6.10) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2x \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} = -x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) 2y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} =$$
$$= \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

6.11) $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-z}\right) = -zy^z x^{-z-1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{-z}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^z\right) = zx^{-z}y^{z-1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z(z+1)y^z x^{-z-2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z(z-1)x^{-2}y^{z-2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \ln^2\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -z^2 x^{-z-1}y^{z-1}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -zy^z x^{-z-1} \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(z\ln\left(\frac{y}{z}\right)+1\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = z \cdot x^{-z}y^{z-1} \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

6.4 Дифференциал функции одной переменной

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$.

Приращение для такой функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \overset{def}{=} f'(x) + \underbrace{\alpha(\Delta x)}_{\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0}$$

Здесь $\alpha(\Delta x)$ – некоторая функция, зависящая от Δx.

$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

Обозначим Δx за dx.

$\Delta y = \underbrace{f'(x)dx}_{=dy} + \alpha(\Delta x) \cdot dx$

Итак, дифференциал функции y по определению равен: $dy = f'(x)dx$. Это главная линейная часть приращения функции y.

6.5 Дифференциал функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$. Здесь всё аналогично.

$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$

$du \overset{def}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$

Задача. Найти дифференциал функции:

6.12) $\quad z = \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dz = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot dy$$

6.13) Вычислить приближенно:

$\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$

Искомое число будем рассматривать как значение функции

$f\left(x, y\right) = \sqrt{x^3+y^3}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где $x_0 = 1, y_0 = 2,\ \Delta x = 0,02,\ \Delta y = -0,03$.

Посчитаем тогда значение функции в точке $(1,2)$ и приращение функции Δf при сдвиге аргумента по x на Δx, по y на Δy.

$$f\left(1,2\right) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3$$

$$\Delta f\left(x,y\right) \approx df\left(x,y\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y^3}} \cdot \left(3x^2\,dx + 3y^2\,dy\right)$$

$$\left(\text{Так как } \ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right)$$

$$\Delta f\left(1,2\right) \approx \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 0,02 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-0,03)}{2\sqrt{1^3+2^3}} = \frac{0,06 - 0,36}{6} = -0,05$$

$$\left(f + \Delta f\right)\left(1,2\right) \approx 3 - 0,05 = 2,95$$

Ответ: $\sqrt{\left(1,02\right)^3 + \left(1,97\right)^3} \approx 2,95$.

6.6 Дифференцирование сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $u = u\left(t,x,y\right)$, где $x = x\left(t\right), \quad y = y\left(t\right)$.

Тогда $\frac{du}{dt}$ можно посчитать по формуле:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

6.14) Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{yz}{x}$, где $x = e^t,\ y = \ln t,\ z = t^2 - 1$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{yz}{x}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{yz}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{x}.$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = 2t.$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{yz}{x^2} \cdot e^t + \frac{z}{x} \cdot \frac{1}{t} + \frac{y}{x} \cdot 2t.$$

6.15) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$, где $y = \frac{1}{3}x^3 + x$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$
$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1,$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \cdot \left(x^2 + 1\right).$$

6.16) Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x^y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$
$$\frac{dz}{dt} = yx^{y-1} \cdot \frac{1}{t} + x^y \ln x \cdot \cos t.$$

Решите самостоятельно: Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}$, где $y = e^{(x+1)^2}$.

6.7 Дифференцирование неявной функции одной переменной

Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно, что есть с помощью уравнения: $f(x, y) = 0$. Найдем $\frac{dy}{dx}$. Согласно формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Пример

Рассмотрим кривую: $x^2 + y^2 = 1$. Найдём $\frac{dy}{dx}$.

Первый способ.

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$
$$y' = \frac{-2x}{\pm 2\sqrt{1 - x^2}} = \Big/ y = \pm\sqrt{1 - x^2} \Big/ = -\frac{x}{y}$$

Второй способ.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Можно также найти вторую производную:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - y' \cdot x}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

Пример

Найти $\frac{dy}{dx}$ для неявно заданной функции:

$$2\cos(xy) = xy + e^{xy}$$

$$f(x, y) = 2\cos(xy) - xy - e^{xy} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(xy) \cdot y - y - e^{xy} \cdot y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin(xy) \cdot x - x - e^{xy} \cdot x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2\sin(xy) \cdot y - y - e^{xy} \cdot y}{-2\sin(xy) \cdot x - x - e^{xy} \cdot x} = -\frac{y}{x}$$

6.16) Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $f(x, y) = x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + \frac{1}{1 + y^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{-1 + \frac{1}{1+y^2}} = -\frac{1}{\frac{-1-y^2+1}{1+y^2}} = \frac{1 + y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^2} + 1\right) = -2y^{-3} \cdot y' = \left(y' = \frac{1}{y^2} + 1\right) = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1}{y^2} + 1\right)$$

6.17) Найти $\frac{dy}{dx}$, если $f(x, y) = y\sin x - \cos(x - y) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos x + \sin(x - y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x + \sin(x - y) \cdot (-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin x - \sin(x-y)}$$

6.18) Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 2$.

$\underbrace{\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y)}_{=1} = 2$, следовательно, это уравнение не задает никакую функцию (так как не выполнено ни в одной точке), а значит $\frac{dy}{dx}$ не существует.

Решите самостоятельно:

6.19) Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

6.20) Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x + y = e^{x-y}$.

6.21) Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z = \cos\frac{y}{x}\arccos\frac{x}{y}$.

6.8 Экстремум функции двух переменных

Определение

Функция $u = f(P)$ имеет максимум (минимум) в точке $P_0\left(x_1^0, \ \ldots, x_n^0\right)$, если существует окрестность точки P_0, для всех точек $P(x_1, \ \ldots, x_n)$ которой выполняется неравенство $f(P_0) > f(P) \quad (f(P_0) < f(P))$.

Необходимое условие экстремума

Если дифференцируемая функция $f(P)$ достигает экстремума в точке P_0, то в этой точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0) = 0, \qquad \forall\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Точки, в которых выполнены эти условия, называются стационарными точками функции $u = f(P)$.

Достаточные условия экстремума

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все её вторые частные производные непрерывны в точке P_0.

Введем обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0), \quad D = AC - B^2.$$

Тогда:

1)Если $D > 0$, то функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет в точке $P_0\left(x_0, y_0\right)$ экстремум:

Максимум при $A < 0\left(C < 0\right)$,

Минимум при $A > 0\left(C > 0\right)$.

2)Если $D < 0$, то экстремума в точке $P_0\left(x_0, y_0\right)$ нет.

3)Если $D = 0$, требуется дополнительное исследование функции.

Пример

Исследовать на экстремум функцию: $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Найдем частные производные первого порядка и составим систему уравнений вида (6.1):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = x^2 \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Итак, нашли две стационарные точки: $P_1\left(0, 0\right)$ и $P_2\left(1, 1\right)$.

Найдем частные производные 2 порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Составим дискриминант $D = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки P_1:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 0,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = -3,$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 0,$$

$D = AC - B^2 = -9 < 0 \;\Rightarrow\;$ экстремума в точке P_1 нет.

Для точки P_2:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 6,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_2} = -3,$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2} = 6,$$

$D = AC - B^2 = 27 > 0, \quad A > 0 \;\Rightarrow\;$ в точке P_2 функция имеет минимум:

$$z_{\min} = z\Big|_{x=1,\ y=1} = 1 + 1 - 3 = -1.$$

6.22) $\quad z = xy^2\left(1 - x - y\right),$ где $x > 0,\ y > 0.$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\left(1 - 2x - y\right) = 0 \\ 2xy\left(1 - x - \frac{3}{2}y\right) = 0 \end{cases}$$

По условию $x > 0,\ y > 0$, следовательно, можем разделить первое уравнение на y^2, а второе уравнение на xy.

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 - x - \frac{3}{2} + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = 0 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Нашли стационарную точку $P_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = -2y^2\Big|_{P_1} = -\frac{1}{2}.$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = \left(2y - 4xy - 3y^2\right)\Big|_{P_1} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$$
$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = \left(2x - 2x^2 - 6xy\right)\Big|_{P_1} = 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} - 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{8}.$$
$$\left.\begin{array}{c} D = AC - B^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8} > 0 \\ A = -\frac{1}{2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в точке P_1 функция имеет максимум:

$$z_{\max} = z\Big|_{x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

6.9 Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(P)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 2$.

1) Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Стационарные точки: $P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$.

Значения функции в этих точках: $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$.

2) Исследуем функцию на границах области .

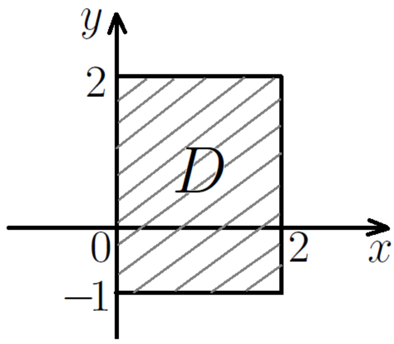

Рис. 30: График к примеру

а) При $x = 0$ получим функцию $z = y^3$, которая монотонно возрастает. Следовательно, экстремумов нет и нужно лишь посчитать значения функции на концах отрезка $[-1, 2]$:

$$z\Big|_{y=-1} = -1,$$
$$z\Big|_{y=2} = 8.$$

б) При $x = 2$ функция примет вид: $z = 8 + y^3 - 6y$.

Найдём значение в стационарной точке:

$$z' = 3y^2 - 6.$$

$$z' = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2} \text{ – не лежит в области } [-1, 2]\,. \end{array}\right.$$

$$z\Big|_{y=\sqrt{2}} = 2^3 + \left(\sqrt{2}\right)^3 = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

На концах отрезка $[-1, 2]$:

$$z\Big|_{y=-1} = 8 + (-1)^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 13,$$
$$z\Big|_{y=2} = 8 + 8 - 12 = 4.$$

в) При $y = -1$ функция примет вид: $z = x^3 - 1 + 3x$

$z' = 3x^2 + 3 > 0$, следовательно, функция монотонно возрастает.

На концах отрезка $[0, 2]$:

$$z\Big|_{x=0} = -1,$$

$z\Big|_{x=2} = 13.$

г) При $y = 2$ функция примет вид: $z = x^3 + 8 - 6x$. Тогда $z' = 3x^2 - 6$.

$$z' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2} \text{ – не лежит в области } [0,2]\,. \end{array}\right.$$

$z\Big|_{x=\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^3 + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$

На концах отрезка $[0,2]$:

$z\Big|_{x=0} = 0 + 2^3 = 8,$

$z\Big|_{x=2} = 2^3 + 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 8 - 12 = 4.$

3) Сравниваем все найденные значения функции.

Получаем:

$z_{\text{наиб}} = 13$ в точке $(2,-1)$.

$z_{\text{наим}} = -1$ в точках $(1,1)$ и $(0,-1)$.

6.23) Найти наибольшее и наименьшее значение функции:
$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3$

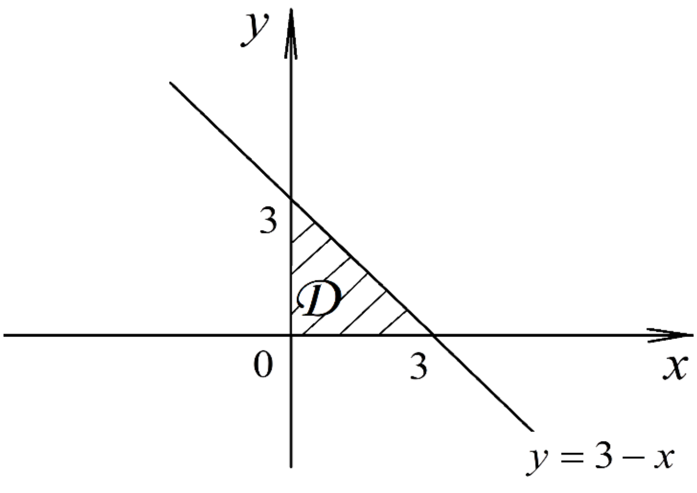

Рис. 31: График к заданию 6.23

1) Найдем стационарные точки:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ 4x - 2 - x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Итак, стационарная точка: $P_1\left(1,1\right).$

Значение функции в точке P_1 :

$z_1 = 1^2 + 1^2 - 1 - 1 - 1 = -1.$

2) Исследуем функцию на границах области.

а) При $x = 0$ функция примет вид: $z = y^2 - y.$

Тогда $z' = 2y - 1.$

$z' = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}$ – стационарная точка.

$$z\Big|_{y=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Посчитаем значения функции на концах промежутка $[0,3]$:

$$z\Big|_{y=0} = 0,$$
$$z\Big|_{y=3} = 3^2 - 3 = 6.$$

б) При $y = 0$ функция примет вид: $z = x^2 - x.$

$z' = 2x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$ – стационарная точка.

$$z\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Посчитаем значения функции на концах промежутка $[0,3]$:

$$z\Big|_{x=0} = 0,$$
$$z\Big|_{x=3} = 3^2 - 3 = 6.$$

в) На прямой $y = 3 - x$ функция примет вид:

$z = x^2 + (3-x)^2 - x(3-x) - x - 3 + x.$

Упростим выражение для функции:

$$z = x^2 + 9 - 6x + x^2 - 3x + x^2 - 3 = 3x^2 - 9x + 6.$$

$$z' = 0 \Leftrightarrow 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ – стационарная точка.}$$

$$z\Big|_{x=\frac{3}{2}} = 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9\cdot\frac{3}{2} + 6 = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} + 6 = -\frac{27}{4} + 6 = \frac{3}{4}.$$

Посчитаем значения функции на концах промежутка, то есть в граничных точках $(0, 3)$ и $(3, 0)$.

$z\Big|_{x=0} = 6,$

$z\Big|_{x=3} = 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 6 = 6.$

3) Сравниваем все найденные значения функции.

$z_{\text{наиб}} = 6$ в точках $(0, 3)$ и $(3, 0)$.

$z_{\text{наим}} = -1$ в точке $(1, 1)$.