# 4 Системы дифференциальных уравнений

## 4.1 Основные понятия

Система дифференциальных уравнений – это набор дифференциальных уравнений, решаемых совместно. Решение системы – это набор функций, который удовлетворяет всем уравнениям системы.

Мы будем рассматривать системы первого порядка, в которых все уравнения разрешены относительно производных. Такая форма записи системы называется нормальной формой Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n). \end{cases} \tag{149}$$

***Замечание***

Рассматривая только системы первого порядка, мы не умаляем общности задачи. Действительно, если система (149) содержит, например, уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n), \tag{150}$$

то вводя новую функцию $z_1 = \frac{dy_1}{dx}$ и добавляя это в уравнение к системе, мы получим систему первого порядка, где вместо уравнения (150) стоят два уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n), \\ \frac{dy_1}{dx} = z_1. \end{cases} \tag{151}$$

Решением системы (149) называется совокупность $n$ функций

$$y_i = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \tag{152}$$

таких, что при подстановке их в уравнения системы (149) эти уравнения обращаются в тождества относительно $x$. При этом функции $\psi_i(x)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Как и в случае одного уравнения первого порядка, имеет место теорема, аналогичная теореме Пикара. Начальные условия имеют вид:

$$y_1\Big|_{x=x_0} = y_1^{(0)}, \quad y_2\Big|_{x=x_0} = y_2^{(0)}, \; \ldots\ldots\ldots, y_n\Big|_{x=x_0} = y_n^{(0)}. \qquad (153)$$

***Определение***

Система уравнений (149) вместе с заданными начальными условиями (153) называется задачей Коши.

С геометрической точки зрения, решение – это интегральная кривая в $(n+1)$-мерном пространстве, а решение задачи Коши есть интегральная кривая, проходящая через заданную точку.

**Теорема 9 (аналог теоремы Пикара)**

Если функции $f_1(x, y_1, \ldots\ldots, y_n), \; \ldots\ldots\ldots, f_n(x, y_1, \ldots\ldots, y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \; i, j = 1, \ldots\ldots, n$ в области $\Omega$, то через каждую точку, принадлежащую $\Omega$, проходит одна и только одна интегральная кривая системы уравнений (149).

Или: то для любой точки $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots\ldots, y_n^{(0)}) \in \Omega$ существует единственное решение

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(x) \end{cases}$$

системы (149), удовлетворяющее начальным условиям (153).

***Определение***

Общим решением системы уравнений 1-го порядка (149) называется семейство функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \; \ldots\ldots, \; y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)$ таких, что при любых постоянных $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ функции $\varphi_1(x, C_1, \ldots\ldots, C_n), \ldots\ldots, \varphi_n(x, C_1, \ldots\ldots, C_n)$ удовлетворяют системе (149) и для любых начальных условий (153) (точка $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \in \Omega$) можно найти значения $C_1, \; C_2, \ldots\ldots, C_n$, при которых функции

$\varphi_1(x, C_1, \ldots\ldots, C_n)$, $\ldots\ldots\ldots, \varphi_n(x, C_1, \ldots\ldots, C_n)$ удовлетворяют данному начальному условию.

***Замечание***

Функции $y_i = \varphi_i(x, C_1, \ldots\ldots, C_n)$ могут быть заданы в неявной форме:

$$\psi_i(x,\ y_1, \ldots\ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n.$$

***Определение***

Соотношение $\psi_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) = C_i$ называется первым интегралом системы, если функция $\psi_i$ не является константой и при подстановке в неё любого решения системы $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ соотношение обращается в тождество.

Для того, чтобы решить систему, нужно найти $n$ независимых первых интегралов. Интегралы $\psi_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) = C_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ называются независимыми, если эти равенства однозначно разрешимы относительно $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$.

Общего метода решения систем дифференциальных уравнений не существует. Однако, в некоторых частных случаях их удаётся решать.

## 4.2 Метод исключения

Метод исключения аналогичен соответствующему алгебраическому методу.

Если одно из уравнений системы позволяет выразить одну из неизвестных функций через другие, то сделаем это и подставим данное выражение в остальные уравнения. Мы получим систему из $(n-1)$-го уравнения с $(n-1)$-ой неизвестной функцией. Однако, порядок уравнений возрастёт. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока не придём к одному уравнению $n$-го порядка. Решаем это уравнение и через его решение выражаем остальные искомые функции.

Проиллюстрируем этот метод на примере системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = ay_1 + by_2 + f(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = cy_1 + dy_2 + g(x). \end{cases} \tag{154}$$

Здесь $a,\ b,\ c,\ d$ – постоянные коэффициенты, а $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – искомые функции.

Выразим $y_2$ из первого уравнения системы (154):

$$y_2 = \frac{1}{b} \cdot \left( \frac{dy_1}{dx} - ay_1 - f(x) \right). \tag{155}$$

Подставим во второе уравнение системы (154) вместо $y_2$ правую часть (155), а вместо $\frac{dy_2}{dx}$ производную от правой части (155), получаем уравнение второго порядка относительно $y_1(x)$:

$$A\frac{d^2y_1}{dx^2} + B\frac{dy_1}{dx} + Cy_1 + P(x) = 0, \tag{156}$$

где $A,\ B,\ C$ – некоторые постоянные.

Решая уравнение (156), находим $y_1 = y_1(x)$. Подставив найденное выражение для $y_1$ и $\frac{dy_1}{dx}$ в (155), найдём $y_2$.

**Пример**

Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{y_1}{x} + y_2, & (157) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{2}{x^2}y_1 + \dfrac{1}{x}y_2. & (158) \end{cases}$$

Выразим $y_2$ из уравнения (157):

$$y_2 = \frac{y_1}{x} + \frac{dy_1}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx^2}.$$

Подставим $y_2$ и $\frac{dy_2}{dx}$ в уравнение (158):

$$-\frac{y_1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{2}{x^2}y_1 + \frac{1}{x}\left(\frac{y_1}{x} + \frac{dy_1}{dx}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y_1}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \underline{y_1 = C_1x + C_2.}$$

Соответственно,

$$\underline{y_2 = \frac{C_1x + C_2}{x} + C_1 = 2C_1 + \frac{C_2}{x}.}$$

## 4.3 Матричный метод (метод Эйлера)

Матричный метод применим только для линейных однородных систем уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ \ldots\ldots \ + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ \ldots\ldots \ + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ \ldots\ldots \ + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{159}$$

где $a_{ij}$ – некоторые постоянные коэффициенты.

Система уравнений (159) может быть записана в матричном виде:

$$Y' = AY, \tag{160}$$

где введены следующие обозначения:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}. \tag{161}$$

***Определение***

Матрица-столбец

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

называется частным решением матричного уравнения (160) на интервале $(a, b)$, если её подстановка в уравнение обращает его в тождество для любых $x \in (a, b)$.

***Определение***

Система $n$ частных решений уравнения (160)

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x) \end{pmatrix}, \; \ldots\ldots, \; Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

называется фундаментальной на интервале $(a, b)$, если функции $Y_1(x), \ldots\ldots, Y_n(x)$ линейно независимы.

**Утверждение**

Линейная независимость решений $Y_1(x), \ldots\ldots, Y_n(x)$ уравнения (160) эквивалентна тому, что определитель

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \ldots\ldots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \ldots\ldots & y_2^{(n)}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \ldots\ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in (a, b). \tag{162}$$

Без доказательства.

Заметим, что верхние индексы $(1), (2), \ldots\ldots, (n)$ – это номер частного решения (а не порядок производной).

**Теорема 10 (Теорема об общем решении матричного уравнения)**
Общее решение матричного дифференциального уравнения (160) есть линейная комбинация фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ \ldots\ldots\ + C_n Y_n(x). \tag{163}$$

В обычной записи это даёт решение системы (159):

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 y_1^{(1)}(x) + C_2 y_1^{(2)}(x) + \ \ldots\ldots\ + C_n y_1^{(n)}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = C_1 y_n^{(1)}(x) + C_2 y_n^{(2)}(x) + \ \ldots\ldots\ + C_n y_n^{(n)}(x). \end{cases} \tag{164}$$

Доказательство:
Для того, чтобы проверить, что (163) есть общее решение, нужно убедиться в том, что для любых начальных условий $y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots\ldots,$ $y_n(x_0)$ можно найти значения $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ такие, что решение (163) будет им удовлетворять:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = C_1 y_1^{(1)}(x_0) + \ \ldots\ldots\ + C_n y_1^{(n)}(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = C_1 y_n^{(1)}(x_0) + \ \ldots\ldots\ + C_n y_n^{(n)}(x_0). \end{cases} \tag{165}$$

Система (165) – это неоднородная линейная система алгебраических уравнений относительно $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$. Её определитель отличен от нуля при любом $x$ (формула (162)), поэтому система (165) однозначно разрешима при любых $y_1(x_0), \ldots\ldots, y_n(x_0)$, что и доказывает теорему.

■

В соответствии с теоремой 10, для решения системы (159) нам требуется найти фундаментальную систему решений уравнения (160). Будем искать решения в следующем виде:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}. \tag{166}$$

Подставим (166) в (160):

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda x} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{\lambda x}. \tag{167}$$

Сокращая на $e^{\lambda x}$, приходим к алгебраическому матричному уравнению:

$$AX = \lambda X, \ \text{ где } X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{168}$$

$$\Leftrightarrow \ (A - \lambda I)X = \mathbb{O}.$$

Мы получили задачу о собственных векторах и собственных значениях матрицы A. Условие существования нетривиального решения уравнения (168) таково:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{169}$$

Корни $\lambda_i$ этого алгебраического уравнения $n$-ой степени – это собственные значения матрицы $A$, а нетривиальные решения уравнения (168), соответствующие $\lambda = \lambda_i$ – это собственные векторы.

Подстановка собственного вектора и собственного значения в формулу (166) даст нам решение $Y(x)$ матричного уравнения (160) (или системы (159)). Таким образом, линейно независимые собственные векторы матрицы $A$ дают нам вектор-функции из фундаментальной системы решений.

Для того, чтобы получить всю фундаментальную систему, требуется найти $n$ линейно независимых решений.

*Замечание*

При рассмотрении теории систем дифференциальных уравнений мы обозначали независимую переменную через $x$, а функции через $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ для того, чтобы продемонстрировать сходство с теорией отдельных дифференциальных уравнений. При решении задач мы будем использовать для независимой переменной более традиционное обозначение $t$, а для функций – обозначения $x, y, z$ во избежание излишней индексации.

**Пример 1**

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$$

1) Выписываем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Найдём собственные числа и собственные векторы матрицы $A$. Для поиска собственных чисел составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (3-\lambda)^2(5-\lambda) + 1 + 1 - (5-\lambda) - (3-\lambda) - 3 + \lambda = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (9 - 6\lambda + \lambda^2)(5-\lambda) + 2 - 5 + \lambda - 3 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 45 - 9\lambda - 30\lambda + 6\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 9 + 3\lambda = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0.$$

Итак, собственные числа: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$

Найдём собственные векторы.

1. $\lambda_1 = 2.$

$$(A-\lambda_1 I)X_1 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Big/\ (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \to (\mathrm{II})\ \Big/ \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3, \\ \xi_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\xi_3 = C_1$. Тогда $\xi_1 = -C_1$.

Соответственно, собственный вектор имеет вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_2 = 3.$

$$(A-\lambda_2 I)X_2 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\eta_2 + \eta_3 = 0 \\ -\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 = 0 \\ \eta_1 - \eta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1 = \eta_2, \\ \eta_3 = \eta_2. \end{cases}$$

Пусть $\eta_2 = C_2$. Тогда $\eta_1 = \eta_3 = C_2$.

Соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\lambda_3 = 6.$

$$(A-\lambda_3 I)X_3 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 = 0 \quad (\mathrm{I}) \\ -\zeta_1 - \zeta_2 - \eta_3 = 0 \quad (\mathrm{II}) \\ \zeta_1 - \zeta_2 - 3\zeta_3 = 0 \quad (\mathrm{III}) \end{cases} \Leftrightarrow \Big/ (\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) \to (\mathrm{I}), \;\; (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) \to (\mathrm{II}) \Big/$$

$$\begin{cases} -2\zeta_1 + 2\zeta_3 = 0 \\ -2\zeta_2 - 4\zeta_3 = 0 \\ \zeta_1 - \zeta_2 - 3\zeta_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta_1 = \zeta_3, \\ \zeta_2 = -2\zeta_3. \end{cases}$$

Пусть $\zeta_3 = C_3$. Тогда $\zeta_1 = C_3, \zeta_2 = -2C_3$.

Соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$X_3 = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) Запишем ответ:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=Y} = e^{\lambda_1 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}}_{=X_1} + e^{\lambda_2 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}}_{=X_2} + e^{\lambda_3 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}}_{=X_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Также ответ можно записать в координатной форме:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}, \\ y(t) = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}, \\ z(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}. \end{cases}$$

**Пример 2**

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = y + z. \end{cases} \tag{170}$$

1) Выписываем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдём собственные числа и собственные векторы матрицы A. Для посика собственных чисел составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ -\lambda(1-\lambda)^2 + 1 - \lambda - (1-\lambda) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda(1-\lambda)^2 = 0.$$

Итак, собственные числа: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = 1$.

1. Найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 0$.

$$(A-\lambda_1 I)X_1=\mathbb{O}\;\Leftrightarrow\;\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\begin{cases}\xi_2+\xi_3=0\\\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\\\xi_2+\xi_3=0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\xi_1=2\xi_3,\\\xi_2=-\xi_3.\end{cases}$$

Пусть $\xi_3=C_1$. Тогда $\xi_1=2C_1,\ \xi_2=-C_1$.

Соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$X_1=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Соответствующее решение из фундаментальной системы:

$$Y_1(t)=e^{\lambda_1 t}X_1=/\lambda_1=0/=C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

2. Собственное число $\lambda=1$ имеет вторую кратность. Поэтому процедуру построения решения необходимо изменить. Будем искать решение системы (170) в следующем виде:

$$Y(t)=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}\cdot e^t+\begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\end{pmatrix}\cdot te^t. \qquad (171)$$

Подставим $Y(t)$ в исходную систему (170):

$$\begin{cases}\eta_1e^t+\zeta_1e^t+\zeta_1te^t=\eta_2e^t+\zeta_2te^t+\eta_3e^t+\zeta_3te^t,\\\eta_2e^t+\zeta_2e^t+\zeta_2te^t=\eta_1e^t+\zeta_1te^t+\eta_2e^t+\zeta_2te^t-\eta_3e^t-\zeta_3te^t,\\\eta_3e^t+\zeta_3e^t+\zeta_3te^t=\eta_2e^t+\zeta_2te^t+\eta_3e^t+\zeta_3te^t.\end{cases}$$

В каждом из уравнений приравняем коэффициенты при линейно независимых функциях $e^t$ и $te^t$:

$$\left.\begin{array}{r|c} e^t: & \eta_1+\zeta_1=\eta_2+\eta_3 \\ te^t: & \zeta_1=\zeta_2+\zeta_3 \\ e^t: & \eta_2+\zeta_2=\eta_1+\eta_2-\eta_3 \\ te^t: & \zeta_2=\zeta_1+\zeta_2-\zeta_3 \\ e^t: & \eta_3+\zeta_3=\eta_2+\eta_3 \\ te^t: & \zeta_3=\zeta_2+\zeta_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta_1=\zeta_3, \\ \zeta_2=0, \\ \eta_2=\zeta_3, \\ \eta_1=\eta_3. \end{cases}$$

Тогда формула (171) примет вид:

$$Y(t)=\begin{pmatrix}\eta_3\\ \zeta_3\\ \eta_3\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}\zeta_3\\ 0\\ \zeta_3\end{pmatrix}te^t \Leftrightarrow$$

$$\Big/ \text{ Соберём подобные члены при } \eta_3 \text{ и } \zeta_3 \Big/$$

$$\Leftrightarrow Y(t)=\eta_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^t+\zeta_3\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}te^t\right). \tag{172}$$

Таким образом, мы получили два линейно независимых решения системы (170):

$$Y_2(t)=C_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^t,$$

$$Y_3(t)=C_3\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}te^t\right).$$

3) Запишем ответ.

Общее решение системы (170) имеет вид:

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^t \right).$$

В координатной форме:

$$\begin{cases} x = 2C_1 + C_2 e^t + C_3 te^t, \\ y = -C_1 + C_3 e^t, \\ z = C_1 + C_2 e^t + C_3 te^t. \end{cases}$$

**Замечание о кратных собственных значениях.**

Если корень $\lambda = \lambda_0$ имеет кратность $s$, то ему должны отвечать $s$ линейно независимых решений. Одной функции $e^{\lambda_0 t}$ будет недостаточно. В этом случае ищем решение в виде:

$$Y_1 e^{\lambda_0 t} + Y_2 t e^{\lambda_0 t} + \ \ldots\ldots \ + Y_s t^{s-1} e^{\lambda_0 t}. \tag{173}$$

Для определения координат векторов $Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots,\ Y_s$ подставляем (173) в исходную систему уравнений и в каждом из уравнений приравниваем коэффициенты при линейно независимых функциях.