– каждый из корней второй кратности.

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.}$$

5) $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \text{ – каждый из корней второй кратности.}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \sin x.}$$

6) $y^{V} - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)\left(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = \pm i \end{array}\right. \text{ – каждый из корней второй кратности.}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x.}$$

3.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Определение

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \;\ldots\ldots\; + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \tag{114}$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка.

***Обозначение*:** ЛНДУ.

Теорема 8 (Теорема об общем решении ЛНДУ)

Общее решение ЛНДУ (114) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (114) и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + Y(x), \tag{115}$$

где $\widetilde{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения, $Y(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

<u>Доказательство:</u>

Пусть Y – некоторое решение ЛНДУ (114). Будем искать общее решение y уравнения (114) в виде: $y = \widetilde{y}+Y$. Мы докажем теорему, если покажем, что для $\widetilde{y}$ возникает задача об общем решении соответствующего ЛОДУ. Подставим $y = \widetilde{y} + Y$ в уравнение (114):

$$\widetilde{y}^{(n)} + Y^{(n)} + a_1(x)\widetilde{y}^{(n-1)} + a_1 Y^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_n(x)\widetilde{y} + a_n(x)Y = f(x) \ \Leftrightarrow$$

$$\left(\widetilde{y}^{(n)} + a_1\widetilde{y}^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_n\widetilde{y}\right) + \underbrace{\left(Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_n Y\right)}_{=f(x) \text{ (так как } Y \text{ – решение (114))}} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \widetilde{y}^{(n)} + a_1(x)\widetilde{y}^{(n-1)} + \ \ldots\ldots \ + a_n(x)\widetilde{y} = 0,$$

то есть функция $\widetilde{y}$ удовлетворяет однородному уравнению. Для того, чтобы проверить, что $\widetilde{y}$ есть общее решение, нужно убедиться, что $\widetilde{y}$ удовлетворяет задаче Коши с произвольными начальными условиями.

Функция y должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = \widetilde{y}(x_0) + Y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = \widetilde{y}'(x_0) + Y'(x_0) = y'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) + Y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \qquad (116)$$

где $y_0,\ y'_0,\ \dots\dots, y_0^{(n-1)}$ – произвольные числа.
Тогда для функции $\widetilde{y}$ возникает задача Коши:

$$\begin{cases} \widetilde{y}(x_0) = y_0 - Y(x_0), \\ \widetilde{y}'(x_0) = y'_0 - Y'(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - Y^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \qquad (117)$$

где начальные условия могут быть произвольными. Таким образом, для $\widetilde{y}$ возникла задача Коши об общем решении ЛОДУ, что и доказывает теорему.

■

Общее решение ЛОДУ даётся формулой (74):

$$\widetilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ \dots\dots\ + C_n y_n(x), \qquad (118)$$

где $y_1,\ y_2,\ \dots\dots, y_n$ – функции из фундаментальной системы решений, $C_1,\ C_2,\ \dots\dots, C_n$ – произвольные постоянные.
Если известно общее решение $\widetilde{y}$ однородного уравнения, то можно найти частное решение неоднородного. Для этого существуют различные методы.

3.4 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

1) Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{119}$$

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\widetilde{y} = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{120}$$

где $y_1,\ y_2$ – линейно независимые решения однородного уравнения, $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Будем искать частное решение ЛНДУ (119) в следующем виде:

$$Y = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2. \tag{121}$$

Здесь $u_1(x),\ u_2(x)$ – некоторые функции, которые нам нужно найти.

Отметим сходство формул (120) и (121). Мы варьируем произвольные постоянные C_1, C_2 в формуле (120) и получаем вместо них некоторые функции $u_1(x),\ u_2(x)$.

Найдём производные $Y',\ Y''$ и подставим их в уравнение (119).

$$Y' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'.$$

Так как мы ищем частное решение уравнения, наложим на функции $u_1,\ u_2$ дополнительное ограничение:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{122}$$

Тогда Y' примет вид:

$$Y' = u_1y_1' + u_2y_2'.$$

Соответственно,

$$Y'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''.$$

Подставим $Y,\ Y',\ Y''$ в исходное уравнение (119):

$$u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + a_1u_1y_1' + a_1u_2y_2' + a_2u_1y_1 + a_2u_2y_2 = f(x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ u_1 \underbrace{(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1)}_{=0\ (y_1 \text{ - решение ЛОДУ})} + u_2 \underbrace{(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2)}_{=0\ (y_2 \text{ - решение ЛОДУ})} + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \tag{123}$$

Учитывая введённые ранее ограничения (122), получаем систему уравнений для функций u_1', u_2':

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \end{cases} \tag{124}$$

Определитель этой системы представляет собой определитель Вронского решений $y_1,\ y_2$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{125}$$

Определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке в силу линейной независимости решений $y_1,\ y_2$.

Следовательно, система (124) разрешима единственным образом и при любой правой части. Пусть её решения имеют вид:

$$\begin{cases} u_1' = \varphi_1(x), \\ u_2' = \varphi_2(x). \end{cases} \tag{126}$$

Тогда функции $u_1(x), u_2(x)$ находятся интегрированием:

$$\begin{cases} u_1 = \int \varphi_1(x)dx, \\ u_2 = \int \varphi_2(x)dx. \end{cases} \tag{127}$$

2) Рассмотрим уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + a_n(x)y = f(x). \tag{128}$$

Здесь все построения аналогичны.

Решение ЛОДУ имеет вид:

$$\widetilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ \ldots\ldots\ + C_n y_n. \tag{129}$$

Частное решение ЛНДУ ищем в виде:

$$Y = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) + \ \ldots\ldots\ + u_n(x) y_n(x). \tag{130}$$

Следуя описанной процедуре, получаем следующую систему уравнений для функций $u'_1,\ u'_2,\ \ldots\ldots,\ u'_n$:

$$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \ \ldots\ldots\ + u'_n y_n = 0, \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \ \ldots\ldots\ + u'_n y'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + u'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{131}$$

Определитель этой системы – это определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots\ldots & y'_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{ ни в одной точке.} \tag{132}$$

Следовательно, система (131) разрешима единственным образом и при любой правой части. Решая её, находим $u'_1,\ u'_2,\ \ldots\ldots, u'_n$. Функции $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots\ldots, u_n(x)$ находятся интегрированием.

Пример

Решим следующее неоднородное уравнение:

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x^2.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$\widetilde{y}'' - \frac{1}{x} \widetilde{y}' = 0.$$

Сделаем замену: $\widetilde{y}' = z(x)$. Тогда $\widetilde{y}'' = \frac{dz}{dx}$.

Подставим $\widetilde{y}'$ и $\widetilde{y}''$ в уравнение:

$$z' - \frac{1}{x} \cdot z = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot z \quad \Big| \cdot \frac{dx}{z} \;\leftarrow \text{здесь мы теряем решение } z = \widetilde{y}' = 0 \Leftrightarrow \widetilde{y} = const$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \Big/\text{Проинтегрируем}\Big/ \;\Leftrightarrow\; \ln|z| = \ln|x| + \ln C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; z = \pm Cx = \widetilde{C_1}x.$$

Вернёмся к старой переменной.

$$\widetilde{y}' = \widetilde{C_1}x \;\Leftrightarrow\; \widetilde{y} = \frac{\widetilde{C_1}}{2}x^2 + C_2 = C_1x^2 + C_2.$$

Заметим, что в это решение входит потерянное ранее решение $\widetilde{y} = const$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$Y = u_1(x) \cdot x^2 + u_2(x).$$

Система уравнений (124) для функций u_1', u_2' примет вид:

$$\begin{cases} u_1' \cdot x^2 + u_2' = 0 \\ u_1' \cdot 2x + u_2' \cdot 0 = x^2 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u_1' = \frac{1}{2}x, \\ u_2' = -\frac{1}{2}x^3. \end{cases}$$

Функции u_1, u_2 находятся интегрированием. Поскольку мы ищем частное решение уравнения, положим константы интегрирования равными нулю:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4}x^2, \\ u_2 = -\frac{1}{8}x^4. \end{cases}$$

Соответственно,

$$Y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^4 = \frac{1}{8}x^4.$$

Следовательно, общее решение ЛНДУ имеет вид:

$$y = \widetilde{y} + Y = \underline{C_1x^2 + C_2 + \frac{1}{8}x^4.}$$

3.5 Интеграл Дюамеля

Рассмотрим важный частный случай ЛНДУ с постоянными коэффициентами:

$$y'' + k^2 y = f(x), \tag{133}$$

где k – некоторая вещественная постоянная.

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$\widetilde{y}'' + k^2 \widetilde{y} = 0. \tag{134}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2 = -k^2 \ \Leftrightarrow \ \lambda = \pm ik.$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\widetilde{y} = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \tag{135}$$

Частное решение Y ЛНДУ (133) ищем в виде:

$$Y = u_1(x) \cos kx + u_2(x) \sin kx. \tag{136}$$

Система уравнений (124) для функций u_1', u_2' примет вид:

$$\begin{cases} u_1' \cos kx + u_2' \sin kx = 0, & (137) \\ u_1' \cdot (-k \sin kx) + u_2' \cdot k \cos kx = f(x). & (138) \end{cases}$$

Домножим каждое из уравнений на соответствующий коэффициент и сложим их между собой. $\quad (137) \cdot k \cos kx + (138) \cdot (-\sin kx):$

$$u_1' \cdot k \cos^2 kx + u_1' \cdot k \sin^2 kx = -f(x) \cdot \sin kx \ \Leftrightarrow \ u_1'(x) = -\frac{1}{k} f(x) \sin kx. \tag{139}$$

$$(137) \cdot k \sin kx + (138) \cdot \cos kx:$$

$$u_2' \cdot k \sin^2 kx + u_2' \cdot k \cos^2 kx = f(x) \cdot \cos kx \ \Leftrightarrow \ u_2'(x) = \frac{1}{k} f(x) \cos kx. \tag{140}$$

Функции $u_1,\ u_2$ находятся интегрированием:

$$u_1(x) = -\frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\sin kz dz, \tag{141}$$

$$u_2(x) = \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\cos kz dz. \tag{142}$$

Соответственно,

$$Y = -\frac{\cos kx}{k}\int\limits_{x_o}^{x} f(z)\sin kz dz + \frac{\sin kx}{k}\int\limits_{x_o}^{x} f(z)\cos kz dz =$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\cdot \underbrace{(-\cos kx\sin kz + \sin kx\cos kz)}_{\sin(kx-kz)} =$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\sin(k(x-z))dz. \tag{143}$$

Полученный интеграл называется интегралом Дюамеля.

Общее решение уравнения (133) имеет вид:

$$y = \widetilde{y} + Y = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\sin(k(x-z))dz. \tag{144}$$

Замечание

При решении задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{145}$$

в формуле (144) необходимо выбрать константы $C_1,\ C_2$ чтобы удовлетворить начальным условиям. При этом следует иметь в виду, что интеграл Дюамеля

$$Y = \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\sin(k(x-z))dz$$

удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$\begin{cases} Y(x_0) = 0, \\ Y'(x_0) = 0, \end{cases} \tag{146}$$

что позволяет упростить поиск констант $C_1,\ C_2$.
Проверим это.

$$Y(x_0) = \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x_0} f(z)\sin(k(x_0 - z))dz = 0.$$

Для вычисления Y' воспользуемся формулой:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,z)dz = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x}(f(x,z))dz + f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x). \tag{147}$$

Тогда

$$Y'(x_0) = \left.\left(\frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\frac{\partial}{\partial x}(\sin(k(x-z)))dz + \frac{1}{k}f(x)\underbrace{\sin(k(x-x))}_{=0}\right)\right|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x_0} f(z)\cdot k\cos(k(x_0 - z))dz = 0.$$

Интеграл Дюамеля часто используется при решении задач о колебаниях в механических системах или электрических цепях.

3.6 Метод неопределённых коэффициентов

Метод неопределённых коэффициентов работает только для линейных неоднородных уравнений с <u>постоянными</u> коэффициентами и правой частью $f(x)$ <u>специального вида</u>.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ \ldots\ldots\ + a_n y = f(x), \tag{148}$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots, a_n$ – некоторые постоянные.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения удаётся подобрать. Составим таблицу видов частных решений для различных видов правых частей $f(x)$.

Таблица видов частных решений для различных видов правых частей

Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Виды частного решения
$P_m(x)$	1) Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)$
	2) Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности s	$x^s\widetilde{P}_m(x)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	1) Число α не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
	2) Число α является корнем характеристического уравнения кратности s	$x^s\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	1) Числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
	2) Числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$x^s\Big(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\Big)$
$e^{\alpha x}\big(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\big)$	1) Числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\Big(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\Big)e^{\alpha x}$
	2) Числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$x^s\Big(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\Big)e^{\alpha x}$

k – это наибольшая из степененй m и n.

$\widetilde{P}_m(x)$ – это полином степени m с неопределенными коэффициентами.

Замечание

Если правая часть уравнения $f(x)$ есть сумма двух правых частей специального вида: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение следует искать в виде суммы двух решений: $Y_1 + Y_2$, где Y_1 отвечает правой части f_1, а Y_2 отвечает правой части f_2.

Примеры

Найдём общие решения следующих уравнений:

1) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y''' - y'' = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \text{ – корень второй кратности} \\ \lambda = 1. \end{array} \right.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\widetilde{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределённых коэффициентов. Посмотрим таблицу видов частных решений.

Число 0 является корнем характеристического уравнения второй кратности. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде:

$$Y = x^2\big(Ax^2 + Bx + C\big) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Соответственно,

$$Y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$Y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$Y''' = 24Ax + 6B.$$

Подставим Y''' и Y'' в исходное уравнение:

$$24Ax + 6B - 12Ax^2 - 6Bx - 2C = 12x^2 + 6x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{r|c} x^2: & -12A = 12 \\ x^1: & 24A - 6B = 6 \\ x^0: & 6B - 2C = 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1\\1\\1 \end{array}}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = -5, \\ C = -15. \end{cases}$$

Тогда $Y = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$.

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \widetilde{y} + Y = \underline{C_1 + C_2x + C_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.}$$

2) $y'' + y' = 4x^2e^x$.

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y' = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \lambda = 0, \\ \lambda = -1. \end{array}\right.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\widetilde{y} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Число 1 не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = \big(Ax^2 + Bx + C\big)e^x.$$

Соответственно,

$$Y' = (2Ax + B)e^x + \big(Ax^2 + Bx + C\big)e^x,$$

$$Y'' = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + \big(Ax^2 + Bx + C\big)e^x.$$

Подставим Y' и Y'' в исходное уравнение:

$$2Ae^x+(4Ax+2B)e^x+\big(Ax^2+Bx+C\big)e^x+(2Ax+B)e^x+\big(Ax^2+Bx+C\big)e^x = 4x^2e^x.$$

Разделим обе части уравнения на e^x и приведём подобные члены:

$$2Ax^2 + 6Ax + 2Bx + 2A + 3B + 2C = 4x^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{r|c} x^2: & 2A = 4 \\ x^1: & 6A + 2B = 0 \\ x^0: & 2A + 3B + 2C = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -6, \\ C = 7. \end{cases}$$

Тогда $Y = \big(2x^2 - 6x + 7\big)e^x$.

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \widetilde{y} + Y = \underline{C_1 + C_2e^{-x} + \big(2x^2 - 6x + 7\big)e^x.}$$

3) $y'' + 4y = \sin 2x$.

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 = -4 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \pm 2i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\widetilde{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Числа $\pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения кратности 1. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = x(A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Соответственно,

$$Y' = A\sin 2x + B\cos 2x + 2Ax\cos 2x - 2Bx\sin 2x,$$

$$Y'' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x + 2A\cos 2x - 4Ax\sin 2x - 2B\sin 2x - 4Bx\cos 2x.$$

Подставим Y'' и Y в исходное уравнение:

$$4A\cos 2x - 4B\sin 2x - \cancel{4Ax\sin 2x} - \cancel{4Bx\cos 2x} + \cancel{4Ax\sin 2x} +$$

$$+\cancel{4Bx\cos 2x} = \sin 2x \;\Leftrightarrow\; 4A\cos 2x - 4B\sin 2x = \sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\left.\begin{array}{r|c} \cos 2x: & 4A = 0 \\ \sin 2x: & -4B = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Тогда $\quad Y = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$

Общее решение уравнения:

$$\underline{y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x.}$$

4) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x\sin x.$

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 3)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \lambda = 3 \text{ – корень второй кратности.}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\widetilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{3x}.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Числа $1 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = (A\cos x + B\sin x)e^x.$$

Соответственно,

$$Y' = (-A\sin x + B\cos x)e^x + (A\cos x + B\sin x)e^x =$$
$$= (A+B)\cos x\cdot e^x + (B-A)\sin x\cdot e^x,$$
$$Y'' = -(A+B)\sin x\cdot e^x + (A+B)\cos x\cdot e^x + (B-A)\cos x\cdot e^x +$$
$$+(B-A)\sin x\cdot e^x = -2A\sin x\cdot e^x + 2B\cos x\cdot e^x.$$

Подставим Y'', Y' и Y в исходное уравнение:

$$-2A\sin x\cdot e^x + 2B\cos x\cdot e^x - 6(A+B)\cos x\cdot e^x - 6(B-A)\sin x\cdot e^x +$$
$$+9A\cos x\cdot e^x + 9B\sin x\cdot e^x = 25e^x\cdot\sin x.$$

Разделим обе части уравнения на e^x и приведём подобные члены:

$$(4A+3B)\sin x + (3A-4B)\cos x = 25\sin x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\begin{array}{r|c} \sin x: & 4A+3B=25 \\ \cos x: & 3A-4B=0 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{3}{4}A \\ 4A+\frac{9}{4}A=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=4, \\ B=3. \end{cases}$$

Тогда $\quad Y = (4\cos x + 3\sin x)e^x.$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \widetilde{y} + Y = \underline{(C_1 + C_2 x)e^{3x} + (4\cos x + 3\sin x)e^x.}$$

5) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x.$

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = -1\pm 2i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\widetilde{y} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x}.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Числа $-1 \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения первой кратности. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}.$$

Соответственно,

$$Y' = (A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x)e^{-x} -$$
$$-(Ax\cos 2x + Bx\sin 2x)e^{-x} =$$
$$= e^{-x} \cdot ((A - Ax + 2Bx)\cos 2x + (B - Bx - 2Ax)\sin 2x),$$
$$Y'' = -e^{-x} \cdot ((A - Ax + 2Bx)\cos 2x + (B - Bx - 2Ax)\sin 2x) +$$
$$+e^{-x} \cdot ((2B - A)\cos 2x - 2(A - Ax + 2Bx)\sin 2x - (2A + B)\sin 2x +$$
$$+2(B - Bx - 2Ax)\cos 2x) =$$
$$= e^{-x} \cdot ((-2A + 4B - 3Ax - 4Bx)\cos 2x + (-4A - 2B + 4Ax - 3Bx)\sin 2x).$$

Подставим Y'', Y' и Y в уравнение и разделим обе части уравнения на e^{-x}:

$$(-2A + 4B - 3Ax - 4Bx)\cos 2x + (-4A - 2B + 4Ax - 3Bx)\sin 2x +$$
$$+(2A - 2Ax + 4Bx)\cos 2x + (2B - 2Bx - 4Ax)\sin 2x +$$
$$+5Ax\cos 2x + 5Bx\sin 2x = \cos 2x \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \cos 2x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\left.\begin{array}{r|c} \cos 2x: & 4B = 1 \\ \sin 2x: & -4A = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0, \\ B = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Тогда $\quad Y = \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x.$

Общее решение уравнения:

$$\underline{y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x.}$$