Esame Scritto di Fisica

12/09/2018 — I Appello — Sessione Autunnale — A.A. 2017/18

Corso di Laurea in Informatica/Informatica per il Management

Matricola: .... Nome e Cognome: ....
Seriale compito: unico

Quesito teorico (6 pti)

Cosa si intende per inerzia? E per momento d'inerzia? Descrivere accuratamente queste grandezze fisiche e spiegare la loro importanza nella trattazione della meccanica classica.

Esercizio 1 (18 pti)

Un battipalo di massa 2900 kg, cadendo da un'altezza di 1.95 m, conficca nel terreno per una profondità di 3.8 cm un palo di massa 500 kg.

a. Ammesso che l'urto fra il battipalo e il palo sia completamente anelastico, determinare la forza di resistenza esercitata dal terreno

b. Supposto che la forza calcolata precedentemente sia costante, a quale profondità sarebbe stato conficcato il palo nel caso di un urto elastico?

c. Che cosa è più efficace in questo caso, l'urto elastico o quello anelastico?

Esercizio 2 (18 pti)

Consideriamo due osservatori, uno a terra ed uno su un treno in moto rettilineo uniforme, a velocità u rispetto al suolo. Ciascuno osserva che una particella di massa m, inizialmente ferma rispetto al treno, subisce un'accelerazione a per effetto di una forza costante applicata durante un tempo t nella stessa direzione e verso del treno.

a. Dimostrare che per entrambi il lavoro svolto dalla forza è uguale alla variazione di energia cinetica della particella, ma che per uno l'energia cinetica è data da $\frac{1}{2}ma^2t^2$, mentre per l'altro è data da $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut + \frac{1}{2}mu^2$.

b. Si spieghi la differenza nel lavoro svolto dalla stessa forza in relazione alla distanza che ciascun osservatore misura per il percorso effettuato dalla particella nel tempo t.

c. Si spieghi la differenza nell'energia cinetica finale misurata da ciascun osservatore in relazione al lavoro che la particella svolgerebbe se si fermasse rispetto a ciascuno dei due.

Risposta quesito teorico

Scegliamo punto materiale, idealizzazione puntiforme ad esempio di una sfera fatta di metallo. Se questo è sottoposto ad una forza non nulla, subisce un'accelerazione, ossia una variazione della sua velocità. Prendiamo ora un diverso punto materiale, questa volta avente le stesse dimensioni del precedente ma fatto di legno. Sottoponiamolo alla stessa forza, scopriremo che subisce una differente accelerazione. Questa proprietà dei corpi che li rende differenti nella reazione ad una medesima forza è chiamata inerzia, o più spesso massa inerziale. In altre parole, la massa è la proprietà di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto. Sperimentalmente possiamo trovare che l'accelerazione prodotta da una certa forza è inversamente proporzionale alla massa del corpo cui è applicata.
Da queste parole risulta già chiaro l'importanza della massa nello studio della dinamica. Ma come misurarla? È necessario avere un *campione* di riferimento, che useremo come unità di misura della

massa stessa. Diremo che questo corpo ha massa m_{std}. Applichiamo ad esso una forza F e misuriamone l'accelerazione, a_{std}. Applichiamo poi la medesima forza F ad un corpo di massa ignota m_x, misuriamone l'accelerazione e chiamiamola a_x. Vale quindi la proporzione (ricordiamo l'ipotesi che la forza sia la medesima applicata nei due casi):

$$\frac{m_x}{m_{\text{std}}} = \frac{a_{\text{std}}}{a_x}$$

A questo punto abbiamo trovato un modo per calcolare la massa del corpo ignoto in funzione della massa del corpo campione. Possiamo quindi scoprire che la massa si comporta come una quantità scalare ed è fondamentale nella definizione della seconda legge di Newton, oltre ad essere le fondamenta su cui è costruita la prima legge.

Quando però estendiamo la dinamica allo studio dei moti rotazionali, ci accorgiamo che la massa non è più sufficiente per descrivere la proprietà di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto. Dando per noti i concetti di velocità angolare ed accelerazione angolare, ci accorgiamo infatti che la dinamica di un corpo in rotazione attorno ad un asse non viene completamente descritta dalla massa. A parità di forza e di punto di applicazione della stessa (dando quindi per noto anche il concetto di momento di una forza), due corpi di massa uguale ma con diversa distribuzione della materia (ad esempio due aste identiche ma con due masse addizionali puntiformi posizionate in punti diversi, in rotazione su un asse ortogonale passante per uno dei due estremi) reagiscono diversamente, dando origine a due diverse accelerazioni angolari. Bisogna pertanto introdurre una nuova grandezza, chiamata momento d'inerzia, che per una particella singola si definisce come

$$I = mr^2$$

Il momento d'inerzia dipende dalla massa della particella, ma anche dalla sua distanza dall'asse di rotazione. Al crescere di tale distanza il momento d'inerzia cresce, anche se la massa resta costante. La formula precedente si generalizza in

$$I = \int_V r^2 dm$$

Questa nuova grandezza svolge nella seconda legge della dinamica per moti rotazionali la parte della massa nell'equazione per il moto traslatorio.

Soluzione primo esercizio

a. È richiesto un tempo $t_1 = \sqrt{2h/g}$ per compiere il moto di caduta libera dall'altezza iniziale $h = 1.95$ m. Un oggetto si muove alla velocità $v_1 = gt_1 = \sqrt{2hg}$ dopo la caduta da quest'altezza. Considerando un urto anelastico, i due corpi si muovono dopo lo scontro assieme, con una velocità

$$v_2 = \frac{Mv_1}{M+m}$$

dove $M = 2900$ kg ed $m = 500$ kg Se consideriamo che il sistema si ferma dopo aver percorso uno spazio pari a 3.8 cm, il tempo impiegato per fermarsi sarà pari a $t_2 = d/(v_2/2) = 2d/v_2$, che corrisponde ad una forza media pari a

$$F_{\text{av}} = \frac{(M+m)v_2}{t_2} = \frac{(M+m)v_2^2}{2d} = \frac{M^2 v_1^2}{2(M+m)d} = \frac{(gM)^2}{g(M+m)}\frac{h}{d}$$

b. Per un urto elastico, abbiamo che $v_2 = 2Mv_1/(M+m)$; il tempo impiegato per l'arresto è $t_2 = 2d/v_2$, ma ora sappiamo F_{av} invece di d. Pertanto

$$F_{\text{av}} = \frac{mv_2}{t_2} = \frac{mv_2^2}{2d} = \frac{4Mmv_1^2}{(M+m)d} = \frac{2(gM)(gm)}{g(M+m)}\frac{h}{d}$$

da cui

$$d = \frac{2(gM)(gm)}{g(M+m)}\frac{h}{F_{\text{av}}}$$

c. Per questo punto serve un minimo di attenzione: il battipalo, dopo l'urto elastico, è rimbalzato sul palo, risalito e quindi ricaduto nuovamente su di esso, spingendo il palo più in profondità. Questo meccanismo si ripete all'infinito, non essendoci dissipazione di energia, con una serie di distanze percorse dal palo in profondità sempre più ridotte. Il secondo urto avviene infatti ad una velocità del battipalo pari a $v_3 = (M - m)/(M + m)v_1$, che fornirà al palo una velocità iniziale pari a $v_4 = 2M(M + m)v_3 = [(M - m)/(M + m)]v_2$. Definendo quindi per comodità di notazione il termine $\alpha = [(M - m)/(M + m)] = 0.71$, la profondità raggiunta dal palo è

$$d_f = d(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \ldots) = \frac{d}{1 - \alpha^2}$$

velocemente confrontabile con la profondità data nel testo per l'urto anelastico.

Soluzione secondo esercizio

Per l'osservatore sul treno, l'accelerazione della particella è a, e la distanza percorsa vale $x_t = \frac{1}{2}at^2$. In questo caso il lavoro misurato è pari a $W_t = m\,a\,x_t = m\frac{1}{2}a^2t^2$. La velocità finale della particella, misurata in questo sistema di riferimento, vale $v_t = at$, così che l'energia cinetica sia $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(at)^2$. In questo sistema di riferimento la particella è partita da una condizione di riposo, pertanto $\Delta K_t = W_t$. Per l'osservatore a terra l'accelerazione della particella è sempre a (sono entrambi osservatori inerziali, è un requisito fondamentale!), ma la distanza percorsa è $x_g = \frac{1}{2}at^2 + ut$, così che il lavoro misurato risulta pari a $W_g = m\,a\,x_g = m\frac{1}{2}a^2t^2 + maut$. La velocità finale della particella, misurata in questo sistema di riferimento, è $v_g = at + u$, così che l'energia cinetica vale

$$K_g = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(at + u)^2 = \frac{1}{2}a^2t^2 + maut + \frac{1}{2}mu^2$$

L'energia cinetica iniziale però in questo caso non era nulla, ma bensì valeva $K_{0g} = \frac{1}{2}mu^2$ e pertanto rimane valida la relazione $\Delta K_g = W_g$.