Notebook UNosnovatos

Contents

1 C++

1.1 C++ plantilla

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define watch(x) cout<<#x<<"="<<x<<'\n'
#define sz(arr) ((int) arr.size())
#define all(v) v.begin(), v.end()
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> ii;
typedef vector<ii> vii;
typedef vector<int> vi;
typedef vector<long long> vl;
typedef pair<ll, ll> pll;
typedef vector<pll> vll;
const int INF = 1e9;
const ll INFL = 1e18;
const int MOD = 1e9+7;
const double EPS  = 1e-9;
int dirx[4] = {0,-1,1,0};
int diry[4] = {-1,0,0,1};
int dr[] = {1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1};
int dc[] = {0, 1, 1, 1, 0, -1, -1, -1};
const string ABC = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz";
const char ln = '\n';

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cout << setprecision(20) << fixed;
    // freopen("file.in", "r", stdin);
    // freopen("file.out", "w", stdout);

    return 0;
}
```

1.2 Librerias

```
// En caso de que no sirva #include <bits/stdc++.h>
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <iterator>
#include <sstream>
#include <fstream>
#include <cassert>
#include <climits>
#include <cstdlib>
#include <cstring>
#include <string>
#include <cstdio>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <queue>
#include <deque>
#include <stack>
#include <list>
#include <map>
#include <set>
#include <bitset>
#include <iomanip>
#include <unordered_map>
////
#include <tuple>
#include <random>
```

```
#include <chrono>
```

1.3 Bitmask

```
// Todas son O(1)Representacion
int a = 5; // Representacion binaria: 0101
int b = 3; // Representacion binaria: 0011
// Operaciones Principales
int resultado_and = a & b; // 0001 (1 en decimal)
int resultado_or = a | b; // 0111 (7 en decimal)
int resultado_xor = a ^ b; // 0110 (6 en decimal)

int num = 42; // Representacion binaria: 00101010
bitset<8> bits(num); // Crear un objeto bitset a partir
    del numero
cout << "Secuencia de bits: " << bits << "\n";
bits.count(); // Cantidad de bits activados
bits.set(3, true); // Establecer el cuarto bit en 1
bits.reset(6);     // Establecer el septimo bit en 0

ll S,T;
// Operaciones con bits (/*) por 2 (redondea de forma
    automatica)
S=34; // == 100010
S = S<<1; // == S*2 == 68 == 1000100
S = S>>2; // == S/4 == 17 == 10001
S = S>>1; // == S/2 == 8  == 1000

// Encender un bit
S = 34;
S = S|(1<<3); // S = 42 (101010)

// Limpiar o apagar un bit
// ~: Not operacion
S = 42;
S &= ~(1<<1); // S = 40 (101000)

// Comprobar si un bit esta encendido
S = 42;
T = S&(1<<3); // (!= 0): el tercer bit esta encendido

// Invertir el estado de un bit
S = 40;
S ^=(1<<2); // 44 (101100)

// LSB (Primero de la derecha)
S = 40;
T = ((S) & -(S)); // 8 (001000)
__builtin_ctz(T); // nos entrega el indice del LSB

// Encender todos los bits
ll n = 3; // el tamanio del set de bits
S = 0;
S = (1<<n) - 1; // 7 (111)

// n es el tamanio de la mask (Alternativa)
// ll n = 64;
// for (ll subset = 0; subset < (1<<n); ++subset){

// Enumerar todos los posibles subsets de un bitmask
int mask = 18;
for (int subset = mask; subset; subset = (mask & (subset
    -1))){
    cout << subset << "\n";
}

// otras funciones de c++
__builtin_popcount(32); // 100000 (base 2), only 1 bit is
    on
__builtin_popcount(30);// 11110 (base 2), 4 bits are on
__builtin_popcountl((1l<<62)-1l); // 2^62-1 has 62 bits
    on (near limit)
__builtin_ctz(32); // 100000 (base 2), 5 trailing zeroes
__builtin_ctz(30); // 11110 (base 2), 1 trailing zero
__builtin_ctzl(1l<<62); // 2^62 has 62 trailing zeroes
```

1.4 Cosas de strings

```
// Funcion para convertir un caracter a un entero
int conv(char ch) {
  return ((ch >= 'a' && ch <= 'z') ? ch-'a' : ch-'A'+26);
}

string s="abc";
cout<<s.substr(1)<<"\n";
cout<<s.substr(0,1)<<"\n";

// El primer parametro es la posicion inicial
s.insert(3, "def");
cout<<s<<"\n";
// El primer parametro es la posicion y el segundo es la
    cantidad de caracteres a borrar
s.erase(3,3);
cout<<s<<"\n";
// El primer parametro es la posicion y el segundo es la
    cantidad de caracteres a reemplazar
s.replace(0,2,"def");
cout<<s<<"\n";

for(char& c:s){
  c=toupper(c);
}
cout<<s<<"\n";

for(char& c:s){
  c=tolower(c);
}
cout<<s<<"\n";

// De string a entero
s="123";int n;
istringstream(s)>>n;
```

```
cout<<n<<"\n";

// De entero a string
n=456;
ostringstream os;
os<<n;
s=os.str();
cout<<s<<"\n";
```

2 Estructuras de Datos

2.1 Disjoint Set Union

```
struct dsu{
    vi p, size;
    int num_sets;
    int maxSize;

    dsu(int n){
        p.assign(n, 0);
        size.assign(n, 1);
        num_sets = n;
        for (int i = 0; i<n; i++) p[i] = i;
    }

    int find_set(int i) {return (p[i] == i) ? i : (p[i] =
        find_set(p[i]));}

    bool is_same_set(int i, int j) {return find_set(i) ==
        find_set(j);}

    void unionSet(int i, int j){
            if (!is_same_set(i, j)){
                int a = find_set(i), b = find_set(j);
                if (size[a] < size[b])
                    swap(a, b);
                p[b] = a;
                size[a] += size[b];
                maxSize = max(size[a], maxSize);
                num_sets--;
            }
        }
};
```

2.2 Fenwick Tree

```
#define LSOne(S) ((S) & -(S))

struct fenwick_tree{
    vl ft; int n;
    fenwick_tree(int n): n (n){ft.assign(n+1, 0);}
    ll rsq(int j){
        ll sum = 0;
        for(;j;j -= LSOne(j)) sum += ft[j];
        return sum;
    }
    ll rsq(int i, int j) {return rsq(j) - (i == 1 ? 0 :
        rsq(i-1));}
    void upd(int i, ll v){
        for (; i <= n; i += LSOne(i)) ft[i] += v;
    }
};
```

2.3 ST iterativo

```
struct segtree{
    int n; vl v; ll nulo = 0;

    ll op(ll a, ll b) {return a + b;}

    segtree(int n) : n(n), v(2*n, nulo){}

    segtree(vl &a) : n(sz(a)), v(2*n){
        for(int i = 0; i<n; i++) v[n + i] = a[i];
        for (int i = n-1; i>=1; --i) v[i] = op(v[i<<1], v
            [i<<1|1]);
    }

    void upd(int k, ll nv){
        for (v[k += n] = nv; k > 1; k >>= 1) v[k>>1] = op
            (v[k], v[k^1]);
    }

    ll get(int l, int r){
        ll vl = nulo, vr = nulo;
        for (l += n, r += n+1; l < r; l >>= 1, r >>= 1){
            if (l&1) vl = op(vl, v[l++]);
            if (r&1) vr = op(v[--r], vr);
        }
        return op(vl, vr);
    }
};
```

2.4 Segment Tree

```
int nullValue = 0;

struct nodeST{
    nodeST *left, *right;
    int l, r; ll value, lazy, lazy1;

    nodeST(vi &v, int l, int r) : l(l), r(r){
        int m = (l+r)>>1;
        lazy = 0;
        lazy1 = 0;
        if (l!=r){
            left = new nodeST(v, l, m);
            right = new nodeST(v, m+1, r);
```

```
            value = opt(left->value, right->value);
        }
        else{
            value = v[l];
        }
    }

    ll opt(ll leftValue, ll rightValue){
        return leftValue + rightValue;
    }

    void propagate(){
        if(lazy1){
            value = lazy1 * (r-l+1);
            if (l != r){
                left->lazy1 = lazy1, right->lazy1 = lazy1
                    ;
                left->lazy = 0, right->lazy = 0;
            }
            lazy1 = 0;
            lazy = 0;
        }
        else{
            value += lazy * (r-l+1);
            if (l != r){
                if(left->lazy1) left->lazy1 += lazy;
                else left->lazy += lazy;
                if(right->lazy1) right->lazy1 += lazy;
                else right->lazy += lazy;
            }
            lazy = 0;
        }
    }

    ll get(int i, int j){
        propagate();
        if (l>=i && r<=j) return value;
        if (l>j  || r<i) return nullValue;

        return opt(left->get(i, j), right->get(i, j));
    }

    void upd(int i, int j, int nv){
        propagate();
        if (l>j  || r<i) return;
        if (l>=i && r<=j){
            lazy += nv;
            propagate();
            // value = nv;
            return;
        }

        left->upd(i, j, nv);
        right->upd(i, j, nv);

        value = opt(left->value, right->value);
    }

    void upd(int k, int nv){
        if (l>k  || r<k) return;
        if (l>=k && r<=k){
            value = nv;
            return;
        }

        left->upd(k, nv);
        right->upd(k, nv);

        value = opt(left->value, right->value);
    }

    void upd1(int i, int j, int nv){
        propagate();
        if (l>j  || r<i) return;
        if (l>=i && r<=j){
            lazy = 0;
            lazy1 = nv;
            propagate();
            return;
        }

        left->upd1(i, j, nv);
        right->upd1(i, j, nv);

        value = opt(left->value, right->value);
    }
};
```

2.5 Persistent ST

```
const ll nullVal = 0;

ll oper(ll n1, ll n2){
    return n1 + n2;
}

struct Vertex {
    Vertex *l, *r;
    ll val;

    Vertex(ll num) : l(nullptr), r(nullptr), val(num) {}
    Vertex(Vertex *l, Vertex *r) : l(l), r(r), val(
        nullVal) {
        if (l) val = oper(val, l->val);
        if (r) val = oper(val, r->val);
    }
};

struct perST{
    ll n;
    // rts es donde guardamos las roots nuevas creadas
    vector<Vertex*> rts;

    // Creacion de la root inicial y asignacion de
    // tamano de la base de PerST
```

```
    perST(vl& a): n(a.size()) {
        rts.pb(build(a, 0, n - 1));
    }

    // build del ST (funciona igual que uno normal solo que con punteros)
    Vertex* build(vl& a, ll tl, ll tr) {
        if (tl == tr)
            return new Vertex(a[tl]);
        ll tm = (tl + tr) >> 1;
        return new Vertex(build(a, tl, tm), build(a, tm+1, tr));
    }

    // get del ST (funciona igual que uno normal)
    // el valor de tl y tr sirven para saber en que rango nos encontramos
    ll get(Vertex* v, ll tl, ll tr, ll l, ll r) {
        if (l > r)
            return nullVal;
        if (l == tl && tr == r)
            return v-> val;
        ll tm = (tl + tr) >> 1;
        return oper(get(v->l, tl, tm, l, min(r, tm)),
                    get(v->r, tm+1, tr, max(l, tm+1), r));
    }

    // el upd del perST recorre el arbol reciclando nodos que
    // quedan igual y creando nuevos para los cuales cambia.
    // Retorna el vertice root del nuevo ST
    Vertex* upd(Vertex* v, ll tl, ll tr, ll pos, ll newVal) {
        if (tl == tr)
            return new Vertex(newVal);
        ll tm = (tl + tr) >> 1;
        if (pos <= tm)
            return new Vertex(upd(v->l, tl, tm, pos, newVal), v->r);
        else
            return new Vertex(v->l, upd(v->r, tm+1, tr, pos, newVal));
    }

    // simplificaciones de upd y get
    // el valor de k es igual a la version en la cual
    // trabajaremos
    Vertex* upd(ll k, ll pos, ll newVal){
        return upd(rts[k], 0, n - 1, pos, newVal);
    }

    ll get(ll k, ll a, ll b){
        return get(rts[k], 0, n - 1, a, b);
    }
};
```

2.6 Distinct Values Queries

```
// insertar Persistent ST de sumas

int main() {
    ll n, k; cin >> n >> k;
    vl vals(n, 0);
    forx(i, n) cin >> vals[i];

    // creacion del perST
    vl basSt(n, 0);
    perST vers(basSt);

    // Cada ST estara guardando si el i-esimo elemento es una
    // ultima ocurrencia y la idea es crear una nueva version
    // por cada actualizacion de este dato
    map<ll, ll> lastOcur;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        if (!lastOcur[vals[i - 1]]){
            vers.rts.pb(vers.upd(i - 1, i - 1, 1));
            lastOcur[vals[i - 1]] = i;
        }else{
            vers.rts.pb(vers.upd(i - 1, i - 1, 1));
            vers.rts[i] = vers.upd(i, lastOcur[vals[i - 1]] - 1, 0);
            lastOcur[vals[i - 1]] = i;
        }
    }

    // Para hacer la consulta de la cantidad de
    // distintos en un rango basta con hacer una
    // tipica consulta pero en la version de b
    while(k--){
        ll a, b; cin >> a >> b;
        a--; b--;
        cout << vers.get(b + 1, a, b) << ln;
    }
}
```

3 Programacion dinamica

3.1 LIS

```
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);

    int n;cin >> n;
    vl vals(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) cin >> vals[i];
```

```
    vl copia(vals);
    sort(copia.begin(),copia.end());

    map <ll,ll> dicc;
    for (int i=0;i<n;i++)if (!dicc.count(copia[i])) dicc[
        copia[i]]=i;

    vl baseSt(n,0);
    nodeSt st(baseSt, 0, n - 1);
    ll maxi =0;
    for (ll pVal:vals) {
        ll op =st.get(0,dicc[pVal]-1)+1;
        maxi = max(maxi,op);
        st.actl(dicc[pVal],op);
    }
    cout<<maxi<<ln;
}
```

3.2 Bin Packing

```
int main() {
    ll n, capacidad;
    cin >> n >> capacidad;
    vl pesos(n, 0);
    forx(i, n) cin >> pesos[i];

    vector<pll> dp((1 << n));
    dp[0] = {1, 0};
    // dp[X] = {#numero de paquetes, peso de min paquete}

    // La idea es probar todos los subset y en cada uno
        preguntarnos
    // quien es mejor para subirse de ultimo buscando
        minimizar
    // primero el numero de paquetes
    for (int subset = 1; subset < (1 << n); subset++) {
        dp[subset] = {21, 0};

        for (int iPer = 0; iPer < n; iPer++) {
            if ((subset >> iPer) & 1) {
                pll ant = dp[subset ^ (1 << iPer)];
                ll k = ant.ff;
                ll w = ant.ss;

                if (w + pesos[iPer] > capacidad) {
                    k++;
                    w = min(pesos[iPer], w);
                } else {
                    w += pesos[iPer];
                }

                dp[subset] = min(dp[subset], {k, w});
            }
        }
    }
```

```
    cout << dp[(1 << n) - 1].ff << ln;
}
```

3.3 Algoritmo de Kadane 2D

```
int main() {
    ll fil,col;cin>>fil>>col;
    vector<vl> grid(fil,vl(col,0));

// Algoritmo de Kadane/DP para suma maxima de una matriz
    2D en o(n^3)
    for(int i=0;i<fil;i++){
        for(int e=0;e<col;e++){
            ll num;cin>>num;
            if (e>0) grid[i][e]=num+grid[i][e-1];
            else grid[i][e]=num;
        }
    }

    ll maxGlobal = LONG_LONG_MIN;
    for(int l=0;l<col;l++){
        for(int r=l;r<col;r++){
            ll maxLoc=0;
            for(int row=0;row<fil;row++){
                if (l>0) maxLoc+=grid[row][r]-grid[row][l
                    -1];
                else maxLoc+=grid[row][r];
                if (maxLoc<0) maxLoc=0;
                maxGlobal= max(maxGlobal,maxLoc);
            }
        }
    }
}
```

3.4 Knuth Clasico

```
const int N = 1010;
const int INF = (int) 1e9;
int v[N], dp[N][N], sum[N], best[N][N];

int main() {
    ios::sync_with_stdio(0);
    cin.tie(0);
    int n;
    while(cin >> n) {
        if(n == 0) break;
        for(int i = 0; i < n; i++) cin >> v[i];

        for(int i = 0; i < n; i++) {
            sum[i+1] = sum[i] + v[i];
        }
```

```
        for(int i = 0; i < n; i++) best[i][i] = i;

        for(int len = 2; len <= n; ++len) {
            for(int i = 0; i+len-1 < n; ++i) {
                int j = i+len-1;
                int &ref = dp[i][j];
                ref = INF;
                for(int k = best[i][j-1]; k <= best[i+1][
                    j]; ++k) {
                    if(k < j) {
                        int cur = dp[i][k] + dp[k+1][j];
                        if(cur < ref) {
                            best[i][j] = k;
                            ref = cur;
                        }
                    }
                }
                ref += sum[j+1] - sum[i];
            }
        }

        cout << dp[0][n-1] << '\n';
    }
    return 0;
}
```


3.5 Edit Distances

```
int editDistances(string& wor1,string& wor2){
    // O(tam1*tam2)
    // minimo de letras que debemos insertar, elminar o
        reemplazar
    // de wor1 para obtener wor2
    ll tam1=wor1.size();
    ll tam2=wor2.size();
    vector<vl> dp(tam2+1,vl(tam1+1,0));
    for(int i=0;i<=tam1;i++)dp[0][i]=i;
    for(int i=0;i<=tam2;i++)dp[i][0]=i;
    dp[0][0]=0;
    for(int i=1;i<=tam2;i++){
        for(int j=1;j<=tam1;j++){
            ll op1 = min(dp[i-1][j],dp[i][j-1])+1;
            // el minimo entre eliminar o insertar
            ll op2 = dp[i-1][j-1]; // reemplazarlo
            if(wor1[j-1]!=wor2[i-1])op2++;
            // si el reemplazo tiene efecto o quedo igual
            dp[i][j]=min(op1,op2);
        }
    }

    return dp[tam2][tam1];
}
```

3.6 Divide Conquer

```
int m, n;
vector<long long> dp_before(n), dp_cur(n);

long long C(int i, int j);

// compute dp_cur[l], ... dp_cur[r] (inclusive)
void compute(int l, int r, int optl, int optr) {
    if (l > r)
        return;

    int mid = (l + r) >> 1;
    pair<long long, int> best = {LLONG_MAX, -1};

    for (int k = optl; k <= min(mid, optr); k++) {
        best = min(best, {(k ? dp_before[k - 1] : 0) + C(
            k, mid), k});
    }

    dp_cur[mid] = best.first;
    int opt = best.second;

    compute(l, mid - 1, optl, opt);
    compute(mid + 1, r, opt, optr);
}

int solve() {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        dp_before[i] = C(0, i);

    for (int i = 1; i < m; i++) {
        compute(0, n - 1, 0, n - 1);
        dp_before = dp_cur;
    }

    return dp_before[n - 1];
}
```

3.7 Knuth

```
#Condiciones
#C(b,c)<=C(a,d)
#C(a,c)+C(b,d)<=C(a,d)+C(b,c)
int solve() {
    int N;
    ... // read N and input
    int dp[N][N], opt[N][N];

    auto C = [&](int i, int j) {
        ... // Implement cost function C.
    };

    for (int i = 0; i < N; i++) {
        opt[i][i] = i;
        ... // Initialize dp[i][i] according to the
            problem
```

```
    }
    for (int i = N-2; i >= 0; i--) {
        for (int j = i+1; j < N; j++) {
            int mn = INT_MAX;
            int cost = C(i, j);
            for (int k = opt[i][j-1]; k <= min(j-1, opt[i
                +1][j]); k++) {
                if (mn >= dp[i][k] + dp[k+1][j] + cost) {
                    opt[i][j] = k;
                    mn = dp[i][k] + dp[k+1][j] + cost;
                }
            }
            dp[i][j] = mn;
        }
    }

    cout << dp[0][N-1] << endl;
}
```

4 Grafos

4.1 Puentes

```
vector<bool> visited;
vi tin, low;
int timer;

void IS_BRIDGE(int u, int v, vii &puentes){
    puentes.push_back({min(u, v), max(u, v)});
}

void dfs(vector<vi> &adj, vii &puentes, int v, int p =
    -1) {
    visited[v] = true;
    tin[v] = low[v] = timer++;
    for (int to : adj[v]) {
        if (to == p) continue;
        if (visited[to]) {
            low[v] = min(low[v], tin[to]);
        } else {
            dfs(adj, puentes, to, v);
            low[v] = min(low[v], low[to]);
            if (low[to] > tin[v])
                IS_BRIDGE(v, to, puentes);

        }
    }
}

void find_bridges(vector<vi> &adj, vii &puentes, int n) {
    timer = 0;
    visited.assign(n, false);
    tin.assign(n, -1);
    low.assign(n, -1);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i])
            dfs(adj, puentes, i);
    }
}
```

4.2 Puntos de Articulacion

```
int n;
vector<vector<int>> adj;

vector<bool> visited;
vector<int> tin, low;
int timer;

void dfs(int v, int p = -1) {
    visited[v] = true;
    tin[v] = low[v] = timer++;
    int children=0;
    for (int to : adj[v]) {
        if (to == p) continue;
        if (visited[to]) {
            low[v] = min(low[v], tin[to]);
        } else {
            dfs(to, v);
            low[v] = min(low[v], low[to]);
            if (low[to] >= tin[v] && p!=-1)
                IS_CUTPOINT(v);
            ++children;
        }
    }
    if(p == -1 && children > 1)
        IS_CUTPOINT(v);
}

void find_cutpoints() {
    timer = 0;
    visited.assign(n, false);
    tin.assign(n, -1);
    low.assign(n, -1);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i])
            dfs (i);
    }
}
```

4.3 Puntos de articulacion y puentes (dirigidos)

```
//Puntos de articulacion: son vertices que desconectan el
    grafo
//Puentes: son aristas que desconectan el grafo
```

```
//Usar para grafos dirigidos
//O(V+E)
vi dfs_num, dfs_low, dfs_parent, articulation_vertex;
int dfsNumberCounter, dfsRoot, rootChildren;
vector<vii> adj;
void articulationPointAndBridge(int u) {
    dfs_num[u] = dfsNumberCounter++;
    dfs_low[u] = dfs_num[u]; // dfs_low[u]<=dfs_num[u]
    for (auto &[v, w] : adj[u]) {
        if (dfs_num[v] == -1) { // una arista de arbol
            dfs_parent[v] = u;
            if (u == dfsRoot) ++rootChildren; // vaso
                especial, raiz
            articulationPointAndBridge(v);
            if (dfs_low[v] >= dfs_num[u]) // para puntos
                de articulacion
                articulation_vertex[u] = 1;
            if (dfs_low[v] > dfs_num[u]) // para puentes
                printf(" (%d, %d) is a bridge\n", u, v);
            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v]); //
        }
        else if (v != dfs_parent[u]) // si es ciclo no
            trivial
            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_num[v]); //
                entonces actualizar
    }
}
int main(){
    dfs_num.assign(V, -1); dfs_low.assign(V, 0);
    dfs_parent.assign(V, -1); articulation_vertex.assign(
        V, 0);
    dfsNumberCounter = 0;
    adj.resize(V);

    printf("Bridges:\n");
    for (int u = 0; u < V; ++u)
        if (dfs_num[u] == -1) {
            dfsRoot = u; rootChildren = 0;
            articulationPointAndBridge(u);
            articulation_vertex[dfsRoot] = (rootChildren
                > 1); // caso especial
        }
    printf("Articulation Points:\n");
    for (int u = 0; u < V; ++u)
        if (articulation_vertex[u])
            printf(" Vertex %d\n", u);
}
```

4.4 Algoritmo Kosajaru

```
//Encontrar las componentes fuertemente conexas en un
    grafo dirigido
//Componente fuertemente conexa: es un grupo de nodos en
    el que hay
//un camino dirigido desde cualquier nodo hasta cualquier
    otro nodo dentro del grupo.
void Kosaraju(int u, int pass) {
    dfs_num[u] = 1;
    vii &neighbor = (pass == 1) ? AL[u] : AL_T[u];
    for (auto &[v, w] : neighbor)
        if (dfs_num[v] == UNVISITED)
            Kosaraju(v, pass);
    S.push_back(u);
}

int main(){
    S.clear();
    dfs_num.assign(N, UNVISITED);
    for (int u = 0; u < N; ++u)
        if (dfs_num[u] == UNVISITED)
            Kosaraju(u, 1);
    numSCC = 0;
    dfs_num.assign(N, UNVISITED);
    for (int i = N-1; i >= 0; --i)
        if (dfs_num[S[i]] == UNVISITED)
            ++numSCC, Kosaraju(S[i], 2);
    printf("There are %d SCCs\n", numSCC);
}
```

4.5 Tarjan

```
vi low, num, comp, g[nax];
int scc, timer;
stack<int> st;
void tjn(int u) {
  low[u] = num[u] = timer++; st.push(u); int v;
  for(int v: g[u]) {
    if(num[v]==-1) tjn(v);
    if(comp[v]==-1) low[u] = min(low[u], low[v]);
  }
  if(low[u]==num[u]) {
    do{ v = st.top(); st.pop(); comp[v]=scc;
    }while(u != v);
    ++scc;
  }
}
void callt(int n) {
  timer = scc= 0;
  num = low = comp = vector<int>(n,-1);
  for(int i = 0; i<n; i++) if(num[i]==-1) tjn(i);
}
```

4.6 Dijkstra

```
//Camino mas cortos
```

```
//NO USAR CON PESOS NEGATIVOS, usar Bellman Ford o SPFA(
    mas rapido)
// O ((V+E)*log V)
vi dijkstra(vector<vii> &adj, int s, int V){
    vi dist(V+1, INT_MAX); dist[s] = 0;
    priority_queue<ii, vii, greater<ii> > pq; pq.push(ii
        (0, s));
    while(!pq.empty()){
        ii front = pq.top(); pq.pop();
        int d = front.first, u = front.second;
        if (d > dist[u]) continue;

        for (int j = 0; j < (int)adj[u].size(); j++){
            ii v = adj[u][j];
            if (dist[u] + v.second < dist[v.first]){
                dist[v.first] = dist[u] + v.second;
                pq.push(ii(dist[v.first], v.first));
            }
        }
    }
    return dist;
}
```

4.7 Bellman Ford

```
vi bellman_ford(vector<vii> &adj, int s, int n){
    vi dist(n, INF); dist[s] = 0;
    for (int i = 0; i<n-1; i++){
        bool modified = false;
        for (int u = 0; u<n; u++)
            if (dist[u] != INF)
                for (auto &[v, w] : adj[u]){
                    if (dist[v] <= dist[u] + w) continue;
                    dist[v] = dist[u] + w;
                    modified = true;
                }
        if (!modified) break;
    }

    bool negativeCicle = false;
    for (int u = 0; u<n; u++)
        if (dist[u] != INF)
            for (auto &[v, w] : adj[u]){
                if (dist[v] > dist[u] + w) negativeCicle
                    = true;
            }

    return dist;
}
```

4.8 Floyd Warshall

```
//Camino minimo entre todos los pares de vertices
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    int n; cin >> n;
    vector<vi> adjMat(n+1, vi(n+1));
    //Condicion previa: adjMat[i][j] contiene peso de la
        arista (i, j)
    //o INF si no existe esa arista
    for (int k = 0; k < n; ++k) {
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            for (int j = 0; j < n; ++j) {
                if (adjMat[i][k] < INF && adjMat[k][j] <
                    INF)
                    adjMat[i][j] = min(adjMat[i][j],
                        adjMat[i][k] + adjMat[k][j]);
            }
        }
    }
}
```

4.9 MST Kruskal

```
//Arbol de minima expansion
//O(E*log V)
int main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    vector<pair<int, ii>> adj; //Los pares son: {peso, {
        vertice, vecino}}

    for (int i = 0; i<m; i++){
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        adj.push_back(make_pair(w, ii(x, y)));
    }

    sort(adj.begin(), adj.end());

    int mst_costo = 0, tomados = 0;
    dsu UF(n);
    for (int i = 0; i<m && tomados < n-1; i++){
        pair<int, ii> front = adj[i];
        if (!UF.is_same_set(front.second.first, front.
            second.second)){
            tomados++;
            mst_costo += front.first;
            UF.unionSet(front.second.first, front.second.
                second);
        }
    }
    cout << mst_costo;
}
```

4.10 MST Prim

```
vector<vii> adj;
vi tomado;
priority_queue<ii> pq;
void process(int u){
    tomado[u] = 1;
    for (auto &[v, w] : adj[u]){
        if (!tomado[v]) pq.emplace(-w, -v);
    }
}

int prim(int v, int n){
    tomado.assign(n, 0);
    process(0);
    int mst_costo = 0, tomados = 0;
    while (!pq.empty()){
        auto [w, u] = pq.top(); pq.pop();
        w = -w; u = -u;
        if (tomado[u]) continue;
        mst_costo += w;
        process(u);
        tomados++;
        if (tomados == n-1) break;
    }
    return mst_costo;
}
```

4.11 Shortest Path Faster Algorithm

```
//Algoritmo mas rapido de ruta minima
//O(V*E) peor caso, O(E) en promedio.
bool spfa(vector<vii> &adj, vector<int> &d, int s, int n)
    {
    d.assign(n, INF);
    vector<int> cnt(n, 0);
    vector<bool> inqueue(n, false);
    queue<int> q;

    d[s] = 0;
    q.push(s);
    inqueue[s] = true;
    while (!q.empty()) {
        int v = q.front();
        q.pop();
        inqueue[v] = false;

        for (auto edge : adj[v]) {
            int to = edge.first;
            int len = edge.second;

            if (d[v] + len < d[to]) {
                d[to] = d[v] + len;
                if (!inqueue[to]) {
                    q.push(to);
                    inqueue[to] = true;
                    cnt[to]++;
                    if (cnt[to] > n)
                        return false;//ciclo negativo
                }
            }
        }
    }
    return true;
}
```

4.12 Camino mas corto de longitud fija

```
/*
Modificar operacion * de matrix de esta forma:
En la exponenciacion binaria inicializar matrix ans = b
*/
matrix operator * (const matrix &b){
    matrix ans(this->r, b.c, vector<vl>(this->r, vl(b.c,
        INFL)));

    for (int i = 0; i<this->r; i++) {
        for (int k = 0; k<b.r; k++){
            for (int j = 0; j<b.c; j++){
                ans.m[i][j] = min(ans.m[i][j], m[i][k] +
                    b.m[k][j]);
            }
        }
    }
    return ans;
}

int main() {

    int n, m, k; cin >> n >> m >> k;

    vector<vl> adj(n, vl(n, INFL));

    for (int i = 0; i<m; i++){
        ll a, b, c; cin >> a >> b >> c; a--; b--;
        adj[a][b] = min(adj[a][b], c);
    }

    matrix graph(n, n, adj);
    graph = pow(graph, k-1);

    cout << (graph.m[0][n-1]==INFL ? -1 : graph.m[0][n
        -1]) << "\n";

    return 0;
}
```

5 Flujos

5.1 Edmonds-Karp

```cpp
//O(V * E^2)
ll bfs(vector<vi> &adj, vector<vl> &capacity, int s, int t, vi& parent) {
    fill(parent.begin(), parent.end(), -1);
    parent[s] = -2;
    queue<pll> q;
    q.push({s, INFL});

    while (!q.empty()) {
        int cur = q.front().first;
        ll flow = q.front().second;
        q.pop();

        for (int next : adj[cur]) {
            if (parent[next] == -1LL && capacity[cur][next]) {
                parent[next] = cur;
                ll new_flow = min(flow, capacity[cur][next]);
                if (next == t)
                    return new_flow;
                q.push({next, new_flow});
            }
        }
    }

    return 0;
}

ll maxflow(vector<vi> &adj, vector<vl> &capacity, int s, int t, int n) {
    ll flow = 0;
    vi parent(n);
    ll new_flow;

    while ((new_flow = bfs(adj, capacity, s, t, parent))) {
        flow += new_flow;
        int cur = t;
        while (cur != s) {
            int prev = parent[cur];
            capacity[prev][cur] -= new_flow;
            capacity[cur][prev] += new_flow;
            cur = prev;
        }
    }

    return flow;
}
```

5.2 Dinic

```cpp
//O(V^2 * E)
//En redes unitarias: O(E * sqrt(V))
struct FlowEdge {
    int v, u;
    ll cap, flow = 0;
    FlowEdge(int v, int u, ll cap) : v(v), u(u), cap(cap) {}
};

struct Dinic {
    const ll flow_inf = INFL;
    vector<FlowEdge> edges;
    vector<vi> adj;
    int n, m = 0;
    int s, t;
    vi level, ptr;
    queue<int> q;

    Dinic(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) {
        adj.resize(n);
        level.resize(n);
        ptr.resize(n);
    }

    void add_edge(int v, int u, ll cap) {
        edges.emplace_back(v, u, cap);
        edges.emplace_back(u, v, 0);
        adj[v].push_back(m);
        adj[u].push_back(m + 1);
        m += 2;
    }

    bool bfs() {
        while (!q.empty()) {
            int v = q.front();
            q.pop();
            for (int id : adj[v]) {
                if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1)
                    continue;
                if (level[edges[id].u] != -1)
                    continue;
                level[edges[id].u] = level[v] + 1;
                q.push(edges[id].u);
            }
        }
        return level[t] != -1;
    }

    ll dfs(int v, ll pushed) {
        if (pushed == 0)
            return 0;
        if (v == t)
            return pushed;
        for (int& cid = ptr[v]; cid < (int)adj[v].size(); cid++) {
            int id = adj[v][cid];
```

```
            int u = edges[id].u;
            if (level[v] + 1 != level[u] || edges[id].cap
                - edges[id].flow < 1)
                continue;
            ll tr = dfs(u, min(pushed, edges[id].cap -
                edges[id].flow));
            if (tr == 0)
                continue;
            edges[id].flow += tr;
            edges[id ^ 1].flow -= tr;
            return tr;
        }
        return 0;
    }

    ll flow() {
        ll f = 0;
        while (true) {
            fill(all(level), -1);
            level[s] = 0;
            q.push(s);
            if (!bfs())
                break;
            fill(all(ptr), 0);
            while (ll pushed = dfs(s, flow_inf)) {
                f += pushed;
            }
        }
        return f;
    }
};
```

5.3 Maximum Bipartite Matching

```
int main() {
    //n: numero de grupo 1, m: numero de grupo 2, k:
       posibles conexiones
    int n, m, k; cin >> n >> m >> k;

    Dinic graph(n+m+2, 0, n+m+1);

    //nodo inicial ficticio "0" que se dirige a todos los
        del grupo 1
    for (int i = 1; i<=n; i++) graph.add_edge(0, i, 1LL);

    //nodo final ficticio "n+m+1" al que se dirigen todos
        los del grupo 2
    for (int i = 1; i<=m; i++) graph.add_edge(n+i, n+m+1,
        1LL);

    //anadiendo las posibles conexiones al grafo
    for (int i = 0; i<k; i++){
        int a, b; cin >> a >> b;
        graph.add_edge(a, n+b, 1LL);
    }

    //numero de emparejamientos realizados
    cout << graph.flow() << ln;

    //emparejamientos realizados
    for (FlowEdge edge : graph.edges){
        if (edge.v != 0 && edge.u != n+m+1 && edge.flow >
            0){
            cout << edge.v << " " << edge.u - n << ln;
        }
    }

    return 0;
}
```

5.4 Minimum cost flow

```
struct Edge{
    ll from, to, capacity, cost;
    Edge(ll from, ll to, ll capacity, ll cost) : from(
        from), to(to), capacity(capacity), cost(cost) {}
};

vector<vl> adj, cost, capacity;

void shortest_paths(int n, int v0, vl &d, vector<ll> &p)
   {
    d.assign(n, INFL);
    d[v0] = 0;
    vector<bool> inq(n, false);
    queue<ll> q;
    q.push(v0);
    p.assign(n, -1);

    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        inq[u] = false;
        for (int v : adj[u]) {
            if (capacity[u][v] > 0 && d[v] > d[u] + cost[
                u][v]) {
                d[v] = d[u] + cost[u][v];
                p[v] = u;
                if (!inq[v]) {
                    inq[v] = true;
                    q.push(v);
                }
            }
        }
    }
}

ll min_cost_flow(int N, vector<Edge> &edges, ll K, int s,
    int t) {
    adj.assign(N, vl());
    cost.assign(N, vl(N, 0));
```

```
    capacity.assign(N, vl(N, 0));
    for (Edge e : edges) {
        adj[e.from].push_back(e.to);
        adj[e.to].push_back(e.from);
        cost[e.from][e.to] = e.cost;
        cost[e.to][e.from] = -e.cost;
        capacity[e.from][e.to] = e.capacity;
    }

    ll flow = 0;
    ll cost = 0;
    vl d, p;
    while (flow < K) {
        shortest_paths(N, s, d, p);
        if (d[t] == INFL)
            break;

        // find max flow on that path
        ll f = K - flow;
        int cur = t;
        while (cur != s) {
            f = min(f, capacity[p[cur]][cur]);
            cur = p[cur];
        }

        // apply flow
        flow += f;
        cost += f * d[t];
        cur = t;
        while (cur != s) {
            capacity[p[cur]][cur] -= f;
            capacity[cur][p[cur]] += f;
            cur = p[cur];
        }
    }
    if (flow < K) return -1;
    else return cost;
}
```

6 Matematicas

6.1 Descomposicion en primos (y mas cosas)

```
ll _sieve_size;
bitset<10000010> bs;
vl p;
void sieve(ll upperbound) {
    _sieve_size = upperbound+1;
    bs.set();
    bs[0] = bs[1] = 0;
    for (ll i = 2; i < _sieve_size; ++i) if (bs[i]) {
        for (ll j = i*i; j < _sieve_size; j += i) bs[j] =
             0;
        p.push_back(i);
    }
}
// O( sqrt(N) / log(sqrt(N)) )
vl primeFactors(ll N) {
    vl factors;
    for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
        N); ++i)
         while (N%p[i] == 0) {        //Hallado un primo
             para N
             N /= p[i];               //Eliminarlo de N
             factors.push_back(p[i]);
         }
    if (N != 1) factors.push_back(N);//El N restante es
        primo
    return factors;
}
int main(){
    sieve(10000000);
}

//Variantes del algoritmo

//Contar el numero de divisores de N
int numDiv(ll N) {
    int ans = 1;     //Empezar con ans = 1
    for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
        N); ++i) {
         int power = 0;  //Contar la potencia
         while (N%p[i] == 0) { N /= p[i]; ++power; }
         ans *= power+1; //Seguir la formula
    }
    return (N != 1) ? 2*ans : ans;  //Ultimo factor = N^1
}

//Suma de los divisores de N
//N = a^i * b^i * ... * c^k => N = (a^(i+1) - 1) / (a-1)
   + ...
ll sumDiv(ll N) {
    ll ans = 1;          // empezar con ans = 1
    for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
        N); ++i) {
         ll multiplier = p[i], total = 1;
         while (N%p[i] == 0) {
             N /= p[i];
             total += multiplier;
             multiplier *= p[i];
         }                                    // total para
         ans *= total;                        // este
             factor primo
    }
    if (N != 1) ans *= (N+1);   // N^2-1/N-1 = N+1
    return ans;
}
```

6.2 Criba Modificada

```
//Criba modificada
/*
Si hay que determinar el numero de factores primos para
    muchos (o un rango) de enteros.
La mejor solucion es el algoritmo de criba modificada O(N
     log log N)
*/
int numDiffPFarr[MAX_N+10] = {0}; // e.g., MAX_N = 10^7
for (int i = 2; i <= MAX_N; ++i)
    if (numDiffPFarr[i] == 0) // i is a prime number
        for (int j = i; j <= MAX_N; j += i)
            ++numDiffPFarr[j]; // j is a multiple of i

//Similar para EulerPhi
int EulerPhi[MAX_N+10];
for (int i = 1; i <= MAX_N; ++i) EulerPhi[i] = i;
for (int i = 2; i <= MAX_N; ++i)
    if (EulerPhi[i] == i) // i is a prime number
        for (int j = i; j <= MAX_N; j += i)
            EulerPhi[j] = (EulerPhi[j]/i) * (i-1);
```

6.3 Funcion Totient de Euler

```
//EulerPhi(N): contar el numero de enteros positivos < N
    que son primos relativos a N.
//El vector p es el que genera la criba de eratostenes
//Phi(N) = N * productoria(1 - (1/pi))
ll EulerPhi(ll N) {
    ll ans = N; // Empezar con ans = N
    for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
        N); ++i) {
        if (N%p[i] == 0) ans -= ans/p[i]; //contar
            factores
        while (N%p[i] == 0) N /= p[i];    //primos unicos
    }
    if (N != 1) ans -= ans/N; // ultimo factor
    return ans;
}
```

6.4 Exponenciacion binaria

```
ll binpow(ll b, ll n, ll m) {
    b %= m;
    ll res = 1;
    while (n > 0) {
        if (n & 1)
            res = res * b % m;
        b = b * b % m;
        n >>= 1;
    }
    return res % m;
}
```

6.5 Exponenciacion matricial

```
struct matrix {
    int r, c; vector<vl> m;
    matrix(int r, int c, const vector<vl> &m) : r(r), c(c
        ), m(m){}

    matrix operator * (const matrix &b){
        matrix ans(this->r, b.c, vector<vl>(this->r, vl(b
            .c, 0)));

        for (int i = 0; i<this->r; i++) {
            for (int k = 0; k<b.r; k++){
                if (m[i][k] == 0) continue;
                for (int j = 0; j<b.c; j++){
                    ans.m[i][j] += mod(m[i][k], MOD) *
                        mod(b.m[k][j], MOD);
                    ans.m[i][j] = mod(ans.m[i][j], MOD);
                }
            }
        }
        return ans;
    }
};

matrix pow(matrix &b, ll p){
    matrix ans(b.r, b.c, vector<vl>(b.r, vl(b.c, 0)));
    for (int i = 0; i<b.r; i++) ans.m[i][i] = 1;
    while (p){
        if (p&1){
            ans = ans*b;
        }
        b = b*b;
        p >>= 1;
    }
    return ans;
}
```

6.6 Fibonacci Matriz

```
/*
[1 1] p    [fib(p+1)  fib(p)]
[1 0]   =  [fib(p)  fib(p-1)]
*/
vector<vl> matriz = {{1, 1}, {1, 0}};
matrix m(2, 2, matriz);

ll n; cin >> n;

cout << pow(m, n).m[0][1] << "\n";
```

6.7 GCD y LCM

```
//O(log10 n) n == max(a, b)
int gcd(int a, int b) { return b == 0 ? a : gcd(b, a%b);
    }
int lcm(int a, int b) { return a / gcd(a, b) * b; }
//gcd(a, b, c) = gcd(a, gcd(b, c))
```

6.8 Algoritmo Euclideo Extendido

```
// O(log(min(a, b)))
ll extEuclid(ll a, ll b, ll &x, ll &y){
    ll xx = y = 0;
    ll yy = x = 1;
    while (b){
        ll q = a/b;
        ll t = b; b = a%b; a = t;
        t = xx; xx = x-q*xx; x = t;
        t = yy; yy = y-q*yy; y = t;
    }
    return a;   //Devuelve gcd(a, b)
}
```

6.9 Inverso modular

```
ll mod(ll a, ll m){
    return ((a%m) + m) % m;
}

ll modInverse(ll b, ll m){
    ll x, y;
    ll d = extEuclid(b, m, x, y);  //obtiene b*x + m*y ==
        d
    if (d != 1) return -1;          //indica error
    // b*x + m*y == 1, ahora aplicamos (mod m) para
       obtener b*x == 1 (mod m)
    return mod(x, m);
}

// Otra forma
// O(log MOD)
ll inv (ll a){
    return binpow(a, MOD-2, MOD);
}
```

6.10 Coeficientes binomiales

```
const int MAX_N = 100010;   // MOD > MAX_N
// O (log MOD)
ll inv (ll a){
    return binpow(a, MOD-2, MOD);
}

ll fact[MAX_N];
// O(log MOD)
ll C(int n, int k){
    if (n < k) return 0;
    return (((fact[n] * inv(fact[k])) % MOD) * inv(fact[n
        -k])) % MOD;
}

int main() {
    fact[0] = 1;
    for (int i = 1; i<MAX_N; i++){
        fact[i] = (fact[i-1]*i) % MOD;
    }
    cout << C(100000, 50000) << "\n";

    return 0;
}
```

6.11 Logaritmo Discreto

```
// Returns minimum x for which a ^ x % m = b % m.
int solve(int a, int b, int m) {
    a %= m, b %= m;
    int k = 1, add = 0, g;
    while ((g = gcd(a, m)) > 1) {
        if (b == k)
            return add;
        if (b % g)
            return -1;
        b /= g, m /= g, ++add;
        k = (k * 1ll * a / g) % m;
    }

    int n = sqrt(m) + 1;
    int an = 1;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        an = (an * 1ll * a) % m;

    unordered_map<int, int> vals;
    for (int q = 0, cur = b; q <= n; ++q) {
        vals[cur] = q;
        cur = (cur * 1ll * a) % m;
    }

    for (int p = 1, cur = k; p <= n; ++p) {
        cur = (cur * 1ll * an) % m;
        if (vals.count(cur)) {
            int ans = n * p - vals[cur] + add;
            return ans;
        }
    }
    return -1;
```

```
}
```

6.12 Freivalds algorithm

```
mt19937 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch
    ().count());
// check if two n*n matrix a*b=c within complexity (
    iteration*n^2)
// probability of error 2^(-iteration)
int Freivalds(matrix &a, matrix &b, matrix &c) {
  int n = a.r, iteration = 20;
  matrix zero(n, 1), r(n, 1);
  while (iteration--) {
        for(int i = 0; i < n; i++) r.m[i][0] = rnd() % 2;
        matrix ans = (a * (b * r)) - (c * r);
        if(ans.m != zero.m) return 0;
  }
  return 1;
}
```

7 Metodos numericos

7.1 Ternary Search

```
double f(double x){
  return x*x;
}

// O(log((r-l)/eps))
double ternary_search(double l, double r) {
  double eps=1e-9; // precision
  while(r-l>eps) {
    double m1=l+(r-l)/3;
    double m2=r-(r-l)/3;
    if (f(m1)<f(m2))l=m1;
    else r=m2;
  }return max(f(l),f(r)); // El maximo de la funcion en
      el intervalo [l,r]
}
```

7.2 Regla de Simpson

```
double f(double x){
  return x*x;
}

const int N = 1000 * 1000; // number of steps (already
    multiplied by 2)
double simpson_integration(double a, double b){
  double h=(b-a)/N;
  double s=f(a)+f(b);
  for (int i=1;i<=N-1;i++){
    double x=a+h*i;
    s+=f(x)*((i & 1)?4:2);
  }
  s*=h/3;
  return s;
}
```

8 Strings

8.1 Funcion Z

```
// Funcion z O(s)
vi z_function(string s) {
  int n=len(s),l=0,r=0;
  vi z(n);
  for(int i=1;i<n;i++){
    if(i<r)z[i]=min(r - i, z[i - l]);
    while(i+z[i]<n && s[z[i]]==s[i+z[i]])z[i]++;
    if(i+z[i]>r){
      l=i;
      r=i+z[i];
    }
  }
  return z;
}
```

8.2 Funcion Phi

```
// Funcion phi O(s)
vi prefix_function(string s){
  int n=len(s);
  vi pi(n);
  for(int i=1;i<n;i++) {
    int j=pi[i-1];
    while(j>0 && s[i]!=s[j])j=pi[j-1];
    if (s[i]==s[j])j++;
    pi[i]=j;
  }
  return pi;
}

int main() {
vi pi=prefix_function(string); // Obtener phi
//Lo siguiente es para saber cuantas veces aparece cada
    prefijo O(n)
int n=len(s);
vi ans(n + 1);
for(int i=0;i<n;i++)ans[pi[i]]++;
```

```
for(int i=n-1;i>0;i--)ans[pi[i-1]]+=ans[i];
for(int i=0;i<=n;i++)ans[i]++;
for(int i=0;i<=n;i++)cout<<"El prefijo de tamano "<<i<<"
  aparece "<<ans[i]<<" veces\n";
return 0;
}
```

8.3 Kmp

```
// Implementar primero prefix_function
// O(t+p)
int matches=0;
void kmp(string &t, string &p){
  vi phi=prefix_function(p);
  for(int i=0,j=0;i<sz(t);i++){
    while(j>0 && t[i]!=p[j])j=phi[j-1];
    if(t[i]==p[j])j++;
    if(j==sz(p)){
      cout<<i-j+1<<" "; // Posicion de la ocurrencia
      matches++;
      j=phi[j-1];
    }
  }
}

// Devuelve el arreglo de matches sin implementar
  prefix_function
const int MAX=2e5+9;
int pi[MAX];
// Pasar el arreglo int d con tamano len(t)
void kmp_vi(string& p, string& t, int *d){
        pi[0]=0;int m=len(p),n=len(t);
        for(int i=1,k=0;i<m;i++){
                while(k>0 && p[k]!=p[i])k=pi[k-1];
                if(p[i]==p[k])k++;
                pi[i]=k;
        }
        for(int i=0,k=0;i<n;i++){
                while(k>0 && p[k]!=t[i])k=pi[k-1];
                if(t[i]==p[k])k++;
                d[i]=k;
                if(k==m)k=pi[k-1];
        }
}
```

8.4 Aho-Corasick

```
// Usar el aho-corasick para buscar multiples patrones en
   un texto
const static int N=1e5; // Maximo de strings
const static int alpha = 26; // Tamano del alfabeto
int trie[N][alpha], fail[N], nodes, end_word[N], cnt_word
   [N], fail_out[N];
inline int conv(char ch) { // Funcion para indexar el
   alfabeto
  return ((ch >= 'a' && ch <= 'z') ? ch-'a' : ch-'A'+26);
}

// Para cada string, se agrega al trie O(s), peor caso O(
   s*n) n=numero de strings
void add(string &s, int i) {
  int act=0;
  for(char c:s) {
    int x=conv(c);
    if(!trie[act][x]) trie[act][x]=++nodes;
    act=trie[act][x];
  }
  ++cnt_word[act];
  end_word[act]=i;
}

// Se crea el trie con bfs O(N*log(ALPHA))
void build(){
  queue<int> q;q.push(0);
  while(sz(q)){
    int u=q.front();q.pop();
    for(int i=0;i<alpha;++i) {
      int v=trie[u][i];
      if(!v)trie[u][i]=trie[fail[u]][i];
      else q.push(v);
      if(!u || !v)continue;
      fail[v]=trie[ fail[u] ][i];
      fail_out[v]=end_word[fail[v]]?fail[v]:fail_out[fail
         [v]];
      cnt_word[v]+=cnt_word[fail[v]];
    }
  }
}

// O(n+m) donde n=tamano del texto y m=cantidad de
   strings
vs strings;
void searchPatterns(string &t) {
  int act=0, n=len(t);
  for(int i=0;i<n;++i) {
    int x=conv(t[i]);
    act=trie[act][x];
    int temp=act;
    while(temp){
      if(end_word[temp])cout<<"En la posicion "<<i<<" se
         encontro la palabra "<<strings[end_word[temp
         ]-1]<<"\n";
      temp=fail_out[temp];
    }
  }
}
```

```
// Por si solo se necesita saber si esta O(s)
void solve(int index, string s){
  int act=0;
  bool pass=false;
  for(auto c:s){
    int x=c-'a';
    while(act && !trie[act][x])act=fail[act];
    act=trie[act][x];
    pass|=end_word[act]<index;
  }
  cout<<(pass?"YES":"NO")<<"\n";
}

int main() {
add(string, i+1); //Anadir todos los patrones
build(); // Construir el trie
searchPatterns(texto); // Buscar todos los patrones en el
    texto
return 0;
}
```

8.5 Hashing

```
// se recomienda usar m = pow(2,64) porque
// m=1e9+9 no es suficiente para la multiplicacion de dos
    64-bit integers
// Porque la probabilidad de colisiones es 1/m = 10^-9
// y si son 10^6 strings que hay que comparar con este
    entonces 1/m = 10^-3
// y comparamos unos con otros entonces 1/m = 1, si o si
    va a haber algun fallo
// Una solucion sencilla es hacer dos hash (hash1, hash2)
// con p diferentes para tener una probabilidad de
    1/10^18
// y si comparamos unos con otros entonces 1/m = 10^-6

// Dos strings con mismo hash no necesariamente son
    iguales
// Pero si tienen distinto hash, entonces son distintos
ll compute_hash(string const& s) { // O(n)
  const int p = 31; // 51 si se usan mayusculas tambien
  // Importante que m sea un numero primo
  const int m = 1e9 + 9;
  ll hash_value=0;
  ll p_pow=1;
  for (char c:s) {
    hash_value=(hash_value+(c-'a'+1)*p_pow)%m;
    p_pow=(p_pow*p)%m;
  }
  return hash_value;
}

// O(n(m+logn)) n=cantidad de strings, m=tamano del
    string mas largo
vector<vi> group_identical_strings(vs const& s) {
  int n=s.size();
  vector<pair<ll, int>> hashes(n);
  for(int i=0;i<n;i++)
    hashes[i]={compute_hash(s[i]),i};
  sort(all(hashes));
  vector<vi> groups;
  for(int i=0;i<n;i++) {
    // Si es el primero o si el hash es distinto al
        anterior entonces es un nuevo grupo
    if(i==0 || hashes[i].first!=hashes[i-1].first)groups.
        emplace_back();
    groups.back().push_back(hashes[i].second);
  }
  return groups;
}
```

8.6 Manacher

```
//  a b c b a a b
//  1 1 5 1 1 1 1   f = 0 impar
//  0 0 0 0 0 4 0   f = 1 par (raiz, izq, der)
void manacher(string &s, int f, vi &d){ // O(s)
  int l=0, r=-1, n=len(s);
  d.assign(n,0);
  for(int i=0;i<n;++i){
    int k=(i>r?(1-f):min(d[l+r-i+ f], r-i+f))+f;
    while(i+k-f<n && i-k>=0 && s[i+k-f]==s[i-k])++k;
    d[i]=k-f;--k;
    if(i+k-f>r)l=i-k,r=i+k-f;
  }
  for(int i=0;i<n;++i)d[i]=(d[i]-1+f)*2+1-f;
}

int main() {
string s;cin>>s;
vi manacher_odd, manacher_even;
manacher(s, 0, manacher_odd);
manacher(s, 1, manacher_even);
for(int i=0;i<len(s);++i){
  if(manacher_odd[i]==0 || manacher_odd[i]==1)continue;
  cout<<s.substr(i-manacher_odd[i]/2, manacher_odd[i])<<"
      ";
}
cout<<"\n";
for(int i=0;i<len(s);++i){
  if(manacher_even[i]==0)continue;
  cout<<s.substr(i-manacher_even[i]/2, manacher_even[i])
      <<" ";
}
cout<<"\n";
}
```

8.7 Minimal-Rotation

```
// Encuentra la rotacion lexicograficamente menor de un
   string O(n)
int minimal_rotation(string& t) {
  int i=0,j=1,k=0,n=len(t),x,y;
  while(i<n && j<n && k<n) {
    x=i+k;y=j+k;
    if(x>=n)x-=n;
    if(y>=n)y-=n;
    if(t[x]==t[y])++k;
    else if(t[x]>t[y]){
      i=j+1>i+k+1?j+1:i+k+1;
      swap(i,j);
      k=0;
    }else{
      j=i+1>j+k+1?i+1:j+k+1;
      k=0;
    }
  }
  return i;
}

// Son lo mismo
string min_cyclic_string(string s) {
  s+=s;
  int n=len(s),i=0,ans=0;
  while(i<n/2){
    ans=i;
    int j=i+1,k=i;
    while(j<n && s[k]<=s[j]){
      if(s[k]<s[j])k=i;
      else k++;
      j++;
    }
    while(i<=k)
    i+=j-k;
  }
  return s.substr(ans, n/2);
}
```

8.8 Rabin-Karp

```
// O(s+t)
// Dado un patron s y un texto t, devuelve un vector con
   las posiciones de las ocurrencias de s en t
vi rabin_karp(string const& s, string const& t) {
  // Ojo con p y m
  const int p=31;
  const int m=1e9+9;
  int S=s.size(),T=t.size();
  vl p_pow(max(S, T));
  p_pow[0]=1;
  // Precalculo de potencias de p
  for(int i=1;i<sz(p_pow);i++)p_pow[i]=(p_pow[i-1]*p)%m;
  vl h(T+1,0);
  // Precalculo de hashes de prefijos de t
  for(int i=0;i<T;i++)h[i+1]=(h[i]+(t[i]-'a'+1)*p_pow[i])
     %m;
  ll h_s=0;
  // Hash de s
  for(int i=0;i<S;i++)h_s=(h_s+(s[i]-'a'+1)*p_pow[i])%m;
  vi occurrences;
  for(int i=0;i+S-1<T;i++) {
    ll cur_h=(h[i+S]+m-h[i])%m;
    if(cur_h==h_s*p_pow[i]%m)occurrences.push_back(i);
  }
  return occurrences;
}
```

8.9 Kmp-Automata

```
const int N = 1e5; // Tamano del automata
const int ALPHA = 255; // Tamano del alfabeto ASCII
int automata[N][ALPHA]; // Tabla de transicion del
   automata

// O(s*ALPHA)
void kmp_automata(string& s){
  automata[0][s[0]] = 1;
  for(int i = 1, j = 0; i <= len(s); ++i){
    // Copiar la fila anterior
    for(int k = 0; k < ALPHA; ++k)automata[i][k] =
       automata[j][k];
    // Actualizar la entrada correspondiente al caracter
       actual
    if(i<len(s)){
      automata[i][s[i]]=i+1;
      j=automata[j][s[i]];
    }
  }
}
```

8.10 Suffix Array Forma 1

```
// O(nlogn)
vi sort_cyclic_shifts(string const& s) {
  int n=len(s);
  const int alphabet=256;
  vi p(n),c(n),cnt(max(alphabet,n),0);
  for(int i=0;i<n;i++)cnt[s[i]]++;
  for(int i=1;i<alphabet;i++)cnt[i]+=cnt[i-1];
  for(int i=0;i<n;i++)p[--cnt[s[i]]]=i;
  c[p[0]]=0;
  int classes=1;
```

```
    for(int i=1;i<n;i++) {
      if(s[p[i]]!=s[p[i-1]])classes++;
      c[p[i]]=classes-1;
    }
    vi pn(n),cn(n);
    for(int h=0;(1<<h)<n;++h) {
      for(int i=0;i<n;i++) {
        pn[i]=p[i]-(1<<h);
        if(pn[i]<0)pn[i]+=n;
      }
      fill(cnt.begin(),cnt.begin()+classes,0);
      for(int i=0;i<n;i++)cnt[c[pn[i]]]++;
      for(int i=1;i<classes;i++)cnt[i]+=cnt[i-1];
      for(int i=n-1;i>=0;i--)p[--cnt[c[pn[i]]]]=pn[i];
      cn[p[0]]=0;
      classes=1;
      for(int i = 1; i < n; i++) {
        ii cur={c[p[i]],c[(p[i]+(1<<h))%n]};
        ii prev={c[p[i-1]],c[(p[i-1]+(1<<h))%n]};
        if(cur!=prev)++classes;
        cn[p[i]]=classes-1;
      }
      c.swap(cn);
    }
    return p;
  }

  // O(nlogn)
  vi suffix_array(string s) {
    s+="$";
    vi sorted_shifts=sort_cyclic_shifts(s);
    sorted_shifts.erase(sorted_shifts.begin());
    return sorted_shifts;
  }

  // O(n)
  // Longest common prefix
  vi lcp_construction(string const& s, vi const& p) {
    int n=len(s);
    vi rank(n,0);
    for(int i=0;i<n;i++)rank[p[i]]=i;
    int k=0;
    vi lcp(n-1,0);
    for(int i=0;i<n;i++){
      if(rank[i]==n-1) {
        k=0;continue;
      }
      int j=p[rank[i]+1];
      while(i+k<n && j+k<n && s[i+k]==s[j+k])k++;
      lcp[rank[i]] = k;
      if(k)k--;
    }
    return lcp;
  }

  int main() {
    string s;cin>>s;int n=len(s);
    vi sa=suffix_array(s);
    cout<<"Desde el index, el suffix array\n";
    for(int i=0;i<n;i++)cout<<sa[i]<<" ";
    cout<<"\nVa comparando de 2 en 2 y muestra el lcp:\n";
    vi lcp=lcp_construction(s,sa);
    for(int i=0;i<n-1;i++)cout<<lcp[i]<<" ";
  }
```

8.11 Suffix Array Forma 2

```
  // Construccion O(nlogn)
  // Usar cuando queremos ver patron por patron, es mejor
     que el aho-corasick
  struct SuffixArray{
    char MIN_CHAR='$';
    int ALPHA=256;
    int n;
    string s;
    vi pos, rnk, lcp;
    SuffixArray(const string &_s):n(len(_s) + 1), s(_s),
       pos(n), rnk(n), lcp(n-1){
      s+=MIN_CHAR;
      buildSA();
      buildLCP();
    }

    void buildSA(){
      vi cnt(max(ALPHA, n));
      for(int i=0;i<n;i++)cnt[s[i]]++;
      for(int i=1;i<ALPHA;i++)cnt[i]+=cnt[i-1];
      for(int i=n-1;i>=0;i--)pos[--cnt[s[i]]]=i;
      for(int i=1;i<n;i++)rnk[pos[i]]=rnk[pos[i-1]]+(s[pos[
         i]]!=s[pos[i-1]]);
      for(int k=0;(1<<k)<n;k++) {
        vi npos(n),nrnk(n),ncnt(n);
        for(int i=0;i<n;i++)pos[i]=(pos[i]-(1<<k)+n)%n;
        for(int i=0; i < n; i++)ncnt[rnk[i]]++;
        for(int i=1; i < n; i++)ncnt[i]+=ncnt[i-1];
        for(int i=n-1;i>=0;i--)npos[--ncnt[rnk[pos[i]]]]=
           pos[i];
        for(int i=1;i<n;i++){
          ii cur={rnk[npos[i]],rnk[(npos[i]+(1<<k))%n]};
          ii pre={rnk[npos[i-1]],rnk[(npos[i-1]+(1<<k))%n
             ]};
          nrnk[npos[i]]=nrnk[npos[i-1]]+(cur!=pre);
        }
        pos=npos;rnk=nrnk;
      }
    }

    void buildLCP(){
      for(int i=0,k=0;i<n-1;i++,k=max(k-1,0)){
        int j=pos[rnk[i]-1];
```

```
        while(s[i+k]==s[j+k])k++;
        lcp[rnk[i]-1]=k;
      }
    }
    // O(logn+t)
    // Encuentra cuantas veces aparece t en s
    int cntMatching(const string &t){
      int m=len(t);
      if(m>n)return 0;
      int lo,hi,lb,ub;
      lo=0,hi=n-1;
      while(lo<hi){
        int mid=(lo+hi)/2;
        if(s.substr(pos[mid],m)>=t)hi=mid;
        else lo=mid+1;
      }
      lb=lo;lo=0,hi=n-1;
      while(lo<hi){
        int mid=(lo+hi+1)/2;
        if(s.substr(pos[mid],m)<=t)lo=mid;
        else hi=mid-1;
      }
      ub=lo;
      return s.substr(pos[lb], m)==t?ub-lb+1:0;
    }
  };

  int main() {
  string s;cin>>s;
  int n;cin>>n;
  SuffixArray sa(s);
  for(int i=0;i<n;i++){
    string t;cin>>t;
    cout<<sa.cntMatching(t)<<"\n";
  }
  }
```

8.12 Suffix Automata Forma 1

```
// La creacion del automata es O(n)
struct state {
  int len,link;
  map<char,int>next;
};

const int N=100000;
state st[N*2];
int sz,last;

void sa_init(){
  st[0].len=0;
  st[0].link=-1;
  sz++;
  last=0;
}

void sa_extend(char c){
  int act=sz++;
  st[act].len=st[last].len+1;
  int p=last;
  while(p!=-1 && !st[p].next.count(c)){
    st[p].next[c]=act;
    p=st[p].link;
  }
  if(p==-1){
    st[act].link=0;
  }else{
    int q=st[p].next[c];
    if(st[p].len+1==st[q].len){
      st[act].link=q;
    }else{
      int clone=sz++;
      st[clone].len=st[p].len+1;
      st[clone].next=st[q].next;
      st[clone].link=st[q].link;
      while(p!=-1 && st[p].next[c]==q){
        st[p].next[c]=clone;
        p=st[p].link;
      }
      st[q].link=st[act].link=clone;
    }
  }
  last=act;
}
```

8.13 Suffix Automata Forma 2

```
// O(n) construccion, O(n) memoria
struct SuffixAutomaton {
  int last;
  vi len,link,firstPos;
  vl cnt;
  vector<array<int,2>> order;
  vector<array<int, ALPHA>> nxt;
  SuffixAutomaton():last(0),len(1),link(1,-1),firstPos(1)
      ,cnt(1),nxt(1){}
  SuffixAutomaton(const string &s):SuffixAutomaton(){
    for (char c:s)
      extend(c);
  }

  int getIndex(char c){
    return c-MIN_CHAR;
  }

  void extend(char c) {
    int act=sz(len), i=getIndex(c),p=last;
    len.push_back(len[last]+1);
    link.emplace_back();
```

```
      cnt.push_back(1);
      firstPos.emplace_back(len[last]+1);
      order.push_back({len[act],act});
      nxt.emplace_back();
      while(p != -1 && !nxt[p][i]){
        nxt[p][i]=act;
        p=link[p];
      }
      if(p!=-1){
        int q=nxt[p][i];
        if(len[p]+1==len[q]){
          link[act]=q;
        }else{
          int clone=sz(len);
          len.push_back(len[p]+1);
          link.push_back(link[q]);
          firstPos.push_back(firstPos[q]);
          cnt.push_back(0);
          order.push_back({len[clone],clone});
          nxt.push_back(nxt[q]);
          while(p!=-1 && nxt[p][i]==q){
            nxt[p][i]=clone;
            p=link[p];
          }
          link[q]=link[act]=clone;
        }
      }
      last=act;
    }
  };

  int main() {
  SuffixAutomaton sa(string);
  return 0;
  }
```

8.14 Longest Common Subsequence

```
  const int nMax = 1005;
  int dp[nMax][nMax];
  // Longest Common Subsequence O(n*m) (devuelve el tamano)
  int lcs(const string &s, const string &t){
    int n=len(s),m=len(t);
    for(int i=1;i<=n;i++){
      for(int j=1;j<=m;j++){
        dp[i][j]=max(dp[i-1][j],dp[i][j-1]);
        if(s[i-1]==t[j-1])dp[i][j]=max(dp[i][j], dp[i-1][j
            -1] + 1);
      }
    }
    return dp[n][m];
  }

  // Devuelve la subsecuencia O(s*t)
  string lcs_str(const string &s, const string &t){
    int n=len(s),m=len(t);
    for(int i=1;i<=n;++i){
      for(int j=1;j<=m;++j){
        if(s[i-1]==t[j-1])dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+1;
        else dp[i][j]=max(dp[i-1][j],dp[i][j-1]);
      }
    }
    int i=n,j=m;
    string res="";
    while(i>0 && j>0) {
        if(s[i - 1]==t[j-1]){
          res=s[i-1]+res;i--;j--;
        }else if(dp[i-1][j]>dp[i][j-1])i--;
        else j--;
    }
    return res;
  }
```

8.15 Longest Common Substring

```
  // Implementar primero suffix-automata-forma-1
  // Retorna la subcadena comun mas larga entre S y T O(S+T
    )
  string lcs(string S,string T){
    sa_init();
    for(int i=0;i<sz(S);i++)sa_extend(S[i]);
    int v=0,l=0,best=0,bestpos=0;
    for (int i=0;i<sz(T);i++){
      while(v && !st[v].next.count(T[i])){
        v=st[v].link;
        l=st[v].len;
      }
      if(st[v].next.count(T[i])){
        v=st[v].next[T[i]];
        l++;
      }
      if(l>best){
        best=l;
        bestpos=i;
      }
    }
    return T.substr(bestpos-best+1,best);
  }
```

8.16 Lyndon Factorization

```
  // La factorizacion de Lyndon de un string es una lista
     de strings no vacios
  // tal que el string original es la concatenacion de los
     strings de la lista
```

```
// en orden lexicografico. Ademas, cada string de la
    lista es un string de
// Lyndon, es decir, es un string que es
    lexicograficamente menor que todos
// sus sufijos no triviales. Por ejemplo "ab"<"ba".
    Tambien los strings estan
// ordenados de mayor a menor.

// El algoritmo de Duval encuentra la factorizacion de
    Lyndon de un string en O(n)
vs duval(string const& s) {
  int n=len(s),i=0;
  vs factorization;
  while(i<n){
    int j=i+1,k=i;
    while(j<n && s[k]<=s[j]){
      if(s[k]<s[j])k=i;
      else k++;
      j++;
    }
    while(i<=k){
      factorization.push_back(s.substr(i, j-k));
      i+=j-k;
    }
  }
  return factorization;
}
int main() {
string s="aabaaab";
vs factorization=duval(s);
for(string& factor:factorization)cout<<factor<<"\n";
}
```

8.17 Cantidad Substring por len

```
// Implementar primero suffix-array-forma-2 y meter la
    funcion dentro
// O(n)
void numeroSubstringsPorTamano(){
  vl ps(n+1);
  for(int i=1;i<n;i++){
    int l=lcp[i-1]+1;
    int r=n-1-pos[i];
    ps[l]++;
    ps[r+1]--;
  }
  for(int i=1;i<n;i++) {
    ps[i]+=ps[i-1];
  }
  for(int i=1;i<n;i++) {
    cout<<ps[i]<<" ";
  }
}
```

8.18 Cantidad Substrings

```
// Implementar primero suffix-array-forma-1
int different_substrings(string s) { //O(nlogn)
  vi sa=suffix_array(s);
  vi lcp=lcp_construction(s,sa);
  int n=len(s);
  int act=n*(n+1);act/=2;
  for(int i=0;i<n-1;i++)act-=lcp[i];
  return act;
}

// Otra forma con hashing O(n^2)
int count_unique_substrings(string const& s) {
  int n = s.size();
  // Ojo con p y m
  const int p=31;
  const int m=1e9+9;
  ll p_pow[n], h[n+1];
  p_pow[0]=1;
  // Precalculo de potencias de p
  for(int i=1;i<n;i++)p_pow[i]=(p_pow[i-1]*p)%m;
  // Precalculo de hashes de prefijos de s
  for(int i=0;i<n;i++)h[i+1]=(h[i]+(s[i]-'a'+1)*p_pow[i])
     %m;
  int cnt=0;
  for(int l=1;l<=n;l++) {
    unordered_set<ll> hs;
    for(int i=0;i<=n-l;i++) {
      ll cur_h=(h[i+l]+m-h[i])%m;
      cur_h=(cur_h*p_pow[n-i-1])%m;
      hs.insert(cur_h);
    }
    cnt+=hs.size();
  }
  return cnt;
}
```

8.19 Kth-Substring con repeticiones

```
// Implementar primero suffix-automata-forma-2 y meter la
    funcion dentro
// El k-esimo substring lexicografico con repeticiones O(
   n+m)
void kthSubstr(ll k){
  sort(order.rbegin(), order.rend());
  for(auto [_,u]:order) {
    cnt[link[u]]+=cnt[u];
  }
  vl dp(last+1);
  function<void(int)>dfs=[&](int u){
    dp[u]=cnt[u];
```

```
      for(int i=0;i<26;i++){
        if(!nxt[u][i])continue;
        int v=nxt[u][i];
        if (!dp[v])dfs(v);
        dp[u]+=dp[v];
      }
    };
    dfs(0);
    int u=0;
    while(k>0){
      for(int i=0;i<26;i++) {
        if(!nxt[u][i])continue;
        int v=nxt[u][i];
        if(k>dp[v]) {
          k-=dp[v];
        }else{
          cout<<(char)('a' + i);
          k-=cnt[v];
          u=v;
          break;
        }
      }
    }
  }
```

8.20 Kth-substring sin repeticiones

```
  // Implementar primero suffix-array-forma-2 y meter la
     funcion dentro
  // El k-esimo substring lexicografico sin repeticiones O(
     n)
    string kthSubstr(ll k){
      for(int i=1;i<n;i++){
        int nxt=n-1-pos[i]-lcp[i-1];
        if(k>nxt){
          k-=nxt;
        }else{
          return s.substr(pos[i], k + lcp[i-1]);
        }
      }
    }
```

8.21 Primera aparicion patrones

```
  // Implementar primero suffix-automata-forma-2 y meter la
       funcion dentro
  // La primera aparicion de t en s O(t)
  int firstMatching(const string &t) {
    int act=0;
    for(char c:t){
      int cc=c-'a';
      if(!nxt[act][cc])return -1;
      act=nxt[act][cc];
    }
    return firstPos[act]-sz(t)+1;
  }
```

8.22 Repetitions

```
  // implementar primero z_function
  // El algoritmo encuentra todas las repeticiones de un
     string O(nlogn)
  int get_z(vi const& z, int i) {
    if (0<=i && i<sz(z))return z[i];
    else return 0;
  }

  vii repetitions;
  void convert_to_repetitions(int shift, bool left, int
     cntr, int l, int k1, int k2){
    for(int l1=max(1,l-k2);l1<=min(l,k1);l1++) {
      if(left && l1==l)break;
      int l2=l-l1;
      int pos=shift+(left?cntr-l1:cntr-l-l1+1);
      repetitions.emplace_back(pos,pos+2*l-1);
    }
  }

  void find_repetitions(string s, int shift=0){
    int n=len(s);
    if(n==1)return;
    int nu=n/2;
    int nv=n-nu;
    string u=s.substr(0,nu);
    string v=s.substr(nu);
    string ru(u.rbegin(), u.rend());
    string rv(v.rbegin(), v.rend());
    find_repetitions(u, shift);
    find_repetitions(v, shift+nu);
    vi z1=z_function(ru);
    vi z2=z_function(v+'#'+u);
    vi z3=z_function(ru+'#'+rv);
    vi z4=z_function(v);
    for (int cntr=0;cntr<n;cntr++) {
      int l, k1, k2;
      if(cntr<nu) {
        l=nu-cntr;
        k1=get_z(z1, nu-cntr);
        k2=get_z(z2, nv+1+cntr);
      }else{
        l=cntr-nu+1;
        k1=get_z(z3,nu+1+nv-1-(cntr-nu));
        k2=get_z(z4,(cntr-nu)+1);
      }
      if(k1+k2>=l)convert_to_repetitions(shift, cntr<nu,
         cntr, l, k1, k2);
```

```
    }
}

int main() {
find_repetitions(string);
for(auto& rep:repetitions)cout<<rep.first<<" "<<rep.
   second<<"\n";
}
```

8.23 Substring mas largo repetido

```
// Implementar primero suffix-array-forma-1
string longest_repeated_substring(string& s){ //O(nlogn)
  // Si se tienen que sacar varios, entonces son todos
     los que sean iguales al maximo
  vi sa=suffix_array(s);
  vi lcp=lcp_construction(s,sa);
  int n=len(s);
  int max_len=0, start=0;
  for(int i=0;i<n-1;i++){
    if(lcp[i]>max_len){
      max_len=lcp[i];
      start=sa[i];
    }
  }
  return s.substr(start,max_len);
}
```

9 Geometria

9.1 Puntos

```
typedef double lf;
const lf eps = 1e-9;
typedef double T;
struct pt {
    T x, y;
    pt operator + (pt p) { return {x+p.x, y+p.y}; }
    pt operator - (pt p) { return {x-p.x, y-p.y}; }
    pt operator * (pt p) { return {x*p.x-y*p.y, x*p.y+y*p
       .x}; }
    pt operator * (T d) { return {x*d, y*d}; }
    pt operator / (lf d) { return {x/d, y/d}; } /// only
       for floating point
    bool operator == (pt b) { return x == b.x && y == b.y
       ; }
    bool operator != (pt b) { return !(*this == b); }
    bool operator < (const pt &o) const { return y < o.y
       || (y == o.y && x < o.x); }
    bool operator > (const pt &o) const { return y > o.y
       || (y == o.y && x > o.x); }
};
int cmp (lf a, lf b) { return (a + eps < b ? -1 :(b + eps
    < a ? 1 : 0)); } //double comparator

T norm(pt a) { return a.x*a.x + a.y*a.y; }
lf abs(pt a) { return sqrt(norm(a)); }
lf arg(pt a) { return atan2(a.y, a.x); }
pt unit(pt a) { return a/abs(a); }

T dot(pt a, pt b) { return a.x*b.x + a.y*b.y; } // x = 90
    -> cos = 0
T cross(pt a, pt b) { return a.x*b.y - a.y*b.x; } // x =
   180 -> sin = 0
T orient(pt a, pt b, pt c) { return cross(b-a,c-a); }//
   clockwise = -
pt rot(pt p, lf a) { return {p.x*cos(a) - p.y*sin(a), p.x
   *sin(a) + p.y*cos(a)}; }
pt rotate_to_b(pt a, pt b, lf ang) { return rot(a-b, ang)
   +b; } // rotate by ang center b
pt rot90ccw(pt p) { return {-p.y, p.x}; }
pt rot90cw(pt p) { return {p.y, -p.x}; }
pt translate(pt p, pt v) { return p+v; }
pt scale(pt p, double f, pt c) { return c + (p-c)*f; } //
    c-center
bool are_perp(pt v, pt w) { return dot(v,w) == 0; }
int sign(T x) { return (T(0) < x) - (x < T(0)); }

bool in_angle(pt a, pt b, pt c, pt x) { // x inside angle
    abc (center in a)
    assert(orient(a,b,c) != 0);
    if (orient(a,b,c) < 0) swap(b,c);
    return orient(a,b,x) >= 0 && orient(a,c,x) <= 0;
}
//angle bwn 2 vectors
lf angle(pt a, pt b) { return acos(max(-1.0, min(1.0, dot
   (a,b)/abs(a)/abs(b)))); }
lf angle(pt a, pt b) { return atan2(cross(a, b), dot(a, b
   )); }
/// returns vector to transform points
pt get_linear_transformation(pt p, pt q, pt r, pt fp, pt
   fq) {
    pt pq = q-p, num{cross(pq, fq-fp), dot(pq, fq-fp)};
    return fp + pt{cross(r-p, num), dot(r-p, num)} / norm
       (pq);
}
bool half(pt p) { /// true if is in (0, 180] (line is x
   axis)
    assert(p.x != 0 || p.y != 0); /// the argument of
       (0,0) is undefined
    return p.y > 0 || (p.y == 0 && p.x < 0);
}
bool half_from(pt p, pt v = {1, 0}) { //line is v (above
   v is true)
    return cross(v,p) < 0 || (cross(v,p) == 0 && dot(v,p)
        < 0);
}
```

```
bool polar_cmp(const pt &a, const pt &b) {//polar sort
    return make_tuple(half(a), 0) < make_tuple(half(b), cross(a,b));
//   return make_tuple(half(a), 0, sq(a)) < make_tuple(half(b), cross(a, b), sq(b)); // further ones appear later
}
```

9.2 Lineas

```
struct line {
    pt v; T c; // v:direction c: pos in y axis
    line(pt v, T c) : v(v), c(c) {}
    line(T a, T b, T c) : v({b,-a}), c(c) {} // ax + by = c
    line(pt p, pt q) : v(q-p), c(cross(v,p)) {}
    T side(pt p) { return cross(v,p)-c; }
    lf dist(pt p) { return abs(side(p)) / abs(v); }
    lf sq_dist(pt p) { return side(p)*side(p) / (lf)norm(v); }
    line perp_through(pt p) { return {p, p + rot90ccw(v)}; } // line perp to v passing through p
    bool cmp_proj(pt p, pt q) { return dot(v,p) < dot(v,q); } // order for points over the line
    line translate(pt t) { return {v, c + cross(v,t)}; }
    line shift_left(double d) { return {v, c + d*abs(v)}; }
    pt proj(pt p) { return p - rot90ccw(v)*side(p)/norm(v); } // pt proyected on the line
    pt refl(pt p) { return p - rot90ccw(v)*2*side(p)/norm(v); } // pt reflected on the other side of the line
};

bool inter_ll(line l1, line l2, pt &out) {
    T d = cross(l1.v, l2.v);
    if (d == 0) return false;
    out = (l2.v*l1.c - l1.v*l2.c) / d; // floating points
    return true;
}
//bisector divides the angle in 2 equal angles
//interior line goes on the same direction as l1 and l2
line bisector(line l1, line l2, bool interior) {
    assert(cross(l1.v, l2.v) != 0); /// l1 and l2 cannot be parallel!
    lf sign = interior ? 1 : -1;
    return {l2.v/abs(l2.v) + l1.v/abs(l1.v) * sign,
            l2.c/abs(l2.v) + l1.c/abs(l1.v) * sign};
}
```

9.3 Vectores

```
// Creacion de un vector
struct vec{
    double x,y;
    vec(double x,double y): x(x),y(y){}
};

// Puntos a vector
vec toVec(point a,point b){
    return vec(b.x-a.x , b.y-a.y);
}

// Escalar un vector
vec scale(vec v, double s){
    // s no negatico:
    // <1 mas corto
    // 1 igual
    // >1 mas largo
    return vec(v.x*s,v.y*s);
}

// Trasladar p segun v
point traslate(point p, vec v){
    return point(p.x+v.x , p.y+v.y);
}

// Producto Punto
double dot(vec a,vec b){
    return (a.x*b.x + a.y*b.y);
}

// Cuadrado de la norma
double norm_sq(vec v){
    return v.x*v.x + v.y*v.y;
}

// Angulo formado por aob
double angle(point a, point o, point b){
    vec oa = toVec(o,a);
    vec ob = toVec(o,b);
    return acos(dot(oa,ob)/sqrt(norm_sq(oa)*norm_sq(ob)));
}

// Producto cruz
double cross(vec a, vec b){
    return (a.x*b.y)-(a.y*b.x);
}

// Lado respecto una linea pq
bool ccw(point p,point q,point r){
    // Devuelve verdadero si el punto r esta a la izquierda de la linea pq
    return cross(toVec(p,q),toVec(p,r))>0;
}

// Colinear
bool collinear(point p, point q, point r){
    return fabs(cross(toVec(p,q), toVec(p,r)))<EPS;
}
```

9.4 Poligonos

```
enum {IN, OUT, ON};
struct polygon {
    vector<pt> p;
    polygon(int n) : p(n) {}
    int top = -1, bottom = -1;
    void delete_repetead() {
        vector<pt> aux;
        sort(p.begin(), p.end());
        for(pt &i : p)
            if(aux.empty() || aux.back() != i)
              aux.push_back(i);
        p.swap(aux);
    }
    bool is_convex() {
        bool pos = 0, neg = 0;
        for (int i = 0, n = p.size(); i < n; i++) {
            int o = orient(p[i], p[(i+1)%n], p[(i+2)%n]);
            if (o > 0) pos = 1;
            if (o < 0) neg = 1;
        }
        return !(pos && neg);
    }
    lf area(bool s = false) { // better on clockwise order
        lf ans = 0;
        for (int i = 0, n = p.size(); i < n; i++)
            ans += cross(p[i], p[(i+1)%n]);
        ans /= 2;
        return s ? ans : abs(ans);
    }
    lf perimeter() {
        lf per = 0;
        for(int i = 0, n = p.size(); i < n; i++)
           per += abs(p[i] - p[(i+1)%n]);
        return per;
    }
    bool above(pt a, pt p) { return p.y >= a.y; }
    bool crosses_ray(pt a, pt p, pt q) { // pq crosses ray from a
        return (above(a,q)-above(a,p))*orient(a,p,q) > 0;
    }
    int in_polygon(pt a) {
        int crosses = 0;
        for(int i = 0, n = p.size(); i < n; i++) {
            if(on_segment(p[i], p[(i+1)%n], a)) return ON;
            crosses += crosses_ray(a, p[i], p[(i+1)%n]);
        }
        return (crosses&1 ? IN : OUT);
    }
    void normalize() { /// polygon is CCW
        bottom = min_element(p.begin(), p.end()) - p.begin();
        vector<pt> tmp(p.begin()+bottom, p.end());
        tmp.insert(tmp.end(), p.begin(), p.begin()+bottom);
        p.swap(tmp);
        bottom = 0;
        top = max_element(p.begin(), p.end()) - p.begin();
    }
    int in_convex(pt a) {
        assert(bottom == 0 && top != -1);
        if(a < p[0] || a > p[top]) return OUT;
        T orientation = orient(p[0], p[top], a);
        if(orientation == 0) {
            if(a == p[0] || a == p[top]) return ON;
            return top == 1 || top + 1 == p.size() ? ON : IN;
        } else if (orientation < 0) {
            auto it = lower_bound(p.begin()+1, p.begin()+top, a);
            T d = orient(*prev(it), a, *it);
            return d < 0 ? IN : (d > 0 ? OUT: ON);
        } else {
            auto it = upper_bound(p.rbegin(), p.rend()-top-1, a);
            T d = orient(*it, a, it == p.rbegin() ? p[0] : *prev(it));
            return d < 0 ? IN : (d > 0 ? OUT: ON);
        }
    }
    polygon cut(pt a, pt b) { // cuts polygon on line ab
        line l(a, b);
        polygon new_polygon(0);
        for(int i = 0, n = p.size(); i < n; ++i) {
            pt c = p[i], d = p[(i+1)%n];
            lf abc = cross(b-a, c-a), abd = cross(b-a, d-a);
            if(abc >= 0) new_polygon.p.push_back(c);
            if(abc*abd < 0) {
              pt out; inter_ll(l, line(c, d), out);
              new_polygon.p.push_back(out);
            }
        }
        return new_polygon;
    }
    void convex_hull() {
        sort(p.begin(), p.end());
        vector<pt> ch;
        ch.reserve(p.size()+1);
        for(int it = 0; it < 2; it++) {
            int start = ch.size();
            for(auto &a : p) {
                /// if colineal are needed, use < and remove repeated points
                while(ch.size() >= start+2 && orient(ch[
```

```
                ch.size()-2], ch.back(), a) <= 0)
                 ch.pop_back();
              ch.push_back(a);
          }
          ch.pop_back();
          reverse(p.begin(), p.end());
      }
      if(ch.size() == 2 && ch[0] == ch[1]) ch.pop_back
          ();
      /// be careful with CH of size < 3
      p.swap(ch);
  }
  vector<pii> antipodal() {
      vector<pii> ans;
      int n = p.size();
      if(n == 2) ans.push_back({0, 1});
      if(n < 3) return ans;
      auto nxt = [&](int x) { return (x+1 == n ? 0 : x
          +1); };
      auto area2 = [&](pt a, pt b, pt c) { return cross
          (b-a, c-a); };
      int b0 = 0;
      while(abs(area2(p[n - 1], p[0], p[nxt(b0)])) >
          abs(area2(p[n - 1], p[0], p[b0]))) ++b0;
      for(int b = b0, a = 0; b != 0 && a <= b0; ++a) {
          ans.push_back({a, b});
          while (abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[nxt(b)]))
              > abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[b]))) {
              b = nxt(b);
              if(a != b0 || b != 0) ans.push_back({ a,
                  b });
              else return ans;
          }
          if(abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[nxt(b)])) ==
              abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[b]))) {
              if(a != b0 || b != n-1) ans.push_back({ a
                  , nxt(b) });
              else ans.push_back({ nxt(a), b });
          }
      }
      return ans;
  }
  pt centroid() {
      pt c{0, 0};
      lf scale = 6. * area(true);
      for(int i = 0, n = p.size(); i < n; ++i) {
          int j = (i+1 == n ? 0 : i+1);
          c = c + (p[i] + p[j]) * cross(p[i], p[j]);
      }
      return c / scale;
  }
  ll pick() {
      ll boundary = 0;
      for(int i = 0, n = p.size(); i < n; i++) {
          int j = (i+1 == n ? 0 : i+1);
              boundary += __gcd((ll)abs(p[i].x - p[j].x), (
                  ll)abs(p[i].y - p[j].y));
          }
          return area() + 1 - boundary/2;
      }
      pt& operator[] (int i){ return p[i]; }
};
```

9.5 Angulos

Calcula el angulo de una linea con respecto a otra.

```
lf get_ang(pt a, pt b) {
    lf ang = acos(max(lf(-1.0), min(lf(1.0), lf(dot(a,b))
        /abs(a)/abs(b))));
    ang = ang * 180.0 / acos(-1.0);
    if (b.y < 0) ang = lf(360) - ang;
    return ang;
}

lf angle(pt a, pt b) {
    pt xo = {1, 0};
    lf ang = get_ang(xo, b) - get_ang(xo, a);
    if (ang < 0) ang += 360;
    return ang;
}

double DegToRad(double d) {
        return d * acos(-1.0) / 180.0;
}

double RadToDeg(double r) {
        return r * 180.0 / acos(-1.0);
}
```

9.6 Circulos

```
struct circle {
    pt c; T r;
};
// (x-xo)^2 + (y-yo)^2 = r^2
//circle that passes through abc
circle center(pt a, pt b, pt c) {
    b = b-a, c = c-a;
    assert(cross(b,c) != 0); /// no circumcircle if A,B,C
         aligned
    pt cen = a + rot90ccw(b*norm(c) - c*norm(b))/cross(b,
        c)/2;
    return {cen, abs(a-cen)};
}
//centers of the circles that pass through ab and has
    radius r
vector<pt> centers(pt a, pt b, T r) {
    if (abs(a-b) > 2*r + eps) return {};
```

```
    pt m = (a+b)/2;
    double f = sqrt(r*r/norm(a-m) - 1);
    pt c = rot90ccw(a-m)*f;
    return {m-c, m+c};
}
int inter_cl(circle c, line l, pair<pt, pt> &out) {
    lf h2 = c.r*c.r - l.sq_dist(c.c);
    if(h2 >= 0) { // line touches circle
        pt p = l.proj(c.c);
        pt h = l.v*sqrt(h2)/abs(l.v); // vector of len h parallel to line
        out = {p-h, p+h};
    }
    return 1 + sign(h2); // if 1 -> out.F == out.S
}
int inter_cc(circle c1, circle c2, pair<pt, pt> &out) {
    pt d = c2.c-c1.c;
    double d2 = norm(d);
    if(d2 == 0) { assert(c1.r != c2.r); return 0; } // concentric circles (identical)
    double pd = (d2 + c1.r*c1.r - c2.r*c2.r)/2; // = |O_1P| * d
    double h2 = c1.r*c1.r - pd*pd/d2; // = h^2
    if(h2 >= 0) {
        pt p = c1.c + d*pd/d2, h = rot90ccw(d)*sqrt(h2/d2);
        out = {p-h, p+h};
    }
    return 1 + sign(h2);
}
//circle-line inter = 1
int tangents(circle c1, circle c2, bool inner, vector<pair<pt,pt>> &out) {
    if(inner) c2.r = -c2.r; // inner tangent
    pt d = c2.c-c1.c;
    double dr = c1.r-c2.r, d2 = norm(d), h2 = d2-dr*dr;
    if(d2 == 0 || h2 < 0) { assert(h2 != 0); return 0; } // (identical)
    for(double s : {-1,1}) {
        pt v = (d*dr + rot90ccw(d)*sqrt(h2)*s)/d2;
        out.push_back({c1.c + v*c1.r, c2.c + v*c2.r});
    }
    return 1 + (h2 > 0); // if 1: circle are tangent
}
//circle targent passing through pt p
int tangent_through_pt(pt p, circle c, pair<pt, pt> &out) {
    double d = abs(p - c.c);
    if(d < c.r) return 0;
    pt base = c.c-p;
    double w = sqrt(norm(base) - c.r*c.r);
    pt a = {w, c.r}, b = {w, -c.r};
    pt s = p + base*a/norm(base)*w;
    pt t = p + base*b/norm(base)*w;
    out = {s, t};
    return 1 + (abs(c.c-p) == c.r);
}
```

9.7 Semiplanos

```
struct halfplane{
    double angle;
    pt p, pq;
    halfplane(){}
    halfplane(pt a, pt b): p(a), pq(b - a) {
        angle = atan2(pq.y,pq.x);
    }
    bool operator < (halfplane b)const{return angle < b.angle;}
    bool out(pt q){return cross(pq, (q-p)) < -eps;} // checks if p is inside the half plane
};

const lf inf = 1e100;
// intersection pt of the lines of 2 halfplanes
pt inter(halfplane& h1, halfplane& h2){
    if(abs(cross(unit(h1.pq), unit(h2.pq))) <= eps)return {inf, inf};
    lf alpha = cross((h2.p - h1.p), h2.pq) / cross(h1.pq, h2.pq);
    return h1.p + (h1.pq * alpha);
}

// intersection of halfplanes
vector<pt> intersect(vector<halfplane>& b){
    vector<pt> box = { {inf, inf}, {-inf, inf}, {-inf, -inf}, {inf, -inf} };
    for(int i = 0; i < 4; i++){
        b.push_back({box[i], box[(i + 1) % 4]});
    }
    sort(b.begin(), b.end());
    int n = b.size(), q = 1, h = 0;
    vector<halfplane> c(n + 10);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        while(q < h && b[i].out(inter(c[h], c[h-1]))) h--;
        while(q < h && b[i].out(inter(c[q], c[q+1]))) q++;
        c[++h] = b[i];
        if(q < h && abs(cross(c[h].pq, c[h-1].pq)) < eps){
            if(dot(c[h].pq, c[h-1].pq) <= 0) return {};
            h--;
            if(b[i].out(c[h].p)) c[h] = b[i];
        }
    }
    while(q < h-1 && c[q].out(inter(c[h], c[h-1]))) h--;
    while(q < h-1 && c[h].out(inter(c[q], c[q+1]))) q++;
    if(h - q <= 1)return {};
```

```
    c[h+1] = c[q];
    vector<pt> s;
    for(int i = q; i < h+1; i++) s.pb(inter(c[i], c[i+1])
        );
    return s;
}
```

9.8 Segmentos

```
bool in_disk(pt a, pt b, pt p) { // pt p inside ab disk
    return dot(a-p, b-p) <= 0;
}
bool on_segment(pt a, pt b, pt p) { // p on ab
    return orient(a,b,p) == 0 && in_disk(a,b,p);
}
// ab crossing cd
bool proper_inter(pt a, pt b, pt c, pt d, pt &out) {
    T oa = orient(c,d,a),
    ob = orient(c,d,b),
    oc = orient(a,b,c),
    od = orient(a,b,d);
    /// Proper intersection exists iff opposite signs
    if (oa*ob < 0 && oc*od < 0) {
        out = (a*ob - b*oa) / (ob-oa);
        return true;
    }
    return false;
}
// intersection bwn segments
set<pt> inter_ss(pt a, pt b, pt c, pt d) {
    pt out;
    if (proper_inter(a,b,c,d,out)) return {out}; //if
        cross -> 1
    set<pt> s;
    if (on_segment(c,d,a)) s.insert(a); // a in cd
    if (on_segment(c,d,b)) s.insert(b); // b in cd
    if (on_segment(a,b,c)) s.insert(c); // c in ab
    if (on_segment(a,b,d)) s.insert(d); // d in ab
    return s; // 0, 2
}
lf pt_to_seg(pt a, pt b, pt p) { // p to ab
    if(a != b) {
        line l(a,b);
        if (l.cmp_proj(a,p) && l.cmp_proj(p,b)) /// if
            closest to  projection = (a, p, b)
            return l.dist(p); /// output distance to line
    }
    return min(abs(p-a), abs(p-b)); /// otherwise
        distance to A or B
}
lf seg_to_seg(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  pt dummy;
  if (proper_inter(a,b,c,d,dummy)) return 0; // ab
      intersects cd
  return min({pt_to_seg(a,b,c), pt_to_seg(a,b,d),
      pt_to_seg(c,d,a), pt_to_seg(c,d,b)}); // try the 4
      pts
}
```

9.9 Convex Hull

```
struct pt{
    double x,y;
    int type;
    pt(double x,double y,int t): x(x),y(y),type(t){}
};

// Devuelve hacia donde esta un punto c, respecto una
    linea ab
int orientation(pt a, pt b, pt c) {
    double v = a.x*(b.y-c.y)+b.x*(c.y-a.y)+c.x*(a.y-b.y);
    if (v < 0) return -1; // en la derecha
    if (v > 0) return +1; // en la izquierda
    return 0; // colinear
}

// imprime verdadero el punto c, esta a la derecha de la
    linea pb,
// tambien da true si son cololineales e
    include_collinear == true
bool cw(pt a, pt b, pt c, bool include_collinear) {
    int o = orientation(a, b, c);
    return o < 0 || (include_collinear && o == 0);
}

// nos dice si tres puntos son colineales
bool collinear(pt a, pt b, pt c) { return orientation(a,
    b, c) == 0; }

void convex_hull(vector<pt>& a, bool include_collinear =
    false) {

    // Obtenemos el pivote como el menor punto con un
        criterio dado
    // (menor y o si no menor x)
    pt p0 = *min_element(a.begin(), a.end(), [](pt a, pt
        b) {
        return make_pair(a.y, a.x) < make_pair(b.y, b.x);
    });

    // Ordenamos los puntos en un orden horario, los
        elementos colineales terminan
    // siendo arrastrados al final y si existe empate en
        el angulo sera el que este mas cerca
    // del pivote
    sort(a.begin(), a.end(), [&p0](const pt& a, const pt&
        b) {
        int o = orientation(p0, a, b);
        if (o == 0)
```

```
            return (p0.x-a.x)*(p0.x-a.x) + (p0.y-a.y)*(p0
                .y-a.y)
                < (p0.x-b.x)*(p0.x-b.x) + (p0.y-b.y)*(p0.
                    y-b.y);
        return o < 0;
    });
    // Busca donde empiezan los colineales (estan al
        final) e invierte su orden
    if (include_collinear) {
        int i = (int)a.size()-1;
        while (i >= 0 && collinear(p0, a[i], a.back())) i
            --;
        reverse(a.begin()+i+1, a.end());
    }
    // Aplicacion de graham
    vector<pt> st;
    for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
        while (st.size() > 1 && !cw(st[st.size()-2], st.
            back(), a[i], include_collinear))
            st.pop_back();
        st.push_back(a[i]);
    }
    a = st;
}
```

10 Teoría y miscelánea

10.1 Sumatorias

- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{(n(n+1))^2(2n^2+2n-1)}{12}$
- $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ para $x \neq 1$

10.2 Teoría de Grafos

10.2.1 Teorema de Euler

En un grafo conectado planar, se cumple que $V - E + F = 2$, donde V es el número de vértices, E es el número de aristas y F es el número de caras.

10.2.2 Planaridad de Grafos

Un grafo es planar si y solo si no contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 (grafo completo con 5 vértices) ni a $K_{3,3}$ (grafo bipartito completo con 3 vértices en cada conjunto).

10.3 Teoría de Números

10.3.1 Ecuaciones Diofánticas Lineales

Una ecuación diofántica lineal es una ecuación en la que se buscan soluciones enteras x e y que satisfagan la relación lineal $ax+by = c$, donde a, b y c son constantes dadas.

Para encontrar soluciones enteras positivas en una ecuación diofántica lineal, podemos seguir el siguiente proceso:

1. Encontrar una solución particular: Encuentra una solución particular (x_0, y_0) de la ecuación. Esto puede hacerse utilizando el algoritmo de Euclides extendido.
2. Encontrar la solución general: Una vez que tengas una solución particular, puedes obtener la solución general utilizando la fórmula:

$$x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a, b)} \cdot t$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a, b)} \cdot t$$

donde t es un parámetro entero.

3. Restringir a soluciones positivas: Si deseas soluciones positivas, asegúrate de que las soluciones generales satisfagan $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Puedes ajustar el valor de t para cumplir con estas restricciones.

10.3.2 Pequeño Teorema de Fermat

Si p es un número primo y a es un entero no divisible por p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

10.3.3 Teorema de Euler

Para cualquier número entero positivo n y un entero a coprimo con n, se cumple que $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, donde $\phi(n)$ es la función phi de Euler, que representa la cantidad de enteros positivos menores que n y coprimos con n.

10.4 Teorema de Pick

Sea un poligono simple cuyos vertices tienen coordenadas enteras. Si B es el numero de puntos enteros en el borde, I el numero de puntos enteros en el interior del poligono, entonces el area A del poligono se puede calcular con la formula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

10.5 Combinatoria

10.5.1 Permutaciones

El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de a r a la vez (sin repetición) se denota como $P(n, r)$ y se calcula mediante:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

10.5.2 Combinaciones

El número de combinaciones de n objetos distintos tomados de a r a la vez (sin repetición) se denota como $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$ y se calcula mediante:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

10.5.3 Permutaciones con Repetición

El número de permutaciones de n objetos tomando en cuenta repeticiones se denota como $P_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$ y se calcula mediante:

$$P_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

10.5.4 Combinaciones con Repetición

El número de combinaciones de n objetos tomando en cuenta repeticiones se denota como $C_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$ y se calcula mediante:

$$C_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

10.5.5 Números de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Los números de Catalan también pueden calcularse utilizando la siguiente fórmula recursiva:

$$C_0 = 1$$
$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n$$

Usos:

- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de árboles binarios distintos con n vértices.
- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de expresiones que contienen n pares de paréntesis correctamente emparejados.
- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de formas diferentes en que se pueden colocar $n+1$ factores entre paréntesis, por ejemplo, para $n = 3$ y $3 + 1 = 4$ factores: a, b, c, d, tenemos: $(ab)(cd), a(b(cd)), ((ab)c)d$ y $a((bc)d)$.
- Los números de Catalan cuentan la cantidad de caminos no cruzados en una rejilla n x n que se pueden trazar desde una esquina de un cuadrado o rectángulo a la esquina opuesta, moviéndose solo hacia arriba y hacia la derecha.
- Los números de Catalan representan el número de árboles binarios completos con $n+1$ hojas.
- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de formas en que se puede triangular un poligono convexo de $n+2$ lados. Otra forma de decirlo es como la cantidad de formas de dividir un polígono convexo en triángulos utilizando diagonales no cruzadas.

10.6 DP Optimization Theory

Name	Original Recurrence	Sufficient Condition	From	To
CH 1	$dp[i] = min_{j<i}\{dp[j] + b[j] * a[i]\}$	$b[j] \geq b[j+1]$ Optionally $a[i] \leq a[i+1]$	$O(n^2)$	$O(n)$
CH 2	$dp[i][j] = min_{k<j}\{dp[i-1][k] + b[k] * a[j]\}$	$b[k] \geq b[k+1]$ Optionally $a[j] \leq a[j+1]$	$O(kn^2)$	$O(kn)$
D&Q	$dp[i][j] = min_{k<j}\{dp[i-1][k] + C[k][j]\}$	$A[i][j] \leq A[i][j+1]$	$O(kn^2)$	$O(kn \log n)$
Knuth	$dp[i][j] = min_{i<k<j}\{dp[i][k] + dp[k][j]\} + C[i][j]$	$A[i, j-1] \leq A[i, j] \leq A[i+1, j]$	$O(n^3)$	$O(n^2)$

Notes:

- $A[i][j]$ - the smallest k that gives the optimal answer, for example in $dp[i][j] = dp[i-1][k] + C[k][j]$
- $C[i][j]$ - some given cost function
- We can generalize a bit in the following way $dp[i] = \min_{j<i}\{F[j] + b[j] * a[i]\}$, where $F[j]$ is computed from $dp[j]$ in constant time