$$\Leftrightarrow \int \Bigg| \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{d(\ln u)}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \ln|x| \;\Leftrightarrow\; \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{\ln u - 1}{x}\right| = C \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln u - 1}{x} = \pm e^{C} = C_1,\ \text{где } C_1 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{y}{x} - 1 = C_1 x \;\Leftrightarrow\; \frac{y}{x} = e^{C_1 x + 1} \;\Leftrightarrow\; y = x \cdot e^{C_1 x + 1}.$$

Удовлетворим начальному условию:

$y(1) = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = 1 \cdot e^{C_1 \cdot 1 + 1} \;\Leftrightarrow\; C_1 = -1.$

Итак, частное решение уравнения: $\quad y = x \cdot e^{1-x}.$

7.4 Линейные уравнения и уравнение Бернулли

$$y' + p\,(x)\,y = q\,(x) \quad \text{– линейное уравнение.} \qquad (7.8)$$

Здесь $p\,(x)$, $q\,(x)$ – заданные функции.

$$y' + p\,(x)\,y = q\,(x)\,y^{a},\ \text{где } a = const \qquad \text{– уравнение Бернулли.} \qquad (7.9)$$

В обоих уравнениях нужно разделить переменные. Сделать это можно с помощью следующей замены:

$$y = ue^{-\int p(x)dx}. \qquad (7.10)$$

Объясним, почему переменные разделятся.

$y' + p\,(x)\,y = q\,(x)\,.$

Замена: $y = ue^{-\int p(x)dx}$. Тогда $p\,(x)\,y = p\,(x)\,ue^{-\int p(x)dx}$.

Соответственно, $\quad y' = u'e^{-\int p(x)dx} + ue^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))$.

Подставляем y и y' в исходное уравнение:

$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \;\Leftrightarrow\; du = q\,(x)\,e^{\int p(x)dx}dx.$

Решение находится интегрированием.

Пример

$y' = y\operatorname{ctg} x + \sin x \;\Leftrightarrow\; y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin x.$

Сделаем замену: $y = ue^{-\int(-\operatorname{ctg} x)dx}$

$$\Big/ \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C_1 \Big/$$

$\Leftrightarrow\; y = ue^{\ln|\sin x|} \Leftrightarrow y = u\,|\sin x| \Leftrightarrow y = u \cdot \sin x$ (знак "$\pm$" и e^{C_1} внесли в u).

Тогда $y' = u' \cdot \sin x + u \cdot \cos x$. Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u' \cdot \sin x + u \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x \cdot u \cdot \sin x = \sin x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u' \cdot \sin x + \cancel{u\cos x} - \cancel{u\cos x} = \sin x \;\Leftrightarrow\; u'\cancel{\sin x} = \cancel{\sin x} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u' = 1 \;\Leftrightarrow\; du = dx \;\Leftrightarrow\; u = x + C \;\Leftrightarrow\; \underline{y = (x + C) \cdot \sin x.}$$

Задачи:

10) $\left(1 + x^2\right) y' = 2xy + \left(1 + x^2\right)^2$

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} - \left(1 + x^2\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; y' - \frac{2x}{1 + x^2} \cdot y = 1 + x^2$$

Замена: $y = ue^{-\int(-\frac{2x}{1+x^2})dx} \;\Leftrightarrow\; y = u \cdot (1 + x^2).$

$$\Big/ \int \frac{2xdx}{1 + x^2} = \int \frac{d\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2} = \ln\left(1 + x^2\right) + C_1. \Big/$$

Соответственно, $y' = u'\left(1 + x^2\right) + 2xu.$

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u'\left(1 + x^2\right) + 2xu - \frac{2x}{1 + x^2} \cdot u\left(1 + x^2\right) = 1 + x^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u'\left(1 + x^2\right) + \cancel{2xu} - \cancel{2xu} = 1 + x^2 \;\Leftrightarrow\; u' = 1 \;\Leftrightarrow\; du = dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u = x + C \;\Leftrightarrow\; \underline{y = (x + C)(1 + x^2).}$$

11) $y' = \dfrac{y}{x + y^3}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{x+y^3} \Leftrightarrow x' = \frac{x+y^3}{y} \Leftrightarrow x' - \frac{1}{y}\cdot x = y^2$$

Замена: $x = ue^{-\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy} \Leftrightarrow x = u\cdot|y| \Leftrightarrow x = u\cdot y$

/знак "$\pm$" и константу интегрирования внесли в u/

Соответственно, $x' = u'y + u$.

Подставим x и x' в исходное уравнение:

$$u'y + u - \frac{1}{y}\cdot u\cdot y = y^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u'y - y^2 = 0 \;\left|\cdot\frac{1}{y}\right. \quad \text{(Здесь мы предполагаем, что } y\neq 0.\text{)}$$

$$\frac{du}{dy} = y \Leftrightarrow du = ydy \Leftrightarrow u = \frac{y^2}{2} + C \;\Leftrightarrow\; x = \left(\frac{y^2}{2}+C\right)y.$$

<u>Ответ:</u> $\left[\begin{array}{l} x = \left(\frac{y^2}{2}+C\right)y, \\ y = 0. \end{array}\right.$

12) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

Замена: $y = ue^{-\int 4xdx} \Leftrightarrow y = ue^{-2x^2}$

$y' = u'e^{-2x^2} + u\cdot e^{-2x^2}\cdot(-4x)$.

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u'e^{-2x^2}\cancel{-4xue^{-2x^2}} + \cancel{4xue^{-2x^2}} = 2xe^{-x^2}\cdot\sqrt{u}\cdot e^{-x^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u'\cancel{e^{-2x^2}} = 2x\sqrt{u}\cdot\cancel{e^{-2x^2}} \;\Leftrightarrow\; \frac{du}{dx} = 2x\sqrt{u} \;\Leftrightarrow$$

$$\int\;\left|\;\frac{du}{\sqrt{u}} = 2xdx \right. \quad \text{(Здесь мы предполагаем, что } u\neq 0.\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\; 2\sqrt{u} = x^2 + C \;\Leftrightarrow\; u = \left(\frac{x^2+C}{2}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; y = \left(\frac{x^2+C}{2}\right)^2 e^{-2x^2}.$$

Добавим к ответу потерянное решение: $u = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0$.

<u>Ответ:</u> $\left[\begin{array}{l} y = \left(\frac{x^2+C}{2}\right)^2 e^{-2x^2}, \\ y = 0. \end{array}\right.$

<u>Решите самостоятельно:</u>

13) $y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2.$

14) $\left(1+y^2\right) dx = (\operatorname{arctg} y - x)\, dy.$

15) Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} 3dy = \left(1 - 3y^3\right) y \sin x dx, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Разбор задач 13–15

13) $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; y' - \dfrac{2}{x+1} \cdot y = e^x(x+1)^2 \;\Leftrightarrow$

$\Big/$ Замена: $y = u \cdot e^{-\int -\frac{2}{x+1}dx} \;\Leftrightarrow\; y = u \cdot e^{2\ln|x+1|} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; y = u \cdot (x+1)^2 \;\Rightarrow\; y' = u' \cdot (x+1)^2 + 2(x+1)u \Big/$

$$\Leftrightarrow\; u' \cdot (x+1)^2 + 2(x+1)u = \frac{2u(x+1)^2}{x+1} + e^x \cdot (x+1)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{du}{dx} = e^x \;\Leftrightarrow\; du = e^x dx \;\Leftrightarrow\; u = e^x + C \;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\; \underline{y = (e^x + C) \cdot (x+1)^2}.$

14) $(1+y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{arctg} y - x}{1+y^2} \;\Leftrightarrow\; x' + \frac{1}{1+y^2} \cdot x = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2}$$

$\Big/$ Замена: $x = u \cdot e^{-\int \frac{1}{1+y^2}dy} \;\Leftrightarrow\; x = u \cdot e^{-\operatorname{arctg} y} \Big/$

Найдем x' : $\quad x' = u' \cdot e^{-\operatorname{arctg} y} + u \cdot e^{-\operatorname{arctg} y} \cdot (-1) \cdot \dfrac{1}{1+y^2}.$

Подставим x и x' в уравнение:

$$u' \cdot e^{-\operatorname{arctg} y} - \cancel{u \cdot \frac{e^{-\operatorname{arctg} y}}{1+y^2}} + \cancel{u \cdot \frac{e^{-\operatorname{arctg} y}}{1+y^2}} = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\int \Big|\quad du = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2} \cdot e^{\operatorname{arctg} y} dy \;\Leftrightarrow$$

$$u = \int \operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y} d(\operatorname{arctg} y) = \Big/ t = \operatorname{arctg} y \Big/ =$$

$$= \int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Big/ u = t, \quad du = dt, \quad v = e^t, \quad dv = e^t dt \Big/$$

$$\Leftrightarrow \; u = \operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + C \; \Leftrightarrow \; \underline{x = \operatorname{arctg} y - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} y}.}$$

15) $\begin{cases} 3dy = (1-3y^3)y \sin x dx, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$

$$3\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x - 3y^4 \cdot \sin x \; \Leftrightarrow \; y' = \frac{1}{3} y \cdot \sin x - y^4 \cdot \sin x \; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; y' - \frac{1}{3}\sin x \cdot y = -\sin x \cdot y^4 \; \Leftrightarrow$$

$\Big/$ Замена: $y = u \cdot e^{-\int -\frac{1}{3}\sin x dx} \; \Leftrightarrow \; y = u \cdot e^{-\frac{1}{3}\cos x}.$

Соответственно, $y' = u' \cdot e^{-\frac{1}{3}\cos x} + u \cdot e^{-\frac{1}{3}\cos x} \cdot \dfrac{1}{3}\sin x \Big/$

$$\Leftrightarrow u'e^{-\frac{1}{3}\cos x} + \cancel{\frac{1}{3}\sin x \cdot ue^{-\frac{1}{3}\cos x}} - \cancel{\frac{1}{3}\sin x \cdot ue^{-\frac{1}{3}\cos x}} = -\sin x \cdot u^4 e^{-\frac{4}{3}\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{du}{dx} = -u^4 \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x} \; \Leftrightarrow \; \frac{du}{u^4} = -\sin x \cdot e^{-\cos x} dx \; \Big| \text{ проинтегрируем}$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{3u^3} = \int e^{-\cos x} d(\cos x) \; \Leftrightarrow \; -\frac{1}{3u^3} = -(e^{-\cos x} + C) \; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; u^3 = \frac{1}{3e^{-\cos x} + 3C} \; \Leftrightarrow \; y^3 = \frac{e^{-\cos x}}{3e^{-\cos x} + 3C}.$$

Постоянную C найдем из начального условия:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \; \Leftrightarrow \; y^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \; \Leftrightarrow \; \frac{e^{-\cos\frac{\pi}{2}}}{3e^{-\cos\frac{\pi}{2}} + 3C} = 1 \; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{1}{3+3C} = 1 \; \Leftrightarrow \; 3 + 3C = 1 \; \Leftrightarrow \; 3C = -2 \Leftrightarrow \; C = -\frac{2}{3}.$$

$$y^3 = \frac{e^{-\cos x}}{3e^{-\cos x} - 2} \; \Leftrightarrow \; y^3 = \frac{1}{3 - 2e^{\cos x}} \; \Leftrightarrow \; \underline{y = \left(\frac{1}{3 - 2e^{\cos x}}\right)^{\frac{1}{3}}.}$$

7.5 Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Решаются с помощью n-кратного интегрирования.

Пример 1

Решим следующее уравнение: $y'' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.