7. Ряды

7.1 Числовые ряды

Выражение

$$u_1 + u_2 + \ \dots \ + u_n + \ \dots \ = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{7.1}$$

где $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – заданная числовая последовательность, называется числовым рядом.
$S_n = u_1 + u_2 + \ \dots\dots \ + u_n$ – частичная сумма ряда (7.1). Соответственно,

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \ \dots\dots, \ S_n = u_1 + u_2 + \ \dots \ + u_n, \ \dots\dots \tag{7.2}$$

Ряд (7.1) называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм (7.2):

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{7.3}$$

Число S называется суммой ряда (7.1).
Теорема (Необходимый признак сходимости числового ряда)
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
Пример
Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.
Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию. Напишем его частичные суммы.

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ \dots\dots \ + q^{n-1}.$$

Для разных q будут разные результаты.
$q = 1: \ S_n = n \ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \ \Rightarrow$ ряд расходится.
$q = -1: \ S_n = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ \dots\dots \ + (-1)^n =$
$= 1 - 1 + 1 - 1 + \ \dots\dots \ \Rightarrow$ нет предела частичных сумм S_n $\Rightarrow$ ряд расходится.
$|q| > 1: \ S_n = \underbrace{b_1}_{=q^0=1} \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^n}{1-q}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{q^n}{1-q}\right) = \infty$ при $q > 1$ и не существует при $q < -1$.
Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то есть ряд расходится.

$|q|<1: \; S_n = \dfrac{1}{1-q} - \underbrace{\dfrac{q^n}{1-q}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\dfrac{1}{1-q}}_{\text{сумма ряда}} \;\Rightarrow$ ряд сходится.

Итак,

$$\text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ при } \begin{cases} |q|<1: \text{ сходится, } \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \\ |q| \geqslant 1: \text{ расходится} \end{cases}.$$

Задачи

1) Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \;\ldots\; + \frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\Big/ \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \Big/$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \;\ldots\; + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$ – сумма ряда.

2) Проверить необходимое условие сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{по правилу Лопиталя}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln 2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (\ln 2)^2}{2} = (\ln 2)^2 \lim_{n\to\infty} 2^{n-1} = \infty.$$

Следовательно, ряд расходится, поскольку нарушено необходимое условие сходимости.

3) Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\Big/ \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \quad \Big/$$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

4) Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

Этот ряд – геометрическая прогрессия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{1+i}{2}}_{=q}\Big)^n$$

$$|q| = \left|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \;\Rightarrow \text{ряд сходится}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \dfrac{1+i}{2}} = \frac{1}{\dfrac{1-i}{2}} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{1^2 - i^2} = 1+i.$$

7.2 Признаки сходимости положительных рядов

В этом параграфе мы будем рассматривать только положительные ряды (все члены ряда – положительные числа).

Признак сравнения рядов

Рассмотрим два ряда: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{ряд } A}$ и $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{ряд } B}$.

Пусть для всех n, начиная с некоторого номера, выполнено: $a_n \leqslant b_n$

Тогда:

Если ряд B сходится $\Rightarrow$ ряд A сходится.

Ряд A расходится $\Rightarrow$ ряд B расходится.

Предельный признак сравнения

Рассмотрим два ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ и выполнено:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.
Замечание
Чтобы применять эти признаки, нужно знать, с чем сравнивать ряды. Для этого приведем так называемые "эталонные ряды," сходимость которых изучена.

Эталонные ряды

1) Геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$.

$$\begin{cases} |q| < 1 \text{ – сходится, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{b_1}{1-q} \\ |q| \geqslant 1 \text{ – расходится} \end{cases}$$

2) Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

$$\begin{cases} s > 1 \text{ – сходится} \\ s \leqslant 1 \text{ – расходится} \end{cases}$$

Задачи
Исследовать на сходимость следующие ряды:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$|q| = \frac{1}{2} < 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится.

Следовательно, наш ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ также сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

Воспользуемся предельным признаком сравнения.
Сравним ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \Big/ \text{по правилу Лопиталя} \Big/ = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{n}} \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos^2\frac{1}{n}} = 1.$$

$$\Big/ \ \left(\mathrm{tg}\frac{1}{n}\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \left(-n^{-2}\right) \ \Big/$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{1}{n}$ также расходится.

Признак Даламбера

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Тогда:

$q < 1$ – ряд сходится.

$q > 1$ – ряд расходится.

$q = 1$ – требуется дополнительное исследование.

Признак Коши

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

Тогда:

$q < 1$ – ряд сходится.

$q > 1$ – ряд расходится.

$q = 1$ – требуется дополнительное исследование.

Интегральный признак Коши

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $a_n = f(n)$ (то есть ряд задан функцией, а не рекуррентно, например).

Пусть функция f определена на $[1,\infty)$.

Пусть $f(x) > 0$.

Пусть f монотонно убывает.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Задачи

3) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2+5}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2+5}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2+5}{n^2+5} = \Big/ \text{по правилу Лопиталя} \Big/$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

$q=\frac{1}{2}<1 \;\Rightarrow$ ряд сходится по признаку Даламбера.

4) Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right.$ – замечательный предел $\left.\right)$

Итак, $q=e=2{,}718281828459045\dots>1 \;\Rightarrow$ ряд расходится.

5) Исследовать на сходимость $\dfrac{3}{1}+\dfrac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\ldots+\dfrac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}+\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}\cdot\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{3}<1$$

Следовательно, ряд сходится.

6) Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\cdot\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

7) Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1\;\Rightarrow\; \text{ряд расходится.}$$

8) Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$.

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{d\,(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{\infty}=\underbrace{-\frac{1}{\ln\infty}}_{\to 0}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$$

Интеграл сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ тоже сходится.

9) Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

Используем формулу Стирлинга:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

("$\sim$" – эквивалентная бесконечно большая)

Под знаком предела можно заменять одно на другое.

По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{e} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\sqrt[2n]{2\pi} = (2\pi)^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0\right.$ – по правилу Лопиталя)

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{e} = \dfrac{3}{e} > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.

10) Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$.

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-x^2} d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ сходится.

11) Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{n^3}}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x^3}} dx = \int_1^{\infty} 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} dx = -2 \int_1^{\infty} 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} d\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -2 \cdot \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\ln 2} \Bigg|_1^{\infty} = \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{n^3}}$ сходится.