ЛЕКЦИЯ 3
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.
ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

3.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО, 3-ГО И n - ГО ПОРЯДКА

Понятие определителя - очень важное, оно упрощает решение многих задач линейной алгебры и позволяет ***характеризовать любую квадратную матрицу*** с набором из $(n \cdot n)$ элементов по значению только ***одного числа*** (определителя этой матрицы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Каждой квадратной матрице*

$$A_{n\times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

n-го порядка ставится в соответствие число, называемое ***детерминантом*** *(от лат.* determinare - *ограничивать, определять) или* ***определителем*** n ***-го порядка*** *матрицы* $A_{n\times n}$ *и обозначается :*

$$\det A,\ |A|,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Существует ***общее правило***[1], по которому для любой квадратной матрицы можно вычислить её детерминант. Оно является достаточно трудоёмким, поэтому на практике применяют специальные удобные правила[2] вычисления определителей 2-го и 3-го порядков (которые являются следствием общего правила вычисления определителя n-го порядка). Далее, применяя свойства[3] определителя, с помощью определителей 2-го и 3-го порядков можно вычислить и определитель n-го порядка (см. **п.3.3.ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**).

Среди всех значений определителя наиболее важным для решения задач является 0. Поэтому выделим ещё один вид матриц:

---

[1] Вычисление определителя с помощью перестановок

[2] Правила (треугольника, Саррюса) подробно рассматривают на практических занятиях.

[3] Свойства определителя и вычисление с их помощью определителя n-го порядка подробно рассматривают на практических занятиях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратные матрицы* $A_{n\times n}$: $\det A = 0$ *называются* ***вырожденными*** *или* ***особенными*** *матрицами.*

Далее нам необходимо рассмотреть ряд дополнительных понятий (таких как ***минор*** и ***алгебраическое дополнение***), которые позволят сформулировать и доказать ряд важных теорем из теории определителей.

3.2. МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Рассмотрим матрицу размера* $m\times n$ *и выберем в ней произвольным образом* s*-строк и* s*-столбцов* ($1 \le s \le \min(m,n)$, *где* $\min(m,n)$*- меньшее из чисел* m *и* n*). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют матрицу порядка* s*, определитель которой называется* ***минором*** M ***порядка*** s *данной матрицы.*

ПРИМЕР 1. Дана матрица размера 3×5: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$.

Выберем в ней произвольные 2 строки и 2 столбца, например 2-я и 3-я строка и 3-й и 4-й столбец :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} & a_{15} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} & \mathbf{a_{25}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \mathbf{a_{34}} & \mathbf{a_{35}} \end{pmatrix}$$

Тогда минор 2-го порядка для данной матрицы состоит из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Если рассматривать квадратную матрицу порядка n и её минор порядка s, тогда появляется ещё один вид минора:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определитель матрицы, оставшейся после вычёркивания тех* s*-строк и* s*-столбцов данной матрицы, которые входят в минор порядка* s *данной матрицы, называется* ***минором*** M', ***дополнительным к минору*** M .

Очевидно, что дополнительным к минору M' будет минор M .

ПРИМЕР 2. Дана матрица 5-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Найдём минор 2-го порядка, выбрав, например, 2-ю и 3-ю строки и 3-й и 5-й столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

Тогда дополнительным минором M' к минору M будет:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{14} & \\ & & & & \\ & & & & \\ a_{41} & a_{42} & & a_{44} & \\ a_{51} & a_{52} & & a_{54} & \end{pmatrix},$$

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Алгебраическим дополнением*** M^* ***минора*** M *называется дополнительный к нему минор, умноженный на* $(-1)^{\sigma}$ *,где* σ *- сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в рассматриваемый минор.*

ПРИМЕР 3. Найдём алгебраическое дополнение минора $M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}$ из предыдущего **ПРИМЕРА 2.**

Решение:

По определению $M^* = (-1)^{\sigma} \cdot M' = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$, где $\sigma = 2+3+3+5 = 13$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждый элемент a_{ij} матрицы n-го порядка является ***минором 1-го порядка.*** Дополнительный минор является определителем порядка $n-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Дополнительный минор элемента a_{ij} будем называть* ***минором элемента*** *a_{ij} и обозначать M_{ij}. Он равен определителю, полученному из исходного вычёркиванием i-строки и j-столбца.*

ПРИМЕР 4. Рассмотрим квадратную матрицу 5-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Найдём M_{24}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{15} \\ & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Алгебраическим дополнением элемента*** *a_{ij} будем называть произведение минора элемента a_{ij} на $(-1)^{i+j}$ и обозначать его A_{ij}:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

ПРИМЕР 5. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{24} из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Решение:

Минор M_{24} элемента a_{24} был найден в **ПРИМЕРЕ 4,** поэтому

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot M_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

В заключении этого пункта приведём одну важную теорему.

ТЕОРЕМА 1 (АННУЛИРОВАНИЯ). *Сумма произведений элементов некоторой строки квадратной матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки этой матрицы равна нулю, т.е.*

$$a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{kn} = 0,$$

где

$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ - *элементы некоторой строки* $i : 1 \le i \le n$,

$A_{k1}, A_{k2}, \ldots, A_{kn}$- *алгебраические дополнения элементов строки* $\mathrm{k} : 1 \le k \le n, i \ne k$.

Аналогичное утверждение верно и для столбцов матрицы.

3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

В основе вычисления определителя n-го порядка лежит следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2 (О РАЗЛОЖЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ n-ГО ПОРЯДКА ПО i-ОЙ СТРОКЕ (j-МУ СТОЛБЦУ). *Определителем порядка n, соответствующим квадратной матрице порядка n, называется число, равное*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij},$$

где A_{ij} - соответствующее алгебраическое элемента a_{ij},

M_{ij} *- соответствующий минор элемента a_{ij}, i-любое фиксированное число:* $i=1,...,n$ (j *-любое фиксированное число:* $j=1,...,n$).

Данная теорема даёт ***правило вычисления определителя n-го порядка***:
Для того, чтобы вычислить определитель n-го порядка, нужно взять любую строку (или столбец) и сложить произведения соответствующих элементов строки (или столбца) и их алгебраических дополнений.

У определителя есть ряд свойств, которые на практике позволяют значительно упростить его вычисление.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы (*или *определитель не меняется при транспонировании*):

$$\det A = \det A^T$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это свойство иногда называют *свойством инвариантности определителя относительно транспонирования матрицы.*

2. При перестановке двух строк (или двух столбцов) определитель меняет свой знак на противоположный.

3. *Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратите внимание, что

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A .$$

4. *Если все элементы некоторого j-го столбца определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы, кроме j-го такие же, но у первого определителя j-ый столбец состоит из первых слагаемых исходного j-го столбца, а второго - j-ый столбец состоит из вторых слагаемых исходного j-го столбца:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a'_{n2} + a''_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a'_{i2} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a'_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a''_{i2} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a''_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аналогично:

Если все элементы некоторой i-го строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-го такие же, но у первого определителя i-ая строка состоит из первых слагаемых исходной i-ой строки, а второго - i-ая строка состоит из вторых слагаемых исходной i-го строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \dots & a'_{in}+a''_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. *Определитель равен 0, если:*

- *все элементы некоторой строки (или столбца) равны 0,*
- *есть хотя бы две одинаковые строки (или хотя бы два одинаковых столбца),*
- *есть хотя бы две строки (или хотя бы два столбца), элементы которых пропорциональны,*
- *есть хотя бы одна строка (или хотя бы один столбец), являющийся линейной комбинацией других строк (или столбцов).*

6. Определитель не изменится, если к элементом какой-либо строки (или какого-либо столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или другого столбца), умноженные на число λ *:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a_{i2}+\lambda a_{2j} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2}+\lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Это свойство можно обобщить: *определитель не изменится, если к элементом какой-либо строки (или какого-либо столбца) прибавить поэлементно линейную комбинацию других строк(или столбцов).*

7. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей:*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \ .$$

3.4. ПОНЯТИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА И СУЩЕСТВОВАНИИ И ВИДЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ (МЕТОД ПРИСОЕДИНЁННОЙ МАТРИЦЫ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть A - квадратная матрица порядка n. Квадратная матрица B того же порядка называется* ***обратной*** *к матрице A, если выполнено условие:*

$$A \cdot B = B \cdot A = E \, ,$$

где E - единичная матрица порядка n.

Обозначение: A^{-1}.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратная матрица позволяет определить целую отрицательную степень матрицы A:

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n, n \in N \ .$$

Не каждая матрица имеет обратную - критерий существования обратной матрицы мы сформулируем ниже. Для его доказательства нам потребуется дополнительная теорема (см. ТЕОРЕМУ 3 ниже) и ещё один вид матриц:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть A - квадратная матрица порядка n. Тогда матрица $\left(A^V\right)^T$:*

$$\left(A^V\right)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A, называется ***присоединённой матрицей*** *или* ***матрицей алгебраических дополнений.***

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание, что A_{ij} (алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A) расположены в <u>транспонированном</u> порядке относительно самих элементов a_{ij}.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A -квадратная матрица порядка n, матрица $\left(A^V\right)^T$ - соответствующая присоединённая матрица, E - единичная матрица порядка n.*
Тогда верно равенство:

$$A\cdot\left(A^V\right)^T=\left(A^V\right)^T\cdot A=E\cdot\det A.$$

Доказательство:

Рассмотрим произведение матриц $A\cdot\left(A^V\right)^T=D$, $D_{n\times n}=\left[d_{ij}\right]$.

Если

- $i\neq k$, то по ТЕОРЕМЕ 1 (аннулирования):

$$d_{ik}=a_{i1}\cdot A_{k1}+a_{i2}\cdot A_{k2}+...+a_{in}\cdot A_{kn}=0,$$

- если $i=k$, то по ТЕОРЕМЕ 2 (о разложении определителя n-го порядка по i-й строке (j-му столбцу)):

$$d_{ij}=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+...+a_{in}\cdot A_{in}=\det A,$$

тогда получим, что

$$A\cdot\left(A^V\right)^T=\begin{pmatrix}\det A & 0 & ... & 0\\ 0 & \det A & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \det A\end{pmatrix}=\det A\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}=E\cdot\det A.$$

Аналогично можно доказать, что $\left(A^V\right)^T\cdot A=E\cdot\det A$.

Теорема доказана.

Далее перейдём к формулировке и доказательству основной теоремы об обратной матрице:

ТЕОРЕМА 4 (О ВИДЕ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ). *Для невырожденной матрицы A порядка n существует и при том единственная обратная матрица* A^{-1}*, которая имеет вид:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} *- алгебраические дополнения элементов* a_{ij} *матрицы* A.

Доказательство:

1. Докажем существование обратной матрицы.

Так как матрица А - невырожденная ($\det A \neq 0$), тогда по ТЕОРЕМЕ 3

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^V\right)^T = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^V\right)^T \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot E \cdot \det A = E,$$

а это значит, что матрица $\frac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T$ является обратной к матрице A.

2. Докажем единственность обратной матрицы.

Предположим противное - существует две матрицы A_1^{-1} и A^{-1}, обратные к A:

$$A_1^{-1} \neq A^{-1}.$$

Тогда по определению обратных матриц верны равенства:

$$A_1^{-1} \cdot A = A \cdot A_1^{-1} = E,$$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Домножим равенства на A_1^{-1} слева

$$A_1^{-1}(A^{-1} \cdot A) = A_1^{-1}(A \cdot A^{-1}) = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1}$$

и применим свойство ассоциативности умножения:

$$A_1^{-1}(A^{-1} \cdot A) = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1},$$

$$(A_1^{-1}A)A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1},$$

$A_1^{-1} = A^{-1}$ - получили противоречие.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. По построению обратной матрицы (см. ТЕОРЕМА 4) видно, что для нахождения матрицы, обратной к матрице A, необходимо:

1. Найти определитель матрицы A и проверить, что $\det A \neq 0$.

2. Найти $(n \cdot n)$ алгебраических дополнений A_{ij}, соответствующих элементам a_{ij}.

3. Составить матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где элементы A_{ij} расположены в транспонированном порядке.

ПРИМЕР 6. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Находим $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \neq 0$.

2. Находим $2 \cdot 2 = 4$ соответствующих алгебраических дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$

3. Составляем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что в случае, когда матрица A имеет достаточно большой порядок (хотя бы 4 и выше), для нахождения обратной к ней матрицы необходимо вычислить 16 и более определителей 3-го порядка, что является достаточно трудоёмким делом. В таких случаях применяют другой способ нахождения обратной матрицы, о котором мы расскажем в **ЛЕКЦИИ 4.** Этот способ (метод) называется ***нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований*** или ***метод Жордана.***

В заключение отметим некоторые важные свойства обратной матрицы:

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1. Если квадратная матрица A имеет обратную, то:

$$\det A^{-1} = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

2. Если квадратные матрицы A и B порядка n имеют обратные матрицы, то их произведение $A \cdot B$ также имеет обратную матрицу:

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

3. Если матрица A порядка n имеет обратную, то транспонированная матрица A^T также имеет обратную:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

4. Если квадратная матрица A имеет обратную, то:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$