5.7 Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся.

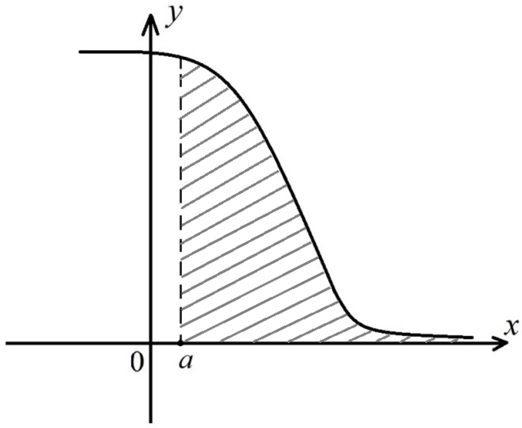

Рис. 16: Интеграл с бесконечным верхним пределом

Если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся.

5.13) $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\left(\int\limits_e^b \frac{dx}{x\ln^3 x}\right) = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_e^b(\ln x)^{-3}d(\ln x) =$

$\displaystyle = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\Bigg|_e^b\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 b}-\frac{1}{\ln^2 e}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 b}-1\right) =$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}$

5.14) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\limits_e^{+\infty}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(\ln x) = 2\,(\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_e^{+\infty} =$

$= 2\sqrt{\ln(+\infty)} - 2\sqrt{\ln e} = +\infty$, следовательно, интеграл расходится

5.15) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+(\sqrt{2})^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x+3)}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

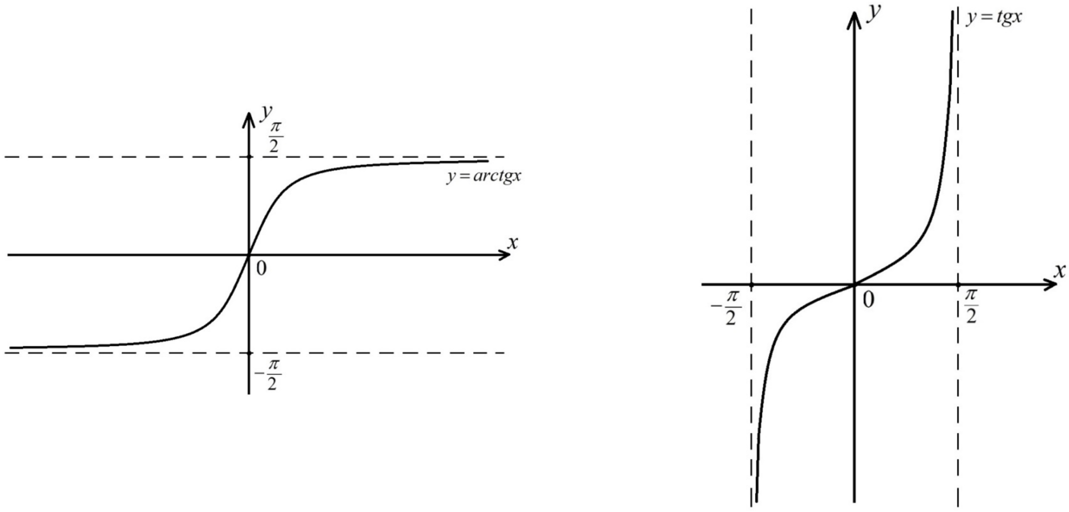

Рис. 17: Графики к заданию 6.3

5.16) $$\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx = *$$

$$\frac{1+2x}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$1 + 2x = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$1 + 2x = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 &: A + B = 0 \\ x^1 &: A + B = 2 \\ x^0 &: \quad B = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} B &= 1 \\ A &= 1 \\ C &= -1 \end{aligned}\right.$$

$$* = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \ln|x| \Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} - \ln|x+1| \Big|_1^{+\infty} =$$

$$\Big/ \ln|x| - \ln|x+1| = -(\ln|x+1| - \ln|x|) = -\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Big/$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\ln 1 + \ln 2 + 1 = \ln 2 + 1$$

5.17) $$\int\limits_0^{+\infty} x \cos x \cdot dx = \Big/ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = -\sin x & dv = \cos x \cdot dx \end{array} \Big/ =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot dx = (+\infty)\cdot\underbrace{\sin(+\infty)}_{\text{предела нет}} - 0 + \underbrace{\cos x\Big|_0^{+\infty}}_{\cos(+\infty)-1}$$

Предела не существует. Следовательно, интеграл расходится.

5.8 Интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим случай, когда подынтегральная функция имеет особенность на границе промежутка интегрирования: $f(b) = +\infty$. Тогда интеграл можно определить следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

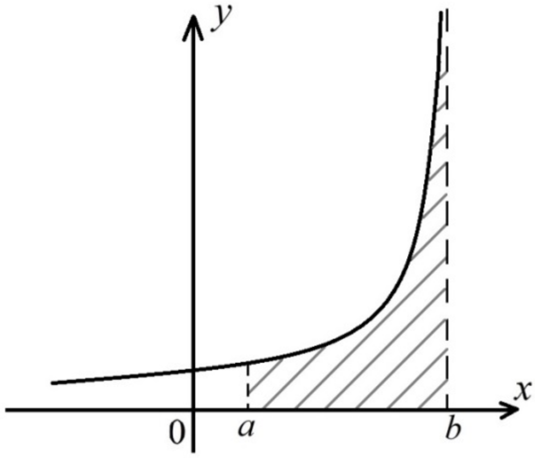

Рис. 18: Интеграл от неограниченной функции. Точка разрыва лежит на границе промежутка интегрирования

Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся. Если предел не существует или равен бесконечности, интеграл называется расходящимся.

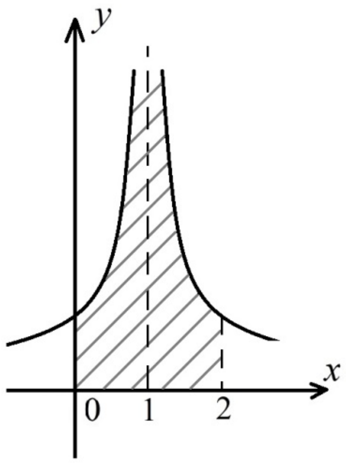

Рис. 19: Интеграл от неограниченной функции. Точка разрыва лежит внутри промежутка интегрирования

В случае, когда $c \in (a, b)$ – точка разрыва и $f(c) = \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

5.18) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2 \left(1 + x^2\right)} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{0+\varepsilon}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \right) = \lim_{\mathcal{E} \to 0} \left(\left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x \right) \Big|_{0+\varepsilon}^{1} \right) =$$

$$= \lim_{\mathcal{E} \to 0} \left(-1 + \frac{1}{0 + \varepsilon} - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(0 + \varepsilon) \right) = -1 - \frac{\pi}{4} +$$

$+0 + \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{0 + \varepsilon} = +\infty$, следовательно, интеграл расходится.

5.19) $$\int_0^2 \frac{xdx}{\left(x^2 - 1\right)^{4/5}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{xdx}{\left(x^2 - 1\right)^{4/5}} + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{xdx}{\left(x^2 - 1\right)^{4/5}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \frac{1}{2} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{d\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^{4/5}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \frac{1}{2} \int_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{d\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^{4/5}} == \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \frac{5}{2} \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{5}} \Big|_0^{1-\varepsilon_1} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \frac{5}{2} \left(x^2 - 1\right)^{1/5} \Big|_{1+\varepsilon_2}^{2} = -\frac{5}{2} \cdot (-1)^{1/5} + \frac{5}{2} \cdot 3^{1/5} = \frac{5}{2}(1 + \sqrt[5]{3})$$

$$5.20)\quad \int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}} = \Big/ \text{В точках } x = 2 \text{ и } x = 4 \text{ функция } f(x) = \infty \Big/ =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{2+\varepsilon_1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{3}^{4-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}} =$$

$$\Big/ 6x - x^2 - 8 = -(x^2 - 6x + 9) + 1 = 1 - (x-3)^2 \Big/$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{2+\varepsilon_1}^{3} \frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{3}^{4-\varepsilon_2} \frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\arcsin(x-3) \Big|_{2+\varepsilon_1}^{3} \right) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left(\arcsin(x-3) \Big|_{3}^{4-\varepsilon_2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

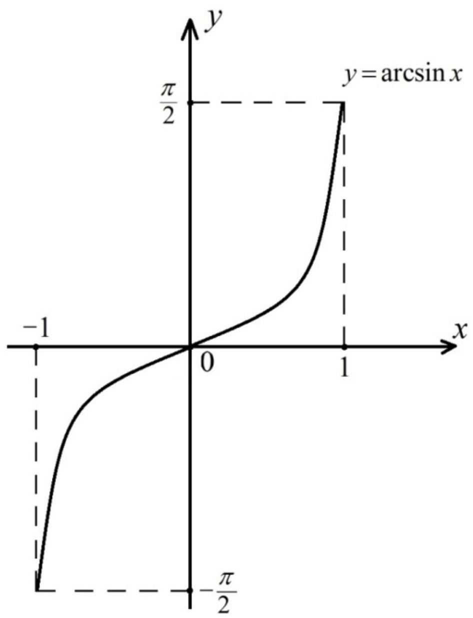

Рис. 20: График к заданию 6.8

$$5.21)\quad \int\limits_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e^2} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \alpha(\ln x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2\sqrt{\ln x|_{1+\varepsilon}^{e^2}} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} (2\sqrt{2 \ln e} - 2\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}) = 2\sqrt{2}$$