Пусть φ – угол между вектором силы $\overrightarrow{F}$ и осью OX, θ – угол между $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ и $\overrightarrow{F}$. Элементарная работа dA_i при перемещении от точки M_i к точке M_{i+1} будет равна:

$$dA_i = F \cdot \cos\theta \cdot dl_i, \quad \text{где } \; dl_i = |M_iM_{i+1}|. \tag{5.45}$$

Следовательно, полная работа:

$$A = \int\limits_{\mathcal{L}} F\cos\theta \cdot dl. \tag{5.46}$$

$$\theta = \varphi - \alpha \;\Rightarrow\; \cos\theta = \cos\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\varphi \cdot \sin\alpha.$$

Тогда формулу (5.46) можно переписать в виде:

$$A = \int\limits_{\mathcal{L}} \Big(\underbrace{F\cos\varphi}_{F_x}\cos\alpha + \underbrace{F\sin\varphi}_{F_y}\sin\alpha\Big)dl =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{L}} (F_x\cos\alpha + F_y\sin\alpha)\,dl = \int\limits_{\mathcal{L}} (F_x dx + F_y dy) = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot \vec{dl}. \tag{5.47}$$

Аналогично в трехмерном случае:

$$A = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int\limits_{\mathcal{L}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)\,. \tag{5.48}$$

Определение

Если кривая $\mathcal{L}$ замкнута, то криволинейный интеграл 2 рода обозначается символом $\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot \vec{dl}$ и называется циркуляцией векторного поля по контуру $\mathcal{L}$.

5.12 Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Вычислительный эксперимент

Посмотрим, как влияет форма кривой на величину криволинейного интеграла 2 рода.

Примеры

1) Вычислим $\int\limits_{\mathcal{L}} 2xydx$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$ вдоль следующих кривых:

а) $\mathcal{L}_1: \; y = x$,

б) $\mathcal{L}_2: \; y = x^2$.

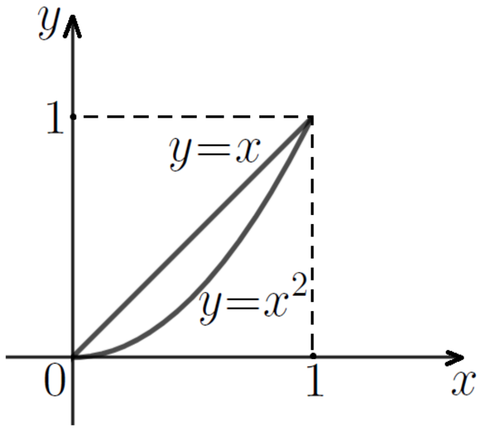

Рис. 39: Кривые интегрирования $y = x$ и $y = x^2$

Согласно формуле (5.42):

$$\int\limits_{AB} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))\,dx.$$

$$\textbf{а)} \quad \int\limits_{\mathcal{L}_1} 2xydx = \int\limits_{y=x} 2xydx = \int\limits_0^1 2x \cdot xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$\textbf{б)} \quad \int\limits_{\mathcal{L}_2} 2xydx = \int\limits_{y=x^2} 2xydx = \int\limits_0^1 2x \cdot x^2dx = \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Получившиеся интегралы не равны друг другу. Следовательно, интеграл зависит от формы кривой.

2) Тепеперь вычислим другой интеград $\int\limits_{\mathcal{L}} \left(2xydx + x^2dy\right)$ вдоль тех же самых кривых:

а) $\mathcal{L}_1: \; y = x$,

б) $\mathcal{L}_2: \; y = x^2$.

$$\textbf{а)} \quad \int\limits_{\mathcal{L}_1} \left(2xydx + x^2dy\right) = \int\limits_0^1 \left(2x \cdot xdx + x^2dx\right) = \int\limits_0^1 3x^2dx = x^3\Big|_0^1 = 1,$$

а) $$\int\limits_{\mathcal{L}_2}\left(2xydx+x^2dy\right)=\int\limits_0^1\left(2x\cdot xdx+x^2\cdot\underbrace{2xdx}_{dy}\right)=\int\limits_0^1 4x^3dx=x^4\Big|_0^1=1.$$

Как видим, $\int\limits_{\mathcal{L}}\left(2xydx+x^2dy\right)$ не изменился при изменении кривой интегрирования. Попробуем выяснить, случайно ли это совпадение.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Теорема 4

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)$ не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальное выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом от некоторой однозначной функции двух переменных. Здесь $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ предполагаются непрерывными функциями.

Доказательство:

Необходимость.

Пусть $\int\limits_{AB}(Pdx+Qdy)$ не зависит от формы пути. В этом случае интеграл однозначно определяется заданием точек $A(x_0,y_0)$ и $B(x_1,y_1)$ и его можно обозначить символом

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}(Pdx+Qdy)\,. \qquad (5.49)$$

Путь интегрирования здесь не указан, но он безразличен в силу предположения. Зафиксируем точку $A(x_0,y_0)$. Точку $B(x_1,y_1)$ заменим произвольной точкой $M(x,y)$ в области D. Тогда вместо интеграла (5.49) можно рассмотреть функцию $F(x,y)$:

$$F(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(Pdx+Qdy)\,. \qquad (5.50)$$

Возьмем произвольную точку $B(x_1,y_1)$ в области D, придадим x_1 приращение $\triangle x$ и перейдем к точке $C(x_1+\triangle x,y_1)$, которая при достаточно малом $\triangle x$ будет принадлежать D вместе со всем отрезком BC.

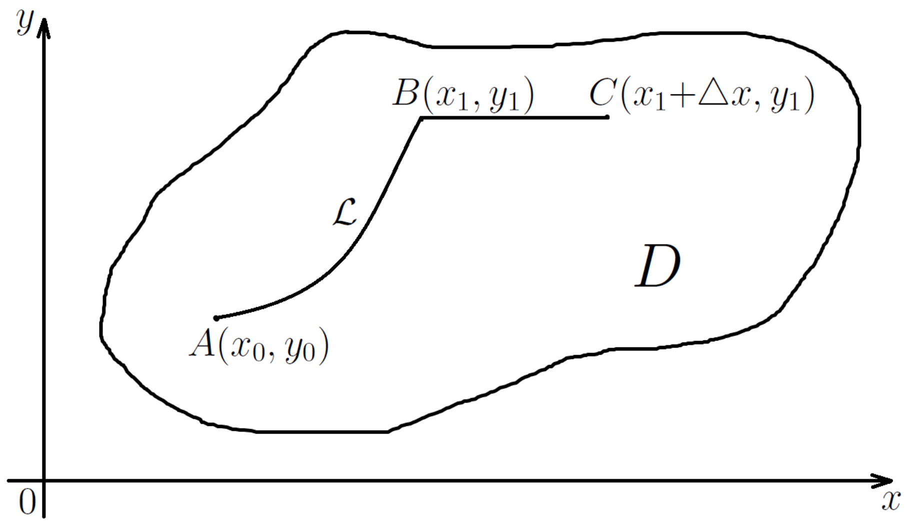

Рис. 40: Пути интегрирования

$$F(x_1, y_1) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} (Pdx + Qdy)\,, \tag{5.51}$$

$$F(x_1 + \triangle x, y_1) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\triangle x,y_1)} (Pdx + Qdy)\,. \tag{5.52}$$

Интеграл (5.51) возьмем по произвольной кривой $\mathcal{L}$, соединяющей точки A и B, интеграл (5.52) – по кривой $\mathcal{L}$ и отрезку BC. Составим приращение для функции $F(x, y)$:

$$F(x_1 + \triangle x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{BC} (Pdx + Qdy) -$$

$$- \int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{BC} (Pdx + Qdy) = \Big/ dy = 0 \text{ так как } BC \perp OY \Big/ =$$

$$= \int\limits_{BC} P(x, y)dx = \int\limits_{x_1}^{x_1+\triangle x} P(x, y_1)dx = \Big/ \text{по теореме о среднем} \Big/ =$$

$$= P(x_1 + \theta\triangle x, y_1) \cdot \triangle x, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Следовательно,

$$\frac{F(x_1 + \triangle x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\triangle x} = P(x_1 + \theta\triangle x, y_1). \tag{5.53}$$

Тогда при $\triangle x \to 0$ получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1) = P(x_1, y_1). \tag{5.54}$$

Аналогично получается формула:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1). \tag{5.55}$$

Так как точка (x_1, y_1) была выбрана произвольным образом, то соотношения (5.54), (5.55) будут выполнены для всех точек области D. Следовательно, полный дифференциал функции $F(x, y)$ примет вид:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = \Big/\text{формулы (5.54), (5.55)}\Big/ = Pdx + Qdy, \tag{5.56}$$

что совпадает с подынтегральным выражением. Таким образом, если криволинейный интеграл не зависит от формы пути, то подынтегральное выражение является полным дифференциалом.

<u>Достаточность.</u>

Пусть подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой полный дифференциал от некоторой однозначной функции $\Phi(x, y)$:

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{5.57}$$

Рассмотрим некоторую гладкую кривую $\mathcal{L}$, соединяющую точки A и B :

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta. \tag{5.58}$$

Пусть при изменении параметра t от α до β кривая описывается в направлении от A к B. Вычислим криволинейный интеграл:

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \Big/\text{формулы (5.35) и (5.36)}\Big/ =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\right) dt = \Big/(5.57)\Big/ =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\psi'(t)\right) dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\Phi(\varphi(t), \psi(t))dt =$$

$$= \Phi(\varphi(t), \psi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) =$$
$$= \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A) = \Phi(B) - \Phi(A), \qquad (5.59)$$

то есть интеграл не зависит от формы кривой и определяется только начальной и конечной точками A и B.

■

5.13 Восстановление функции по ее полному дифференциалу

Теорема 5 (Признак полного дифференциала функции)
Рассмотрим прямоугольную область D. Пусть частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны. Тогда для того, чтобы дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом функции, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (5.60)$$

Доказательство:

Необходимость.

Пусть существует такая функция $\Phi(x, y)$, что имеют место равенства:

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \qquad (5.61)$$

Тогда:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

В силу непрерывности частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достаточность.

Пусть условие (5.60) выполнено во всех точках прямоугольной области D. Построим в D функцию $\Phi(x, y)$, которая будет удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), & (5.62) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y), & (5.63) \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение (5.62) по x от x_0 до x при любом фиксированном значении y :

$$\Phi(x,y) - \Phi(x_0,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx \;\Leftrightarrow\; \Phi(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \Phi(x_0,y). \tag{5.64}$$

Проинтегрируем уравнение (5.63) по y от y_0 до y при $x = x_0$:

$$\Phi(x_0,y) - \Phi(x_0,y_0) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \;\Leftrightarrow\; \Phi(x_0,y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \Phi(x_0,y_0). \tag{5.65}$$

Подставляя выражение для $\Phi(x_0,y)$ из (5.65) в (5.64), получаем:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C, \quad \text{где } C = \Phi(x_0,y_0) = const. \tag{5.66}$$

Проверим, что полученная функция удовлетворяет условиям (5.62), (5.63). Действительно:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \tag{5.67}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + Q(x_0,y) = \Big/ \begin{matrix}\text{дифференцирование} \\ \text{интеграла по параметру}\end{matrix} \Big/$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{=\frac{\partial Q}{\partial x}} \cdot dx + Q(x_0,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + Q(x_0,y) =$$

$$= Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + Q(x_0,y) = Q(x,y), \tag{5.68}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если бы мы начали с интегрирования по y, то пришли бы к следующему выражению для искомой первообразной:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C, \tag{5.69}$$

лишь по форме отличающееся от формулы (5.66).

■

Обобщение на случай произвольной области

Определение

Область называется односвязной, если для любого простого замкнутого контура, лежащего в области D, будет выполнено: ограниченная извне этим контуром область должна целиком принадлежать области D. Другими словами, простой замкнутый контур непрерывным преобразованием может быть стянут в точку.

Замечание

Если рассматривать конечную область, то понятие односвязности можно сформулировать еще проще: область должна быть ограничена единственным замкнутым контуром.

Рассмотрим односвязную область. Теорема 5 дает нам способ восстановления первообразной по ее полному дифференциалу в прямоугольнике. Для того чтобы восстановить первообразную в произвольной точке области D, построим цепочку касающихся прямоугольников от исходной до конечной точки.

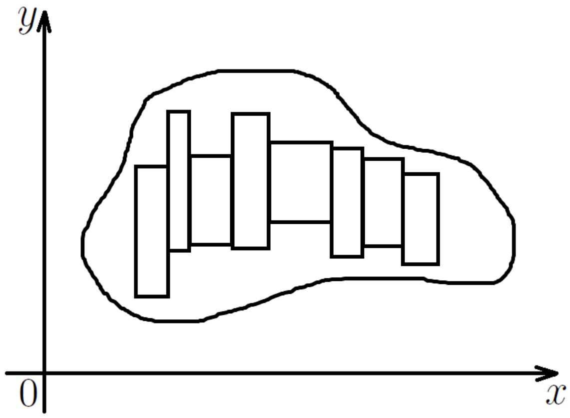

Рис. 41: Односвязная область

Последовательно восстанавливаем первообразную в каждом из прямоугольников, согласуя константы на общих частях границы прямоуголььников. Таким образом, в односвязной области первообразная будет определена однозначно.

В многосвязной области этот прием не работает, так как при различных путях перехода от одного прямоугольника к другому могут получиться разные ответы (при стыковке прямоугольников константы не совпадут).

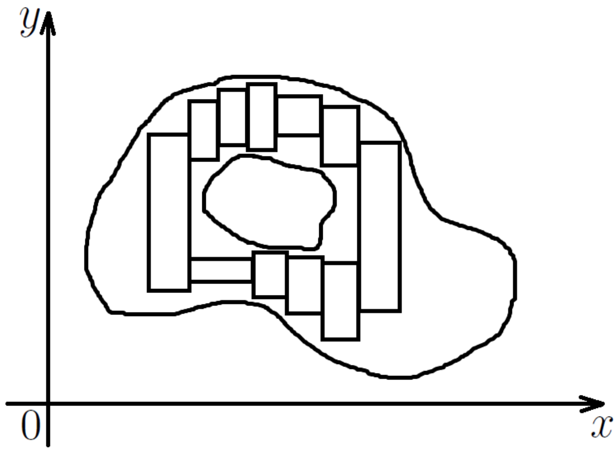

Рис. 42: Многосвязная область

Теорема 6

Независимость интеграла от пути интегрирования в некоторой области эквивалентна тому, что интеграл по любому простому замкнутому контуру в этой области равен нулю.

Доказательство:

Пусть интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Докажем, что интеграл не зависит от пути. Возьмем произвольные точки A и B и соединим их двумя кривыми ACB и ADB. Интеграл по нему равен нулю:

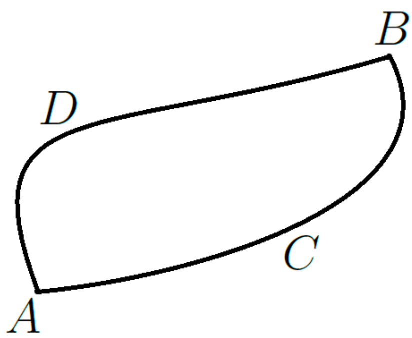

Рис. 43: Замкнутый контур $ACBDA$

$$\int\limits_{ACBDA} (Pdx + Qdy) = 0 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{ACB} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{BDA} (Pdx + Qdy) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{ACB} (Pdx + Qdy) = -\int\limits_{BDA} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{ADB} (Pdx + Qdy), \qquad (5.70)$$

что и требовалось доказать.

В обратную сторону. Пусть интеграл не зависит от пути. Возьмем произвольный простой замкнутый контур и выберем на нем точки A и B, которые разобъют его на две дуги ACB и BDA. Из условия независимости интеграла от пути получаем формулу (5.70), откуда, проходя цепочку эквивалентных равенств в обратную сторону, получаем:

$$\int\limits_{ACBDA} (Pdx + Qdy) = 0,$$

что и требовалось доказать.

■

Процедура восстановления функции по ее полному дифференциалу

Пусть известен полный дифференциал функции $F(x, y)$:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy. \tag{5.71}$$

Тогда:

$$F(x, y) = \int\limits_{\mathcal{L}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right), \tag{5.72}$$

где $\mathcal{L}$ – произвольная кривая, соединяющая некоторую точку (x_0, y_0) с фиксированной точкой (x, y). Точка (x_0, y_0) выбирается произвольным образом при единственном условии – в ней не должно нарушаться условие существования дифференциала: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

5.14 Теорема Грина

Теорема 7

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области D, ограниченной кусочно-гладким простым контуром $\mathcal{L}$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{5.73}$$

Доказательство:

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$, где область D представляет собой криволинейную трапецию.

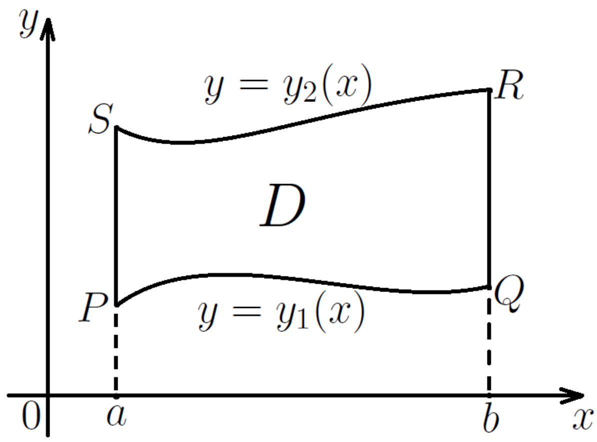

Рис. 44: Область D. Криволинейная трапеция первого типа

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b dx \cdot (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) =$$

Данный определенный интеграл по формуле (5.42) можно представить как разность двух криволинейных интегралов по кривым SR и PQ :

$$= \int\limits_{SR} P(x,y)dx - \int\limits_{PQ} P(x,y)dx = \int\limits_{SR} P(x,y)dx + \int\limits_{QP} P(x,y)dx \qquad (5.74)$$

К правой части формулы (5.74) добавим два нулевых интеграла по вертикальным отрезкам RQ и PS :

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{SR} P(x,y)dx + \underbrace{\int\limits_{RQ} P(x,y)dx}_{=0} + \int\limits_{QP} P(x,y)dx + \underbrace{\int\limits_{PS} P(x,y)dx}_{=0} =$$

$$= \oint\limits_{SRQPS} P(x,y)dx = -\oint\limits_{SPQRS} P(x,y)dx. \qquad (5.75)$$

Формула (5.75) справедлива и для областей более сложного вида, которые можно разбить на конечное число криволинейных трапеций вертикальными прямыми.

Аналогично выводится формула:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{SPQRS} Q(x, y) dy. \qquad (5.76)$$

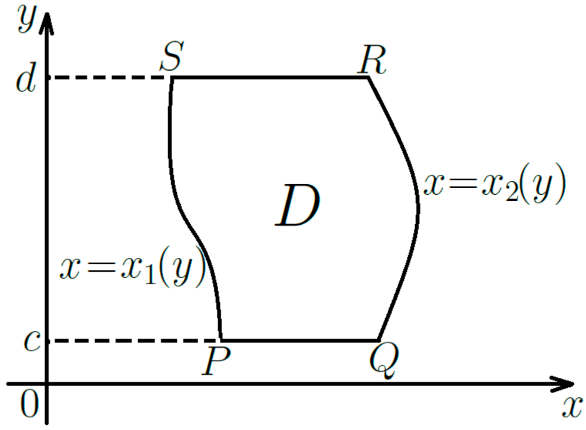

Рис. 45: Область D. Криволинейная трапеция второго типа

Наконец, если область D одновременно удовлетворяет условиям обоих случаев, то есть разлагается на конечное число трапеций как первого, так и второго типов, то для нее будут справедливы обе формулы (5.75) и (5.76). Вычтем из уравнения (5.76) уравнение (5.75). Тогда для замкнутого контура $\mathcal{L}$ получим формулу Грина:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (5.77)$$

Теперь докажем формулу Грина для односвязной области общего вида D с кусочно-гладкой границей $\mathcal{L}$. Впишем в D некоторый многоугольник A и опишем вокруг D многоугольник B. Так как многоугольник можно разбить на криволинейные трапеции, то будет выполнено:

$$\oint\limits_{\partial A} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (5.78)$$

Здесь ∂A обозначает границу области A.

Если длина наибольшей из сторон ломаной ∂A стремится к нулю, то интеграл по ломаной стрмится к интегралу по кривой $\mathcal{L}$. Докажем, что двойной интеграл по многоугольнику A в формуле (5.78) стремится к двойному интегралу по области D. Для этого выберем описанный многоугольник B таким образом, чтобы он отличался по площади от A не более, чем на ε. Для краткости положим $f = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. В силу непрерывности, функция f будет ограничена в многоугольнике B :

$$|f| \leq M. \tag{5.79}$$

Тогда:

$$\left| \iint\limits_D f dxdy - \iint\limits_A f dxdy \right| = \left| \iint\limits_{D \setminus A} f dxdy \right| \leq \iint\limits_{D \setminus A} |f| dxdy \leq$$

$$\leq \iint\limits_{B \setminus A} |f| dxdy \underset{\substack{\uparrow \\ (5.79)}}{\leq} M \cdot \underbrace{\iint\limits_{B \setminus A} dxdy}_{\text{площадь } B \setminus A} \leq M \cdot \varepsilon \longrightarrow 0 \tag{5.80}$$

при измельчении сторон многоугольника. Учитывая (5.80), сделаем предельный переход в формуле (5.78). Получим формулу Грина для односвязной области с кусочно-гладкой границей:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{5.81}$$

Пример неприменимости теоремы 7 (теоремы Грина)

Пусть $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, контур $\mathcal{L}$ представляет собой единичную окружность:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тогда:

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2)} + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2)} = \frac{\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2x^2}}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

всюду кроме точки $(0, 0)$, когда знаменатель обращается в 0.

Следовательно,

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0. \tag{5.82}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin t \cdot d(\cos t) + \cos t \cdot d(\sin t)) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0, \tag{5.83}$$

то есть результаты в формулах (5.82) и (5.83) отличаются. Теорема Грина здесь не работает, так как функции P и Q должны быть непрерывно дифференцируемы во всей области D, а здесь это условие нарушается в точке $(0, 0)$.

Альтернативное доказательство признака независимости интеграла $\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy)$ от пути.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \forall\ (x, y).$$

Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в области D. Возьмем простой замкнутый контур $\mathcal{L}$, лежащий в D. Тогда по теореме Грина:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

что эквивалентно независимости интеграла от пути.

В обратную сторону. Допустим, что интеграл по любому замкнутому контуру в области D равен нулю. Докажем, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

От противного. Пусть в некоторой точке $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ (случай < 0 аналогичен). В силу непрерывности $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ существует окрестность D данной точки, в которой $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > \varepsilon > 0$. Пусть $\mathcal{L}$ – контур, ограничивающий эту окрестность. Тогда:

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy > 0 \Rightarrow \Big/ \text{Теорема Грина} \Big/ \Rightarrow \oint\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) > 0.$$

Противоречие.

■

5.15 Поверхностный интеграл второго рода

Рассмотрим гладкую двустороннюю поверхность G. Выберем одну из ее сторон, задав направление нормали к поверхности. Пусть на поверхности G задана некоторая функция $f(x, y, z)$. Разобъем G на частичные поверхности G_i набором кусочно-гладких кривых (разбиение на произвольные квадрируемые области). Пусть $M_i(x_i, y_i, z_i)$ – произвольная точка на элементе G_i. Каждую из частичных поверхностей G_i спроектируем на плоскость XOY. Обозначим проекции за D_i. Тогда можно составить интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(D_i), \tag{5.84}$$

где $S(D_i)$ – это площадь области D_i, взятая со знаком "+," если выбрана верхняя сторона поверхности (угол между нормалью и ортом оси OZ меньше $\frac{\pi}{2}$) и со знаком "$-$," если нижняя (угол между нормалью и ортом оси OZ больше $\frac{\pi}{2}$).

Если при измельчении разбиения ($\max\limits_i d_i \to 0$) интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий от способа разбиения и выбора точек M_i, то он называется поверхностным интегралом 2 рода от фунции f по поверхности G и обозначается символом:

$$\iint\limits_G f(x, y, z)dxdy = \lim_{\max\limits_i d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(D_i). \tag{5.85}$$

Мы получили интеграл по выбранной стороне поверхности (указание на сторону поверхности следует оговаривать особо). Аналогично через проекции частичных поверхностей G_i на плоскости XOZ и YOZ можно определить интегралы:

$$\iint\limits_G f(x, y, z)dxdz \text{ и } \iint\limits_G f(x, y, z)dydz. \tag{5.86}$$

Если задать на поверхности G три функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и

$R(x, y, z)$, то можно определить интеграл:

$$\iint\limits_G (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy)\,. \tag{5.87}$$

В случае, когда поверхность задана явным уравнением $z = z(x, y)$, поверхностный интеграл несложно свести к двойному интегралу. Если выбрана верхняя сторона поверхности:

$$\iint\limits_G f(x, y, z)dxdy = \int\limits_D f(x, y, z(x, y))dxdy. \tag{5.88}$$

Если выбрана нижняя сторона поверхности:

$$\iint\limits_G f(x, y, z)dxdy = -\int\limits_D f(x, y, z(x, y))dxdy. \tag{5.89}$$

5.16 Связь поверхностных интегралов 1 и 2 рода

В определении поверхностного интеграла 1 рода используется площадь поверхности, в определении поверхностного интеграла 2 рода – площадь проекции.

Связь между площадями частичных поверхностей G_i и их проекциями D_i на плоскость XOY дается формулой (4.29):

$$S(G_i) = \iint\limits_{D_i} \frac{dxdy}{\cos\gamma}, \tag{5.90}$$

где γ – острый угол между нормлью и осью OZ. Поверхность G – гладкая $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cos\gamma}$ – непрерывная функция $\Rightarrow$ можно применить теорему о среднем:

$$S(G_i) = \frac{1}{\cos\widetilde{\gamma}_i} \cdot S(D_i), \tag{5.91}$$

где $\widetilde{\gamma}_i$ – угол нормали с осью OZ в некоторой точке поверхности G_i. Выразим из (5.91) площадь $S(D_i)$ и подставим ее в формулу для интегральной суммы (5.84):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \cos\widetilde{\gamma}_i \cdot S(G_i). \tag{5.92}$$

Сопоставим ее с интегральной суммой σ^* для поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_G f(x,y,z)\cdot\cos\gamma d\sigma$:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\cos\gamma_i\cdot S(G_i), \tag{5.93}$$

где γ_i – угол нормали с осью OZ в точке (x_i,y_i,z_i). Функция $\cos\gamma$ непрерывна в замкнутой ограниченной области. Значит для любого наперед заданного ε можно выбрать столь малый максимальный диаметр G_i, что в пределах каждой из частичных поверхностей G_i функция $\cos\gamma$ будет меняться не более, чем на ε.

Пусть f – ограниченная функция ($|f|\le M$). Составим модуль разности интегральных сумм для интегралов 1 и 2 рода:

$$|\sigma-\sigma^*| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot(\cos\widetilde{\gamma}_i-\cos\gamma_i)\cdot S(G_i)\Big| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|f(x_i,y_i,z_i)|}_{\le M}\cdot\underbrace{|\cos\widetilde{\gamma}_i-\cos\gamma_i|}_{\le\varepsilon}\cdot S(G_i) \le M\cdot\varepsilon\cdot S(G_i)\longrightarrow 0 \tag{5.94}$$

при измельчении разбиения. Таким образом, в пределе интегральные суммы для интегралов 1 и 2 рода совпадают и будет выполнено:

$$\iint\limits_G f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_G f(x,y,z)\cos\gamma d\sigma. \tag{5.95}$$

Замечание

Если поменять сторону поверхности на нижнюю, то нормаль тоже изменится и в обоих интегралах поменяется знак.

Общий случай задания поверхности

При рассмотрении связи поверхностных интегралов 1 и 2 рода мы предполагали, что поверхность однозначно проектируется на плоскость XOY. Например, явно заданная поверхность $z = z(x,y)$ однозначно проектируется на плоскость XOY.

Однако, в общем случае это не так. Здесь интеграл строится по тому же принципу, но площади проекций $S(D_i)$ приходится брать, возможно, с разными знаками (если одни элементы поверхности оказываются лежащими сверху, а другие – снизу).

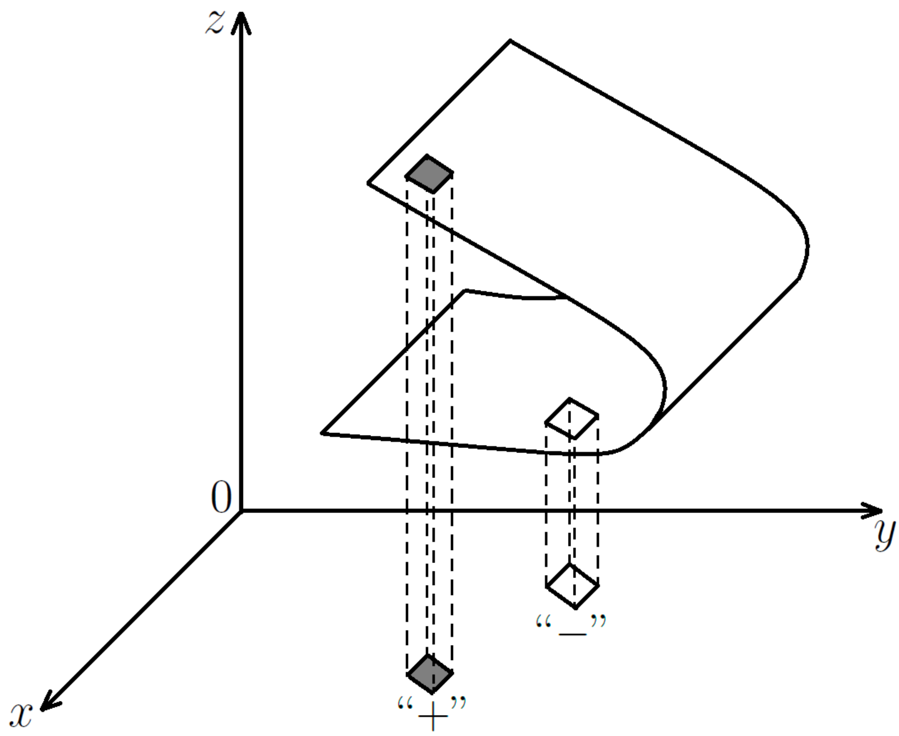

Рис. 46: Поверхность общего вида

Однако, здесь может встретиться и такой случай, когда элемент G_i лежит частью сверху, частью снизу, то есть не проектируется на плоскость XOY взаимно однозначно. При измельчении разбиения вклад подобных “неправильных” элементов становится ничтожным и в интегральную сумму их можно не включать.

5.17 Вычисление поверхностного интеграла 2 рода

Пусть поверхность задана уравнениями:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad \text{где } u, v \in D. \tag{5.96}$$

Воспользуемся формулой (5.95) связи поверхностных интегралов 1 и 2 рода:

$$\iint\limits_G f(x, y, z)dxdy = \iint\limits_G f(x, y, z)\cos\gamma d\sigma. \tag{5.97}$$

При параметрическом задании поверхности направляющий косинус нормали может быть вычислен по формуле (4.18):

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{5.98}$$

$$\text{где } A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \tag{5.99}$$

Тогда элемент площади поверхности может быть вычислен по формуле (4.22):

$$d\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv. \tag{5.100}$$

Подставляя выражения для $\cos\gamma$ и $d\sigma$ в формулу (5.97), получаем:

$$\iint\limits_G f(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot Cdudv. \tag{5.101}$$

Выбор знака перед интегралом отвечает стороне поверхности. Если ориентация плоскости (u,v) соответствует ориентации поверхности G, то следует выбрать знак “+.” В ином случае – знак “$-$.”

Аналогично можно получить формулу для вычисления поверхностного интеграла 2 рода в общем виде:

$$\iint\limits_G (Pdydz+Qdzdx+Rdxd) = \iint\limits_G (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$= \pm\iint\limits_D (PA+QB+RC)\,dudv. \tag{5.102}$$

Поток векторного поля

Пусть задано векторное поле $\vec{A}(x,y,z)$:

$$\vec{A} = A_x\cdot\vec{i}+A_y\cdot\vec{j}+A_z\cdot\vec{k}. \tag{5.103}$$

Определение

Потоком векторного поля через ориентированную поверхность G называется поверхностный интеграл 1 рода следующего вида:

$$\iint\limits_G A_n d\sigma, \tag{5.104}$$

где A_n – это проекция вектора $\vec{A}$ на нормаль $\vec{n}$ к поверхности G :

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}.$$

Поток также может быть представлен в виде поверхностного интеграла 2 рода:

$$\iint\limits_G A_n d\sigma = \iint\limits_G (A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma)\, d\sigma = \Big/\text{формула (5.102)}\Big/ =$$

$$= \iint\limits_G (A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy)\,. \tag{5.105}$$

Замечание

Иногда для сокращения записи вводят ориентированный элемент площади поверхности:

$$\vec{d\sigma} = \vec{n} \cdot d\sigma. \tag{5.106}$$

Тогда поток векторного поля может быть записан в виде:

$$\iint\limits_G (\vec{A}, \vec{d\sigma}) = \iint\limits_G (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\sigma. \tag{5.107}$$

Процедура вычисления поверхностного интеграла 2 рода

$$\iint\limits_G (\vec{A}, d\vec{\sigma}) = \iint\limits_G (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\sigma = \pm \iint\limits_{D_1} A_x(x(y,z), y, z) dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_2} A_y(x, y(x,z), z) dxdz \pm \iint\limits_{D_3} A_z(x, y, z(x,y)) dxdy. \tag{5.108}$$

где D_1, D_2 и D_3 – проекции G на плоскости YOZ, XOZ и XOY соответственно.

Выбор знака в интеграле $\pm \iint\limits_{D_3} A_z(x, y, z(x,y)) dxdy.$

Поверхность следует разбить на части, для которых угол между нормалью $\vec{n}$ и ортом оси OZ меньше или больше $\frac{\pi}{2}$.

• Знак "+", если $\vec{n}$ и орт оси OZ направлены в одну сторону (то есть угол между ними $< \frac{\pi}{2}$).

• Знак "$-$", если $\vec{n}$ и орт оси OZ направлены в разные стороны.

• Те части поверхности, для которых угол между нормалью $\vec{n}$ и ортом оси OZ равен $\frac{\pi}{2}$, проектируются в линию, площадь которой равна нулю. Следовательно, соответствующий интеграл по области нулевой площади (линии) тоже равен нулю.

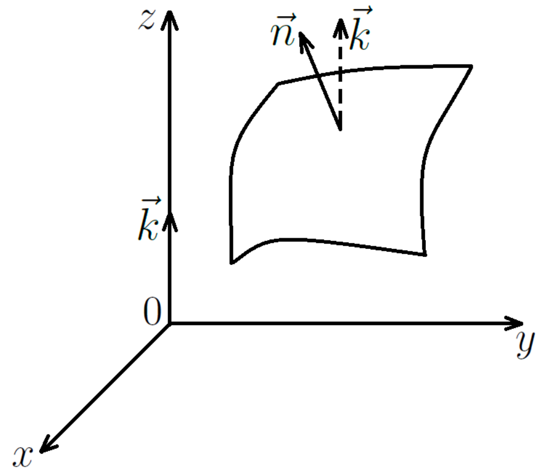

Рис. 47: Выбор знака в интеграле

Знак в интегралах $\iint\limits_{D_1} \ldots$ и $\iint\limits_{D_2} \ldots$ выбирается по тому же принципу.

5.18 Теорема Стокса

Зададим параметрически гладкую поверхность G, ограниченную контуром $\mathcal{L}$:

$$x = x(u, v), \;\; y = y(u, v), \;\; z = z(u, v), \tag{5.109}$$

где параметры u, v принадлежат плоской области D, ограниченной контуром Λ. Положим $x(u, v), \;\; y(u, v), \;\; z(u, v)$ дважды непрерывно дифференцируемыми функциями.

Выберем сторону поверхности так, чтобы положительному обходу контура Λ соответствовал положительный обход контура $\mathcal{L}$. Тем самым, мы определим знак в направляющих косинусах нормали в формуле (4.18):

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{5.110}$$

Пусть на поверхности G заданы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Рассмотрим

$$\int\limits_{\mathcal{L}} Pdx = \int\limits_{\Lambda} P\cdot \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)}_{dx} = \int\limits_{\Lambda} \Big(\underbrace{P\frac{\partial x}{\partial u}}_{P}\cdot \underbrace{du}_{dx} + \underbrace{P\frac{\partial x}{\partial v}}_{Q}\cdot\underbrace{dv}_{dy}\Big) =$$

$$\Big/\text{По формуле Грина: } \int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx+Qdy) = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\Big/$$

$$= \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_{D}\Big[\left(\frac{\partial P}{\cancel{\partial x}}\frac{\cancel{\partial x}}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \cancel{P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}} -$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\cancel{\partial x}}\frac{\cancel{\partial x}}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \cancel{P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}\Big]dudv =$$

$$= \iint\limits_{D}\Big[\frac{\partial P}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)}_{=B \text{ по формуле (5.99)}} - \frac{\partial P}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}_{=C \text{ по формуле (5.99)}}\Big]dudv =$$

$$= \iint\limits_{D}\Big[\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\cdot B}_{Q} \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot C}_{R}\Big] = \Big/\text{формула (5.102)}\Big/ =$$

$$= \iint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy\right). \tag{5.111}$$

Замечание

Здесь использовалось предположение о существовании и непрерывности производных $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$ и $\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$, которые в конечном результате не участвуют. Можно доказать, что это предположение избыточно.

Аналогично, с помощью циклической перестановки букв x, y, z можно получить формулы:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} Qdy = \iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz\right), \tag{5.112}$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}} Rdz = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx \right). \tag{5.113}$$

Складывая равенства (5.111), (5.112), (5.113), получаем формулу Стокса:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \iint\limits_{G} \Big[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx \Big]. \tag{5.114}$$

Отметим, что в формуле (5.114) сторона поверхности G и направление обхода контура $\mathcal{L}$ согласованы между собой.

Формулу Стокса (5.114) можно также записать с использованием поверхностного интеграла 1 рода:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \iint\limits_{G} \Big[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\gamma \Big] d\sigma. \tag{5.115}$$

5.19 Приложение формулы Стокса к исследованию криволинейного интеграла 2 рода в пространстве

Определение

Назовем область Ω поверхностно-односвязной, если для любого простого кусочно-гладкого контура $\mathcal{L} \subset \Omega$ существует кусочно-гладкая самонепересекающаяся поверхность G, имеющая $\mathcal{L}$ своим контуром и целиком лежащая в Ω.

Пример

Тело, ограниченное двумя концентрическими сферами (шаровой слой) будет поверхностно-односвязным, а тор – не будет.

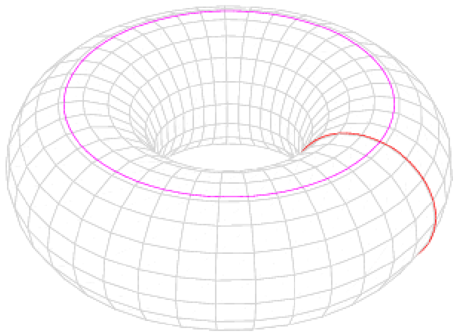

Рис. 48: Тор. Розовой линией отмечен контур $\mathcal{L}$

На контур $\mathcal{L}$, обходящий отверстие в торе, нельзя натянуть поверхность, целиком лежащую в торе.

Теорема 8 (независимость интеграла от пути)

Пусть $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемые функции в поверхностно-односвязной области Ω. Необходимые и достаточные условия независимости интеграла $\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy + Rdz)$ от пути в области Ω :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{5.116}$$

Доказательство: Согласно теореме 6, независимость интеграла от пути интегрирвоания эквивалентна тому, что интеграл по любому простому замкнутому контуру в этой области равен нулю. Этот факт мы и будем доказывать.

Достаточность. Пусть $\mathcal{L}$ – простой замкнутый контур в области Ω. Так как Ω поверхностно-односвязна, найдется поверхность $G \subset \Omega$, имеющая своим контуром $\mathcal{L}$. Тогда согласно формуле Стокса (5.114):

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_{G} \Big[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy +$$
$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dxdy - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx \Big] \quad \text{в силу формул (5.116).} \tag{5.117}$$

Необходимость.

Допустим, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Докажем выполнение условий (5.116).

От противного. Допустим, условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ нарушено в некоторой точке. Например, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$. В силу непрерывности $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ существует окрестность данной точки, в которой выполнено:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > \varepsilon > 0. \tag{5.118}$$

Проведем через данную точку плоскость, параллельную XOY. Сечение окрестности плоскостью выберем в качестве поверхности G, а его контур – в качестве кривой $\mathcal{L}$. Напишем теорему Стокса (5.114):

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{5.119}$$

Часть слагаемых в формуле (5.119) обнулилась, так как сечение G – это плоская область, параллельная XOY. Тогда в силу неравенства (5.118) и формулы (5.119) получаем:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (Pdx + Qdy) > 0.$$

Противоречие.

■

Замечание

Условия (5.116) необходимы и достаточны для того, чтобы в поверхностно-односвязной области $Pdx + Qdy + Rdz$ было полным дифференциалом. При этом первообразная может быть найдена по формуле:

$$F(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} (Pdx + Qdy + Rdz)\,, \tag{5.120}$$

где интеграл берется по любой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z).

5.20 Формула Стокса в векторной форме

Пусть задано векторное поле $\vec{A}(x,y,z)$:

$$\vec{A} = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k} \tag{5.121}$$

Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{5.122}$$

Тогда формула Стокса (5.115) может быть переписана в виде:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{A}\cdot\vec{dl} = \iint\limits_{G} \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma = \iint\limits_{G} \operatorname{rot}_n\vec{A}d\sigma, \tag{5.123}$$

$$\text{где } \vec{dl} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k},$$

$$\vec{n} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k},$$

$$\operatorname{rot}_n\vec{A} \text{ – проекция вектора } \operatorname{rot}\vec{A} \text{ на нормаль } \vec{n}.$$

Циркуляция векторного поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру $\mathcal{L}$ равна потоку вектора $\operatorname{rot}\vec{A}$ через поверхность G, ограниченную этим контуром $\mathcal{L}$.

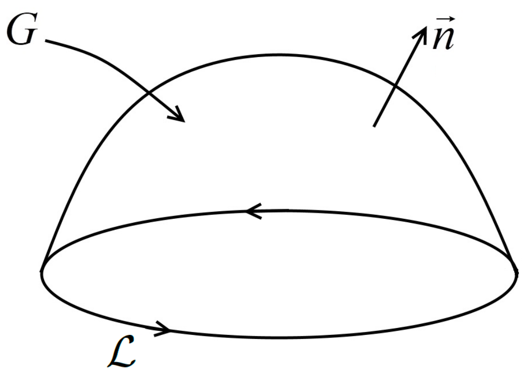

Рис. 49: Поверхность G, ограниченная контуром $\mathcal{L}$

Замечание

Обход контура должен быть положительным (если смотреть со стороны нормали $\vec{n}$). В противном случае перед интегралом $\iint\limits_{G} \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma$ следует поставить знак “$-$.”

Замечание

Поток ротора векторного поля не зависит от формы натянутой на $\mathcal{L}$ поверхности.

Инвариантное определение ротора

Ротор векторного поля $\vec{A}$ – это вектор. Для того, чтобы определить вектор, достаточно определить его проекцию на любое направление.

Пусть M – произвольная точка, $\vec{n}$ – некоторый единичный вектор.

Определим $\operatorname{rot}_n \vec{A}$ в точке M. Будем считать векторное поле $\operatorname{rot} \vec{A}$ непрерывным. Построим плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{n}$ и проходящую через точку M. Возьмем некоторую окрестность G точки M в данной плоскости с контуром $\mathcal{L}$. Напишем теорему Стокса (5.123):

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint\limits_{G} \operatorname{rot}_n \vec{A} d\sigma. \tag{5.124}$$

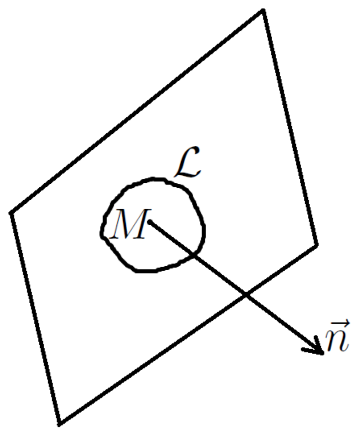

Рис. 50: Плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{n}$ и проходящая через точку M.

По теореме о среднем:

$$\iint\limits_{G} \operatorname{rot}_n \vec{A} \cdot d\sigma = \operatorname{rot}_n \vec{A}(\widetilde{M}) \cdot S(G), \tag{5.125}$$

где $\widetilde{M}$ – некоторая точка окрестности G, $S(G)$ – площадь области G. Будем стягивать область G к точке M. Тогда $\widetilde{M} \to M$ и в силу непрерывности ротора из формул (5.124) и (5.125) получим:

$$\frac{\oint\limits_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot \vec{dl}}{S(G)} = \operatorname{rot}_n \vec{A}(\widetilde{M}) \xrightarrow[G \to M]{} \operatorname{rot}_n \vec{A}(M). \tag{5.126}$$

Таким образом,

$$\operatorname{rot}_n \vec{A}(M) = \lim_{G \to M} \frac{\int\limits_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot \vec{dl}}{S(G)}. \tag{5.127}$$

Итак, мы определили проекцию вектора $\operatorname{rot}\vec{A}$ на любое направление без всякой ссылки на систему координат, то есть определили сам вектор $\operatorname{rot}\vec{A}$.

Пример

Пусть задано векторное поле $\vec{A} = x^2y^3\cdot\vec{i} + \vec{j} + z\cdot\vec{k}$.

Пусть поверхность G представляет собой верхнюю сторону полусферы: $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad z>0$. Обозначим за $\mathcal{L}$ границу полусферы $G:\ x^2+y^2=a^2,\ z=0$.

Проверим теорему Стокса, посчитав по-отдельности циркуляцию векторного поля $\vec{A}$ и поток $\operatorname{rot}\vec{A}$ через поверхность G.

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (x^2y^3dx + dy + \underbrace{zdz}_{=0}) =$$

Запишем $\mathcal{L}$ в полярных координатах: $\Big/ \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{cases},\quad 0\le\varphi\le 2\pi \Big/$

$$= \int\limits_0^{2\pi} a^2\cos^2\varphi\cdot a^3\sin^3\varphi\cdot d(a\cos\varphi) + \int\limits_0^{2\pi} d(a\sin\varphi) =$$

$$= -a^6\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\varphi\cos^2\varphi d\varphi + \underbrace{a\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{=0} = -a^6\int\limits_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2\varphi}_{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}\cdot\underbrace{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}_{=\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi}d\varphi =$$

$$= -\frac{a^6}{8}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\sin^2 2\varphi d\varphi = -\frac{a^6}{8}\int\limits_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2 2\varphi}_{=\frac{1-\cos 4\varphi}{2}}d\varphi + \frac{a^6}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\cdot\underbrace{\cos 2\varphi d\varphi}_{=\frac{1}{2}d(\sin 2\varphi)} =$$

$$= -\frac{a^6}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi + \frac{a^6}{16}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d(\sin 2\varphi) =$$

$$= -\frac{a^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{\frac{a^6}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{a^6}{16}\cdot\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi}}_{=0} = -\frac{\pi}{8}a^6.$$

Теперь посчитаем поток $\operatorname{rot}\vec{A}$ через поверхность G.

$$P = x^2y^3,\quad Q = 1,\quad R = z.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2 \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \operatorname{rot} \vec{A} = -3x^2y^2 \cdot \vec{k}.$$

Тогда поток $\operatorname{rot} \vec{A}$ равен:

$$\iint\limits_G \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma = -3 \iint\limits_G x^2y^2 dxdy = -3 \cdot \int\limits_{x^2+y^2 \le a^2} x^2y^2 dxdy =$$

$$= \Big/ \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{array} \right. \Big/ = -3 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi \cdot rdr =$$

$$= -3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \underbrace{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}_{=\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi} \cdot \frac{r^6}{6}\Big|_0^a = -\frac{a^6}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} \underbrace{\sin^2 2\varphi}_{=\frac{1-\cos 4\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= -\frac{a^6}{16} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = -\frac{a^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{\frac{a^6}{16} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{=0} = -\frac{\pi}{8}a^6.$$

Результаты совпали, то есть мы проверили выполнение теоремы Стокса.