Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$\frac{u'}{x} - \cancel{\frac{u}{x^2}} + \cancel{\frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x}} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{u^2}{x^2} \Leftrightarrow u' = u^2 \cdot \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\Bigg/ \begin{array}{lll} u & = & \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ \upsilon & = & -\frac{1}{x}, \quad d\upsilon = \frac{1}{x^2} dx. \end{array} \Bigg/$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow u = \frac{x}{1 + Cx + \ln x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}}.$$

1.7 Уравнения в полных дифференциалах

Определение

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{44}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$M dx + N dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \tag{45}$$

Условие того, что $Mdx+Ndy$ представляет собой полный дифференциал:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{46}$$

Если это условие выполнено, то восстановить функцию $u(x,y)$ с точностью до константы по её известному полному дифференциалу

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{47}$$

можно с помощью криволинейного интеграла. А именно, зафиксируем некоторую точку (x_0, y_0). Тогда криволинейный интеграл

$$u(x,y) = \int\limits_L \big(M(x,y)dx + N(x,y)dy\big) \tag{48}$$

по произвольной кривой от точки (x_0, y_0) до текущей точки (x,y) даст значение функции $u(x,y)$, дифференциал которой имеет вид (47). Изменение начальной точки (x_0, y_0) приводит к добавлению постоянной (функция $u(x,y)$ находится с точностью до константы).

Формула (48) принимает более удобный вид, если кривую L выбрать в виде ломаной, показанной на рисунке.

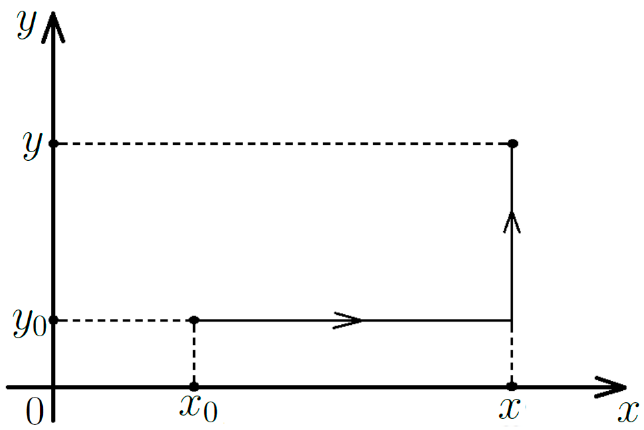

Рис. 4: Кривая интегрирования L

При таком выборе L имеем:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy. \tag{49}$$

Соответственно, решение уравнения:

$$u(x,y) = C. \tag{50}$$

Пример

$$(\sin(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy = 0.$$

Проверим, что левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) =$$

$$= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy),$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).$$

Таким образом, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ и мы можем воспользоваться формулой (49). В качестве точки (x_0, y_0) выберем начало координат $(0, 0)$. Тогда:

$$u(x, y) = \int_0^x (\sin(x\cdot 0) + x\cdot 0\cdot\cos(x\cdot 0))dx + \int_0^y x^2\cos(xy)dy =$$

$$= x\cdot\sin(xy)\Big|_0^y = x\sin(xy) = C.$$

Итак, общий интеграл уравнения:

$$\underline{x\sin(xy) = C.}$$

Интегрирующий множитель.

В некоторых случаях, когда уравнение $Mdx + Ndy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах, удаётся подобрать функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения превращается в полный дифференциал:

$$du = \mu M dx + \mu N dy. \tag{51}$$

Такая функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем. Напишем условие того, что du является полным дифференциалом:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}}_{\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}} - M \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}}_{\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{52}$$

Таким образом, для нахождения интегрирующего множителя мы получим уравнение в частных производных. Иногда удаётся найти его решение. Если $\mu = \mu(x)$, то $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ и уравнение (52) примет вид:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{53}$$

Если правая часть уравнения не зависит от y, то $\ln \mu$ находится интегрированием.

Пример

$$\underbrace{\left(x + y^2\right)}_{M} dx \underbrace{-2xy}_{N} dy = 0.$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Тогда уравнение (53) примет вид:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \ln \mu = -2 \ln |x| + C.$$

Поскольку интегрирующий множитель $\mu(x)$ – это одно из решений уравнения (53), то выберем $C = 0$. Тогда:

$$\ln \mu = -2\ln|x| = \ln\frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Домножим исходное уравнение на $\mu = \frac{1}{x^2}$:

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - 2\frac{xy}{x^2}dy = 0.$$

Мы получили уравнение в полных дифференциалах. В качестве точки (x_0, y_0) выберем $(1, 0)$. Тогда:

$$u(x,y) = \int\limits_1^x \frac{1}{x}dx - 2\int\limits_0^y \frac{y}{x}dy = \ln|x| - \frac{y^2}{x} = C.$$

Итак, общий интеграл уравнения:

$$\underline{x = C_1 \cdot e^{\frac{y^2}{x}}}.$$

1.8 Особые решения дифференциальных уравнений

Определение

Решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{54}$$

называется особым, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, то есть если через каждую его точку (x_0, y_0) кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в точке (x_0, y_0) ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности (x_0, y_0). График особого решения будем называть особой интегральной кривой уравнения (54).

Пример

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{3y^{\frac{2}{3}}} \leftarrow \text{здесь мы предполагаем, что } y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx \Leftrightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + C \Leftrightarrow y = (x+C)^3$$

Таким образом, интегральные кривые – это семейство кубических парабол, получаемых параллельными переносом вдоль оси OX.

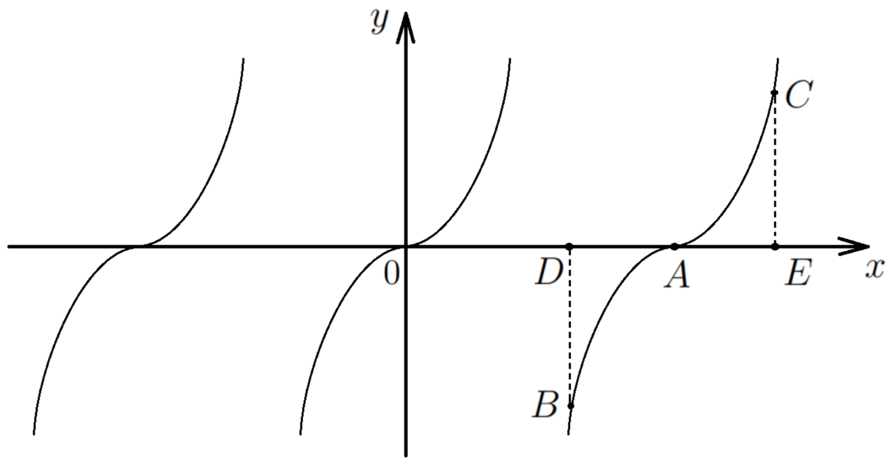

Рис. 5: Интегральные кривые $y = (x+C)^3$.

Однако, уравнение имеет ещё решение $y = 0$, которое не содержится в общем решении. Дело в том, что частная производная по y от правой части уравнения равна $2y^{-\frac{1}{3}}$, то есть не существует при $y = 0$. А значит теорема Пикара о существовании и единственности решения дифференциального уравнения будет выполнена только при $y > 0$ и при $y < 0$. Эти области заполнены параболами. Через каждую точку проходит только одна парабола.

Через точку $(x_0, 0)$ проходит ещё решение $y = 0$, то есть единственности решения нет. Если выделить отрезок $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$, то в нём определены четыре решения уравнения:

1) Парабола BAC;

2) Отрезок оси DAE;

3) Линия BAE (парабола и отрезок оси);

4) Линия DAC (отрезок оси и парабола).

Действительно, в уравнении участвует только функция y и её производная y'. При $y = 0$ функция y и производная y' сохраняют непрерывность, в том числе при переходе с прямой на параболу. Таким образом, можно свободно переходить с параболы на прямую и составлять любые их комбинации без нарушения уравнения. Итак, через каждую точку $(x_0, 0)$ на оси проходит "в малом" (то есть для сколь угодно малого δ) четыре итегральные кривые.

Если взять точку (x_0, y_0) при $y_0 > 0$, то через неё проходит единственная парабола. Но если, спускаясь по указанной параболе, мы дойдём до оси OX, то там у нас есть бесконечно много возможностей продолжать эту интегральную линию:

а) Спускаться по той же параболе;

б) Идти по оси;

в) Идти по оси направо, а затем подниматься по другой параболе;

И так далее.

Таким образом, через каждую точку плоскости не "в малом ", а "в целом" проходит бесконечно много интегральных кривых.

С вопросом об особых решениях тесно связаны теория бифуркаций и теория катастроф. Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Теория бифуркаций изучает изменение качественной картины при изменении параметров, от которых зависит система. В частности, при каких значениях параметров происходит разветвление или слияние интегральных кривых для дифференциальных уравнений, описывающих данную систему.

2 Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1 Основные понятия

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$\Phi\Big(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\Big) = 0, \tag{55}$$

или, в решённом относительно старшей производной $y^{(n)}$, вид

$$y^{(n)} = f\Big(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\Big). \tag{56}$$

Всякая функция $y(x)$, имеющая непрерывные производные вплоть до n-го порядка и удовлетворяющая уравнению (55) или (56), называется решением этого уравнения, а сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется задачей интегрирования дифференциального уравнения.

Пример

Рассмотрим прямолинейное движение точки массы m под действием силы $\vec{F}=\vec{F}\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$. Силу $\vec{F}$ считаем функцией времени t, координаты x и скорости $\frac{dx}{dt}$. Здесь мы приняли прямую, по которой движется точка, за ось OX. Второй закон Ньютона даёт нам дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{57}$$

Итегрирование уравнения (57) определит зависимость x от t. Для получения определённого решения задачи мы должны задать ещё начальные условия движения, а именно положение точки и её скорость в некоторый начальный момент времени, например при $t = 0$:

$$\begin{cases} x\Big|_{t=0} = x_0, \\ \\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = x_0'. \end{cases} \tag{58}$$

Для уравнения n-го порядка (55) или (56) начальные условия состоят в задании функции y и её производных до $(n-1)$-го порядка включительно при некотором значении $x = x_0$:

$$\begin{cases} y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} = y_0', \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{59}$$

Здесь $x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots\dots,\ y_0^{(n-1)}$ – определённые числа.

Для уравнения n-го порядка (56) имеет место теорема существования и единственности, аналогичная теореме Пикара.

Теорема 3 (Теорема существования и единственности решения) Пусть функция $f\left(x, y, y', \dots\dots, y^{(n-1)}\right)$ однозначна, непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', \dots\dots,\ y^{(n-1)}$ при значениях аргументов $\left(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots\dots,\ y_0^{(n-1)}\right)$ и всех значениях, достаточно близких к ним. Тогда уравнение (56) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (59).

Без доказательства.

Общее решение дифференциального уравнения можно определить по аналогии с формулами (5) и (6) для уравнения 1-го порядка.

Определение

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка – это семейство функций

$$y = \varphi\big(x, C_1, C_2, \dots\dots, C_n\big), \tag{60}$$

удовлетворяющих уравнению при любых значениях $C_1, C_2, \dots\dots, C_n$. Также это семейство должно удовлетворять условиям, что при любых начальных условиях найдётся такой набор постоянных $C_1, C_2, \dots\dots, C_n$ такой, что функция $\varphi\big(x, C_1, C_2, \dots\dots, C_n\big)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

Общее решение может быть записано и в неявном виде:

$$\psi\big(x, y, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n\big) = 0. \tag{61}$$

Придавая $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ определённые значения, получим частное решение уравнения (56).

2.2 Уравнения, допускающие понижение порядка

1) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Уравнение $y^{(n)} = f(x)$ решается с помощью n-кратного интегрирования.

Пример

$$y''' = \sin x \;\Leftrightarrow\; y'' = -\cos x + C_1 \;\Leftrightarrow\; y' = -\sin x + C_1 x + C_2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; y = \cos x + \frac{C_1}{2} \cdot x^2 + C_2 x + C_3.$$

2) Уравнения вида $\Phi\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

Здесь уравнение не содержит функции y и её нескольких последовательных производных $y', y'', \ldots\ldots, y^{(k-1)}$.

Сделаем замену:

$$z(x) = y^{(k)}. \tag{62}$$

Тогда порядок уравнения понизится на k единиц:

$$\Phi\left(x, z, z', \ldots\ldots, z^{(n-k)}\right) = 0. \tag{63}$$

Если мы найдём общий интеграл этого последнего уравнения

$$z = \varphi\big(x, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_{n-k}\big), \tag{64}$$

то y определится из уравнения:

$$y^{(k)} = \varphi\big(x, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_{n-k}\big). \tag{65}$$

Пример

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Сделаем замену: $y' = z(x)$. Тогда $y'' = \frac{dz}{dx}$.

Подставим y' и y'' в уравнение:

$$z' + \frac{1}{x}z = x \quad \text{– линейное уравнение 1-го порядка.}$$

Замена:

$$z = u \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} \;\Leftrightarrow\; z = u \cdot e^{-\ln|x|} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{u}{|x|} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{u}{x}.$$

/ Знак и константу интегрирования внести в функцию u /

Тогда $z' = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot u'$ и уравнение примет вид:

$$-\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot u' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = x \;\Leftrightarrow\; u' = x^2 \;\Leftrightarrow\; u = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Вернёмся к старым переменным.

$$z = \frac{u}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

$$y' = z \;\Leftrightarrow\; y = \int z dx = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right) dx = \underline{\frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.}$$

3) Уравнения вида $\Phi\left(y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

Здесь уравнение не содержит независимой переменной x.

Примем y за независимую переменную и сделаем замену:

$$y' = p(y). \tag{66}$$

Этим мы понизим порядок уравнения на 1. В ответе получим функцию $x = x(y)$. Найдём, как преобразуются старшие производные при такой замене.

$$y'' = \frac{d}{dx}\Bigg(\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p}\Bigg) = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} = p \cdot \frac{dp}{dy}. \tag{67}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(p(y)\cdot\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dp}{dy} + p(y)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) =$$

$$\Big/ \ \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} \ \Big/$$

$$= \underline{p\cdot\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\cdot\frac{d^2p}{dy^2}}. \tag{68}$$

Пример

$$2yy'' + \left(y'\right)^2 = 0.$$

Сделаем замену: $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$.
Подставим y' и y'' в уравнение:

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad \Big| \cdot\frac{dy}{p} \ \leftarrow \text{ здесь теряем решение } p = 0 \text{ (или } y = C\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\ 2ydp + pdy = 0 \quad \Big| \cdot\frac{1}{2yp} \ \leftarrow \text{ здесь теряем решения: } y = 0 \text{ и } p = 0 \Leftrightarrow y = C$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{dp}{p} + \frac{dy}{2y} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{y}.$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln C_1 \ \Leftrightarrow\ 2\ln|p| + \ln|y| = \ln C_1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln p^2|y| = \ln C_1 \ \Leftrightarrow\ p^2|y| = C_1 \ \Leftrightarrow\ p = \pm\sqrt{\frac{C_1}{|y|}} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} p = \pm\dfrac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{y}} & \text{при } y > 0 \\ \\ p = \pm\dfrac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{-y}} & \text{при } y < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \Big/ p = y' = \frac{dy}{dx} \Big/ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y}dy = \pm\sqrt{C_1}dx,\ y > 0 \\ \\ \sqrt{-y}dy = \pm\sqrt{C_1}dx,\ y < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{C_1}x + C_2, \quad y > 0 \\ \\ \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{C_1}x + C_2, \quad y < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ \frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{C_1}x + C_2$$

$$\Leftrightarrow \ \underline{|y|^{\frac{3}{2}} = \widetilde{C_1}x + \widetilde{C_2}.}$$

Заметим, что в это решение входят потерянные ранее частные решения $y = 0$ и $y = C$.

4) Уравнения вида $\frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\right) = 0$.

Здесь левая часть уравнения представляет собой полную производную по x. Проинтегрировав уравнение, мы понизим его порядок на 1.

Пример

$$e^{x+(y')^2} + 2y'y'' \cdot e^{x+(y')^2} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dx}\left(e^{x+(y')^2}\right) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ e^{x+(y')^2} = C \ \Leftrightarrow \ x + (y')^2 = C_1 \ \Leftrightarrow \ y' = \pm\sqrt{C_1 - x} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ dy = \pm(C_1 - x)^{\frac{1}{2}}dx = \mp(C_1 - x)^{\frac{1}{2}}d(C_1 - x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \underline{y = \mp\frac{2}{3}(C_1 - x)^{\frac{3}{2}} + C_2.}$$

5) Уравнения вида $\Phi\left(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0$,
где Φ – однородная функция относительно $y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}$.

Определение

$\Phi\left(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}\right)$ называется однородной функцией k-го порядка относительно переменных $y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}$, если она удовлетворяет следующему свойству:

$$\Phi\left(x, ty, ty', \ldots\ldots, ty^{(n)}\right) = t^k \cdot \Phi\left(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}\right). \qquad (69)$$

При $y \neq 0$ сделаем замену переменных:

$$z = \frac{y'}{y}. \qquad (70)$$

Тогда производные преобразуются по следующему правилу:

$$y' = zy,$$
$$y'' = z'y + zy' = z'y + z^2 y.$$

И так далее. Таким образом, порядок уравнения понизится на 1. Функцию $y = 0$ следует рассмотреть отдельно.

Пример

$$xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0.$$

Сделаем замену:

$$z = \frac{y'}{y} \;\Leftrightarrow\; y' = zy \quad \Big/ \text{Здесь мы предполагаем, что } y \neq 0 \Big/$$

Соответственно, $y'' = y\big(z' + z^2\big)$.

Подставим y' и y'' в исходное уравнение:

$$xy^2\big(z' + z^2\big) - xz^2y^2 - y^2z = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow\; xz' - z = 0 \;\Leftrightarrow\; xdz = zdx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \;\leftarrow\; \text{здесь теряем решение } z = 0 \Leftrightarrow y = C$$

$$\Leftrightarrow\; \ln|z| = \ln|x| + \ln C \;\Leftrightarrow\; |z| = C|x|,\; C > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ z = C_1 x,\quad C_1 \neq 0\ \Leftrightarrow\ \Big/ z = \frac{y'}{y} \Big/\ \Leftrightarrow\ \frac{y'}{y} = C_1 x\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx} = C_1 xy\ \Leftrightarrow\ \frac{dy}{y} = C_1 x dx\ \Leftrightarrow\ \ln|y| = \frac{C_1 x^2}{2} + \ln C_2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |y| = C_2 \cdot e^{\frac{C_1}{2}x^2},\quad C_2 > 0\ \Leftrightarrow\ y = \widetilde{C_2} \cdot e^{\frac{C_1}{2}x^2},\quad \text{где } \widetilde{C_2} \neq 0,\ C_1 \neq 0.$$

Заметим, что функция $y = 0$ также является решением уравнения. Однако, в процессе решения мы её потеряли. Следовательно, нужно добавить её в ответ. Сделаем это, сняв ограничение на постоянную $\widetilde{C_2}$. Аналогично поступим с решением $y = C$, сняв ограничение на C_1.

Ответ: $\underline{y = C_3 \cdot e^{\frac{C_4}{2}x^2}.}$