3 Ряды Фурье

3.1 Введение

Ряды, как правило, используются для аппроксимации функций. Для приближенного вычисления значения некоторой функции в окрестности заданной точки x_0 хорошо подойдет ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$. Однако если нас интересуют значения функций на большом интервале, то это приближение работает плохо (даже в случае хорошо сходящегося ряда). Например, ряд Маклорена для $\sin x$ сходится к значению функции на всей вещественной оси. Посмотрим, легко ли будет с помощью этого ряда вычислить значение $\sin x$ при $x = 10$.
Ряд Маклорена для $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots . \tag{231}$$

Для вычисления $\sin 10$ будем последовательно выписывать частичные суммы S_n:

$$\begin{array}{l} S_1 = 10, \\ S_2 = 10 - \frac{10^3}{6} \approx 10 - 167 = -157, \\ S_3 = 10 - \frac{10^3}{6} + \frac{10^5}{120} \approx -157 + \frac{100000}{120} \approx -157 + 833 = 676, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{232}$$

что наводит на мысль о расходимости ряда для $\sin x$ при $x = 10$. На самом деле, это не так. В теории рядов Тейлора было доказано, что остаточный член ряда $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \forall x$. Это означает, что при достаточно большом n слагаемые с разными знаками сложатся и скомпенсируют друг друга, в результате чего сумма ряда даст правильное значение функции $\sin x$ при $x = 10$. Проблема в том, что для этого придется взять очень большое число слагаемых. Это связано с удаленностью точки $x = 10$ от точки 0, в окрестности который пишется разложение.

Приблизить функцию во всех точках на большом промежутке помогает другая идея: нужно приближать функцию не в окрестности точки, а в среднем на некотором интервале. На этой идее основано разложение функции в ряд Фурье. Оно родственно хорошо известному разложению вектора по базису в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан ортонормированный базис $\vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k}$. Тогда любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по этому базису:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \tag{233}$$

причем координаты вектора $a_x, \ a_y, \ a_z$ можно найти с помощью скалярного произведения:

$$a_x = (\vec{a}, \ \vec{i}), \quad a_y = (\vec{a}, \ \vec{j}), \quad a_z = (\vec{a}, \ \vec{k}). \tag{234}$$

Следовательно, разложение вектора по базису имеет вид:

$$\vec{a} = (\vec{a}, \ \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{a}, \ \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{a}, \ \vec{k}) \cdot \vec{k}. \tag{235}$$

Подобное разложение можно написать в любом конечномерном евклидовом пространстве. А вот если перейти к бесконечномерному евклидову пространству, то появятся бесконечные суммы (ряды), которые называются рядами Фурье.

3.2 Ортонормированые системы функций

Рассмотрим бесконечномерное евклидово пространство. Нашей целью является разложение векторов пространства в ряды по некоторой заданной системе векторов. Наличие в пространстве скалярного произведения позволяет выбрать наиболее удобные системы для таких разложений. Это ортонормированные системы.

Определение
Система векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной, если $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$ при $n \neq m$ и ортонормированной, если:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{236}$$

Основная наша задача – это разложение функций в ряды Фурье. Поэтому функции мы будем рассматривать как элементы евклидова пространства. Попробуем выбрать подходящее пространство.

Поскольку мы хотим приближать функции "в среднем", то для введения нормы требуется интеграл ибо интегрирование – это операция, суммирующая отклонения по всему промежутку. Самый естественный способ ввести скалярное произведение, приводящее к интегральной норме – это рассмотрение интеграла от произведения функций. Таким путем мы приходим к одному из возможных евклидовых пространств – пространству $L_2(a,\ b)$.

Определение
$L_2(a, b)$ – это пространство функций, для которых существует $\int\limits_a^b |\varphi(x)|^2 dx < \infty$.
Скалярное произведение в $L_2(a, b)$ вводится следующим образом:

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx. \tag{237}$$

Замечание
Если рассматриваются комплекснозначные функции, то определение немного меняется:

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx, \tag{238}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Определение
Норма в пространстве $L_2(a, b)$ вводится следующим образом:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int\limits_a^b |\varphi(x)|^2 dx}. \tag{239}$$

Определение
Ортогональность двух функций φ и ψ означает, что:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0. \tag{240}$$

Определение
Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2(a,b)$, если:

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{241}$$

Тригонометрическая система функций
Рассмотрим систему функций:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots\ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots\ldots, \tag{242}$$

в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$.
Проверим ортогональность системы.

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x))dx = \\ = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-m}\sin((n-m)x) - \frac{1}{n+m}\sin((n+m)x)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{gathered} \tag{243}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x))dx = \\ = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{n-m}\cos((n+m)x) - \frac{1}{n-m}\cos((m-n)x)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{gathered} \tag{244}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x))dx = \\ = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-m}\sin((n-m)x) - \frac{1}{n+m}\sin((n+m)x)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{gathered} \tag{245}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2n}\sin(2nx)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \tag{246}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{2n}\sin(2nx)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \tag{247}$$

Таким образом, система тригонометрических функций (242) ортогональна, но не нормирована в $L_2(-\pi,\pi)$.

Для того, чтобы превратить систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нормированную, разделим каждый вектор на его норму. Полученная система $\left\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ будем нормированной. В нашем случае:

$$\|1\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \tag{248}$$

$$\|\cos nx\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx = \pi, \tag{249}$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx = \pi. \tag{250}$$

Следовательно, ортонормированная тригонометрическая система функций выглядит так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \ldots\ldots \tag{251}$$

3.3 Ряды Фурье в евклидовом пространстве

Определение

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве E. Пусть $f \in E$. Рядом Фурье вектора f по системе векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n. \tag{252}$$

Числа (f, φ_n) называются коэффициентами Фурье.

Теорема 33 (Единственность разложения в ряд Фурье)

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в E. Пусть $f \in E$. Если вектор f представим в виде:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n, \tag{253}$$

то выполнено:

$$C_n = (f, \varphi_n). \tag{254}$$

Доказательство:

Домножим равенство (253) скалярно на вектор φ_k:

$$(f, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \underbrace{(\varphi_n, \varphi_k)}_{=\delta_{nk}} = C_k. \tag{255}$$

Здесь δ_{nk} – это символ Кронекера:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k. \end{cases} \tag{256}$$

■

Таким образом, разложение вектора по ортонормированной системе единственно, причем коэффициенты в этом разложении – это коэффициенты Фурье.

Теорема 34 (Ряд Фурье наилучшим образом приближает функцию) Для каждого вектора $f \in E$ и для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и для любой последовательности чисел $\{\alpha_n\}$ и любого m выполнено:

$$\|f - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n\| \geq \|f - \sum_{n=1}^{m} (f, \varphi_n)\varphi_n\|. \tag{257}$$

Доказательство:

Найдем коэффициенты α_n, при которых сумма $\sum\limits_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n$ наилучшим образом приближает функцию f. Рассмотрим квадрат нормы их разности.

$$\|f - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n\|^2 = \Big(f - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n,\ f - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n\Big) = (f, f) - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n (\varphi_n, f) -$$

$$- \sum_{n=1}^{m} \alpha_n (f, \varphi_n) + \sum_{n,k=1}^{m} \alpha_n \alpha_k (\varphi_n, \varphi_k) = \Big/ \begin{array}{l} (f, \varphi_n) = C_n \text{ –коэфф. Фурье} \\ (\varphi_n, f) = C_n, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = \delta_{nk} \end{array} \Big/$$

$$= (f, f) - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n C_n - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n C_n + \sum_{n=1}^{m} C_n C_n + \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \alpha_n - \sum_{n=1}^{m} C_n C_n =$$

$$= (f, f) + \sum_{n=1}^{m} (\alpha_n - C_n)(\alpha_n - C_n) - \sum_{n=1}^{m} |C_n|^2 =$$

$$= (f, f) - \sum_{n=1}^{m} |C_n|^2 + \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n - C_n|^2. \tag{258}$$

Первые два слагаемых не зависят от выбора α_n. Последнее слагаемое неотрицательно. Мы хотим добиться минимального значения всей суммы, которое будет достигнуто, если третье слагаемое равно нулю, то есть $\alpha_n = C_n = (f, \varphi_n)$. Полученное равенство верно для любого $m \in \mathbb{N}$. Выбрав $\alpha_n = C_n$ для каждого n, получим:

$$\|f - \sum_{n=1}^{m} C_n \varphi_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |C_n|^2, \tag{259}$$

верное для всех m. Таким образом, минимум нормы достигается на коэффициентах Фурье $C_n = (f, \varphi_n)$.

■

Теорема 35 (Неравенство Бесселя) Для каждого вектора $f \in E$ и для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2, \tag{260}$$

что означает, в частности, сходимость ряда Фурье (не обязательно к функции f).

Доказательство:
В левой части (259) стоит квадрат нормы, то есть неотрицательное число, поэтому $\|f\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{m} |C_n|^2 \geq 0 \;\; \forall\, m$, то есть частичные суммы положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ ограничены: $\sum\limits_{n=1}^{m} |C_n|^2 \leq \|f\|^2$. Значит ряд сходится и верно неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \|f\|^2. \tag{261}$$

■

Теорема 36 (Уравнение замкнутости или равенство Парсеваля)
Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве E и для любого вектора $f \in E$ имеет место представление:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n, \tag{262}$$

то ряд Фурье для f сходится к вектору f и выполнено:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2. \tag{263}$$

Доказательство:
Домножим скалярно равенство (262) на φ_k:

$$(f, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \underbrace{(\varphi_n, \varphi_k)}_{=\delta_{nk}} = \beta_k, \tag{264}$$

то есть коэффициенты в разложении f по базису φ_n есть коэффициенты Фурье ($\beta_k = C_k = (f, \varphi_k)$). Тогда $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n$ и левая часть в равенстве (259) стремится к 0 при $m \to \infty$. Получаем равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2. \tag{265}$$

■

Следующее свойство рядов Фурье будет выполнено только если мы наложим некоторые ограничения на евклидово пространство, в котором рассматривается ряд. Пространство должно быть полным. Дадим соответствующие определения.

Определение
Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов евклидового пространства называется фундаментальной (сходящейся в себе), если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \;\; \forall n, m > N \;\; \|f_n - f_m\| < \varepsilon. \tag{266}$$

Замечание
Подобное условие встречалось в принципе Больцано-Коши сходимости числовых последовательностей. Однако если на числовой прямой данное условие было необходимым и достаточным условием сходимости, то в произвольном евклидовом пространстве это не обязательно так. Необходимость есть всегда (если последовательность сходится, то она фундаментальная), а достаточность не всегда. Это зависит от свойств пространства.

Определение
Евклидово пространство E называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Определение
Гильбертовым пространством H называется евклидово пространство, полное по норме $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Полнота пространства связана со сходимостью фундаментальных последовательностей. Сходимость последовательности определяется через норму, поэтому изменение определения нормы может повлиять на полноту пространства (например, сделать его полным). Поэтому при определении гильбертова пространства важно указывать способ введения нормы.

Вернемся к изучению свойств рядов Фурье. В теореме 34 речь шла о построении по заданному элементу $f \in E$ последовательности чисел (коэффициентов) таких, что ряд Фурье с этими коэффициентами сходится к f. Теперь зададимся обратным вопросом: можно ли по заданной последовательности чисел построить функцию f, для которой эти числа будут коэффициентами Фурье, а соответствующий ряд Фурье будет сходиться к f? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 37 (Теорема Рисса-Фишера)
Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H.
Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – любая заданная последовательность вещественных чисел, квадраты которых образуют сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty. \tag{267}$$

Тогда существует единственный вектор $f \in H$, для которого числа α_n являются коэффициентами Фурье относительно системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и для которого имеет место уравнение замкнутости (263).

Доказательство:
Составим частичные суммы будущего ряда для вектора f:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \ \varphi_n. \tag{268}$$

Докажем, что последовательность $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальная.

$$\begin{aligned} \|S_m - S_k\|^2 &= \Big\| \sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n\ \varphi_n \Big\|^2 = \Big(\sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n \varphi_n, \sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n \varphi_n \Big) = \\ &= \Big/ \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ – ортонормированная система} \Big/ = \\ &= \sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(из-за сходимости ряда (267))}. \end{aligned} \tag{269}$$

Формула (269) выполнена для любых достаточно больших m и k. Следовательно, последовательность $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальная. В силу полноты гильбертова пространства она сходится к некоторому элементу f этого пространства:

$$\lim_{m\to\infty} \|f - S_m\|^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{m\to\infty} \Big\| f - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \Big\|^2 = 0. \tag{270}$$

Теперь воспользуемся формулой (258). Левая часть в ней стремится к нулю при $m \to \infty$. $\|f\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{m} C_n^2 \geq 0$ в силу неравенства Бесселя (261). Значит $\alpha_k = C_k$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$, то есть α_k – это коэффициенты Фурье вектора f.
Согласно формуле (270)

$$f = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n. \tag{271}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \lim_{m\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n \Big\|^2 = \Big/ \text{аналогично формуле (269)} \Big/ = \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(по доказанному)}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2. \end{aligned} \tag{272}$$

Таким образом, для вектора f имеет место уравнение замкнутости (263).
Осталось доказать единственность такого f. От противного. Пусть существует еще вектор g с теми же свойствами. Тогда частичная сумма S_m из формулы (268) есть отрезок ряда Фурье как для f, так и для g, и последовательность S_m сходится как и к f, так и к g. Следовательно, $f = g$ ибо у последовательности двух пределов быть не может.

$\blacksquare$

Подведем итог. Мы научились в произвольном гильбертовом пространстве строить ряды Фурье по ортонормированным системам функций и установили условие, обеспечивающее представимость функции ее рядом Фурье (равенство Парсеваля). Это обосновано в теоремах 36 и 37. Теорема 36 показывает как по заданному вектору f построить коэффициенты Фурье C_n. Теорема 37 объясняет переход в обратную сторону: как по заданной последовательности чисел $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ построить вектор f, для которого они будут коэффициентами Фурье.

Далее мы рассмотрим практическое приложение полученных результатов – ряд Фурье по тригонометрической системе функций.