Глава 2. Кратные интегралы

2.1 Мера Жордана

Двойной интеграл определяется по аналогии с обычным определенным интегралом. При введении определенного интеграла мы разбивали промежуток интегрирования $[a, b]$ на элементарные части. Здесь будем разбивать на элементарные части область Ω. Нам понадобится понятие площади области.

Замечание

Область – это открытое связное множество. Мы будем определять площадь множества, не обязательно являющегося областью. Например, множество может состоять из нескольких несвязных частей и быть замкнутым.

Разобьем плоскость XOY сеткой координатных линий с шагом h. Мы получим покрытие множества Ω сеткой равных квадратов.

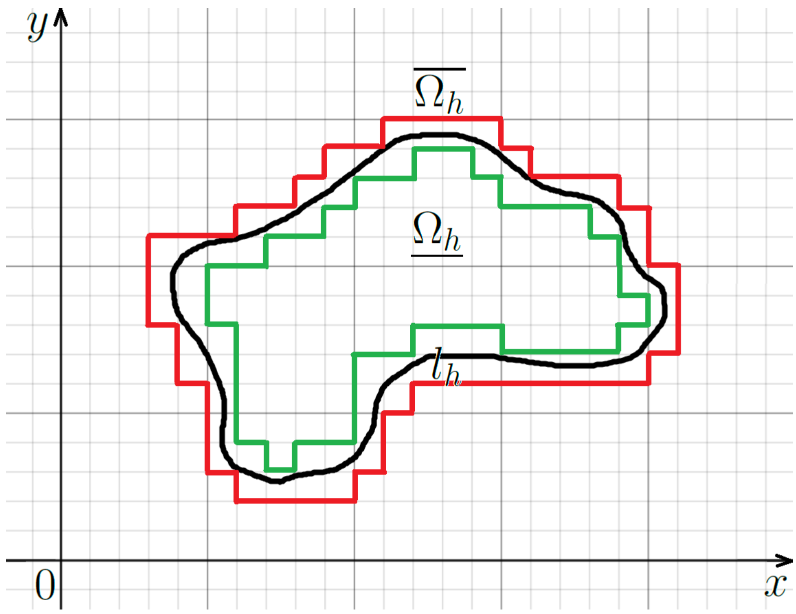

Рис. 8: Разбиение области

Обозначим за $\underline{\Omega_h}$ множество тех квадратов, которые полностью лежат внутри Ω. Границу области $\partial\Omega$ обозначим за l. Пусть l_h – это множество квадратов, которые имеют общие точки с l.

Обозначим за $\overline{\Omega_h}$ объединение областей $\underline{\Omega_h}$ и l_h : $\overline{\Omega_h} = \underline{\Omega_h} \cup l_h$.
Площадь элементарного квадрата считаем известной: она равна h^2. Пусть $\underline{S_h}$ – сумма площадей квадратов, входящих в $\underline{\Omega_h}$, $\overline{S_h}$ – сумма площадей квадратов из $\overline{\Omega_h}$ соответственно.

Определение

Точная верхняя граница $\underline{S}$ множества чисел $\underline{S_h}$ называется внутренней мерой Ω, точная нижняя граница $\overline{S}$ множества $\overline{S_h}$ – внешней мерой Ω.

Теорема 1

Если сторона квадрата $h \to 0$, то выполнено:

$$\underline{S_h} \to \underline{S}, \quad \overline{S_h} \to \overline{S}. \tag{2.1}$$

Определение

Множество Ω называется квадрируемым, если:

$$\underline{S} = \overline{S} = S. \tag{2.2}$$

S называется мерой Жордана множества Ω или площадью Ω и обозначается: $m(\Omega) = S$.

Теорема 2

Для квадрируемости множества Ω необходимо и достаточно, чтобы площадь границы l этого множества была равна нулю, то есть сумма площадей квадратов, имеющих общие точки с l, стремилась к нулю при $h \to 0$:

$$S(l_h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \tag{2.3}$$

Замечание

Можно доказать, что мера множества Ω не зависит от выбора осей координат на плоскости. При повороте и сдвиге системы координат сетка квадратов, покрывающих Ω, изменится. Однако, площадь не изменится.

Замечание

В случае пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ все построения повторяются. Здесь роль квадратов будут играть n-мерные кубы: $a_s \leq x_s \leq a_{s+h}$. Объем куба (меру Жордана для куба) считаем известным и равным h^n.

Утверждение

Мера – аддитивная функция множества. Если Ω_1 и Ω_2 квадрируемы и не пересекаются $(\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing)$, то множество $\Omega_1 \cup \Omega_2$ – квадрируемо и выполнено:

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) \cup m(\Omega_2). \tag{2.4}$$

2.2 Двойной интеграл

Пусть Ω – ограниченная квадрируемая область (множество), $f(P)$ – ограниченная функция, определенная на Ω и ее границе. Разобьем Ω на конечное число квадрируемых попарно непересекающихся областей Ω_k. Тогда по свойству аддитивности меры будет выполнено:

$$m(\Omega_1) + m(\Omega_2) + \ \ldots \ + m(\Omega_n) = m(\Omega). \tag{2.5}$$

В каждой из областей Ω_k выберем произвольную точку P_k. Обозначим диаметры областей $\Omega_1, \Omega_2, \ \ldots, \ \Omega_n$ за $d_1, d_2, \ \ldots, \ d_n$. Напомним, что диаметром области называется наибольшее расстояние между двумя точками границы области.

Определение

Функция $f(P)$ называется интегрируемой по Ω, если существует конечный предел интегральных сумм

$$\lim_{\max\limits_k d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right) m\left(\Omega_k\right), \tag{2.6}$$

не зависящий от способа разбиения области Ω и выбора точек P_k. Этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(P)$ по области Ω и обозначается:

$$\iint\limits_{\Omega} f\left(P\right) d\Omega. \tag{2.7}$$

2.3 Интегрируемые функции

Сформулируем условие интегрируемости функции. Пусть m_k и M_k – точные нижняя и верхняя границы значений функции $f(P)$ на области Ω_k, включая ее границу.

Определение

Следующие величины назовем нижней и верхней суммами Дарбу:

$$\underline{I_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot m(\Omega_k), \tag{2.8}$$

$$\overline{I_n} = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot m(\Omega_k). \tag{2.9}$$

$\underline{I_n}$ и $\overline{I_n}$ зависят только от разбиения области Ω, при этом будут выполнены следующие неравенства:

$$\underline{I_n} \leq \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot m(\Omega_k) \leq \overline{I_n}. \tag{2.10}$$

Теорема 3

Ограниченная функция $f(P)$ интегрируема по Ω тогда и только тогда, когда выполнено:

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot m(\Omega_k) \xrightarrow[\max\limits_k d_k \to 0]{} 0. \tag{2.11}$$

Обозначения

$\overline{I} = \inf\limits_n \overline{I_n}$ – инфимум верхней суммы Дарбу.

$\underline{I} = \sup\limits_n \overline{I_n}$ – супремум нижней суммы Дарбу.

Утверждение

Если условие (2.11) выполнено, то $\underline{I} = \overline{I} = I$, которое и дает значение интеграла.

Замечание

Если $f(P) \equiv 1$, то $\iint\limits_{\Omega} d\Omega = m\,(\Omega)\,.$

Свойства интегрируемых функций

1) Если функция $f(P)$ непрерывна на замыкании ограниченного открытого множества Ω, то она интегрируема. Более того, если множество точек разрыва ограниченной функции имеет меру нуль, то функция $f(P)$ интегрируема.

2) Если функция $f(P)$ интегрируема на Ω и мы изменим ее значения на множестве меры нуль, сохраняя ограниченность функции, то новая функция тоже будет интегрируема и величина интеграла при этом не изменится.

3) Если $f(P)$ интегрируема на Ω и область Ω разбита на конечное число попарно непересекающихся квадрируемых областей, то $f(P)$ интегрируема по каждой из них и интеграл по Ω равен сумме интегралов по подобластям.

2.4 Вычисление двойного интеграла

1) Прямоугольная область интегрирования.

Пусть область ограничена прямоугольником D :

$x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d.$

Предположим также, что существуют интегралы:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy, \tag{2.12}$$

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy, \tag{2.13}$$

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right). \tag{2.14}$$

Разобьем область D прямоугольной сеткой:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d.$

Получившиеся прямоугольники разбиения обозначим за D_{ik}. Точную нижнюю и верхнюю границы $f(x,y)$ на прямоугольнике D_{ik} обозначим за m_{ik} и M_{ik} соответственно. Пусть $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \triangle y_i = y_{i+1} - y_i$. Тогда:

$$m_{ik} \le f(x,y) \le M_{ik}.$$

Проинтегрируем это неравенство по y от y_k до y_{k+1} :

$$m_{ik} \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy \le M_{ik} \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; m_{ik}\triangle y_k \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy \le M_{ik}\triangle y_k,$$

где $x_i \le x \le x_{i+1}$. Интеграл $\int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy$ существует, так как существует интеграл (2.13). Складывая неравенства по всем $k: \; k = 0, 1, \; \ldots, \; m$, получим:

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\triangle y_k \le \int\limits_c^d f(x,y)dy \le \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\triangle y_k.$$

Получившееся неравенство проинтегрируем по x от x_i от x_{i+1} :

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\triangle y_k\triangle x_i \le \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \le \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\triangle y_k\triangle x_i.$$

Отметим, что интеграл $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ существует, так как существует интеграл (2.14). Просуммировав неравенства по всем i, получим:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\triangle y_k\triangle x_i \le \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\triangle y_k\triangle x_i. \tag{2.15}$$

Произведения $\triangle y_k\triangle x_i$ дают площадь прямоугольников разбиения D_{ik}. Тогда левая и правая части неравенства (2.15) представляют собой интегральные суммы. В пределе при измельчении разбиения обе интегральных суммы будут стремится к $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Тогда по теореме о сжатой переменной (правило двух миллиционеров) будет выполнено:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (2.16)$$

Замечание

Если функция $f(P)$ непрерывна, то интегралы (2.12) и (2.13) существуют и интеграл (2.13) будет непрерывной функцией, то есть будет существовать интеграл (2.14).

2) Пусть область σ ограничена кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$.

Предположим также, что существуют интегралы:

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)dxdy, \quad \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \quad \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Введем прямоугольную область D следующим образом:

$c < \varphi_1(x),\ d > \varphi_2(x)$. Очевидно, что $\sigma \subset D$.

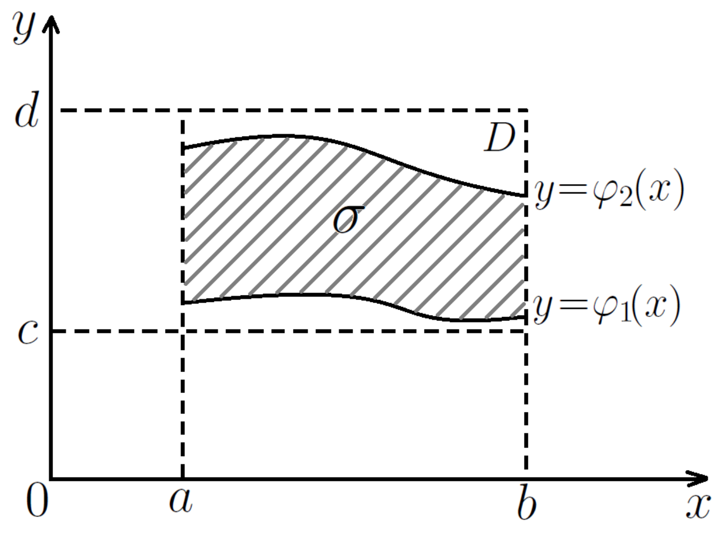

Рис. 9: Область σ, помещенная в прямоугольник D

Определим функцию $f_1(x,y)$ по правилу:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in \sigma, \\ 0, & (x,y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Функция $f_1(x,y)$ будет интегрируема по области σ (ибо по предположению $f(x,y)$ интегрируема по σ), а также по области $D \setminus \sigma$ (так как 0 интегрируем по любой квадрируемой области). Следовательно, функция $f_1(x,y)$ интегрируема по D и выполнено:

$$\iint\limits_{D} f_1(x,y)dxdy = \iint\limits_{\sigma} \underbrace{f_1(x,y)}_{=f(x,y)} dxdy + \iint\limits_{D\setminus\sigma} \underbrace{f_1(x,y)}_{=0} dxdy = \iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy. \tag{2.17}$$

С другой стороны:

$$\int\limits_{c}^{d} f_1(x,y)dy = \int\limits_{c}^{\varphi_1(x)} \underbrace{f_1}_{=0} dy + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \underbrace{f_1}_{=f} dy + \int\limits_{\varphi_2(x)}^{d} \underbrace{f_1}_{=0} dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{2.18}$$

Функция $f_1(x,y)$ определена в прямоугольной области D, следовательно, для нее применима формула (2.16):

$$\iint\limits_{D} f_1(x,y)dxdy = \iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f_1(x,y)dy. \tag{2.19}$$

Таким образом, мы свели двойной интеграл к повторному для области с криволинейной границей:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{2.20}$$

Замечание

Аналогично доказывается формула для тройного интеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2.21}$$

Теорема 4 (**Теорема о среднем значении**)

Пусть функция $f(x,y)$ задана и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда существует точка $(x^*, y^*) \in D$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x^*, y^*) \cdot S_D. \tag{2.22}$$

<u>Доказательство:</u>

Функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области. Следовательно, по первой теореме Вейерштрасса она ограничена, то есть: $\exists\ m, M:\ \ m \le f(x,y) \le M$. Проинтегрировав это неравенство по области D, получим:

$$m \underbrace{\iint\limits_D dxdy}_{=S_D} \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M \underbrace{\iint\limits_D dxdy}_{=S_D}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \mu S_D, \quad \text{где } m \le \mu \le M.$$

Согласно второй теореме Больцано-Коши, непрерывная функция должна принимать все промежуточные значения между m и M, а значит и значение μ. Таким образом, $\exists\ (x^*, y^*):\ \ f(x^*, y^*) = \mu$.

■

2.5 Замена переменных в двойном интеграле

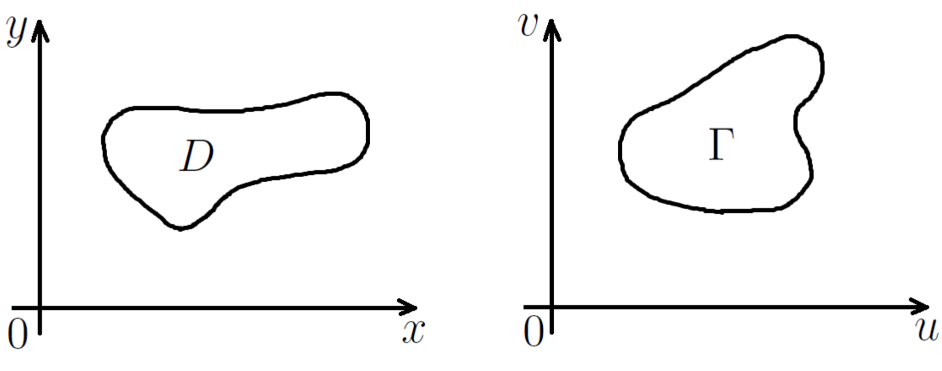

Рис. 10: Области D и Γ

Рассмотрим область D, заданную в декартовых координатах (x, y). Введем новые криволинейные координаты (u, v) по следующему правилу:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \qquad (2.23)$$

где $x(u, v),\ y(u, v)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области Γ на плоскости (u, v). Пусть формула (2.23) задает взаимно однозначное соответствие между областями D и Γ. Введем определитель J по следующему правилу:

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \qquad (2.24)$$

Теорема 5

Формула (2.23) дает взаимно однозначное соответствие областей D и Γ тогда и только тогда, когда якобиан $J \neq 0$ на области Γ. При этом внутренним точкам области Γ соответствуют внутренние точки D, а любая кривая в области Γ переходит в кривую в области D.

Если точка $(u, v) \in \Gamma$ описывает замкнутый контур в положительном направлении (против часовой стрелки), то соответствующая точка $(x, y) \in D$ также будет описывать замкнутый контур, но направление обхода будет зависеть от знака якобиана J. Если $J > 0$, то направление обхода сохранится (останется положительным), если $J < 0$, то поменяется на противоположное.

Определение

Кривые в области D :

$$\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \end{cases}, \text{ где } v_0 = const \text{ и } \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \end{cases}, \text{ где } u_0 = const$$

называются координатными линиями.

Таким образом, возникает два семейства координатных линий. Вместе они образуют координатную сетку.

Пример 1

Отображение декартовых координат в полярные:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \quad \rho \geq 0 \tag{2.25}$$

является взаимно однозначным во всех точках, кроме начала координат $(0,0)$, так как в точке $(0,0)$ полярный угол φ не определен. Максимальные пределы изменения (ρ,φ) :

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{2.26}$$

При изменении ρ, φ в указанных пределах мы получим всю плоскость XOY. Координатные линии в полярным координатах состоят из лучей $\varphi = const$ и окружностей $\rho = const$.

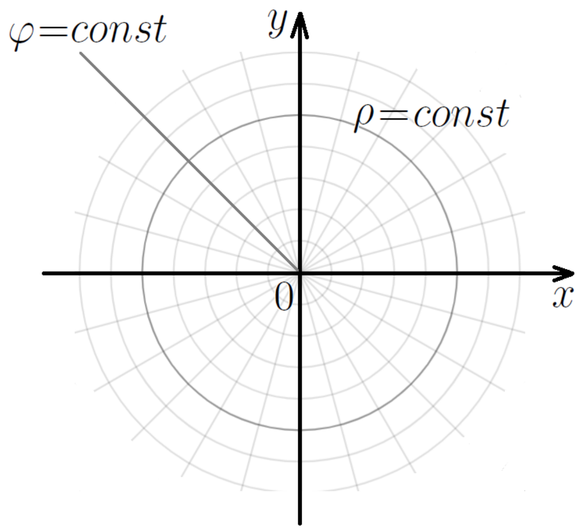

Рис. 11: Координатные линии $\varphi = const$ и $\rho = const$

Якобиан перехода к новым переменным:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \geq 0, \tag{2.27}$$

то есть направление обхода контура сохраняется во всех точках кроме начала координат $(0,0)$ (где угол φ не определен).

Пример 2

Преобразование инверсии

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2}, \\ y = \frac{v}{u^2+v^2}, \end{cases} \tag{2.28}$$

является взаимно однозначным всюду кроме точки $(0,0)$, у которой не определен образ в системе координат (u,v) (в точке $(0,0)$ координаты u и v должны обращаться в бесконечность). Убедимся в том, что это преобразование инверсии. Для этого нужно проверить следующие свойства:

1) Точка после преобразования лежит на том же луче, выходящем из $(0,0)$, что и исходная точка.

2) Произведение расстояний исходной и преобразованной точек от начала координат равно 1.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

то есть $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2} = 1$, что доказывает свойство 2.

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{1}{u^2+v^2} \ \Rightarrow\ \frac{y}{x} = \frac{v}{u} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, точки (x,y) и (u,v) лежат на одном луче, выходящем из начала координат $(0,0)$ под углом α. Итак, свойство 1 также проверено, то есть это преобразование инверсии.

Теперь найдем обратное преобразование инверсии.

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} = \Big/ u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \Big/ = \frac{u(x^2+y^2)}{1} \Rightarrow u = \frac{x}{x^2+y^2}, \tag{2.29}$$

$$y = \frac{v}{u^2+v^2} = v(x^2+y^2) \ \Rightarrow\ v = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{2.30}$$

Таким образом, обратное преобразование инверсии также оказывается инверсией. Если мы зафиксируем по-очереди u и v в формулах (2.29) и (2.30), то получим уравнения координатных линий:

$$x^2+y^2-\frac{1}{u_0}x = 0, \tag{2.31}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{v_0} y = 0. \tag{2.32}$$

Как видно из уравнений (2.31) и (2.32), координатные линии представляют собой окружности, проходящие через точку $(0, 0)$. При $u = 0$ получаем ось OY $(x = 0)$, при $v = 0$ получаем ось OX $(y = 0)$.

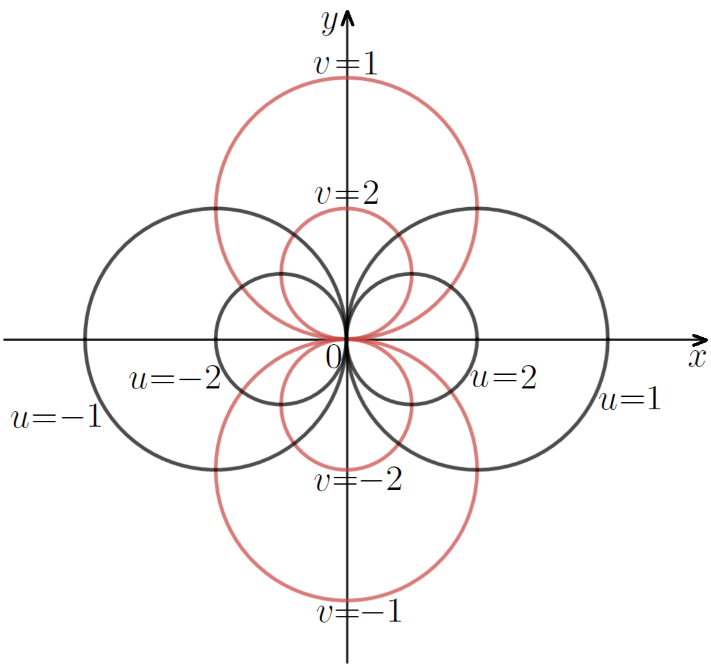

Рис. 12: Координатные линии $x^2 + y^2 - \frac{1}{u_0} x = 0$ и $x^2 + y^2 - \frac{1}{v_0} y = 0$ при разных u_0 и v_0

Для вычисления якобиана нам понадобятся выражения для производных $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$. Найдем их.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u^2 + v^2 - 2u^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2vu}{(u^2 + v^2)^2}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Тогда якобиан перехода к новым координатам:

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v^2 - u^2}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{2vu}{(u^2+v^2)^2} \\ -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2 - v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-(u^2 - v^2)^2 - 4u^2v^2}{(u^2 + v^2)^4} = \frac{-u^4 - v^4 + 2u^2v^2 - 4u^2v^2}{(u^2 + v^2)^4} =$$

$$= -\frac{(u^2 + v^2)^2}{(u^2 + v^2)^4} = -\frac{1}{(u^2 + v^2)^2} < 0, \tag{2.33}$$

то есть направление обхода контура меняется на противоположное во всех точках, кроме $(0,0)$, где отображение не определено.

2.6 Выражение площади в криволинейных координатах

В ситуациях, когда вычисление площади некоторой области D в декартовых координатах (x, y) оказывается довольно сложным делом, иногда выручает переход в криволинейные координаты (u, v).
Для подсчета площади мы будем разбивать прямоугольной сеткой не область D, а ее образ Γ на плоскости (u, v).

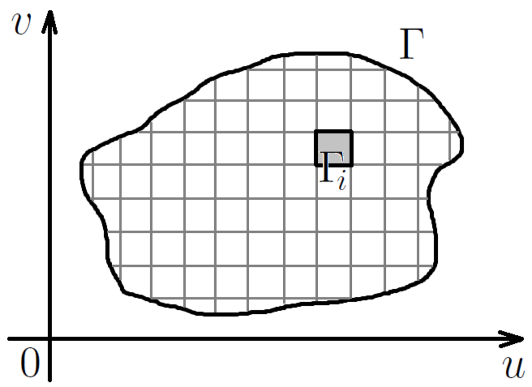

Рис. 13: Разбиение области Γ прямоугольной сеткой

Тогда на плоскости (x, y) область D окажется разбитой на малые области D_i координатными линиями криволинейной системы координат: $u = const,\ v = const$.

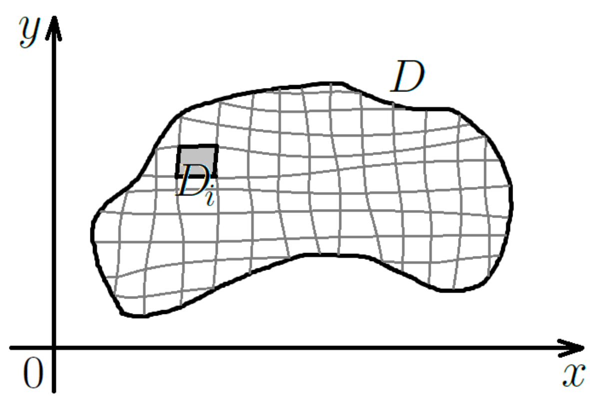

Рис. 14: Разбиение области D координатными линиями $u = const,\ v = const$

Найдем площадь элементарной области D_i. Для этого рассмотрим связь площади D_i с площадью ее праобраза Γ_i.

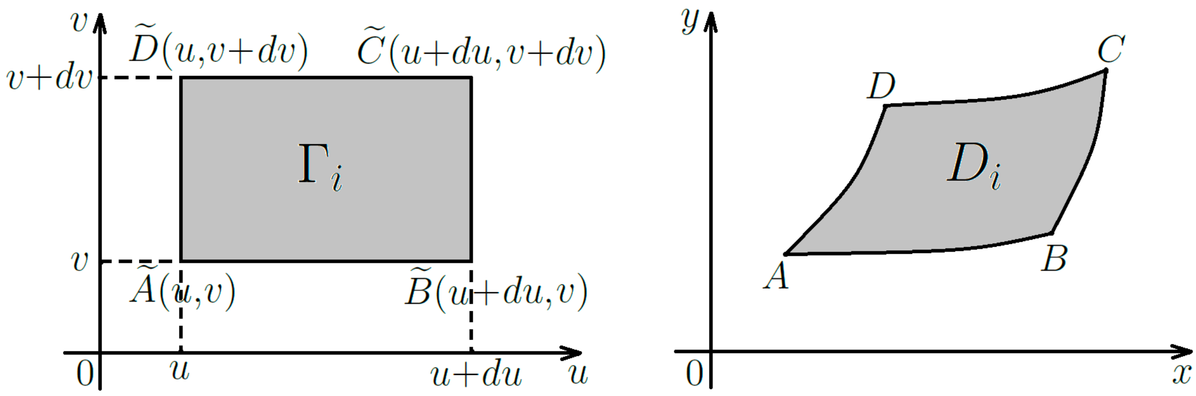

Рис. 15: Элементарные области D_i и Γ_i в увеличенном масштабе

Угловые точки области D имеют следующие координаты:

$$A\left(x(u,v),y(u,v)\right), \quad B\left(x(u+du,v),y(u+du,v)\right),$$

$$C\left(x(u+du,v+dv),y(u+du,v+dv)\right), \quad D\left(x(u,v+dv),y(u,v+dv)\right).$$

Так как разбиение мелкое, то область D можно приближенно заменить на параллелограмм с вершинами в точках:

$$A_1\left(x,y\right), \quad B_1\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}du, y+\frac{\partial y}{\partial u}du\right),$$

$$C_1\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv, y+\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right), \quad D\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}dv, y+\frac{\partial y}{\partial v}\partial v\right).$$

Здесь приращения функций $x(u,v)$, $y(u,v)$ приближенно заменили на дифференциалы:

$$x(u+du,v)=x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}du, \;\; x(u+du,v+dv)=x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv \text{ и т.д.}$$

Вычислим площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$.

$$S\left(A_1B_1C_1D_1\right)=|\overrightarrow{A_1B_1}\times\overrightarrow{A_1D_1}|=|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{B_1}-x_{A_1} & x_{D_1}-x_{A_1} & 0 \\ y_{B_1}-y_{A_1} & y_{D_1}-y_{A_1} & 0 \end{vmatrix}|=$$

$$= |\overrightarrow{k} \cdot \begin{vmatrix} x_{B_1} - x_{A_1} & x_{D_1} - x_{A_1} \\ y_{B_1} - y_{A_1} & y_{D_1} - y_{A_1} \end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{vmatrix}| =$$

$$= |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}| dudv = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv. \tag{2.34}$$

Так как область D мы считаем квадрируемой, то по теореме 2 при подсчете площади D можно не учитывать площади областей D_i, лежащих на границе D. Суммируя полученные выражения для площадей D_i, в пределе получаем формулу для площади области D :

$$S_D = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv, \tag{2.35}$$

где $J(u,v)$ – якобиан перехода к новым координатам.

Замечание

Идея метода принадлежит Остроградскому. Основная мысль состоит в том, чтобы разбивать прямоугольной сеткой не область D, а ее прообраз Γ в криволинейных координатах. При этом область D разобьется на криволинейные элементы с помощью сетки координатных линий.

Пример

Рассмотрим переход к полярным координатам.

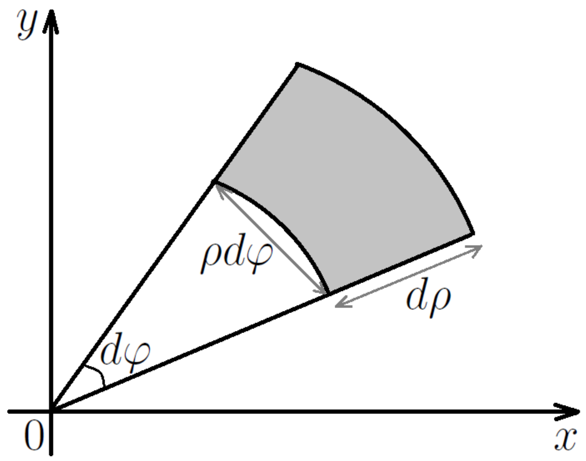

Рис. 16: Площадь сектора в полярных координатах

Прямоугольнику $(d\rho, d\varphi)$ на плоскости (ρ, φ) соответствует часть сектора на плоскости (x, y). Приблизим ее прямоугольником и получим приближенное значение площади: $\rho d\rho d\varphi$.

2.7 Замена переменных в двойном интеграле

В интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \tag{2.36}$$

заменим декартовы координаты (x, y) на криволинейные координаты $u, v\ :\ \ x = x(u, v),\ y = y(u, v)$. Функцию f считаем либо непрерывной, либо допускающей разрывы вдоль конечного числа кусочно-гладких кривых. При этом $f(x, y)$ предполагается ограниченной. Разобьем область Γ на элементарные части Γ_i на плоскости (u, v) (рисунок (13)). Тогда область D на плоскости (x, y) окажется разбитой на малые области D_i координатными линиями криволинейной системы координат: $u = const,\ v = const$ (рисунок (14)).

Замечание

Так как двойной интеграл существует, необязательно разбивать область Γ прямоугольной координатной сеткой. Подойдет разбиение любым набором кусочно-гладких кривых.

В каждой из областей D_i выберем произвольную точку (x_i, y_i) и составим интегральную сумму, стремящуюся к данному двойному интегралу:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S_{D_i}. \tag{2.37}$$

Согласно теореме 4 о среднем значении, для площади области S_{D_i} будет выполнено:

$$S_{D_i} = \iint\limits_{\Gamma_i} |J(u,v)|dudv = |J(u_i^*, v_i^*)| S_{\Gamma_i}, \tag{2.38}$$

где (u_i^*, v_i^*) – некоторая точка области Γ_i. Учитывая (2.38), формулу (2.37) можно переписать в виде:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) |J(u_i^*, v_i^*)| S_{\Gamma_i}.$$

Так как точка (x_i, y_i) выбирается произвольным образом, возьмем $x_i = x(u_i^*, v_i^*)$. Тогда:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x(u_i^*, v_i^*), y(u_i^*, v_i^*)\right) |J(u_i^*, v_i^*)| S_{\Gamma_i}, \tag{2.39}$$

то есть S_n представляет собой интегральную сумму для интеграла

$$\iint\limits_{\Gamma} f\left(x(u, v), y(u, v)\right) |J(u, v)| dudv. \tag{2.40}$$

Интеграл (2.40) существует, так как подынтегральная функция f либо непрерывна, либо допускает разрывы вдоль конечного числа кусочно-гладких кривых (изображений кривых разрыва функции $f(x, y)$). При этом $f(x, y)$ сохраняет ограниченность.

Если $\max\limits_{k} \Gamma_i \to 0$, то из непрерывности функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ получаем, что: $\max\limits_{k} D_i \to 0$. Тогда при измельчении разбиения интегральная сумма (2.39) будет стремиться как к интегралу (2.36), так и к интегралу (2.40). Следовательно, согласно определению двойного интеграла, будет иметь место равенство:

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{\Gamma} f\left(x(u, v), y(u, v)\right) |J(u, v)| dudv. \tag{2.41}$$

Таким образом, мы установили связь между двойными интегралами, записанными в декартовых и криволинейных координатах, то есть получили формулу замены переменных в двойном интеграле.

Аналогия с формулой замены переменных в определенном интеграле

$$\int\limits_{a}^{b} f(x) dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(u)) x'(u) du. \tag{2.42}$$

Прямой аналогии с двойным интегралом нет, так как под двойным интегралом стоит $|J(u, v)|$, а в одномерном случае модуль не ставится $(x'(u))$. Дело в том, что определенный интеграл берется по ориентированному промежутку, а двойной – по неориентированной области.

Можно рассмотреть ориентированные по направлению обхода контура области. Положительный обход контура – против часовой стрелки (то есть область остается слева при обходе), отрицательный – по часовой стрелке. Тогда площадь берем со знаком “+” для положительно ориентированной области и со знаком “−” для отрицательно ориентированной. При таком определении площади изменится определение двойного интеграла. Двойной интеграл по ориентированной области $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ совпадет с данным ранее определением двойного интеграла при положительной ориентации области и будет отличаться знаком при отрицательной ориентации.

Формулы вычисления площади и замены переменных в криволинейных координатах также претерпят изменения. В частности, если ориентацию областей D и Γ согласовать, то:

$$S_D = \iint\limits_\Gamma J(u,v)dudv$$

и для согласованно ориентированных областей D и Γ формула (2.41) примет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Gamma f\left(x(u,v), y(u,v)\right) J(u,v)dudv, \tag{2.43}$$

то есть будет достигнута полная аналогия с определенным интегралом.