Теоретические основы поиска опорного плана для решения транспортной задачи

Постановка транспортной задачи (ТЗ). Необходимо минимизировать транспортные расходы $L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot x_{ij}\to \min$ при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,...,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,...,m;$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ j=1,...,n,\ i=1,...,m.$$

Исходные данные для решения ТЗ:

a_i - запасы товара в пункте *i*, m - количество поставщиков товаров;

b_j - потребность в товаре в пункте *j*, n - количество потребителей товаров;

c_{ij} - стоимость перевозки единицы товара из пункта *i* в пункт *j* (матрица *m*х*n*).

Искомое решение ТЗ:

x_{ij} - план перевозок товара из пункта *i* в пункт *j* (матрица *m*х*n*).

Примечание.

1. Для разрешимости ТЗ необходимо и достаточно, чтобы имело место условие баланса $\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}a_i$ (теорема). В этом случае ТЗ называется ТЗ закрытого типа.
2. Если условие баланса не выполняется, т.е. $\sum_{j=1}^{n}b_j\ne\sum_{i=1}^{m}a_i$, то ТЗ открытого типа.

   Для ее решения необходимо привести эту задачу к закрытому типу следующим образом.

   2.1. Если $\sum_{j=1}^{n}b_j>\sum_{i=1}^{m}a_i$ (спрос больше предложения), то необходимо ввести «фиктивного» поставщика $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$, а стоимость перевозок от «фиктивного» поставщика до всех потребителей определить как $c_{m+1,j}=0$ для всех $j=1,...,n$.

   2.2. Если $\sum_{j=1}^{n}b_j<\sum_{i=1}^{m}a_i$ (спрос меньше предложения), то необходимо ввести «фиктивного» потребителя $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$, а стоимость перевозок до «фиктивного» потребителя от всех поставщиков определить как $c_{i,n+1}=0$ для всех потребителей.

Неотрицательная матрица X, удовлетворяющая условиям ТЗ называется планом или **допустимым планом**. Допустимый план будет **оптимальным**, если он доставляет минимум целевой функции ТЗ. Допустимый план, имеющий не более (m+n-1) отличных от нуля компонентов x_{ij}, называется **базисным или опорным**. Опорный план, имеющий ровно (m+n-1) отличных от нуля компонент, называется **невырожденным**, в противном случае (если меньше) называется **вырожденным**.

Рассмотрим графовую интерпретацию ТЗ (рис. 1). Пусть имеется взвешенный двудольный полный граф К(Y,Z;R), где Y – первая доля вершин, моделирующих m-поставщиков товаров, Z – вторая доля вершин, моделирующих n- потребителей товара, R – множество ребер графа (полный граф). Веса вершин в доли Y моделируют запасы, а веса вершин в доли Z – спрос товаров. Веса ребер моделируют стоимость перевозки единицы товара от соответствующих поставщиков к соответствующим потребителям товаров (исходная матрица C) и количество товаров в перевозке (искомая матрица X).

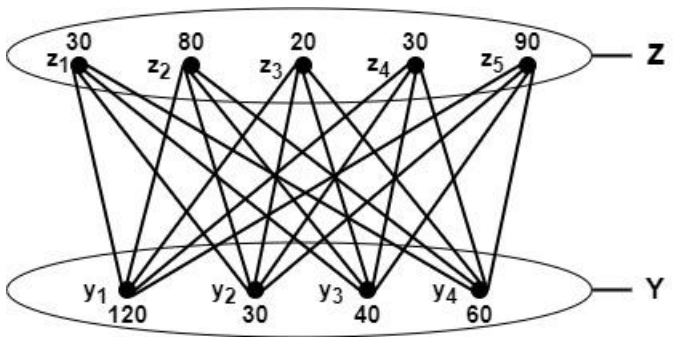


Рисунок 1 – Двудольный граф ТЗ

Метод северо-западного угла

Вначале матрица X обнуляется, ее заполнение начинается с элемента x_{11}. Потребности в товаре в пункте 1 распределяются последовательно по поставщикам в соответствии с их запасами до тех пор, пока все потребности не будут удовлетворены. После этого переходят к пункту потребления 2, затем к пункту 3 и т.п. до тех пор, пока все запасы товаров не будут распределены по потребителям. Отсюда и название метода. Недостатком этого методы является то, что при распределении товаров не учитывается стоимость перевозок.

Пример. Найти опорный план для решения следующей ТЗ.

Матрица C

	1	2	3	4	5
1	2	4	2	3	8
2	3	5	6	6	2
3	6	8	7	4	5
4	3	4	2	1	4

A
120
30
40
60

B	30	80	20	30	90	250

Решение.

1. **Поставки в 1-ый пункт потребления**. Т.к. $b_1 < a_1$, то все товары в 1-ый пункт потребления перевезем из 1-го пункта поставки, при этом: $b_1 := 0$, $a_1 := a_1 - b_1$.

	1	2	3	4	5	**A**
1	30					90
2						30
3						40
4						60

B	0	80	20	30	90	220

2. **Поставки во 2-ой пункт потребления**. Т.к. $b_2 < a_1$, то все товары во 2-ой пункт потребления перевезем из 1-го пункта поставки, при этом: $b_2 := 0$, $a_1 := a_1 - b_2$.

	1	2	3	4	5	**A**
1	30	80				10
2						30
3						40
4						60

B	0	0	20	30	90	140

3.

3. **Поставки в 3-ий пункт потребления**. Т.к. $b_3 > a_1$, то товары в 3-ий пункт потребления перевезем из 1-го и 2-го пунктов поставки, при этом: $b_3 := 0$, $a_1 := 0$, $a_2 := a_2 - b_2 + a_1$.

	1	2	3	4	5	**A**
1	30	80	10			0
2			10			20
3						40

							A
4							60

B	0	0	0	30	90	120

4. **Поставки в 4-ый пункт потребления**. Т.к. $b_4 > a_2$, то товары в 4-ый пункт потребления перевезем из 2-го и 3-го пунктов поставки, при этом: $b_4 := 0$, $a_2 := 0$, $a_3 := a_3 - b_4 + a_2$.

	1	2	3	4	5	**A**
1	30	80	10			0
2			10	20		0
3				10		30
4						60
B	0	0	0	0	90	90

5. **Поставки в 5-ый пункт потребления**. Т.к. $b_5 > a_3$, то товары в 5-ый пункт потребления перевезем из 3-го и 4-го пунктов поставки, при этом: $b_5 := 0$, $a_3 := 0$, $a_4 := a_4 - b_5 + a_3$.

	1	2	3	4	5	**A**
1	30	80	10			0
2			10	20		0
3				10	30	0
4					60	0
B	0	0	0	0	0	0

Ответ.

Опорный план перевозок (матрица X):

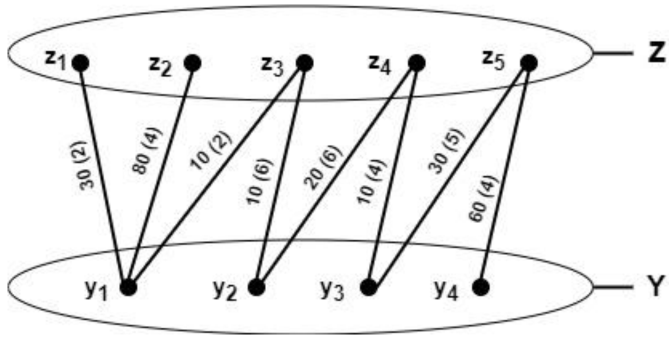
	1	2	3	4	5
1	30	80	10		
2			10	20	
3				10	30

4					60

Оценка суммарной стоимости перевозок:

L(X)=30x2+80x4+10x2+10x6+20x6+10x4+30x5+60x4=1010.

Ниже на рисунке представлена графовая модель полученного решения. Модель является остовным деревом для двудольного графа (рис.1)



Метод минимальной стоимости

Этот метод в отличие от предыдущего метода учитывает стоимость перевозок. В матрице стоимости перевозок С отыскивается минимальный элемент $c_{ij} \to \min$ и в первую очередь заполняется соответствующий элемент в матрице Х – $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Если таких элементов в матрице С несколько, то выбирается первый по счету (построчный просмотр). Затем корректируем остатки запасов в i-пункте и спроса в j-пункте на эту величину. Если при этом $a_i = 0$, то в матрице С следует вычеркнуть i-ую строку (исчерпан запас товаров). Если при этом $b_j = 0$, то в матрице С следует вычеркнуть j-ый столбец (потребность в товарах удовлетворена). Далее переходим к поиску следующего минимального элемента в матрице С и повторяем процедуру заполнения матрицы Х до тех пор, пока не распределим все запасы товара по их потребителям.

Пример. Найти опорный план для решения следующей ТЗ.

Матрица С

	1	2	3	4	5		**A**
1	2	4	2	3	8		120
2	3	5	6	6	2		30
3	6	8	7	4	5		40
4	3	4	2	1	4		60
B	30	80	20	30	90		250

Решение.

1. Найдем минимальный элемент в матрице С, это $c_{44} = 1$. Т.к. $b_4 < a_4$, то все товары в 4-ый пункт потребления перевезем из 4-го пункта поставки, при этом: $b_4 := 0$, $a_4 := a_4 - b_4$. Из матрицы С вычеркнем 4-ый столбец.

Матрица Х

	1	2	3	4	5		**A**
1							120
2							30
3							40
4				30			30

B	30	80	20	0	90		220

Матрица C

	1	2	3	4	5
1	2	4	2	-	8
2	3	5	6	-	2
3	6	8	7	-	5
4	3	4	2	-	4

2. Найдем минимальный элемент в матрице C, это $c_{11}=2$. Т.к. $b_1 < a_1$, то все товары в 1-ый пункт потребления перевезем из 1-го пункта поставки, при этом: $b_1 := 0$, $a_1 := a_1 - b_1$. Из матрицы C вычеркнем 1-ый столбец.

Матрица X

	1	2	3	4	5		**A**
1	30						90
2							30
3							40
4				30			30

B	0	80	20	0	90		190

Матрица C

	1	2	3	4	5
1	-	4	2	-	8
2	-	5	6	-	2
3	-	8	7	-	5
4	-	4	2	-	4

3. Найдем минимальный элемент в матрице C, это $c_{13}=2$. Т.к. $b_3 < a_1$, то все товары в 3-ий пункт потребления перевезем из 1-го пункта поставки, при этом: $b_3 := 0$, $a_1 := a_1 - b_3$. Из матрицы C вычеркнем 3-ий столбец.

Матрица X

	1	2	3	4	5		**A**
1	30		20				70

							A
2							30
3							40
4				30			30

B	0	80	0	0	90	170

Матрица C

	1	2	3	4	5
1	-	4	-	-	8
2	-	5	-	-	2
3	-	8	-	-	5
4	-	4	-	-	4

4. Найдем минимальный элемент в матрице C, это $c_{25} = 2$. Т.к. $b_5 > a_2$, то все товары из 2-го пункта поставки перевезем в 5-ый пункт потребления, при этом: $a_2 := 0$, $b_5 := b_5 - a_2$. Из матрицы C вычеркнем 2-ую строку.

Матрица X

	1	2	3	4	5	A
1	30		20			70
2					30	0
3						40
4				30		30

B	0	80	0	0	60	140

Матрица C

	1	2	3	4	5
1	-	4	-	-	8
2	-	-	-	-	-
3	-	8	-	-	5
4	-	4	-	-	4

5. Найдем минимальный элемент в матрице C, это $c_{12} = 4$. Т.к. $b_2 > a_1$, то все товары из 1-го пункта поставки перевезем во 2-ой пункт потребления, при этом: $a_1 := 0$, $b_2 := b_2 - a_1$. Из матрицы C вычеркнем 1-ую строку.

Матрица X

	1	2	3	4	5	A
1	30	70	20			0
2					30	0
3						40
4				30		30

B	0	10	0	0	60	70

Матрица C

	1	2	3	4	5
1	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
3	-	8	-	-	5
4	-	4	-	-	4

6. Найдем минимальный элемент в матрице C, это $c_{42} = 4$. Т.к. $b_2 < a_4$, то все товары во 2-ой пункт потребления перевезем из 3-го пункта поставки, при этом: $b_2 := 0$, $a_4 := a_4 - b_2$. Из матрицы C вычеркнем 2-ой столбец.

Матрица X

	1	2	3	4	5	A
1	30	70	20			0
2					30	0
3						40
4		10		30		20

B	0	0	0	0	60	60

Матрица C

	1	2	3	4	5
1	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	5

4	-	-	-	-	4

7. Найдем минимальный элемент в матрице С, это $c_{45} = 4$. Т.к. $b_5 > a_4$, то все товары из 4-го пункта поставки перевезем в 5-ый пункт потребления, при этом: $a_4 := 0$, $b_5 := b_5 - a_4$. Из матрицы С вычеркнем 4-ую строку.

Матрица X

	1	2	3	4	5		A
1	30	70	20				0
2					30		0
3							40
4		10		30	20		0
B	0	0	0	0	40		40

Матрица С

	1	2	3	4	5
1	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	5
4	-	-	-	-	-

8. Найдем минимальный элемент в матрице С, это $c_{35} = 5$. Т.к. $b_3 = a_5$, то все товары из 3-го пункта поставки перевезем в 5-ый пункт потребления.

Матрица X

	1	2	3	4	5		A
1	30	70	20				0
2					30		0
3					40		0
4		10		30	20		0
B	0	0	0	0	0		0

Ответ.

Опорный план перевозок (матрица X):

	1	2	3	4	5
1	30	70	20		
2					30
3					40
4		10		30	20

Оценка суммарной стоимости перевозок:

L(X)=30x2+70x4+20x2+30x2+40x5+10x4+30x1+20x4=790.

Ниже на рисунке представлена графовая модель полученного решения. Модель является остовным деревом для двудольного графа (рис.1)