Алгоритм поиска максимального потока в транспортной сети

Существуют различные алгоритмы для поиска максимального потока в транспортной сети (ТС). Все они используют в качестве основы теорему Форда-Фалкерсона. Данный алгоритм не является исключением. Идея алгоритма базируется на следующей формулировке следствия из этой теоремы.

Следствие из теоремы Форда-Фалкерсона. Допустимый поток в транспортной сети $G(X,U)$ является максимальным, если в ней отсутствуют простые полупути, увеличивающие данный поток.

В этом алгоритме по исходной ТС $G(X,U)$ строится **остаточная сеть** $G'(X,U)$, в которой каждой дуге ставится в соответствие пара чисел $\Delta c(u)/\varphi(u)$, где $\Delta c(u)$ – ее остаточная пропускная способность, $\varphi(u)$ – ее допустимый поток. Считаем, что в начале $\Delta c(u) = c(u)$), $\varphi(u)$=0, а величина потока $\Phi = 0$. Введем понятие множества претендентов для включения в увеличивающий путь – V^+, определим его в начале как $V^+ = \Gamma(x_0)$.

Выбор очередного простого пути, увеличивающего данный поток, производится по остаточной сети $G'(X,U)$ путем выполнения следующих двух этапов при условии $V^+ \neq$ Ø.

1. Выбор вершины $v \in V^+$, которая обеспечивает прохождение максимального потока:
$$C(v) = \min(\Delta c(x_0 v), \sum_{\forall w \in \Gamma(v)} \Delta c(v,w)) \to \max . \quad (1)$$
Если вершина выбрана, то, переходим к следующему этапу, в противном случае максимальный поток $\varphi(G) = (\varphi(u_1),..., \varphi(u_m))$ с величиной Φ найден.
2. Среди всех возможных простых путей $\mu = (x_0, v,..., x_t)$ выбираем тот путь, который обеспечивает максимальное приращение потока:
$$\Delta\Phi = \min_{\forall u \in \mu} \Delta c(u) \to \max . \quad (2)$$
Если путь $\mu = (x_0, v,..., x_t)$ не найден, то исключаем выбранную вершину из множества претендентов $V^+ = V^+ / v$, в противном случае определяем в остаточной сети $G'(X,U)$ для его дуг новые значения $\Delta c(u)$ и $\varphi(u)$, увеличиваем значение потока $\Phi = \Phi + \Delta\Phi$ и возвращаемся к 1-ому этапу алгоритма.

<u>Примечание</u>: В данном алгоритме могут возникать коллизии. Если на 1-ом этапе можно выбрать по критерию (1) не одну вершину, то выбирается любая такая вершина. Если на 2-ом этапе можно выбрать по критерию (1) не один простой путь, то выбирается любой такой путь.

Введем переменную s в качестве признака (s=1 – продолжить поиск, s=0 – завершить поиск). Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Положить s=1, $V^+ = \Gamma(x_0)$.
2. **ЦИКЛ до тех пор, пока** s=1:
   2.1. Выбрать вершину $v \in V^+$ по критерию (1).
   2.2. **ЕСЛИ** $C(v) = 0$ или $V^+ =$ Ø, **ТО** s=0,
   ИНАЧЕ выполнить:

2.2.1. Выбрать простой путь $\mu = (x_0, v, ..., x_t)$ по критерию (2).

2.2.2. **ЕСЛИ** путь не найден, **ТО** $V^+ = V^+ / v$,
ИНАЧЕ выполнить:

2.2.2.1. $\Phi = \Phi + \Delta\Phi$.

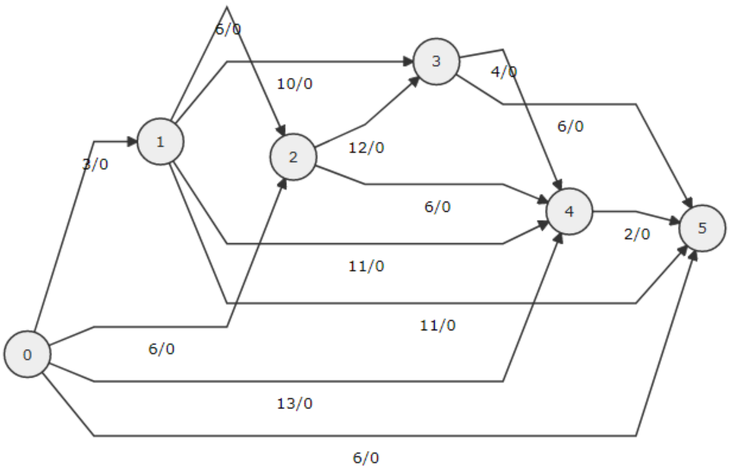
2.2.2.2. $\forall u \in \mu : \Delta c(u) = \Delta c(u) - \Delta\Phi$

2.2.2.3. $\forall u \in \mu : \varphi(u) = \varphi(u) + \Delta\Phi$

3. Найден максимальный поток ТС $\varphi(G) = (\varphi(u_1), ..., \varphi(u_m))$ величиной Φ.

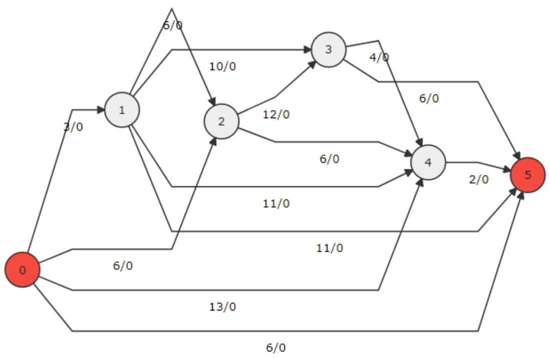
ПРИМЕР

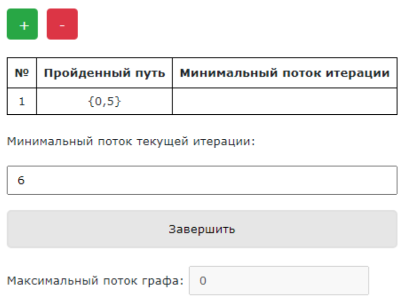
Найти максимальный поток в данной ТС с началом в вершине 0 и концом в вершине 5.



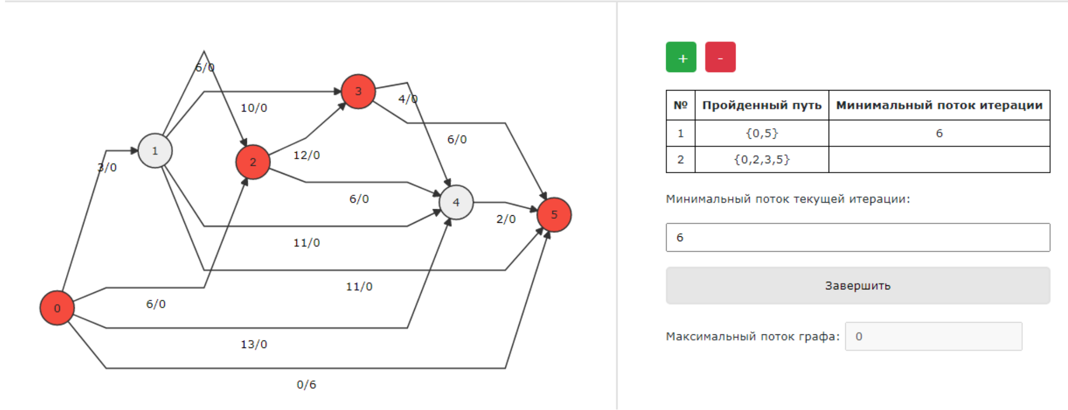
РЕШЕНИЕ

1. Определим множество претендентов: $V^+ = \Gamma(0)$={1,2,4,5}.
2. Рассчитаем по остаточной сети (она сейчас совпадает с исходной ТС):
C(1)=min(3, 6+10+11+11)=3, C(2)=min(6,12+6)=6, C(4)=min(13,2)=2, C(5)= 6.
3. Выберем по критерию (1) любую из вершин 2 или 5. Пусть это будет вершина 5.
4. Определим приращение потока для всех возможных путей $\mu = (0,5,\ldots,5)$:
(0, 5) – 6.
5. Выберем по критерию (2) путь (0, 5) с $\Delta\Phi = 6$.

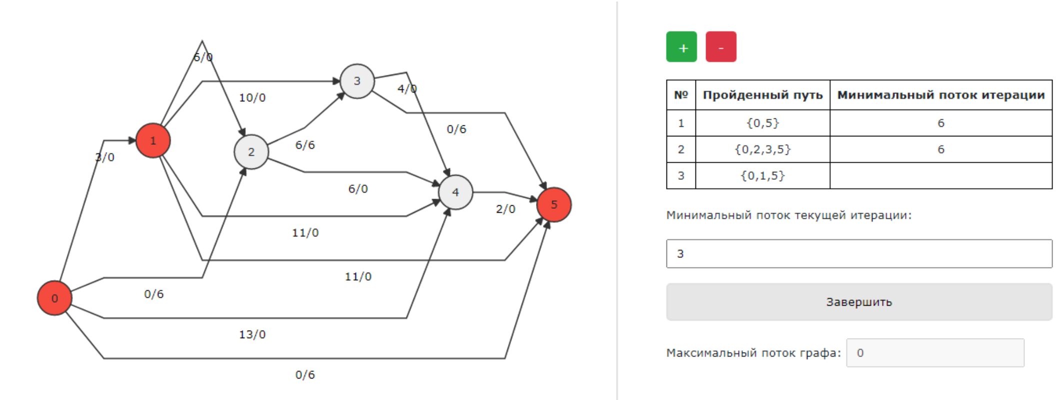




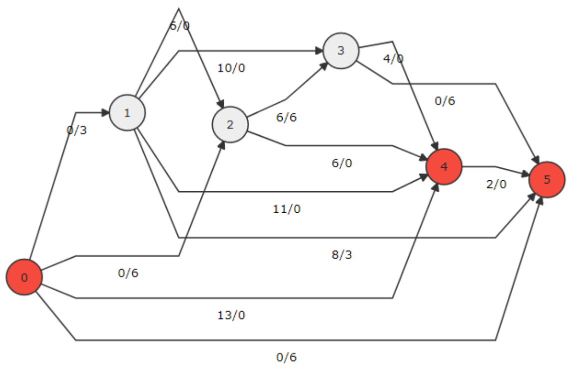
6. Рассчитаем по остаточной сети (она изображена ниже на рисунке):
   C(1)=min(3, 6+10+11+11)=3, C(2)=min(6,12+6)=6, C(4)=min(13,2)=2, C(5)= 0.
7. Выберем по критерию (1) вершину 2.
8. Определим приращение потока для всех возможных путей $\mu = (0,2,\ldots,5)$:
   (0,2,3,5) – 6, (0,2,3,4,5) – 2, (0,2,4,5) – 2.
9. Выберем по критерию (2) путь (0,2,3,5) с $\Delta\Phi = 6$.



10. Рассчитаем по остаточной сети (она изображена ниже на рисунке):
    C(1)=min(3, 6+10+11+11)=3, C(2)=min(0,6+6)=0, C(4)=min(13,2)=2, C(5)= 0.
11. Выберем по критерию (1) вершину 1.
12. Определим приращение потока для всех возможных путей $\mu = (0,1,\ldots,5)$:
    (0,1,2,3,4,5) – 2, (0,1,2,3,5) – 2, (0,1,2,4,5) – 2, (0,1,4,5) – 2 , (0,1,5) – 3.
13. Выберем по критерию (2) путь (0,1,5) с $\Delta\Phi = 3$.



14. Рассчитаем по остаточной сети (она изображена ниже на рисунке):
    C(1)=min(0, 6+10+11+8)=0, C(2)=min(0,6+6)=0, C(4)=min(13,2)=2, C(5)= 0.
15. Выберем по критерию (1) вершину 4.
16. Определим приращение потока для всех возможных путей $\mu = (0,4,\ldots,5)$:
    (0, 4,5) – 2.
17. Выберем по критерию (2) путь (0,4,5) с $\Delta\Phi = 2$.



+ -

№	Пройденный путь	Минимальный поток итерации
1	{0,5}	6
2	{0,2,3,5}	6
3	{0,1,5}	3
4	{0,4,5}	

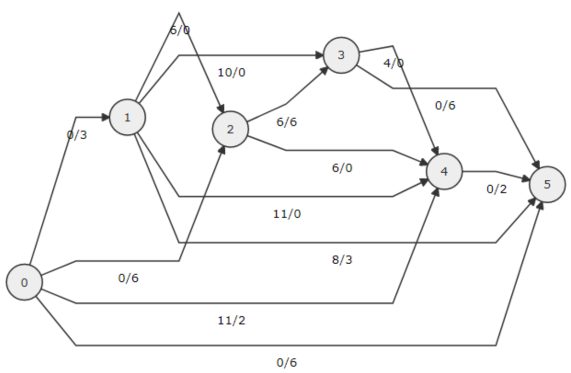
Минимальный поток текущей итерации:

2

Завершить

Максимальный поток графа: 0

18. Рассчитаем по остаточной сети (она изображена ниже на рисунке):
C(1)=min(0, 6+10+11+8)=0, C(2)=min(0,6+6)=0, C(4)=min(11,0)=0, C(5)= 0.
19. Т.к. для любого образа вершины 0 получили $C(v)=0$, то завершаем построение максимального потока в ТС, его величина Ф =6+6+3+2=17.



+ -

№	Пройденный путь	Минимальный поток итерации
1	{0,5}	6
2	{0,2,3,5}	6
3	{0,1,5}	3
4	{0,4,5}	2
5	{}	

Минимальный поток текущей итерации:

2

Завершить

Максимальный поток графа: 17