数字通信课程学习报告

徐淳 231607010094

2023 年 12 月 5 日

1 引言

在本次课程学习中，我习得了较为全面的数字通信理论知识，建立起了相关的理论框架。本次课程从介绍相关概念，复习概率论相关知识开始讲起，后面又介绍了随机过程、基带与滤波通带、信号空间等内容，本次报告针对课程伊始章节 Stachastic Process（随机过程）作相应学习笔记及报告。

2 随机过程的基本概念

随机过程是一类随时间作随机变化的过程，它不能用确切的时间函数描述。如果把把随机过程看成对应不同随机试验结果的时间过程的集合，即随机过程是所有样本函数的集合。具体而言即测试结果的每一个记录，即图中的每一个波形，都是一个确定时间函数 $X_i(t)$，它称为样本函数或随机过程的一次实现。全部样本函数构成的总体就是一个随机过程，记作 $\xi(t)$。

2.1 相关概念

- 随机事件 (简称事件、实现样本、记录)：在随机试验中，可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件
- 随机变量：定义在样本空间上的实值函数, 是不确定的
- 随机过程：无数个随机变量构成的总体
- 离散随机变量：随机变量 x 的取值个数是有限的或可数无穷个
- 连续随机变量：随机变量 x 可能的取值充满某一有限或无限区间

2.2 随机过程的分布函数

由 $\xi(t)$ 表示一个随机过程，在任意一个时刻 t_1 上 $\xi(t_1)$ 是一个随机变量，定义随机过程 $\xi(t)$ 的
一维概率分布函数：

$$F_1(x_1;t_1)=P\left\{\xi(t_1)\leq x_1\right\}$$

一维概率密度函数：

$$f_1(x_1;t_1)=\frac{\partial F_1(x_1;t_1)}{\partial x_1}$$

或

$$F_1(x_1;t_1)=\int_{-\infty}^{x} f_1(x_1;t_1)dx$$

n 维概率分布函数：

$$F_n(x_1,x_2...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)=P\left\{\xi(t_1)\leq x_1,\xi(t_1)\leq x_1,...,\xi(t_1)\leq x_1\right\}$$

n 维概率密度函数：

$$f_n(x_1,x_2...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\partial F_1(x_1,x_2,...,x_n;t_1\ t_2\ ...\ t_n)}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}$$

或

$$F_n(x_1,x_2...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}...\int\limits_{-\infty}^{x_n} f_n(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...t_n)dx_1dx_2...dx_n$$

3 随机过程的数字特征

3.1 均值（数学期望）

随机过程 $\xi(t)$ 的数学期望：

- 若 $\xi(t)$ 连续，定义 $E[\xi(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x,t)dx=a(t)$
- 若 $\xi(t)$ 离散，定义 $E[\xi(t)]=\sum_{i=1}^{K}\xi_i(t)P(\xi_i(t))=a(t)$

$\xi(t)$ 的均值 $E\left[\xi(t)\right]$ 是时间的确定函数，常记为 $a(t)$，他表示随机过程的 n 个样本函数曲线的摆动中心

3.2 方差

随机过程 $\xi(t)$ 的方差：

$$D\left[\xi(t)\right]=E\left\{\left[\xi(t)-a(t)\right]^2\right\}=E[\xi^2(t)]-a^2(t)=\sigma^2(t)$$

方差等于均方值与均方平方之差，表示随机过程在时刻 t 相对于均值 $a(t)$ 的偏离程度

3.3 相关函数

$\xi(t)$ 的协方差函数：

$$\begin{aligned}B[t_1,t_2]&=E\left\{[\xi(t_1)-a(t1)][\xi(t_2)-a(t_2)]\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-a(t)][x_2-a(t_2)]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\end{aligned}$$

式中:$a(t_1)$ 和 $a(t_2)$ 分别是在 t_1 和 t_2 时刻得到的 $\xi(t)$ 的均值;$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 为 $\xi(t)$ 的二维度概率密度函数。

$\xi(t)$ 的相关函数：

$$R[t_1,t_2]=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

式中：$\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 分别是在 t_1 和 t_2 时刻观测 $\xi(t)$ 得到的随机变量

协方差函数和相关函数之间有着如下确定的关系：

$$B[t_1,t_2]=R[t_1,t2]-E[\xi(t_1)]E[\xi(t_2)]$$

$\xi(t),\eta(t)$ 的互协方差函数：

$$B_{\xi\eta}[t_1,t_2=E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$$

$\xi(t),\eta(t)$ 的互相关函数：

$$R_{\xi\eta}[t_1,t_2]=E[\xi(t1)\eta(t_2)]$$

$\xi(t),\eta(t)$ 的互相关系数：

$$\rho=\frac{E[\xi(t_1)-a_\xi(t_1)][\eta(t_2)-a_\eta(t_2)]}{\sqrt{E\left\{[\xi(t_1)-a_\xi(t_1)]^2\right\}}E\left\{[\eta(t_2)-a_\eta(t_2)]^2\right\}}=\frac{B_{\xi\eta}[t_1,t_2]}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2)}$$

(1) $|\rho| \le 1$

(2) 相关性：若相关系数 $\rho = 0$，则 $\xi(t), \eta(t)$ 是线性不相关的。

(3) 独立与相关性：若 $\xi(t), \eta(t)$ 是独立的，则线性不相关，反之亦然。

结论：一般随机过程的统计特性，原则上都与时刻 $t_1, t_2(t_2 = t_1 + tau)$ 有关或者说与时间起点 t_1 及时间间隔 τ 有关。

4 平稳随机过程

4.1 定义

若一个随机过程 $\xi(t)$ 的统计特性与时间起点无关，即时间平移不影响其任何统计特性，则称该随机过程是在严格意义下的平稳随机过程，简称严平稳随机过程（狭义平稳随机过程）。因此，平稳随机过程 $\xi(t)$ 的任意有限概率密度函数与时间起点有关，也就是说，对于任意的正整数 n 和所有实数，有：

$$f_n(x)$$