3 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

3.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения

Определение

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{71}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка.

***Обозначение*:** ЛОДУ.

Теорема 4

Если y_1 и y_2 – частные решения ЛОДУ (71), то $\lambda y_1 + \mu y_2$, где $\lambda, \mu = const$ также будет решением этого уравнения.

Доказательство:

Подставим $\lambda y_1 + \mu y_2$ в уравнение (71):

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)^{(n)} + a_1(x) \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2)^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_n(x) \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2) =$$

/ Перегруппируем слагаемые, воспользовавшись линейностью дифференцирования. /

$$\lambda\Big(\underbrace{y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_n(x)y_1}_{=0 \text{ в силу уравнения (71)}}\Big) +$$

$$+\mu\Big(\underbrace{y_2^{(n)} + a_1(x)y_2^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_n(x)y_2}_{=0 \text{ в силу уравнения (71)}}\Big) = 0.$$

■

Итак, мы доказали, что множество решений замкнуто относительно линейных операций (сложение функций и умножение функций на число). Следовательно, оно образует линейное пространство.

Определение линейной независимости элементов уже было дано в линейной алгебре. Поясним, какую специфику оно имеет в случае пространства функций $y(x)$.

Определение

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)$ называют линейно зависимыми на интервале (a, b), если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что для всех значений x из этого интервала справедливо тождество:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ \ldots\ldots\ + \alpha_n y_n(x) \equiv 0. \tag{72}$$

Если же тождество выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ \ldots\ldots\ = \alpha_n = 0$, то функции $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ называют линейно независимыми.

Замечание

Для двух функций определение упрощается. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будет линейно зависимыми на интервале (a, b), если выполнено:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda = const \quad (\text{то есть } y_1 = \lambda y_2).$$

Пример 1

Набор функций $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ будет линейно независимым на всей вещественной оси. Чтобы проверить это, приравняем к нулю линейную комбинацию этих функций.

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 \equiv 0 \quad \forall x \ \text{ только при } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Действительно, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i \neq 0$, то в левой части тождества стоит полином степени не выше третьей.

По основной теореме алгебры он может обращаться в нуль не более чем в 3 точках. А у нас равенство нулю тождественное.

Значит $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Пример 2

Набор функций: $1,\ 3\sin^2 x,\ 4\cos^2 x$ является линейно зависимым на $\mathbb{R}$. Действительно, при $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = \frac{1}{3},\ \alpha_3 = \frac{1}{4}$ получим:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 3\sin^2 x + \alpha_3 \cdot 4\cos^2 x = -1 + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = 0.$$

Определение

Любой набор из n линейного независимых решений $y_1(x),\ y_2(x), \ldots\ldots$ $\ldots\ldots,\ y_n(x)$ уравнения (71) называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Проверить линейную независимость решений $y_1(x),\ y_2(x), \ldots\ldots$ $\ldots\ldots,\ y_n(x)$ можно с помощью определителя Вронского:

$$W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots\ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots\ldots & y_n'(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (73)$$

Поскольку вронскиан составлен из функций $y_i(x)$, то он сам является функцией одной переменной x.

Теорема 5

$W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \equiv 0 \quad \forall x \quad \Leftrightarrow$ решения $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)$ линейно зависимы.

$W \neq 0$ хотя бы для какого-нибудь x $\Leftrightarrow$ решения $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)$ линейно независимы.

Без доказательства.

Пример 3

В примерах 1 и 2 линейную независимость решений можно было проверить с помощью определителя Вронского.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{ функции } 1, x, x^2, x^3 \text{ линейно независимы.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3\sin^2 x & 4\cos^2 x \\ 0 & 3\sin 2x & -4\sin 2x \\ 0 & 6\cos 2x & -8\cos 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\sin 2x & -4\sin 2x \\ 6\cos 2x & -\cos 2x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Следовательно, $1,\ 3\sin^2 x,\ 4\cos^2 x$ линейно зависимы.

Замечание

Теорему 5 можно уточнить на случай, когда функции $y_1(x),\ y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)$ являются решениями ЛОДУ (71):

Теорема 6

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)$ – решения одного и того же ЛОДУ (71) с непрерывными коэффициентами $a_1(x), \ldots\ldots, a_n(x)$, то вронскиан $W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ либо равен нулю тождественно, либо не обращается в нуль ни в одной точке.

Доказательство будет приведено позднее.

Теорема 7

Общее решение ЛОДУ есть линейная комбинация решений $y_1,\ y_2, \ldots\ldots, y_n$ из фундаментальной системы решений:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ \ldots\ldots\ + C_n y_n(x), \tag{74}$$

где $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство:

По теореме 4 линейная комбинация решений ЛОДУ есть решение. Для того, чтобы проверить, что это общее решение, нужно убедиться, что при любых начальных условиях в некоторой точке x_o:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{75}$$

найдутся такие постоянные $C_1, C_2, \dots\dots, C_n$, что $y(x)$ будет удовлетворять этим условиям.

Проверим это. Подставим $y(x)$ из (74) в условия (75). Мы получим систему линеных алгебраических уравнений для коэффициентов $C_1, C_2, \dots\dots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ \dots\dots\ + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \ \dots\dots\ + C_n y'_n(x_0) = y'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ \dots\dots\ + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{76}$$

Определитель этой неоднородной линейной системы – это вронскиан $W(y_1, y_2, \dots\dots, y_n)$. Для фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \dots\dots, y_n$ он не обращается в нуль ни в одной точке (согласно теоремам 5 и 6 и определению фундаментальной системы). Значит определитель системы (76) отличен от нуля и по альтернативе Фредгольма система имеет единственное решение при любой правой части.

$\blacksquare$

Свойства определителя Вронского.

1) Формула Лиувилля-Остроградского.

а) Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{77}$$

Пусть $y_1(x),\ y_2(x)$ – решения этого уравнения.

Воронскиан решений $y_1,\ y_2$ имеет вид:

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2. \tag{78}$$

Выясним характер зависимости $W(x)$. Для этого составим дифференциальное уравнение для $W(x)$ и решим его.

Найдём производную $\frac{dW}{dx}$.

$$\frac{dW}{dx} = (y_1y_2' - y_1'y_2)_x' = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - y_1''y_2 - \cancel{y_1'y_2'} = y_1y_2'' - y_1''y_2 =$$

$$\Big/\ y_1'' \text{ и } y_2'' \text{ выразим из уравнения (77) :}$$

$$y_1'' = -py_1' - qy_1, \quad y_2'' = -py_2' - qy_2. \Big/$$

$$= -py_1y_2' - \cancel{qy_1y_2} + py_1'y_2 + \cancel{qy_1y_2} = -p(y_1y_2' - y_1'y_2) = -pW. \tag{79}$$

Таким образом, $\frac{dW}{dx}$ оказалось выражено через $W(x)$, и мы получили дифференциальное уравнение:

$$\frac{dW}{dx} = -pW. \tag{80}$$

Пусть $W(x) \not\equiv 0$. Тогда $W(x)$ отлична от нуля в некоторой точке x_0. В силу непрерывности $W(x)$ будет отлична от нуля в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности разделим обе части уравнения (80) на W:

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx \ \Leftrightarrow\ \ln|W| = -\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx + C_1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ W = C \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

При $x = x_0$ получим:

$$W(x_0) = C \cdot \underbrace{e^{-\int\limits_{x_0}^{x_0} p(x)dx}}_{=1} = C.$$

Следовательно,

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx} \qquad (81)$$

– формула Лиувилля-Остроградского.

Из формулы (81) следует, что если определитель Вронского отличен от нуля в некоторой точке x_0, то он будет отличен от нуля на всей вещественной оси.

Формула (81) доказывает теорему 6 для уравнения второго порядка.

б) Докажем формулу Лиувилля-Остроградского для линейного однородного уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + a_n(x)y = 0. \qquad (82)$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ – решения уравнения (82).

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots\ldots & y_n'' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (83)$$

Найдём производную $\frac{dW}{dx}$. Производная от определителя есть сумма определителей, в каждом из которых продифференцирована одна из его строк.

$$\frac{dW}{dx} = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots\ldots & y_n'' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (ибо две строки определителя совпали)}} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \ldots\ldots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots\ldots & y_n'' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (ибо две строки определителя совпали)}} +$$

$$
+\ \ldots\ldots\ +\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots\ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =
$$

/ Выразим $y^{(n)}$ из уравнения (82) : $y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - \ \ldots\ldots\ - a_n y.$ /

$$
= \begin{vmatrix} y_1 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)} \\ -a_1 y_1^{(n-1)} - a_2 y_1^{(n-2)} - \ldots - a_n y_1 & \ldots\ldots & -a_1 y_n^{(n-1)} - a_2 y_n^{(n-2)} - \ldots - a_n y_n \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} y_1 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)} \\ -a_1 y_1^{(n-1)} & \ldots\ldots & -a_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)} \\ -a_2 y_1^{(n-2)} & \ldots\ldots & -a_2 y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}}_{=0} + \ \ldots\ldots
$$

$$
\ldots\ldots\ + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)} \\ -a_n y_1 & \ldots\ldots & -a_n y_n \end{vmatrix}}_{=0} = \ -a_1 W(x). \tag{84}
$$

Мы получили уравнение, аналогичное уравнению (80):

$$
\frac{dW}{dx} = -a_1(x) W. \tag{85}
$$

Решая его, приходим к формуле:

$$W(x) = W(x_o) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx} \tag{86}$$

– формула Лиувилля-Остроградского для уравнения n – го порядка. Формула (86) доказывает теорему 6 в общем случае.

2) Построение общего решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ в случае, когда одно из частных решений известно.

Рассмотрим уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{87}$$

В общем случае его решение найти не удаётся. Однако, если известно некоторое частное решение $y_1(x) \not\equiv 0$, то можно построить линейно независимое с ним решение $y_2(x)$. Это позволит написать общее решение уравнения (87):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2. \tag{88}$$

Составим дифференциальное уравнение для y_2 и решим его. Найдём производную $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} \underset{\substack{\uparrow \\ (81)}}{=} \frac{W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}}{y_1^2} dx \Leftrightarrow y_2 = W(x_0) \cdot y_1 \cdot \int e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} \cdot \frac{dx}{y_1^2}. \tag{89}$$

Если $\displaystyle\int e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} \cdot \frac{dx}{y_1^2} \neq 0$, то решения y_1 и y_2 линейно независимы и можно написать общее решение уравнения (87) : $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

3.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + a_n y = 0, \tag{90}$$

где $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ – некоторые постоянные. Согласно теореме 7, для того чтобы найти общее решение уравнения (90), нужно найти фундаментальную систему решений, то есть n линейно независимых решений уравнения (90): $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$.

Будем искать эти решения в виде:

$$y = e^{\lambda x}. \tag{91}$$

Подставим $y = e^{\lambda x}$ в уравнение (90).

Так как $y' = \lambda e^{\lambda x},\ \ldots\ldots,\ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$, получим:

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ \ldots\ldots\ + a_n)e^{\lambda x} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ \ldots\ldots\ + a_n = 0. \tag{92}$$

Пусть λ – корень уравнения (92). Тогда $e^{\lambda x}$ есть решение уравнения (90). Уравнение (92) называется характеристическим уравнением для ЛОДУ (90). По основной теореме алгебры уравнение (92) имеет n корней (с учётом кратности). Вообще говоря, это комплексные корни.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ – корни уравнения (92). Нетрудно увидеть, что решения, отвечающие различным корням λ_1, λ_2, линейно независимы. Действительно, составим определитель Вронского:

$$W\left(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda e^{\lambda_1 x} & \lambda e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0.$$

Замечание

Линейную независимость решений можно проверить и для n различных корней $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$.

$$W\left(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots\ldots, e^{\lambda_n x}\right) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots\ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots\ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots\ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\,\ldots\ldots\,+\lambda_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots\ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots\ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots\ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\,\ldots\ldots\,+\lambda_n)x} \cdot \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{решения линейно независимы.}$$

Здесь мы получили определитель Вандермонда, значение которого известно. Таким образом, если все корни характеристического уравнения первой кратности n вещественны, то фундаментальная система решений состоит из следующих функций:

$$e^{\lambda_1 x},\; e^{\lambda_2 x},\; \ldots\ldots,\; e^{\lambda_n x}. \tag{93}$$

Если среди корней есть кратные, то для каждого из них нужно найти столько линейно независимых решений, какова его кратность. Рассмотрим эту ситуацию для уравнения 2 порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{94}$$

Напишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{95}$$

Пусть λ_1 – корень 2 кратности характеристического уравнения. Тогда дискриминант уравнения равен нулю: $D = a_1^2 - 4a_2 = 0$. Следовательно,

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2}. \tag{96}$$

Одно из решений уравнения (94) – это $e^{\lambda_1 x}$. Найдём второе решение, линейно независимое с ним. Будем искать его в виде:

$$y_2 = u(x) \cdot e^{\lambda_1 x}. \tag{97}$$

Тогда:

$$y_2' = e^{\lambda_1 x}(u' + \lambda_1 u),$$
$$y_2'' = e^{\lambda_1 x}\left(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2\right).$$

Подставим y_2, y_2', y_2'' в исходное уравнение (94):

$$e^{\lambda_1 x}\left(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2\right) + a_1 e^{\lambda_1 x}\left(u' + \lambda_1 u\right) + a_2 u e^{\lambda_1 x} = 0$$
$$\Leftrightarrow\ e^{\lambda_1 x}\Big(u'' + \underbrace{(2\lambda_1 + a_1)}_{=0\ (\text{в силу } (96))} u' + \underbrace{\left(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2\right)}_{=0\ (\text{в силу } (95))} u\Big) = 0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ u'' = 0\ \Leftrightarrow\ u = C_1 x + C_2. \tag{98}$$

Выберем функцию u следующим образом: $u = x$. Тогда:

$$y_2 = x \cdot e^{\lambda_1 x}. \tag{99}$$

Проверим, что решения y_1 и y_2 будут линейно независимы:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0.$$

Таким образом, фундаментальная система решений для уравнения (94) имеет вид:

$$e^{\lambda_1 x},\ x e^{\lambda_1 x}.$$

В общем случае для уравнения n-го порядка ситуация такова:
Каждому вещественному корню λ уравнения (92) кратности r соответствуют r линейно независимых решений уравнения (90):

$$e^{\lambda x},\ x e^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \ldots\ldots,\ x^{r-1} e^{\lambda x}. \tag{100}$$

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексный корень характеристического уравнения. Так как мы рассматриваем уравнение с вещественными коэффициентами, то из линейной алгебры известно, что если комплексное число

$\alpha+i\beta$ есть корень полинома кратности r, то $\alpha-i\beta$ также будет являться корнем этого полинома кратности r. Тогда $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$ будут решениями уравнения (90).

Линейные комбинации этих решений также будут решениями уравнения (90):

$$\frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}+\frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{101}$$

$$\frac{1}{2i}e^{(\alpha+i\beta)x}-\frac{1}{2i}e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{102}$$

Составим определитель Вронского и убедимся, что эти решения будут линейно независимыми:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x+\beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x-\alpha e^{2\alpha x}\sin\beta x\cos\beta x+$$

$$+\beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x=\beta e^{2\alpha x}\underbrace{\left(\cos^2\beta x+\sin^2\beta x\right)}_{=1}=\beta e^{2\alpha x}\neq 0.$$

Таким образом, паре комплексно сопряжённых корней $\alpha\pm i\beta$ первой кратности соответствуют 2 линейно независимых решения уравнения (90):

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{103}$$

Если $\alpha\pm i\beta$ являются корнями кратности r, то соотвтетствующий набор линейно независимых решений таков:

$$e^{(\alpha+i\beta)x},\ e^{(\alpha-i\beta)x},\ xe^{(\alpha+i\beta)x},\ xe^{(\alpha-i\beta)x},\ \ldots\ldots,\ x^{r-1}e^{(\alpha+i\beta)x},\ x^{r-1}e^{(\alpha+i\beta)x}. \tag{104}$$

Проверим, что функции из набора (104) действительно являются решениями уравнения (90).

Введём обозначение: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ (аналогично для $\lambda_1 = \alpha - i\beta$).
При $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ набор функций (104) приобретает вид:

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots\ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda_1 x}.$$

Выясним специфику уравнения (90) в случае, когда характеристическое уравнение имеет корень λ_1 кратности r.

После подстановки $e^{\lambda x}$ в уравнение (90) его левая часть примет вид:

$$\big(e^{\lambda x}\big)^{(n)} + a_1\big(e^{\lambda x}\big)^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + a_n e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}, \tag{105}$$

$$\text{где } P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ \ldots\ldots\ + a_n \tag{106}$$

– характеристический полином (левая часть характеристического уравнения).

Напомним определение кратности корня. λ_1 есть корень кратности r характеристического полинома, если выполнено:

$$P(\lambda_1) = 0,\ P'(\lambda_1) = 0,\ \ldots\ldots,\ P^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ P^{(r)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{107}$$

Продифференцируем m раз уравнение (105) по переменной λ. Используя формулу Лейбница для m-ой производной произведения $P(\lambda)e^{\lambda x}$, получим:

$$\begin{aligned}\big(x^m e^{\lambda x}\big)^{(n)} + a_1\big(x^m e^{\lambda x}\big)^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + a_n\big(x^m e^{\lambda x}\big) = \\ = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot P^{(k)}(\lambda) \cdot x^{m-k} \cdot e^{\lambda x}.\end{aligned} \tag{108}$$

Подставим в уравнение $\lambda = \lambda_1$. При $m \leqslant r-1$ по формуле (107) в правой части уравнения (108) получим 0:

$$\big(x^m e^{\lambda_1 x}\big)^{(n)} + a_1\big(x^m e^{\lambda_1 x}\big)^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + a_n\big(x^m e^{\lambda_1 x}\big) = 0. \tag{109}$$

Из уравнения (109) нетрудно увидеть, что функция $x^m e^{\lambda_1 x}$ будет являться решением уравнения (90) при $m \leqslant r-1$.

Следовательно, функции из набора (104) являются решениями уравнения (90).

Подведём итог. В фундаментальную систему решений ЛОДУ (90) нужно включать следующие функции, соответствующие корням характеристического уравнения:

а) λ_1 – вещественный корень первой кратности:

$$e^{\lambda_1 x}; \tag{110}$$

б) λ_1 – вещественный корень кратности r:

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots\ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda_1 x}; \tag{111}$$

в) $\lambda_1 = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексно сопряжённых корней первой кратности:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x; \tag{112}$$

г) $\lambda_1 = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексно сопряжённых корней кратности r:

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{gathered} \tag{113}$$

Общее решение ЛОДУ в соответствии с теоремой 7 есть линейная комбинация функций из фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами.

Примеры

Найдём общие решения следующих уравнений:

1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{gathered} \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0 \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0. \end{gathered}$$

Фундаментальная система решений (Ф.С.Р.):

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}, \\ y_2 = e^{x}, \\ y_3 = e^{-x}. \end{cases}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}.}$$

2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ (\lambda - 1)^3 = 0.$$

$\lambda = 1$ – корень третьей кратности.

$$\text{Ф.С.Р.}: \ \begin{cases} y_1 = e^x, \\ y_2 = xe^x, \\ y_3 = x^2 e^x. \end{cases}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 x^2 e^{x}.}$$

3) $y''' - 8y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 8 = 0 \ \Leftrightarrow \ (\lambda - 2)\big(\lambda^2 + 2\lambda + 4\big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \\ \lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \underbrace{-1}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{3}}_{\beta}\, i \end{array} \right. ; \quad \text{Ф.С.Р.}: \ \begin{cases} y_1 = e^{2x}, \\ y_2 = e^{-x}\cos(\sqrt{3}x), \\ y_3 = e^{-x}\sin(\sqrt{3}x). \end{cases}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + C_3 e^{-x}\sin(\sqrt{3}x).}$$

4) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \ \Leftrightarrow \ \big(\lambda^2 + 4\big)^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2 = -4 \ \Leftrightarrow \ \lambda = \pm 2i$$

– каждый из корней второй кратности.

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.}$$

5) $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \big(\lambda^2 + 2\lambda + 2\big)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$ – каждый из корней второй кратности.

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \sin x.}$$

6) $y^{V} - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)\big(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1\big) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)\big(\lambda^2 + 1\big)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = \pm i \end{array}\right.$$ – каждый из корней второй кратности.

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x.}$$

3.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Определение

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \;\ldots\ldots\; + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \qquad (114)$$