2.8 Вторая теорема о среднем значении

Теорема 9 (теорема о среднем, формула (2.9)) позволяла дать интегралу неинтегральную оценку. Однако при этом на функцию накладывалось условие непрерывности. Непрывность позволяла утверждать, что найдется точка, в которой подынтегральная функция равна ее среднему значению по всему промежутку. В некоторых случаях удается ослабить условие непрерывности, но при этом оценка для интеграла будет содержать другой интеграл.

Теорема 14 (Вторая теорема о среднем значении)
Если на отрезке $[a,\, b]$, где $a < b$, функция $f(x)$ монотонно убывает и неотрицательна, а функция $g(x)$ интегрируема, то существует точка $\xi \in [a,\, b]$, такая, что:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx. \tag{2.19}$$

Доказательство:

Разобъем отрезок интегрирования $[a,\, b]$ точками x_i и запишем исходный интеграл в виде суммы интегралов:

$$I = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x)dx}_{I_2}.$$

Проведем оценки для интегралов I_1 и I_2. Введем некоторые вспомогательные обозначения. Пусть $L = \sup\limits_{[a,\, b]} |g(x)| < \infty$. Последнее неравенство выполнено, так как интегрируемая функция всегда ограничена. Обозначим за ω_i колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_i,\, x_{i+1}]$:

$\omega_i = \max\limits_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x) - \min\limits_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x)$. Тогда:

$$|I_2| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{\le \omega_i} \underbrace{|g(x)|}_{\le L} dx \le L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \underbrace{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx}_{\triangle x_i} =$$

$$= L\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \max_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x) \triangle x_i}_{\overline{S_n}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \min_{[x_i,\, x_{i+1}]} f(x) \triangle x_i}_{\underline{S_n}} \right), \tag{2.20}$$

где $\overline{S_n}$ и $\underline{S_n}$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно.

Функция f – монотонна, следовательно, по теореме 3, она интегрируема. Значит, согласно критерию интегрируемости функции (теорема 1),

$$\overline{S_n} - \underline{S_n} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0, \quad \text{где } \lambda = \max_i \triangle x_i.$$

Следовательно,

$$I_2 \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0, \qquad \text{то есть: } I = \lim_{\lambda \to 0} I_1.$$

Теперь оценим интеграл I_1. Пусть $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$. Тогда:

$$I_1 = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) =$$

$$= \underbrace{f(x_0)}_{=f(a)} G(x_1) - \underbrace{f(x_0)G(x_0)}_{=f(a)G(a)=0} + f(x_1)G(x_2) - f(x_1)G(x_1) + \ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + f(x_{n-2})G(x_{n-1}) - f(x_{n-2})G(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) \underbrace{G(x_n)}_{=G(b)} - f(x_{n-1})G(x_{n-1}) =$$

$$\Big/ \text{Собираем подобные члены при одинаковых } G(x_i) \Big/$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(\underbrace{f(x_{i-1}) - f(x_i)}_{\geqslant 0}) + G(b) \underbrace{f(x_{n-1})}_{\geqslant 0}. \tag{2.21}$$

Поскольку функция $g(x)$ интегрируема, то $G(x)$ непрерывна (по теореме 10). Следовательно, функция $G(x)$ достигает на отрезке $[a,\, b]$ своих наибольшего и наименьшего значений: $\sup\limits_{[a,b]} G(x) = M, \quad \inf\limits_{[a,b]} G(x) = m.$ Заменяя $G(x_i)$ на M либо m, получим оценки для интеграла I_1 сверху и снизу соответственно (при такой замене в формуле (2.21) сократятся все слагаемые, кроме одного):

$$mf(a) \leqslant I_1 \leqslant Mf(a) \Rightarrow mf(a) \leqslant I \leqslant Mf(a) \Rightarrow$$

Следовательно, найдется некоторое число $\mu : \quad m \leqslant \mu \leqslant M$, что выполнено: $I = \mu f(a)$. Поскольку функция $G(x)$ непрерывна, то она принимает все значения между наименьшим и наибольшим, то есть найдется $\xi \in [a,\, b]$, такая, что: $\mu = G(\xi)$. Следовательно,

$$I = f(a)G(\xi) = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)dx,$$

что и доказывает теорему.

■

Замечание

Если функция $f(x)$ возрастает и $f \geqslant 0$, то можно получить аналог формулы (2.19):

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int\limits_{\xi}^b g(x)dx, \quad a \leqslant \xi \leqslant b. \tag{2.22}$$

Эти формулы называются формулами Бонне.

Замечание

Если функция f монотонна (не обязательно неотрицательна), то можно доказать, что существует точка $\xi \in [a,\, b]$ такая, что:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int\limits_{\xi}^b g(x)dx. \tag{2.23}$$

2.9 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке [a, b]. Тогда для разности $f(b)-f(a)$ можно получить следующее представление:

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b \underbrace{f'(x)}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \Big/\text{Интегрируем по частям}\Big/$$

$$\Big/\ u=f'(x),\quad du=f''(x)dx,\quad dv=dx,\quad v=x-b=-(b-x)\ \Big/$$

$$=-(b-x)f'(x)\Big|_a^b+\int\limits_a^b (b-x)f''(x)dx=$$

$$=f'(a)(b-a)+\int\limits_a^b f''(x)(b-x)dx=\Big/\text{Интегрируем по частям}\Big/$$

$$=f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2+\frac{1}{2}\int\limits_a^b f'''(x)(b-x)^2dx=\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\Big/\text{Интегрируем по частям } n \text{ раз}\Big/$$

$$=f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

Последний оставшийся интеграл представляет собой остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме:

$$R_n=\frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx. \tag{2.24}$$

Следствие

Нетрудно получить оценки сверху и снизу остаточного члена в формуле Тейлора:

$$R_n\leqslant\frac{1}{n!}\max_{[a,\ b]}f^{(n+1)}(x)\cdot\int\limits_a^b (b-x)^n dx=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a,\ b]}f^{(n+1)}(x). \tag{2.25}$$

$$R_n \geqslant \frac{1}{n!} \min_{[a,\ b]} f^{(n+1)}(x) \cdot \int\limits_a^b (b-x)^n dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \min_{[a,\ b]} f^{(n+1)}(x). \quad (2.26)$$

Если производная $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна, то она принимает все значения между наибольшим и наименьшим, то есть существует точка c такая, что:

$$R_n = f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{– остаточный член в форме Лагранжа.} \quad (2.27)$$

Глава 3. Приложения определённых интегралов

3.1 Площадь плоской фигуры

Определенный интеграл был введен для вычисления площадей плоских фигур с кривой границей. При введении определлнного интеграла находилась площадь криволинейной трапеции. Однако плоские фигуры могут иметь и более сложную форму. Способы задания фигур тоже могут быть различны: в декартовых или полярных координатах либо параметрически. Но даже в этих случаях определенный интеграл можно использовать для вычисления площади. Рассмотрим эти ситуации боле подробно.

1. Кривая задана в декартовых координатах

Найдем площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 2. Разобъем фигуру на три криволинейных трапеции и найдем площадь каждой из них. Если график функции $f(x)$ проходит выше оси абсцисс, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ дает нам площадь соответствующей области. Если же график $f(x)$ проходит ниже оси абсцисс, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ дает нам соответствующую площадь со знаком минус. Площадь всей фигуры равна сумме площадей составляющих ее частей.

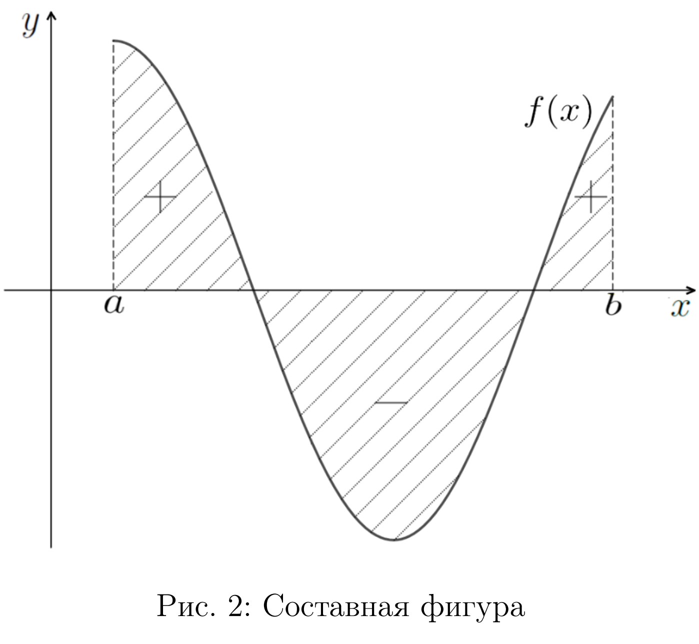

Рис. 2: Составная фигура

Рассмотрим теперь кривую, изображенную на рисунке 3. Она ограничена сверху кривой $y = f_2(x)$, снизу – кривой $y = f_1(x)$.

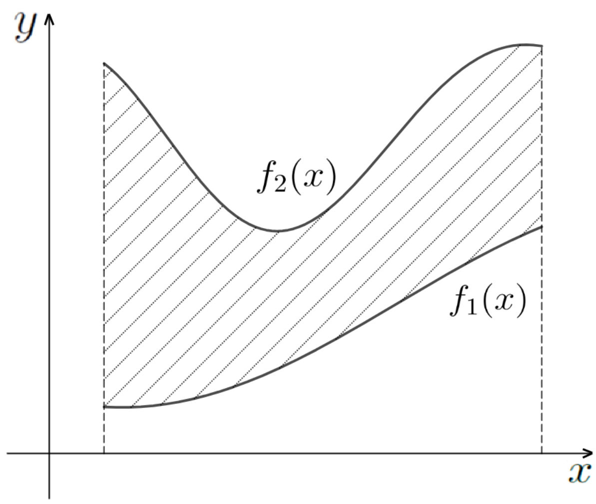

Рис. 3: Область между двумя кривыми

Площадь такой фигуры дается следующим интегралом:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (3.1)$$

2. Кривая задана параметрически

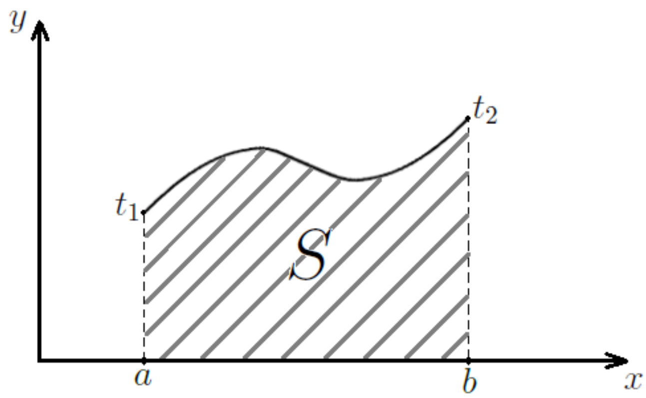

Рис. 4: Фигура, граница которой задана параметрически

Пусть кривая, ограничивающая фигуру, задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } t_1 \le t \le t_2$$

Тогда ее площадь можно посчитать по формуле:

$$S = \int_a^b y(x)dx = \Big/ \text{Замена переменной } x \mapsto t \Big/ = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \quad (3.2)$$

Формула $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ работает и в случае замкнутой кривой, если при изменении t от t_1 до t_2 граница обходится по часовой стрелке.

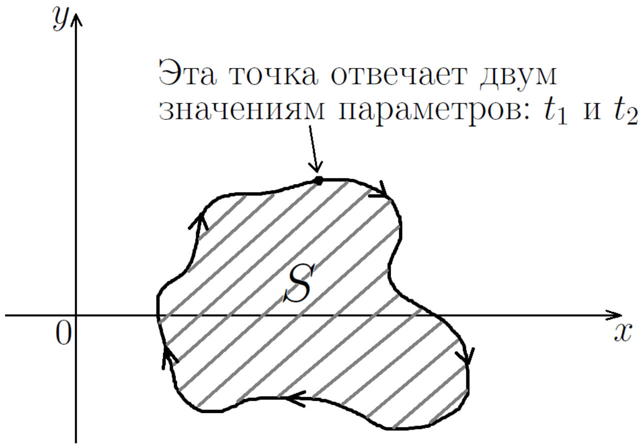

Рис. 5: Фигура, ограниченная замкнутой кривой

Пример 1

Найдем площадь под одной аркой циклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

$$S = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2 \left(t - 2\sin t\right)\Big|_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2\pi a^2 + a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Пример 2

Вычислим площадь эллипса, заданного уравнениями:

$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$

Эллипс – замкнутая кривая. Для того, чтобы обойти эллипс по часовой стрелке, параметр t следует изменять от 2π до 0. Согласно формуле (3.2), площадь эллипса будет равна:

$$S = \int_{2\pi}^{0} y(t)x'(t)dt = \int_{2\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -ab \int_{2\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{2\pi}^{0} = \pi ab.$$

3. Кривая задана в полярных координатах

Найдем площаль криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta.$

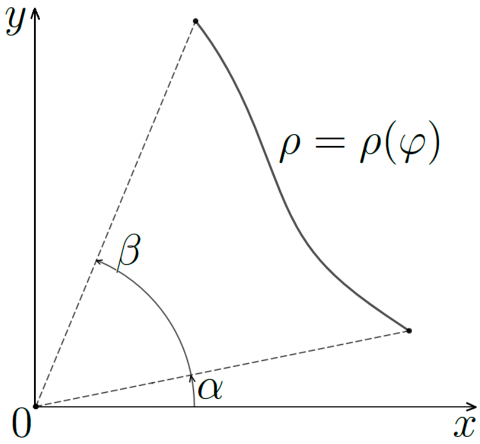

Рис. 6: Криволинейный сектор

Площадь сектора дается следующей формулой:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3.3)$$

Пример

Найдем площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной в полярных координатах уравнением: $\rho(\varphi) = 2a(1 + \cos\varphi)$.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} 4a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= 2a^2(\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} + 2a^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 2\pi a^2 + 2a^2\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi a^2.$$

3.2 Длина кривой

Исследуем возможность вычисления длины кривой при помощи определенного интеграла.

Определение

Рассмотрим произвольную кривую AB (смотри рисунок 7). Впишем в кривую ломаную и будем увеличивать число её сторон так, чтобы наибольшая сторона стремилась к 0. Если при этом периметр ломаной стремится к конечному пределу, то говорят, что кривая AB спрямляема и этот предел называют длиной этой кривой.

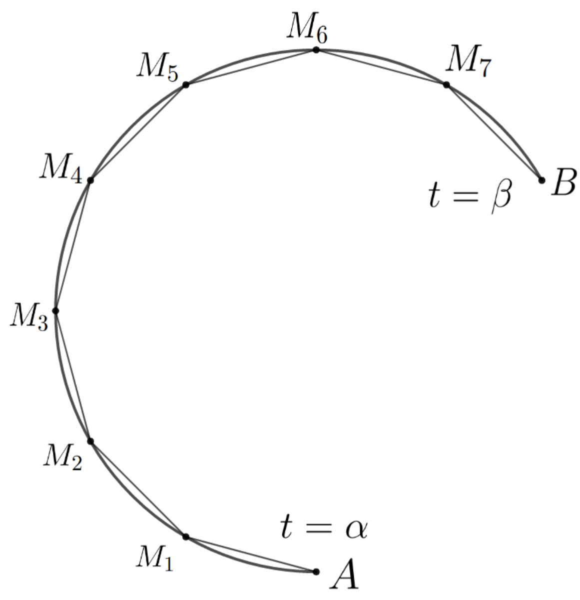

Рис. 7: Кривая AB

1. Кривая задана в декартовых координатах

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Разобъем отрезок $[a,\ b]$ на части точками деления: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Впишем в кривую ломаную, соответствующую точкам деления, и найдем ее периметр P по теореме Пифагора.

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y_i}{\triangle x_i}\right)^2} \triangle x_i =$$

/Согласно теореме Лагранжа, существует точка $\xi_i \in (x_{i-1},\ x_i)$,

такая, что: $\dfrac{\triangle y_i}{\triangle x_i} = f'(\xi_i)$/

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \triangle x_i, \quad \text{где } x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Поскольку f непрерывно дифференцируема, то функция $\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$ будет непрерывной, а значит интегрируемой. Следовательно, полученная интегральная сумма стремится к интегралу, который и дает длину кривой:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{3.4}$$

Пример

Определим длину кривой, заданной уравнением $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ на отрезке $[-1,\ 1]$.

$$l = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}.$$

2. Кривая задана параметрически

Пусть кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где функции $\varphi,\ \psi$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Впишем в кривую ломаную и найдем ее периметр:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\underbrace{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}_{\triangle x_i})^2 + (\underbrace{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}_{\triangle y_i})^2} =$$

/Согласно теореме Лагранжа, существуют точки $\tau_i,\ \widetilde{\tau}_i \in (t_{i-1},\ t_i)$, такие, что: $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$, $\quad \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\widetilde{\tau}_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$/

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2} \cdot (t_i - t_{i-1}), \quad \text{где } t_{i-1} < \tau_i,\ \widetilde{\tau}_i < t_i. \tag{3.5}$$

Непрерывность функций φ и ψ означает, что стремление к нулю длины звена ломаной эквивалентно тому, что $t_i - t_{i-1} \to 0$. Заметим, что полученная сумма интегральной суммой не является, так как точки τ_i и $\widetilde{\tau}_i$ различны. Введём интегральную сумму

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2}\, (t_i - t_{i-1}) \tag{3.6}$$

и докажем, что разность $P-Q$ будет бесконечно малой при измельчении разбиения.

$$P-Q=\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i))^2}\right](t_i-t_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cancel{(\varphi'(\tau_i))^2}+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2-\cancel{(\varphi'(\tau_i))^2}-(\psi'(\tau_i))^2}{\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}+\sqrt{(\varphi'(\widetilde{\tau}))^2+(\psi'(\tau_i))^2}}(t_i-t_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi'(\widetilde{\tau}_i)+\psi'(\tau_i)}{\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}+\sqrt{(\varphi'(\widetilde{\tau}))^2+(\psi'(\tau_i))^2}}(\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i))(t_i-t_{i-1})\leqslant$$

$$\Big/\ \psi'(\widetilde{\tau}_i)+\psi'(\tau_i)\leqslant\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\widetilde{\tau}_i))^2}+\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i))^2}\ \Big/$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i))(t_i-t_{i-1})\leq\max_i|\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i)|\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=$$

/ Функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Следовательно, $\psi'(t)$ будет непрерывной на замкнутом промежутке $[\alpha, \beta]$. Тогда по теореме Кантора функция $\psi'(t)$ будет равномерно непрерывной на отрезке $[\alpha,\ \beta]$, то есть из условия $\max\limits_i(t_i-t_{i-1})\to 0$ следует, что: $\delta=\max\limits_i|\psi'(\widetilde{\tau}_i)-\psi'(\tau_i)|\to 0$ /

$$=\delta\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=\delta(\beta-\alpha)\to 0\quad\text{при измельчении разбиения.}$$

Но интегральные суммы Q при измельчении разбиения стремятся к интегралу. А значит и суммы P стремятся к тому же интегралу, то есть длина кривой дается формулой:

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt. \tag{3.7}$$

Пример

Найдем длину одной арки циклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = 2a\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin\frac{t}{2}}_{\geq 0} dt = 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

3. Кривая задана в полярных координатах

Пусть кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тогда эту кривую можно задать параметрически следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой (3.7) для кривой, заданной параметрически.

$$x' = \cos\varphi \cdot \rho' - \rho\sin\varphi, \quad y' = \sin\varphi\cdot\rho' + \rho\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\cos\varphi\cdot\rho' - \rho\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi\cdot\rho' + \rho\cos\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + (\rho')^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(\rho(\varphi)\big)^2 + \big(\rho'(\varphi)\big)^2} d\varphi.$$

Таким образом, формула для вычисления длины кривой, заданной в полярных координатах, такова:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(\rho(\varphi)\big)^2 + \big(\rho'(\varphi)\big)^2} d\varphi. \tag{3.8}$$

Пример

Найдем длину кардиоиды, заданной в полярных координатах уравнением: $\rho(\varphi) = 2a(1+\cos\varphi)$. Поскольку кривая симметрична относительно полярной оси, достаточно найти длину ее половины при изменении угла φ от 0 до π и удвоить полученный результат.

$$l = 2\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi}d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\underbrace{1+\cos\varphi}_{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}}d\varphi = 8a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 16a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 16a.$$

4. Кривая в трёхмерном пространстве

Аналогично случаю плоской кривой можно получить формулу для длины кривой, заданной параметрически, в трехмерном пространстве.

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta. \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

Длина кривой равна:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt. \tag{3.9}$$

Пример

Найдем длину одного витка винтовой линии:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z = bt, \end{cases}$$

Длина кривой равна:

$$l = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + b^2}dt = \sqrt{R^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}dt = 2\pi\sqrt{R^2+b^2}.$$

3.3 Объём тела вращения

В данном параграфе мы рассмотрим только некоторый частный случай вычисления объема тела. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться в теме “Тройные интегралы”.

Пусть тело образовано вращением непрерывной кривой $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a,\ b]$ вокруг оси OX.

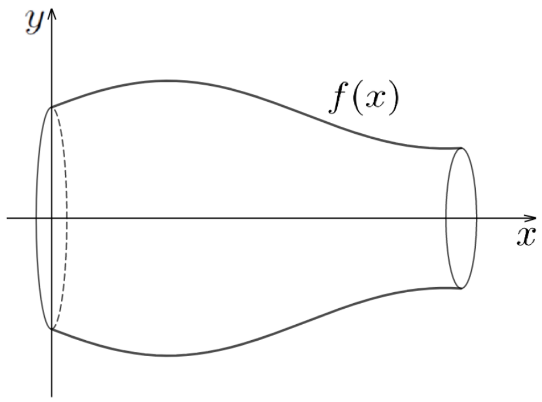

Рис. 8: Объем тела вращения

Разобъем отрезок $[a,\ b]$ на n частей точками деления:
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Проведем плоскости, перпендикулярные оси OX через точки деления. В каждом из промежутков $[x_{i-1},\ x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i и построим в слое между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ цилиндр радиусом $f(\xi_i)$. Объем тела, составленного из цилиндров, при измельчении разбиения будет стремиться к объему V всего тела вращения.

С другой стороны, объем тела, составленного из цилиндров, есть интегральная сумма: $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\triangle x_i$, которая при измельчении разбиения стремится к интегралу $\pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$. Таким образом,

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx. \tag{3.10}$$

Пример

Вычислим объем тела, образованного вращением параболы $y^2 = 2x$ вокруг оси OX при $0 \leq x \leq 1$.

$$V = \pi \int\limits_0^1 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^1 = \pi.$$

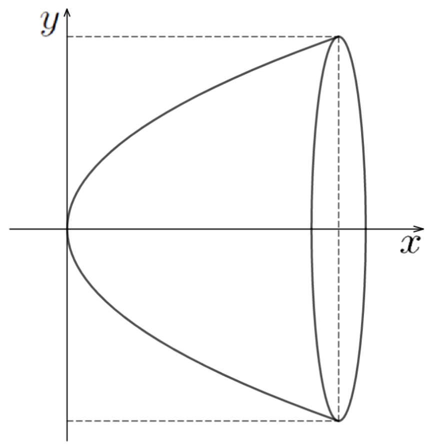

Рис. 9: Параболоид вращения

3.4 Поверхность тела вращения

Общее определение площади поверхности – позже.

Определение

Площадью поверхности, получаемой при вращении кривой в плоскости XOY вокруг оси OX, называется предел, к которому стремится площадь поверхности, получаемой при вращении вокруг той же оси ломаной, вписанной в данную кривую, когда число сторон этой ломаной стремится к бесконечности, а наиболее длинная сторона стремится к нулю.