

ALGORITMI DI DECISIONE SU ALBERI

PIETRO DI LENA

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA – SCIENZA E INGEGNERIA
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

ALGORITMI E STRUTTURE DI DATI
ANNO ACCADEMICO 2021/2022



INTRODUZIONE

- **Game tree** (teoria dei giochi): albero che rappresenta tutte le possibili partite in un gioco a turni
 - nodi: rappresentano una situazione di gioco
 - archi: mosse giocabili a partire da un nodo
 - foglie: stati finali di gioco (vittoria, sconfitta, patta)
- Usati per lo sviluppo di **algoritmi di decisione** per giochi a turni
- Un Game Tree completo permette di determinare la mossa migliore in ogni possibile situazione di gioco
- **Problema**: spazio di gioco tipicamente troppo ampio da permettere la visita/generazione dell'intero albero
- Cosa vedremo:
 - Algoritmo di decisione MINIMAX su Game Tree
 - Ottimizzazione ALPHABETA pruning per MINIMAX
 - Ricerca in ampiezza ITERATIVEDEEPENING

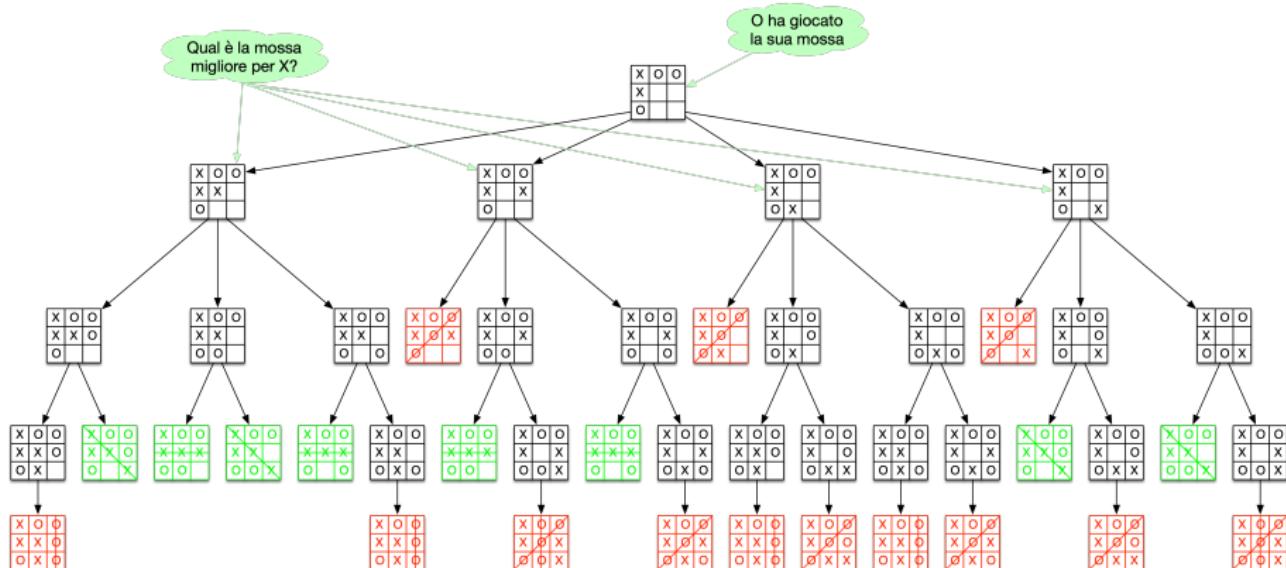
ALGORITMO MINIMAX

- Minmax: criterio per **minimizzare la massima perdita possibile**
 - Teorema Minimax (Von Neumann, 1928)
- **Algoritmo MINIMAX**: algoritmo ricorsivo per individuare la migliore mossa possibile in un gioco secondo il criterio di minimizzare la massima perdita possibile
- Algoritmo **esatto** quando è possibile visitare l'intero Game Tree
 - Siamo sicuri di trovare la mossa migliore in ogni situazione

ALGORITMO MINIMAX

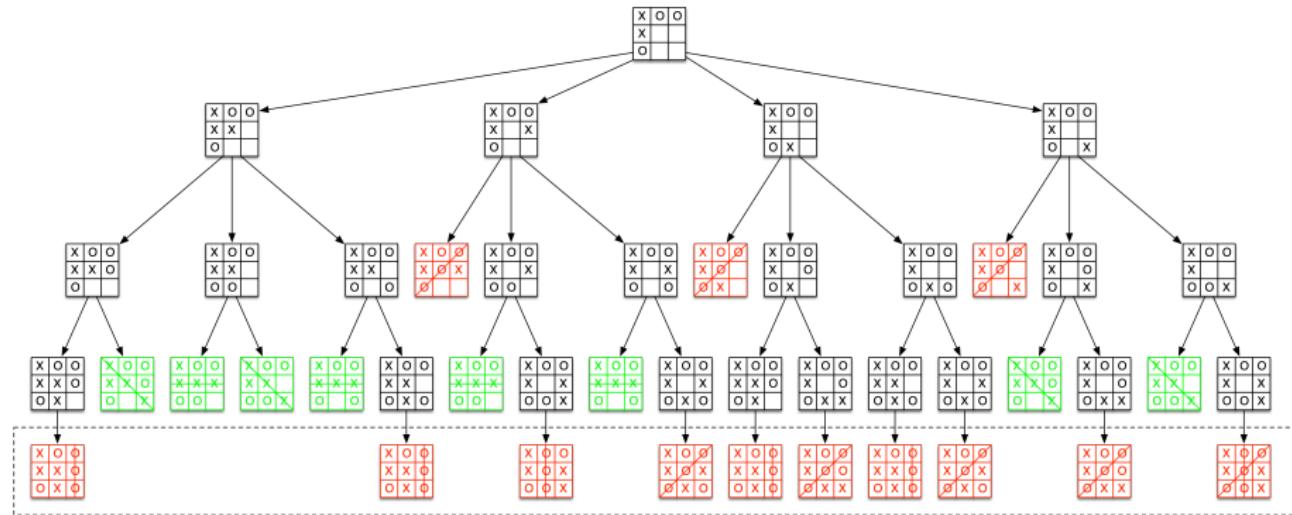
- Assumiamo di poter visitare l'intero albero di gioco
- Etichettiamo le configurazioni finali di gioco (foglie dell'albero)
 - $1 =$ vittoria
 - $0 =$ patta
 - $-1 =$ sconfitta
- Propaghiamo le label dalle foglie fino alla radice:
 - Turno (nodo) del Giocatore A (**massimizzazione**): assegniamo al nodo il **massimo** tra i valori assegnati ai figli (mosse del Giocatore B)
 - Turno (nodo) del Giocatore B (**minimizzazione**): assegniamo al nodo il **minimo** tra i valori assegnati ai figli (mosse del Giocatore A)
- Nota: Giocatore A \Rightarrow vittoria= -1 , Giocatore B \Rightarrow vittoria= 1

ESEMPIO: ALGORITMO MINIMAX



- Verde (+1): X vince (giocatore che minimizza)
- Rosso (-1): O vince (giocatore che massimizza)
- Non può finire in patta (0)

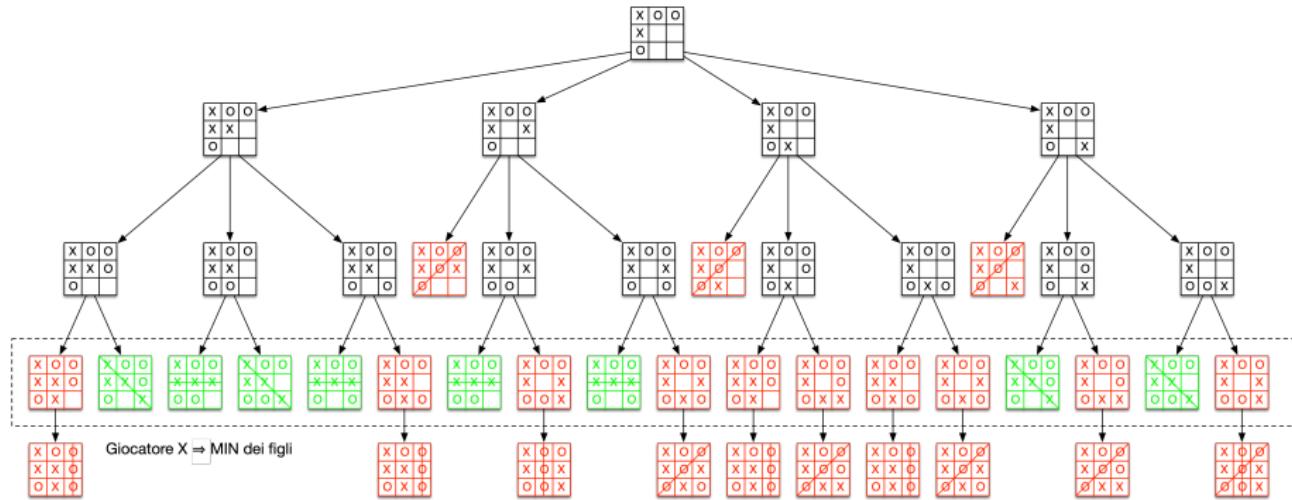
ESEMPIO: ALGORITMO MINIMAX



Giocatore O → MAX dei figli (in questo caso sono tutte foglie quindi assegniamo solo lo score di fine partita: vince sempre O)

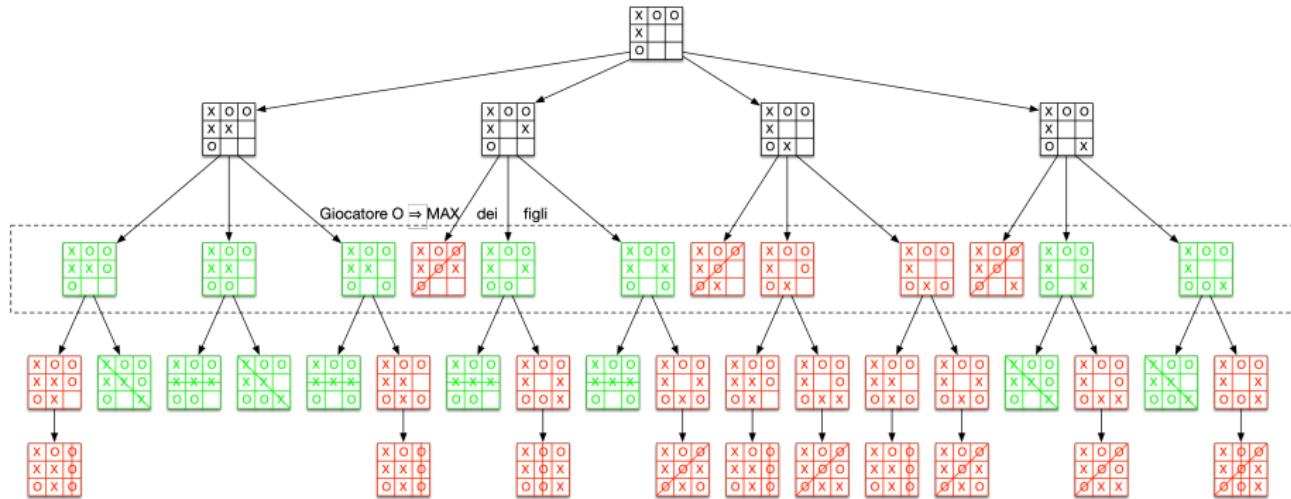
- **Verde (-1):** X vince
- **Rosso (-1):** O vince

ESEMPIO: ALGORITMO MINIMAX



- Verde (+1): X vince
- Rosso (-1): O vince

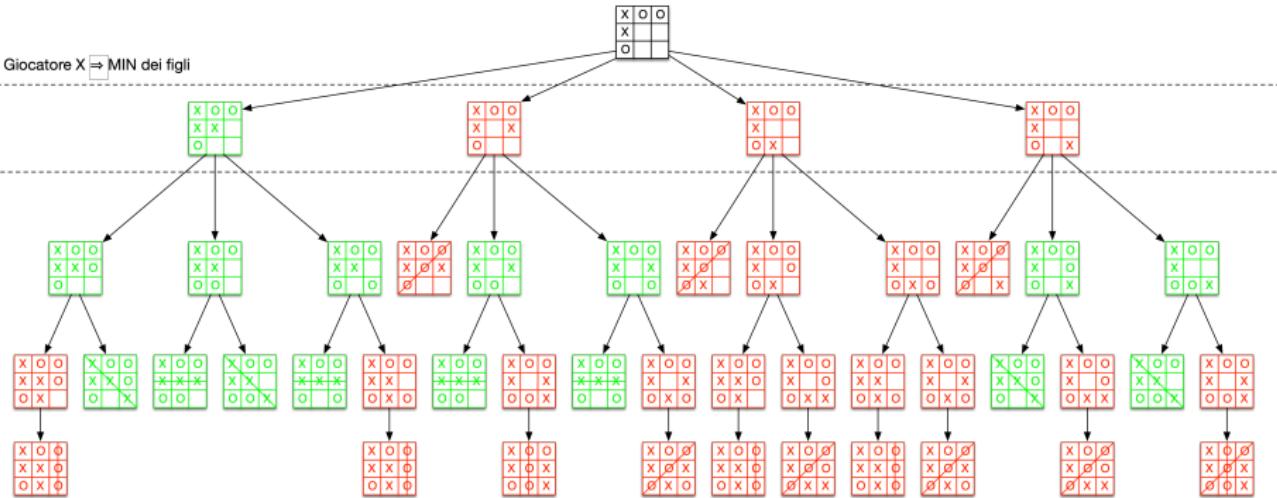
ESEMPIO: ALGORITMO MINIMAX



- Verde (+1): X vince
- Rosso (-1): O vince

ESEMPIO: ALGORITMO MINIMAX

Giocatore X \Rightarrow MIN dei figli

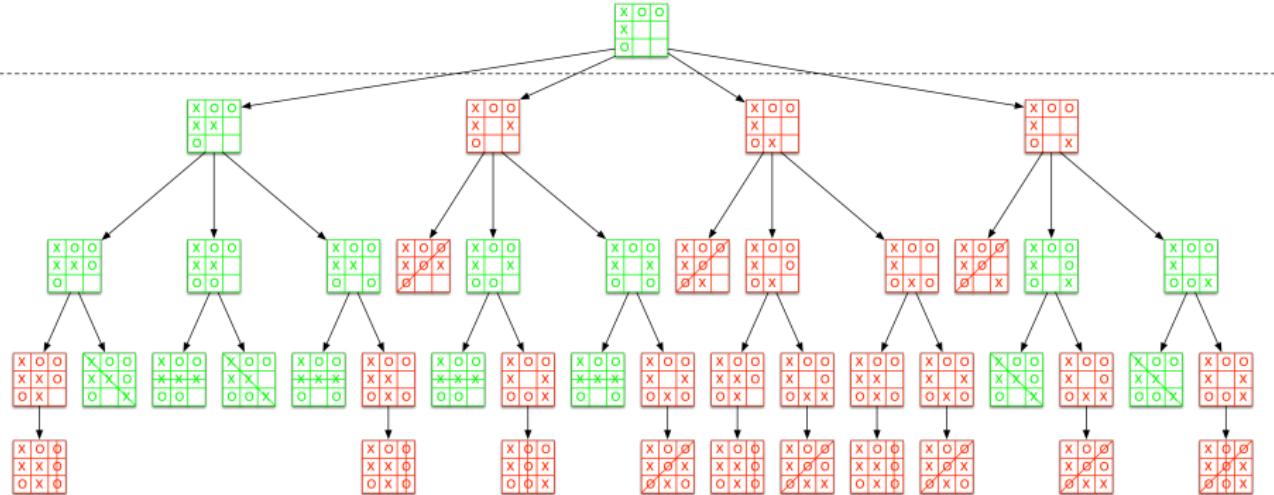


■ Verde (-1): X vince

■ Rosso (-1): O vince

ESEMPIO: ALGORITMO MINIMAX

Giocatore O \Rightarrow MAX dei figli



- Verde (-1): X vince
- Rosso (+1): O vince

ALGORITMO MINIMAX: PSEUDOCODICE

```
1: function MINIMAX(TREE T, BOOL playerA) → INT
2:   if ISLEAF(T) then
3:     eval = EVALUATE(T)
4:   else if playerA == true then           ▷ MAX player
5:     eval =  $-\infty$ 
6:     for c ∈ CHILDREN(T) do
7:       eval = MAX(eval,MINIMAX(c,false))
8:   else                                ▷ MIN player
9:     eval =  $\infty$ 
10:    for c ∈ CHILDREN(T) do
11:      eval = MIN(eval,MINIMAX(c,true))
12:    return eval
```

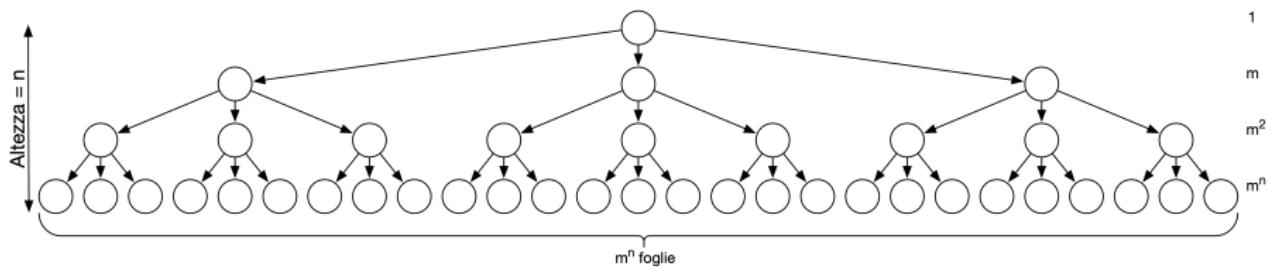
- $\text{ISLEAF}(T)$: verifica che il nodo T sia o meno una foglia
- $\text{CHILDREN}(T)$: ritorna la lista di figli del nodo T
- $\text{EVALUATE}(T)$: ritorna -1 (sconfitta), 0 (patta) o 1 (vittoria)

ANALISI DELL'ALGORITMO MINIMAX

- Che tipo di visita implementa l'algoritmo MINIMAX?
 - Visita in profondità post-ordine: bisogna valutare tutti i figli prima di poter assegnare una valutazione al nodo corrente
- Quanto costa l'algoritmo MINIMAX?
 - Tempo: $\Theta(n)$ (visita ogni nodo esattamente una volta)
 - Memoria: $O(h)$ ($h = \text{altezza dell'albero}$)
- Quanto è grande l'albero di gioco?
 - Dipende dal gioco
 - E' complesso calcolare il numero esatto di nodi di un Game Tree
 - Possiamo trovare un upper bound al Game Tree effettivo ammettendo configurazioni di gioco *illegali*, cioè configurazioni che non possono mai apparire in una partita reale

COMPLESSITÀ: GIOCO CON m MOSSE E n TURNI

- **Definizione.** Un giocatore ha a disposizione al massimo m mosse possibili per turno e il gioco termina in massimo n turni
 - Ex. Forza 4, $m = 7$ (colonne matrice), $n = 6 \times 7$ (righe \times colonne)
- Upper bound al Game Tree effettivo (altezza = $O(n)$)

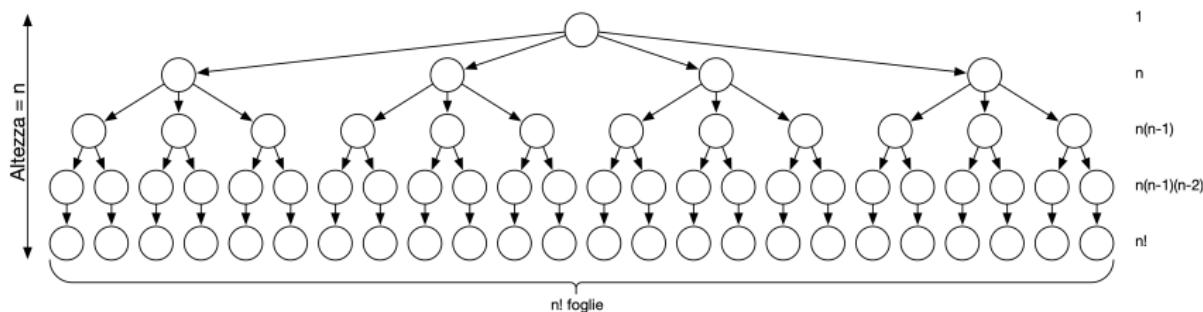


- Il numero di partite possibili $P(m, n)$ è dato dal numero di foglie
$$P(m, n) \leq m^n = O(m^n)$$
- Il numero totale di nodi $T(m, n)$ del Game Tree è limitato da:

$$T(m, n) \leq 1 + m + m^2 + \cdots + m^n = \sum_{k=0}^m m^k = \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1} = O(m^n)$$

COMPLESSITÀ: GIOCO CON n OGGETTI 1/2

- **Definizione.** Un giocatore può scegliere/rimuovere un solo oggetto per turno su n oggetti totali a disposizione
 - Ex. Tris, $n = 3 \times 3$ (righe \times colonne della matrice)
- Upper bound al Game Tree effettivo (altezza = $O(n)$)



- Il numero di partite possibili $P(n)$ è dato dal numero di foglie
$$P(n) \leq n! = O(n!)$$

COMPLESSITÀ: GIOCO CON n OGGETTI 2/2

- Il numero totale di nodi $T(n)$ del Game Tree è limitato da:

$$T(n) \leq 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n!$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \quad n! \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{0!} \right)$$

$$= n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\leq n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= n!e$$

(numero di Eulero $e \approx 2.72$)

$$= O(n!)$$

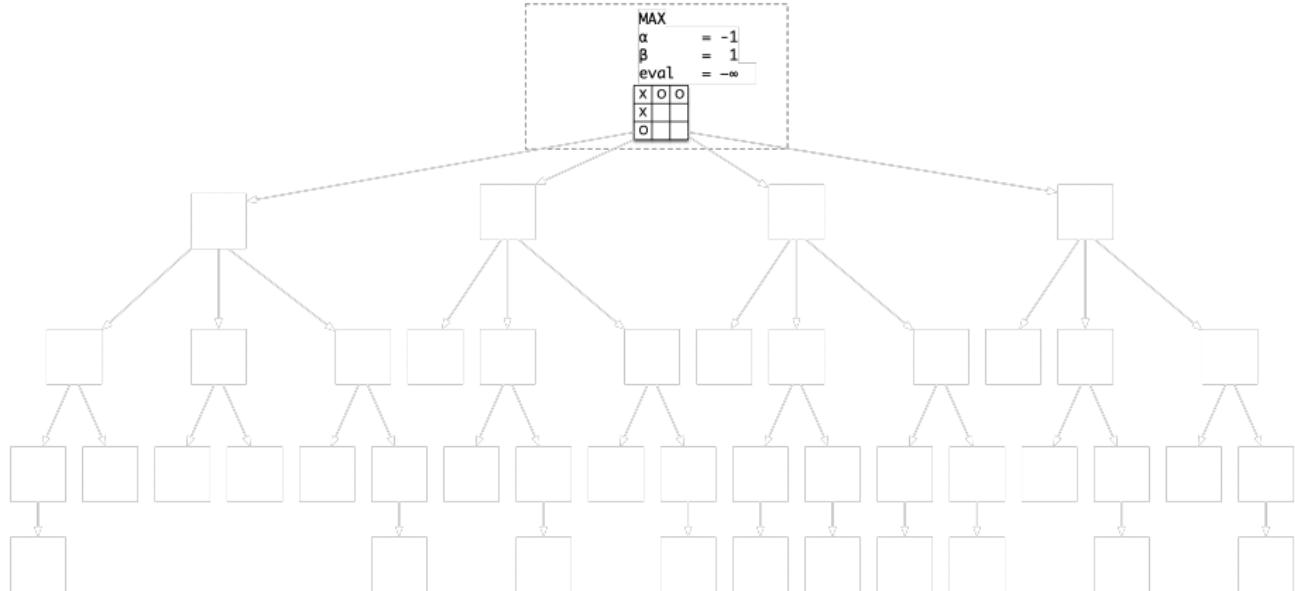
ALGORITMO ALPHABETA PRUNING

- Ottimizzazione per minimizzare il numero di nodi valutati da MINIMAX
- E' davvero necessario visitare tutto l'albero?
 - Interrompiamo la visita su un sottoalbero quando siamo sicuri di non poter trovare una soluzione migliorare di quella attuale
 - **MIN**: stop quando uno dei figli ha score **minimo assoluto** (Es. -1)
 - **MAX**: stop quando uno dei figli ha score **massimo assoluto** (Es. 1)
- ALPHABETA generalizza questa idea: aggiorniamo iterativamente
 - α : **punteggio minimo** ottenibile dal **Giocatore A** (che massimizza)
 - β : **punteggio massimo** ottenibile dal **Giocatore B** (che minimizza)
 - $[\alpha, \beta]$ rappresenta il range di possibili risultati per un sottoalbero
 - Se ad un certo punto $\beta \leq \alpha$ allora il sottoalbero relativo non potrà contenere una soluzione ottima e lo possiamo ignorare (in altri termini, *potiamo* il ramo relativo al sottoalbero)
- Calcola la stessa soluzione di MINIMAX visitando meno nodi

ALGORITMO ALPHABETA: PSEUDOCODICE

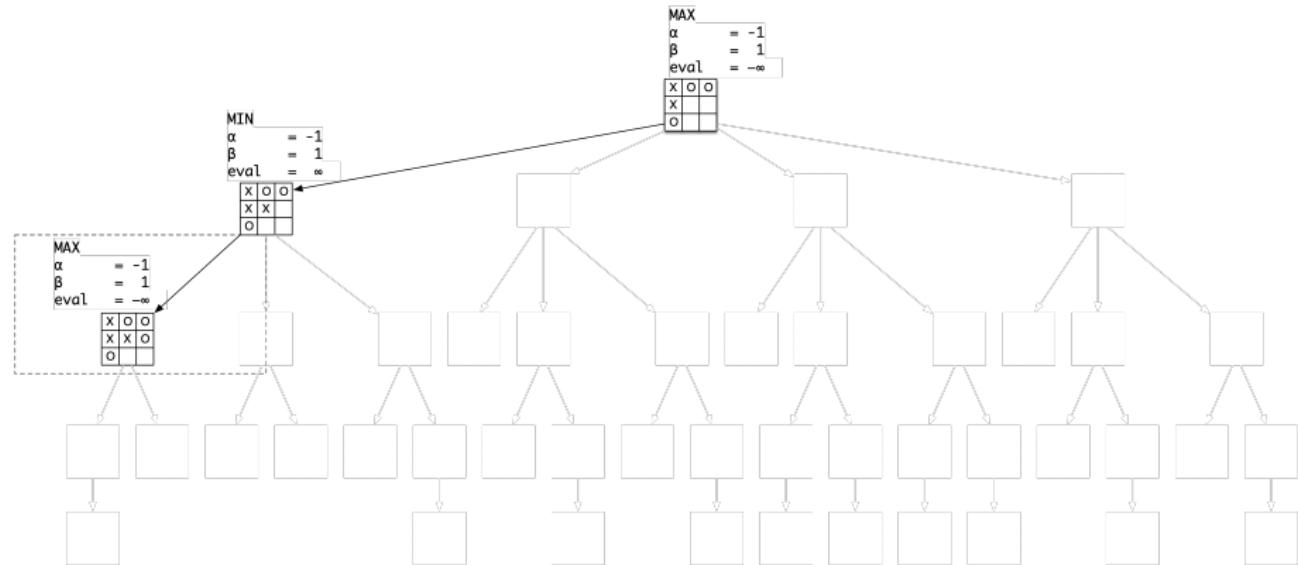
```
1: function ALPHABETA(TREE  $T$ , BOOL  $playerA$ , INT  $\alpha$ , INT  $\beta$ )  $\rightarrow$  INT
2:   if ISLEAF( $T$ ) then
3:     eval = EVALUATE( $T$ )
4:   else if  $playerA == \text{true}$  then                                 $\triangleright MAX\ player$ 
5:     eval =  $-\infty$ 
6:     for  $c \in CHILDREN(T)$  do
7:       eval = MAX(eval, ALPHABETA( $c, \text{false}, \alpha, \beta$ ))
8:        $\alpha = \text{MAX}(eval, \alpha)$ 
9:       if  $\beta \leq \alpha$  then                                          $\triangleright \beta\ cutoff$ 
10:        break
11:   else                                                  $\triangleright MIN\ player$ 
12:     eval =  $\infty$ 
13:     for  $c \in CHILDREN(T)$  do
14:       eval = MIN(eval, ALPHABETA( $c, \text{true}, \alpha, \beta$ ))
15:        $\beta = \text{MIN}(eval, \beta)$ 
16:       if  $\beta \leq \alpha$  then                                          $\triangleright \alpha\ cutoff$ 
17:         break
18:   return eval
```

ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA

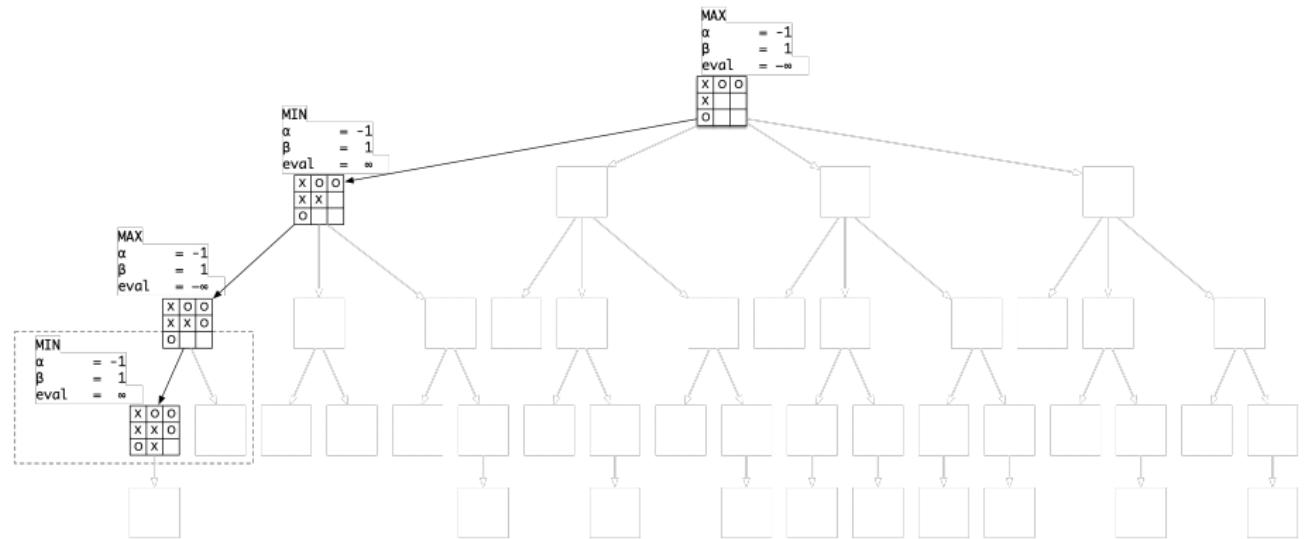


ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA

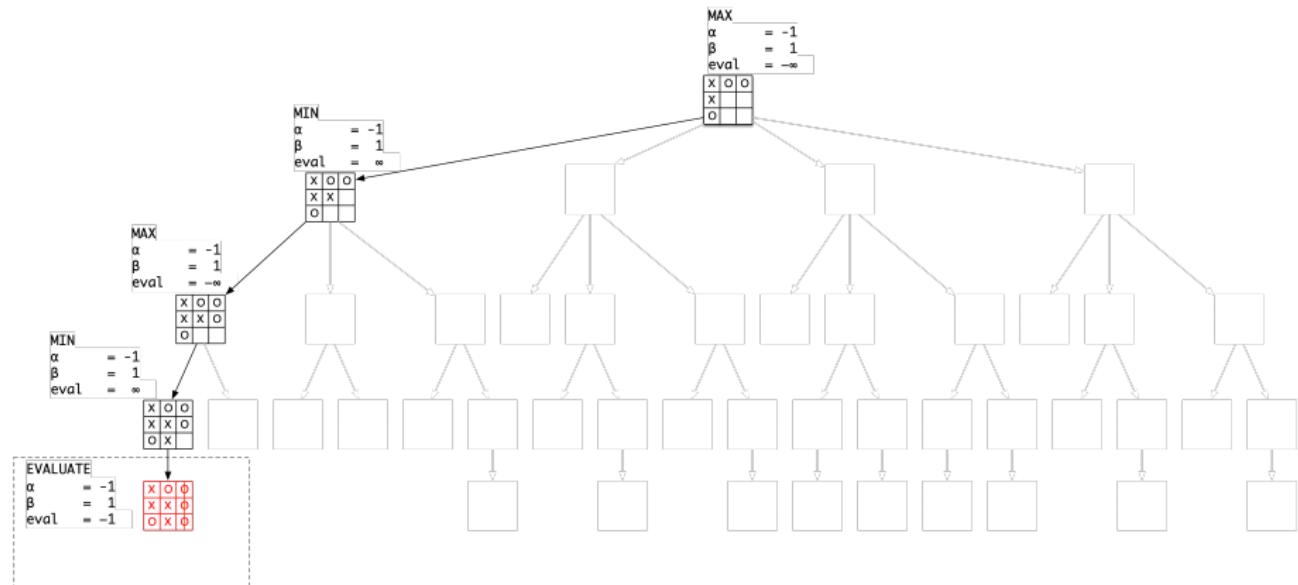
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



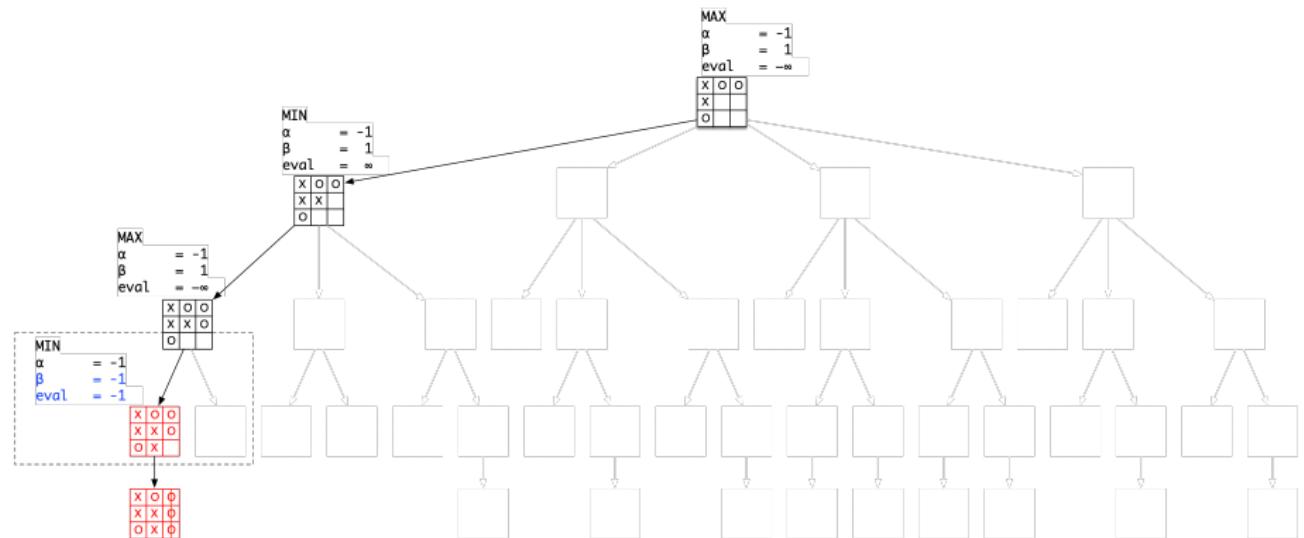
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



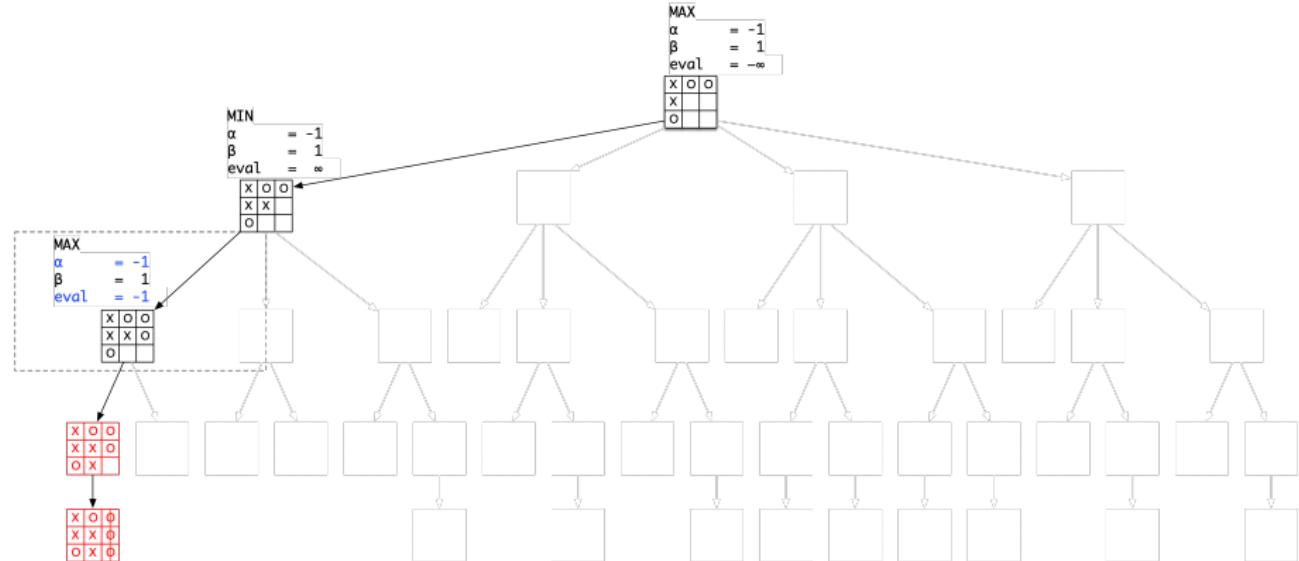
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



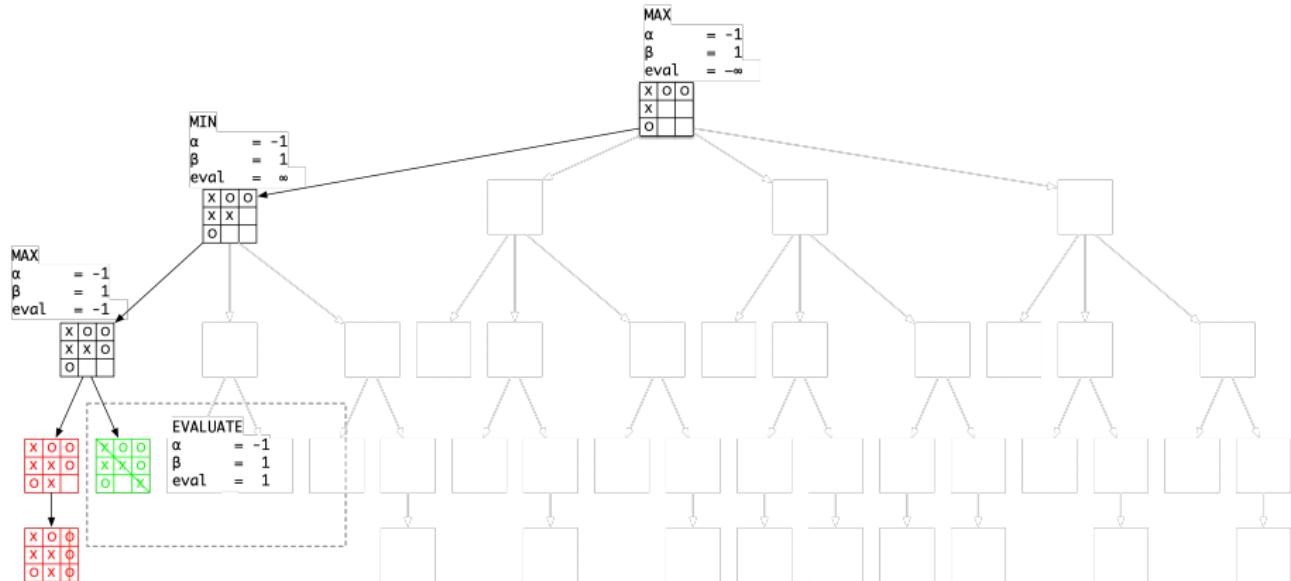
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



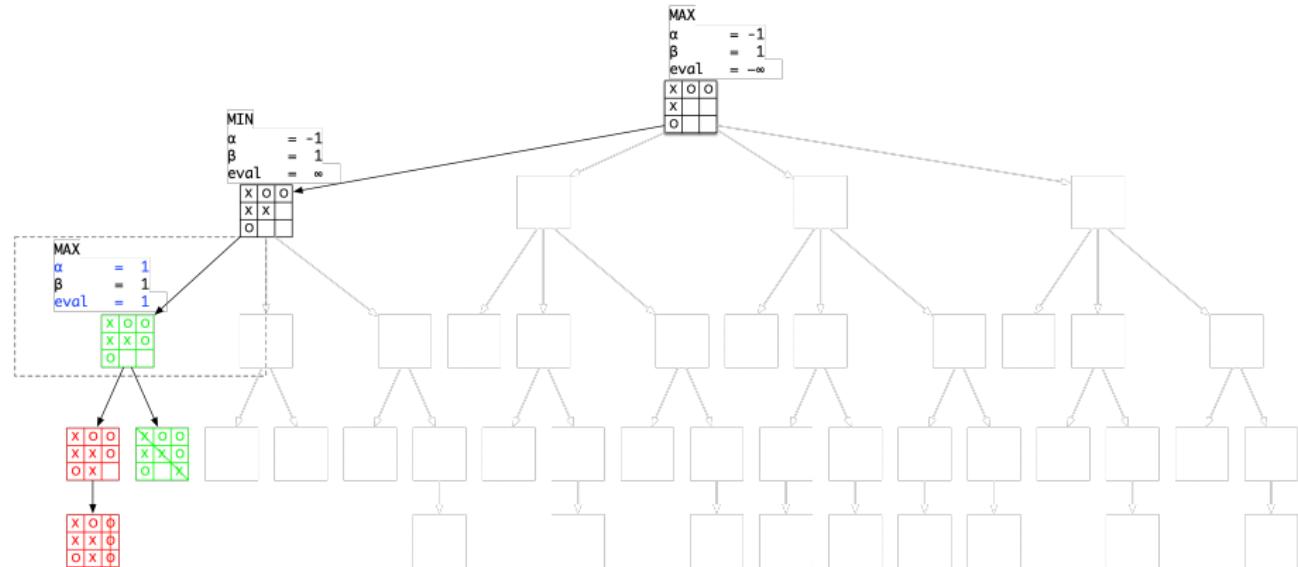
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



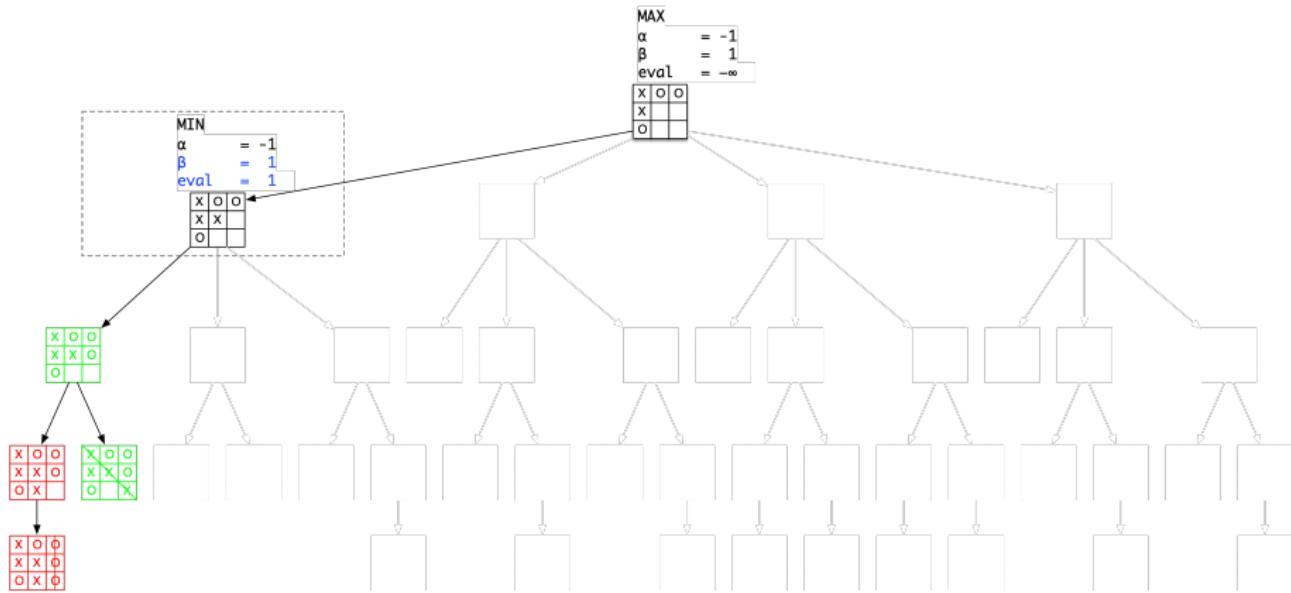
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



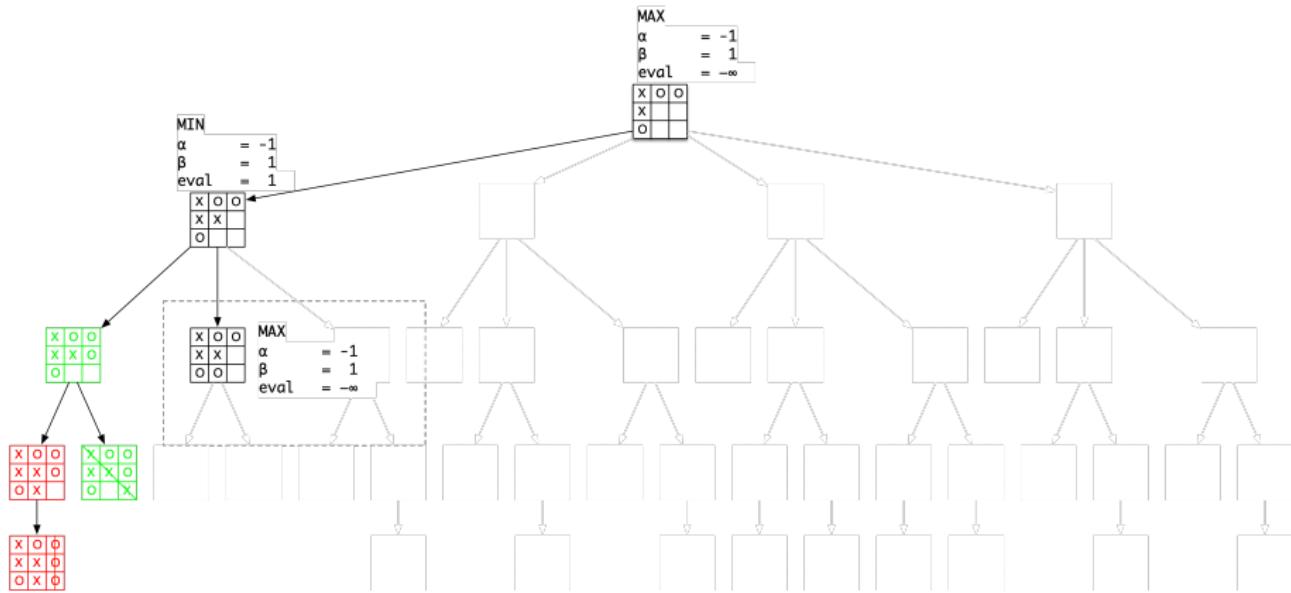
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



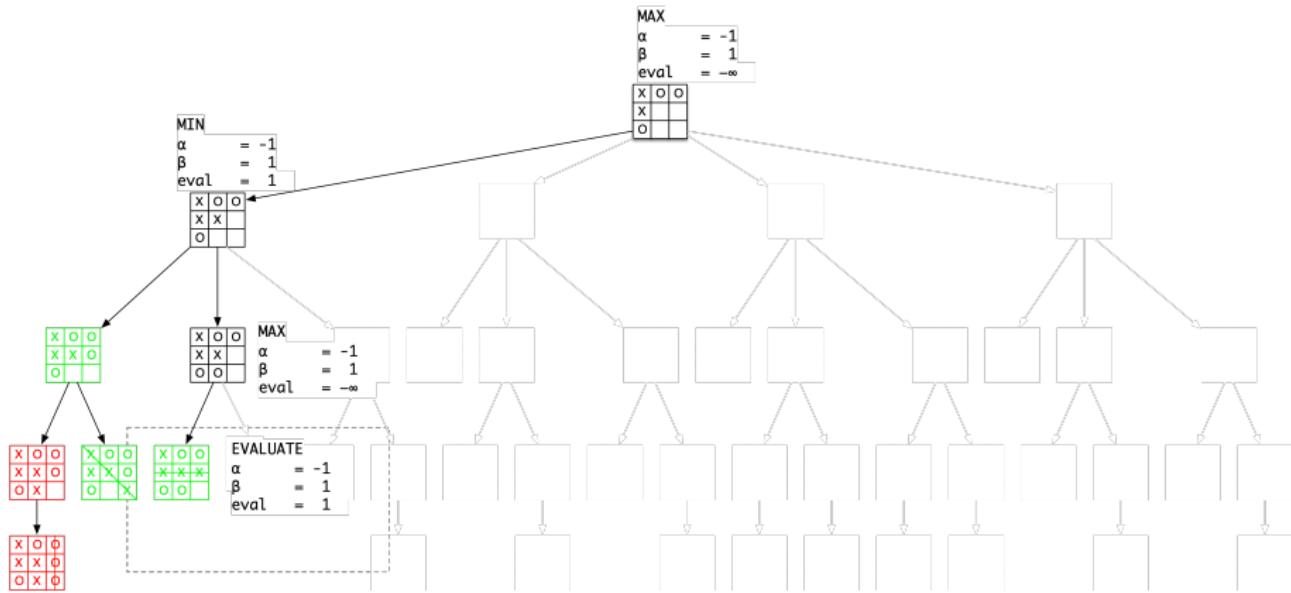
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



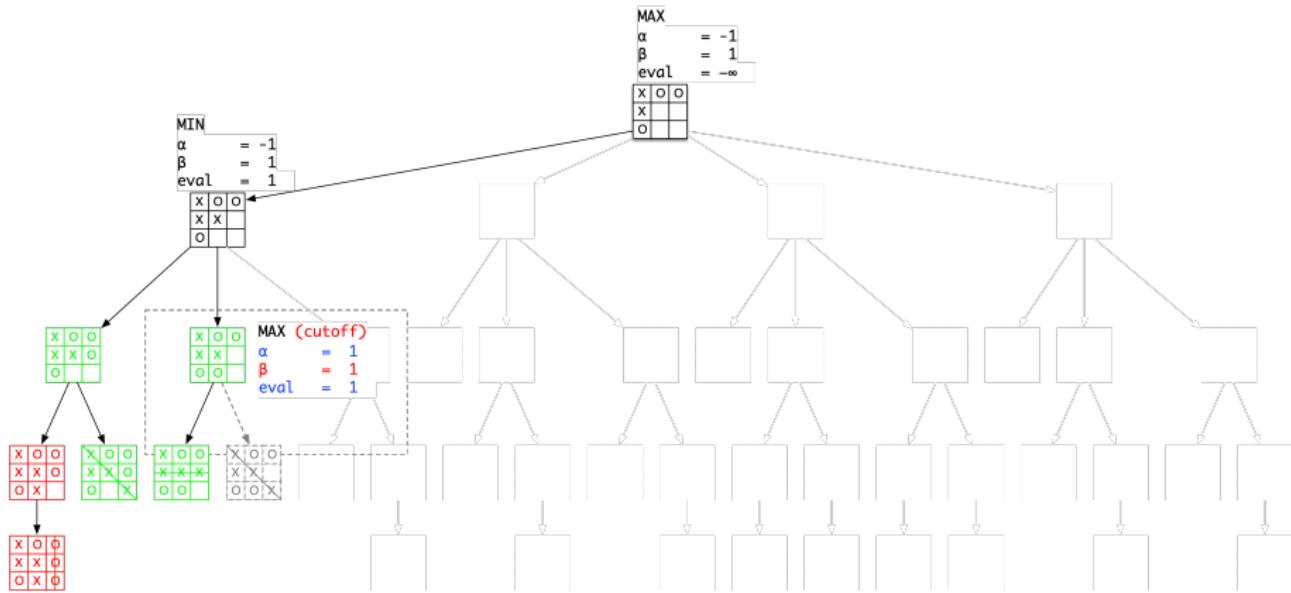
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



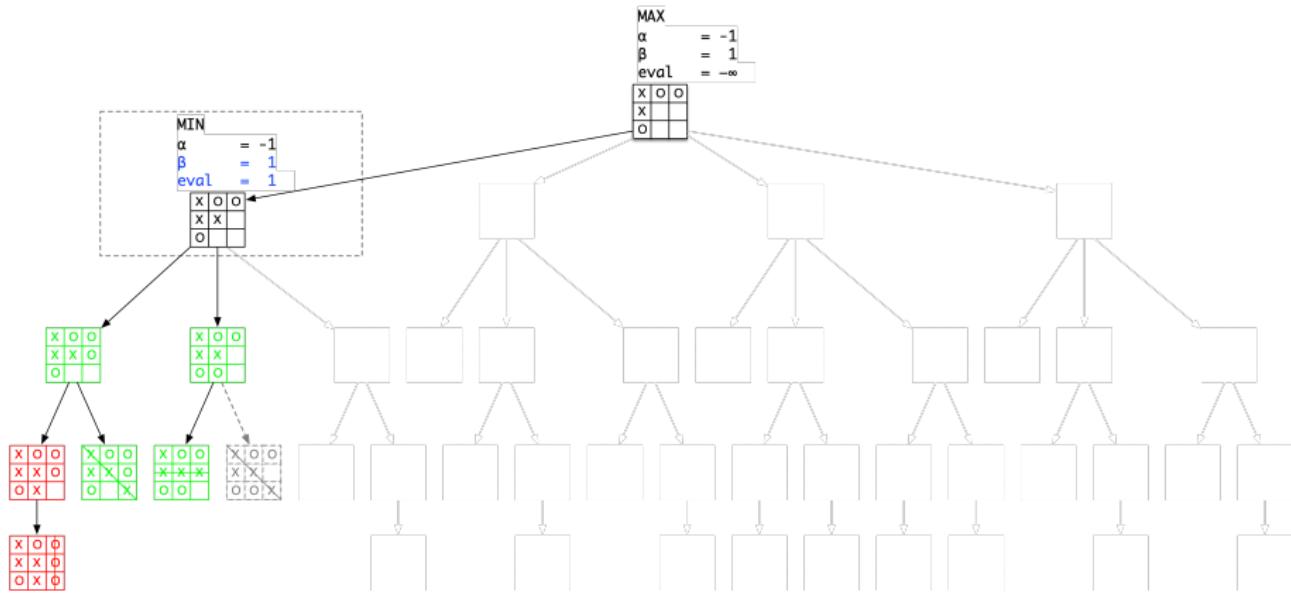
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



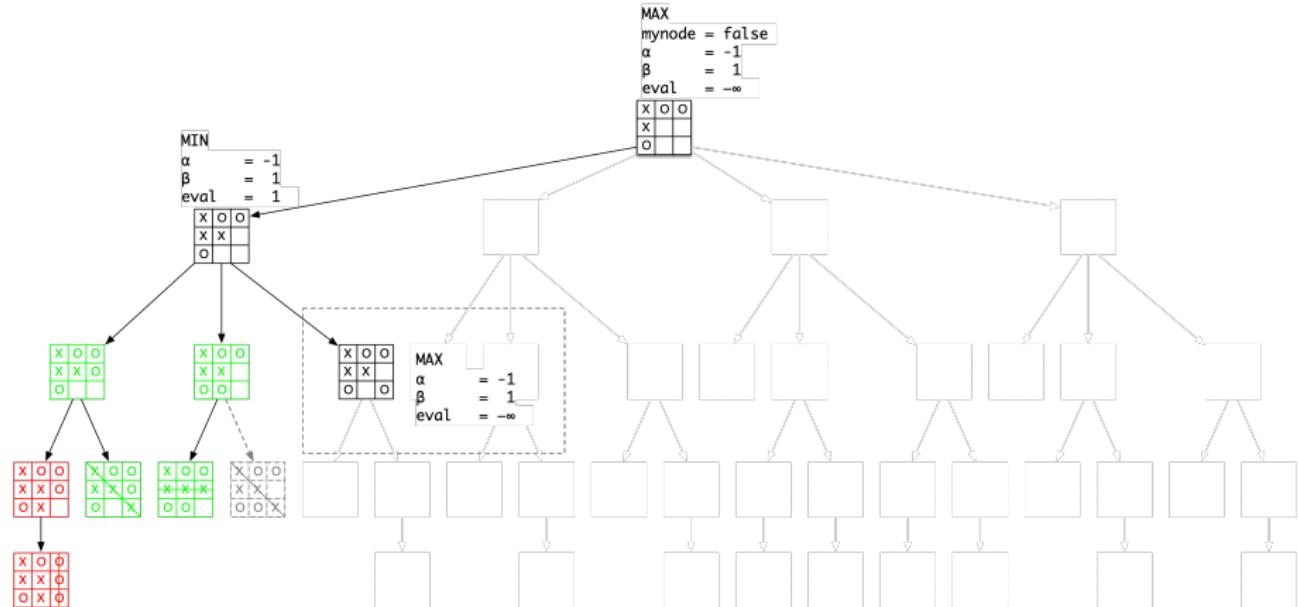
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



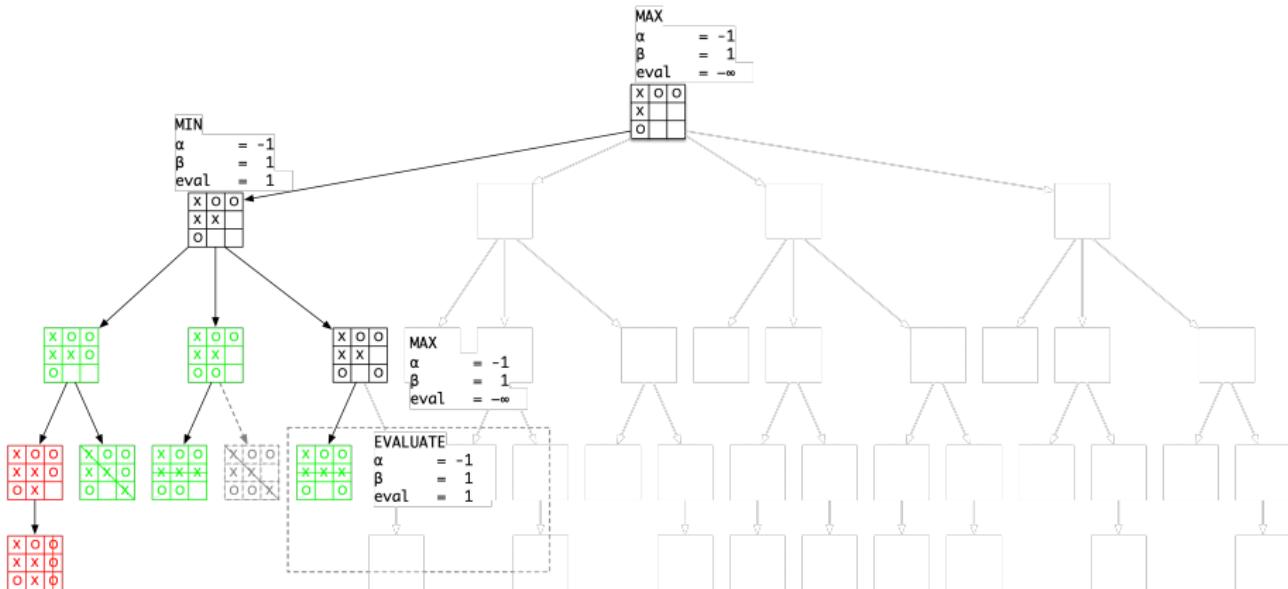
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



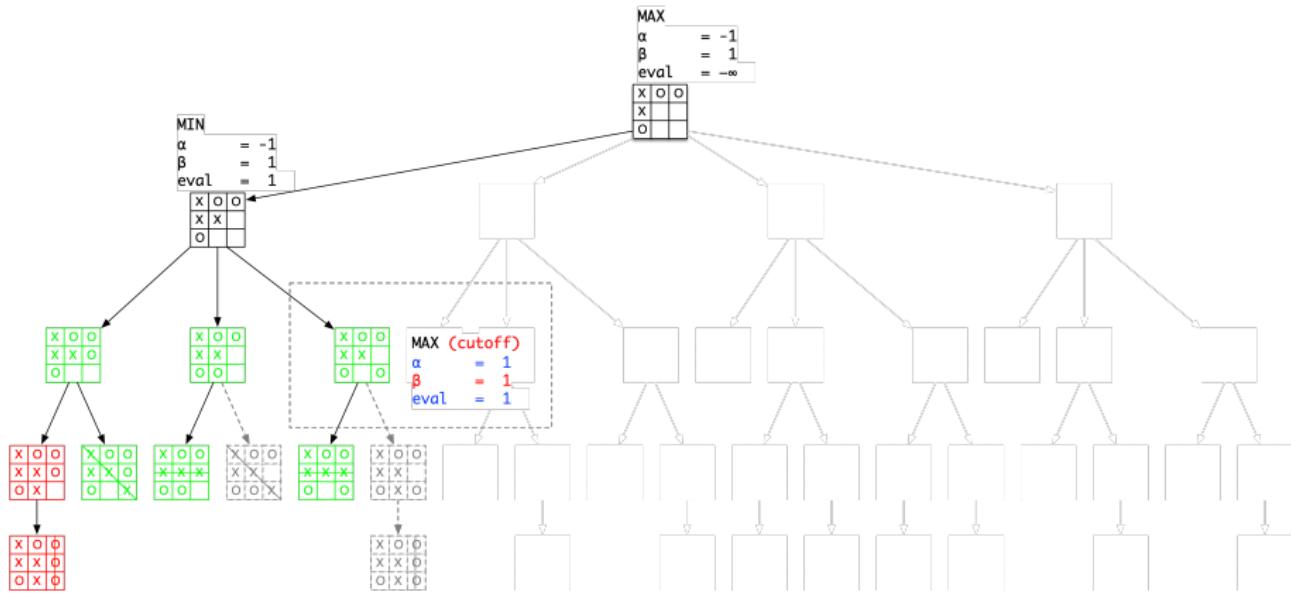
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



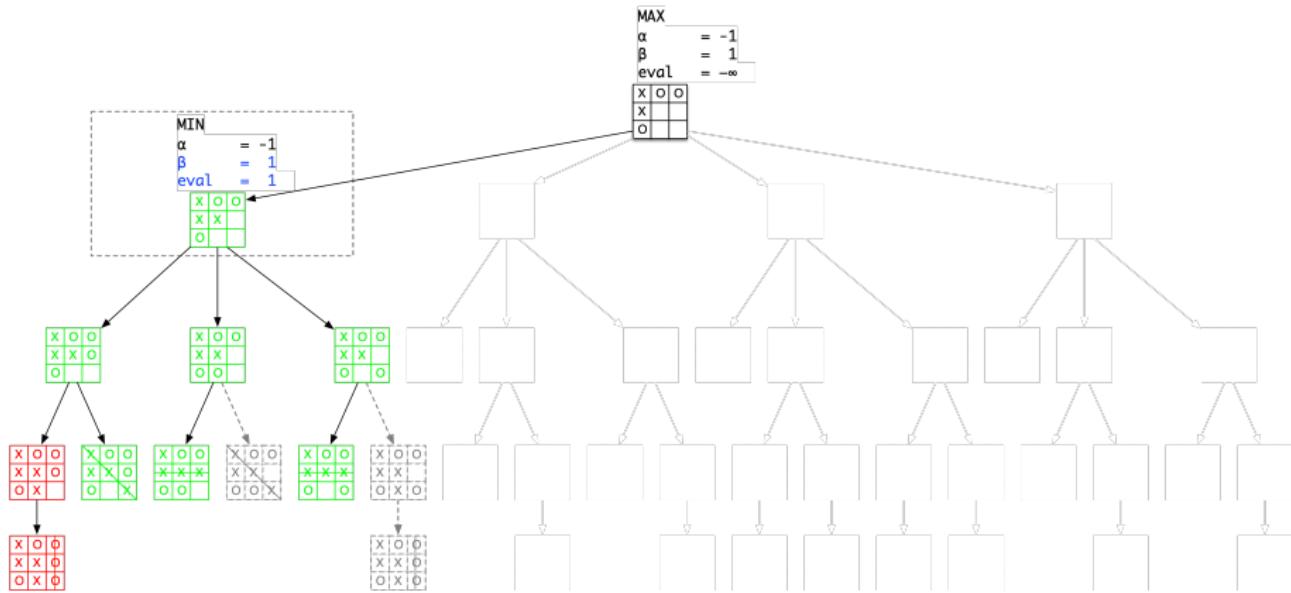
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



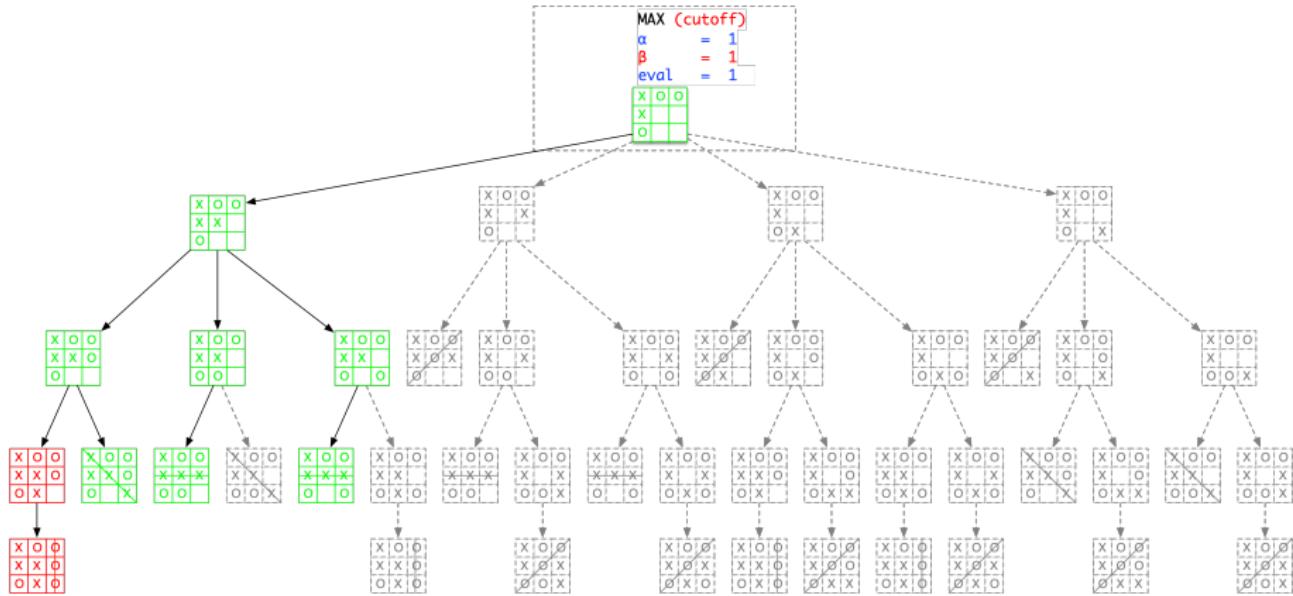
ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA



ESEMPIO: ALGORITMO ALPHABETA

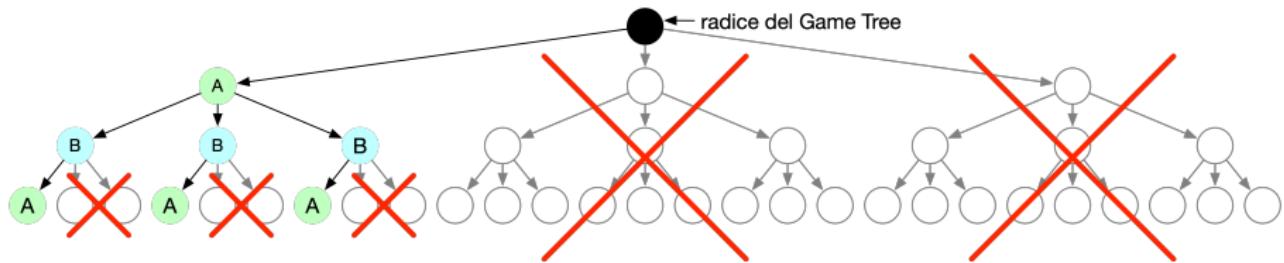


ANALISI DELL'ALGORITMO ALPHABETA

- Quanto costa l'algoritmo ALPHABETA?
 - Tempo: $O(n)$ (nel caso pessimo visita ogni nodo dell'albero)
 - Memoria: $O(h)$ ($h =$ altezza dell'albero)
 - E' davvero conveniente rispetto a MINIMAX?
- Proviamo ad analizzare quando funziona la potatura α/β
 - Se durante il turno del giocatore A valutiamo come **prima mossa** quella che porta A alla vittoria, allora ALPHABETA evita di valutare (*potatura*) tutti i sotto-alberi relativi alle ulteriori mosse a disposizione di A nel suo turno.
 - D'altra parte, se una mossa scelta da A porta alla vittoria allora questo implica il dover verificare **tutte** le mosse successive per il giocatore B (cerchiamo una contromossa per B senza successo)
 - Lo stesso vale simmetricamente per il giocatore B
- Riusciamo a quantificare il vantaggio offerto da ALPHABETA?

ANALISI DI ALPHABETA: m MOSSE, n TURNI

- Caso pessimo: $O(m^n)$ (visitiamo tutto l'albero)
- Caso ottimo: inizia il giocatore A e ad ogni turno di A scegliamo sempre come prima mossa da valutare quella che porta A alla vittoria (N.B. non è l'unica situazione ottima, potrebbe iniziare B).



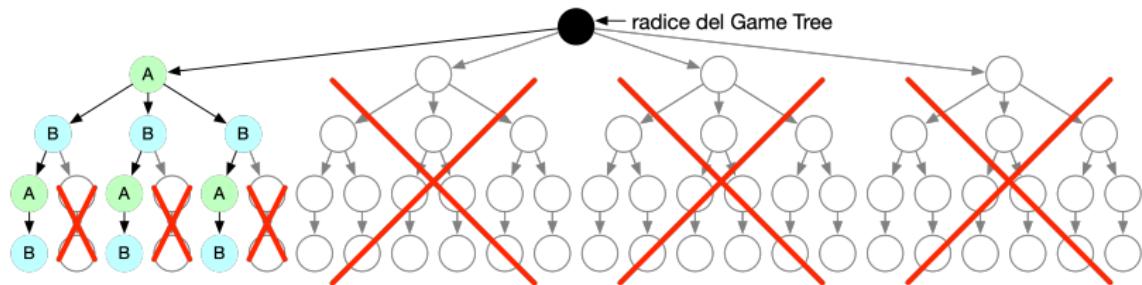
Il numero di nodi $T(m, n)$ è limitato da (per comodità n dispari):

$$\begin{aligned} T(m, n) &\leq 1 + 1 + m + m + m^2 + m^2 + \cdots + m^{\lfloor n/2 \rfloor} + m^{\lfloor n/2 \rfloor} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2m^k = 2 \frac{m^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - 1}{m - 1} = O\left(m^{n/2}\right) = O\left(\sqrt{m^n}\right) \end{aligned}$$

Conclusione: speed-up quadratico nel caso ottimo

ANALISI DI ALPHABETA: GIOCO CON n OGGETTI 1/2

- Caso pessimo: $O(n!)$ (visitiamo tutto l'albero)
- Caso ottimo: inizia il giocatore A e ad ogni turno di A scegliamo sempre come prima mossa da valutare quella che porta A alla vittoria (N.B. non è l'unica situazione ottima, potrebbe iniziare B).



Il numero di nodi $T(n)$ è limitato da (per comodità n dispari):

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 1 + 1 + n - 1 + n - 1 + (n - 1)(n - 3) + (n - 1)(n - 3) + \dots \\ &\quad \dots (n - 1)(n - 3)(n - 5) + (n - 1)(n - 3)(n - 5) + \dots + 2 + 2 \\ &= \sum_{k=0}^{(n-3)/2} 2 \frac{(n-1)!!}{(n-1-2k)!!} \leq 2c(n-1)!! = O((n-1)!!) \quad (c \approx 3.06) \end{aligned}$$

ANALISI DI ALPHABETA: GIOCO CON n OGGETTI 2/2

- Doppio fattoriale $n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 4 \cdot 2 & n \text{ pari} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 3 \cdot 1 & n \text{ dispari} \end{cases}$
- Lower bound: $n!! \geq 2^{n/2}, \forall n \geq 2$ (per dim. convergenza $c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!!}$)
- Se n dispari

$$\begin{aligned}(n-1)!! &= (n-1) \cdot (n-3) \cdots 2 \\&= \sqrt{(n-1)^2 \cdot (n-3)^2 \cdots 2^2} \\&\leq \sqrt{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 3 \cdot 2} \\&= \sqrt{n!}\end{aligned}$$

- Abbiamo quindi che $T(n) = O(\sqrt{n!})$
- Conclusione: **speed-up quadratico** nel caso ottimo
- Nota: se inizia B riusciamo a stimare $T(n) = O(\sqrt{(n+1)!})$

ALPHABETA vs MINIMAX

- ALPHABETA offre uno **speed-up quadratico** rispetto a MINIMAX se riusciamo a trovare un **ordine ottimo** di valutazione delle mosse
 - **Pro:** a parità di numero di calcoli, con ALPHABETA possiamo visitare nell'albero una **profondità doppia** rispetto a MINIMAX
 - **Con:** possibile solo avendo una **strategia ottima**, che rende inutile ALPHABETA (basta usare direttamente la strategia ottima)
- Nel caso medio, ALPHABETA visita comunque meno nodi di MINIMAX
 - Il costo nel caso medio è difficile da analizzare
 - Un ordinamento **euristico** di valutazione delle mosse, dalla più promettente alla meno promettente, può migliorare il caso medio
 - Euristiche *leggere* per non sprecare il tempo risparmiato potando
 - Esempio: siamo davvero sicuri che tutte le mosse meritino di essere valutate?

RICERCA LIMITATA IN PROFONDITÀ

- Anche nel caso ottimo, il Game Tree associato ad una configurazione di gioco potrebbe essere troppo grande per una visita completa in tempi ragionevoli con ALPHABETA
- Come gestiamo Game Tree troppo grandi?
 - Limitiamo la ricerca ad un livello massimo di profondità
 - Funzione euristica per valutare le configurazioni non-finali
 - Esempio: assumendo $-X$ (sconfitta), 0 (patta), X (vittoria)
 - $0 < eval \leq X$ indica una configurazione favorevole
 - $-X \leq eval < 0$ indica una configurazione sfavorevole
 - $eval = 0$ indica totale incertezza o patta
- La profondità di può essere usata anche per *migliorare* la valutazione
 - Tra due mosse che portano alla vittoria, scegliamo quella che porta alla vittoria più velocemente (acceleriamo la vittoria)
 - Tra due mosse che portano alla sconfitta, scegliamo quella che porta alla sconfitta più lentamente (ritardiamo la sconfitta)

ALGORITMO ALPHABETA CON PROFONDITÀ-LIMITE

```
1: function ALPHABETA(TREE  $T$ , BOOL  $playerA$ , INT  $\alpha$ , INT  $\beta$ , INT  $depth$ )  $\rightarrow$  INT
2:   if  $depth == 0$  or ISLEAF( $T$ ) then
3:     eval = EVALUATE( $T, depth$ )
4:   else if  $playerA == \text{true}$  then                                 $\triangleright MAX\ player$ 
5:     eval =  $-\infty$ 
6:     for  $c \in CHILDREN(T)$  do
7:       eval = MAX(eval, ALPHABETA( $c, \text{false}, \alpha, \beta, depth - 1$ ))
8:        $\alpha = \text{MAX}(eval, \alpha)$ 
9:       if  $\beta \leq \alpha$  then                                          $\triangleright \beta\ cutoff$ 
10:        break
11:   else                                                  $\triangleright MIN\ player$ 
12:     eval =  $\infty$ 
13:     for  $c \in CHILDREN(T)$  do
14:       eval = MIN(eval, ALPHABETA( $c, \text{true}, \alpha, \beta, depth - 1$ ))
15:        $\beta = \text{MIN}(eval, \beta)$ 
16:       if  $\beta \leq \alpha$  then                                          $\triangleright \alpha\ cutoff$ 
17:         break
18:      $T.label = eval$ 
19:   return eval
```

VISITA CON LIMITI DI TEMPO

- Assumiamo di avere dei limiti di tempo per la scelta di una mossa
 - Problema: stimare il livello massimo di profondità **visitabile completamente** entro il limite di tempo
 - In generale, tale stima potrebbe essere molto complessa
- ALPHABETA implementa una visita in profondità
 - Una stima troppo ottimistica del livello massimo di profondità comporta una visita completa solo per poche mosse
 - Una stima troppo pessimistica comporta una valutazione poco accurata delle varie mosse a disposizione
- Soluzione: una **visita in ampiezza** può essere interrotta in qualsiasi momento senza dover fissare a priori un livello massimo

ALGORITMO ITERATIVEDEEPENING

```
1: function ITERATIVEDEEPENING(TREE  $T$ , BOOL  $playerA$ , INT  $depth$ )  $\rightarrow$  INT
2:    $\alpha = MIN\text{ALPHA}$ 
3:    $\beta = MAX\text{BETA}$ 
4:   for  $d = 0, \dots, depth$  do
5:      $eval = ALPHABETA(T, playerA, \alpha, \beta, d)$ 
6:   return  $eval$ 
```

- Visita in ampiezza fino a profondità d del sottoalbero radicato in T
- Facile da modificare rispetto ad un limite di tempo massimo
 - Non è necessario calcolare una profondità massima d
 - Visitiamo il livello più profondo raggiungibile nel tempo limite
 - Se il timemout sta per scadere mentre valutiamo profondità d , scegliamo la mossa migliore individuata a profondità $d - 1$
- Attenzione: per valutare quale scegliere tra m mosse distinte in un tempo limite la ricerca in ampiezza deve essere portata avanti **contemporaneamente** su **tutti** i sottoalberi relativi alle m mosse

ANALISI DI ITERATIVEDEEPENING: MEMORIA

- ITERATIVEDEEPENING sembra non offrire grossi vantaggi
 - Miglioriamo la gestione del tempo ma ..
 - .. rivisitiamo continuamente gli stessi nodi (riparte dalla radice)
- Quanto costa ITERATIVEDEEPENING in termini di memoria?
 - Dipende dal costo in memoria di ALPHABETA
 - **Costo pessimo:** $O(d)$ (d = profondità di ricerca)
 - Costo lineare rispetto alla profondità d
- In confronto, BFS ha un costo $O(k)$ (k = numero di nodi a livello d)
 - La struttura dati Coda al livello $d - 1$ viene riempita con riferimenti a tutti i nodi del livello d
 - Gioco con m mosse: $k = m^d$ (crescita esponenziale rispetto a d)
 - Gioco con n posizioni: $k = n!/(n - d)! \leq n^d$ (esponenziale in d)
- Conclusione: in termini di utilizzo di memoria BFS ha un costo **esponenziale** mentre ITERATIVEDEEPENING ha un costo **lineare**

ANALISI DI ITERATIVEDEEPENING: TEMPO

- Quanto costa ITERATIVEDEEPENING in termini di tempo?
 - Nel caso pessimo, aumentiamo sensibilmente il costo di una visita fino al d -esimo livello rispetto al costo di una singola visita con ALPHABETA fino al livello d -esimo?
 - Costo pessimo di ITERATIVEDEEPENING: gioco con m mosse e n turni, limitato a d turni (analisi più complessa per gioco con n oggetti)

$$\begin{aligned}T(m, d) &\leq (d+1) + dm + (d-1)m^2 + \cdots + 2m^{d-1} + m^d = \\&= m^d \left(1 + 2m^{-1} + \cdots + dm^{-d+1} + (d+1)m^{-d} \right) \\&= m^d \sum_{i=0}^d i \frac{1}{m^i} \leq m^d \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{1}{m^i} = m^d \frac{1/m}{(1 - 1/m)^2} = O(m^d)\end{aligned}$$

La radice viene visitata $d + 1$ volte, i suoi figli d volte, ecc

- Stesso ordine di crescita di una visita ALPHABETA fino al livello d !
 - Il numero di nodi al livello d domina l'intero costo

ITERATIVEDEEPENING VS ALPHABETA E BFS

- A parità di profondità, la ricerca in ampiezza ITERATIVEDEEPENING ha lo stesso costo asintotico della ricerca in profondità ALPHABETA
 - In termini pratici, le costanti moltiplicative nascoste dalla notazione asintotica rendono ITERATIVEDEEPENING leggermente più lento di ALPHABETA
 - Questo svantaggio in termini di tempo è ripagato dalla possibilità di avere un maggiore controllo sulla visita del Game Tree quando la scelta della mossa deve essere effettuata entro certi limiti di tempo
- A parità di profondità, la ricerca in ampiezza ITERATIVEDEEPENING ha lo stesso costo asintotico della ricerca in profondità BFS
 - In termini pratici, ITERATIVEDEEPENING è più lento di BFS
 - Il vantaggio concreto di ITERATIVEDEEPENING rispetto a BFS consiste nel fatto che utilizza un quantitativo di memoria lineare rispetto alla profondità di visita, mentre BFS richiede un quantitativo di memoria che cresce esponenzialmente con la profondità

NOTA FINALE: GESTIONE RIPETIZIONI

- Molti stati di gioco compaiono più volte nell'albero
- Possiamo ottenere uno stesso stato con differenti sequenze di mosse
- Per velocizzare la ricerca è utile riconoscere configurazioni già valutate

