5 Операционное исчисление

5.1 Преобразование Лапласа

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их системы можно решать путем сведения к алгебраическим уравнениям. Этот подход называется операционным методом. Он основан на преобразовании Лапласа. Дадим основные определения, связанные с этим преобразованием.

Определение

Функцией-оригиналом называется комплекснозначная функция $f(t)$ вещественной переменной t, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t) = 0$, если $t < 0$;

2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t;

3) с возрастанием t модуль функции $f(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции, то есть существуют числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$ такие, что для всех t имеем:

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}. \tag{174}$$

Определение

Преобразованием Лапласа L функции-оригинала $f(t)$, заданной на $[0, \infty)$, называется преобразование вида:

$$(Lf)(p) = F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \tag{175}$$

где образ функции f будем обозначать за $F(p)$. Функцию $F(p)$ называют изображением функции-оригинала $f(t)$.

<u>Свойства преобразования Лапласа</u>

1) $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$ – линейность; (176)

Доказательство очевидно в силу линейности интеграла.

2) $L(f(at)) = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right),\ a > 0$ – теорема подобия; (177)

Доказательство:

$$L(f(at))=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(at)dt=\Big/\text{Замена: } s=at\Rightarrow ds=adt\Big/=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-\frac{p}{a}s}f(s)\frac{1}{a}ds=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).\qquad\blacksquare$$

3) $L(e^{at}f(t))=F(p-a)$ – теорема смещения; (178)

Доказательство:

$$L(e^{at}f(t))=\int\limits_0^\infty e^{-pt}e^{at}f(t)dt=\int\limits_0^\infty e^{-(p-a)t}f(t)dt=F(p-a).$$

$\blacksquare$

4) $L(f(t-a))=e^{-ap}F(p),\ a>0$ – теорема запаздывания; (179)

Доказательство:

$$L(f(t-a))=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t-a)dt=\Big/\text{Замена: } s=t-a\Rightarrow ds=dt\Big/=$$

$$=\int\limits_{-a}^\infty e^{-ps}e^{-ap}f(s)ds=\Big/f(s)=0\text{ при } s<0\Big/=e^{-ap}\int\limits_0^\infty e^{-ps}f(s)ds=e^{-ap}F(p).$$

$\blacksquare$

5) $L(tf(t))=-\dfrac{d}{dp}F(p);$ (180)

$L(t^nf(t))=(-1)^n\dfrac{d^n}{dp^n}F(p);$ (181)

Доказательство:

Продифференцируем по параметру p формулу (175) из определения преобразования Лапласа:

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

$$\frac{d}{dp}F(p) = -\int\limits_0^\infty e^{-pt}tf(t)dt = -L(tf(t)).$$

Соответственно,

$$\frac{d^n}{dp^n}F(p) = (-1)^n\int\limits_0^\infty e^{-pt}t^nf(t)dt = (-1)^nL(t^nf(t)).$$

$\blacksquare$

6) $L(f'(t)) = pF(p) - f(0);$ (182)

$$L(f^{(n)}(t)) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{183}$$

Доказательство:

$$L(f'(t)) = \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \Bigg/ \begin{matrix} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}dt \\ v = f(t) & dv = f'(t)dt \end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = -f(0) + pF(p).$$

Формула для $f^{(n)}(t)$ доказывается по индукции.

База проверена ($n = 1$). Переход $n \to n+1$:

$$L(f^{(n+1)}(t)) = \int\limits_0^\infty f^{(n+1)}(t)e^{-pt}dt = \Bigg/ \begin{matrix} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}dt \\ v = f^{(n)}(t) & dv = f^{(n+1)}(t)dt \end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= f^{(n)}(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-pt}dt = -f^{(n)}(0) + p\Big(p^nF(p) - p^{n-1}f(0) -$$

$$-p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\Big) = p^{n+1}F(p) - p^nf(0) - p^{n-1}f'(0) - \ldots - f^{(n)}(0).$$

$\blacksquare$

Определение

Сверткой функций g и f называется функция:

$$(g * f)(s) = \int\limits_0^s g(s-t)f(t)dt. \tag{184}$$

7) $$L(g * f) = L\Big(\int\limits_0^s g(s-t)f(t)dt\Big) = L(g) \cdot L(f). \tag{185}$$

<u>Доказательство:</u>

$$L\Big(\int\limits_0^s g(s-t)f(t)dt\Big) = \int\limits_0^\infty ds \cdot e^{-ps} \int\limits_0^s g(s-t)f(t)dt =$$

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле. Пределы удобно расставить с помощью рисунка:

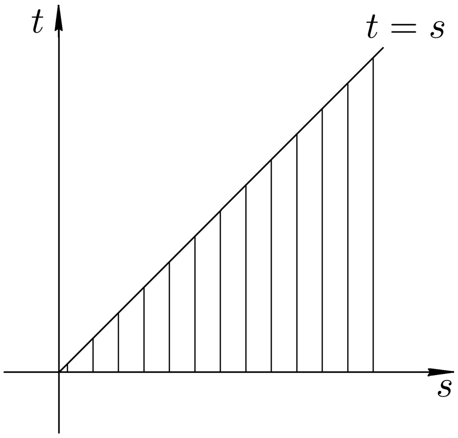

Рис. 6: Расстановка пределов интегрирования

$$= \int\limits_0^\infty dt \int\limits_t^\infty ds \cdot e^{-ps} g(s-t)f(t) = \Big/ \text{Замена: } \begin{matrix} s - t = \tau \\ ds = d\tau \end{matrix} \Big/ =$$

$$= \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty d\tau \cdot e^{-p(t+\tau)} g(\tau)f(t) = \int\limits_0^\infty dt e^{-pt} f(t) \int\limits_0^\infty d\tau e^{-p\tau} g(\tau) = L(f) \cdot L(g)$$

■

8) $L\Big(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\Big) = \dfrac{F(p)}{p}.$ (186)

Доказательство:

Введем функцию Хевисайда по следующему правилу:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, \ t \geq 0; \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

Тогда:

$$L\Big(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\Big) = L\Big(\int\limits_0^\infty \underbrace{\theta(t-\tau)\cdot}_{=1 \text{ при } 0\leq\tau\leq t} f(\tau)d\tau\Big) = \Big/\text{определение свертки (184)}\Big/ =$$

$$= L(\theta * f) = \Big/\text{свойство 7}\Big/ = L(\theta)L(f) = \frac{1}{p}F(p).$$

$$\Big/ \ L(\theta(t)) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot 1dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p} \ \Big/$$

■

Преобразования Лапласа простейших функций (таблица изображений)

Преобразование Лапласа определено только для функций, обращающихся в ноль при $t < 0$. Поэтому выписывая таблицу изображений, будем считать, что функции-оригиналы обращаются в ноль на отрицательной полуоси.

1) $L(1) = \dfrac{1}{p};$ (187)

Доказательство:

$$L(1) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot 1dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

■

2) $L(e^{at}) = \dfrac{1}{p-a};$ (188)

<u>Доказательство:</u>

$$L(e^{at}) = L(e^{at}\cdot 1) = \frac{1}{p-a}.$$

$$\Bigg/ \left\{ \begin{array}{ll} \text{Свойство 3:} & L(e^{at}f(t)) = F(p-a); \\ \text{Формула (187) :} & L(1) = \frac{1}{p}. \end{array} \right. \Bigg/$$

$\blacksquare$

3) $L(\sin at) = \dfrac{a}{p^2+a^2};$ (189)

<u>Доказательство:</u>

$$L(\sin at) = L\Big(\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\Big) = \Big/\text{Линейность преобразования Лапласа}\Big/ =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(L(e^{iat}) - L(e^{-iat})\Big) = \Big/\text{формула (188)}\Big/ =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\Big) = \frac{1}{2i}\frac{2ia}{p^2+a^2} = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

$\blacksquare$

4) $L(\cos at) = \dfrac{p}{p^2+a^2};$ (190)

<u>Доказательство:</u>

$$L(\cos at) = L\Big(\frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})\Big) = \Big/\text{Линейность преобразования Лапласа}\Big/ =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(L(e^{iat}) + L(e^{-iat})\Big) = \Big/\text{формула (188)}\Big/ =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\Big) = \frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+a^2} = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

$\blacksquare$

5) $L(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}.$ (191)

Доказательство:

$$L(t^n) = L(t^n \cdot 1) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$\Big/ \left\{ \begin{array}{ll} \text{Свойство 5:} & L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p); \\ \text{Формула (187) :} & L(1) = \frac{1}{p}. \end{array} \right. \Big/$$

$\blacksquare$

Примеры

Найдем преобразования Лапласа от следующих функций:

1) $L(\sin^2 t) = L\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2t\Big) = \dfrac{1}{2p} - \dfrac{p}{2(p^2+4)}.$

2) $L(t \sin 3t) = \Big/ L(tf(t)) = -\dfrac{d}{dp} F(p) \Big/ = -\dfrac{d}{dp}(L(\sin 3t)) =$

$= -\dfrac{d}{dp}\Big(\dfrac{3}{p^2+9}\Big) = \dfrac{6p}{(p^2+9)^2}.$

Нахождение оригинала функции по ее изображению

Преобразование Лапласа L является взаимно однозначным. У него существует обратное преобразование L^{-1}, которое по изображению восстанавливает оригинал. В большинстве задач функция-изображение является правильной рациональной дробью. В этом случае оригинал по изображению можно восстановить, используя таблицу изображений и свойства преобразования Лапласа. Правильная рациональная дробь раскладывается на простейшие, а для каждой простейшей оригинал известен.

Замечание

Мы не будем выписывать формулу для обратного преобразования Лапласа, так как она требует знаний из теории функции комплексной переменной.

Примеры

Найдем функции-оригиналы по заданным изображениям:

1) $\dfrac{1}{p^2-4} = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1}{p-2} - \dfrac{1}{p+2}\Big).$

$$L^{-1}\Big(\frac{1}{p^2-4}\Big) = \frac{1}{4}\Big(L^{-1}\Big(\frac{1}{p-2}\Big) - L^{-1}\Big(\frac{1}{p+2}\Big)\Big) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

2) $\dfrac{p}{p^2-2p+5} = \dfrac{p-1+1}{(p-1)^2+4} = \dfrac{p-1}{(p-1)^2+4} + \dfrac{1}{(p-1)^2+4}.$

Из таблицы изображений: $L(\cos 2t) = \dfrac{p}{p^2+4}$;

По свойству 3 преобразования Лапласа: $L(e^t\cos 2t) = \dfrac{p-1}{(p-1)^2+4}$;

Из таблицы изображений: $L(\sin 2t) = \dfrac{2}{p^2+4}$;

По свойству 3 преобразования Лапласа: $L(e^t\sin 2t) = \dfrac{2}{(p-1)^2+4}$.

Следовательно, $L^{-1}\Big(\dfrac{p}{p^2-2p+5}\Big) = e^t(\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2t).$

5.2 Операционный метод

Применим преобразование Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Операционный метод для одного дифференциального уравнения

Опишем процедуру построения решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \; ..... \; + a_n y = f(t), \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y'_0, \\ ...., \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{192}$$

где a_i – некоторые постоянные.

Сделаем преобразование Лапласа от дифференциального уравнения в системе (192) (по свойству 6) с учетом начальных условий:

$$\underbrace{p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y'_0 - \; ..... \; - y_0^{(n-1)}}_{=L(y^{(n)})} +$$

$$\underbrace{a_1 p^{n-1} Y(p) - a_1 p^{n-2} y_0 - \; ..... \; a_1 y_0^{(n-2)}}_{=L(a_1 y^{(n-1)})} + ...+ a_n Y(p) = F(p). \tag{193}$$

Здесь $Y(p)$ есть преобразование Лапласа от функции $y(t)$.

Мы получили линейное алгебраическое уравнение относительно $Y(p)$. Его решение дается формулой:

$$Y = \frac{F(p) + p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y'_0 + ... + y^{(n-1)} + a_1 p^{n-2} y_0 + ... + a_1 y_0^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y_0}{p^n + a_1 p^{n-1} + \; ..... \; + a_n}. \tag{194}$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции $Y(p)$ и получим решение задачи (192).

Замечание

Отметим, что мы нашли частное решение задачи Коши (192), не находя общего решения уравнения. Начальные условия были учтены автоматически при вычислении преобразований Лапласа от производных $y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ \ldots\ldots y'$. В этом заключается удобство операционного метода.

Пример

Решим задачу Коши для следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = e^{3t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Сделаем преобразование Лапласа от уравнения:

$$p^2 Y(p) - p\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} - 2(pY(p) - \underbrace{y(0)}_{=0}) - 3Y(p) = \frac{1}{p-3} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ p^2 Y(p) - 2pY(p) - 3Y(p) = \frac{1}{p-3}\ \Leftrightarrow\ Y(p) = \frac{1}{(p-3)(p^2-2p-3)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Получившуюся дробь разложим на простейшие:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2}{(p-3)^2(p+1)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2 = 1.$$

Для нахождения коэффициентов $A,\ B,\ C$ подставим в последнее равенство различные значения p :

$$\left.\begin{array}{l|l} p=-1: & 16C = 1 \\ p=3: & 4A = 1 \\ p=0: & A - 3B + 9C = 1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} C = \frac{1}{16}, \\ A = \frac{1}{4}, \\ B = -\frac{1}{16}. \end{cases}$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции $Y(p)$:

$$y(t) = L^{-1}\Big(\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}\Big) = L^{-1}\Big(\frac{\frac{1}{4}}{(p-3)^2} - \frac{\frac{1}{16}}{p-3} + \frac{\frac{1}{16}}{p+1}\Big) =$$

$$\Big/\text{В силу линейности преобразования Лапласа}\Big/$$

$$= \frac{1}{4}L^{-1}\Big(\frac{1}{(p-3)^2}\Big) - \frac{1}{16}L^{-1}\Big(\frac{1}{p-3}\Big) + \frac{1}{16}L^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\Big) =$$

$$= \Big/ L(t) = \frac{1}{p^2}, \quad L(te^{3t}) = \frac{1}{(p-3)^2}\Big/ = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}.$$

Ответ: $y(t) = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}$.

Операционный метод для системы дифференциальных уравнений

Опишем процедуру построения решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ \ldots\ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \ \ldots\ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \\ y_1(0) = y_1^{(0)}, \\ y_2(0) = y_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ y_n(0) = y_n^{(0)}, \end{cases} \tag{195}$$

где a_{ij} – некоторые постоянные.

Сделаем преобразования Лапласа от всех уравнений в системе (195) (по свойству 6) с учетом начальных условий:

$$\begin{cases} pY_1(p) - y_1^{(0)} = a_{11}Y_1(p) + \ \ldots\ldots + a_{1n}Y_n(p) + F_1(p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ pY_n(p) - y_n^{(0)} = a_{n1}Y_1(p) + \ \ldots\ldots + a_{nn}Y_n(p) + F_n(p). \end{cases} \tag{196}$$

Решая систему (196), находим $Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots, Y_n$. Сделав обратные преобразования Лапласа, получим решение задачи (195).

Пример

Решим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2 + 1, \\ y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 5. \end{cases}$$

Сделаем преобразования Лапласа от уравнений в системе с учетом начальных условий:

$$\begin{cases} pY_1 - \underbrace{y_1(0)}_{=0} = Y_1 + 2Y_2 \\ pY_2 - \underbrace{y_2(0)}_{=5} = 2Y_1 + Y_2 + \frac{1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pY_1 = Y_1 + 2Y_2 \\ pY_2 - 5 = 2Y_1 + Y_2 + \frac{1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y_2 = \frac{p-1}{2}Y_1 \\ \frac{(p-1)^2}{2}Y_1 - 2Y_1 = 5 + \frac{1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_2 = \frac{p-1}{2}Y_1 \\ \frac{(p-3)(p+1)}{2}Y_1 = \frac{5p+1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y_2 = \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)} \\ Y_1 = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} \end{cases}$$

$$Y_1(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A(p+1)(p-3) + B(p-3)p + Cp(p+1)}{p(p+1)(p-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(p+1)(p-3) + B(p-3)p + Cp(p+1) = 10p + 2.$$

Для нахождения коэффициентов $A,\ B,\ C$ подставим в последнее равенство различные значения p :

$$\left.\begin{array}{l|l} p = -1: & 4B = -8 \\ p = 0: & -3A = 2 \\ p = 3: & 12C = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = -2, \\ A = -\frac{2}{3}, \\ C = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции $Y_1(p)$:

$$y_1(t) = L^{-1}(Y_1) = L^{-1}\Big(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p} - 2\frac{1}{p+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p-3}\Big) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

$$Y_2(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}=\frac{D}{p}+\frac{E}{p+1}+\frac{F}{p-3}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}=\frac{D(p+1)(p-3)+E(p-3)p+Fp(p+1)}{p(p+1)(p-3)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D(p+1)(p-3)+E(p-3)p+Fp(p+1)=5p^2-4p-1.$$

Для нахождения коэффициентов $D,\ E,\ F$ подставим в последнее равенство различные значения p :

$$\left.\begin{array}{l|l} p=-1: & 4E=8 \\ p=0: & -3D=-1 \\ p=3: & 12F=32 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} E=2, \\ D=\frac{1}{3}, \\ F=\frac{8}{3}. \end{array}\right.$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции $Y_2(p)$:

$$y_2(t)=L^{-1}(Y_2)=L^{-1}\Big(\frac{1}{3p}+2\frac{1}{p+1}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p-3}\Big)=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}.$$

Итак,

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(t)=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}, \\ y_2(t)=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}. \end{array}\right.$$