7.3 Дифференциальные уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Такие уравнения решаются с помощью замены переменных:

$$\begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n, \end{cases} \tag{7.4}$$

где m и n находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 = 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 = 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

Этой заменой мы сведем наше уравнение к однородному. Если система уравнений не решается (например, когда уравнения пропорциональны друг другу), делаем другую замену:

$$u = a_1x + b_1y + c_1. \tag{7.6}$$

Уравнение должно свестись к однородному.

Задачи

6) $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$

Замена: $\begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n. \end{cases}$

Найдем m и n:

$$\begin{cases} 2m - n + 1 = 0 \\ 2n - m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m + 1 \\ 4m + 2 - m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{3}, \\ n = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Итак, замена: $\begin{cases} x = u - \frac{1}{3}, & dx = du, \\ y = v + \frac{1}{3}, & dy = dv. \end{cases}$

Сделаем замену переменных в исходном уравнении:

$$\left(2u - \frac{2}{3} - v - \frac{1}{3} + 1\right) du + \left(2v + \frac{2}{3} - u + \frac{1}{3} - 1\right) dv = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (2u-v)\,du+(2v-u)\,dv=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2udu-vdu+2vdv-udv=0\ \text{(однородное уравнение)} \tag{7.7}$$

$$\Big/\ \text{Замена: } \tfrac{u}{v}=w\ \Leftrightarrow\ u=vw \qquad du=vdw+wdv\ \Big/$$

После замены переменной уравнение (7.7) примет вид:

$$2vw\,(vdw+wdv)-v\,(vdw+wdv)+2vdv-vwdv=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2v^2wdw+2vw^2dv-v^2dw-vwdv+2vdv-vwdv=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(2v^2w-v^2\right)dw+\left(2vw^2-vw+2v-vw\right)dv=0\ \Big|\cdot\frac{1}{v}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (2vw-v)\,dw+\left(2w^2-w+2-w\right)dv=0\ \Big|\cdot\frac{1}{v\,(2w^2-2w+2)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \int\Big|\ \frac{2w-1}{2w^2-2w+2}dw+\frac{dv}{v}=0\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\int\frac{2w-1}{w^2-w+1}dw+\ln|v|=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Big/\ \tfrac{1}{2}\int\tfrac{2w-1}{w^2-w+1}dw=\int\frac{w-\frac{1}{2}}{\left(w-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dw=\tfrac{1}{2}\int\frac{d\left(\left(w-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}{\left(w-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}= \\ =\tfrac{1}{2}\ln\left|w^2-w+1\right|+C\ \Big/$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\ln\left|w^2-w+1\right|+\ln|v|=C\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2}{v^2}-\frac{u}{v}+1\right|+\ln|v|=C\ \Big|\cdot 2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\left|\frac{u^2}{v^2}-\frac{u}{v}+1\right|+\underbrace{2\ln|v|}_{=\ln|v|^2}=C_1\ \Leftrightarrow\ \ln\left|\frac{u^2}{v^2}-\frac{u}{v}+1\right|\cdot|v|^2=C_1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\left|u^2-uv+v^2\right|=C_1\ \Leftrightarrow\ u^2-uv+v^2=e^{\pm C_1}=C_2\ \Leftrightarrow\ \Big/\ u=x+\tfrac{1}{3} \quad v=y-\tfrac{1}{3}\ \Big/$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=C_2,\ C_2\neq 0.$$

Отметим, что функция $v=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}$, которая была исключена в процессе решения, не является решением исходного уравнения.

<u>Ответ:</u> $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=C_2,\ C_2\neq 0.$

Замечание

Уравнение (7.7) можно решить и другим способом:

$$2udu - vdu + 2vdv - udv = 0 \;\Leftrightarrow\; d(u^2) + d(v^2) - (udv + vdu) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; d(u^2 + v^2 - uv) = 0 \;\Leftrightarrow\; u^2 - uv + v^2 = C.$$

Решите самостоятельно:

7) $(y+2)\,dx - (2x+y-4)\,dy = 0,$

8) $(x+y+1)\,dx - (2x+2y-1)\,dy = 0,$

9) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$ (найти решение, удовлетворяющее условию: $y(1) = 1$).

Разбор задач 7–9.

7) $(y+2)\,dx - (2x+y-4)\,dy = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2}{2x+y-4}.$

Сделаем замену: $\begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n. \end{cases}$

Найдем m и n из системы уравнений:

$$\begin{cases} n + 2 = 0 \\ 2m + n - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ 2m - 2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2, \\ m = 3. \end{cases}$$

Итак, замена:

$$\begin{cases} x = u + 3 \quad \Rightarrow\; dx = du, \\ y = v - 2 \quad \Rightarrow\; dy = dv. \end{cases}$$

Подставляем x и y в исходное уравнение:

$$(v - 2 + 2)\,du - (2u + 6 + v - 2 - 4)\,dv = 0 \;\Leftrightarrow\; vdu - (2u + v)\,dv = 0$$

$$\Big/ \begin{array}{ll} \text{Замена :} & \frac{u}{v} = w \Leftrightarrow u = vw \\ & du = vdw + wdv \end{array} \Big/$$

$$v^2dw + vwdv - 2vwdv - vdv = 0 \;\Big|\cdot\frac{1}{v} \quad \text{(Здесь мы предполагаем, что } v \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\; vdw + wdv - 2wdv - dv = 0 \;\Leftrightarrow\; vdw + (-w - 1)\,dv = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ vdw = (w+1)\,dv \ \Leftrightarrow\ \frac{dw}{w+1} = \frac{dv}{v} \text{ (Здесь мы предполагаем, что } w \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow\ \ln|w+1| = \ln|v| + C \ \Leftrightarrow\ \ln\left|\frac{w+1}{v}\right| = C \ \Leftrightarrow\ \ln\left|\frac{\frac{u}{v}+1}{v}\right| = C$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\left|\frac{\frac{x-3}{y+2}+1}{y+2}\right| = C \ \Leftrightarrow\ x+y-1 = C_1\,(y+2)^2\,,\ C_1 \neq 0.$$

Нетрудно увидеть, что $v = 0$ и $w = -1$, которые были исключены в процессе решения, являются решениями уравнения. Следовательно, нужно добавить их в ответ.

$v = 0 \ \Leftrightarrow\ y = -2.$

$w = -1 \ \Leftrightarrow\ u = -v \ \Leftrightarrow\ x - 3 = -y - 2 \ \Leftrightarrow\ y = -x + 1.$

<u>Ответ:</u> $\left[\begin{array}{l} x+y-1 = C_1\,(y+2)^2\,,\ C_1 \neq 0, \\ y = -x+1, \\ y = -2. \end{array}\right.$

8) $(x+y+1)\,dx - (2x+2y-1)\,dy = 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}.$

Сделаем замену: $\begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n. \end{cases}$

Найдем m и n из системы уравнений:

$$\begin{cases} m+n+1 = 0 \\ 2m+2n-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1-n \\ -2-2n+2n-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1-n \\ -3 = 0 \end{cases},$$

то есть система несовместна. Следовательно, нужно сделать другую замену: $u = x + y + 1$. Соответственно,

$du = dx + dy \ \Leftrightarrow\ dy = du - dx,$

$2x + 2y - 1 = 2\,(x+y+1) - 3 = 2u - 3.$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{du-dx}{dx} = \frac{u}{2u-3} \quad \text{(Здесь мы предполагаем, что } x \neq 0,\ u \neq \frac{3}{2})$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{du}{dx}-1=\frac{u}{2u-3}\ \Leftrightarrow\ \frac{du}{dx}=\frac{u+2u-3}{2u-3}=3\cdot\frac{u-1}{2u-3}\quad\Bigg|\cdot\frac{2u-3}{u-1}\ \Leftrightarrow$$

$$\int\ \Bigg|\ \frac{2u-3}{u-1}du=3dx\quad \text{(Здесь мы предполагаем, что } u\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow\ \int\frac{2u-2-1}{u-1}du=3x\ \Leftrightarrow\ 2u-\int\frac{du}{u-1}=3x\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2u-\ln|u-1|-C_1=3x\ \Leftrightarrow\ 2(x+y+1)-\ln|x+y|-C_1=3x$$

$$\Leftrightarrow\ 2(x+y)-\ln|x+y|-3x=C.$$

Проверим возможные потерянные решения. $x=0$ и $u=\frac{3}{2}$ решениями не являются, а вот $u=1\ \Leftrightarrow x+y+1=1\ \Leftrightarrow y=-x$ есть решение уравнения. Добавим его в ответ.

<u>Ответ:</u> $\left[\begin{array}{l} 2(x+y)-\ln|x+y|-3x=C \\ y=-x \end{array}\right.$.

9) Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} xy'=y\ln\frac{y}{x} \\ y(1)=1 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}, \\ y(1)=1. \end{cases}$$

Уравнение однородное. Следовательно, сделаем замену:

$$u=\frac{y}{x}\ \Leftrightarrow y=ux,\quad y'=u'x+u.$$

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u'x+u=u\ln u\ \Leftrightarrow\frac{du}{dx}x=u(\ln u-1)\quad\Bigg|\cdot\frac{1}{xu(\ln u-1)}dx\ \Leftrightarrow$$

/Здесь мы предполагаем, что: $u\neq 0\ \Leftrightarrow\ y\neq 0$.

Кроме того, $\ln u\neq 1\Leftrightarrow u\neq e\Leftrightarrow y\neq ex$. Оба предположения будут выполнены в силу начального условия: $y(1)=1$. /

$$\Leftrightarrow \int \Bigg| \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{d(\ln u)}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \ln|x| \;\Leftrightarrow\; \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{\ln u - 1}{x}\right| = C \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln u - 1}{x} = \pm e^C = C_1, \text{ где } C_1 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{y}{x} - 1 = C_1 x \;\Leftrightarrow\; \frac{y}{x} = e^{C_1 x + 1} \;\Leftrightarrow\; y = x \cdot e^{C_1 x + 1}.$$

Удовлетворим начальному условию:

$y(1) = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = 1 \cdot e^{C_1 \cdot 1 + 1} \;\Leftrightarrow\; C_1 = -1.$

Итак, частное решение уравнения: $y = x \cdot e^{1-x}$.

7.4 Линейные уравнения и уравнение Бернулли

$y' + p(x)\,y = q(x)$ – линейное уравнение. (7.8)

Здесь $p(x)$, $q(x)$ – заданные функции.

$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^a$, где $a = const$ – уравнение Бернулли. (7.9)

В обоих уравнениях нужно разделить переменные. Сделать это можно с помощью следующей замены:

$y = ue^{-\int p(x)dx}$. (7.10)

Объясним, почему переменные разделятся.

$y' + p(x)\,y = q(x)$.

Замена: $y = ue^{-\int p(x)dx}$. Тогда $p(x)\,y = p(x)\,ue^{-\int p(x)dx}$.

Соответственно, $y' = u'e^{-\int p(x)dx} + ue^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))$.

Подставляем y и y' в исходное уравнение:

$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \;\Leftrightarrow\; du = q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx.$