Глава 1

Основы теории графов

1.1 История теории графов. Понятие графа

Определение 1: Граф

Математическая модель, отображающая структуру дискретных объектов различной природы. Графическое изображение специального бинарного отношения $R \subseteq X \cdot X$.

$$R = \{(x, y) : (x, y) \in X \cdot X, \mu(x, y) > 0\}, X \neq \emptyset$$

Определение 2: Четкий граф

Такой граф, который изображает четкое бинарное отношение, т.е. такое, что есть только значения 0 и 1.

Определение 3: Граф

Отображение $\eta : X \to X$

Таблица 1.1: Построение графа как отображения

x	$\Gamma(x)$ - образы x
1	$\{\emptyset\}$
2	$\{1\}$
3	$\{1, 2\}$

Определение 4: Граф $G(X, U)$

Два множества X, U находящихся между собой в отношении инцидентности.
X - множество вершин
U - множество ребер (дуг - ориентированных ребер)

Определение 5: Петля

Ребро, у которого начало и конец совпадают.

Определение 6: Кратные ребра

Такие, которые имеют общие начало и конец.

Определение 7: Матрица инцидентности

Такая матрица, которая показывает, является ли данная вершина для данного ребра истоком или стоком.
0 - не является
+1 - сток

-1 - исток

1.2 Классификация графов по структуре

Классификация графов по структуре

- Неограф (неориентированный граф) - U - множество ребер.
- Орграф (ориентированный граф) - U - множество дуг.
- Граф со смешанной структурой - U - множество ребер и дуг.

Определение 8: Локальная степень вершины неографа $\rho(x)$

Числовая характеристика вершины, равная количеству инцидентных ей ребер.

Определение 9: Полустепень захода (исхода) вершины орграфа $\rho^{+}(x), \rho^{-}(x)$

Числовые характеристики вершины, определяемые количеством входящих (выходящих) дуг.

1.3 Основной терминологический базис теории графов

Определение 10: Псевдограф

Обощенное понятие бинарного графа.

Определение 11: Мультиграф

Псевдограф без петель.

Определение 12: Мультичисло графа

Максимальное число кратных ребер (дуг) в графе.

Определение 13: Скелетный (обыкновенный/простой) граф

Мультиграф, в котором мультичисло равно 1.

Определение 14: Пустой граф (0-граф)

Граф $G(X, U)$, в котором $U = \emptyset$.

Определение 15: Полный граф

Скелетный неограф, в котором каждая пара вершин соединина ребром.
Число ребер - $\frac{n(n-1)}{2}$.

Определение 16: Насыщенный граф

Полный граф, в котором при каждой вершине есть петля.

Определение 17: Регулярный граф

Граф, в котором $\forall x \in X : \rho(x) = \text{const}$

Определение 18: Взвешенный граф

Граф с числовыми характеристиками у элементов множеств X и/или U.

1.4 Смежность в графах

Определение 19: Смежные вершины

Такие вершины x, y, которые являются концами одного ребра или началом и концом одной и той же дуги.

Определение 20: Смежные ребра

Ребра с одним общим концом.

Определение 21: Смежные дуги

Дуги с общей вершиной конца дуги.

Замечание. Кратные ребра и дуги не являются смежными.

1.5 Операции над графами

Определение 22: Объединение графов

$G = G_1 \cup G_2$
$X = X_1 \cup X_2$
$\forall xinX : \Gamma x = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$
$\Gamma(x), \Gamma_1(x), \Gamma_2(x)$ - множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2

Определение 23: Пересечение графов

$G = G_1 \cap G_2$
$X = X_1 \cap X_2$
$\forall xinX : \Gamma x = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$
$\Gamma(x), \Gamma_1(x), \Gamma_2(x)$ - множества образов вершины x в графах G, G_1, G_2

Замечание. Пересечение непременимо, если получающийся $X = \emptyset$.

Определение 24: Вычитание графов

$G = G_1 \setminus G_2$
$X = X_1 \setminus X_2$
$\forall xinX : \Gamma x = \Gamma_1(x) \cap X$
$\Gamma(x), \Gamma_1(x)$ - множества образов вершины x в графах G, G_1

Определение 25: Произведение графов

$G(V, Z) = G_1(X, U) \cdot G_2(Y, R)$
$V = X \times Y$
Z определяется по следующему правилу: Вершины $(x_i, y_j), (x_k, y_l)$ будут смежны тогда и только тогда, когда:

- $x_i = x_k, y_j$ и y_l - смежные вершины в графе G_2.
- $y_j = y_l, x_i$ и x_k - смежные вершины в графе G_1.

Глава 2

Связность графов

2.1 Связность неографов

Определение 26: Маршрут

Упорядоченная последовательность ребер, в которой каждая пара соседних ребер смежна между собой. Длина маршрута определяется количеством ребер в последовательности.

Определение 27: Цепь

Маршрут, в котором все ребра различны.

Определение 28: Простая цепь

Цепь, в которой все вершины различны.

Определение 29: Связный неограф

Такой неограф, в котором любую пару вершин монжо соединить хотя юы одной простой цепью.

Определение 30: Компоненты связности

Несвязные части графа.

2.2 Разделяющее множество связного графа

Определение 31: Разделяющее множество

Такое множество ребер, после удаления которых граф становится несвязным.

Определение 32: Мост

Ребро, после удаления которого количество компонент связности увеличивается на одну.

2.3 Связность орграфов

Определение 33: Ориентированный маршрут

Упорядоченная последовательность дуг, в которой каждая дуга имеет вершину истока, совпадающую с вершиной стока предыдущей дуги, и вершину стока, совпадающую с вершиной истока последующей дуги.
Длина маршрута - число дуг в последовательности.

Определение 34: Путь

Ориентированный маршрут без повтора дуг.

Определение 35: Полупуть

Путь, построенный в орграфе без учета направления дуг.

Определение 36: Простой путь

Путь без повтора вершин.

Определение 37: Простой полупуть

Простой путь, построенный в орграфе без учета направления дуг.

Определение 38: Связный орграф

Такая орграф, в котором любую пару вершин можно соединить хотя бы одним простым полупутем.

Виды связных орграфов

- Сильные - $\forall x \in X : R(x) = X$
- Слабые - $\exists x, y \in X : x \notin R(y) \land y \notin R(x)$
- Односторонnесвязные - $\begin{cases} \exists x \in X : R(x) \neq X \\ \nexists x, y \in X : x \notin R(y) \land y \notin R(x) \end{cases}$

Где $R(x)$ - множество достижимости вершины x, состоит из тех вершин y, для которых есть простой путь $\mu = (x, \ldots, y)$, при этом $R(x) \neq \emptyset$.

2.4 Методика исследования связности орграфов

Метод:

1. Для заданного графа построить ряд степенных графов $G^1, G^2, G^3, \ldots$. Построение завершить, если на k-ом шаге $G^{k-1} = G^k$.
2. Если G^k - полный граф, то G - связный, в противном случае G - несвязный.

Считаем $G^1 = G$, а граф G^i - граф G^{i-1}, с добавленными ребрами, соответствующими простым цепям в графе G с длиной $l_\mu = 2$

2.5 Конденсирование орграфов, понятие подграфа

Определение 39: Граф-конденсат для G

Такой граф $G*$, что в нем сильные подграфы заменены вершинами.

Замечание. Граф конденсат сохраняет свойства связности исходного графа.

Определение 40: Подграф $G_1(X_1, U_1)$ графа G

Такой граф, порожденный множеством вершин $X_1 \subseteq X$ (если $|X_1| < |X$, то это **собственный** подграф).
Множество $U_1 \subseteq U$ строится по следующему правилу: $\forall (x, y) \in U_1 : x, y \in X_1$.

2.6 Минимальные маршруты в связном графе

Виды минимальных маршрутов в графе

- По длине, т.е. кол-во ребер в пути минимально.
- По весу, т.е. сумма весов ребер минимальна.

2.7 Метрические характеристики связного графа

Пусть дан связный псевдограф $G(X, U)$, в котором дуги заменены на ребра.
Расстоянием между вершинами будет величина $d(x_i, x_j)$, определяемая длиной минимального маршрута между ними такая, что:

1. $d(x_i, x_j) << \infty$
2. $d(x_i, x_j) \geq 0 \qquad (= 0 \implies x_i = x_j)$
3. $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$
4. $d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)$ - неравенство треугольника.

Определение 41: Эксцентриситет вершины x_i

Максимальное удаление от вершины x_i в графе:

$$r(x_i) = \max_{j=1}^{n} d(x_i, x_j)$$

Определение 42: Диаметр графа $D(G)$

Максимальный эксцентриситет в графе.

$$D(G) = \max_{i,j=\overline{1,n}}^{n} d(x_i, x_j) = \max_{i=1}^{n} r(x_i)$$

Определение 43: Радиус графа $R(G)$

Минимальный эксцентриситет в графе.

Определение 44: Центр графа $X_c \subseteq X$

Множество вершин, удовлетвоющих следующему условию: $\forall x \in X_c : r(x) = R(G)$

Определение 45: Периферия графа $X_p \subseteq X$

Множество вершин, удовлетвоющих следующему условию: $\forall x \in X_p : r(x) = D(G)$

Глава 3

Циклы в графах

3.1 Циклы в графах

Определение 46: Цикл

Замкнутая цепь в неографе, т.е. цепь, в которую добавили ребро, инцидентное вершинам начала и конца цепи.
Длина цикла $l \geq 3$.

Определение 47: Простой цикл

Замкнутая простая цепь в неографе.

3.2 Циклы в орграфах

Определение 48: Ориентированный цикл (контур)

Замкнутый путь в орграфе.

Определение 49: Простой контур

Замкнтуый простой путь в орграфе.

Определение 50: (Простой) Полуконтур

(Простой) Контур, построенный в орграфе без учета направеления дуг.

3.3 Независимые циклы в графе

Определение 51: Множество циклов графа $C(G)$

Множество, содержащее все различные простые циклы (контуры) этого графа.

Определение 52: Множество независимых циклов графа $C_H(G) \subseteq C(G)$

Множество, содержащее только такие простые циклы (контуры), что каждый цикл (контур) отличается от других хотя бы одним ребром (дугой).

3.4 Циклы Эйлера

Определение 53: Цикл Эйлера

Цикл (контур), проходящий через все ребра (дуги) связанного графа.

Определение 54: Граф Эйлера

Граф, содержащий цикл Эйлера.

Теорема 3.4.1: Критерий распознавания графа Эйлера

Для того, чтобы связный неограф содержал цикл Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы каждая его вершина имела четную степень.

Определение 55: Полуэйлеровый граф

Такой граф, что он не является графом Эйлера, но после добавления одного ребра (дуги) становится им.

Определение 56: Цепь Эйлера

Цепь (путь), в который добавляется ребро (дуга).

3.5 Циклы Гамильтона

Определение 57: Цикл Гамильтона

Простой цикл (контур), проходящий через все вершины связного графа.

Определение 58: Гамильтонов граф

Граф, содержащий хотя бы один цикл Гамильтона.

Теорема 3.5.1: Теорема Дирака

Если в связном графе $n \geq 3$ выполняется условие $\forall x \in X : \rho(x) \geq \frac{n}{2}$, то данный граф является Гамильтоновым графом.

Определение 59: Полугамильтонов граф

Граф, в котором отсутствуют циклы Гамильтона, но после добавления одного ребра он становится таковым.

Теорема 3.5.2: Теорема Перепелицы

Почти все связные графы являются графами Гамильтона.

Глава 4

Деревья

4.1 Понятие дерева, леса

Определение 60: Дерево

Связный граф без циклов.

Определение 61: Лес

Несвязный граф, каждая компонента связности которого является деревом.

Замечание. На n вершинах можно построить n^{n-2} деревьев.

4.2 Свойства деревьев

Свойства (Свойства деревьев)**.**

- *Если n, m-граф - дерево, то $m = n - 1$.*
- *Если n, m-граф - лес, то $m = n - k$, k - количество компонент связности.*
- *Если граф - дерево, то каждое его ребро (дуга) - мост, т.е. дерево - минимально связный граф.*
- *Любые две вершины дерева соединены единственной простой цепью.*
- *Если граф - дерево, то в нем есть хотя бы пара вершин с $\rho(x) = 1$ $(\rho^+(x) = 1, \rho^-(x) = 1)$.*
- *Если граф - дерево, то добавление в него нового ребра, инцидентного двум различным вершинам приведет к образованию цикла.*
- *Если граф - дерево, то добавление в него новой вершины с инцидентным ей ребром с осхранением связности приводит к построению нового дерева.*
- *Если связный граф не является деревом, то удаляя из циклов ребра, не нарушая связности, то получим дерево. Число ребер для удаления - $m - n + 1$.*

4.3 Остовное дерево связного графа, понятие суграфа

Определение 62: Остовное дерево связного графа

Суграф этого графа со свойствами дерева.
Суграфом графа $G(X, U)$ - новый граф $G_1(X, U_1)$, в котором $U_1 \subseteq U$ порождает этот суграф.
Суграф собственный, если $|U_1| < |U|$.

4.4 Алгоритм построения остовного дерева графа

Проходим все вершины из первой с помощью обхода в глубину/ширину, не посещая одну и ту же вершину дважды. Оставляем только те ребра, по которым проходили.

4.5 Теорема Прима о минимальном остовном дереве графа

Пусть $G(X, U)$ - связный взвешенный обыкновенный неограф, а $T = \{T_1(X, U_1), T_2(X, U_2), \ldots\}$ - множество всех его различных остовных деревьев.

Определение 63: Минимальное остовное дерево (дерево Прима)

Остовное дерево графа $T^* \in T$ с минимальным суммарным весом ребер.

Теорема 4.5.1: Теорема Прима

Если в дерево $T'(X', U')$, являющееся поддеревом МОД $T^*(X, U^*)$ графа $G(X, U)$, добавить новое ребро $(x, y) \in U$ с минимальным весом такое, что $x \in X' \wedge y \notin X'$, то построенный таким образом граф $T''(X'', U'')$ также будет поддеревом МОД $T*$ графа G.

Доказательство. Пусть есть поддерево МОД графа G - $T'(X', U')$, $X' = \{x_1, x_2, x_3\}$
Определим множество ребер претендующих на включение в МОД.
Построим граф $T''(X'', U'')$ путем добавления в граф T' вершины x_i вместе с инцидентным ей ребром (x_3, x_i), т.к. данное ребро имеет наименьший вес среди претендующих. Полученный граф T'' - дерево, это поддерево T^*, т.к. приращение веса минимально. □

4.6 Корневые деревья

Определение 64: Корневое дерево

Связный орграф $G(X, U)$, со следующими свойствами:

- Вершина x_0 - корень.
- Есть вершины x - листья.
- Есть единственный путь из корня в x.
  $\forall x \in X \setminus \{x_0\} : \exists! \mu = (x_0, \ldots, x)$.

Определение 65: Глубина вершины $v(x)$

Длина путь $\mu = (x_0, \ldots, x)$.

Определение 66: Высота вершины $h(x)$

Длина максимального пути от x до одного из листьев дерева.

Определение 67: Уровень вершины y(x)

$y(x) = h(x_0) - v(x)$

4.7 Двоичные деревья

Определение 68: Упорядоченное дерево

Корневое дерево, в котором у каждого отца множество сыновей упорядочено в некотором отношении порядка.

Определение 69: Двоичное дерево

Упорядоченное дерево, в котором

- Каждый сын отца либо левый, либо правый.
- Каждый отец имеет не более одного левого и не более одного правого сына.

Определение 70: Полное двоичное дерево высоты H

Такое двоичное дерево, что:

- $v(x) < H \implies$ есть левый и правый сын.
- $v(x) = H \implies$ эта вершина - лист.

Замечание. Полное двоичное дерево высоты H содержит $n = 2^{H+1} - 1$.

Глава 5

Оптимизация на графах

5.1 Понятие экстремального числа графа. Цикломатическое число графа

Определение 71: Экстремальное число графа G

Оценка решения некоторой оптимизационной задачи для данного графа.

Определение 72: Цикломатическое число графа $\sigma(G)$

Количество ребер, которое надо удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево.

$$\sigma(G) = m - n + k$$

Для связного графа $k = 1$.

Теорема 5.1.1: Об основном свойстве цикломатического числа графа

$\sigma(G)$ определяет максимальное количество независимых циклов в нем.

Доказательство. Удалим из графа все вершины вместе с инцидентными им ребрами: $\forall x \in X : \rho(x) = 1[\rho^+(x) = 1 \wedge (\vee)\rho^-(x) = 1]$. Получим новый граф $G^*(X^*, U^*)$, $\sigma(G^*) = \sigma(G)$, т.к. ребра не входят ни в один цикл.
Построим остовное дерево графа G^*. И начнем добавлять в него по одному ребру из G^*, на каждом шаге будет появляться новый независимый (в нем есть новое число, которое не могло участвовать в других циклах) цикл. В остовном дереве циклов нет. □

5.2 Число внутренней устойчивости графа

Определение 73: Число внутренней устойчивости (число независимости) $\alpha_0(G)$

Максимальное количество вершин в графе, не смежных между собой.
$\alpha_0(G) = [1, n]$, $\alpha_0(G) = 1$, для полного графа.

Определение 74: Внутренне устойчивое множество

Подмножество вершин $F \subseteq X$, для которого выполняется свойство внутренней устойчивости - $\forall x \in F : F \cap \Gamma(x) = \emptyset$.

Определение 75: Максимальное ВУМ

Такое ВУМ, которое нельзя увеличить по мощности за счет других врешин графа без нарушения свойства внутренней устойчивости.

Определение 76: Наибольшее ВУМ

Максимальное ВУМ с наибольшим числов вершин графа G.
Количество вершин в наибольшем ВУМ определяет $\alpha_0(G)$.

Замечание. Верхняя оценка $\alpha_0(G)$ для связного остовного графа:

$$\alpha_0(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{(n - \frac{1}{2})^2 - 2m}$$

5.3 Кликовое число графа, понятие графа-дополнения

Определение 77: Кликовое число $\varphi(G)$

Максимальное количество вершин в графе, смежных между собой.
$\varphi(G) = [1, n]$, $\varphi(G) = 1$ для пустого графа.

Определение 78: Клика

Максимальный полный подграф в графе, т.е. такой полный подграф, который нельзя расширить за счет других вершин без нарушения его полноты.

Определение 79: Наибольшый полный подграф

Клика с наибольшим количеством вершин. Это и определяет $\varphi(G)$.

Определение 80: Граф-дополнение скелетного графа $G(X, U)$

Новый граф $G_1(X, U_1)$, в котором $U_1 = U_n \backslash U$. U_n - множество ребер полного графа, построенного на вершинах этого графа.

5.4 Хроматическое число графа

Определение 81: Хроматическое число графа $\chi(G)$

Минимальное количество цветов для вершинной раскраски графа.

Определение 82: Вершинная раскраска графа

Операция, в результате которой любые две смежный вершины раскрашиваются в различные цвета.
$\chi(G) = [1, n]$, $\chi(G) = 1$ для пустого графа.

Замечание. Для любого связного графа $\chi(G) \leq \rho^*(x) + 1$, где $\rho^*(x) = \max_{i=1}^{n} \rho(x_i)$.

Замечание. $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \geq n$

5.5 Число внешней устойчивости графа

Определение 83: Число внешней устойчивости (число вершинного покрытия) графа $\beta_0(G)$

Минимальное число вершин, образами (инцидентные вершины) которых являются все остальные вершины этого графа.

Замечание.

- Графы с изолированный вершинами не имеют вершинного покрытия.
- $\exists x \in X : \rho(x) = n - 1 \implies \beta_0(G) = 1$

Определение 84: Внешне устойчивое множество графа

Такое множество $R \subseteq X : R \cup \Gamma(R) = X, \qquad \Gamma(R) = \cup_{\forall x \in R} \Gamma(X)$

Определение 85: Минимальная опора

Такая опора, которую нельзя уменьшить по мощности с сохранением свойства внешней устойчивости.

Определение 86: Наименьшая опора

Минимальная опора в графе с наименьшим числом вершин. Это число и определяет $\beta_0(G)$.

Определение 87: Число кликового покрытья $\beta_\varphi(G)$

Наименьшее число клик для вершинного покрытия.

Замечание. $\beta_\varphi(G) \geq \beta_0(G)$

5.6 Число паросочетаний графа

Определение 88: Число паросочетания (число независимости ребер) графа $\alpha_1(G)$

Максимальное количество несмежных между собой ребер графа. Число паросочетаниия ографа определяется после замены всех дуг на ребра.

Замечание. В связном графе $\alpha_1(G) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Определение 89: Паросочетание

Любое подмножество не смежных ребер.

Определение 90: Максимальное паросочетание

Паросочетание, которое нельзя расширить без нарушения свойст независимости ребер.

Определение 91: Наибольшее паросочетание

Максимальное паросочетание с наибольшим числом ребем. Оно и определяет $\alpha_1(G)$.

5.7 Число реберного покрытия графа

Определение 92: Число реберного покрытия графа $\beta_1(G)$

Минимальное количество ребер для покрытия всех вершин графа. Графы с изолированными вершинами не имеют реберного покрытия.

Замечание. В связном графе $\left[\frac{n}{2}\right] \leq \beta_1(G) \leq m$.

Определение 93: Реберное покрытие графа

Любое подмножество ребер графа, которе покрывают все вершины.

Определение 94: Минимальное реберное покрытие

Такое реберное покрытие, которое нельзя уменьшить без нарушения свойств.

Определение 95: Наименьшее реберное покрытие

Минимальное реберное покрытие с наименьшим числом ребем. Оно и определяет $\beta_1(G)$.