1.1 Problemi svolti Libera Longo 2024-01-18

Ogni quantità fisica può essere moltiplicata per 1 senza che il suo valore ne risulti modificato. Per esempio, se 1 min = 60 s, 1 = (60 s)/(1 min); analogamente 1 ft = 12 in, da cui 1 = (1 ft)/(12 in). Tramite gli appropriati fattori di conversione, trovare (a) la velocità in m/s equivalente a 55 miglia (terrestri) all'ora (mi/h) e (b) il valore espresso in cm^3 di un barile contenente 16 galloni fluidi USA (gal) di benzina.

appendice G

1 miglio (mile) = 1 mi = 1609 m

1 gallone = 1 gal = 231 in^3 (dove?)

1 pollice (inch) = 1 in = 2,540 cm

a) $$55 \frac{mi}{h} = 55 \frac{\cancel{mi}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1609\ m}{1\ \cancel{mi}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} = 25 \frac{m}{s}$$

b) $$16\ gal = 16\ \cancel{gal} \cdot \frac{231\ \cancel{in^3}}{1\ \cancel{gal}} \cdot \left(\frac{2,54\ cm}{1\ \cancel{in}}\right)^3 = 6,1 \cdot 10^4\ cm^3$$

L'anno-luce (a.l.) e` una misura di lunghezza (non di tempo) uguale alla distanza percorsa nel vuoto dalla luce in un anno. Calcolare il fattore di conversione tra anni-luce e metri e trovare la distanza in anni-luce della stella Proxima Centauri ($4,0 \cdot 10^{16} m$).

$$1\,a = 1\,\cancel{a} \cdot \frac{365{,}25\,\cancel{d}}{1\,\cancel{a}} \cdot \frac{24\,\cancel{h}}{1\,\cancel{d}} \cdot \frac{60\,\cancel{min}}{1\,\cancel{h}} \cdot \frac{60\,s}{1\,\cancel{min}} = 3{,}16 \cdot 10^{7}\,s$$

$$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,m/s$$

$$1\,a.l = c \cdot 1\,a = \left(3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{\cancel{s}}\right) \cdot \left(3{,}16 \cdot 10^{7}\,\cancel{s}\right) = 9{,}48 \cdot 10^{15}\,m$$

Proxima Centauri

$$4{,}0 \cdot 10^{16}\,\cancel{m} \cdot \frac{1\,a.l.}{9{,}48 \cdot 10^{15}\,\cancel{m}} = 4{,}2\,a.l.$$

Supponiamo di voler pesare il nostro gatto e di avere a disposizione una bilancia pesapersone a indicazione digitale che fornisce il valore della massa in kilogrammi. Procediamo quindi come segue: dapprima determiniamo la nostra massa corporea, che risulta uguale a 75 kg, quindi ripetiamo la pesata con il gatto in braccio ottenendo il valore di 80 kg. Qual'e` l'errore percentuale sul nostro peso e su quello del gatto?

75 Kg é compreso tra 74,5 e 75,5 Kg

$$\text{Errore}^{(\text{noi})}_{\text{percentuale}} = \frac{1\,\text{Kg}}{75\,\text{Kg}} = 0{,}013 \quad \text{ossia} \quad 1{,}3\,\%$$

$$\text{massa}_{\text{gatto}} = 80\,\text{Kg} - 75\,\text{Kg} = 5\,\text{Kg}$$

$$\text{Errore}^{(\text{gatto})}_{\text{percentuale}} = \frac{1\,\text{Kg}}{5\,\text{Kg}} = 0{,}2 \quad \text{ossia} \quad 20\%$$

Per mantenere un oggetto in moto su una circonferenza con velocita` costante in valore assoluto, occorre assoggettarlo a una <<forza centripeta>> (il moto circolare verra` discusso nel Capitolo 4). Eseguire l'analisi dimensionale di una forza centripeta.

Forza F dipenderá: massa m, velocitá v, raggio r

$$F \propto m^a v^b r^c$$

$$[F] = [m^a][v^b][r^c]$$

unitá di Forza é $Kg \cdot m/s^2$ (1 Newton)

$$[F] = MLT^{-2}$$

$$MLT^{-2} = M^a (L/T)^b L^c = M^a L^{b+c} T^{-b}$$

esponenti

M: $a = 1$

T: $b = 2$

L: $b + c = 1 \Rightarrow c = -1$

$$F \propto \frac{m v^2}{r}$$

Un istante cruciale nella storia dell'evoluzione del Universo subito dopo il Big Bang e\` il tempo di Planck, t_P, che dipende da tre costanti fondamentali:
(1) la velocita\` della luce (la costante fondamentale nella teoria della relativita\`)
(2) la costante gravitazionale di Newton (la costante fondamentale della teoria gravitazionale)
(3) la costante di Planck (la costante fondamentale che compare nella meccanica quantistica)
Si determini il valore del tempo di Planck mediante un'analisi dimensionale.

$$c = 3,00 \cdot 10^8 m/s$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

$$[c] = [m/s] = L\,T^{-1}$$

$$[G] = [m^3/s^2 \cdot Kg] = L^3\,T^{-2}\,M^{-1}$$

$$[h] = [Kg \cdot m^2/s] = M\,L^2\,T^{-1}$$

$$t_P \propto c^i G^j h^K \qquad [t_P] = [c^i][G^j][h^K]$$

$$T = (L T^{-1})^i (L^3 T^{-2} M^{-1})^j (M L^2 T^{-1})^K =$$

$$= L^{-i+3j+2K}\, T^{-i-2j-K}\, M^{-j+K}$$

esponenti

L: $\quad 0 = -i + 3j + 2K$

T: $\quad 1 = -i - 2j - K$

M: $\quad 0 = -j + K$

risolvendo queste tre equazioni

$$\begin{cases} i+3j+2K=0 \\ -i-2j-K=1 \\ -j+K=0 \end{cases} \xrightarrow{3\ eq} K=j$$

sostituisco a j e K il nome x

$$\begin{cases} i+3x+2x=0 \\ -i-2x-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i+5x=0 \\ -i-3x=1 \end{cases}$$

1 eq $\quad i+5x=0 \quad i=-5x$

2 eq $\quad -(-5x)-3x=1$

$$5x-3x=1$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2} \longrightarrow j=\frac{1}{2}, \ K=\frac{1}{2}$$

$$i=-5x \rightarrow i=-\frac{5}{2}$$

$i = -\frac{5}{2}$ $\quad j = k = \frac{1}{2}$ $\quad$ pertanto

$$t_p \propto c^i G^j h^k$$

$$t_p \propto c^{-\frac{5}{2}} G^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{G h}{c^5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot \cancel{Kg}}\right) \cdot \left(6{,}63 \cdot 10^{-34} \frac{\cancel{Kg} \cdot m^2}{s}\right)}{\left(3{,}00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4{,}42 \cdot 10^{-44} \frac{m^5}{s^3}}{2{,}43 \cdot 10^{42} \frac{m^5}{s^5}}} = 1{,}35 \cdot 10^{-45} s$$