

Биологический нейрон и его математическая модель

Нервная система и мозг человека состоят из нейронов, соединенных между собой нервными волокнами. Нервные волокна способны передавать электрические импульсы между нейронами. Все процессы мышления и управления действиями в живом организме заключаются в передаче электрических импульсов между нейронами.

Биологический нейрон (рис. 1) имеет отростки нервных волокон двух типов – дендриты, по которым принимаются импульсы, и единственный аксон, по которому нейрон может передавать импульс. Аксон в конце разветвляется на волокна, контактирует с дендритами других нейронов через специальные образования – синапсы, которые влияют на силу импульса. При прохождении синапса сила импульса меняется в определенное число раз, которое называют весом синапса. Импульсы, поступившие к нейрону одновременно по нескольким дендритам, суммируются. Если суммарный импульс превышает некоторый порог, нейрон возбуждается, формирует собственный импульс и передает его далее по аксону. Важно отметить, что веса синапсов могут изменяться со временем, а значит, может меняться и поведение соответствующего нейрона.

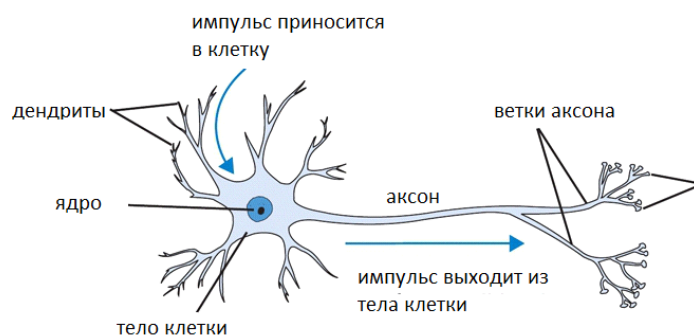


Рисунок 1 – Биологический нейрон

Впервые гипотезу о математической модели биологического нейрона, положившей начало создания интеллектуальных устройств, структурно и функционально моделирующей человеческий мозг, выдвинули в 1943 году Уоррен Мак-Каллок и Вальтер Питтс. Математический нейрон по аналогии с биологическим имеет несколько входов и один выход. На вход нейрона подаются его входные сигналы (данные, поступающие из окружающей среды или от других активных нейронов), которые умножаются на соответствующие синаптические веса связи w_1, w_2, \dots , а затем суммируются с учетом порогового значения для этого нейрона. Выходной сигнал, который вырабатывает данный нейрон при этом, определяется значением функции активации от входного воздействия. Входное воздействие на данный нейрон определяется суммой произведений входных сигналов на соответствующие синаптические веса связей.

Основы функционирования нейронных сетей

Нейронная сеть (НС) – это математическая модель, построенная на основе взаимодействия математических моделей нейронов и функционирующая по принципам

процессов, протекающих в мозге человека (в биологической нейронной сети). НС широко применяются для решения задач распознавания образов, классификации и прогнозирования в самых различных предметных областях.

По структуре НС представляет собой взвешенных оргграф $G(X, U)$, в котором X – множество вершин (нейронов), U – множество дуг между ними. Веса дуг $w(u)$ в НС могут изменяться на отрезке $[-1, 1]$. Чем ближе значение веса к 0, тем меньшее влияние оказывает данная связь на нейрон (сток дуги). Чем ближе значение веса к 1 или -1, тем большее значение оказывает данная связь (положительное или отрицательное) на нейрон стока дуги.

На рисунке 2 представлена структура НС – перцептрона (от англ. perceptron – восприятие). В ней выделен слой входных нейронов – множество X_{IN} (синие вершины, из которых дуги только исходят), слой выходных нейронов – множество X_{OUT} (зеленые вершины, в которые дуги только входят) и слой скрытых нейронов – множество $X \setminus (X_{IN} \cup X_{OUT})$ (красные вершины). На рисунке 2 показан перцептрон с одним скрытым слоем, в ряде случаев количество скрытых слоев может быть увеличено, что связано, прежде всего, с особенностями моделирования конкретного процесса. Здесь каждый нейрон предыдущего слоя связан со всеми нейронами следующего слоя. Рассмотрим далее особенности функционирования таких НС.

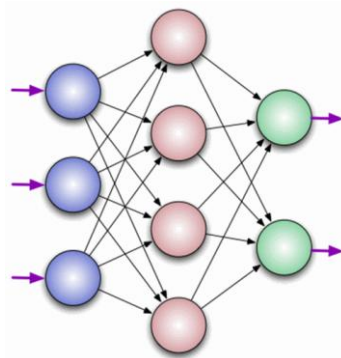


Рисунок 2 – Структура нейронной сети

Функционирование НС – это процесс обработки сигналов (стимулов), поступающих на нейроны входного слоя, и вычисление выходных сигналов нейронов выходного слоя. Пусть имеется некоторая НС с установленными весами дуг.

Обозначим $input(x)$ и $output(x)$ – входной и выходной сигнал нейрона $x \in X$. Полагаем, что $\forall x \in X_{IN} : input(x) = output(x)$. Входной сигнал любого другого нейрона в сети $x_j \in X$ определяется по формуле:

$$input(x_j) = \sum_{\forall x_i \in \Gamma^{-1}(x_j)} output(x_i) w(x_i, x_j), \quad (1)$$

где $\Gamma^{-1}(x_j)$ – множество прообразов вершины x_j ,

$w(x_i, x_j)$ – вес дуги (x_i, x_j) .

Каждый нейрон будет вырабатывать выходной сигнал в соответствии с заданной функцией активации $f(a)$. Для активации (возбуждения) нейронов могут применяться самые различные функции. Наиболее часто на практике используются сигмовидная (логистическая) и линейная функции активации, а также функция гиперболического тангенса. В формулах этих функций (табл. 1) параметр a определяется входным сигналом нейрона по формуле (1).

Таблица 1. Функции активации нейронов

№	Наименование функции	Формула
1	Сигмовидная или логистическая	$f(a) = \frac{1}{1 + e^{-a}}$
2	Линейная	$f(a) = a$
3	Гиперболический тангенс	$f(a) = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}$

Для оценивания полученного решения используются различные способы. Оценка, как правило, явно зависит от выходных сигналов НС и неявно (через функционирование) – от всех её параметров. Простейший и самый распространённый способ оценки через меру близости выходных сигналов НС до их требуемых (ожидаемых) значений в евклидовой метрике – MSE (mean squared error):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{\forall x_i \in X_{OUT}} (output(x_i) - output^*(x_i))^2, \quad (2)$$

где n – количество нейронов в выходном слое сети, т.е. $n = |X_{OUT}|$;

$output^*(x_i)$ – ожидаемое значение выходного сигнала в нейроне $x_i \in X_{OUT}$, которое определяется по следующему правилу:

$$\begin{aligned} output^*(x_i) &= 1, \text{ если } output(x_i) > 0.5; \\ output^*(x_i) &= 0, \text{ если } output(x_i) \leq 0.5 \end{aligned} \quad (3)$$

Алгоритм последовательного распространения сигнала в НС

Пусть имеется орграф $G(X, U)$ с установленными весами дуг $w(u)$. На нейроны во входном слое поданы входные сигналы. Определить входные и выходные сигналы всех нейронов сети с использованием заданной функции активации и оценить полученное решение с помощью MSE.

1. Положить: $\forall x \in X_{IN} : o(x) = \dot{p}(x)$. Считать эти вершины обработанными.

2. **ПОКА** в орграфе есть необработанные вершины $x \in X$ с известным множеством прообразов $\Gamma^{-1}(x)$, **ВЫПОЛНЯТЬ**:
 - 2.1. Рассчитать входной сигнал нейрона $input(x)$ по формуле (1).
 - 2.2. Рассчитать выходной сигнал нейрона $output(x)$ по формуле заданной функции активации (табл.1).
 - 2.3. Провести округление рассчитанных значений $input(x)$ и $output(x)$.
 - 2.4. Считать вершину x обработанной.
3. Определить по правилу (3) $output^*(x_i)$ для всех нейронов $x_i \in X_{OUT}$.
4. Оценить полученное решение по формуле (2).
5. Округлить полученную оценку.

Примечание:

1. Для проведения расчетов $output(x)$ рекомендуется использовать встроенный калькулятор <https://www.google.ru/>.
2. Округление в п.2.3 и в п.5 следует проводить до второго знака после запятой по следующему правилу. Если значение после третьего знака после запятой больше, чем 0.005, то округлить значение второго знака после запятой в большую сторону, если меньше или равно 0.005, то оставить второй знак после запятой без изменения. Например: $0.475 \approx 0.47$, $0.4785 \approx 0.48$, $0.4705 \approx 0.47$.

ПРИМЕР

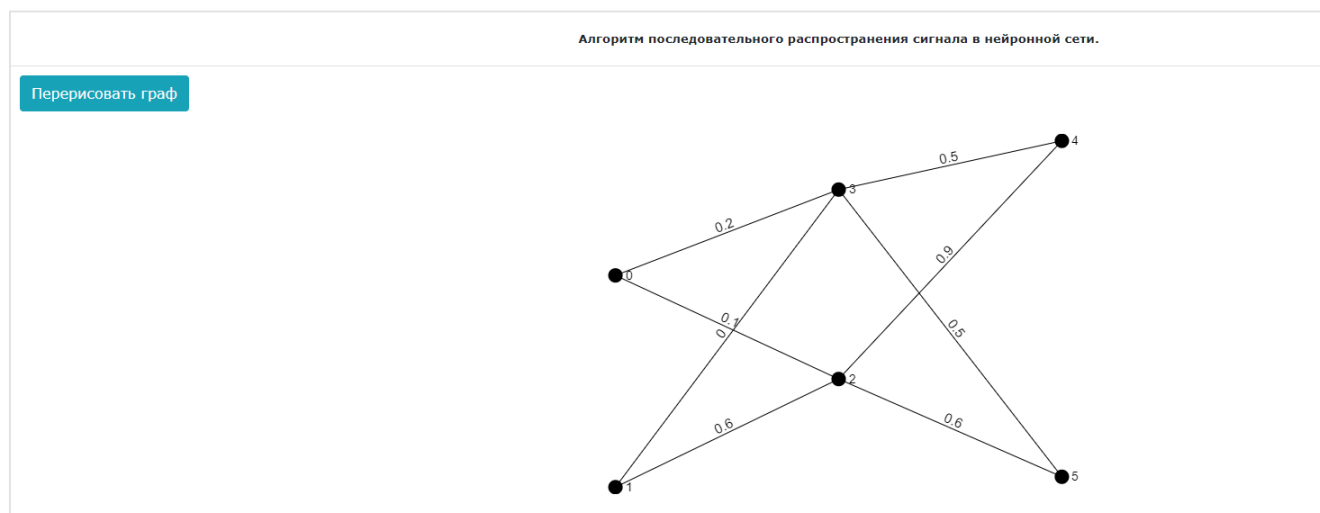
Лаборатория

Для нейронной сети рассчитать входные и выходные сигналы нейронов и оценить полученное решение.

Вариант

$input(x_0) = 0.15$, $input(x_1) = 0.93$. Функция активации – линейная.

Лабораторная установка



РЕШЕНИЕ

1. Определим выходные сигналы для нейронов входного слоя:

$$output(x_0) = input(x_0) = 0.15$$

$$output(x_1) = input(x_1) = 0.93$$
2. Рассчитаем входной сигнал нейрона x_2 с прообразами $\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_0, x_1\}$:

$$input(x_2) = 0.15 \times 0.1 + 0.93 \times 0.6 = 0.573$$

