9) Найти все такие 2×2 матрицы A и B, что их коммутатор $[A, B] = \mathrm{I}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB - BA =$$
$$= \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}b_{11}} + a_{12}b_{21} - \cancel{b_{11}a_{11}} - b_{12}a_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} & a_{21}b_{12} + \cancel{a_{22}b_{22}} - b_{21}a_{12} - \cancel{b_{22}a_{22}} \end{pmatrix}$$

Наблюдение

У единичной матрицы $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ сумма диагональных элементов равна 2.

У коммутатора $[A, B] = AB - BA$ сумма диагональных элементов равна 0.

Противоречие(?!), следовательно таких 2×2 матриц не существует.

Замечание

То же самое доказательство проходит для матриц размера $n \times n$.

9.1 Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A называется вырожденной(особенной), если $\det A = 0$ и невырожденной(неособенной) в противном случае.

Определение

A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A, если:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}.$$

Обратная матрица определяется только для невырожденной матрицы (то есть для квадратной с $\det A \neq 0$).

Теорема

Если обратная матрица существует, то она единственна.

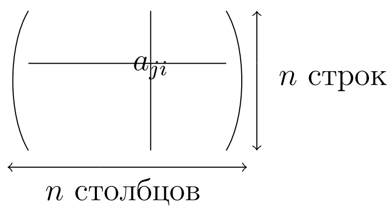
9.2 Метод присоединенной матрицы.

Метод присоединенной матрицы – это один из методов вычисления обратной матрицы. Пусть $A = \{a_{ij}\}$ – исходная матрица, $A^{-1} = \{b_{ij}\}$ – искомая обратная матрица.
Тогда элементы обратной матрицы можно найти по формуле:

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}, \tag{9.8}$$

где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A.
A_{ji} находится по правилу:

1) Вычеркнуть j-ую строку и i-тый столбец матрицы A.



2) Сосчитать определитель оставшейся матрицы (размером $(n-1) \times (n-1)$).

3) Домножить результат на $(-1)^{j+i}$.

Определение
$\{A_{ji}\}$ – присоединенная матрица (матрица, составленная из алгебраических дополнений).

Задачи

1) Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

   $\det A = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 1$

   $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A} = \dfrac{A_{ji}}{1} = A_{ji}$

   $b_{11} = A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7$

   $b_{12} = A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4$

   $b_{21} = A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5$

   $b_{22} = A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$

   $A^{-1} = \{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

2) Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

$\det A = 2\cdot 3\cdot(-3)+6\cdot(-2)\cdot 7+5\cdot 5\cdot 4-7\cdot 3\cdot 5-4\cdot(-2)\cdot 2-(-3)\cdot 5\cdot 6 =$
$= -18 - 84 + 100 - 105 + 16 + 90 = -1$

$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} = -A_{ji}$

$$b_{11} = -A_{11} = -(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(3\cdot(-3) - 4\cdot(-2)) = 1$$

$$b_{12} = -A_{21} = -(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-3) - 7\cdot(-2) = -1$$

$$b_{13} = -A_{31} = -(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(5\cdot 4 - 7\cdot 3) = 1$$

$$b_{21} = -A_{12} = -(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6\cdot(-3) - 4\cdot 5 = -38$$

$$b_{22} = -A_{22} = -(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(2\cdot(-3) - 7\cdot 5) = 41$$

$$b_{23} = -A_{32} = -(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 7\cdot 6 = -34$$

$$b_{31} = -A_{13} = -(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(6\cdot(-2) - 3\cdot 5) = 27$$

$$b_{32} = -A_{23} = -(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 5\cdot 5 = -29$$

$$b_{33} = -A_{33} = -(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(2\cdot 3 - 5\cdot 6) = 24$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

9.3 Метод элементарных преобразований (Метод Гаусса)

Метод Гаусса нужен для нахождения обратной матрицы A^{-1}. Схема метода:

1) Справа от матрицы A приписываем единичную матрицу того же размера.

2) С помощью элементарных преобразований со строками расширенной матрицы на месте исходной матрицы A мы должны получить единичную матрицу I.

3) Тогда на месте приписанной матрицы мы получим обратную матрицу A^{-1}.

Можно использовать следующие элементарные преобразования:

1. Перестановка строк.

2. Умножение строки на число, не равное 0.

3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на произвольное число.

<u>*Задачи*</u>

1) Найти обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

В исходной матрице последовательно получи нули. Сначала – в первом столбце матрицы, затем – во втором, потом – в третьем.

Тогда обратная матрица: $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Методом Гаусса найти обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

перестановка строк $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \quad \frac{5}{6} \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -10 \quad -\frac{7}{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\dfrac{7}{6} & 0 & \dfrac{5}{6} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ -\frac{1}{6}\cdot \\ -2\cdot \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{3} & 2 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & -6 & 0 & -10 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{3} & 2 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{5}{3} & -1 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{3} & 2 & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{3} & -1 & -\dfrac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Методом Гаусса найти обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Обозначим строки:

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (1)+(2)+(3)+(4) \longrightarrow (1) \\ (1)+(2)-(3)-(4) \longrightarrow (2) \\ (1)+(3)-(2)-(4) \longrightarrow (3) \\ (1)+(4)-(2)-(3) \longrightarrow (4) \end{array}$$

Ответ: $A^{-1} = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Решить матричное уравнение:

$$A^{-1}\cdot\left|\underbrace{\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}}_{A}\cdot X\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}}_{B}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}\right|\cdot B^{-1}$$

Найдем A^{-1}, B^{-1}.

$\det A = 3\cdot(-2)-(-1)\cdot 5 = -6+5 = -1$

$b_{ij}=\dfrac{A_{ji}}{\det A}=\dfrac{A_{ji}}{-1}=-A_{ji}$

$b_{11}=-A_{11}=-(-1)^{1+1}\cdot(-2)=2$

$b_{12}=-A_{21}=-(-1)^{2+1}\cdot(-1)=-1$

$b_{21}=-A_{12}=-(-1)^{1+2}\cdot 5=5$

$b_{22}=-A_{22}=-(-1)^{2+2}\cdot 3=-3$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

Найдем B^{-1}.

$\det B = 5\cdot 8-6\cdot 7=-2$

$c_{ij}=\dfrac{B_{ji}}{\det B}=\dfrac{B_{ji}}{-2}=-\dfrac{1}{2}B_{ji}$

$c_{11}=-\dfrac{1}{2}B_{11}=-\dfrac{1}{2}(-1)^{1+1}\cdot 8=-4$

$c_{12}=-\dfrac{1}{2}B_{21}=-\dfrac{1}{2}(-1)^{1+2}\cdot 6=3$

$c_{21}=-\dfrac{1}{2}B_{12}=-\dfrac{1}{2}(-1)^{2+1}\cdot 7=\dfrac{7}{2}$

$c_{22}=-\dfrac{1}{2}B_{22}=-\dfrac{1}{2}(-1)^{2+2}\cdot 5=-\dfrac{5}{2}$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \dfrac{7}{2} & -\dfrac{5}{2}\end{pmatrix}$

Домножим исходное уравнение слева на A^{-1}, справа – на B^{-1}. Получим:

$$X=\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}}_{M}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}}_{N}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \dfrac{7}{2} & -\dfrac{5}{2}\end{pmatrix}}_{P}$$

$M \cdot N = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

$(M \cdot N) \cdot P = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \dfrac{7}{2} & -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 19 \cdot (-4) + 22 \cdot \dfrac{7}{2} & 19 \cdot 3 + 22 \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right) \\ 43 \cdot (-4) + 50 \cdot \dfrac{7}{2} & 43 \cdot 3 + 50 \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5) Методом Гаусса найти обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{cc} & \\ & \\ \frac{2}{3} & 2 \\ & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{5}{3} & 0 & 0 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{7}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ -\frac{1}{6} & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{4}{3} & \dfrac{11}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$
\sim \begin{array}{r} \\ \frac{1}{3}\cdot \\ (-1)\cdot \\ \frac{1}{2}\cdot \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{7}{6} & \dfrac{10}{3} \\
0 & 3 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{2} & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{5}{2} & -5 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 2
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{7}{6} & \dfrac{10}{3} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{7}{6} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{6} & -\dfrac{5}{3} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1
\end{array}\right)
$$

Ответ: $\begin{pmatrix}
-\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{7}{6} & \dfrac{10}{3} \\
-\dfrac{7}{6} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{6} & -\dfrac{5}{3} \\
\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\
\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}$.

6) Решить матричное уравнение:

$$
X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \cdot A^{-1}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
-5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
\begin{array}{r} 5 \;\; -5 \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$\sim \begin{array}{c} \frac{1}{6} \\ \frac{13}{18} \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 11 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & -9 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{3}{19} \quad \frac{198}{19} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} & 0 \\ 0 & 18 & 11 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{19}{18} & \dfrac{13}{18} & \dfrac{25}{18} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{18}\cdot \\ -\frac{18}{19}\cdot \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{19} & -\dfrac{1}{19} & -\dfrac{3}{19} \\ 0 & 18 & 0 & \dfrac{162}{19} & \dfrac{180}{19} & \dfrac{198}{19} \\ 0 & 0 & -\dfrac{19}{18} & \dfrac{13}{18} & \dfrac{25}{18} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{19} & -\dfrac{1}{19} & -\dfrac{3}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{9}{19} & \dfrac{10}{19} & \dfrac{11}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{13}{18} & -\dfrac{25}{18} & -\dfrac{18}{19} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Домножим исходное уравнение справа на A^{-1} . Получим:

$$X = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} (-8)\cdot 1 + 3\cdot 9 & (-8)\cdot(-1) + 3\cdot 10 & (-8)\cdot(-3) + 3\cdot 11 \\ (-5)\cdot 1 + 9\cdot 9 & (-5)\cdot(-1) + 9\cdot 10 & (-5)\cdot(-3) + 9\cdot 11 \\ (-2)\cdot 1 + 15\cdot 9 & (-2)\cdot(-1) + 15\cdot 10 & (-2)\cdot(-3) + 15\cdot 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 152 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

9.4 Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса — это метод последовательного исключения неизвестных. Задача – привести матрицу системы к трапециевидной форме.

Задачи

1) Решить систему: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

   Выписываем коэффициенты расширенной матрицы системы:

	~~2~~	~~1~~	~~4~~	~~2~~	
	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~2~~	
-2, -3, -1	1	3	-1	-2	$x_1 + 3x_2 - x_3 = -2$
	~~3~~	~~4~~	~~3~~	~~0~~	
-5	0	-1	4	4	$-x_2 + 4x_3 = 4$
	~~0~~	~~-5~~	~~6~~	~~6~~	
-1	~~0~~	~~-5~~	~~6~~	~~6~~	
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
	0	0	-14	-14	$-14x_3 = -14$

   Два уравнения совпали, ибо наша система – переопределенная (4 уравнения и 3 неизвестных).

   $-14x_3 = -14 \Leftrightarrow x_3 = 1$

   $-x_2 + 4x_3 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4x_3 - 4 = 0$

   $x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \Leftrightarrow x_1 = -3x_2 + x_3 - 2 = -1$

   Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c l}
 & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \\
 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{-1} & \\
-2\ \ -1\ \ -1 & 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & x_1+x_2+x_3+4x_4=-3 \\
 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & x_3-x_4=2 \\
 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & x_2-2x_4=1 \\
 & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-7} & \cancel{7} & \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-9} & \cancel{8} & \\
 & 0 & 0 & 0 & -10 & 10 & -10x_4=10
\end{array}
$$

$-10x_4 = 10 \Leftrightarrow x_4 = -1$

$x_2 - 2x_4 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 + 2x_4 = -1$

$x_3 - x_4 = 1 \Leftrightarrow x_3 = 2 + x_4 = 1$

$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -1 \Leftrightarrow x_1 = -3 + 4 - 1 + 1 = 1$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} \\
-1\ \ -1\ \ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{13} \\
 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{9} \\
-2\ \ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{12} \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{8} \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{array}
$$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 4$, но $0 \neq 4$, следовательно, система несовместна.

4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-3x_3-7x_4-6x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-5x_4-4x_5=0 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4-4x_5=0 \\ x_1-x_2-x_3-2x_5=0 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|l}
 & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{-3} & \cancel{-7} & \cancel{-6} & \cancel{0} & \\
 & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{-2} & \cancel{-5} & \cancel{-4} & \cancel{0} & \\
 & \cancel{2} & \cancel{-3} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-4} & \cancel{0} & \\
-3\quad -2\quad -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & x_1-x_2-x_3-2x_5=0 \\
7\quad 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -x_2+x_4=0 \\
 & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
 & \cancel{0} & \cancel{7} & \cancel{0} & \cancel{-7} & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} &
\end{array}$$

Получили 2 уравнения и 5 неизвестных.

Это означает, что 3 неизвестных нужно выбрать в качестве свободных параметров.

$-x_2+x_4=0$

Пусть $x_4=s\in\mathbb{R}$.

Тогда $x_2=x_4=s$

$x_1-x_2-x_3-2x_5=0$

Пусть $x_3=t$, $x_5=w$; $\quad t,w\in\mathbb{R}$.

$x_1=s+t+2w$

Ответ: $\begin{cases} x_1=s+t+2w \\ x_2=s \\ x_3=t \\ x_4=s \\ x_5=w \end{cases} \qquad s,\ t,\ w\in\mathbb{R}$.

5) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=4 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4=-3 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases}$

-1, -1, -2	1	1	1	2	4	$x_1+x_2+x_3+2x_4=4$
	~~2~~	~~3~~	~~2~~	~~-1~~	~~-3~~	
	~~1~~	~~2~~	~~-1~~	~~1~~	~~1~~	
	~~1~~	~~-3~~	~~2~~	~~-2~~	~~0~~	
4, -1	0	1	0	-5	-11	$x_2-5x_4=-11$
	~~0~~	~~1~~	~~-2~~	~~-1~~	~~-3~~	
	~~0~~	~~-4~~	~~1~~	~~-4~~	~~-4~~	
	0	0	-2	4	8	$-2x_3+4x_4=8$
2	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~-24~~	~~-48~~	
	0	0	0	-44	-88	$-44x_4=-88$

$-44x_4=-88 \Leftrightarrow x_4=2$

$-2x_3+4x_4=8 \Leftrightarrow x_3=2x_4-4=0$

$x_2-5x_4=-11 \Leftrightarrow x_2=5x_4-11=-1$

$x_1+x_2+x_3+2x_4=4 \Leftrightarrow x_1=4+1-4=1$

Ответ: $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \\ x_3=0 \\ x_4=2 \end{cases}$.

6) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3-2x_4-x_5=3 \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 5x_1-3x_2-2x_3-6x_4-2x_5=11 \end{cases}$

	~~2~~	~~1~~	~~-3~~	~~-2~~	~~-1~~	~~3~~
-5, -2, -2	1	-1	-3	1	-3	2
	~~2~~	~~-3~~	~~4~~	~~-5~~	~~2~~	~~7~~
	~~5~~	~~-3~~	~~-2~~	~~-6~~	~~-2~~	~~11~~
	~~0~~	~~3~~	~~3~~	~~-4~~	~~5~~	~~-1~~
3, 2	0	-1	10	-7	8	3
	~~0~~	~~2~~	~~13~~	~~-11~~	~~13~~	~~1~~
-1	0	0	33	-25	29	8
	0	0	33	-25	29	7
	0	0	0	0	0	-1

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -1$, но $0 \neq -1$, следовательно, <u>система несовместна</u>.

$$7) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

	5	−6	1	1	3	0
	~~2~~	~~−5~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
	~~3~~	~~−5~~	~~0~~	~~0~~	~~3~~	~~0~~
	~~2~~	~~−3~~	~~1~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~
-5 -2 -3 -2	1	1	−3	1	0	0
	0	−5	7	0	0	0
неудобно	0	−8	9	−3	3	0
	0	−7	6	−1	1	0
	0	−11	16	−4	3	0

Попробуем другой способ.

Переставим местами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
	~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~5~~	~~−6~~	~~0~~
-7	0	1	1	2	−5	0
$-\frac{4}{3}$ $\frac{7}{3}$	0	0	3	3	−5	0
-1 3	1	2	0	2	−3	0
	~~−3~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
	~~0~~	~~7~~	~~0~~	~~7~~	~~−8~~	~~0~~
	~~0~~	~~−1~~	~~3~~	~~3~~	~~−3~~	~~0~~
	~~0~~	~~0~~	~~−7~~	~~−7~~	~~27~~	~~0~~
	~~0~~	~~0~~	~~4~~	~~5~~	~~−8~~	~~0~~
	0	0	0	0	$\frac{46}{3}$	0
	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	0

$$\frac{46}{3}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

$x_1 - \frac{4}{3}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_2 = 0$

$3x_5 + 3x_1 - 5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_5 = 0$

$x_4 + x_5 + 2x_1 - 5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0$

$x_3 + 2x_4 + 2x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

10. Пределы

10.1 Предел последовательности

Определение
Последовательность – пронумерованное множество чисел.
Например 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
$\sin 1, \sin\frac{1}{2}, \sin\frac{1}{3}, \sin\frac{1}{4}, \ldots$
Вместо того, чтобы записывать всю последовательность, обычно выписывают формулу для её общего члена.

$$u_n = \sin\frac{1}{n}$$

Определение
Предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N > 0 \;\; \forall\, n > N : \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что при достаточно больших n будет выполнено:

$x_n \to a$ (то есть $|x_n - a| < \varepsilon$).

Искать пределы последовательностей по определению сложно, поэтому искомый предел сводят к одному из стандартных:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Доказательство:

Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ нам нужно научиться выбирать $N > 0$ так, чтобы для всякого $n > N$ было выполнено:

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$

В качестве N возьмем $\frac{1}{\varepsilon}$.