Notazione asintotica - Eserizi

Pietro Di Lena

Dipartimento di Informatica – Scienza e Ingegneria
Università di Bologna

Algoritmi e Strutture di Dati
Anno Accademico 2022/2023

Esercizio 1

E' vero che $6n^2 = \Omega(n^3)$?

- Applicando la definizione di Ω, dobbiamo dimostrare che

$$\exists c > 0, \exists n_0 \geq 0 \text{ tale che } \forall n \geq n_0, 6n^2 \geq cn^3$$

Da $6n^2 \geq cn^3$ ricaviamo che $c \leq 6/n$. Fissato $0 < c \leq 6/n$ esiste sempre un $n' > 0$ tale che $c > 6/n'$. La relazione è quindi falsa

- In alternativa possiamo calcolare il limite del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} = 0$$

da cui concludiamo che $6n^2 = o(n^3) \Rightarrow 6n^2 \neq \Omega(n^3)$ quindi falsa

Esercizio 2

E' vero che $10n^3 + 2n^2 + 7 = O(n^3)$?

- Applicando la definizione di O, dobbiamo dimostrare che

$$\exists c > 0, \exists n_0 \geq 0 \text{ tale che } \forall n \geq n_0, 10n^3 + 2n^2 + 7 \leq cn^3$$

  Per $n_0 \geq 1$ abbiamo che

$$10n^3 + 2n^2 + 7 \leq 10n^3 + 2n^3 + 7n^3 = 19n^3$$

  Da $19n^3 \leq cn^3$ ricaviamo che $c \geq 19$. La disuguaglianza è vera per $c = 19$ e $n_0 = 1$ quindi la relazione è vera

- In alternativa possiamo calcolare il limite del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^3 + 2n^2 + 7}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n^3}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^3} = 10$$

  da cui concludiamo che $10n^3 + 2n^2 + 7 = \Theta(n^3) \Rightarrow O(n^3)$ quindi vera

Esercizio 3

E' vero che $(2+(-1)^n)n^2 = \Theta(n^2)$?

- Applicando la definizione di Θ, dobbiamo dimostrare che

  $\exists c_1 > 0, \exists c_2, \exists n_0 \geq 0$ tale che $\forall n \geq n_0, c_1 n^2 \leq (2+(-1)^n)n^2 \leq c_2 n^2$

  Da $c_1 n^2 \leq (2+(-1)^n)n^2 \leq c_2 n^2$ ricaviamo che
  - $c_1 \leq 2+(-1)^n \Rightarrow$ vera $\forall 0 < c_1 \leq 1$ e $\forall n \geq 0$
  - $c_2 \geq 2+(-1)^n \Rightarrow$ vera $\forall c_2 \geq 3$ e $\forall n \geq 0$

  La disugualianza è vera per $c_1 = 1, c_2 = 3$ e $n_0 = 0$ quindi vero

- In questo caso il limite del rapporto non ci dà una risposta poiché

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{(2+(-1)^n)n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2+(-1)^n = 2 + \lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

  non esiste dato che non tende ad un unico valore ma a due (1 e 3)

Esercizio 4

Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?

1. $1325n^2 + 12n + 1 = \Theta(n^3)$ falso
2. $76n^3 = O(n^3)$ vero
3. $n^2 \log n = O(n^2)$ falso
4. $3^n = O(2^n)$ falso
5. $2^{n+100} = O(2^n)$ vero
6. $\log n = O(n)$ vero
7. $n = O(n \log n)$ vero
8. $n^2 = O(n \log n)$ falso
9. $\log n^2 = \Theta(\log n)$ vero
10. $\frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2)$ vero

Esercizio 4 - Soluzione 1/5

1. $1325n^2 + 12n + 1 = \Theta(n^3)$

   Calcoliamo il limite del rapporto tra i due polinomi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1325n^2 + 12n + 1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1325}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

   che implica $1325n^2 + 12n + 1 = o(n^3)$ quindi falso.

2. $76n^3 = O(n^3)$

   Calcoliamo il limite del rapporto tra i due polinomi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{76n^3}{n^3} = 76 > 0$$

   che implica $76n^3 = \Theta(n^3) \Rightarrow 76n^3 = O(n^3)$ quindi vero

Esercizio 4 - Soluzione 2/5

3. $n^2 \log n = O(n^2)$

   Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \log n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \log n = \infty$$

   che implica $n^2 \log n = \omega(n^2) \Rightarrow n^2 \log n \neq O(n^2)$ quindi falso

4. $3^n = O(2^n)$

   Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni esponenziali

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1.5^n = \infty$$

   che implica $3^n = \omega(2^n) \Rightarrow 3^n \neq O(2^n)$ quindi falso

Esercizio 4 - Soluzione 3/5

5. $2^{n+100} = O(2^n)$

   Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni esponenziali

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+100}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2^{100}}{2^n} = 2^{100} > 0$$

   che implica $2^{n+100} = \Theta(2^n) \Rightarrow 2^{n+100} = O(2^n)$ quindi vero

6. $\log n = O(n)$ (possiamo assumere $\log = \log_2$)

   Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln 2} = 0 \text{ (de l'Hôpital)}$$

   che implica $\log n = o(n) \Rightarrow \log n = O(n)$ quindi vero

Esercizio 4 - Soluzione 4/5

7. $n = O(n \log n)$

   Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n \log n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

   che implica $n = o(n \log n) \Rightarrow n = O(n \log n)$ quindi vero

8. $n^2 = O(n \log n)$

   Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n \log n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\log n} = \infty \text{ (vedi punto 6)}$$

   che implica $n^2 = \omega(n \log n) \Rightarrow n^2 \neq O(n \log n)$ quindi falso

Esercizio 4 - Soluzione 5/5

9 $\log n^2 = \Theta(\log n)$

Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^2}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\log n}{\log n} = 2 > 0$$

che implica $\log n^2 = \Theta(\log n)$ quindi vero

10 $\dfrac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2)$

Calcoliamo il limite del rapporto tra le due funzioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > 0$$

che implica $\dfrac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2)$ quindi vero

Esercizio 5

1. Dimostrare che per ogni $a > 1, b > 1, \log_a n = \Theta(\log_b n)$

   - Ricordiamo che $\forall a > 0, b > 0, c > 0 \; \log_a c = \log_b c / \log_b a$
   - Quindi, dato che $\log_b a \neq 0$ è un valore costante abbiamo che
     $$\log_a n = \log_b n / \log_b a = \Theta(\log_b n)$$

2. Dimostrare che per ogni $a > 0, b > 0, \log^a n = O(n^b)$ $(\log = \log_2)$

   - Dimostriamo prima che per ogni $b > 0, \log n = O(n^b)$
     $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n \ln 2)}{bn^{b-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{bn^b \ln 2} = 0 \text{ (de l'Hôpital)}$$
     $$\Rightarrow \log n = o(n^b) \Rightarrow \log n = O(n^b)$$

   - Per dimostrare il caso generale è sufficiente notare che
     $$\log^a n = O(n^b) \text{ è equivalente a } \log n = O(n^{b/a})$$

Esercizio 6

Dimostrare che $\log n! = \Theta(n \log n)$

1. Dimostriamo che $\log n! = O(n \log n)$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \leq n \cdot n \cdots n = n^n$$

Quindi

$$\log n! \leq \log n^n = n \log n \Longrightarrow \log n! = O(n \log n)$$

2. Dimostriamo che $\log n! = \Omega(n \log n)$

$$n! = n(n-1)\cdots 1 \geq n(n-1)\cdots n/2 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Quindi

$$\log n! \geq \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \Longrightarrow \log n! = \Omega(n \log n)$$

Esercizio 7

1. Dimostrare che per ogni $1 < a < b$, $a^n = O(b^n)$

   - Poichè $a < b \implies a/b < 1$allora

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0 \implies a^n = o(b^n) \Rightarrow a^n = O(b^n)$$

2. Dimostrare che per ogni $a > 0$, $n^{\log a} = \Theta(a^{\log n})$ $(\log = \log_2)$

   - Mostriamo che $a^{\log_2 n} = n^{\log_2 a}$. Dalle proprietà dei logaritmi

   $$\boxed{\log_2 n = \frac{\log_a n}{\log_a 2}}, \boxed{\log_2 a = \frac{\log_a a}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_a 2}} \text{ e } \boxed{a^{\log_a n} = n}$$

   abbiamo che

   $$a^{\log_2 n} = a^{\frac{\log_a n}{\log_a 2}} = n^{\frac{1}{\log_a 2}} = n^{\log_2 a}$$

Esercizio 8

Assumendo $k \geq 1, c > 1, \epsilon > 0$ indicare se A è O,o,Ω,ω,Θ di B

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ	*si*	*si*	*no*	*no*	*no*
n^k	c^n	*si*	*si*	*no*	*no*	*no*
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	*no*	*no*	*no*	*no*	*no*
2^n	$2^{n/2}$	*no*	*no*	*si*	*si*	*no*
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	*si*	*no*	*si*	*no*	*si*
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	*si*	*no*	*si*	*no*	*si*

Esecizio 9

Calcolare il costo computazionale $T(n)$ del seguente algoritmo MYSTERY1 in funzione del valore del numero n in input:

```
function MYSTERY1(INT n) → INT
    tot = 0
    for i = 1, ··· , 2^100 do
        tot = tot+MYSTERY2(n)
    return tot

function MYSTERY2(INT n) → INT
    LET A[1 ··· 2^100 n][1 ··· 2^100 n] BE A NEW ARRAY
    for i = 1, ··· , 2^100 n do
        for j = 1, ··· , 2^100 n do
            A[i] = 0
    return A[n][n]
```

Esercizio 9 - Soluzione

- Il costo della funzione MYSTERY2 dipende dal doppio ciclo a riga 8-10, che viene eseguito $2^{100}n * 2^{100}n = 2^{200}n^2 = \Theta(n^2)$ volte. Per quanto enorme, 2^{200} è un valore costante che non dipende da n, quindi non influenza la crescita asintotica del costo computazionale di MYSTERY2.
- La funzione MYSTERY1 esegue il ciclo while a linea 3-4 un numero costante di volte (2^{100}), che non dipende da n, e ad ogni iterazione richiama MYSTERY2 con input n. La complessità $T(n)$ di MYSTERY1 è quindi esattamente la stessa di MYSTERY2, i.e. $T(n) = \Theta(n^2)$.

Esercizio 10

Calcolare il costo computazionale $T(n)$ del seguente algoritmo MYSTERY1 in funzione del valore del numero n in input:

```
function MYSTERY1(INT n) → INT
    tot = 0
    x = 0
    while n ≥ 1 do
        n = n/2
        x = x + 1
        tot = tot+MYSTERY2(X)
    return TOT

function MYSTERY2(INT n) → INT
    LET A[1 ··· n] BE AN ARRAY
    for i = 1 ··· n do
        A[i] = 0
    return A[n]
```

Esercizio 10 - Soluzione

- Il costo della funzione $\textsc{Mystery2}$ dipende dal ciclo (righe 11-12) che viene eseguito n volte. Quindi $\Theta(n)$

- Dobbiamo capire quante volte viene eseguito il loop while a riga 4-7 di $\textsc{Mystery1}$. Notiamo che il valore di n viene iterativamente dimezzato

iterazione	1	2	3	$\cdots$	i
valore di n	$n/2$	$n/4$	$n/8$	$\cdots$	$n/2^i$

e che il ciclo termina all'iterazione i tale che $n/2^i < 1$, da cui otteniamo

$$n/2^i < 1 \Rightarrow n < 2^i \Rightarrow \log_2 n < i \log_2 2 \Rightarrow \boxed{i > \log_2 n}$$

Il ciclo while è quindi eseguito $\log_2 n$ volte e $\textsc{Mystery2}$ è invocata con input x (inzialmente 1) che viene incrementato di 1 ad ogni iterazione. Il costo di $\textsc{Mystery1}$ è quindi

$$T(n) = \Theta(1) + \cdots + \Theta(\log n) = \Theta\left(\sum_{x=1}^{\log n} x\right)$$

$$= \Theta\left(\frac{\log n(\log n + 1)}{2}\right) = \Theta(\log^2 n)$$