

DS04：归并排序及其相关面试题

1. 归并排序：

- 基本流程：
 - 给定数组arr，左边界L，右边界R
 - 第一步：求中点M
 - 第二步：对arr[L, M]进行排序
 - 第三步：对arr[M+1, R]进行排序
 - 第四步：合并两个数组，使其整体有序
- 主定理分析： $T(N) = 2T(\frac{N}{2}) + O(N)$
 - $O(N)$ 是因为指针要遍历左右两个数组的全部数字
- 时间复杂度： $O(N \log N)$
 - 大部分排序算法是 $O(N^2)$ ，是因为浪费了很多比较结果
- 实现方法：
 - 递归法
 - help是用于保存合并中结果的辅助数组
 - 合并时先 $p1 \leq M$ 且 $p2 \leq R$ ，并比较两个数的大小（大小相同时默认选左边），然后将p1未遍历完的数据加入其中，再将p2未遍历完的数据加入其中（虽然写了两个p1和p2的while循环，但是只会执行其中一个），最后把help的数据存回原数组中

```
// 递归方法实现
public static void mergeSort1(int[] arr) {
    if (arr == null || arr.length < 2) {
        return;
    }
    process(arr, 0, arr.length - 1);
}
// 请把arr[L..R]排有序
// l...r N
//  $T(N) = 2 * T(N / 2) + O(N)$ 
//  $O(N * \log N)$ 
public static void process(int[] arr, int L, int R) {
    if (L == R) { // base case
        return;
    }
}
```

```

    int mid = L + ((R - L) >> 1);
    process(arr, L, mid);
    process(arr, mid + 1, R);
    merge(arr, L, mid, R);
}

public static void merge(int[] arr, int L, int M, int R) {
    int[] help = new int[R - L + 1];
    int i = 0;
    int p1 = L;
    int p2 = M + 1;
    while (p1 <= M && p2 <= R) {
        help[i++] = arr[p1] <= arr[p2] ? arr[p1++] : arr[p2++];
    }
    // 要么p1越界了, 要么p2越界了
    while (p1 <= M) {
        help[i++] = arr[p1++];
    }
    while (p2 <= R) {
        help[i++] = arr[p2++];
    }
    for (i = 0; i < help.length; i++) {
        arr[L + i] = help[i];
    }
}
}

```

◦ 非迭代法

- 假设数组为 `arr[2, 1, 3, 5, 6, 4]`
- 设定步长, 初始为1:
 - 直接归并2和1, 得到1和2
 - 直接归并3和5, 得到3和5
 - 直接归并6和4, 得到4和6
 - 数组变为 `arr[1, 2, 3, 5, 4, 6]`
 - **注意: 步长是指归并的子数组长度**
- 步长乘以2, 即为2:
 - 直接归并1、2和3、5, 得到1、2、3、5
 - 4、6不变, 因为右边没有数组的其他元素
- 步长再乘以2, 即为4:
 - 直接归并1、2、3、5和6、4, 得到1、2、3、4、5、6
 - 也就是说左右数组可以不等长
- 步长再乘以2, 即为8

- 超出数组长度，算法停止
- 分析：
 - 步长一共调整 $\log N$ 次，每次调整后需要进行 $O(N)$ 次比较，所以时间复杂度是 $O(N \log N)$
 - 每次先确定L和M ($M=L+\text{步长}-1$)，然后确定R ($R=M+\text{步长}$, $R=N-1$ 两者中的最小值)，最后确定下一个 $L=R+1$ ，依此类推。
- 代码：

```
// 非递归方法实现
public static void mergeSort2(int[] arr) {
    if (arr == null || arr.length < 2) {
        return;
    }
    int N = arr.length;
    // 步长
    int mergeSize = 1;
    while (mergeSize < N) { // log N
        // L是当前左组的，第一个位置
        int L = 0;
        while (L < N) {
            // 相当于M>=N-1，也就是完全没有右数组时，
            //直接结束
            //L + mergeSize - 1 >= N-1可化为下面的式子
            if (mergeSize >= N - L) {
                break;
            }
            int M = L + mergeSize - 1;
            int R = M + Math.min(mergeSize, N - M - 1);
            merge(arr, L, M, R);
            L = R + 1;
        }
        // 防止溢出
        // 如数组长度N非常接近最大的整数，则步长会不断增大，
        //也会非常接近最大的整数（此时，步长大于N/2），
        //则下一条 mergeSize*2 会导致整数溢出，变成负数
        if (mergeSize > N / 2) {
            break;
        }
        mergeSize <= 1;
    }
}
```

- 视频课里的写法：（与上面的代码不同，但背后的原理一样的）

```
// 步长
int mergeSize = 1;
while (mergeSize < N) { // log N
    // 当前左组的，第一个位置
    int L = 0;
    while (L < N) {
        int M = L + mergeSize - 1;
        if (M >= N) {
            break;
        }
        int R = Math.min(M + mergeSize, N - 1);
        // L .... M    M + 1..... R
        merge(arr, L, M, R);
        L = R + 1;
    }
    // 防止溢出
    if (mergeSize > N / 2) {
        break;
    }
    mergeSize <<= 1;
}
}
```

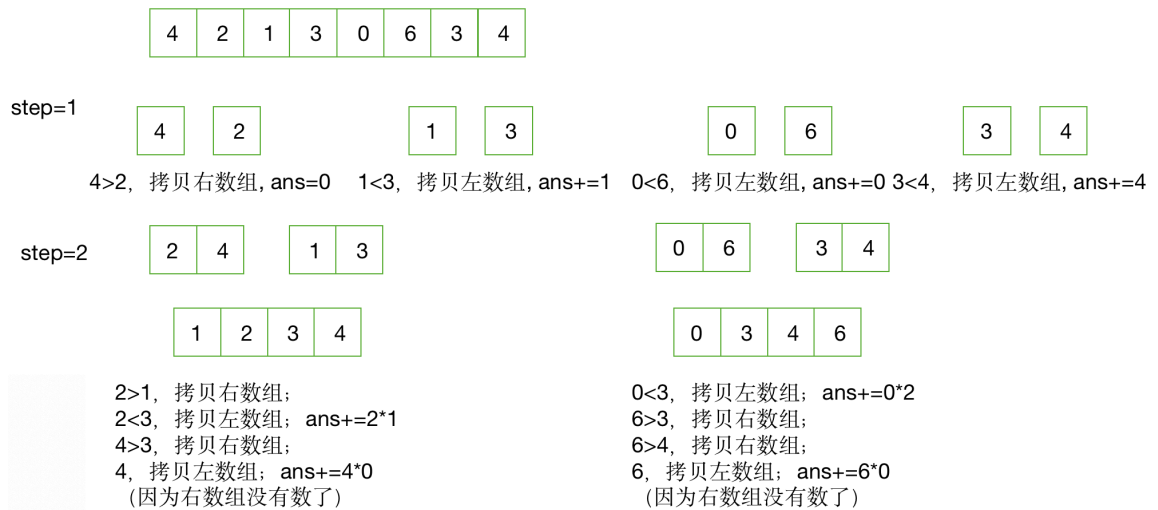
2. 面试题一小和问题：

- 问题描述：

- 对于数组中每个数及其位置，将该位置之前且比该位置上的数小的所有数求和，得到一个新数列，最后输出新数列的全部数字之和。
- 如 `arr=[6, 3, 2, 1, 6, 7]`，则新数组为 `t=[0, 0, 0, 0, 6, 18]`，最后输出为24
- 如果采用最普通的解法，需要 $O(N^2)$ 的时间复杂度，这里要求时间复杂度为 $O(N \log N)$
- 还是采用归并排序的思想
 - 拷贝左数组时，`ans+=拷贝的数*(右组末尾位置 - 右组指针位置 + 1)`，即右组中有多少个数比当前左数组的数字大
 - 拷贝右数组时，`ans`不变
 - 左右数组中的数字一样时，优先拷贝右数组，注意此时右边数组如果

还有比该数大的，不改变ans，因为左数组中该数还在。目的是：相等时，找出右边比该数大的数字对应下标。

面试题一：小和



。数学原理：

- 对于有序数组中的一个数X，如果右边有Y个数比X大，则最终求和的式子中必有Y个X
- 本质是问题的转化：原来是找左边比某数小的数总和，转变成找右边有几个数比它大
- 以后遇到比大小的问题，想想能不能分解成左边、右边和合并三块，如果可以，就用归并

。代码实现：

- 左边排序的小和+右边排序的小和+合并时的小和

```
public static int smallSum(int[] arr) {  
    if (arr == null || arr.length < 2) {  
        return 0;  
    }  
    return process(arr, 0, arr.length - 1);  
}  
// arr[L..R]既要排好序，也要求小和返回  
// 所有merge时，产生的小和，累加  
// 左 排序 merge  
// 右 排序 merge  
// merge  
public static int process(int[] arr, int l, int r) {
```

```

    if (l == r) {
        return 0;
    }
    // l < r
    int mid = l + ((r - l) >> 1);
    return
        process(arr, l, mid)
        +
        process(arr, mid + 1, r)
        +
        merge(arr, l, mid, r);
}

public static int merge(int[] arr, int L, int m, int r) {
    int[] help = new int[r - L + 1];
    int i = 0;
    int p1 = L;
    int p2 = m + 1;
    int res = 0;
    while (p1 <= m && p2 <= r) {
        // 只在归并排序的基础上加了这一句
        res += arr[p1] < arr[p2] ? (r - p2 + 1) * arr[p1] :
0;

        // 和之前相比只是去掉了等于，只会影响稳定性，不影响结果
        help[i++] = arr[p1] < arr[p2] ? arr[p1++] : arr[p2++];
    };
    while (p1 <= m) {
        help[i++] = arr[p1++];
    }
    while (p2 <= r) {
        help[i++] = arr[p2++];
    }
    for (i = 0; i < help.length; i++) {
        arr[L + i] = help[i];
    }
    return res;
}
}

```

3. 面试题二逆序对问题：

- 在一个数组中，假设一个左边的数和一个右边的数构成降序关系，则称为逆序对，找出一个数组中的全部逆序对

- 解法：
 - 由于使用的归并排序默认是从小到大，这里找的是右数组有几个数比左数组的当前数大，所以可以从右到左merge
 - 左边大，则拷贝左数组， $ans += \text{右组指针位置} - \text{右组开头位置} + 1$ ，即右组中有多少个数比当前左数组的数字小
 - 右边大，则拷贝右数组，ans不变
 - 左右数组中的数字一样时，优先拷贝右数组，因为不确定右数组前面有多少个数比它小，不改变ans
- 代码：

```
public static int reverPairNumber(int[] arr) {
    if (arr == null || arr.length < 2) {
        return 0;
    }
    return process(arr, 0, arr.length - 1);
}
// arr[L..R]既要排好序，也要求逆序对数量返回
// 所有merge时，产生的逆序对数量，累加，返回
// 左 排序 merge并产生逆序对数量
// 右 排序 merge并产生逆序对数量
public static int process(int[] arr, int l, int r) {
    if (l == r) {
        return 0;
    }
    // l < r
    int mid = l + ((r - l) >> 1);
    return process(arr, l, mid) + process(arr, mid + 1, r) + merge(arr, l, mid, r);
}
public static int merge(int[] arr, int L, int m, int r) {
    int[] help = new int[r - L + 1];
    int i = help.length - 1;
    int p1 = m;
    int p2 = r;
    int res = 0;
    while (p1 >= L && p2 > m) {
        // 右数组的起点是m+1，这里做了化简，即p2-(m+1)+1=p2-m
        res += arr[p1] > arr[p2] ? (p2 - m) : 0;
        help[i--] = arr[p1] > arr[p2] ? arr[p1--] : arr[p2--];
    }
    while (p1 >= L) {
```

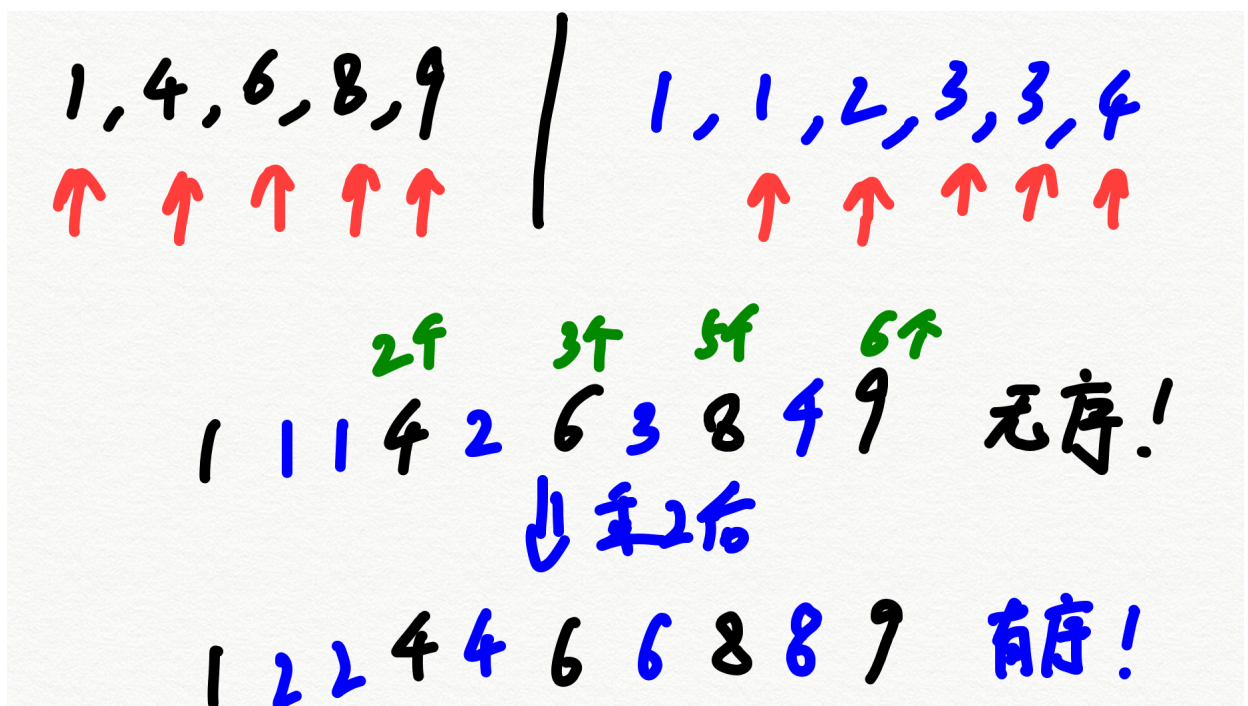
```

        help[i--] = arr[p1--];
    }
    while (p2 > m) {
        help[i--] = arr[p2--];
    }
    for (i = 0; i < help.length; i++) {
        arr[L + i] = help[i];
    }
    return res;
}

```

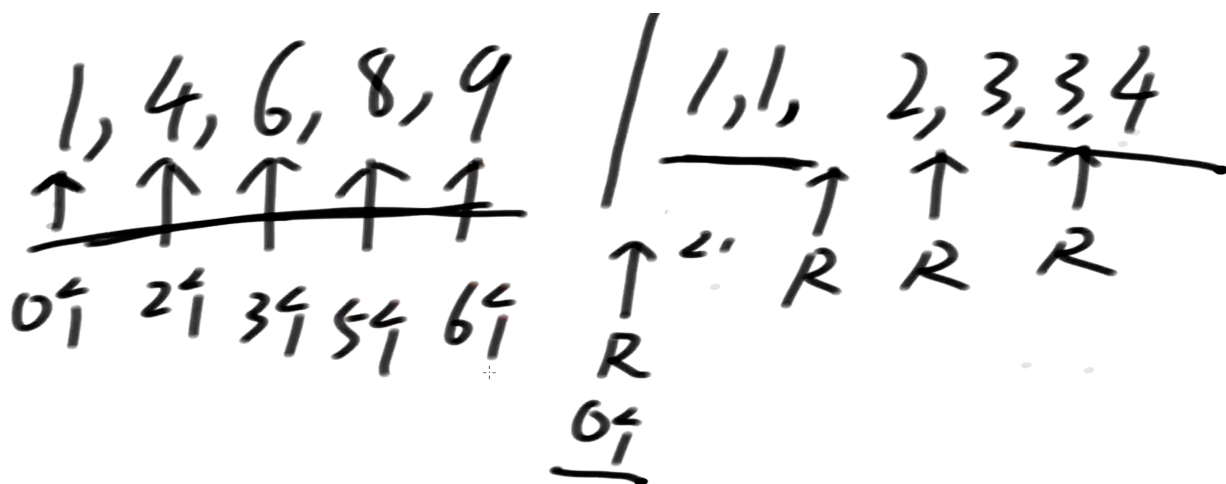
4. 面试题三2倍大小问题:

- 在一个数组中，某个数a的右边，有多少个数b满足 $2*b < a$:
- 总思路还是：左数组的2倍大小个数 + 右数组的2倍大小个数 + 合并的2倍大小个数
- 我的思路：
 - 右边数组的大，则选右边，ans不变
 - 左边数组的大，则选左边，ans += 右组指针位置 - 右组开头位置 + 1
 - 两者相等时，选右边，ans不变
 - 注意：这样的方法不行，乘以2改变了数据大小，因为合并后数组不是有序的了



- 正确解法：

- 从左到右合并
- 左指针选中一个数后，右指针不断向后移动，直到右指针的下一个乘以2大于等于左指针的数，则右指针移动的次數就是所要求的个数
- 实现方法就是右指针index从 m+1 开始，先比较arr[index]*2与左数组的数的大小关系，如果小于，则index++



- 扫描完个数后，再重新从头合并即可
- 核心思想：利用并保持数组的有序性，从而避免重复遍历，当比较大小的操作影响到数组的有序性时，拆分成两个 $O(N)$ 的循环即可。

- 代码实现：

```
public static int biggerTwice(int[] arr) {
    if (arr == null || arr.length < 2) {
        return 0;
    }
    return process(arr, 0, arr.length - 1);
}

public static int process(int[] arr, int l, int r) {
    if (l == r) {
        return 0;
    }
    // l < r
    int mid = l + ((r - l) >> 1);
    return process(arr, l, mid) + process(arr, mid + 1, r) + merge(arr, l, mid, r);
}
```

```

public static int merge(int[] arr, int L, int m, int r) {
    // [L....M]    [M+1....R]

    int ans = 0;
    // 目前囊括进来的数，是从[M+1, windowR)，注意是左闭右开
    // 单独的这一块是O(N)复杂度
    // windowR用来记录右指针扫描到哪个数了
    int windowR = m + 1;
    for (int i = L; i <= m; i++) {
        // 这里是先比大小，再向右移动右指针
        // 一定要把windowR <= r写在前面，因为最后windowR=r+1，如果先看arr[win
        dowR]，会产生越界错误
        while (windowR <= r && arr[i] > (arr[windowR] * 2)) {
            windowR++;
        }
        ans += windowR - m - 1;
    }

    // 单独的这一块也是O(N)复杂度，前后代码合在一起还是O(N)
    int[] help = new int[r - L + 1];
    int i = 0;
    int p1 = L;
    int p2 = m + 1;
    while (p1 <= m && p2 <= r) {
        help[i++] = arr[p1] <= arr[p2] ? arr[p1++] : arr[p2++];
    }
    while (p1 <= m) {
        help[i++] = arr[p1++];
    }
    while (p2 <= r) {
        help[i++] = arr[p2++];
    }
    for (i = 0; i < help.length; i++) {
        arr[L + i] = help[i];
    }
    return ans;
}

```

核心：归并排序可以将信息有序化，同时便于处理比大小等操作

- 要求：面试中会手写

- 适用于找数组中某个数的左边或右边、满足某一大小条件的数字个数问题

附-编程任务：

- task1: 归并排序递归实现
- task2: 归并排序非递归实现
- task3: 面试题1.小和问题递归实现
- task4: 面试题1.小和问题非递归实现
- task5: 面试题2.逆序对问题递归实现