Ряды

1 Числовые Ряды

1.1 Основные понятия

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел (вещественных или комплексных):

$$a_1, \ a_2, \ \ldots\ldots, \ a_n, \ \ldots\ldots \tag{1}$$

Составленный из этих чисел символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ \ldots\ldots \ + a_n + \ \ldots\ldots \tag{2}$$

называется рядом, а сами числа (1) – членами ряда. Число a_n называют общим членом ряда.

Замечание

Напомним, что последовательностью называют пронумерованное множество чисел.

Понятие ряда вводится для того, чтобы определить сумму бесконечного числа слагаемых. Для этого составим суммы, последовательно складывая члены ряда:

$$\begin{array}{l} A_1 = a_1, \\ A_2 = a_1 + a_2, \\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = a_1 + a_2 + \ \ldots\ldots \ + a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3}$$

Эти суммы называются частичными суммами ряда.

Определение

Ряд (2) называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм (3):

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{4}$$

Число A называют суммой ряда и пишут:

$$A = a_1 + a_2 + \ \ldots \ + a_n + \ \ldots \ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

Если ряд не является сходящимся, то он расходится. Расходимость ряда означает, что предел последовательности частичных сумм либо не существует, либо равен бесконечности.

Определение

Если в ряде отбросить первые m членов, то выражение $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ называется остатком ряда после m-го члена.

Примеры

1) Простейший пример ряда – сумма геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ \ldots\ldots \ + aq^n + \ldots\ldots, \quad \text{где } a > 0. \tag{6}$$

Её частичная сумма известна:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1. \tag{7}$$

Если $|q| < 1$, то:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}, \quad \text{то есть ряд сходится.} \tag{8}$$

При $q > 1$ получим:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

При $q = 1$ частичная сумма S_n будет представлять собой следующую сумму:

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{n \text{ штук}} = na.$$

Соответственно,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty.$$

При $q < -1$ подпоследовательность четных и нечетных частичных сумм имеют разные пределы:

$$\begin{cases} S_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty, \\ S_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty. \end{cases}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Аналогично для $q = -1$:

$$\begin{cases} S_{2n} = 0, \\ S_{2n+1} = a. \end{cases}$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ также не существует.

Итак, мы получили эталонный ряд, сходимость которого известна при всех значениях параметра q:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} : \begin{cases} |q| < 1 \ \text{ – ряд сходится, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \\ |q| \geq 1 \ \text{ – ряд расходится.} \end{cases} \tag{9}$$

2) Рассмотрим мяч, падающий с высоты 5 метров. При каждом ударе о землю он теряет $\frac{3}{4}$ своей энергии. Сколько времени мяч будет прыгать?

Потенциальная энергия мяча:

$$E = mgh,$$

где m – масса мяча, $g \approx 10\text{м}/c^2$ – ускорение свободного падения, h – высота. После каждого удара о землю у мяча остается только четверть энергии. Следовательно, каждый следующий раз мяч будет подпрыгивать на четверть высоты от высоты предыдущего подскока. Согласно закону равноускоренного движения:

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно, время падения мяча с высоты h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Время между двумя ударами мяча о землю равно удвоенному времени падения, так как при каждом подскоке время движения вверх равно времени движения вниз. Найдем общее время движения мяча:

$$T = \underbrace{\sqrt{\frac{2h}{g}}}_{\text{начальное падение}} +2\cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\frac{h}{4}}{g}}}_{\text{1-ый подскок}} +2\cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\frac{h}{4^2}}{g}}}_{\text{2-ой подскок}} + \ldots\ldots + 2\cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2\frac{h}{4^n}}{g}}}_{n\text{-ый подскок}} + \ldots\ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \underbrace{2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{1}{2^n} + \ldots\ldots}_{S} =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$T = 3\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 5}{10}} = 3$ секунды.

3) Проверим на сходимость следующий ряд:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1) - \ln n).$

$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ \ldots\ldots\ + \ln(n+1) - \ln n = -\ln 1 + \ln(n+1).$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-\ln 1 + \ln(n+1)) = +\infty$, то есть ряд расходится.

На практике частичную сумму часто принимают за приближенное значение суммы ряда. Однако такое приближение возможно только для сходящихся рядов. Поэтому большой интерес представляет вопрос о сходимости или расходимости числовых рядов.

Теорема 1 (Необходимое условие сходимости)

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{10}$$

Доказательство:

$a_n = S_n - S_{n-1},$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$

■

Замечание
Если необходимое условие сходимости нарушено, то ряд расходится. Таким образом, нарушение условия (10) является достаточным условием расходимости ряда.

Отметим, что следствие в теореме 1 есть только в одну сторону. Если общий член ряда стремится к нулю, то отсюда не следует, что ряд сходится.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ расходится несмотря на то, что предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Простейшие свойства сходящихся рядов
1) Если ряд сходится, то сходится и любой из его остатков. Обратно, из сходимости остатка вытекает сходимость исходного ряда.
Доказательство:
Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \tag{11}$$

Частичные суммы этого ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n. \tag{12}$$

Остаток ряда (11) после m-го члена имеет вид:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots \tag{13}$$

Зафиксируем m и обозначим k-ю частичную сумму ряда (13) через $\widetilde{A}_k$:

$$\tilde{A}_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots + a_{m+k}. \tag{14}$$

Тогда очевидно, k-ая частичная сумма остатка примет вид:

$$\tilde{A}_k = A_{m+k} - A_m. \tag{15}$$

Остаток ряда сходится, если существует конечный предел последовательности его частичным сумм $\tilde{A}_k$. Найдем его.

$$\tilde{A} = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}_k = \lim_{k\to\infty} (A_{m+k} - A_m) = A - A_m, \tag{16}$$

то есть сходится ряд (13).
Докажем в обратную сторону.

$$A_{m+k} = A_m + \tilde{A}_k. \tag{17}$$

A_m – конечное число, так как m фиксировано. Следовательно, если существует конечный предел $\tilde{A}_k$, то будет существовать и конечный предел A_{m+k}:

$$A = \lim_{k\to\infty} A_{m+k} = \lim_{k\to\infty}(A_m + \tilde{A}_k) = A_m + \tilde{A}, \tag{18}$$

то есть сходится ряд (11).

■

Сумму ряда (13), если он сходится, обозначим вместо $\tilde{A}$ символом α_m, указывая индексом m, после какого члена берётся остаток.
Тогда формулы (16) и (18) перепишутся следующим образом:

$$\alpha_m = A - A_m, \quad A = A_m + \alpha_m. \tag{19}$$

Если увеличивать m до бесконечности, то $A_m \to A$, а $\alpha_m \to 0$. Итак, мы приходим к следующему свойству:
2) Если ряд сходится, то сумма α_m его остатка после m-го члена с возрастанием m стремится к нулю.
3) Если члены сходящегося ряда (2) умножить на одно и то же число c, то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на c).
Доказательство:

Частичная сумма A'_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots\ldots + ca_n + \ldots\ldots$ равна:

$$A'_n = ca_1 + ca_2 + \ldots\ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) = cA_n.$$

Так как ряд сходится, то выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} cA_n = c\lim_{n\to\infty} A_n = cA.$$

■

4) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ также сходится.
Доказательство:

Из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует, что существует конечные пределы их частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B.$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \pm B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B,$$

что означает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$.

■

Замечание

1) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то это не означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ расходится. В качестве примера можно рассмотреть 2 расходящихся ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 - 1 - 1 - \ldots\ldots$$

Их сумма равна:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots\ldots = 0,$$

то есть ряд сходится.
2) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ будет расходящимся.

1.2 Признаки сходимости положительных рядов

Определение
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \tag{20}$$

называется положительным, если все его члены $a_n \geq 0 \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots)$.
Теорема 2
Положительный ряд всегда имеет сумму (конечную или бесконечную).
Доказательство:
Сравним частичные суммы A_{N+1} и A_N ряда (20):

$$A_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + a_{N+1} \geq A_N,$$

то есть $\{A_N\}$ – возрастающая последовательность. Согласно свойствам монотонных последовательностей, последовательность частичных сумм $\{A_N\}$ имеет предел: конечный, если она ограничена сверху и бесконечный в противном случае.
Но $\lim\limits_{N\to\infty} A_N$ и есть сумма ряда.

■

Замечание
Таким образом, для проверки сходимости положительного ряда достаточно доказать ограниченность сверху его частичных сумм.

Теорема 3 (Признак сравнения рядов)
Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \qquad \text{(ряд } A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots \qquad \text{(ряд } B)$$

Пусть для всех n, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство: $a_n \leq b_n$.
Тогда:

1) Из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A).
2) Из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B).
Доказательство:
Поскольку отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (смотри свойство 1 сходящихся рядов), мы можем считать, что $a_n \leq b_n$ при всех значениях $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$ Тогда для частичных сумм A_n и B_n рядов (A) и (B) соответственно будет выполнено:

$$A_n \leq B_n. \tag{21}$$

Пусть ряд (B) сходится. Тогда последовательность частичных сумм B_n ограничена:

$$B_n \leq L, \quad \text{где } L = const,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots \tag{22}$$

Сравниваем формулы (21) и (22), получаем:

$$A_n \leq L. \tag{23}$$

Но монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность A_n имеет конечный предел. Следовательно, ряд (A) сходится.
Докажем второе утверждение.
Пусть ряд (A) расходится. Тогда его частичные суммы неограниченно возрастают. Следовательно, согласно формуле (21), будут неограниченно возрастать частичные суммы ряда (B), что влечет за собой его расходимость.

■

Иногда на практике более удобно использовать другую теорему:

Теорема 4 (Предельный признак сравнения)
Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, то:
1) При $K < \infty$ из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A);
2) При $K > 0$ из расходимости ряда (B) следует расходимость ряда (A);
3) При $0 < K < \infty$ ряды (A) и (B) либо оба сходятся, либо оба расходятся (то есть ведут себя одинаково).

Доказательство:
Согласно определению предела:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0:\ \forall n > N:\ \left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon\ \Leftrightarrow\ b_n(K - \varepsilon) < a_n < b_n(K + \varepsilon). \tag{24}$$

1) Пусть ряд (B) сходится и $K < \infty$. Тогда будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K+\varepsilon)b_n$, полученный умножением членов ряда (B) на постоянное число $K + \varepsilon$. По теореме 3 в силу правой части неравенство (24) мы получим, что сходится ряд (A).

2) Пусть ряд (B) расходится и $K > 0$. Возьмем такое ε, что $K - \varepsilon > 0$. Из расходимости ряда (B) следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K-\varepsilon)b_n$.

Тогда по теореме 3 и левой части неравенства (24): $b_n(K-\varepsilon) < a_n$ мы получим, что ряд (A) также расходится.
3) Третье утверждение теоремы представляет собой комбинацию утверждений 1 и 2, то есть его мы доказали автоматически.

■

Примеры
Исследуем ряды на сходимость:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n}$.
По признаку сравнения:

$$\frac{1}{2^n n} < \frac{1}{2^n} \ .$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ тоже сходится.
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.
Воспользуемся предельным признаком сравнения.
Сравним ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Мы знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится (смотри пример 3, стр. 3). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ (так как это замечательный предел). В пределе мы получили конечное ненулевое число. Следовательно, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ведут себя одинаково, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.
Замечание
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим рядом.
Замечание
Для использования предельного признака сравнения полезно знать эквивалентные бесконечно малые величины, предел отношения которых равен единице.

Эквивалентные бесконечно малые величины при $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \tag{25}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \tag{26}$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad \text{где} \quad a > 0,\ a \neq 1, \tag{27}$$

$$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x. \tag{28}$$

Теорема 5 (Признак Даламбера)
Если отношение последующего члена ряда к предыдущему $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, начиная с некоторого номера n, удовлетворяет неравенству:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \tag{29}$$

где число q не зависит от n, то ряд (20) сходится.
Если же, начиная с некоторого номера n, имеем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \tag{30}$$

то ряд расходится.
<u>Доказательство:</u>
Поскольку отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, можно считать, что неравенства (29) или (30) выполняются при всех значениях n.
Применяя последовательно неравенство (29) к членам ряда, получим:

$$a_n \leq a_{n-1} \cdot q \leq a_{n-2} \cdot q^2 \leq \ldots\ldots \leq a_1 q^{n-1}, \tag{31}$$

то есть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots\ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}, \quad \text{где} \quad 0 < q < 1.$$

По признаку сравнения из сходимости прогрессии получаем сходимость ряда (20).
Если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n$, то есть члены положительного ряда не убывают, а значит нарушено необходимое условие сходимости и ряд расходится.

$\blacksquare$

Теорема 6 (Предельный признак Даламбера)
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{32}$$

тогда:
1) При $q < 1$ ряд сходится.
2) При $q > 1$ ряд расходится.
3) При $q = 1$ нет информации о сходимости (признак Даламбера ничего не дает).
<u>Доказательство:</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \; \forall n > N : \; \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a_n(q - \varepsilon) < a_{n+1} < a_n(q + \varepsilon). \tag{33}$$

1) Пусть $q < 1$. Выберем $\varepsilon < 1 - q$. Воспользуемся правой частью неравенства (33):

$$a_{n+1} < a_n(q + \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1 \;\; (\text{в силу выбора } \varepsilon).$$

Тогда выполнены условия признака Даламбера (формула (29)) и ряд сходится.
2) Пусть $q > 1$. Выберем $\varepsilon = q - 1$. Воспользуемся левой частью неравенства (33):

$$a_n(q - \varepsilon) < a_{n+1} \Rightarrow /\varepsilon = q - 1/ \;\Rightarrow\; a_n < a_{n+1},$$

то есть члены положительного ряда неограниченно возрастают, а значит нарушено необходимое условие сходимости и ряд расходится.

■

Примеры
Исследуем на сходимость следующие ряды:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.
По признаку Даламбера (предельному):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.
Можно доказать проще:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \cdot n} > 1 \neq 0,$$

следовательно, нарушено необходимое условие сходимости и ряд расходится.

Теорема 7 (Радикальный признак Коши)
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{34}$$

тогда:
1) При $q < 1$ ряд сходится;
2) При $q > 1$ ряд расходится;
3) При $q = 1$ нет информации о сходимости (признак Коши не работает).
Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall n > N : \; |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon. \tag{35}$$

1) Пусть $q < 1$. Выбираем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Воспользуемся правой частью неравенства (35):

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a_n < (q+\varepsilon)^n < 1 \;\text{ (в силу выбора } \varepsilon).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Тогда по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится.

2) Пусть $q>1$. Выберем ε так, чтобы $q-\varepsilon>1$. Воспользуемся левой частью неравенства (35):

$$q-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}\ \Leftrightarrow\ a_n>(q-\varepsilon)^n>1\ \ \text{(в силу выбора } \varepsilon).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(q-\varepsilon)^n$ расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости. Тогда по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже расходится.

■

Пример

Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

По признаку Коши (радикальному):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Теорема 8 (Интегральный признак Коши)

Пусть ряд имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n), \tag{36}$$

где $f(n)$ – значение функции $f(x)$ при $x=n$, определенной при $x\geq 1$, непрерывной, положительной и монотонно убывающей.

Тогда ряд сходится, если сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ и расходится, если интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ расходится.

<u>Доказательство:</u>

$f(x)$ – монотонно убывающая функция, следовательно, при $k\leq x\leq k+1$ будет выполнено:

$$a_{k+1}=f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)=a_k. \tag{37}$$

Проинтегрируем по x неравенство (37) в пределах от k до $k+1$:

$$\underbrace{\int\limits_k^{k+1}a_{k+1}\,dx}_{\substack{\parallel\\ a_{k+1}}}\ \leq\ \int\limits_k^{k+1}f(x)\,dx\ \leq\ \underbrace{\int\limits_k^{k+1}a_k\,dx}_{\substack{\parallel\\ a_k}},\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{38}$$

Просуммируем все неравенства (38) по k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{39}$$

Если $\int_1^\infty f(x)dx$ сходится, то $\int_1^n f(x)dx < \int_1^\infty f(x)dx < \infty$. Тогда по левой части неравенства (39) получим:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} < \int_{1}^{\infty} f(x)dx < \infty,$$

то есть частичные суммы ряда ограничены. Следовательно, ряд сходится (смотри замечание к теореме 2).

Если $\int_1^\infty f(x)dx$ расходится, то $\int_1^n f(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Тогда по правой части неравенства (39) частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$ не ограничены. Последовательность частичных сумм не имеет конечного предела. Следовательно, ряд расходится.

■

Геометрическая интерпретация интегрального признака Коши

Рассмотрим график положительной монотонно убывающей функции $f(x)$ на $[1,\infty)$. Геометрический смысл интеграла $\int_1^\infty f(x)dx$ – это площадь области под кривой $f(x)$. Разобьем $[1,\infty)$ на отрезки длины 1. На отрезке $[1,2]$ построим два прямоугольника:
первый – высотой $f(1)$ (назовем его "выходящим"),
второй – высотой $f(2)$ (назовем его "входящим").

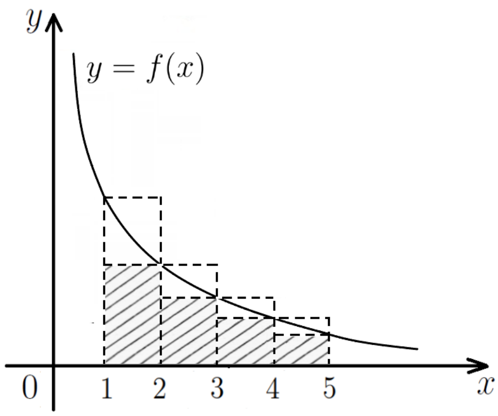

Рис. 1: Геометрическая интерпретация интегрального признака Коши

Площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[1,2]$ заключена между площадями входящего и выходящего прямоугольников. То же самое проделаем для всех отрезков. На отрезке $[k, k+1]$ входящий прямоугольник имеет площадь, равную $a_{k+1} = f(k+1)$, а выходящий – площадь $a_k = f(k)$. Площадь под кривой $y = f(x)$ на $[1, \infty)$ заключена между суммой площадей входящих прямоугольников и суммой площадей выходящих прямоугольников:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \le \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{40}$$

что и позволяет сравнивать сходимости ряда и интеграла.

Примеры

Исследуем на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

По интегральному признаку Коши:

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln|b| - \ln 1) = \infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, ряд расходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}, \quad s \ne 1.$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s > 1, \\ \infty, & s < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s < 1$.

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n{\cdot}\ln^2 n}$.

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \left.\left(-\frac{1}{\ln x} \right)\right|_2^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, ряд тоже сходится.

Замечание

В примерах 1 и 2 мы изучили сходимость обобщенного гармонического ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ : \ \begin{cases} \text{сходится при } s > 1, \\ \text{расходится при } s \le 1. \end{cases}$$

Этот ряд можно использовать как эталонный в признаках сравнения.

1.3 Сходимость произвольных рядов

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с произвольными членами (не обязательно положительными). Так как сходимость ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм, то можно сформулировать критерий сходимости ряда на основании принципа сходимости последовательности.

Теорема 9 (Принцип сходимости Больцано-Коши)
Для того, чтобы ряд (2) сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall n > N :\ |A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+m}| < \varepsilon, \\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots \tag{41}$$

<u>Доказательство:</u>
Здесь мы воспользуемся критерием Коши для сходимости числовой последовательности. Напомним его. Последовательность $\{b_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall n > N : \quad |b_{n+m} - b_n| < \varepsilon \quad \forall m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots \tag{42}$$

Применим критерий Коши к последовательности частичных сумм $\{A_n\}$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 :\ \forall n > N :\ |A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+m}| < \varepsilon, \\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

Мы получили формулу (41), что и доказывает теорему.

■

Замечание
Если в формуле (41) взять $m = 1$, то мы получим необходимое условие сходимости.
Определение
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей членов этого ряда:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots\ldots + |a_n| + \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{43}$$

Теорема 10
Абсолютно сходящийся ряд сходится.
<u>Доказательство:</u>
Согласно принципу Больцано-Коши, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то будет выполнено:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 :\ \forall n > N :\ |A_{n+m} - A_n| = \Big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots\ldots + |a_{n+m}|\Big| < \varepsilon, \\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots \tag{44}$$

Так как $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots\ldots + |a_{n+m}|$, то для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ будет выполнено неравенство:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+m}| < \varepsilon, \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots, \tag{45}$$

что по принципу Больцано-Коши означает сходимость ряда.

■

Определение

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно (неабсолютно) сходящимся.

Пример

Исследуем на сходимость ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{16}}{n^2}$.

Рассмотрим ряд из модулей: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \frac{\pi n}{16}|}{n^2}$.

$\dfrac{|\sin \frac{\pi n}{16}|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \frac{\pi n}{16}|}{n^2}$ тоже сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{16}}{n^2}$ сходится абсолютно, то есть сходится.

Определение

Знакочередующимися называются ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки.

Знакочередующийся ряд обычно записывают так, чтобы знаки членов были выявлены:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots\ldots, \quad \text{где } a_n > 0. \tag{46}$$

Теорема 11 (Признак Лейбница)

Пусть члены знакочередующегося ряда (46) монотонно убывают по модулю:

$$a_{n+1} < a_n, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots \tag{47}$$

и стремятся к нулю (выполнено необходимое условие сходимости):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{48}$$

Тогда ряд (46) сходится, причем его сумма положительна и не превосходит первого члена:

$$0 < S < a_1. \tag{49}$$

Доказательство:

Частичную сумму четного порядка S_{2n} можно записать в виде:

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\substack{\vee \\ 0}} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\substack{\vee \\ 0}} + \ldots\ldots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\substack{\vee \\ 0}} > a_1 - a_2 > 0. \tag{50}$$

Так как каждая скобка есть положительное число, то сумма S_{2n} монотонно возрастает с ростом n. С другой стороны:

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\substack{\vee \\ 0}} - \ldots\ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\substack{\vee \\ 0}} - a_{2n} < a_1 - (a_2 - a_3) < a_1, \tag{51}$$

то есть сумма S_{2n} ограничена сверху. Но монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность S_{2n} имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S. \tag{52}$$

Рассмотрим частичную сумму нечетного порядка S_{2n+1}. Очевидно, что для нее выполнено:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}. \tag{53}$$

Сделаем предельный переход в уравнении (53) при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S. \tag{54}$$

Из формул (52) и (54) получаем, что S является суммой ряда и ряд сходится.

Теперь докажем, что $0 < S < a_1$. Сделаем предельный переход в формуле (50) при $n \to \infty$:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{2n}}_{\substack{\parallel \\ S}} \geq \underbrace{\lim_{n\to\infty} (a_1 - a_2)}_{\substack{\parallel \\ a_1 - a_2}} \quad \Rightarrow \quad S \geq a_1 - a_2 > 0. \tag{55}$$

Сделаем предельный переход в формуле (51) при $n \to \infty$:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{2n}}_{\substack{\parallel \\ S}} \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} (a_1 - (a_2 - a_3))}_{\substack{\parallel \\ a_1 - (a_2 - a_3)}} \quad \Rightarrow \quad S \leq a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\substack{\vee \\ 0}} < a_1. \tag{56}$$

Из формул (55) и (56) получается, что $0 < S < a_1$.

■

Следствие

Признак Лейбница позволяет дать весьма простую и удобную оценку для остатка знакочередующегося ряда (который и сам является знакочередующимся рядом). А именно, остаток ряда лейбницевского типа имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

Это следствие часто используют при приближенных вычислениях с помощью рядов.

Пример

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ на абсолютную и условную сходимость.

Ряд из модулей представляет собой расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Следовательно, абсолютной сходимости нет. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, следовательно, ряд сходится условно.

Свойства сходящихся рядов

1) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Объединим члены ряда в группы, не меняя положения. Тогда ряд примет следующий вид:

$$\underbrace{(a_1+a_2)}_{b_1}+\underbrace{(a_3+a_4+a_5)}_{b_2}+\underbrace{(a_6+a_7+a_8)}_{b_3}+\underbrace{a_9}_{b_4}+\ldots\ldots=b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots \quad (57)$$

Получившийся ряд (57) назовем сгруппированным рядом.

Теорема 12 (Сочетательное свойство ряда)
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сгруппированный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится и имеет ту же сумму.
Доказательство:
Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда есть подпоследовательность последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, которая сходится. Следовательно, она сходится, причем к тому же пределу.

$\blacksquare$

Замечание
В обратную сторону следствия нет. Если сгруппированный ряд сходится, то исходный ряд может и не сходиться. Например, ряд $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots\ldots$ сходится, но ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots\ldots$ расходится.

2) Перестановка членов ряда
Из положительных членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (обозначим этот ряд за (A)), перенумеровав их по порядку, составим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1+p_2+\ldots\ldots+p_k+\ldots\ldots \quad (58)$$

Также поступим с отрицательными членами и составим ряд из их модулей.

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1+q_2+\ldots\ldots+q_m+\ldots\ldots \quad (59)$$

Пусть ряд (A) сходится абсолютно, то есть сходится ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (обозначим его через (A^*)).

Сколько бы членов рядов (58) и (59) ни взять, все они содержатся среди членов сходящегося ряда (A^*), и для всех частичных сумм P_k и Q_m выполняются неравенства:

$$P_k \le A^*, \quad Q_m \le A^*, \quad (60)$$

так что оба ряда (P) и (Q) сходятся. Обозначим их суммы через P и Q соответственно.

Если взять n членов рядов (A), то в их составе окажется k положительных и m отрицательных, так что

$$A_n = P_k - Q_m. \tag{61}$$

Здесь номера k и m зависят от n. Если в ряде (A) как положительных, так и отрицательных членов бесконечно много, то при $n \to \infty$ одновременно $k \to \infty$ и $m \to \infty$.

Переходя в равенстве (61) к пределу, приходим снова к заключению о сходимости ряда (A), причем его сумма оказывается равной

$$A = P - Q. \tag{62}$$

Можно сказать, что при сделанном предположении об абсолютной сходимости ряда (A), его сумма равна разности между суммой ряда, составленного из одних положительных его членов, и суммой ряда, составленного из модулей отрицательных членов. Этим мы в последующем будем пользоваться.

3) Перестановочное свойство абсолютно сходящихся рядов

Пусть дан сходящийся ряд (A), имеющий сумму A. Переставив в нем члены произвольным образом, мы получим новый ряд (A'):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots\ldots + a'_k + \ldots\ldots \tag{63}$$

Каждый член a'_k этого ряда отождествляется с определенным членом a_{n_k} исходного ряда (A), причем последовательность номеров n_k без пропусков и повторений с точностью до порядка воспроизводит натуральный ряд.

Возникает вопрос, сходится ли ряд A' и если сходится, то будет ли его сумма равна сумме A исходного ряда. Ответ будет разным в зависимости от того, сходится ли ряд (A) абсолютно или условно.

Теорема 13 (Теорема Дирихле)

Если ряд (A) абсолютно сходится, то ряд (A'), полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму A, что и исходный ряд.

Замечание

Иными словами, абсолютно сходящийся ряд обладает перестановочным свойством.

<u>Доказательство:</u>

Проведем доказательство в два этапа.

1. Пусть ряд (A) – положительный. Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда (A'). Так как

$$a'_1 = a_{n_1},\ a'_2 = a_{n_2},\ \ldots\ldots,\ a'_k = a_{n_k},$$

то взяв n' больше, чем любой из номеров $n_1,\ n_2,\ \ldots\ldots n_k$, мы получим для частичных сумм:

$$A'_k \leq A_{n'}. \tag{64}$$

Следовательно,

$$A'_k \leq A. \tag{65}$$

Мы получили, что монотонно возрастающая последовательность частичных сумм $\{A'_k\}$ ограничена сверху. Следовательно, ряд (A') сходится и его сумма не превышает A:

$$A' \leq A. \tag{66}$$

Посмотрим на задачу с другой стороны. Исходный ряд (A) можно получить из ряда (A') перестановкой членов. Поэтому, следуя приведенной выше логике, получим:

$$A \leq A'. \tag{67}$$

Сравнивая соотношения (66) и (67), приходим к требуемому равенству:

$$A' = A.$$

2. Пусть теперь (A) – произвольный абсолютно сходящийся ряд, то есть ряд из модулей (A^*) сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots\ldots + |a_n| + \ldots\ldots \tag{68}$$

Тогда, по доказанному в пункте 1, будет сходиться и переставленный ряд (A'^*).
А значит сходится и ряд (A') (так как из абсолютной сходимости следует сходимость), причем абсолютно.

Как мы показали в свойстве 2 (формула (62)), в случае абсолютной сходимости ряда (A), его сумма выражается так:

$$A = P - Q, \tag{69}$$

где P и Q есть суммы положительных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_m$, составленных, соответственно, из положительных и абсолютных величин отрицательных членов ряда (A).

Перестановка членов в ряде (A) вызовет перестановку членов в рядах (P) и (Q), но не отразится (по доказанному) на их суммах P и Q. Как было доказано, переставленный ряд (A') сходится абсолютно. Значит его сумма представима в виде:

$$A' = P' - Q', \tag{70}$$

где (P') и (Q') – это переставленные ряды (P) и (Q) соответственно. Но $P' = P$, а $Q' = Q$. Поэтому и сумма A' переставленного ряда совпадает с A.

4) Случай неабсолютно сходящихся рядов

Рассмотрим случай неабсолютно (условно) сходящихся рядов и установим, что они перестановочным свойством не обладают: в каждом таком ряде с помощью перестановки членов можно изменить его сумму или вовсе нарушить сходимость.
Пусть ряд (A) сходится условно. Из сходимости следует, что:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{71}$$

Что касается рядов (P) и (Q), о которых мы упоминали в свойствах 2 и 3, то, хотя, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} q_m = 0, \tag{72}$$

но в данном случае они оба расходятся. Действительно, имеют место равенства:

$$A_n = P_k - Q_m,\ A_n^* = P_k + Q_m, \tag{73}$$

где k и m означают число положительных и отрицательных членов в составе первых n членов ряда (A). Если оба ряда (P) и (Q) сходятся, то будут сходиться ряды (A) и (A^*), то есть имеет место абсолютная сходимость (не соответствует предположению). Если один из рядов ((P) или (Q)) сходится, а другой расходится, то будет расходиться и ряд (A), и ряд (A^*) (согласно формуле 73).
Таким образом, интересующая нас ситуация, когда ряд (A) сходится, а ряд (A^*) расходится, может иметь место лишь тогда, когда оба ряда (P) и (Q) расходятся.

Теорема 14 (Теорема Римана)
Если ряд (A) неабсолютно (условно) сходится, то какое бы ни взять наперед число B (конечное или равное $\pm\infty$), можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой именно B.
Доказательство:
Рассмотрим случай конечного B. Из расходимости рядов (P) и (Q) следует, что и все их остатки также будут расходящимися, так что в каждом из этих рядов, начиная с любого места, можно набрать столько членов, чтобы их сумма превзошла любое число.

Пользуясь этим замечанием, мы следующим образом произведем перестановку членов ряда (A).

Сначала возьмем столько положительных членов нашего ряда (в том порядке, в каком они в нем расположены), чтобы их сумма превзошла число B:

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_{k_1} > B. \tag{74}$$

Вслед за ними выпишем отрицательные члены (в том порядке, в каком они расположены в данном порядке), взяв их столько, чтобы общая сумма стала меньше B:

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots\ldots - q_{m_1} < B. \tag{75}$$

После этого снова поместим положительные члены (из числа оставшихся) так, чтобы было:

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots\ldots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \ldots\ldots + p_{k_2} > B. \tag{76}$$

Затем наберем столько отрицательных членов (из числа оставшихся), чтобы было:

$$p_1 + \ldots\ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots\ldots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \ldots\ldots + p_{k_2} - q_{m_1+1} - \ldots\ldots - q_{m_2} < B. \tag{77}$$

И так далее до бесконечности.

Если всякий раз, выписывая члены p или q, набирать их не больше, чем необходимо для выполнения требуемого неравенства, то отклонение от числа B в ту или другую сторону не превзойдет по модулю последнего написанного члена.

Поскольку общий член ряда стремится к нулю (в силу формулы (72)), то отклонение частичной суммы ряда от числа B стремится к нулю, то есть частичные суммы сходятся к B. Следовательно, ряд

$$\begin{gathered}(p_1 + \ldots\ldots + p_{k_1}) - (q_1 + \ldots\ldots + q_{m_1}) + \ldots\ldots + \\ +(p_{k_{j-1}+1} + \ldots\ldots + p_{k_i}) - (q_{m_{j-1}+1} + \ldots\ldots + q_{m_j}) + \ldots\ldots\end{gathered} \tag{78}$$

имеет своей суммой B.

Если $B = +\infty$, то взяв последовательность возрастающих до бесконечности чисел B_j можно было бы набор положительных чисел подчинить требованию, чтобы суммы последовательно становились больше $B_1,\ B_2,\ B_3$ и так далее, а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Таким путем мы можем составить ряд, имеющий сумму $+\infty$. Аналогично можно получить и ряд с суммой $-\infty$.

■

Установленный результат подчеркивает тот факт, что неабсолютая (условная) сходимость осуществляется лишь благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных членов, и потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим, между тем, как абсолютная сходимость основана на быстроте убывания этих членов и от порядка их не зависит.