Глава 2. Определенный интеграл

2.1 Определение и геометрический смысл определенного интеграла

В начале 17 века математикам были известны способы нахождения площадей многоугольников и некоторых криволинейных фигур, например, круга. Однако математический аппарат вычисления площадей фигур с криволинейной границей не был развит. Это подтолкнуло математиков к разработке новых методов вычисления площадей, основанных на разбиении фигур на малые части. Определим площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке. Она органичена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ слева и справа соответственно.

Разобъем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ., x_n = b$. Площадь каждой из получившихся малых криволинейных трапеций приблизим площадью прямоугольника, построенного на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, высота которого определяется значением функции f в некоторой произвольной выбранной точке $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$. Тогда приближение S_n для площади криволинейной трапеции дается суммой площадей указанных прямоугольников.

Площадь каждого прямоугольника равна:
$f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Тогда:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\triangle x_i.$$

Приближение площади криволинейной трапеции будет тем лучше, чем мельче разбиение.

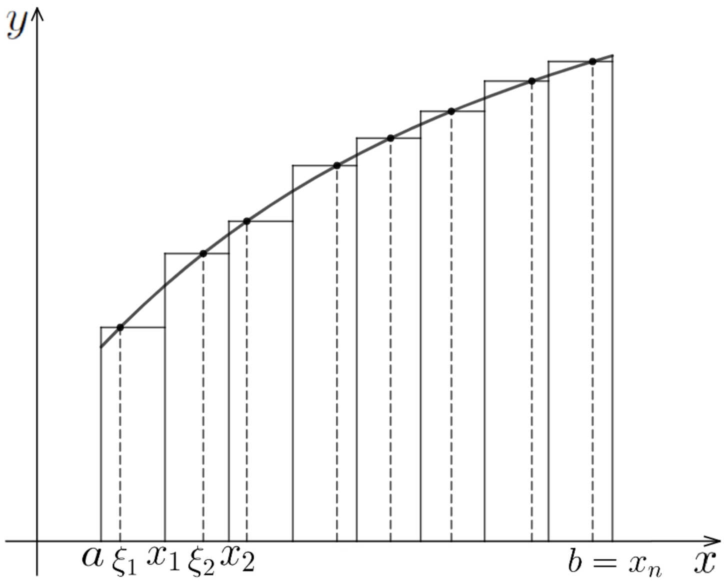

Рис. 1: Криволинейная трапеция

Введем понятие ранга разбиения λ по следующему правилу:

$$\lambda = \max_i (x_i - x_{i-1}).$$

При измельчении разбиения $(\lambda \to 0)$ сумма площадей прямоугольников будет стремиться к площади криволинейной трапеции:

$$S \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i.$$

Определение

Если предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_i, то он называется определённым интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i. \tag{2.1}$$

Здесь a и b – нижний и верхний пределы интеграла, S_n – интегральная сумма.

Определение

Пусть m и M – наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a,\, b]$.

Пусть $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \quad M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},\, x_i]} f(x).$

Определим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу следующим образом:

$$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i, \quad \overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i. \tag{2.2}$$

Замечание

Очевидно, что имеют место неравенства:

$$m(b-a) \leqslant \underline{S_n} \leqslant \overline{S_n} \leqslant M(b-a). \tag{2.3}$$

2.2 Свойства интегральных сумм

Свойство 1

При увеличении числа отрезков, на которые мы разбиваем отрезок $[a,\, b]$ путём добавления новых точек деления, нижняя интегральная сумма $\underline{S_n}$ может только возрастать, а верхняя интегральная сумма $\overline{S_n}$ может только убывать.

Доказательство:

Рассмотрим отрезок разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ на который попала дополнительная точка разбиения c_k.

В исходной сумме Дарбу $\underline{S_n}$ отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ отвечает одно слагаемое:

$m_k(x_k - x_{k-1}), \quad$ где $m_k = \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$

После измельчения разбиения отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ будет отвечать два слагаемых:

$m'_k(c_k - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c_k),$

где $m'_k = \min\limits_{x\in[x_{k-1},c_k]} f(x) \geqslant \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = m_k;$

$m''_k = \min\limits_{x\in[c_k,x_k]} f(x) \geqslant \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = m_k.$

Следовательно,

$m_k'(c_k - x_{k-1}) + m_k''(x_k - c_k) \geqslant m_k(c_k - x_{k-1}) + m_k(x_k - c_k) = m_k(x_k - x_{k-1})$, то есть нижняя сумма Дарбу при измельчении разбиения может только возрастать (вернее, не убывать).

Аналогично доказывается для большего числа точек разбиения.

Аналогично доказывается, что верхняя сумма Дарбу не возрастает при измельчении разбиения.

■

Свойство 2

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы (возможно, отвечающей другому разбиению).

Доказательство:

Пусть $\underline{S}^{(1)}$ и $\overline{S}^{(1)}$ – суммы Дарбу, отвечающие некоторому разбиению, $\underline{S}^{(2)}$ и $\overline{S}^{(2)}$– суммы Дарбу для другого разбиения.

Нужно доказать, что: $\underline{S}^{(1)} \leqslant \overline{S}^{(2)}$.

Объединим точки первого и второго разбиений. Тем самым, получим третье разбиение, которое отвечает суммам $\underline{S}^{(3)}$ и $\overline{S}^{(3)}$. Так как третье разбиение получается добавлением точек к первому, то выполнено: $\underline{S}^{(1)} \leqslant \underline{S}^{(3)}$. С другой стороны, третье разбиение получается добавлением точек ко второму, значит: $\overline{S}^{(3)} \leqslant \overline{S}^{(2)}$ (по свойству 1). Но $\underline{S}^{(3)} \leqslant \overline{S}^{(3)}$. Следовательно, $\underline{S}^{(1)} \leqslant \overline{S}^{(2)}$.

■

Замечание

Так как множество $\{\underline{S}_n\}$ ограничено сверху, то оно имеет конечную точную верхнюю границу: $\inf\{\overline{S}_n\} = \overline{I}$. Аналогично, ввиду ограниченности снизу, найдется конечная точная нижняя граница: $\sup\{\underline{S}_n\} = \underline{I}$, причем sup и inf берутся по всем возможным разбиениям со сколь угодно большим числом отрезков разбиения. Числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ называются нижним и верхним интегралами Дарбу.

2.3 Теоремы о существовании определенного интеграла

Теорема 1 (Критерий существования определенного интеграла) Для существования определённого интеграла необходимо и достаточно, чтобы:

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство:

Необходимость. Существование определенного интеграла означает существование следующего предела из формулы (2.1):

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i}_{S_n}.$$

Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \triangle x_i < \delta \ \Rightarrow\ |S_n - I| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ I-\varepsilon < S_n < I+\varepsilon. \tag{2.5}$$

Суммы Дарбу $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ при любом заданном разбиении промежутка являются для интегральных сумм S_n точными нижней и верхней границами. Значит они тоже будут удовлетворять неравентву (2.5), только нестрогому:

$$I-\varepsilon \leqslant \underline{S}_n \leqslant \overline{S}_n \leqslant I+\varepsilon \ \Rightarrow\ \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_n = I, \quad \lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_n = I \ \Rightarrow\ \lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0 \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = I$. Следовательно,

$$\underline{S}_n \leqslant \underbrace{\sup \underline{S}_n}_{=\underline{I}} = I = \underbrace{\inf \overline{S}_n}_{=\overline{I}} \leqslant \overline{S}_n.$$

Пусть S_n – одна из интегральных сумм, отвечающая тому же разбиению промежутков, что и $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$. Тогда $\underline{S}_n \leqslant S_n \leqslant \overline{S}_n$. Если по условию теоремы считать $\triangle x_i$ достаточно малыми, то $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ отличны менее чем на ε, но тогда $|S_n - I| < \varepsilon$, то есть I является пределом для S_n и интеграл существует.

■

Теорема 2

Непрерывная функция в промежутке $[a,\ b]$ интегрируема.

Доказательство:

Согласно теореме Кантора, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ то она равномерно непрерывна на $[a,\ b]$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого отрезка $[x_{i-1},\ x_i]$ с длиной $\triangle x_i < \delta$ колебание функции на нем будет меньше ε, то есть: $M_i - m_i < \varepsilon$.

Отсюда для такого разбиения выполнено:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\triangle x_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = \varepsilon(b-a),$$

то есть $\overline{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon(b-a)$, а значит эта разность может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, по критерию существования интеграла будет существовать $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

■

Теорема 3

Монотонная ограниченная функция $f(x)$ всегда интегрируема.

Доказательство:

Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает. Тогда на отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ максимум функции будет достигаться на правом конце отрезка, а минимум – на левом, то есть: $M_i - m_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Тогда если $\triangle x_i < \delta$, то:

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\triangle x_i < \delta \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, f – интегрируемая функция (по критерию существования интеграла).

■

Теорема 4

Любая интегрируемая функция ограничена.

Доказательство:

От противного. Пусть f не ограничена на $[a,\, b]$. Рассмотрим произвольное разбиение:

$\Pi = \{a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} = b\}$.

Хотя бы на одном отрезке $[x_i,\, x_{i+1}]$ функция не является ограниченной. Зафиксируем точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ во всех отрезках, кроме отрезка $[x_i,\, x_{i+1}]$.

Так как $f(x)$ не ограничена на отрезке $[x_i,\, x_{i+1}]$, то меняя ξ_i в этом промежутке, мы сможем получить сколь угодно большие по модулю значения интегральной суммы. Следовательно, значение интеграла будет зависеть от выбора точки ξ_i, что противоречит определению интеграла.

■

Теорема 5

Если $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,\, c]$ и $[c,\, b]$, то она интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ и выполнено:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Доказательство:

Пусть Π – разбиение отрезка $[a,\, b]$:

$\Pi = \{a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} \leqslant c \leqslant x_{m+2} \leqslant \ldots < x_{n+1} = b\}$.

Соответствующая интегральная сумма:

$S_\Pi = \sum\limits_{k=1}^{m} f(\xi_k)\triangle x_k + f(\xi_{m+1})\triangle x_m + \sum\limits_{k=m+2}^{n+1} f(\xi_k)\triangle x_k =$

$\Big/$Распишем слагаемое $f(\xi_{m+1})\triangle x_m$ в виде суммы трех слагаемых$\Big/$ $=$

$\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{m} f(\xi_k)\triangle x_k + f(c)\cdot(c - x_m)}_{S_{\Pi_1}} + (f(\xi_{m+1}) - f(c))\underbrace{(x_{m+1} - x_m)}_{\triangle x_m} +$

$$+\underbrace{f(c)\cdot(x_{m+1}-c)+\sum_{k=m+2}^{n+1} f(\xi_k)\triangle x_k}_{S_{\Pi_2}} = S_{\Pi_1} + \underbrace{\left(f(\xi_{m+1})-f(c)\right)}_{\text{ограничена}}\underbrace{\triangle x_m}_{\to 0} + S_{\Pi_2}$$

$\Big/$По Теореме 4 любая интегрируемая функция ограничена$\Big/$

$$\xrightarrow[\lambda\to 0]{} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

■

Теорема 6

Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$, то она будет интегрируемой на отрезках $[a,\, c]$ и $[c,\, b]$, где $a < c < b$.

Доказательство:

Докажем для отрезка $[a,\, c]$.

Пусть Π – разбиение $[a,\, c]$:

$\Pi = \{a = x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} = c\}$. Дополним его до разбиения $\widetilde{\Pi}$ отрезка $[a,\, b]$:

$\widetilde{\Pi} = \{a = x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} \leqslant \xi_{m+1} \leqslant x_{m+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} = b\}$.

Сравним интегральные суммы для различных разбиений отрезка $[a,\, c]$: Π и Π'.

Пусть $\Pi' = \left\{a = x'_1 \leqslant \xi'_1 \leqslant x'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_{p+1} = c\right\}$.

Дополним его до разбиения $\widetilde{\Pi}'$ отрезка $[a,\, b]$ точно так же, как дополняли Π:

$\widetilde{\Pi}' = \left\{a = x'_1 \leqslant \xi'_1 \leqslant \xi'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_{p+1} \leqslant \xi_{m+1} \leqslant x_{m+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} = b\right\}$.

$f(x)$ интегрируема на $[a,\, b] \Rightarrow$ по критерию существования интеграла будет выполнено:

$\lim\limits_{\lambda\to 0}(\underline{S_n} - \overline{S_n}) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \quad \lambda < \delta \Rightarrow \left|\overline{S_n} - \underline{S_n}\right| < \varepsilon.$

Разность двух интегральных сумм не превышает разности верхней и нижней сумм Дарбу:

$\left|S_{\Pi'} - S_{\Pi}\right| \leqslant \left|\overline{S_n} - \underline{S_n}\right|.$

Дополнения Π' и $\widetilde{\Pi}'$ на отрезок $[c,\, b]$ были построены одинаковым образом, поэтому при вычитании двух интегральных сумм $S_{\widetilde{\Pi}}$ и $S_{\widetilde{\Pi}'}$, отвечающих отрезку $[a,\, b]$, слагаемые, отвечающие отрезку $[c,\, b]$, сокращаются и выполнено:

$S_{\widetilde{\Pi}} - S_{\widetilde{\Pi'}} = S_{\Pi} - S_{\Pi'}$.

Следовательно, для любых разбиений Π и Π' с рангом дробления $\lambda < \delta$ выполнено: $\Big| S_{\Pi} - S_{\Pi'} \Big| < \varepsilon$.

В частности, если выбрать $S_{\Pi} = \overline{S_n}$, $S_{\Pi'} = \underline{S_n}$, получим: $\Big| \overline{S_n} - \underline{S_n} \Big| < \varepsilon$, то есть выполнен критерий существования интеграла на $[a,\, c]$. Аналогично для $[c,\, b]$.

■

2.4 Интегрируемость кусочно-непрерывных функций

Лемма 1

Если $h(x) \equiv 0$ для значений x из открытого промежутка $(a,\, b)$ и имеет произвольные значения $h(a)$ и $h(b)$. Тогда $h(x)$ интегрируема в замкнутом промежутке $[a,\, b]$ и

$$\int\limits_a^b h(x)\, dx = 0.$$

Доказательство:

Интегральная сумма по любому разбиению приводит к

$$h(\xi_0) \triangle x_0 + h(\xi_{n-1}) \triangle x_{n-1} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0.$$

■

Лемма 2

Пусть $f \in C[a,\, b]$. Пусть f_1 совпадает с f при $a < x < b$ и имеет произв знач $f_1(a), f_1(b)$. Тогда $f_1(x)$ интегрируема на $[a,\, b]$ и

$$\int\limits_a^b f_1(x) dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$