

Cinematica

Velocità: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Accelerazione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Moto uniformemente accelerato

$$v - v_0 = a \cdot t$$

$$x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_x)t$$

$$v_x^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Corpo in caduta da fermo:

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Moto del proiettile

$$y = x \cdot \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Moto Circolare

Velocità angolare: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Accelerazione angolare: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Moto Circolare Uniforme

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v_{\text{tangenziale}} = \omega r$$

$$a_{\text{centripeta}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Moto Circolare Unif. accelerato

$$\omega - \omega_0 = \alpha \cdot t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Moto curvilineo

$$\vec{a} = a_T \hat{\theta} + a_R \hat{r} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{\theta} - \frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Sistemi a più corpi

Massa totale: $m_T = \sum m_i = \int dm$

Centro di massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m_T} = \frac{\int \vec{r}_i dm}{m_T}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m_T}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2}$$

Momento di inerzia:

$$I_{asse} = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Teorema assi paralleli:

$$I_{asse} = I_{CM} + mD^2$$

Forze, Lavoro ed Energia

Legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

Momento della forza: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Forze Fondamentali

Forza peso: $F_g = mg$

Forza elastica: $F_{el} = -k(x - l_0)$

Gravità: $\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$

Elettrostatica: $\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$

Forze di Attrito

Statico: $|\vec{F}_S| = \mu_S |\vec{N}|$

Dinamico: $\vec{F}_D = -\mu_D |\vec{N}| \hat{v}$

Viscoso: $\vec{F}_V = -\beta \vec{v}$

Lavoro

$$L = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\omega$$

Forza costante: $L = \vec{F} \cdot \vec{l}$

Forza elastica:

$$L = -\frac{1}{2}k(x_f - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(x_i - l_0)^2$$

Forza peso: $L = -mgh$

Gravità: $L = Gm_1 m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$

Elettrostatica: $L = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$

Potenza: $P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \tau \omega$

Energia

Cinetica: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Rotazione: $K = \left\{ \frac{1}{2}m_T v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \right.$

$\left. \frac{1}{2}I_{AsseFisso}\omega^2 \right\}$

Forze vive: $K_f - K_i = L_{TOT}$

Potenziale: $U = -L = -\int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Meccanica: $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U$

Conservazione: $E_f - E_i = L_{NONCONS}$

En. potenziale forze fondamentali:

Forza peso: $U(h) = mgh$

Forza elastica: $U(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$

Gravità: $U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$

Elettrostatica: $U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$

Impulso e Momento Angolare

Quantità di moto: $\vec{p} = m\vec{v}$

Impulso: $\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

Momento angolare: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Intorno ad un asse fisso: $|\vec{L}| = I_{asse} \cdot \omega$

Equazioni cardinali

$$\vec{p}_T = \sum \vec{p}_i = m_T \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{L}_T = \sum \vec{L}_i = I_{asse} \cdot \vec{\omega}$$

I card: $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_T}{dt} = m_T \cdot \vec{a}_{CM}$

II card: $\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_T}{dt}$

Asse fisso: $|\sum \vec{\tau}_{ext}| = I_{asse} \cdot \alpha_{asse}$

Leggi di conservazione

$$\vec{p}_T = \text{costante} \Leftrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\vec{L}_T = \text{costante} \Leftrightarrow \sum \vec{\tau}_{ext} = 0$$

$$E = \text{costante} \Leftrightarrow L_{NONCONS} = 0$$

Urti

Per due masse isolate $\vec{p}_T = \text{costante}$:

Anelastico: $v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Elastico (conservazione energia):

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases}$$

Moto Armonico

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x(t)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\phi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Molla: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Pendolo: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Momenti di inerzia notevoli

Anello intorno asse: $I = mr^2$

Cilindro pieno intorno asse: $I = \frac{1}{2}mr^2$

Sbarretta sottile, asse CM: $I = \frac{1}{12}mL^2$

Sfera piena, asse CM: $I = \frac{2}{5}mr^2$

Lastra quadrata, asse \perp : $I = \frac{1}{6}mL^2$

Gravitazione

Terza legge di Keplero: $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) R^3$

Vel. di fuga: $v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$

Elasticità

Modulo di Young: $\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$

Compressibilità: $\Delta p = -B \cdot \frac{\Delta V}{V}$

Modulo a taglio: $\frac{F}{A} = M_t \cdot \frac{\Delta x}{h}$

Fluidi

Spinta di Archimede: $B_A = \rho_L V_g$

Continuità: $A \cdot v = \text{costante}$

Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{costante}$

Onde

Velocità v , pulsazione ω , lunghezza d'onda λ , periodo T , frequenza f , numero d'onda k .

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Onde su una corda

Velocità: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Spostamento: $y = y_{\max} \sin(kx - \omega t)$

Potenza: $P = \frac{1}{2}\mu v (\omega y_{\max})^2$

Onde sonore

Velocità: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

$$v(T) = v(T_0) \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

Spostamento: $s = s_{\max} \cos(kx - \omega t)$
Pressione $\Delta P = \Delta P_{\max} \sin(kx - \omega t)$

$$\Delta P_{\max} = \rho v \omega s_{\max}$$

Intensità: $I = \frac{1}{2} \rho v (\omega s_{\max})^2 = \frac{\Delta P_{\max}^2}{2 \rho v}$
Intensità (dB): $\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$
Soglia udibile: $I_0 = 1.0 \times 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

Effetto Doppler

$$f' = \left(\frac{v + v_O \cos \theta_O}{v - v_S \cos \theta_S} \right) f$$

Termodinamica

Primo principio

Calore e cap. termica: $Q = C \cdot \Delta T$
Calore latente di trasf.: $L_t = \frac{Q}{m}$
Lavoro sul sistema: $dW = -pdV$
En. interna:

$$\Delta U = \begin{cases} Q + W_{sulsistema} \\ Q - W_{delsistema} \end{cases}$$

Entropia: $\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ_{REV}}{T}$

Calore specifico

Per unità di massa: $c = \frac{C}{m}$
Per mole: $c_m = \frac{C}{n}$
Per i solidi: $c_m \approx 3R$
Gas perfetto: $c_p - c_v = R$

	c_v	c_p	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
monoatom.	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$
biatomico	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$

Gas perfetti

Eq. stato: $pV = nRT = Nk_bT$
Energia interna: $\Delta U = nc_v \Delta V$
Entropia: $\Delta S = nc_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$
Isocora ($\Delta V = 0$): $W = 0$; $Q = nc_v \Delta T$
Isobara ($\Delta p = 0$):

$$W = -p \Delta V; Q = nc_p \Delta T$$

Isoterma

 ($\Delta T = 0$):

$$W = -Q = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Adiabatica ($Q = 0$): $pV^\gamma = \text{cost.}$;
 $TV^{\gamma-1} = \text{cost.}$; $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cost.}$;
 $W = \Delta U = \frac{1}{\gamma-1} (P_f V_f - P_i V_i)$

Macchine termiche

Efficienza: $\eta = \frac{W}{Q_R} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$

$$C.O.P. \text{ frigorifero} = \frac{Q_C}{W}$$

$$C.O.P. \text{ pompa di calore} = \frac{Q_H}{W}$$

Eff. di Carnot: $\eta_{REV} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$
Teorema di Carnot: $\eta \leq \eta_{REV}$

Espansione termica dei solidi

Esp. lineare: $\frac{\Delta L}{L_i} = \alpha \Delta T$
Esp. volumica: $\frac{\Delta V}{V_i} = \beta \Delta T$
Coefficienti: $\beta = 3\alpha$
 β gas perfetto, p costante: $\beta = \frac{1}{T}$

Conduzione e irraggiamento

Corrente termica:

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{kA}{\Delta x} \Delta T$$

Resistenza termica: $R = \frac{\Delta x}{kA}$
Resistenza serie: $R_{eq} = R_1 + R_2$
Resistenza parallelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
Legge Stefan-Boltzmann: $P = e\sigma AT^4$
L. onda emissione: $\lambda_{\max} = \frac{2.898 \text{ mmK}}{T}$

Gas reali

Eq. Van Der Waals:

$$\left(p + a \left(\frac{n}{v} \right)^2 \right) (V - nb) = nRT$$

Calcolo vettoriale

Prodotto scalare:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

versore: $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

Prodotto vettoriale:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Costanti fisiche

Costanti fondamentali

Grav.: $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$
Vel. luce nel vuoto: $c = 3.00 \times 10^8 \frac{m}{s}$
Carica elementare: $e = 1.60 \times 10^{-19} C$
Massa elettrone: $m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$
Massa protone: $m_p = 1.67 \times 10^{-27} kg$
Cost. dielettrica: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$
Perm. magnetica: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}$
Cost. Boltzmann: $k_b = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$
N. Avogadro: $N_A = 6.022 \times 10^{23} mol^{-1}$
C. dei gas: $R = \begin{cases} 8.314 \frac{J}{mol \cdot K} \\ 0.082 \frac{L \cdot atm}{mol \cdot K} \end{cases}$
C. Stefan-Boltzmann:

$$\sigma = 5.6 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

Altre costanti

Accel gravità sulla terra: $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$
Raggio terra: $R_T = 6.37 \times 10^6 m$
Massa terra: $M_T = 5.98 \times 10^{24} kg$
Massa sole: $M_S = 1.99 \times 10^{30} kg$
Massa luna: $M_L = 7.36 \times 10^{22} kg$
Vol 1 mole di gas STP: $V_{STP} = 22.4 L$
Temp. 0 assoluto: $\theta_0 = -273.15^\circ C$

Trigonometria

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) = \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right) = \pm \sin(\pi \mp \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos(\pi \pm \alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Derivate

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (a \cdot f(x)) = a f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -n \frac{1}{x^{n+1}}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Integrali

$$\int f(x) dx = I(x)$$

$$\int f(x - a) dx = I(x - a)$$

$$\int f(a \cdot x) dx = \frac{I(a \cdot x)}{a}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}, n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = I(x_1) - I(x_0)$$

Approssimazioni ($x_0 = 0$)

$$\sin x = x + O(x^2)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x + O(x^2)$$