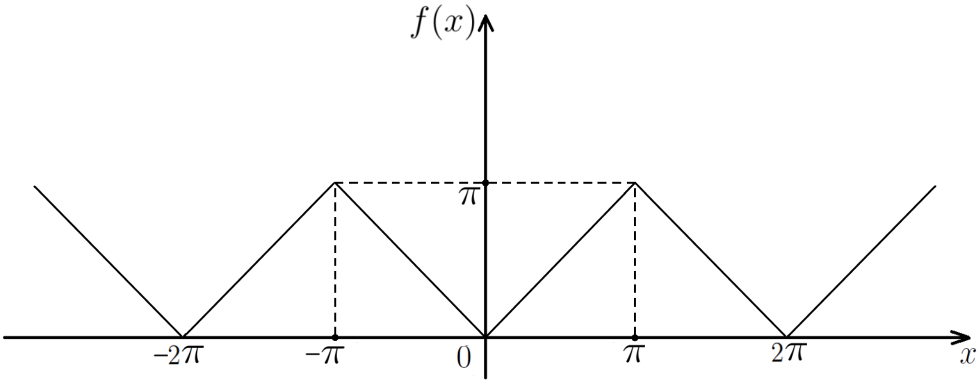

Рис. 5: Периодически продолженная функция

Обозначим за $S(x)$ сумму ряда. Тогда ряд Фурье для продолженной функции будет иметь следующий вид:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx,$$

$$\text{где}\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\;dx = \underbrace{\frac{2}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\;dx =$$

$$\Bigg/\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = \dfrac{1}{n}\sin nx & dv = \cos nx\;dx \end{array}\Bigg/$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\underbrace{\cos\pi n}_{=(-1)^n} - 1) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \qquad \text{– верно при } n \neq 0.$$

Отдельно рассмотрим случай $n = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Разложение функции $f(x) = x$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \pi]$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cdot\cos nx. \tag{306}$$

График суммы ряда $S(x)$ совпадает с графиком продолженной функции $f(x)$. Это следует из теоремы Дирихле, так как функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 2
Разложим функции $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0, \pi]$, в ряд Фурье по синусам. Для этого продолжим функцию $f(x)$ нечетным образом на интервал $(-\pi, 0)$.

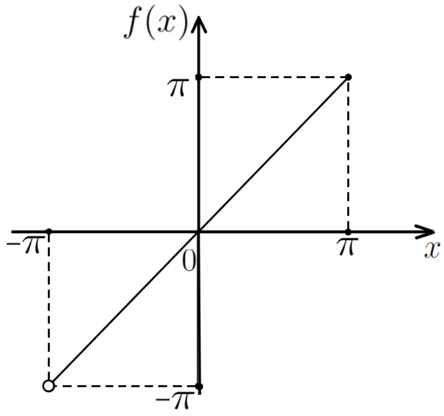

Рис. 6: Функция $f(x)$ продолжена нечетным образом на интервал $(-\pi, 0)$

Полученную функцию продолжим периодически:

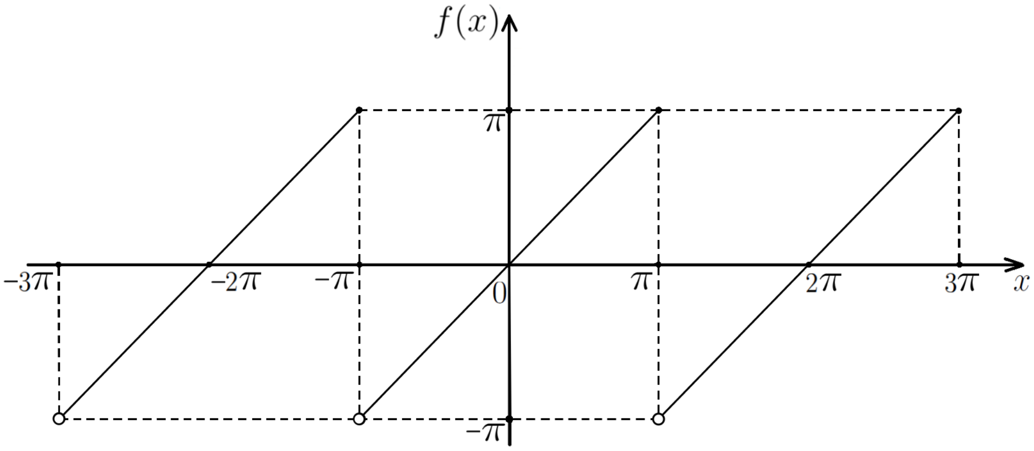

Рис. 7: Периодическая функция

Ряд Фурье для продолженной функции будет иметь следующий вид:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx, \quad \text{где} \;\; b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin nx \; dx.$$

Здесь за $S(x)$ мы обозначили сумму ряда.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin nx \; dx = -\frac{2}{\pi n} x \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int\limits_0^{\pi} \cos nx \; dx =$$

$$\Bigg/ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ v = -\dfrac{1}{n}\cos nx & dv = \sin nx \; dx \end{matrix} \Bigg/$$

$$= -\frac{2}{n} \underbrace{\cos \pi n}_{=(-1)^n} + \underbrace{\frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi}}_{=0} = -\frac{2}{n}(-1)^n.$$

Разложение функции $f(x) = x$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, \pi]$:

$$S(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin nx = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \neq \pi n, \\ 0 & \text{при } x = \pi n. \end{cases} \tag{307}$$

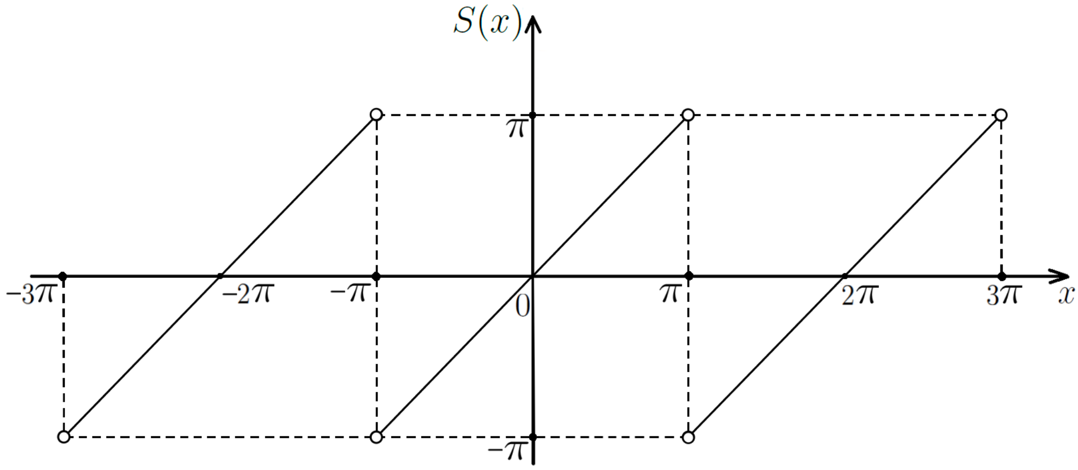

Рис. 8: График суммы ряда $S(x)$

Ряд сходится к $f(x)$ в точках непрерывности и к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в точках разрыва.

3.9 Разложение функции в показательный ряд Фурье

Запишем тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{308}$$

Формулы Эйлера позволяют перейти от тригонометрических функций к экспонентам с комплексными показателями:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i\frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}. \tag{309}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot i \cdot \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}\Big). \tag{310}$$

Приведем подобные члены, объединив степени с одинаковыми показателями:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}\Big). \tag{311}$$

Введем обозначения:

$$\frac{a_0}{2} = C_0, \qquad \frac{a_n - b_n i}{2} = C_n, \qquad \frac{a_n + ib_n}{2} = C_{-n}. \tag{312}$$

Тогда получим:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \cdot e^{-inx} \;\Leftrightarrow\; f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx}. \tag{313}$$

Мы получили разложение функции в **показательный ряд Фурье** (ряд Фурье в комплексной форме). Коэффициенты этого ряда:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(\cos nx - i\sin nx)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(\cos(-nx) + i\sin(-nx))dx = \Big/ e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \Big/ \tag{314}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} C_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\underbrace{(\cos nx + i\sin nx)}_{e^{inx}}dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-i(-n)x}dx. \end{aligned} \tag{315}$$

Формулы (314) и (315) можно объединить в одну:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx \tag{316}$$

– коэффициенты ряда Фурье (313), записанного в комплексной форме.

3.10 Интеграл Фурье

Изложение теории рядов Фурье мы закончим исследованием предельного случая, когда промежуток $(-l, l)$, в котором изучается ряд Фурье, стремится к $(-\infty, +\infty)$, то есть $l \to +\infty$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и непрерывна во всяком конечном промежутке. Предположим также, что $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то есть существует интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = M < +\infty. \tag{317}$$

По теореме Дирихле внутри $(-l, l)$ мы имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big). \tag{318}$$

Учитывая выражения для коэффициентов Фурье (315), (316):

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt, \tag{319}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}dt, \tag{320}$$

формулу (318) можно записать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{\pi n t}{l}dt\right)\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\sin\frac{\pi n t}{l}dt\right)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\Big(\cos\frac{\pi n}{l}t\cos\frac{\pi n}{l}x + \sin\frac{\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x\Big)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt. \tag{321}$$

Посмотрим, то произойдет с формулой (321) при $l \to +\infty$. Нетрудно убедиться в том, что первое слагаемое стремится к нулю:

$$\Big|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt\Big| \le \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}|f(t)|dt \le \frac{1}{2l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \frac{M}{2l}\underset{l\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{322}$$

Введем новую переменную α, которая принимает равноотстоящие значения в промежутке $(0,\infty)$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l},\;\alpha_2 = \frac{2\pi}{l},\;\ldots\ldots,\;\alpha_n = \frac{n\pi}{l},\;\ldots\ldots \tag{323}$$

Тогда приращения $\Delta\alpha_n$ примут вид:

$$\Delta\alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l} = \Delta\alpha, \tag{324}$$

то есть $\frac{1}{l} = \frac{1}{\pi}\cdot\Delta\alpha$. Тогда второе слагаемое в формуле (321) можно записать в виде:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_n(t-x)dt. \tag{325}$$

При больших l интеграл, стоящий под знаком суммы, мало отличается от

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos\alpha_n(t-x)dt. \tag{326}$$

Нетрудно увидеть, что выражение (325) представляет собой интегральную сумму и при $l \to +\infty$ будет стремится к пределу

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \tag{327}$$

Итак, получаем окончательный результат для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\alpha \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \tag{328}$$

В точках разрыва непрерывности (если такие есть) нужно заменить $f(x)$ на $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Формула (328), которую мы получили из ряда Фурье при $l \to +\infty$, называется **формулой Фурье**. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 40 (Теорема Фурье)
Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле во всяком конечном промежутке и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то при всех x имеет место равенство:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\alpha \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}. \tag{329}$$

Интеграл, стоящий в левой части формулы, называется интегралом Фурье функции $f(x)$.

Замечание
Приведенные выше рассуждения по доказательству теоремы Фурье не являются строгими, но объясняют способ перехода от ряда Фурье к интегралу Фурье. В обосновании нуждается переход от "интегральной" суммы к несобственному интегралу $\int\limits_0^\infty d\alpha \ldots\ldots$

3.11 Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

Воспользуемся формулами Эйлера и преобразуем интеграл Фурье (329) к комплексной форме:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Bigg(\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)dt\Bigg)d\alpha =$$

$$\Bigg/ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \cos\alpha(t-x) = \frac{e^{i\alpha(t-x)}+e^{-i\alpha(t-x)}}{2} \Bigg/$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \Bigg(\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\Bigg)d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \Bigg(\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\Bigg) =$$

$\Big/$Заменим в первом слагаемом переменную в интеграле: $\tilde{\alpha} = -\alpha,\ d\tilde{\alpha} = -d\alpha\Big/$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{-\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\tilde{\alpha}(t-x)}dt\Bigg)d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\Bigg)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\tilde{\alpha}(t-x)}dt\Bigg)d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\Bigg)d\alpha =$$

$$= \Big/\text{аддитивность интеграла}\Big/ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\Bigg)d\alpha. \tag{330}$$

Полученная формула называется разложением функции $f(x)$ в **интеграл Фурье в комплексной форме.**

Преобразование Фурье

Интеграл Фурье в комплексной форме (330) может быть истолкован на языке операторов (преобразований).

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция. Тогда формулу (330) можно переписать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\Bigg)d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\Bigg(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt\Bigg)}_{F(\alpha)}e^{i\alpha x}d\alpha. \tag{331}$$

Функция $F(\alpha)$ называется **преобразованием Фурье** функции $f(t)$:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt. \tag{332}$$

Тогда формула (331) примет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha. \tag{333}$$

Формула (333) определяет **обратное преобразование Фурье**.

Основное применение преобразования Фурье – это решение дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных.