Różniczkowanie numeryczne – spis wzorów

Ilorazy różnicowe

$$D_{f1}(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D_{b1}(x,h)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$D_{c2}(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$D_{f2}(x,h)=\frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}$$

$$D_{b2}(x,h)=\frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}$$

$$D_{c4}(x,h)=\frac{8f(x+h)-8f(x-h)-f(x+2h)+f(x-2h)}{12h}$$

Ekstrapolacja Richardsona

$$D_{f,n+1}(x,h)=\frac{2^n D_{f,n}(x,h)-D_{f,n}(x,2h)}{2^n-1}$$

$$D_{b,n+1}(x,h)=\frac{2^n D_{b,n}(x,h)-D_{b,n}(x,2h)}{2^n-1}$$

$$D_{c,2(n+1)}(x,h)=\frac{2^{2n} D_{c,2n}(x,h)-D_{c,2n}(x,2h)}{2^{2n}-1}$$

Pochodne wyższego rzędu

- Pochodne wyższego rzędu można otrzymać poprzez rozpisanie wzorów Taylora dla pochodnych niższego rzędu z krokiem h i 2h. Następnie należy wyprowadzić z obydwu wzorów pożądaną pochodną
- Przy pochodnych wyższego rzędu można korzystać z ekstrapolacji Richardsona

$$D_{f1}^{(2)}=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

$$D_{b1}^{(2)}=\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$$

$$D_{c2}^{(2)}(x,h)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

Pochodne mieszane

- Tym podejściem można również wyprowadzić pochodne wyższego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\rightarrow D_{?,x}(D_{?,y}(x,y,h))$$ przykładowo

$$D_{f1,x}(D_{f1,y}(x,y,h))=\frac{D_{f1,y}(x+h,y,h)-D_{f1,y}(x,y,h)}{h}=\frac{\frac{f(x+h,y+h)-f(x+h,y)}{h}-\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}}{h}$$

Ilorazy różnicowe dla niestałego kroku można wyprowadzić dokonując interpolacji wielomianem Lagrange'a

$$P(x)=\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1,k\neq j}^{n} y_j \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$ gdzie n to liczba punktów

Różniczkować numerycznie można również poprzez różniczkowanie funkcji interpolowanej/aproksymowanej punktami pomiarowymi