

Notebook UNosnovatos

Contents

1 C++	2
1.1 C++ plantilla	2
1.2 Librerias	2
1.3 Bitmask	3
1.4 Cosas de strings	3
2 Estructuras de Datos	4
2.1 Ordered set	4
2.2 Disjoint Set Union	4
2.3 Fenwick Tree	4
2.4 ST iterativo	4
2.5 Segment Tree	5
2.6 Persistent ST	6
2.7 Distinct Values Queries	6
3 Programacion dinamica	7
3.1 LIS	7
3.2 Bin Packing	7
3.3 Algoritmo de Kadane 2D	7
3.4 Knuth Clasico	8
3.5 Edit Distances	8
3.6 Divide Conquer	8
3.7 Knuth	9
4 Grafos	9
4.1 Puentes	9
4.2 Puntos de Articulacion	9
4.3 Puntos de articulacion y puentes (dirigidos)	10
4.4 Algoritmo Kosajaru	10
4.5 Tarjan	11
4.6 Dijkstra	11
4.7 Bellman Ford	11
4.8 Floyd Warshall	11
4.9 MST Kruskal	12
4.10 MST Prim	12
4.11 Shortest Path Faster Algorithm	12
4.12 Camino mas corto de longitud fija	12
5 Flujos	13

5.1 Edmonds-Karp	13
5.2 Dinic	13
5.3 Maximum Bipartite Matching	14
5.4 Minimum cost flow	14
6 Matematicas	15
6.1 Descomposicion en primos (y mas cosas)	15
6.2 Criba Modificada	16
6.3 Funcion Totient de Euler	16
6.4 Exponenciacion binaria	16
6.5 Exponenciacion matricial	16
6.6 Fibonacci Matriz	17
6.7 GCD y LCM	17
6.8 Algoritmo Euclideo Extendido	17
6.9 Inverso modular	17
6.10 Coeficientes binomiales	17
6.11 Logaritmo Discreto	17
6.12 Freivalds algorithm	18
6.13 Miller Rabin	18
6.14 Pollard Rho	18
6.15 Gauss Jordan	19
6.16 Gauss Jordan mod 2	19
7 Metodos numericos	19
7.1 Ternary Search	19
7.2 Regla de Simpson	20
8 Strings	20
8.1 Funcion Z	20
8.2 Funcion Phi	20
8.3 Kmp	20
8.4 Aho-Corasick	21
8.5 Hashing	21
8.6 Manacher	22
8.7 Minimal-Rotation	22
8.8 Rabin-Karp	23
8.9 Kmp-Automata	23
8.10 Suffix Array Forma 1	23
8.11 Suffix Array Forma 2	24
8.12 Suffix Automata Forma 1	25
8.13 Suffix Automata Forma 2	25
8.14 Longest Common Subsequence	26
8.15 Longest Common Substring	26

8.16	Lyndon Factorization	26
8.17	Cantidad Substring por len	27
8.18	Cantidad Substrings	27
8.19	Kth-Substring con repeticiones	27
8.20	Kth-substring sin repeticiones	27
8.21	Primera aparicion patrones	28
8.22	Repetitions	28
8.23	Substring mas largo repetido	28
9	Geometria	29
9.1	Puntos	29
9.2	Lineas	29
9.3	Vectores	30
9.4	Poligonos	30
9.5	Angulos	32
9.6	Circulos	32
9.7	Semiplanos	33
9.8	Segmentos	33
9.9	Convex Hull	34
10	Teoría y miscelánea	35
10.1	Sumatorias	35
10.2	Teoría de Grafos	35
10.2.1	Teorema de Euler	35
10.2.2	Planaridad de Grafos	35
10.3	Teoría de Números	35
10.3.1	Ecuaciones Diofánticas Lineales	35
10.3.2	Pequeño Teorema de Fermat	35
10.3.3	Teorema de Euler	35
10.4	Geometría	35
10.4.1	Teorema de Pick	35
10.4.2	Fórmula de Herón	35
10.4.3	Relación de Existencia Triangular	35
10.5	Combinatoria	36
10.5.1	Permutaciones	36
10.5.2	Combinaciones	36
10.5.3	Permutaciones con Repetición	36
10.5.4	Combinaciones con Repetición	36
10.5.5	Números de Catalan	36
10.5.6	Estrellas y barras	36
10.6	DP Optimization Theory	37

1 C++

1.1 C++ plantilla

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define watch(x) cout<<#x<<"="<<x<<'\n'
#define sz(arr) ((int) arr.size())
#define all(v) v.begin(), v.end()
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> ii;
typedef vector<ii> vii;
typedef vector<int> vi;
typedef vector<long long> vll;
typedef pair<ll, ll> pll;
typedef vector<pll> vll;
const int INF = 1e9;
const ll INFL = 1e18;
const int MOD = 1e9+7;
const double EPS = 1e-9;
int dirx[4] = {0,-1,1,0};
int diry[4] = {-1,0,0,1};
int dr[] = {1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1};
int dc[] = {0, 1, 1, 1, 0, -1, -1, -1};
const string ABC = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz";
const char ln = '\n';

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cout << setprecision(20) << fixed;
    // freopen("file.in", "r", stdin);
    // freopen("file.out", "w", stdout);

    return 0;
}
```

1.2 Librerías

```
// En caso de que no sirva #include <bits/stdc++.h>
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <iterator>
#include <sstream>
#include <fstream>
#include <cassert>
#include <climits>
#include <cstdlib>
#include <cstring>
#include <string>
#include <stdio>
#include <vector>
#include <cmath>
```

```
#include <queue>
#include <deque>
#include <stack>
#include <list>
#include <map>
#include <set>
#include <bitset>
#include <iomanip>
#include <unordered_map>
////
#include <tuple>
#include <random>
#include <chrono>
```

1.3 Bitmask

```
// Todas son O(1) Representacion
int a = 5; // Representacion binaria: 0101
int b = 3; // Representacion binaria: 0011
// Operaciones Principales
int resultado_and = a & b; // 0001 (1 en decimal)
int resultado_or = a | b; // 0111 (7 en decimal)
int resultado_xor = a ^ b; // 0110 (6 en decimal)

int num = 42; // Representacion binaria: 00101010
bitset<8> bits(num); // Crear un objeto bitset a partir
// del numero
cout << "Secuencia de bits: " << bits << "\n";
bits.count(); // Cantidad de bits activados
bits.set(3, true); // Establecer el cuarto bit en 1
bits.reset(6); // Establecer el septimo bit en 0

ll S, T;
// Operaciones con bits (/*) por 2 (redondea de forma
// automatica)
S=34; // == 100010
S = S<<1; // == S*2 == 68 == 1000100
S = S>>2; // == S/4 == 17 == 10001
S = S>>1; // == S/2 == 8 == 1000

// Encender un bit
S = 34;
S = S|(1<<3); // S = 42 (101010)

// Limpiar o apagar un bit
// ~: Not operacion
S = 42;
S &= ~(1<<1); // S = 40 (101000)

// Comprobar si un bit esta encendido
S = 42;
T = S&(1<<3); // (!= 0): el tercer bit esta encendido

// Invertir el estado de un bit
S = 40;
```

```
S ^=(1<<2); // 44 (101100)
// LSB (Primero de la derecha)
S = 40;
T = ((S) & -(S)); // 8 (001000)
__builtin_ctz(T); // nos entrega el indice del LSB

// Encender todos los bits
ll n = 3; // el tamaño del set de bits
S = 0;
S = (1<<n) - 1; // 7 (111)

// n es el tamaño de la mask (Alternativa)
// ll n = 64;
// for (ll subset = 0; subset < (1<<n); ++subset){
// Enumerar todos los posibles subsets de un bitmask
int mask = 18;
for (int subset = mask; subset; subset = (mask & (subset
-1))){
    cout << subset << "\n";
}

// otras funciones de c++
__builtin_popcount(32); // 100000 (base 2), only 1 bit is
// on
__builtin_popcount(30); // 11110 (base 2), 4 bits are on
__builtin_popcountll((1<<62)-1); // 2^62-1 has 62 bits
// on (near limit)
__builtin_ctz(32); // 100000 (base 2), 5 trailing zeroes
__builtin_ctz(30); // 11110 (base 2), 1 trailing zero
__builtin_ctzll(1<<62); // 2^62 has 62 trailing zeroes
```

1.4 Cosas de strings

```
// Funcion para convertir un caracter a un entero
int conv(char ch) {
    return ((ch >= 'a' && ch <= 'z') ? ch-'a' : ch-'A'+26);
}

string s="abc";
cout<<s.substr(1)<<"\n";
cout<<s.substr(0,1)<<"\n";

// El primer parametro es la posicion inicial
s.insert(3, "def");
cout<<s<<"\n";
// El primer parametro es la posicion y el segundo es la
// cantidad de caracteres a borrar
s.erase(3,3);
cout<<s<<"\n";
// El primer parametro es la posicion y el segundo es la
// cantidad de caracteres a reemplazar
s.replace(0,2, "def");
cout<<s<<"\n";
```

```

for(char& c:s){
    c=toupper(c);
}
cout<<s<<"\n";
for(char& c:s){
    c=tolower(c);
}
cout<<s<<"\n";
// De string a entero
s="123";int n;
istringstream(s)>>n;
cout<<n<<"\n";
// De entero a string
n=456;
ostringstream os;
os<<n;
s=os.str();
cout<<s<<"\n";

```

2 Estructuras de Datos

2.1 Ordered set

```

#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
tree_order_statistics_node_update> ordered_set;
// ----- CONSTRUCTOR ----- //
// 1. Para ordenar por MAX cambiar less<int> por greater<
int>
// 2. Para multiset cambiar less<int> por less_equal<int>
// Para borrar siendo multiset:
// int idx = st.order_of_key(value);
// st.erase(st.find_by_order(idx));
// ----- METHODS ----- //
st.find_by_order(k) // returns pointer to the k-th
smallest element
st.order_of_key(x) // returns how many elements are
smaller than x
st.find_by_order(k) == st.end() // true, if element does
not exist

```

2.2 Disjoint Set Union

```

struct dsu{
    vi p, size;
    int num_sets;
    int maxSize;

```

```

dsu(int n){
    p.assign(n, 0);
    size.assign(n, 1);
    num_sets = n;
    for (int i = 0; i<n; i++) p[i] = i;
}

int find_set(int i) {return (p[i] == i) ? i : (p[i] =
find_set(p[i]));}

bool is_same_set(int i, int j) {return find_set(i) ==
find_set(j);}

void unionSet(int i, int j){
    if (!is_same_set(i, j)){
        int a = find_set(i), b = find_set(j);
        if (size[a] < size[b])
            swap(a, b);
        p[b] = a;
        size[a] += size[b];
        maxSize = max(size[a], maxSize);
        num_sets--;
    }
}
};

```

2.3 Fenwick Tree

```

#define LSOne(S) ((S) & -(S))
struct fenwick_tree{
    vl ft; int n;
    fenwick_tree(int n): n(n){ft.assign(n+1, 0);}
    ll rsq(int j){
        ll sum = 0;
        for(;j;j -= LSOne(j)) sum += ft[j];
        return sum;
    }
    ll rsq(int i, int j) {return rsq(j) - (i == 1 ? 0 :
rsq(i-1));}
    void upd(int i, ll v){
        for (; i <= n; i += LSOne(i)) ft[i] += v;
    }
};

```

2.4 ST iterativo

```

struct segtree{
    int n; vl v; ll nulo = 0;
    ll op(ll a, ll b) {return a + b;}
    segtree(int n) : n(n), v(2*n, nulo){}

```

```

segtree(vl &a) : n(sz(a)), v(2*n){
    for(int i = 0; i<n; i++) v[n + i] = a[i];
    for (int i = n-1; i>=1; --i) v[i] = op(v[i<<1], v
        [i<<1|1]);
}

void upd(int k, ll nv){
    for (v[k += n] = nv; k > 1; k >>= 1) v[k>>1] = op
        (v[k], v[k^1]);
}

ll get(int l, int r){
    ll vl = nulo, vr = nulo;
    for (l += n, r += n+1; l < r; l >>= 1, r >>= 1){
        if (l&1) vl = op(vl, v[l++]);
        if (r&1) vr = op(v[--r], vr);
    }
    return op(vl, vr);
}
};

```

2.5 Segment Tree

```

int nullValue = 0;

struct nodeST{
    nodeST *left, *right;
    int l, r; ll value, lazy, lazy1;

    nodeST(vi &v, int l, int r) : l(l), r(r){
        int m = (l+r)>>1;
        lazy = 0;
        lazy1 = 0;
        if (l!=r){
            left = new nodeST(v, l, m);
            right = new nodeST(v, m+1, r);
            value = opt(left->value, right->value);
        }
        else{
            value = v[l];
        }
    }

    ll opt(ll leftValue, ll rightValue){
        return leftValue + rightValue;
    }

    void propagate(){
        if(lazy1){
            value = lazy1 * (r-l+1);
            if (l != r){
                left->lazy1 = lazy1, right->lazy1 = lazy1
                ;
                left->lazy = 0, right->lazy = 0;
            }
        }
    }
}

```

```

        lazy1 = 0;
        lazy = 0;
    }
    else{
        value += lazy * (r-l+1);
        if (l != r){
            if(left->lazy1) left->lazy1 += lazy;
            else left->lazy += lazy;
            if(right->lazy1) right->lazy1 += lazy;
            else right->lazy += lazy;
        }
        lazy = 0;
    }
}

ll get(int i, int j){
    propagate();
    if (l>=i && r<=j) return value;
    if (l>j || r<i) return nullValue;

    return opt(left->get(i, j), right->get(i, j));
}

void upd(int i, int j, int nv){
    propagate();
    if (l>j || r<i) return;
    if (l>=i && r<=j){
        lazy += nv;
        propagate();
        // value = nv;
        return;
    }

    left->upd(i, j, nv);
    right->upd(i, j, nv);

    value = opt(left->value, right->value);
}

void upd(int k, int nv){
    if (l>k || r<k) return;
    if (l>=k && r<=k){
        value = nv;
        return;
    }

    left->upd(k, nv);
    right->upd(k, nv);

    value = opt(left->value, right->value);
}

void upd1(int i, int j, int nv){
    propagate();
    if (l>j || r<i) return;
    if (l>=i && r<=j){
        lazy = 0;
        lazy1 = nv;
    }
}

```

```

        propagate();
        return;
    }
    left->upd1(i, j, nv);
    right->upd1(i, j, nv);
    value = opt(left->value, right->value);
}
};

```

2.6 Persistent ST

```

const ll nullVal = 0;
ll oper(ll n1, ll n2){
    return n1 + n2;
}

struct Vertex {
    Vertex *l, *r;
    ll val;

    Vertex(ll num) : l(nullptr), r(nullptr), val(num) {}
    Vertex(Vertex *l, Vertex *r) : l(l), r(r), val(
        nullVal) {
        if (l) val = oper(val, l->val);
        if (r) val = oper(val, r->val);
    }
};

struct perST{
    ll n;
    // rts es donde guardamos las roots nuevas creadas
    vector<Vertex*> rts;

    // Creacion de la root inicial y asignacion de
    // tamaño de la base de PerST
    perST(vl& a): n(a.size()) {
        rts.pb(build(a, 0, n - 1));
    }

    // build del ST (funciona igual que uno normal solo
    // que con punteros)
    Vertex* build(vl& a, ll tl, ll tr) {
        if (tl == tr)
            return new Vertex(a[tl]);
        ll tm = (tl + tr) >> 1;
        return new Vertex(build(a, tl, tm), build(a, tm
            + 1, tr));
    }

    // get del ST (funciona igual que uno normal)
    // el valor de tl y tr sirven para saber en que rango
    // nos encontramos
    ll get(Vertex* v, ll tl, ll tr, ll l, ll r) {
        if (l > r)

```

```

            return nullVal;
        if (l == tl && tr == r)
            return v->val;
        ll tm = (tl + tr) >> 1;
        return oper(get(v->l, tl, tm, l, min(r, tm)),
            get(v->r, tm+1, tr, max(l, tm+1), r));
    }

    // el upd del perST recorre el arbol reciclando nodos
    // que
    // quedan igual y creando nuevos para los cuales
    // cambia.
    // Retorna el vertice root del nuevo ST
    Vertex* upd(Vertex* v, ll tl, ll tr, ll pos, ll
        newVal) {
        if (tl == tr)
            return new Vertex(newVal);
        ll tm = (tl + tr) >> 1;
        if (pos <= tm)
            return new Vertex(upd(v->l, tl, tm, pos,
                newVal), v->r);
        else
            return new Vertex(v->l, upd(v->r, tm+1, tr,
                pos, newVal));
    }

    // simplificaciones de upd y get
    // el valor de k es igual a la version en la cual
    // trabajaremos
    Vertex* upd(ll k, ll pos, ll newVal){
        return upd(rts[k], 0, n - 1, pos, newVal);
    }

    ll get(ll k, ll a, ll b){
        return get(rts[k], 0, n - 1, a, b);
    }
};

```

2.7 Distinct Values Queries

```

// insertar Persistent ST de sumas

int main() {
    ll n, k; cin >> n >> k;
    vl vals(n, 0);
    forx(i, n) cin >> vals[i];

    // creacion del perST
    vl basSt(n, 0);
    perST vers(basSt);

    // Cada ST estara guardando si el i-esimo elemento es
    // una
    // ultima ocurrencia y la idea es crear una nueva
    // version

```

```
// por cada actualizacion de este dato
map<ll, ll> lastOcur;
for(int i = 1; i <= n; i++){
    if (!lastOcur[vals[i - 1]]){
        vers.rts.pb(vers.upd(i - 1, i - 1, 1));
        lastOcur[vals[i - 1]] = i;
    } else {
        vers.rts.pb(vers.upd(i - 1, i - 1, 1));
        vers.rts[i] = vers.upd(i, lastOcur[vals[i - 1]] - 1, 0);
        lastOcur[vals[i - 1]] = i;
    }
}

// Para hacer la consulta de la cantidad de
// distintos en un rango basta con hacer una
// tipica consulta pero en la version de b
while(k--){
    ll a, b; cin >> a >> b;
    a--; b--;
    cout << vers.get(b + 1, a, b) << ln;
}
}
```

3 Programacion dinamica

3.1 LIS

```
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);

    int n; cin >> n;
    vl vals(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) cin >> vals[i];

    vl copia(vals);
    sort(copia.begin(), copia.end());

    map <ll, ll> dicc;
    for (int i=0; i<n; i++) if (!dicc.count(copia[i])) dicc[
        copia[i]] = i;

    vl baseSt(n, 0);
    nodeSt st(baseSt, 0, n - 1);
    ll maxi = 0;
    for (ll pVal:vals) {
        ll op = st.get(0, dicc[pVal] - 1) + 1;
        maxi = max(maxi, op);
        st.act1(dicc[pVal], op);
    }
    cout << maxi << ln;
}
```

3.2 Bin Packing

```
int main() {
    ll n, capacidad;
    cin >> n >> capacidad;
    vl pesos(n, 0);
    forx(i, n) cin >> pesos[i];

    vector<pll> dp((1 << n));
    dp[0] = {1, 0};
    // dp[X] = {#numero de paquetes, peso de min paquete}

    // La idea es probar todos los subset y en cada uno
    // preguntarnos
    // quien es mejor para subirse de ultimo buscando
    // minimizar
    // primero el numero de paquetes
    for (int subset = 1; subset < (1 << n); subset++) {
        dp[subset] = {21, 0};

        for (int iPer = 0; iPer < n; iPer++) {
            if ((subset >> iPer) & 1) {
                pll ant = dp[subset ^ (1 << iPer)];
                ll k = ant.ff;
                ll w = ant.ss;

                if (w + pesos[iPer] > capacidad) {
                    k++;
                    w = min(pesos[iPer], w);
                } else {
                    w += pesos[iPer];
                }

                dp[subset] = min(dp[subset], {k, w});
            }
        }

        cout << dp[(1 << n) - 1].ff << ln;
    }
}
```

3.3 Algoritmo de Kadane 2D

```
int main() {
    ll fil, col; cin >> fil >> col;
    vector<vl> grid(fil, vl(col, 0));

    // Algoritmo de Kadane/DP para suma maxima de una matriz
    // 2D en o(n^3)
    for (int i = 0; i < fil; i++) {
        for (int e = 0; e < col; e++) {
            ll num; cin >> num;
            if (e > 0) grid[i][e] = num + grid[i][e - 1];
            else grid[i][e] = num;
        }
    }
}
```

```

    }
}
ll maxGlobal = LONG_LONG_MIN;
for(int l=0;l<col;l++){
    for(int r=1;r<col;r++){
        ll maxLoc=0;
        for(int row=0;row<fil;row++){
            if (l>0) maxLoc+=grid[row][r]-grid[row][l-1];
            else maxLoc+=grid[row][r];
            if (maxLoc<0) maxLoc=0;
            maxGlobal= max(maxGlobal,maxLoc);
        }
    }
}
}

```

3.4 Knuth Clasico

```

const int N = 1010;
const int INF = (int) 1e9;
int v[N], dp[N][N], sum[N], best[N][N];

int main() {
    ios::sync_with_stdio(0);
    cin.tie(0);
    int n;
    while(cin >> n) {
        if(n == 0) break;
        for(int i = 0; i < n; i++) cin >> v[i];

        for(int i = 0; i < n; i++) {
            sum[i+1] = sum[i] + v[i];
        }

        for(int i = 0; i < n; i++) best[i][i] = i;
        for(int len = 2; len <= n; ++len) {
            for(int i = 0; i+len-1 < n; ++i) {
                int j = i+len-1;
                int &ref = dp[i][j];
                ref = INF;
                for(int k = best[i][j-1]; k <= best[i+1][j]; ++k) {
                    if(k < j) {
                        int cur = dp[i][k] + dp[k+1][j];
                        if(cur < ref) {
                            best[i][j] = k;
                            ref = cur;
                        }
                    }
                }
                ref += sum[j+1] - sum[i];
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    cout << dp[0][n-1] << '\n';
}
return 0;
}

```

3.5 Edit Distances

```

int editDistances(string& wor1, string& wor2) {
    // O(tam1*tam2)
    // minimo de letras que debemos insertar, eliminar o
    // reemplazar
    // de wor1 para obtener wor2
    ll tam1=wor1.size();
    ll tam2=wor2.size();
    vector<vl> dp(tam2+1, vl(tam1+1, 0));
    for(int i=0; i<=tam1; i++) dp[0][i]=i;
    for(int i=0; i<=tam2; i++) dp[i][0]=i;
    dp[0][0]=0;
    for(int i=1; i<=tam2; i++) {
        for(int j=1; j<=tam1; j++) {
            ll op1 = min(dp[i-1][j], dp[i][j-1])+1;
            // el minimo entre eliminar o insertar
            ll op2 = dp[i-1][j-1]; // reemplazarlo
            if(wor1[j-1] != wor2[i-1]) op2++;
            // si el reemplazo tiene efecto o quedo igual
            dp[i][j]=min(op1, op2);
        }
    }
    return dp[tam2][tam1];
}

```

3.6 Divide Conquer

```

int m, n;
vector<long long> dp_before(n), dp_cur(n);

long long C(int i, int j);
// compute dp_cur[l], ... dp_cur[r] (inclusive)
void compute(int l, int r, int optl, int opttr) {
    if (l > r)
        return;

    int mid = (l + r) >> 1;
    pair<long long, int> best = {LLONG_MAX, -1};

    for (int k = optl; k <= min(mid, opttr); k++) {
        best = min(best, {(k ? dp_before[k-1] : 0) + C(
            k, mid), k});
    }
    dp_cur[mid] = best.first;
}

```



```

    int opt = best.second;
    compute(l, mid - 1, optl, opt);
    compute(mid + 1, r, opt, opttr);
}

int solve() {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        dp_before[i] = C(0, i);

    for (int i = 1; i < m; i++) {
        compute(0, n - 1, 0, n - 1);
        dp_before = dp_cur;
    }

    return dp_before[n - 1];
}

```

3.7 Knuth

```

#Condiciones
#C(b, c) <= C(a, d)
#C(a, c) + C(b, d) <= C(a, d) + C(b, c)
int solve() {
    int N;
    ... // read N and input
    int dp[N][N], opt[N][N];

    auto C = [&](int i, int j) {
        ... // Implement cost function C.
    };

    for (int i = 0; i < N; i++) {
        opt[i][i] = i;
        ... // Initialize dp[i][i] according to the
             // problem
    }

    for (int i = N-2; i >= 0; i--) {
        for (int j = i+1; j < N; j++) {
            int mn = INT_MAX;
            int cost = C(i, j);
            for (int k = opt[i][j-1]; k <= min(j-1, opt[i+1][j]); k++) {
                if (mn >= dp[i][k] + dp[k+1][j] + cost) {
                    opt[i][j] = k;
                    mn = dp[i][k] + dp[k+1][j] + cost;
                }
            }
            dp[i][j] = mn;
        }
    }

    cout << dp[0][N-1] << endl;
}

```

4 Grafos

4.1 Puentes

```

vector<bool> visited;
vi tin, low;
int timer;

void IS_BRIDGE(int u, int v, vii &puentes) {
    puentes.push_back({min(u, v), max(u, v)});
}

void dfs(vector<vi> &adj, vii &puentes, int v, int p = -1) {
    visited[v] = true;
    tin[v] = low[v] = timer++;
    for (int to : adj[v]) {
        if (to == p) continue;
        if (visited[to]) {
            low[v] = min(low[v], tin[to]);
        } else {
            dfs(adj, puentes, to, v);
            low[v] = min(low[v], low[to]);
            if (low[to] > tin[v])
                IS_BRIDGE(v, to, puentes);
        }
    }
}

void find_bridges(vector<vi> &adj, vii &puentes, int n) {
    timer = 0;
    visited.assign(n, false);
    tin.assign(n, -1);
    low.assign(n, -1);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i])
            dfs(adj, puentes, i);
    }
}

```

4.2 Puntos de Articulacion

```

int n;
vector<vector<int>> adj;

vector<bool> visited;
vector<int> tin, low;
int timer;

void dfs(int v, int p = -1) {
    visited[v] = true;
    tin[v] = low[v] = timer++;
}

```

```

int children=0;
for (int to : adj[v]) {
    if (to == p) continue;
    if (visited[to]) {
        low[v] = min(low[v], tin[to]);
    } else {
        dfs(to, v);
        low[v] = min(low[v], low[to]);
        if (low[to] >= tin[v] && p!=-1)
            IS_CUTPOINT(v);
        ++children;
    }
}
if (p == -1 && children > 1)
    IS_CUTPOINT(v);
}

void find_cutpoints() {
    timer = 0;
    visited.assign(n, false);
    tin.assign(n, -1);
    low.assign(n, -1);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i])
            dfs(i);
    }
}

```

4.3 Puntos de articulacion y puentes (dirigidos)

```

//Puntos de articulacion: son vertices que desconectan el
//grafo
//Puentes: son aristas que desconectan el grafo
//Usar para grafos dirigidos
//O(V+E)
vi dfs_num, dfs_low, dfs_parent, articulation_vertex;
int dfsNumberCounter, dfsRoot, rootChildren;
vector<vii> adj;
void articulationPointAndBridge(int u) {
    dfs_num[u] = dfsNumberCounter++;
    dfs_low[u] = dfs_num[u]; // dfs_low[u] <= dfs_num[u]
    for (auto &[v, w] : adj[u]) {
        if (dfs_num[v] == -1) { // una arista de arbol
            dfs_parent[v] = u;
            if (u == dfsRoot) ++rootChildren; // vaso
            //especial, raiz
            articulationPointAndBridge(v);
            if (dfs_low[v] >= dfs_num[u]) // para puntos
            //de articulacion
                articulation_vertex[u] = 1;
            if (dfs_low[v] > dfs_num[u]) // para puentes
                printf(" (%d, %d) is a bridge\n", u, v);
            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v]); //

```

```

        }
        else if (v != dfs_parent[u]) // si es ciclo no
        //trivial
            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_num[v]); //
            //entonces actualizar
    }
}
int main() {
    dfs_num.assign(V, -1); dfs_low.assign(V, 0);
    dfs_parent.assign(V, -1); articulation_vertex.assign(
        V, 0);
    dfsNumberCounter = 0;
    adj.resize(V);

    printf("Bridges:\n");
    for (int u = 0; u < V; ++u)
        if (dfs_num[u] == -1) {
            dfsRoot = u; rootChildren = 0;
            articulationPointAndBridge(u);
            articulation_vertex[dfsRoot] = (rootChildren
                > 1); // caso especial
        }
    printf("Articulation Points:\n");
    for (int u = 0; u < V; ++u)
        if (articulation_vertex[u])
            printf(" Vertex %d\n", u);
}

```

4.4 Algoritmo Kosajaru

```

//Encontrar las componentes fuertemente conexas en un
//grafo dirigido
//Componente fuertemente conexa: es un grupo de nodos en
//el que hay
//un camino dirigido desde cualquier nodo hasta cualquier
//otro nodo dentro del grupo.
void Kosaraju(int u, int pass) {
    dfs_num[u] = 1;
    vii &neighbor = (pass == 1) ? AL[u] : AL_T[u];
    for (auto &[v, w] : neighbor)
        if (dfs_num[v] == UNVISITED)
            Kosaraju(v, pass);
    S.push_back(u);
}

int main() {
    S.clear();
    dfs_num.assign(N, UNVISITED);
    for (int u = 0; u < N; ++u)
        if (dfs_num[u] == UNVISITED)
            Kosaraju(u, 1);
    numSCC = 0;
    dfs_num.assign(N, UNVISITED);
    for (int i = N-1; i >= 0; --i)

```

```

    if (dfs_num[S[i]] == UNVISITED)
        ++numSCC, Kosaraju(S[i], 2);
    printf("There are %d SCCs\n", numSCC);
}

```

4.5 Tarjan

```

vi low, num, comp, g[nax];
int scc, timer;
stack<int> st;
void tjn(int u) {
    low[u] = num[u] = timer++; st.push(u); int v;
    for(int v: g[u]) {
        if(num[v]==-1) tjn(v);
        if(comp[v]==-1) low[u] = min(low[u], low[v]);
    }
    if(low[u]==num[u]) {
        do{ v = st.top(); st.pop(); comp[v]=scc;
        }while(u != v);
        ++scc;
    }
}
void callt(int n) {
    timer = scc = 0;
    num = low = comp = vector<int>(n,-1);
    for(int i = 0; i<n; i++) if(num[i]==-1) tjn(i);
}

```

4.6 Dijkstra

```

//Camino mas cortos
//NO USAR CON PESOS NEGATIVOS, usar Bellman Ford o SPFA(
// mas rapido)
// O ((V+E)*log V)
vi dijkstra(vector<vii> &adj, int s, int V){
    vi dist(V+1, INT_MAX); dist[s] = 0;
    priority_queue<ii, vii, greater<ii> > pq; pq.push(ii(0, s));
    while(!pq.empty()){
        ii front = pq.top(); pq.pop();
        int d = front.first, u = front.second;
        if (d > dist[u]) continue;
        for (int j = 0; j < (int)adj[u].size(); j++){
            ii v = adj[u][j];
            if (dist[u] + v.second < dist[v.first]){
                dist[v.first] = dist[u] + v.second;
                pq.push(ii(dist[v.first], v.first));
            }
        }
    }
    return dist;
}

```

```

}

```

4.7 Bellman Ford

```

vi bellman_ford(vector<vii> &adj, int s, int n){
    vi dist(n, INF); dist[s] = 0;
    for (int i = 0; i<n-1; i++){
        bool modified = false;
        for (int u = 0; u<n; u++){
            if (dist[u] != INF)
                for (auto &[v, w] : adj[u]){
                    if (dist[v] <= dist[u] + w) continue;
                    dist[v] = dist[u] + w;
                    modified = true;
                }
            if (!modified) break;
        }
    }
    bool negativeCicle = false;
    for (int u = 0; u<n; u++){
        if (dist[u] != INF)
            for (auto &[v, w] : adj[u]){
                if (dist[v] > dist[u] + w) negativeCicle = true;
            }
    }
    return dist;
}

```

4.8 Floyd Warshall

```

//Camino minimo entre todos los pares de vertices
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    int n; cin >> n;
    vector<vi> adjMat(n+1, vi(n+1));
    //Condicion previa: adjMat[i][j] contiene peso de la
    // arista (i, j)
    //o INF si no existe esa arista
    for (int k = 0; k < n; ++k) {
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            for (int j = 0; j < n; ++j) {
                if (adjMat[i][k] < INF && adjMat[k][j] <
                    INF)
                    adjMat[i][j] = min(adjMat[i][j],
                        adjMat[i][k] + adjMat[k][j]);
            }
        }
    }
}

```

4.9 MST Kruskal

```
//Arbol de minima expansion
//O(E*log V)
int main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    vector<pair<int, ii>> adj; //Los pares son: {peso, {
        vertice, vecino}}

    for (int i = 0; i < m; i++) {
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        adj.push_back(make_pair(w, ii(x, y)));
    }

    sort(adj.begin(), adj.end());

    int mst_costo = 0, tomados = 0;
    dsu UF(n);
    for (int i = 0; i < m && tomados < n-1; i++) {
        pair<int, ii> front = adj[i];
        if (!UF.is_same_set(front.second.first, front.
            second.second)) {
            tomados++;
            mst_costo += front.first;
            UF.unionSet(front.second.first, front.second.
                second);
        }
    }
    cout << mst_costo;
}
```

4.10 MST Prim

```
vector<vii> adj;
vi tomado;
priority_queue<ii> pq;
void process(int u) {
    tomado[u] = 1;
    for (auto &[v, w] : adj[u]) {
        if (!tomado[v]) pq.emplace(-w, -v);
    }
}

int prim(int v, int n) {
    tomado.assign(n, 0);
    process(0);
    int mst_costo = 0, tomados = 0;
    while (!pq.empty()) {
        auto [w, u] = pq.top(); pq.pop();
        w = -w; u = -u;
        if (tomado[u]) continue;
        mst_costo += w;
        process(u);
    }
}
```

```
tomados++;
if (tomados == n-1) break;
}
return mst_costo;
}
```

4.11 Shortest Path Faster Algorithm

```
//Algoritmo mas rapido de ruta minima
//O(V*E) peor caso, O(E) en promedio.
bool spfa(vector<vii> &adj, vector<int> &d, int s, int n)
{
    d.assign(n, INF);
    vector<int> cnt(n, 0);
    vector<bool> inqueue(n, false);
    queue<int> q;

    d[s] = 0;
    q.push(s);
    inqueue[s] = true;
    while (!q.empty()) {
        int v = q.front();
        q.pop();
        inqueue[v] = false;

        for (auto edge : adj[v]) {
            int to = edge.first;
            int len = edge.second;

            if (d[v] + len < d[to]) {
                d[to] = d[v] + len;
                if (!inqueue[to]) {
                    q.push(to);
                    inqueue[to] = true;
                    cnt[to]++;
                    if (cnt[to] > n)
                        return false; //ciclo negativo
                }
            }
        }
    }
    return true;
}
```

4.12 Camino mas corto de longitud fija

```
/*
Modificar operacion * de matrix de esta forma:
En la exponenciacion binaria inicializar matrix ans = b
*/
matrix operator * (const matrix &b) {
    matrix ans(this->r, b.c, vector<vl>(this->r, vl(b.c,
        INFL)));
}
```

```

    for (int i = 0; i < this->r; i++) {
        for (int k = 0; k < b.r; k++) {
            for (int j = 0; j < b.c; j++) {
                ans.m[i][j] = min(ans.m[i][j], m[i][k] +
                                   b.m[k][j]);
            }
        }
    }
    return ans;
}

int main() {
    int n, m, k; cin >> n >> m >> k;
    vector<vl> adj(n, vl(n, INFL));
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        ll a, b, c; cin >> a >> b >> c; a--; b--;
        adj[a][b] = min(adj[a][b], c);
    }
    matrix graph(n, n, adj);
    graph = pow(graph, k-1);
    cout << (graph.m[0][n-1] == INFL ? -1 : graph.m[0][n-1]) << "\n";
    return 0;
}

```

5 Flujos

5.1 Edmonds-Karp

```

//O(V * E^2)
ll bfs(vector<vi> &adj, vector<vl> &capacity, int s, int
t, vi& parent) {
    fill(parent.begin(), parent.end(), -1);
    parent[s] = -2;
    queue<pll> q;
    q.push({s, INFL});
    while (!q.empty()) {
        int cur = q.front().first;
        ll flow = q.front().second;
        q.pop();
        for (int next : adj[cur]) {
            if (parent[next] == -1LL && capacity[cur][
next]) {
                parent[next] = cur;
                ll new_flow = min(flow, capacity[cur][
next]);
                if (next == t)

```

```

                return new_flow;
                q.push({next, new_flow});
            }
        }
    }
    return 0;
}

ll maxflow(vector<vi> &adj, vector<vl> &capacity, int s,
int t, int n) {
    ll flow = 0;
    vi parent(n);
    ll new_flow;
    while ((new_flow = bfs(adj, capacity, s, t, parent)))
    {
        flow += new_flow;
        int cur = t;
        while (cur != s) {
            int prev = parent[cur];
            capacity[prev][cur] -= new_flow;
            capacity[cur][prev] += new_flow;
            cur = prev;
        }
    }
    return flow;
}

```

5.2 Dinic

```

//O(V^2 * E)
//En redes unitarias: O(E * sqrt(V))
struct FlowEdge {
    int v, u;
    ll cap, flow = 0;
    FlowEdge(int v, int u, ll cap) : v(v), u(u), cap(cap)
    {}
};

struct Dinic {
    const ll flow_inf = INFL;
    vector<FlowEdge> edges;
    vector<vi> adj;
    int n, m = 0;
    int s, t;
    vi level, ptr;
    queue<int> q;

    Dinic(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) {
        adj.resize(n);
        level.resize(n);
        ptr.resize(n);
    }
}

```

```

void add_edge(int v, int u, ll cap) {
    edges.emplace_back(v, u, cap);
    edges.emplace_back(u, v, 0);
    adj[v].push_back(m);
    adj[u].push_back(m + 1);
    m += 2;
}

bool bfs() {
    while (!q.empty()) {
        int v = q.front();
        q.pop();
        for (int id : adj[v]) {
            if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1)
                continue;
            if (level[edges[id].u] != -1)
                continue;
            level[edges[id].u] = level[v] + 1;
            q.push(edges[id].u);
        }
    }
    return level[t] != -1;
}

ll dfs(int v, ll pushed) {
    if (pushed == 0)
        return 0;
    if (v == t)
        return pushed;
    for (int& cid = ptr[v]; cid < (int)adj[v].size(); cid++) {
        int id = adj[v][cid];
        int u = edges[id].u;
        if (level[v] + 1 != level[u] || edges[id].cap - edges[id].flow < 1)
            continue;
        ll tr = dfs(u, min(pushed, edges[id].cap - edges[id].flow));
        if (tr == 0)
            continue;
        edges[id].flow += tr;
        edges[id ^ 1].flow -= tr;
        return tr;
    }
    return 0;
}

ll flow() {
    ll f = 0;
    while (true) {
        fill(all(level), -1);
        level[s] = 0;
        q.push(s);
        if (!bfs())
            break;
        fill(all(ptr), 0);
    }
}

```

```

        while (ll pushed = dfs(s, flow_inf)) {
            f += pushed;
        }
    }
    return f;
}
};

```

5.3 Maximum Bipartite Matching

```

int main() {
    //n: numero de grupo 1, m: numero de grupo 2, k:
    //posibles conexiones
    int n, m, k; cin >> n >> m >> k;
    Dinic graph(n+m+2, 0, n+m+1);
    //nodo inicial ficticio "0" que se dirige a todos los
    //del grupo 1
    for (int i = 1; i <= n; i++) graph.add_edge(0, i, 1LL);
    //nodo final ficticio "n+m+1" al que se dirigen todos
    //los del grupo 2
    for (int i = 1; i <= m; i++) graph.add_edge(n+i, n+m+1,
        1LL);

    //anadiendo las posibles conexiones al grafo
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        int a, b; cin >> a >> b;
        graph.add_edge(a, n+b, 1LL);
    }

    //numero de emparejamientos realizados
    cout << graph.flow() << ln;

    //emparejamientos realizados
    for (FlowEdge edge : graph.edges) {
        if (edge.v != 0 && edge.u != n+m+1 && edge.flow >
            0) {
            cout << edge.v << " " << edge.u - n << ln;
        }
    }
    return 0;
}

```

5.4 Minimum cost flow

```

struct Edge {
    ll from, to, capacity, cost;
    Edge(ll from, ll to, ll capacity, ll cost) : from(
        from), to(to), capacity(capacity), cost(cost) {}
};

vector<vl> adj, cost, capacity;

```

```

void shortest_paths(int n, int v0, vl &d, vector<ll> &p)
{
    d.assign(n, INFL);
    d[v0] = 0;
    vector<bool> inq(n, false);
    queue<ll> q;
    q.push(v0);
    p.assign(n, -1);
    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        inq[u] = false;
        for (int v : adj[u]) {
            if (capacity[u][v] > 0 && d[v] > d[u] + cost[
                u][v]) {
                d[v] = d[u] + cost[u][v];
                p[v] = u;
                if (!inq[v]) {
                    inq[v] = true;
                    q.push(v);
                }
            }
        }
    }
}

ll min_cost_flow(int N, vector<Edge> &edges, ll K, int s,
    int t) {
    adj.assign(N, vl());
    cost.assign(N, vl(N, 0));
    capacity.assign(N, vl(N, 0));
    for (Edge e : edges) {
        adj[e.from].push_back(e.to);
        adj[e.to].push_back(e.from);
        cost[e.from][e.to] = e.cost;
        cost[e.to][e.from] = -e.cost;
        capacity[e.from][e.to] = e.capacity;
    }

    ll flow = 0;
    ll cost = 0;
    vl d, p;
    while (flow < K) {
        shortest_paths(N, s, d, p);
        if (d[t] == INFL)
            break;

        // find max flow on that path
        ll f = K - flow;
        int cur = t;
        while (cur != s) {
            f = min(f, capacity[p[cur]][cur]);
            cur = p[cur];
        }

        // apply flow

```

```

        flow += f;
        cost += f * d[t];
        cur = t;
        while (cur != s) {
            capacity[p[cur]][cur] -= f;
            capacity[cur][p[cur]] += f;
            cur = p[cur];
        }
    }
    if (flow < K) return -1;
    else return cost;
}

```

6 Matemáticas

6.1 Descomposicion en primos (y mas cosas)

```

ll _sieve_size;
bitset<10000010> bs;
vl p;
void sieve(ll upperbound) {
    _sieve_size = upperbound+1;
    bs.set();
    bs[0] = bs[1] = 0;
    for (ll i = 2; i < _sieve_size; ++i) if (bs[i]) {
        for (ll j = i*i; j < _sieve_size; j += i) bs[j] =
            0;
        p.push_back(i);
    }
}
// O( sqrt(N) / log(sqrt(N)) )
vl primeFactors(ll N) {
    vl factors;
    for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
        N); ++i)
        while (N%p[i] == 0) { //Hallado un primo
            para N
            N /= p[i]; //Eliminarlo de N
            factors.push_back(p[i]);
        }
    if (N != 1) factors.push_back(N); //El N restante es
    primo
    return factors;
}

int main() {
    sieve(10000000);

    //Variantes del algoritmo

    //Contar el numero de divisores de N
    int numDiv(ll N) {
        int ans = 1; //Empezar con ans = 1

```

```

for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
N); ++i) {
    int power = 0; //Contar la potencia
    while (N%p[i] == 0) { N /= p[i]; ++power; }
    ans *= power+1; //Seguir la formula
}
return (N != 1) ? 2*ans : ans; //Ultimo factor = N^1
}

//Suma de los divisores de N
//N = a^i * b^i * ... * c^k => N = (a^(i+1) - 1) / (a-1)
+ ...
ll sumDiv(ll N) {
    ll ans = 1; // empezar con ans = 1
    for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
N); ++i) {
        ll multiplier = p[i], total = 1;
        while (N%p[i] == 0) {
            N /= p[i];
            total += multiplier;
            multiplier *= p[i];
        }
        ans *= total; // total para
                    // este
    }
    if (N != 1) ans *= (N+1); // N^2-1/N-1 = N+1
    return ans;
}

```

6.2 Criba Modificada

```

//Criba modificada
/*
Si hay que determinar el numero de factores primos para
muchos (o un rango) de enteros.
La mejor solucion es el algoritmo de criba modificada  $O(N \log \log N)$ 
*/
int numDiffPFarr[MAX_N+10] = {0}; // e.g., MAX_N = 10^7
for (int i = 2; i <= MAX_N; ++i)
    if (numDiffPFarr[i] == 0) // i is a prime number
        for (int j = i; j <= MAX_N; j += i)
            ++numDiffPFarr[j]; // j is a multiple of i

//Similar para EulerPhi
int EulerPhi[MAX_N+10];
for (int i = 1; i <= MAX_N; ++i) EulerPhi[i] = i;
for (int i = 2; i <= MAX_N; ++i)
    if (EulerPhi[i] == i) // i is a prime number
        for (int j = i; j <= MAX_N; j += i)
            EulerPhi[j] = (EulerPhi[j]/i) * (i-1);

```

6.3 Funcion Totient de Euler

```

//EulerPhi(N): contar el numero de enteros positivos < N
que son primos relativos a N.
//El vector p es el que genera la criba de eratostenes
//Phi(N) = N * productoria(1 - (1/pi))
ll EulerPhi(ll N) {
    ll ans = N; // Empezar con ans = N
    for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i]*p[i] <=
N); ++i) {
        if (N%p[i] == 0) ans -= ans/p[i]; //contar
        factores
        while (N%p[i] == 0) N /= p[i]; //primos unicos
    }
    if (N != 1) ans -= ans/N; // ultimo factor
    return ans;
}

```

6.4 Exponenciacion binaria

```

ll binpow(ll b, ll n, ll m) {
    b %= m;
    ll res = 1;
    while (n > 0) {
        if (n & 1)
            res = res * b % m;
        b = b * b % m;
        n >>= 1;
    }
    return res % m;
}

```

6.5 Exponenciacion matricial

```

struct matrix {
    int r, c; vector<vl> m;
    matrix(int r, int c, const vector<vl> &m) : r(r), c(c)
    , m(m) {}

    matrix operator * (const matrix &b) {
        matrix ans(this->r, b.c, vector<vl>(this->r, vl(b
        .c, 0)));
        for (int i = 0; i < this->r; i++) {
            for (int k = 0; k < b.r; k++) {
                if (m[i][k] == 0) continue;
                for (int j = 0; j < b.c; j++) {
                    ans.m[i][j] += mod(m[i][k], MOD) *
                    mod(b.m[k][j], MOD);
                    ans.m[i][j] = mod(ans.m[i][j], MOD);
                }
            }
        }
    }
}

```



```

    }
    return ans;
}
};

matrix pow(matrix &b, ll p){
    matrix ans(b.r, b.c, vector<vl>(b.r, vl(b.c, 0)));
    for (int i = 0; i < b.r; i++) ans.m[i][i] = 1;
    while (p){
        if (p&1){
            ans = ans*b;
        }
        b = b*b;
        p >>= 1;
    }
    return ans;
}

```

6.6 Fibonacci Matriz

```

/*
[1 1] p    [fib(p+1) fib(p)]
[1 0]  =   [fib(p)   fib(p-1)]
*/
vector<vl> matriz = {{1, 1}, {1, 0}};
matrix m(2, 2, matriz);

ll n; cin >> n;
cout << pow(m, n).m[0][1] << "\n";

```

6.7 GCD y LCM

```

//O(log10 n) n == max(a, b)
int gcd(int a, int b) { return b == 0 ? a : gcd(b, a%b); }
int lcm(int a, int b) { return a / gcd(a, b) * b; }
//gcd(a, b, c) = gcd(a, gcd(b, c))

```

6.8 Algoritmo Euclideo Extendido

```

// O(log(min(a, b)))
ll extEuclid(ll a, ll b, ll &x, ll &y){
    ll xx = y = 0;
    ll yy = x = 1;
    while (b){
        ll q = a/b;
        ll t = b; b = a%b; a = t;
        t = xx; xx = x-q*xx; x = t;
        t = yy; yy = y-q*yy; y = t;
    }
}

```

```

    return a;    //Devuelve gcd(a, b)
}

```

6.9 Inverso modular

```

ll mod(ll a, ll m){
    return ((a%m) + m) % m;
}

ll modInverse(ll b, ll m){
    ll x, y;
    ll d = extEuclid(b, m, x, y);    //obtiene b*x + m*y == d
    if (d != 1) return -1;           //indica error
    // b*x + m*y == 1, ahora aplicamos (mod m) para
    // obtener b*x == 1 (mod m)
    return mod(x, m);
}

// Otra forma
// O(log MOD)
ll inv(ll a){
    return binpow(a, MOD-2, MOD);
}

```

6.10 Coeficientes binomiales

```

const int MAX_N = 100010;    // MOD > MAX_N
// O(log MOD)
ll inv(ll a){
    return binpow(a, MOD-2, MOD);
}

ll fact[MAX_N];
// O(log MOD)
ll C(int n, int k){
    if (n < k) return 0;
    return (((fact[n] * inv(fact[k])) % MOD) * inv(fact[n-k])) % MOD;
}

int main() {
    fact[0] = 1;
    for (int i = 1; i < MAX_N; i++){
        fact[i] = (fact[i-1]*i) % MOD;
    }
    cout << C(100000, 50000) << "\n";
    return 0;
}

```

6.11 Logaritmo Discreto

```
// Returns minimum x for which  $a^x \mod m = b \mod m$ .
int solve(int a, int b, int m) {
    a %= m, b %= m;
    int k = 1, add = 0, g;
    while ((g = gcd(a, m)) > 1) {
        if (b == k)
            return add;
        if (b % g)
            return -1;
        b /= g, m /= g, ++add;
        k = (k * 1ll * a / g) % m;
    }

    int n = sqrt(m) + 1;
    int an = 1;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        an = (an * 1ll * a) % m;

    unordered_map<int, int> vals;
    for (int q = 0, cur = b; q <= n; ++q) {
        vals[cur] = q;
        cur = (cur * 1ll * a) % m;
    }

    for (int p = 1, cur = k; p <= n; ++p) {
        cur = (cur * 1ll * an) % m;
        if (vals.count(cur)) {
            int ans = n * p - vals[cur] + add;
            return ans;
        }
    }
    return -1;
}
```

6.12 Freivalds algorithm

```
mt19937 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch
().count());
// check if two  $n \times n$  matrix  $a \cdot b = c$  within complexity (
iteration  $\cdot n^2$ )
// probability of error  $2^{(-iteration)}$ 
int Freivalds(matrix &a, matrix &b, matrix &c) {
    int n = a.r, iteration = 20;
    matrix zero(n, 1), r(n, 1);
    while (iteration--) {
        for (int i = 0; i < n; i++) r.m[i][0] = rnd() % 2;
        matrix ans = (a * (b * r)) - (c * r);
        if (ans.m != zero.m) return 0;
    }
    return 1;
}
```

6.13 Miller Rabin

```
ll mul (ll a, ll b, ll mod) {
    ll ret = 0;
    for (a %= mod, b %= mod; b != 0;
        b >>= 1, a <=<= 1, a = a >= mod ? a - mod : a) {
        if (b & 1) {
            ret += a;
            if (ret >= mod) ret -= mod;
        }
    }
    return ret;
}

ll fpow (ll a, ll b, ll mod) {
    ll ans = 1;
    for (; b >>= 1, a = mul(a, a, mod))
        if (b & 1)
            ans = mul(ans, a, mod);
    return ans;
}

bool witness (ll a, ll s, ll d, ll n) {
    ll x = fpow(a, d, n);
    if (x == 1 || x == n - 1) return false;
    for (int i = 0; i < s - 1; i++) {
        x = mul(x, x, n);
        if (x == 1) return true;
        if (x == n - 1) return false;
    }
    return true;
}

ll test[] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 0};
bool is_prime (ll n) {
    if (n < 2) return false;
    if (n == 2) return true;
    if (n % 2 == 0) return false;
    ll d = n - 1, s = 0;
    while (d % 2 == 0) ++s, d /= 2;
    for (int i = 0; test[i] && test[i] < n; ++i)
        if (!witness(test[i], s, d, n))
            return false;
    return true;
}
```

6.14 Pollard Rho

```
//  $O(n^{1/4})$  (?)
ll pollard_rho(ll n, ll c) {
    ll x = 2, y = 2, i = 1, k = 2, d;
    while (true) {
        x = (mul(x, x, n) + c);
        if (x >= n) x -= n;
        d = __gcd(x - y, n);
        if (d > 1) return d;
        if (++i == k) y = x, k <=<= 1;
    }
    return n;
}
```

```

}
void factorize(ll n, vector<ll> &f) {
    if (n == 1) return;
    if (is_prime(n)) {
        f.push_back(n);
        return;
    }
    ll d = n;
    for (int i = 2; d == n; i++)
        d = pollard_rho(n, i);
    factorize(d, f);
    factorize(n/d, f);
}

```

6.15 Gauss Jordan

```

const double EPS = 1e-9;
const int INF = 2; // it doesn't actually have to be
infinity or a big number

int gauss (vector < vector<double> > a, vector<double> &
ans) {
    int n = (int) a.size();
    int m = (int) a[0].size() - 1;

    vector<int> where (m, -1);
    for (int col=0, row=0; col<m && row<n; ++col) {
        int sel = row;
        for (int i=row; i<n; ++i)
            if (abs (a[i][col]) > abs (a[sel][col]))
                sel = i;
        if (abs (a[sel][col]) < EPS)
            continue;
        for (int i=col; i<=m; ++i)
            swap (a[sel][i], a[row][i]);
        where[col] = row;

        for (int i=0; i<n; ++i)
            if (i != row) {
                double c = a[i][col] / a[row][col];
                for (int j=col; j<=m; ++j)
                    a[i][j] -= a[row][j] * c;
            }
        ++row;
    }

    ans.assign (m, 0);
    for (int i=0; i<m; ++i)
        if (where[i] != -1)
            ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        double sum = 0;
        for (int j=0; j<m; ++j)
            sum += ans[j] * a[i][j];
        if (abs (sum - a[i][m]) > EPS)

```

```

        return 0;
    }
    for (int i=0; i<m; ++i)
        if (where[i] == -1)
            return INF;
    return 1;
}

```

6.16 Gauss Jordan mod 2

```

// O(min(n, m) * n * m)
int gauss (vector < bitset<N> > &a, int n, int m, bitset<
N> &ans) {
    vector<int> where (m, -1);
    for (int col=0, row=0; col<m && row<n; ++col) {
        for (int i=row; i<n; ++i)
            if (a[i][col]) {
                swap (a[i], a[row]);
                break;
            }
        if (! a[row][col])
            continue;
        where[col] = row;

        for (int i=0; i<n; ++i)
            if (i != row && a[i][col])
                a[i] ^= a[row];
        ++row;
    }

    for (int i=0; i<m; ++i)
        if (where[i] != -1)
            ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        double sum = 0;
        for (int j=0; j<m; ++j)
            sum += ans[j] * a[i][j];
        if (abs (sum - a[i][m]) > EPS)
            return 0;
    }

    for (int i=0; i<m; ++i)
        if (where[i] == -1)
            return INF;
    return 1;
}

```

7 Metodos numericos

7.1 Ternary Search

```
double f(double x){
    return x*x;
}

// O(log((r-l)/eps))
double ternary_search(double l, double r) {
    double eps=1e-9; // precision
    while(r-l>eps) {
        double m1=l+(r-l)/3;
        double m2=r-(r-l)/3;
        if (f(m1)<f(m2)) l=m1;
        else r=m2;
    } return max(f(l),f(r)); // El maximo de la funcion en
    el intervalo [l,r]
}
```

7.2 Regla de Simpson

```
double f(double x){
    return x*x;
}

const int N = 1000 * 1000; // number of steps (already
multiplied by 2)
double simpson_integration(double a, double b){
    double h=(b-a)/N;
    double s=f(a)+f(b);
    for (int i=1;i<=N-1;i++){
        double x=a+h*i;
        s+=f(x)*((i & 1)?4:2);
    }
    s*=h/3;
    return s;
}
```

8 Strings

8.1 Funcion Z

```
// Funcion z O(s)
vi z_function(string s) {
    int n=len(s),l=0,r=0;
    vi z(n);
    for(int i=1;i<n;i++){
        if(i<r) z[i]=min(r-i, z[i-l]);
        while(i+z[i]<n && s[z[i]]==s[i+z[i]]) z[i]++;
        if(i+z[i]>r) {
            l=i;
            r=i+z[i];
        }
    }
    return z;
}
```

```
}
```

8.2 Funcion Phi

```
// Funcion phi O(s)
vi prefix_function(string s){
    int n=len(s);
    vi pi(n);
    for(int i=1;i<n;i++) {
        int j=pi[i-1];
        while(j>0 && s[i]!=s[j]) j=pi[j-1];
        if (s[i]==s[j]) j++;
        pi[i]=j;
    }
    return pi;
}

int main() {
    vi pi=prefix_function(string); // Obtener phi
    //Lo siguiente es para saber cuantas veces aparece cada
    prefijo O(n)
    int n=len(s);
    vi ans(n+1);
    for(int i=0;i<n;i++) ans[pi[i]]++;
    for(int i=n-1;i>0;i--) ans[pi[i-1]]+=ans[i];
    for(int i=0;i<=n;i++) ans[i]++;
    for(int i=0;i<=n;i++) cout<<"El prefijo de tamano "<<i<<"
    aparece "<<ans[i]<<" veces\n";
    return 0;
}
```

8.3 Kmp

```
// Implementar primero prefix_function
// O(t+p)
int matches=0;
void kmp(string &t, string &p){
    vi phi=prefix_function(p);
    for(int i=0,j=0;i<sz(t);i++){
        while(j>0 && t[i]!=p[j]) j=phi[j-1];
        if(t[i]==p[j]) j++;
        if(j==sz(p)){
            cout<<i-j+1<<" "; // Posicion de la ocurrencia
            matches++;
            j=phi[j-1];
        }
    }
}

// Devuelve el arreglo de matches sin implementar
prefix_function
const int MAX=2e5+9;
```

```

int pi[MAX];
// Pasar el arreglo int d con tamaño len(t)
void kmp_vi(string& p, string& t, int *d) {
    pi[0]=0; int m=len(p), n=len(t);
    for(int i=1, k=0; i<m; i++) {
        while(k>0 && p[k]!=p[i]) k=pi[k-1];
        if(p[i]==p[k]) k++;
        pi[i]=k;
    }
    for(int i=0, k=0; i<n; i++) {
        while(k>0 && p[k]!=t[i]) k=pi[k-1];
        if(t[i]==p[k]) k++;
        d[i]=k;
        if(k==m) k=pi[k-1];
    }
}

```

8.4 Aho-Corasick

```

// Usar el aho-corasick para buscar multiples patrones en
// un texto
const static int N=1e5; // Maximo de strings
const static int alpha = 26; // Tamaño del alfabeto
int trie[N][alpha], fail[N], nodes, end_word[N], cnt_word
[N], fail_out[N];
inline int conv(char ch) { // Funcion para indexar el
    alfabeto
    return ((ch >= 'a' && ch <= 'z') ? ch-'a' : ch-'A'+26);
}

// Para cada string, se agrega al trie O(s), peor caso O(
// s*n) n=numero de strings
void add(string &s, int i) {
    int act=0;
    for(char c:s) {
        int x=conv(c);
        if(!trie[act][x]) trie[act][x]=++nodes;
        act=trie[act][x];
    }
    ++cnt_word[act];
    end_word[act]=i;
}

// Se crea el trie con bfs O(N*log(ALPHA))
void build() {
    queue<int> q; q.push(0);
    while(sz(q)) {
        int u=q.front(); q.pop();
        for(int i=0; i<alpha; ++i) {
            int v=trie[u][i];
            if(!v) trie[u][i]=trie[fail[u]][i];
            else q.push(v);
            if(!u || !v) continue;
            fail[v]=trie[ fail[u] ][i];
        }
    }
}

```

```

fail_out[v]=end_word[fail[v]]?fail[v]:fail_out[fail
[v]];
cnt_word[v]+=cnt_word[fail[v]];
}
}

// O(n+m) donde n=tamaño del texto y m=cantidad de
// strings
vs strings;
void searchPatterns(string &t) {
    int act=0, n=len(t);
    for(int i=0; i<n; ++i) {
        int x=conv(t[i]);
        act=trie[act][x];
        int temp=act;
        while(temp) {
            if(end_word[temp]) cout<<"En la posicion "<<i<<" se
                encontro la palabra "<<strings[end_word[temp
                ]-1]<<"\n";
            temp=fail_out[temp];
        }
    }
}

// Por si solo se necesita saber si esta O(s)
void solve(int index, string s) {
    int act=0;
    bool pass=false;
    for(auto c:s) {
        int x=c-'a';
        while(act && !trie[act][x]) act=fail[act];
        act=trie[act][x];
        pass|=end_word[act]<index;
    }
    cout<<(pass?"YES":"NO")<<"\n";
}

int main() {
    add(string, i+1); //Anadir todos los patrones
    build(); // Construir el trie
    searchPatterns(texto); // Buscar todos los patrones en el
    texto
    return 0;
}

```

8.5 Hashing

```

// se recomienda usar m = pow(2, 64) porque
// m=1e9+9 no es suficiente para la multiplicacion de dos
// 64-bit integers
// Porque la probabilidad de colisiones es 1/m = 10^-9
// y si son 10^6 strings que hay que comparar con este
// entonces 1/m = 10^-3

```

```

// y comparamos unos con otros entonces  $1/m = 1$ , si o si
// va a haber algun fallo
// Una solucion sencilla es hacer dos hash (hash1, hash2)
// con p diferentes para tener una probabilidad de
//  $1/10^{18}$ 
// y si comparamos unos con otros entonces  $1/m = 10^{-6}$ 
// Dos strings con mismo hash no necesariamente son
// iguales
// Pero si tienen distinto hash, entonces son distintos
ll compute_hash(string const& s) { // O(n)
    const int p = 31; // 51 si se usan mayusculas tambien
    // Importante que m sea un numero primo
    const int m = 1e9 + 9;
    ll hash_value=0;
    ll p_pow=1;
    for (char c:s) {
        hash_value=(hash_value+(c-'a'+1)*p_pow)%m;
        p_pow=(p_pow*p)%m;
    }
    return hash_value;
}

// O(n(m+logn)) n=cantidad de strings, m=tamano del
// string mas largo
vector<vi> group_identical_strings(vs const& s) {
    int n=s.size();
    vector<pair<ll, int>> hashes(n);
    for(int i=0;i<n;i++)
        hashes[i]={compute_hash(s[i]),i};
    sort(all(hashes));
    vector<vi> groups;
    for(int i=0;i<n;i++) {
        // Si es el primero o si el hash es distinto al
        // anterior entonces es un nuevo grupo
        if(i==0 || hashes[i].first!=hashes[i-1].first)groups.
            emplace_back();
        groups.back().push_back(hashes[i].second);
    }
    return groups;
}

```

8.6 Manacher

```

// a b c b a a b
// 1 1 5 1 1 1 1 f = 0 impar
// 0 0 0 0 0 4 0 f = 1 par (raiz, izq, der)
void manacher(string &s, int f, vi &d){ // O(s)
    int l=0, r=-1, n=len(s);
    d.assign(n,0);
    for(int i=0;i<n;++i){
        int k=(i>r?(1-f):min(d[l+r-i+ f], r-i+f))+f;
        while(i+k-f<n && i-k>=0 && s[i+k-f]==s[i-k])++k;
        d[i]=k-f;--k;
    }
}

```

```

        if(i+k-f>r)l=i-k,r=i+k-f;
    }
    for(int i=0;i<n;++i)d[i]=(d[i]-1+f)*2+1-f;
}

int main() {
    string s;cin>>s;
    vi manacher_odd, manacher_even;
    manacher(s, 0, manacher_odd);
    manacher(s, 1, manacher_even);
    for(int i=0;i<len(s);++i){
        if(manacher_odd[i]==0 || manacher_odd[i]==1)continue;
        cout<<s.substr(i-manacher_odd[i]/2, manacher_odd[i])<<"
            ";
    }
    cout<<"\n";
    for(int i=0;i<len(s);++i){
        if(manacher_even[i]==0)continue;
        cout<<s.substr(i-manacher_even[i]/2, manacher_even[i])
            <<" ";
    }
    cout<<"\n";
}

```

8.7 Minimal-Rotation

```

// Encuentra la rotacion lexicograficamente menor de un
// string O(n)
int minimal_rotation(string& t) {
    int i=0,j=1,k=0,n=len(t),x,y;
    while(i<n && j<n && k<n) {
        x=i+k;y=j+k;
        if(x>=n)x-=n;
        if(y>=n)y-=n;
        if(t[x]==t[y])++k;
        else if(t[x]>t[y]){
            i=j+1>i+k+1?j+1:i+k+1;
            swap(i,j);
            k=0;
        }else{
            j=i+1>j+k+1?i+1:j+k+1;
            k=0;
        }
    }
    return i;
}

// Son lo mismo
string min_cyclic_string(string s) {
    s+=s;
    int n=len(s),i=0,ans=0;
    while(i<n/2){
        ans=i;
        int j=i+1,k=i;
    }
}

```

```

    while (j < n && s[k] <= s[j]) {
        if (s[k] < s[j]) k = i;
        else k++;
        j++;
    }
    while (i <= k)
        i += j - k;
    return s.substr(ans, n/2);
}

```

8.8 Rabin-Karp

```

// O(s+t)
// Dado un patron s y un texto t, devuelve un vector con
// las posiciones de las ocurrencias de s en t
vi rabin_karp(string const& s, string const& t) {
    // Ojo con p y m
    const int p=31;
    const int m=1e9+9;
    int S=s.size(), T=t.size();
    vl p_pow(max(S, T));
    p_pow[0]=1;
    // Precalculo de potencias de p
    for(int i=1; i<sz(p_pow); i++) p_pow[i]=(p_pow[i-1]*p)%m;
    vl h(T+1, 0);
    // Precalculo de hashes de prefijos de t
    for(int i=0; i<T; i++) h[i+1]=(h[i]+(t[i]-'a'+1)*p_pow[i])%m;
    ll h_s=0;
    // Hash de s
    for(int i=0; i<S; i++) h_s=(h_s+(s[i]-'a'+1)*p_pow[i])%m;
    vi occurrences;
    for(int i=0; i+S-1<T; i++) {
        ll cur_h=(h[i+S]-h[i])%m;
        if (cur_h==h_s*p_pow[i]%m) occurrences.push_back(i);
    }
    return occurrences;
}

```

8.9 Kmp-Automata

```

const int N = 1e5; // Tamano del automata
const int ALPHA = 255; // Tamano del alfabeto ASCII
int automata[N][ALPHA]; // Tabla de transicion del automata

// O(s*ALPHA)
void kmp_automata(string& s) {
    automata[0][s[0]] = 1;
    for(int i = 1, j = 0; i <= len(s); ++i) {
        // Copiar la fila anterior

```

```

        for(int k = 0; k < ALPHA; ++k) automata[i][k] =
            automata[j][k];
        // Actualizar la entrada correspondiente al caracter
        // actual
        if (i < len(s)) {
            automata[i][s[i]] = i+1;
            j = automata[j][s[i]];
        }
    }
}

```

8.10 Suffix Array Forma 1

```

// O(nlogn)
vi sort_cyclic_shifts(string const& s) {
    int n=len(s);
    const int alphabet=256;
    vi p(n), c(n), cnt(max(alphabet, n), 0);
    for(int i=0; i<n; i++) cnt[s[i]]++;
    for(int i=1; i<alphabet; i++) cnt[i]+=cnt[i-1];
    for(int i=0; i<n; i++) p[--cnt[s[i]]]=i;
    c[p[0]]=0;
    int classes=1;
    for(int i=1; i<n; i++) {
        if (s[p[i]] != s[p[i-1]]) classes++;
        c[p[i]]=classes-1;
    }
    vi pn(n), cn(n);
    for(int h=0; (1<<h)<n; ++h) {
        for(int i=0; i<n; i++) {
            pn[i]=p[i]-(1<<h);
            if (pn[i]<0) pn[i]+=n;
        }
        fill(cnt.begin(), cnt.begin()+classes, 0);
        for(int i=0; i<n; i++) cnt[c[pn[i]]]++;
        for(int i=1; i<classes; i++) cnt[i]+=cnt[i-1];
        for(int i=n-1; i>=0; i--) p[--cnt[c[pn[i]]]]=pn[i];
        cn[p[0]]=0;
        classes=1;
        for(int i=1; i<n; i++) {
            ii cur={c[p[i]], c[(p[i]+(1<<h))%n]};
            ii prev={c[p[i-1]], c[(p[i-1]+(1<<h))%n]};
            if (cur!=prev) ++classes;
            cn[p[i]]=classes-1;
        }
        c.swap(cn);
    }
    return p;
}

// O(nlogn)
vi suffix_array(string s) {
    s+="$";
    vi sorted_shifts=sort_cyclic_shifts(s);

```

```

    sorted_shifts.erase(sorted_shifts.begin());
    return sorted_shifts;
}

// O(n)
// Longest common prefix
vi lcp_construction(string const& s, vi const& p) {
    int n=len(s);
    vi rank(n,0);
    for(int i=0;i<n;i++) rank[p[i]]=i;
    int k=0;
    vi lcp(n-1,0);
    for(int i=0;i<n;i++){
        if(rank[i]==n-1) {
            k=0; continue;
        }
        int j=p[rank[i]+1];
        while(i+k<n && j+k<n && s[i+k]==s[j+k]) k++;
        lcp[rank[i]] = k;
        if(k) k--;
    }
    return lcp;
}

int main() {
    string s; cin>>s; int n=len(s);
    vi sa=suffix_array(s);
    cout<<"Desde el index, el suffix array\n";
    for(int i=0;i<n;i++) cout<<sa[i]<<" ";
    cout<<"\nVa comparando de 2 en 2 y muestra el lcp:\n";
    vi lcp=lcp_construction(s,sa);
    for(int i=0;i<n-1;i++) cout<<lcp[i]<<" ";
}

```

8.11 Suffix Array Forma 2

```

// Construccion O(nlogn)
// Usar cuando queremos ver patron por patron, es mejor
// que el aho-corasick
struct SuffixArray{
    char MIN_CHAR=' '$;
    int ALPHA=256;
    int n;
    string s;
    vi pos, rnk, lcp;
    SuffixArray(const string &s):n(len(s) + 1), s(s),
        pos(n), rnk(n), lcp(n-1){
        s+=MIN_CHAR;
        buildSA();
        buildLCP();
    }

    void buildSA(){
        vi cnt(max(ALPHA, n));

```

```

        for(int i=0;i<n;i++) cnt[s[i]]++;
        for(int i=1;i<ALPHA;i++) cnt[i]+=cnt[i-1];
        for(int i=n-1;i>=0;i--) pos[--cnt[s[i]]]=i;
        for(int i=1;i<n;i++) rnk[pos[i]]=rnk[pos[i-1]]+(s[pos[i]]!=s[pos[i-1]]);
        for(int k=0;(1<<k)<n;k++){
            vi npos(n), nrnk(n), ncnt(n);
            for(int i=0;i<n;i++) pos[i]=(pos[i]-(1<<k)+n)%n;
            for(int i=0;i<n;i++) ncnt[rnk[i]]++;
            for(int i=1;i<n;i++) ncnt[i]+=ncnt[i-1];
            for(int i=n-1;i>=0;i--) npos[--ncnt[rnk[pos[i]]]]=pos[i];
            for(int i=1;i<n;i++){
                ii cur={rnk[npos[i]], rnk[(npos[i]+(1<<k))%n]};
                ii pre={rnk[npos[i-1]], rnk[(npos[i-1]+(1<<k))%n]};
                nrnk[npos[i]]=nrnk[npos[i-1]]+(cur!=pre);
            }
            pos=npos; rnk=nrnk;
        }
    }

    void buildLCP(){
        for(int i=0,k=0;i<n-1;i++,k=max(k-1,0)){
            int j=pos[rnk[i]-1];
            while(s[i+k]==s[j+k]) k++;
            lcp[rnk[i]-1]=k;
        }
    }

    // O(logn+t)
    // Encuentra cuantas veces aparece t en s
    int cntMatching(const string &t){
        int m=len(t);
        if(m>n) return 0;
        int lo,hi,lb,ub;
        lo=0,hi=n-1;
        while(lo<hi){
            int mid=(lo+hi)/2;
            if(s.substr(pos[mid],m)>=t) hi=mid;
            else lo=mid+1;
        }
        lb=lo; lo=0,hi=n-1;
        while(lo<hi){
            int mid=(lo+hi+1)/2;
            if(s.substr(pos[mid],m)<=t) lo=mid;
            else hi=mid-1;
        }
        ub=lo;
        return s.substr(pos[lb],m)==t?ub-lb+1:0;
    }
};

int main() {
    string s; cin>>s;
    int n; cin>>n;

```



```

SuffixArray sa(s);
for(int i=0; i<n; i++){
    string t; cin>>t;
    cout<<sa.cntMatching(t)<<"\n";
}
}

```

8.12 Suffix Automata Forma 1

```

// La creacion del automata es O(n)
struct state {
    int len, link;
    map<char, int> next;
};

const int N=100000;
state st[N*2];
int sz, last;

void sa_init() {
    st[0].len=0;
    st[0].link=-1;
    sz++;
    last=0;
}

void sa_extend(char c) {
    int act=sz++;
    st[act].len=st[last].len+1;
    int p=last;
    while(p!=-1 && !st[p].next.count(c)) {
        st[p].next[c]=act;
        p=st[p].link;
    }
    if(p==-1) {
        st[act].link=0;
    } else {
        int q=st[p].next[c];
        if(st[p].len+1==st[q].len) {
            st[act].link=q;
        } else {
            int clone=sz++;
            st[clone].len=st[p].len+1;
            st[clone].next=st[q].next;
            st[clone].link=st[q].link;
            while(p!=-1 && st[p].next[c]==q) {
                st[p].next[c]=clone;
                p=st[p].link;
            }
            st[q].link=st[act].link=clone;
        }
    }
    last=act;
}

```

8.13 Suffix Automata Forma 2

```

// O(n) construccion, O(n) memoria
struct SuffixAutomaton {
    int last;
    vi len, link, firstPos;
    vl cnt;
    vector<array<int, 2>> order;
    vector<array<int, ALPHA>> nxt;
    SuffixAutomaton(): last(0), len(1), link(1, -1), firstPos(1),
        cnt(1), nxt(1) {}
    SuffixAutomaton(const string &s): SuffixAutomaton() {
        for (char c:s)
            extend(c);
    }

    int getIndex(char c) {
        return c-MIN_CHAR;
    }

    void extend(char c) {
        int act=sz(len), i=getIndex(c), p=last;
        len.push_back(len[last]+1);
        link.emplace_back();
        cnt.push_back(1);
        firstPos.emplace_back(len[last]+1);
        order.push_back({len[act], act});
        nxt.emplace_back();
        while(p != -1 && !nxt[p][i]) {
            nxt[p][i]=act;
            p=link[p];
        }
        if(p != -1) {
            int q=nxt[p][i];
            if(len[p]+1==len[q]) {
                link[act]=q;
            } else {
                int clone=sz(len);
                len.push_back(len[p]+1);
                link.push_back(link[q]);
                firstPos.push_back(firstPos[q]);
                cnt.push_back(0);
                order.push_back({len[clone], clone});
                nxt.push_back(nxt[q]);
                while(p != -1 && nxt[p][i]==q) {
                    nxt[p][i]=clone;
                    p=link[p];
                }
                link[q]=link[act]=clone;
            }
        }
        last=act;
    }
};

```

```
int main() {
    SuffixAutomaton sa(string);
    return 0;
}
```

8.14 Longest Common Subsequence

```
const int nMax = 1005;
int dp[nMax][nMax];
// Longest Common Subsequence O(n*m) (devuelve el tamaño)
int lcs(const string &s, const string &t) {
    int n=len(s), m=len(t);
    for(int i=1; i<=n; i++) {
        for(int j=1; j<=m; j++) {
            dp[i][j]=max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);
            if(s[i-1]==t[j-1]) dp[i][j]=max(dp[i][j], dp[i-1][j-1] + 1);
        }
    }
    return dp[n][m];
}

// Devuelve la subsecuencia O(s*t)
string lcs_str(const string &s, const string &t) {
    int n=len(s), m=len(t);
    for(int i=1; i<=n; ++i) {
        for(int j=1; j<=m; ++j) {
            if(s[i-1]==t[j-1]) dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+1;
            else dp[i][j]=max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);
        }
    }
    int i=n, j=m;
    string res="";
    while(i>0 && j>0) {
        if(s[i-1]==t[j-1]) {
            res=s[i-1]+res; i--; j--;
        } else if(dp[i-1][j]>dp[i][j-1]) i--;
        else j--;
    }
    return res;
}
```

8.15 Longest Common Substring

```
// Implementar primero suffix-automata-forma-1
// Retorna la subcadena comun mas larga entre S y T O(S*T)
string lcs(string S, string T) {
    sa_init();
    for(int i=0; i<sz(S); i++) sa_extend(S[i]);
    int v=0, l=0, best=0, bestpos=0;
```

```
for (int i=0; i<sz(T); i++) {
    while(v && !st[v].next.count(T[i])) {
        v=st[v].link;
        l=st[v].len;
    }
    if(st[v].next.count(T[i])) {
        v=st[v].next[T[i]];
        l++;
    }
    if(l>best) {
        best=l;
        bestpos=i;
    }
}
return T.substr(bestpos-best+1, best);
}
```

8.16 Lyndon Factorization

```
// La factorizacion de Lyndon de un string es una lista
// de strings no vacios
// tal que el string original es la concatenacion de los
// strings de la lista
// en orden lexicografico. Ademas, cada string de la
// lista es un string de
// Lyndon, es decir, es un string que es
// lexicograficamente menor que todos
// sus sufijos no triviales. Por ejemplo "ab"<"ba".
// Tambien los strings estan
// ordenados de mayor a menor.

// El algoritmo de Duval encuentra la factorizacion de
// Lyndon de un string en O(n)
vs duval(string const& s) {
    int n=len(s), i=0;
    vs factorization;
    while(i<n) {
        int j=i+1, k=i;
        while(j<n && s[k]<=s[j]) {
            if(s[k]<s[j]) k=i;
            else k++;
            j++;
        }
        while(i<=k) {
            factorization.push_back(s.substr(i, j-k));
            i+=j-k;
        }
    }
    return factorization;
}

int main() {
    string s="aabaaab";
    vs factorization=duval(s);
```

```
for(string& factor:factorization) cout<<factor<<"\n";
}
```

8.17 Cantidad Substring por len

```
// Implementar primero suffix-array-forma-2 y meter la
// funcion dentro
// O(n)
void numeroSubstringsPorTamano() {
    vl ps(n+1);
    for(int i=1; i<n; i++) {
        int l=lcp[i-1]+1;
        int r=n-1-pos[i];
        ps[l]++;
        ps[r+1]--;
    }
    for(int i=1; i<n; i++) {
        ps[i]+=ps[i-1];
    }
    for(int i=1; i<n; i++) {
        cout<<ps[i]<<" ";
    }
}
```

8.18 Cantidad Substrings

```
// Implementar primero suffix-array-forma-1
int different_substrings(string s) { //O(nlogn)
    vl sa=suffix_array(s);
    vl lcp=lcp_construction(s, sa);
    int n=len(s);
    int act=n*(n+1); act/=2;
    for(int i=0; i<n-1; i++) act-=lcp[i];
    return act;
}

// Otra forma con hashing O(n^2)
int count_unique_substrings(string const& s) {
    int n = s.size();
    // Ojo con p y m
    const int p=31;
    const int m=1e9+9;
    ll p_pow[n], h[n+1];
    p_pow[0]=1;
    // Precalculo de potencias de p
    for(int i=1; i<n; i++) p_pow[i]=(p_pow[i-1]*p)%m;
    // Precalculo de hashes de prefijos de s
    for(int i=0; i<n; i++) h[i+1]=(h[i]+(s[i]-'a'+1)*p_pow[i])%m;
    int cnt=0;
    for(int l=1; l<=n; l++) {
        unordered_set<ll> hs;
```

```
for(int i=0; i<=n-l; i++) {
    ll cur_h=(h[i+l]+m-h[i])%m;
    cur_h=(cur_h*p_pow[n-i-1])%m;
    hs.insert(cur_h);
}
cnt+=hs.size();
}
return cnt;
}
```

8.19 Kth-Substring con repeticiones

```
// Implementar primero suffix-automata-forma-2 y meter la
// funcion dentro
// El k-esimo substring lexicografico con repeticiones O(
// n+m)
void kthSubstr(ll k) {
    sort(order.rbegin(), order.rend());
    for(auto [_ , u]:order) {
        cnt[link[u]]+=cnt[u];
    }
    vl dp(last+1);
    function<void(int)>dfs=[&](int u) {
        dp[u]=cnt[u];
        for(int i=0; i<26; i++) {
            if(!nxt[u][i]) continue;
            int v=nxt[u][i];
            if (!dp[v]) dfs(v);
            dp[u]+=dp[v];
        }
    };
    dfs(0);
    int u=0;
    while(k>0) {
        for(int i=0; i<26; i++) {
            if(!nxt[u][i]) continue;
            int v=nxt[u][i];
            if(k>dp[v]) {
                k-=dp[v];
            } else {
                cout<<(char)('a'+i);
                k-=cnt[v];
                u=v;
                break;
            }
        }
    }
}
```

8.20 Kth-substring sin repeticiones

```
// Implementar primero suffix-array-forma-2 y meter la
// funcion dentro
// El k-esimo substring lexicografico sin repeticiones O(
n)
string kthSubstr(ll k){
    for(int i=1;i<n;i++){
        int nxt=n-1-pos[i]-lcp[i-1];
        if(k>nxt){
            k-=nxt;
        }else{
            return s.substr(pos[i], k + lcp[i-1]);
        }
    }
}
```

8.21 Primera aparicion patrones

```
// Implementar primero suffix-automata-forma-2 y meter la
// funcion dentro
// La primera aparicion de t en s O(t)
int firstMatching(const string &t) {
    int act=0;
    for(char c:t){
        int cc=c-'a';
        if(!nxt[act][cc]) return -1;
        act=nxt[act][cc];
    }
    return firstPos[act]-sz(t)+1;
}
```

8.22 Repetitions

```
// implementar primero z_function
// El algoritmo encuentra todas las repeticiones de un
// string O(nlogn)
int get_z(vi const& z, int i) {
    if (0<=i && i<sz(z)) return z[i];
    else return 0;
}

vii repetitions;
void convert_to_repetitions(int shift, bool left, int
cntr, int l, int k1, int k2){
    for(int l1=max(l,l-k2);l1<=min(l,k1);l1++){
        if(left && l1==l) break;
        int l2=l-l1;
        int pos=shift+(left?cntr-l1:cntr-l-l1+1);
        repetitions.emplace_back(pos,pos+2*l-1);
    }
}

void find_repetitions(string s, int shift=0){
```

```
int n=len(s);
if(n==1) return;
int nu=n/2;
int nv=n-nu;
string u=s.substr(0,nu);
string v=s.substr(nu);
string ru(u.rbegin(), u.rend());
string rv(v.rbegin(), v.rend());
find_repetitions(u, shift);
find_repetitions(v, shift+nu);
vi z1=z_function(ru);
vi z2=z_function(v+'#'+u);
vi z3=z_function(ru+'#'+rv);
vi z4=z_function(v);
for (int cnt=0;cnt<n;cnt++){
    int l, k1, k2;
    if(cnt<nu) {
        l=nu-cnt;
        k1=get_z(z1, nu-cnt);
        k2=get_z(z2, nv+1+cnt);
    }else{
        l=cnt-nu+1;
        k1=get_z(z3,nu+1+nv-1-(cnt-nu));
        k2=get_z(z4, (cnt-nu)+1);
    }
    if(k1+k2>=l) convert_to_repetitions(shift, cnt<nu,
        cnt, l, k1, k2);
}

int main() {
    find_repetitions(string);
    for(auto& rep:repetitions) cout<<rep.first<<" "<<rep.
        second<<"\n";
}
```

8.23 Substring mas largo repetido

```
// Implementar primero suffix-array-forma-1
string longest_repeated_substring(string& s){ //O(nlogn)
    // Si se tienen que sacar varios, entonces son todos
    // los que sean iguales al maximo
    vi sa=suffix_array(s);
    vi lcp=lcp_construction(s,sa);
    int n=len(s);
    int max_len=0, start=0;
    for(int i=0;i<n-1;i++){
        if(lcp[i]>max_len){
            max_len=lcp[i];
            start=sa[i];
        }
    }
    return s.substr(start,max_len);
}
```

```
}
```

9 Geometria

9.1 Puntos

```
typedef double lf;
const lf eps = 1e-9;
typedef double T;
struct pt {
    T x, y;
    pt operator + (pt p) { return {x+p.x, y+p.y}; }
    pt operator - (pt p) { return {x-p.x, y-p.y}; }
    pt operator * (pt p) { return {x*p.x-y*p.y, x*p.y+y*p.x}; }
    pt operator * (T d) { return {x*d, y*d}; }
    pt operator / (lf d) { return {x/d, y/d}; } /// only
    for floating point
    bool operator == (pt b) { return x == b.x && y == b.y; }
    bool operator != (pt b) { return !(*this == b); }
    bool operator < (const pt &o) const { return y < o.y
        || (y == o.y && x < o.x); }
    bool operator > (const pt &o) const { return y > o.y
        || (y == o.y && x > o.x); }
};
int cmp (lf a, lf b) { return (a + eps < b ? -1 : (b + eps
    < a ? 1 : 0)); } ///double comparator

T norm(pt a) { return a.x*a.x + a.y*a.y; }
lf abs(pt a) { return sqrt(norm(a)); }
lf arg(pt a) { return atan2(a.y, a.x); }
pt unit(pt a) { return a/abs(a); }

T dot(pt a, pt b) { return a.x*b.x + a.y*b.y; } /// x = 90
    -> cos = 0
T cross(pt a, pt b) { return a.x*b.y - a.y*b.x; } /// x =
    180 -> sin = 0
T orient(pt a, pt b, pt c) { return cross(b-a, c-a); }///
    clockwise = -
pt rot(pt p, lf a) { return {p.x*cos(a) - p.y*sin(a), p.x
    *sin(a) + p.y*cos(a)}; }
pt rotate_to_b(pt a, pt b, lf ang) { return rot(a-b, ang)
    +b; } /// rotate by ang center b
pt rot90ccw(pt p) { return {-p.y, p.x}; }
pt rot90cw(pt p) { return {p.y, -p.x}; }
pt translate(pt p, pt v) { return p+v; }
pt scale(pt p, double f, pt c) { return c + (p-c)*f; } ///
    c-center
bool are_perp(pt v, pt w) { return dot(v,w) == 0; }
int sign(T x) { return (T(0) < x) - (x < T(0)); }
bool in_angle(pt a, pt b, pt c, pt x) { /// x inside angle
    abc (center in a)
```

```
assert(orient(a,b,c) != 0);
if (orient(a,b,c) < 0) swap(b,c);
return orient(a,b,x) >= 0 && orient(a,c,x) <= 0;
}
///angle bwn 2 vectors
lf angle(pt a, pt b) { return acos(max(-1.0, min(1.0, dot
    (a,b)/abs(a)/abs(b)))); }
lf angle(pt a, pt b) { return atan2(cross(a, b), dot(a, b
    )); }
/// returns vector to transform points
pt get_linear_transformation(pt p, pt q, pt r, pt fp, pt
    fq) {
    pt pq = q-p, num{cross(pq, fq-fp), dot(pq, fq-fp)};
    return fp + pt{cross(r-p, num), dot(r-p, num)} / norm
        (pq);
}
bool half(pt p) { /// true if is in (0, 180] (line is x
    axis)
    assert(p.x != 0 || p.y != 0); /// the argument of
        (0,0) is undefined
    return p.y > 0 || (p.y == 0 && p.x < 0);
}
bool half_from(pt p, pt v = {1, 0}) { ///line is v (above
    v is true)
    return cross(v,p) < 0 || (cross(v,p) == 0 && dot(v,p)
        < 0);
}
bool polar_cmp(const pt &a, const pt &b) {///polar sort
    return make_tuple(half(a), 0) < make_tuple(half(b),
        cross(a,b));
}
/// return make_tuple(half(a), 0, sq(a)) < make_tuple(
    half(b), cross(a, b), sq(b)); /// further ones appear
    later
}
```

9.2 Lineas

```
struct line {
    pt v; T c; /// v:direction c: pos in y axis
    line(pt v, T c) : v(v), c(c) {}
    line(T a, T b, T c) : v({b,-a}), c(c) {} /// ax + by =
        c
    line(pt p, pt q) : v(q-p), c(cross(v,p)) {}
    T side(pt p) { return cross(v,p)-c; }
    lf dist(pt p) { return abs(side(p)) / abs(v); }
    lf sq_dist(pt p) { return side(p)*side(p) / (lf)norm(
        v); }
    line perp_through(pt p) { return {p, p + rot90ccw(v)
        }; } /// line perp to v passing through p
    bool cmp_proj(pt p, pt q) { return dot(v,p) < dot(v,q
        ); } /// order for points over the line
    line translate(pt t) { return {v, c + cross(v,t)}; }
    line shift_left(double d) { return {v, c + d*abs(v)}; }
```

```

    }
    pt proj(pt p) { return p - rot90ccw(v)*side(p)/norm(v); } // pt projected on the line
    pt refl(pt p) { return p - rot90ccw(v)*2*side(p)/norm(v); } // pt reflected on the other side of the line
};

bool inter_ll(line l1, line l2, pt &out) {
    T d = cross(l1.v, l2.v);
    if (d == 0) return false;
    out = (l2.v*l1.c - l1.v*l2.c) / d; // floating points
    return true;
}
//bisector divides the angle in 2 equal angles
//interior line goes on the same direction as l1 and l2
line bisector(line l1, line l2, bool interior) {
    assert(cross(l1.v, l2.v) != 0); /// l1 and l2 cannot be parallel!
    lf sign = interior ? 1 : -1;
    return {l2.v/abs(l2.v) + l1.v/abs(l1.v) * sign,
            l2.c/abs(l2.v) + l1.c/abs(l1.v) * sign};
}

```

9.3 Vectores

```

// Creacion de un vector
struct vec{
    double x,y;
    vec(double x,double y): x(x),y(y){}
};

// Puntos a vector
vec toVec(point a,point b){
    return vec(b.x-a.x , b.y-a.y);
}

// Escalar un vector
vec scale(vec v, double s){
    // s no negativo:
    // <1 mas corto
    // 1 igual
    // >1 mas largo
    return vec(v.x*s,v.y*s);
}

// Trasladar p segun v
point traslate(point p, vec v){
    return point(p.x+v.x , p.y+v.y);
}

// Producto Punto
double dot(vec a,vec b){
    return (a.x*b.x + a.y*b.y);
}

```

```

// Cuadrado de la norma
double norm_sq(vec v){
    return v.x*v.x + v.y*v.y;
}

// Angulo formado por aob
double angle(point a, point o, point b){
    vec oa = toVec(o,a);
    vec ob = toVec(o,b);
    return acos(dot(oa,ob)/sqrt(norm_sq(oa)*norm_sq(ob)))
    ;
}

// Producto cruz
double cross(vec a, vec b){
    return (a.x*b.y)-(a.y*b.x);
}

// Lado respecto una linea pq
bool ccw(point p,point q,point r){
    // Devuelve verdadero si el punto r esta a la izquierda de la linea pq
    return cross(toVec(p,q),toVec(p,r))>0;
}

// Colinear
bool collinear(point p, point q, point r){
    return fabs(cross(toVec(p,q), toVec(p,r)))<EPS;
}

```

9.4 Poligonos

```

enum {IN, OUT, ON};
struct polygon {
    vector<pt> p;
    polygon(int n) : p(n) {}
    int top = -1, bottom = -1;
    void delete_repetead() {
        vector<pt> aux;
        sort(p.begin(), p.end());
        for(pt &i : p)
            if(aux.empty() || aux.back() != i)
                aux.push_back(i);
        p.swap(aux);
    }
    bool is_convex() {
        bool pos = 0, neg = 0;
        for (int i = 0, n = p.size(); i < n; i++) {
            int o = orient(p[i], p[(i+1)%n], p[(i+2)%n]);
            if (o > 0) pos = 1;
            if (o < 0) neg = 1;
        }
        return !(pos && neg);
    }
    lf area(bool s = false) { // better on clockwise

```

```

order
    if ans = 0;
    for (int i = 0, n = p.size(); i < n; i++)
        ans += cross(p[i], p[(i+1)%n]);
    ans /= 2;
    return s ? ans : abs(ans);
}
if perimeter() {
    if per = 0;
    for (int i = 0, n = p.size(); i < n; i++)
        per += abs(p[i] - p[(i+1)%n]);
    return per;
}
bool above(pt a, pt p) { return p.y >= a.y; }
bool crosses_ray(pt a, pt p, pt q) { // pq crosses
    ray from a
    return (above(a, q) - above(a, p)) * orient(a, p, q) > 0;
}
int in_polygon(pt a) {
    int crosses = 0;
    for (int i = 0, n = p.size(); i < n; i++) {
        if (on_segment(p[i], p[(i+1)%n], a)) return ON;
        crosses += crosses_ray(a, p[i], p[(i+1)%n]);
    }
    return (crosses & 1 ? IN : OUT);
}
void normalize() { // polygon is CCW
    bottom = min_element(p.begin(), p.end()) - p.begin();
    vector<pt> tmp(p.begin() + bottom, p.end());
    tmp.insert(tmp.end(), p.begin(), p.begin() + bottom);
    p.swap(tmp);
    bottom = 0;
    top = max_element(p.begin(), p.end()) - p.begin();
}
int in_convex(pt a) {
    assert(bottom == 0 && top != -1);
    if (a < p[0] || a > p[top]) return OUT;
    T orientation = orient(p[0], p[top], a);
    if (orientation == 0) {
        if (a == p[0] || a == p[top]) return ON;
        return top == 1 || top + 1 == p.size() ? ON : IN;
    } else if (orientation < 0) {
        auto it = lower_bound(p.begin() + 1, p.begin() + top, a);
        T d = orient(*prev(it), a, *it);
        return d < 0 ? IN : (d > 0 ? OUT : ON);
    } else {
        auto it = upper_bound(p.rbegin(), p.rend() - top - 1, a);
        T d = orient(*it, a, it == p.rbegin() ? p[0]

```

```

        : *prev(it));
        return d < 0 ? IN : (d > 0 ? OUT : ON);
    }
}
polygon cut(pt a, pt b) { // cuts polygon on line ab
    line l(a, b);
    polygon new_polygon(0);
    for (int i = 0, n = p.size(); i < n; ++i) {
        pt c = p[i], d = p[(i+1)%n];
        if (abc = cross(b-a, c-a), abd = cross(b-a, d-a);
        if (abc >= 0) new_polygon.p.push_back(c);
        if (abc*abd < 0) {
            pt out; inter_ll(l, line(c, d), out);
            new_polygon.p.push_back(out);
        }
    }
    return new_polygon;
}
void convex_hull() {
    sort(p.begin(), p.end());
    vector<pt> ch;
    ch.reserve(p.size() + 1);
    for (int it = 0; it < 2; it++) {
        int start = ch.size();
        for (auto &a : p) {
            // if colinear are needed, use < and
            // remove repeated points
            while (ch.size() >= start + 2 && orient(ch[
                ch.size() - 2], ch.back(), a) <= 0)
                ch.pop_back();
            ch.push_back(a);
        }
        ch.pop_back();
        reverse(p.begin(), p.end());
    }
    if (ch.size() == 2 && ch[0] == ch[1]) ch.pop_back();
    // be careful with CH of size < 3
    p.swap(ch);
}
vector<pii> antipodal() {
    vector<pii> ans;
    int n = p.size();
    if (n == 2) ans.push_back({0, 1});
    if (n < 3) return ans;
    auto nxt = [&](int x) { return (x + 1 == n ? 0 : x + 1); };
    auto area2 = [&](pt a, pt b, pt c) { return cross
        (b-a, c-a); };
    int b0 = 0;
    while (abs(area2(p[n - 1], p[0], p[nxt(b0)])) >
        abs(area2(p[n - 1], p[0], p[b0]))) ++b0;
    for (int b = b0, a = 0; b != 0 && a <= b0; ++a) {
        ans.push_back({a, b});
    }
}

```



```

    while (abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[nxt(b)]))
        > abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[b]))) {
        b = nxt(b);
        if(a != b0 || b != 0) ans.push_back({ a,
            b });
        else return ans;
    }
    if(abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[nxt(b)])) ==
        abs(area2(p[a], p[nxt(a)], p[b]))) {
        if(a != b0 || b != n-1) ans.push_back({ a
            , nxt(b) });
        else ans.push_back({ nxt(a), b });
    }
}
return ans;
}
pt centroid() {
    pt c{0, 0};
    lf scale = 6. * area(true);
    for(int i = 0, n = p.size(); i < n; ++i) {
        int j = (i+1 == n ? 0 : i+1);
        c = c + (p[i] + p[j]) * cross(p[i], p[j]);
    }
    return c / scale;
}
ll pick() {
    ll boundary = 0;
    for(int i = 0, n = p.size(); i < n; i++) {
        int j = (i+1 == n ? 0 : i+1);
        boundary += __gcd((ll)abs(p[i].x - p[j].x), (
            ll)abs(p[i].y - p[j].y));
    }
    return area() + 1 - boundary/2;
}
pt& operator[] (int i){ return p[i]; }
};

```

9.5 Angulos

Calcula el angulo de una linea con respecto a otra.

```

lf get_ang(pt a, pt b) {
    lf ang = acos(max(lf(-1.0), min(lf(1.0), lf(dot(a,b))
        /abs(a)/abs(b))));
    ang = ang * 180.0 / acos(-1.0);
    if (b.y < 0) ang = lf(360) - ang;
    return ang;
}

lf angle(pt a, pt b) {
    pt xo = {1, 0};
    lf ang = get_ang(xo, b) - get_ang(xo, a);
    if (ang < 0) ang += 360;
    return ang;
}

```

```

}

double DegToRad(double d) {
    return d * acos(-1.0) / 180.0;
}

double RadToDeg(double r) {
    return r * 180.0 / acos(-1.0);
}

```

9.6 Circulos

```

struct circle {
    pt c; T r;
};
// (x-xo)^2 + (y-yo)^2 = r^2
//circle that passes through abc
circle center(pt a, pt b, pt c) {
    b = b-a, c = c-a;
    assert(cross(b,c) != 0); /// no circumcircle if A,B,C
    aligned
    pt cen = a + rot90ccw(b*norm(c) - c*norm(b))/cross(b,
        c)/2;
    return {cen, abs(a-cen)};
}
//centers of the circles that pass through ab and has
radius r
vector<pt> centers(pt a, pt b, T r) {
    if (abs(a-b) > 2*r + eps) return {};
    pt m = (a+b)/2;
    double f = sqrt(r*r/norm(a-m) - 1);
    pt c = rot90ccw(a-m)*f;
    return {m-c, m+c};
}

int inter_cl(circle c, line l, pair<pt, pt> &out) {
    lf h2 = c.r*c.r - l.sq_dist(c.c);
    if(h2 >= 0) { /// line touches circle
        pt p = l.proj(c.c);
        pt h = l.v*sqrt(h2)/abs(l.v); /// vector of len h
        parallel to line
        out = {p-h, p+h};
    }
    return 1 + sign(h2); /// if 1 -> out.F == out.S
}

int inter_cc(circle c1, circle c2, pair<pt, pt> &out) {
    pt d = c2.c-c1.c;
    double d2 = norm(d);
    if(d2 == 0) { assert(c1.r != c2.r); return 0; } ///
    concentric circles (identical)
    double pd = (d2 + c1.r*c1.r - c2.r*c2.r)/2; /// = |
    O_1P| * d
    double h2 = c1.r*c1.r - pd*pd/d2; /// = h^2
    if(h2 >= 0) {
        pt p = c1.c + d*pd/d2, h = rot90ccw(d)*sqrt(h2/d2

```



```

    );
    out = {p-h, p+h};
}
return 1 + sign(h2);
}
//circle-line inter = 1
int tangents(circle c1, circle c2, bool inner, vector<
pair<pt,pt>> &out) {
    if(inner) c2.r = -c2.r; // inner tangent
    pt d = c2.c-c1.c;
    double dr = c1.r-c2.r, d2 = norm(d), h2 = d2-dr*dr;
    if(d2 == 0 || h2 < 0) { assert(h2 != 0); return 0; }
    // (identical)
    for(double s : {-1,1}) {
        pt v = (d*dr + rot90ccw(d)*sqrt(h2)*s)/d2;
        out.push_back({c1.c + v*c1.r, c2.c + v*c2.r});
    }
    return 1 + (h2 > 0); // if 1: circle are tangent
}
//circle tangent passing through pt p
int tangent_through_pt(pt p, circle c, pair<pt, pt> &out)
{
    double d = abs(p - c.c);
    if(d < c.r) return 0;
    pt base = c.c-p;
    double w = sqrt(norm(base) - c.r*c.r);
    pt a = {w, c.r}, b = {w, -c.r};
    pt s = p + base*a/norm(base)*w;
    pt t = p + base*b/norm(base)*w;
    out = {s, t};
    return 1 + (abs(c.c-p) == c.r);
}

```

9.7 Semiplanos

```

struct halfplane{
    double angle;
    pt p, pq;
    halfplane(){}
    halfplane(pt a, pt b): p(a), pq(b - a) {
        angle = atan2(pq.y,pq.x);
    }
    bool operator < (halfplane b){return angle < b.
        angle;}
    bool out(pt q){return cross(pq, (q-p)) < -eps;} //
        checks if p is inside the half plane
};

const lf inf = 1e100;
// intersection pt of the lines of 2 halfplanes
pt inter(halfplane& h1, halfplane& h2){
    if(abs(cross(unit(h1.pq), unit(h2.pq))) <= eps) return
        {inf, inf};
}

```

```

    lf alpha = cross((h2.p - h1.p), h2.pq) / cross(h1.pq,
        h2.pq);
    return h1.p + (h1.pq * alpha);
}
// intersection of halfplanes
vector<pt> intersect(vector<halfplane>& b){
    vector<pt> box = { {inf, inf}, {-inf, inf}, {-inf, -
        inf}, {inf, -inf} };
    for(int i = 0; i < 4; i++){
        b.push_back({box[i], box[(i + 1) % 4]});
    }
    sort(b.begin(), b.end());
    int n = b.size(), q = 1, h = 0;
    vector<halfplane> c(n + 10);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        while(q < h && b[i].out(inter(c[h], c[h-1]))) h
            --;
        while(q < h && b[i].out(inter(c[q], c[q+1]))) q
            ++;
        c[++h] = b[i];
        if(q < h && abs(cross(c[h].pq, c[h-1].pq)) < eps)
            if(dot(c[h].pq, c[h-1].pq) <= 0) return {};
            h--;
        if(b[i].out(c[h].p)) c[h] = b[i];
    }
    while(q < h-1 && c[q].out(inter(c[h], c[h-1]))) h--;
    while(q < h-1 && c[h].out(inter(c[q], c[q+1]))) q++;
    if(h - q <= 1) return {};
    c[h+1] = c[q];
    vector<pt> s;
    for(int i = q; i < h+1; i++) s.pb(inter(c[i], c[i+1])
        );
    return s;
}

```

9.8 Segmentos

```

bool in_disk(pt a, pt b, pt p) { // pt p inside ab disk
    return dot(a-p, b-p) <= 0;
}
bool on_segment(pt a, pt b, pt p) { // p on ab
    return orient(a,b,p) == 0 && in_disk(a,b,p);
}
// ab crossing cd
bool proper_inter(pt a, pt b, pt c, pt d, pt &out) {
    T oa = orient(c,d,a),
    ob = orient(c,d,b),
    oc = orient(a,b,c),
    od = orient(a,b,d);
    /// Proper intersection exists iff opposite signs
    if (oa*ob < 0 && oc*od < 0) {

```

```

        out = (a*ob - b*oa) / (ob-oa);
        return true;
    }
    return false;
}
// intersection bwn segments
set<pt> inter_ss(pt a, pt b, pt c, pt d) {
    pt out;
    if (proper_inter(a,b,c,d,out)) return {out}; //if
    cross -> 1
    set<pt> s;
    if (on_segment(c,d,a)) s.insert(a); // a in cd
    if (on_segment(c,d,b)) s.insert(b); // b in cd
    if (on_segment(a,b,c)) s.insert(c); // c in ab
    if (on_segment(a,b,d)) s.insert(d); // d in ab
    return s; // 0, 2
}
if pt_to_seg(pt a, pt b, pt p) { // p to ab
    if(a != b) {
        line l(a,b);
        if (l.cmp_proj(a,p) && l.cmp_proj(p,b)) /// if
            closest to projection = (a, p, b)
            return l.dist(p); /// output distance to line
    }
    return min(abs(p-a), abs(p-b)); /// otherwise
    distance to A or B
}
if seg_to_seg(pt a, pt b, pt c, pt d) {
    pt dummy;
    if (proper_inter(a,b,c,d,dummy)) return 0; // ab
    intersects cd
    return min({pt_to_seg(a,b,c), pt_to_seg(a,b,d),
        pt_to_seg(c,d,a), pt_to_seg(c,d,b)}); // try the 4
    pts
}

```

9.9 Convex Hull

```

struct pt{
    double x,y;
    int type;
    pt(double x,double y,int t): x(x),y(y),type(t){}
};

// Devuelve hacia donde esta un punto c, respecto una
// linea ab
int orientation(pt a, pt b, pt c) {
    double v = a.x*(b.y-c.y)+b.x*(c.y-a.y)+c.x*(a.y-b.y);
    if (v < 0) return -1; // en la derecha
    if (v > 0) return +1; // en la izquierda
    return 0; // colinear
}

// imprime verdadero el punto c, esta a la derecha de la
// linea pb,

```

```

// tambien da true si son colineales e
// include_collinear == true
bool cw(pt a, pt b, pt c, bool include_collinear) {
    int o = orientation(a, b, c);
    return o < 0 || (include_collinear && o == 0);
}

// nos dice si tres puntos son colineales
bool collinear(pt a, pt b, pt c) { return orientation(a,
    b, c) == 0; }

void convex_hull(vector<pt>& a, bool include_collinear =
    false) {
    // Obtenemos el pivote como el menor punto con un
    // criterio dado
    // (menor y o si no menor x)
    pt p0 = *min_element(a.begin(), a.end(), [](pt a, pt
        b) {
        return make_pair(a.y, a.x) < make_pair(b.y, b.x);
    });
    // Ordenamos los puntos en un orden horario, los
    // elementos colineales terminan
    // siendo arrastrados al final y si existe empate en
    // el angulo sera el que este mas cerca
    // del pivote
    sort(a.begin(), a.end(), [&p0](const pt& a, const pt&
        b) {
        int o = orientation(p0, a, b);
        if (o == 0)
            return (p0.x-a.x)*(p0.x-a.x) + (p0.y-a.y)*(p0
                .y-a.y)
                < (p0.x-b.x)*(p0.x-b.x) + (p0.y-b.y)*(p0.
                    y-b.y);
        return o < 0;
    });
    // Busca donde empiezan los colineales (estan al
    // final) e invierte su orden
    if (include_collinear) {
        int i = (int)a.size()-1;
        while (i >= 0 && collinear(p0, a[i], a.back())) i
            --;
        reverse(a.begin()+i+1, a.end());
    }
    // Aplicacion de graham
    vector<pt> st;
    for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
        while (st.size() > 1 && !cw(st[st.size()-2], st.
            back(), a[i], include_collinear))
            st.pop_back();
        st.push_back(a[i]);
    }
    a = st;
}

```

}

10 Teoría y miscelánea

10.1 Sumatorias

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{i=1}^n i^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\ \bullet \sum_{i=1}^n i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 & \bullet \sum_{i=0}^n x^i &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ para } x \neq 1 \end{aligned}$$

10.2 Teoría de Grafos

10.2.1 Teorema de Euler

En un grafo conectado planar, se cumple que $V - E + F = 2$, donde V es el número de vértices, E es el número de aristas y F es el número de caras. Para varios componentes la formula es: $V - E + F = 1 + C$, siendo C el número de componentes.

10.2.2 Planaridad de Grafos

Un grafo es planar si y solo si no contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 (grafo completo con 5 vértices) ni a $K_{3,3}$ (grafo bipartito completo con 3 vértices en cada conjunto).

10.3 Teoría de Números

10.3.1 Ecuaciones Diofánticas Lineales

Una ecuación diofántica lineal es una ecuación en la que se buscan soluciones enteras x y y que satisfagan la relación lineal $ax + by = c$, donde a , b y c son constantes dadas.

Para encontrar soluciones enteras positivas en una ecuación diofántica lineal, podemos seguir el siguiente proceso:

1. Encontrar una solución particular: Encuentra una solución particular (x_0, y_0) de la ecuación. Esto puede hacerse utilizando el algoritmo de Euclides extendido.
2. Encontrar la solución general: Una vez que tengas una solución particular, puedes obtener la solución general utilizando la fórmula:

$$x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a, b)} \cdot t$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a, b)} \cdot t$$

donde t es un parámetro entero.

3. Restringir a soluciones positivas: Si deseas soluciones positivas, asegúrate de que las soluciones generales satisfagan $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Puedes ajustar el valor de t para cumplir con estas restricciones.

10.3.2 Pequeño Teorema de Fermat

Si p es un número primo y a es un entero no divisible por p , entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

10.3.3 Teorema de Euler

Para cualquier número entero positivo n y un entero a coprimo con n , se cumple que $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, donde $\phi(n)$ es la función phi de Euler, que representa la cantidad de enteros positivos menores que n y coprimos con n .

10.4 Geometría

10.4.1 Teorema de Pick

Sea un polígono simple cuyos vertices tienen coordenadas enteras. Si B es el número de puntos enteros en el borde, I el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular con la formula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

10.4.2 Fórmula de Herón

Si los lados del triángulo tienen longitudes a , b y c , y s es el semiperímetro (es decir, $s = \frac{a+b+c}{2}$), entonces el área A del triángulo está dada por:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

10.4.3 Relación de Existencia Triangular

Para un triángulo con lados de longitud a , b , y c , la relación de existencia triangular se expresa como:

$$b - c < a < b + c, \quad a - c < b < a + c, \quad a - b < c < a + b$$

10.5 Combinatoria

10.5.1 Permutaciones

El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de a r a la vez (sin repetición) se denota como $P(n, r)$ y se calcula mediante:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

10.5.2 Combinaciones

El número de combinaciones de n objetos distintos tomados de a r a la vez (sin repetición) se denota como $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$ y se calcula mediante:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

10.5.3 Permutaciones con Repetición

El número de permutaciones de n objetos tomando en cuenta repeticiones se denota como $P_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$ y se calcula mediante:

$$P_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

10.5.4 Combinaciones con Repetición

El número de combinaciones de n objetos tomando en cuenta repeticiones se denota como $C_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$ y se calcula mediante:

$$C_{\text{rep}}(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

10.5.5 Números de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Los números de Catalan también pueden calcularse utilizando la siguiente fórmula recursiva:

$$C_0 = 1$$
$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n$$

Usos:

- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de árboles binarios distintos con n vértices.

- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de expresiones que contienen n pares de paréntesis correctamente emparejados.
- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de formas diferentes en que se pueden colocar $n+1$ factores entre paréntesis, por ejemplo, para $n = 3$ y $3+1 = 4$ factores: a, b, c, d , tenemos: $(ab)(cd)$, $a(b(cd))$, $((ab)c)d$ y $a((bc)d)$.
- Los números de Catalan cuentan la cantidad de caminos no cruzados en una rejilla $n \times n$ que se pueden trazar desde una esquina de un cuadrado o rectángulo a la esquina opuesta, moviéndose solo hacia arriba y hacia la derecha.
- Los números de Catalan representan el número de árboles binarios completos con $n+1$ hojas.
- $\text{Cat}(n)$ cuenta el número de formas en que se puede triangular un polígono convexo de $n+2$ lados. Otra forma de decirlo es como la cantidad de formas de dividir un polígono convexo en triángulos utilizando diagonales no cruzadas.

10.5.6 Estrellas y barras

Número de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

- Con $x_i \geq 0$: $\binom{n+k-1}{n}$
- Con $x_i \geq 1$: $\binom{n-1}{k-1}$

Número de sumas de enteros con límite inferior:

Esto se puede extender fácilmente a sumas de enteros con diferentes límites inferiores. Es decir, queremos contar el número de soluciones para la ecuación:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

con $x_i \geq a_i$.

Después de sustituir $x'_i := x_i - a_i$ recibimos la ecuación modificada:

$$(x'_1 + a_1) + (x'_2 + a_2) + \dots + (x'_k + a_k) = n$$

$$\Leftrightarrow x'_1 + x'_2 + \dots + x'_k = n - a_1 - a_2 - \dots - a_k$$

con $x'_i \geq 0$. Así que hemos reducido el problema al caso más simple con $x'_i \geq 0$ y nuevamente podemos aplicar el teorema de estrellas y barras.

10.6 DP Optimization Theory

Name	Original Recurrence	Sufficient Condition	From	To
CH 1	$dp[i] = \min_{j < i} \{dp[j] + b[j] * a[i]\}$	$b[j] \geq b[j+1]$ Optionally $a[i] \leq a[i+1]$	$O(n^2)$	$O(n)$
CH 2	$dp[i][j] = \min_{k < j} \{dp[i-1][k] + b[k] * a[j]\}$	$b[k] \geq b[k+1]$ Optionally $a[j] \leq a[j+1]$	$O(kn^2)$	$O(kn)$
D&Q	$dp[i][j] = \min_{k < j} \{dp[i-1][k] + C[k][j]\}$	$A[i][j] \leq A[i][j+1]$	$O(kn^2)$	$O(kn \log n)$
Knuth	$dp[i][j] = \min_{i < k < j} \{dp[i][k] + dp[k][j]\} + C[i][j]$	$A[i, j-1] \leq A[i, j] \leq A[i+1, j]$	$O(n^3)$	$O(n^2)$

Notes:

- $A[i][j]$ - the smallest k that gives the optimal answer, for example in $dp[i][j] = dp[i-1][k] + C[k][j]$
- $C[i][j]$ - some given cost function
- We can generalize a bit in the following way $dp[i] = \min_{j < i} \{F[j] + b[j] * a[i]\}$, where $F[j]$ is computed from $dp[j]$ in constant time