Площадь фигуры, граница которой задана параметрически

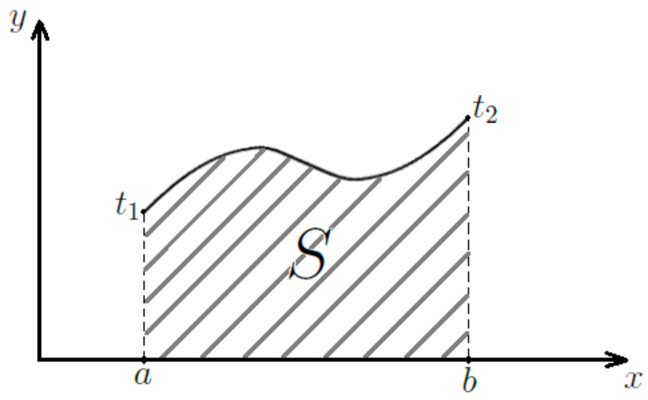

Рис. 8: Фигура, граница которой задана параметрически

Пусть кривая, ограничивающая фигуру, задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ где } t_1 \leq t \leq t_2$$

Тогда ее площадь можно посчитать по формуле: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$.

Формула $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ работает и в случае замкнутой кривой, если при изменении t от t_1 до t_2 граница обходится по часовой стрелке.

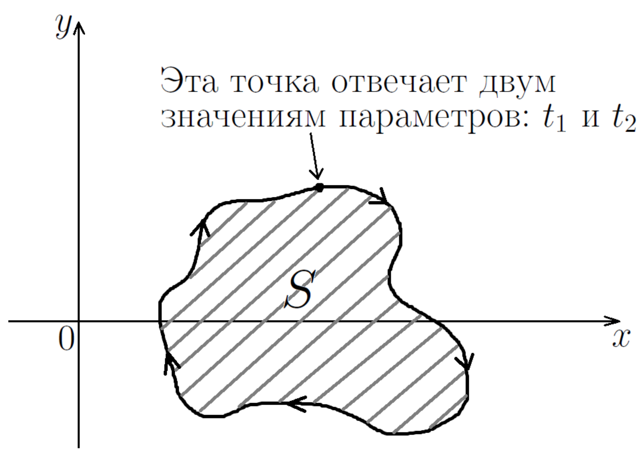

Рис. 9: Фигура, ограниченная замкнутой кривой

5.11) Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

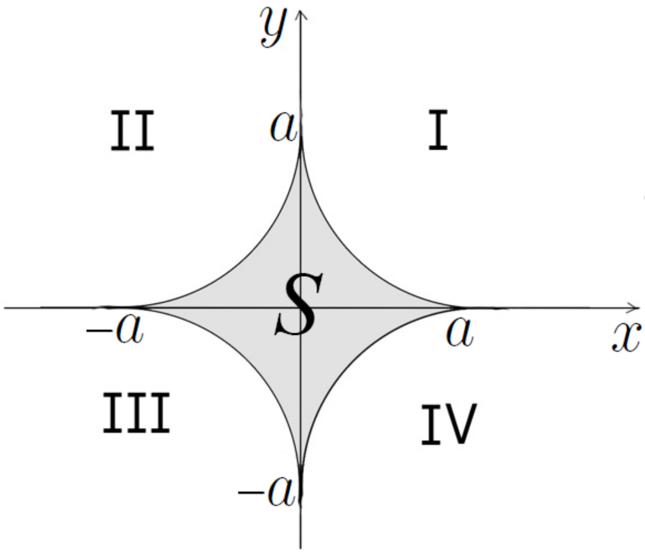

Рис. 10: Астроида $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$

Для того чтобы вычислить площадь астроиды необязательно рисовать ее точный график. Важен лишь характер поведения, точки на осях, свойства симметрии.

I четверть: $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos t$ убывает, $\sin t$ растет.

II четверть: $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $\cos t$ убывает, $\sin t$ убывает.

III четверть: $t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\cos t$ растет, $\sin t$ убывает.

IV четверть: $t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$: $\cos t$ растет, $\sin t$ растет.

График астроиды симметричен относительно оси OX, так как при замене $t \longrightarrow -t : \begin{cases} x \longrightarrow x \\ y \longrightarrow -y \end{cases}$

График астроиды симметричен относительно оси OY, так как при замене $t \longrightarrow \pi - t : \begin{cases} x \longrightarrow -x \\ y \longrightarrow y \end{cases}$

Итак, нам достаточно посчитать площадь фигуры в I четверти и домножить на 4. Кривая обходится против часовой стрелки, следовательно, интеграл нужно взять со знаком минус.

$$S=-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3\cdot\left(a\cos^3 t\right)' dt=-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3\cdot a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt=$$

$$=12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cdot\sin^4 t\cdot\cos^2 tdt=12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cdot\sin^2 t\cdot(\sin t\cos t)^2 dt=$$

$$=12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt=12a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(1-\cos 2t)\sin^2 2tdt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt-\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cos 2tdt=\frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt-$$

$$-\frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\cos 2tdt=\frac{3}{4}a^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4tdt-\frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt+$$

$$+\frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\cos 2tdt=\frac{3}{8}\pi a^2-0-0+\frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 6t+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{3}{8}\pi a^2+\frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 6tdt+\frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

Площадь фигуры, заданной в полярных координатах

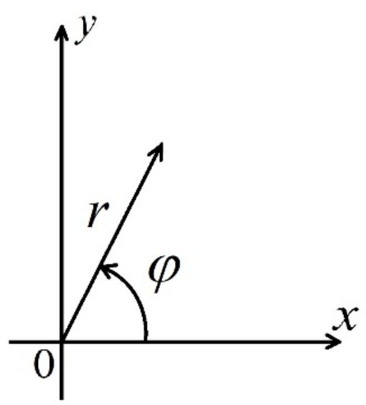

Рис. 11: Полярная система координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

В полярных координатах точка задается двумя параметрами: расстоянием от начала координат r и углом φ.

Найдем площадь следующего сектора:

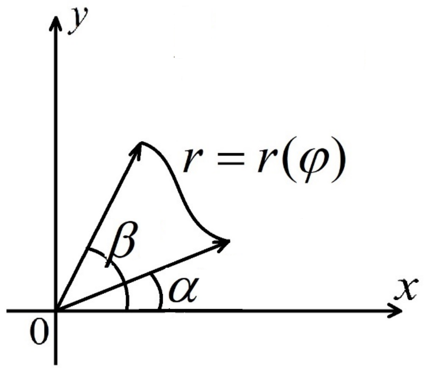

Рис. 12: Площадь сектора

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

5.12) Найти площадь одного лепестка кривой $r = a\sin 2\varphi$.

Подставить $r = a\sin 2\varphi$ в формулу несложно, но мы не знаем пределы интегрирования. Однако, мы знаем, что длина радиус-вектора не может быть отрицательной:

$r \geq 0 \Rightarrow \sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow 2\pi k \leq 2\varphi \leq \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Пределы измерения полярного угла $[0, 2\pi)$ (полный оборот). Следовательно, нас интересуют только те φ, которые попадут в интервал $[0, 2\pi)$.

$$\begin{cases} \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

Вообще говоря, фигура выглядит так:

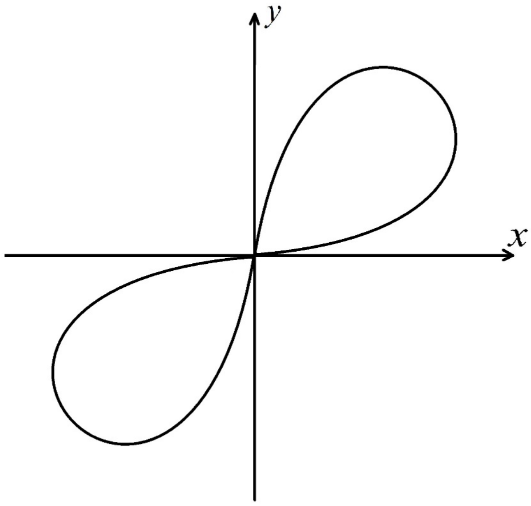

Рис. 13: Рисунок к заданию 5.12

Площадь одного лепестка кривой равна:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\varphi) d\varphi = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi \cdot d\varphi = \frac{\pi a^2}{8}.$$

5.6 Длина дуги кривой

Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина ее дуги l равна:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx$$

(где a и b - абсциссы концов дуги).

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$,

$y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2$, то:

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

В трехмерном случае аналогично.

Кривая задана параметрическим уравнением $x = x(t),\ y = y(t),$

$z = z(t),\ t_1 \le t \le t_2.$

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} dt$$

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$, то:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

Пример

Найти длину полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки (4, 8).

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$l = \int\limits_0^4 \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int\limits_0^4 \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{4}{9} \int\limits_0^4 \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4} x\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{8}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Пример

Найти длину астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

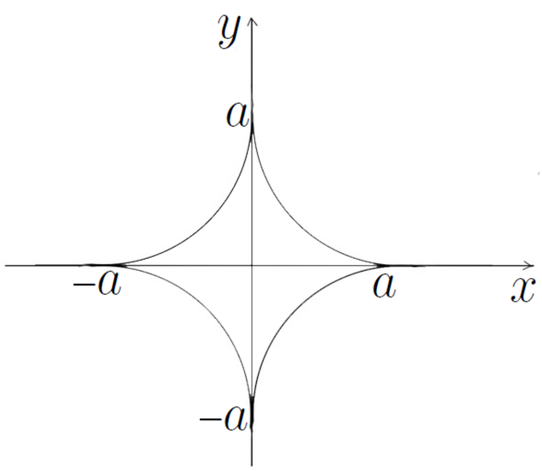

Рис. 14: Астроида

Ищем длину астроиды только в I четверти, где t меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, и домножаем на 4.

$x'_t = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$

$y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$

$$l = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + \left(3a\sin^2 t \cdot \cos t\right)^2} dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sqrt{\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^2 t \cdot \cos^2 t} \cdot dt =$$

$$= 12a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot dt = 6a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2t \cdot d(2t) =$$

$$= -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(3a\cos\pi - \sin 0) = 6a$$

Пример

Найти длину кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$.

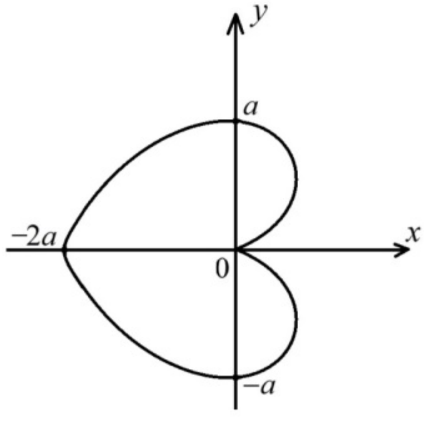

Рис. 15: Кардиоида

Проведем частичное исследование функции $r = a(1 - \cos\varphi)$ и построим график кардиоиды.

$r' = a\sin\varphi$

$\varphi = 0 : r = 0$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} : r = a$$

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \cos\varphi \downarrow \ \Rightarrow \ r \uparrow$$

$$\varphi = \pi : r = a(1 - \underbrace{\cos\pi}_{=-1}) = 2a$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} : r = a\Big(1 - \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=0}\Big) = a$$

$$\varphi = 2\pi : r = 0 \ \ (\cos 2\pi = 1)$$

Фигура симметрична, так как при замене $\varphi \to -\varphi$: $\quad r \to r$ будем считать длину кардиоиды в верхней полуплоскости (и домножим на 2).

$$l = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} \cdot d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 2a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)} \cdot d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi} 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi} 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$