

Ordinamento

Gianluigi Zavattaro
Dip. di Informatica – Scienza e Ingegneria
Università di Bologna
gianluigi.zavattaro@unibo.it

Slide realizzate a partire da materiale fornito dal Prof. Moreno Marzolla

Original work Copyright © Alberto Montresor, University of Trento
(<http://www.dit.unitn.it/~montreso/asd/index.shtml>)

Modifications Copyright © 2009, 2010, Moreno Marzolla, Università di Bologna

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/> or send a letter to Creative Commons, 543 Howard Street, 5th Floor, San Francisco, California, 94105, USA.

Ordinamento

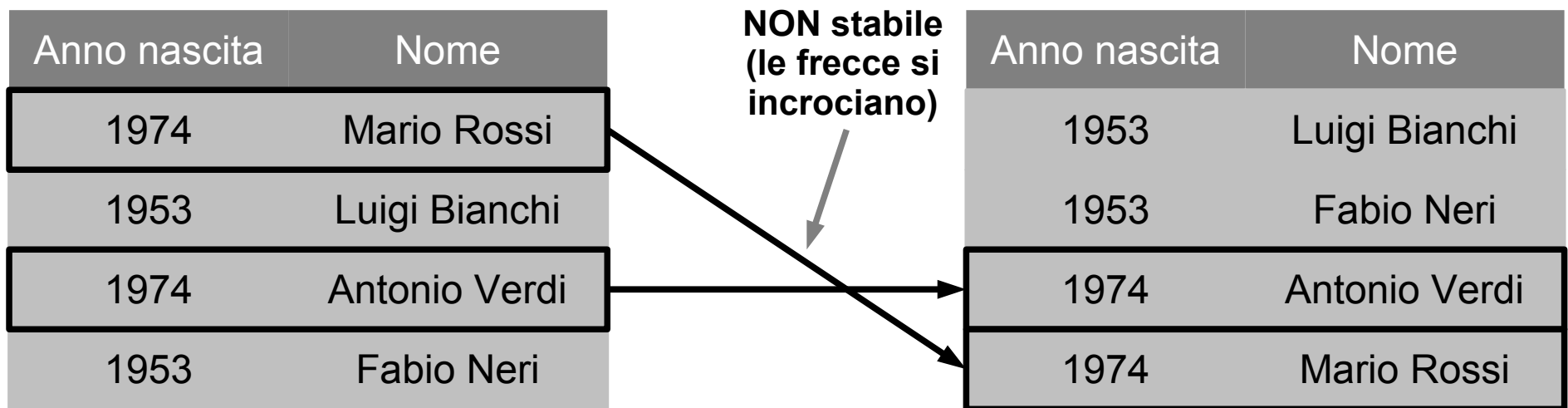
- Consideriamo un array di n numeri $v[1], v[2], \dots v[n]$
- Vogliamo trovare una permutazione
 $p[1], p[2], \dots p[n]$
degli interi $1, \dots, n$ tale che
 $v[p[1]] \leq v[p[2]] \leq \dots \leq v[p[n]]$
- Esempio:
 - $v = [7, 32, 88, 21, 92, -4]$
 - $p = [6, 1, 4, 2, 3, 5]$
 - $v[p[]] = [-4, 7, 21, 32, 88, 92]$

Ordinamento

- Più in generale: è dato un array di n elementi, tali che ciascun elemento sia composto da:
 - una **chiave**, in cui le chiavi sono confrontabili tra loro
 - un **contenuto** arbitrario
- Vogliamo permutare l'array in modo che le chiavi compaiano in ordine non decrescente (oppure non crescente)

Definizioni

- Ordinamento **in loco**
 - L'algoritmo permuta gli elementi direttamente nell'array originale, senza usare un altro array di appoggio
- Ordinamento **stabile**
 - L'algoritmo preserva l'ordine con cui elementi con la stessa chiave compaiono nell'array originale

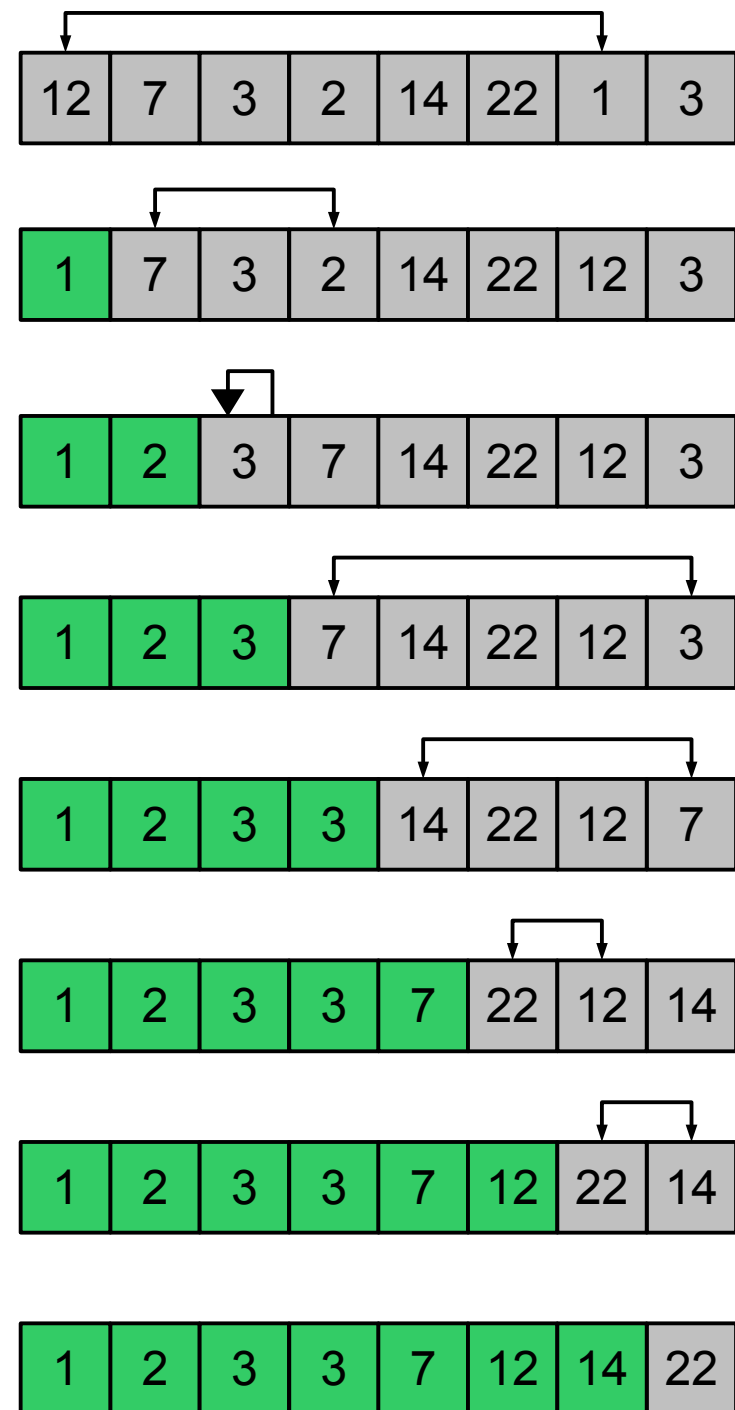


Algoritmi di ordinamento “incrementali”

- Partendo da un prefisso $A[1..k]$ ordinato, “estendono” la parte ordinata di un elemento: $A[1..k+1]$
- **Selection sort**
 - Cerca il minimo in $A[k+1..n]$ e spostalo in posizione $k+1$
- **Insertion sort**
 - Inserisce l'elemento $A[k+1]$ nella posizione corretta all'interno del prefisso già ordinato $A[1..k]$

Selection Sort

- Cerco il minimo in $A[1]...A[n]$ e lo scambio con $A[1]$
- Cerco il minimo in $A[2]...A[n]$ e lo scambio con $A[2]$
- ...
- Cerco il minimo in $A[k]...A[n]$ e lo scambio con $A[k]$
- ...



Selection Sort

```
public static void selectionSort(Comparable A[]) {  
    for (int k = 0; k < A.length - 1; k++) {  
        // cerca il minimo A[m] in A[k..n-1]  
        int m = k;  
        for (int j = k + 1; j < A.length; j++)  
            if (A[j].compareTo(A[m]) < 0)  
                m = j;  
        // scambia A[k] con A[m]  
        if (m != k) {  
            Comparable temp = A[m];  
            A[m] = A[k];  
            A[k] = temp;  
        }  
    }  
}
```

Domanda: è un
ordinamento stabile?

Porzione
ordinata

k



j

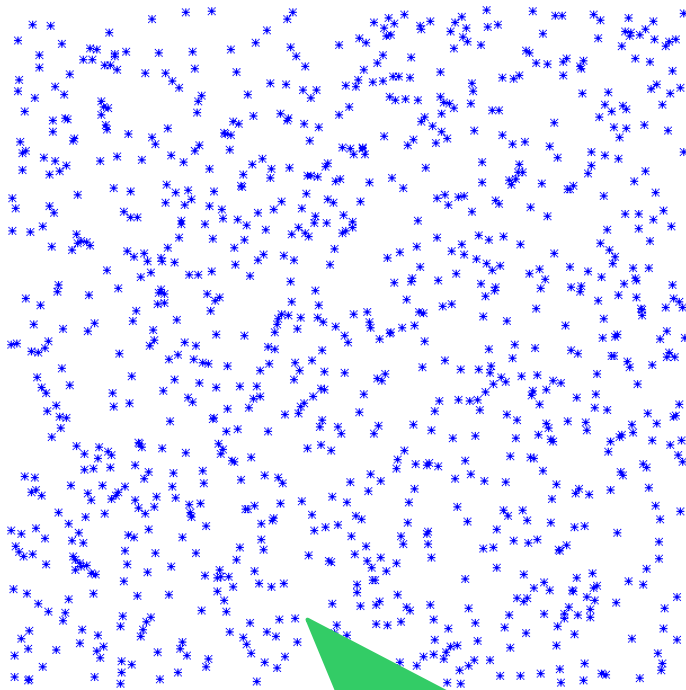


Porzione non
ancora
ordinata



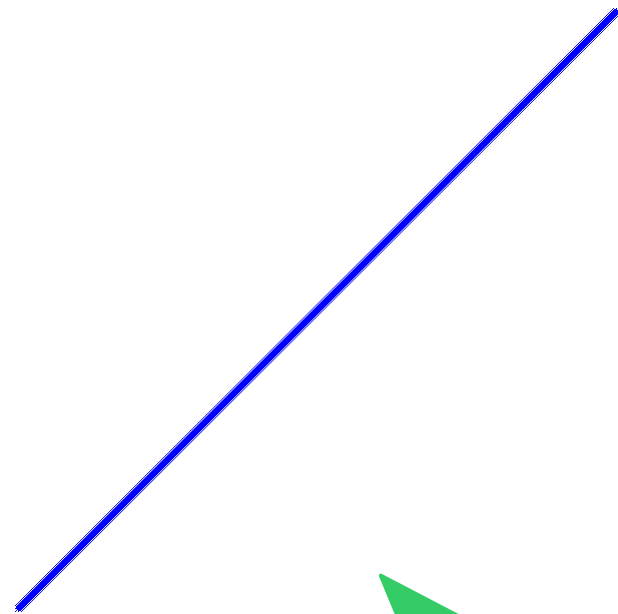
“Visualizzare” il comportamento di un algoritmo di ordinamento

- Consideriamo un vettore $A[]$ contenente tutti e soli gli interi da 1 a N
- Plottiamo i punti di coordinate $(i, A[i])$



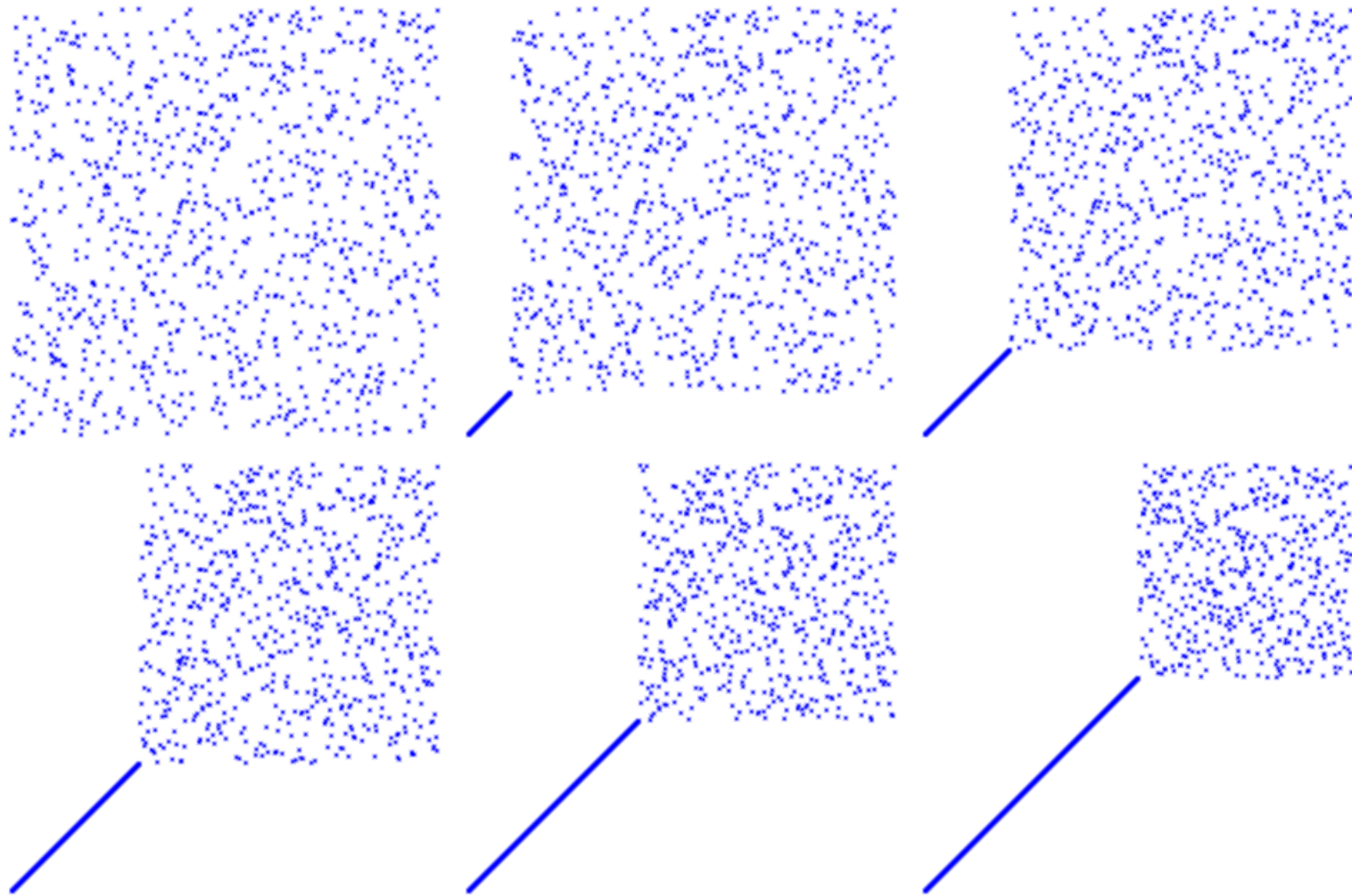
Situazione iniziale
(array disordinato)

Algoritmi e Strutture di Dati



Situazione finale
(array ordinato)

Selection Sort per immagini



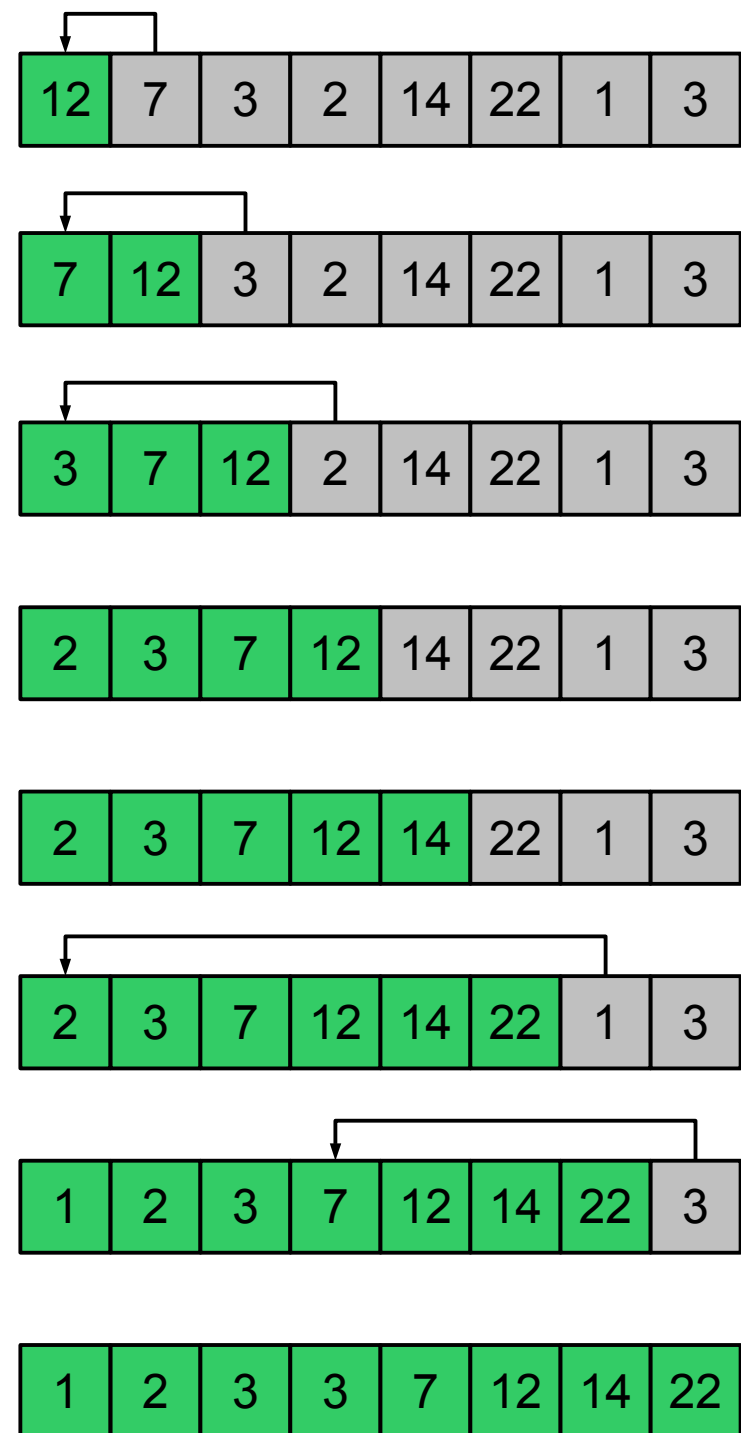
Costo computazionale di Selection Sort

- La collocazione del k-esimo minimo richiede $(n-k-1)$ confronti (per $k=0, 1, \dots, n-2$), più lo scambio (di costo costante, quindi assorbito dal costo dei confronti)
- Il costo complessivo è quindi

$$\sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Insertion Sort

- Idea: al termine del passo k , il vettore ha le prime k componenti ordinate
- Inserisco l'elemento di posizione $k+1$ nella **posizione corretta** all'interno dei primi k elementi ordinati



Insertion Sort

```
public static void insertionSort(Comparable A[]) {  
    for (int k = 1; k <= A.length - 1; k++) {  
        int j;  
        Comparable x = A[k];  
        // cerca la posizione j in cui inserire A[k]  
        for (j = 0; j < k; j++)  
            if (A[j].compareTo(x) > 0) break;  
        if (j < k) {  
            // Sposta A[j..k-1] in A[j+1..k]  
            for (int t = k; t > j; t--)  
                A[t] = A[t - 1];  
            // Inserisci A[k] in posizione j  
            A[j] = x;  
        }  
    }  
}
```

Domanda: è un
ordinamento stabile?

Insertion Sort

- Il posizionamento dell'elemento di indice k richiede k confronti nel caso peggiore (più gli spostamenti, al più k , quindi di costo assorbito dal costo dei confronti)
- Il **numero complessivo di confronti nel caso peggiore** risulta essere quindi

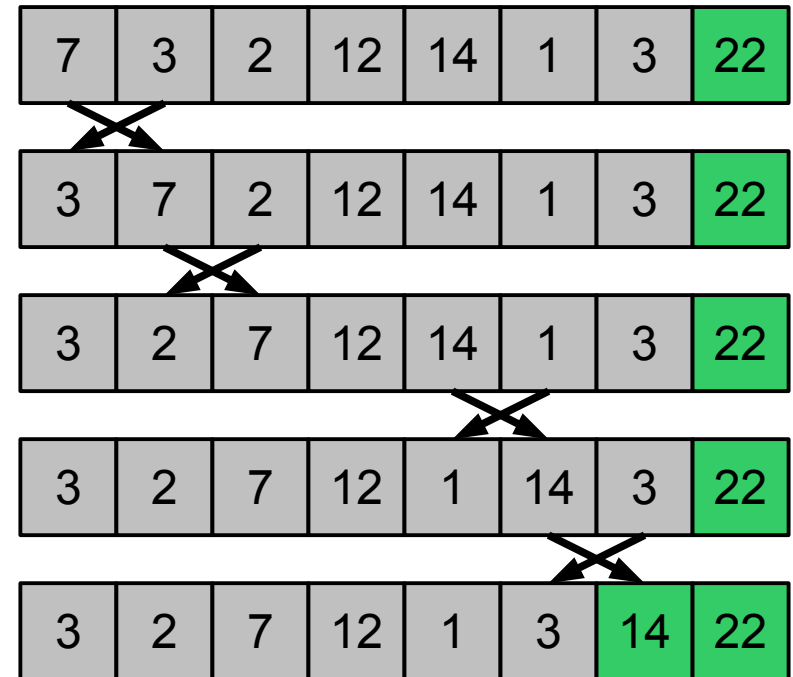
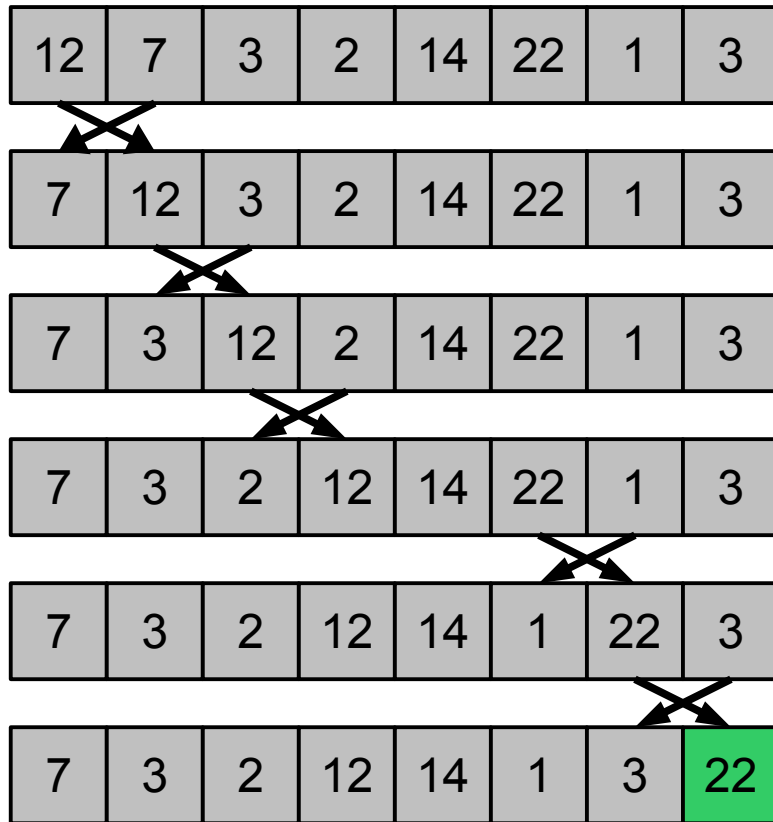
$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$$

- **Domanda:** quale è il costo computazionale nel caso ottimo?

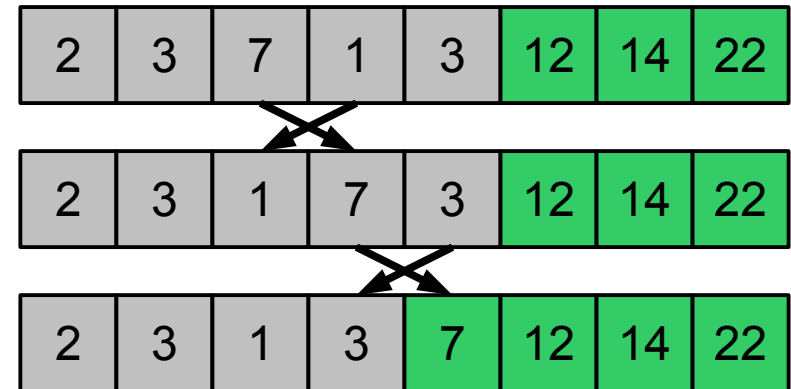
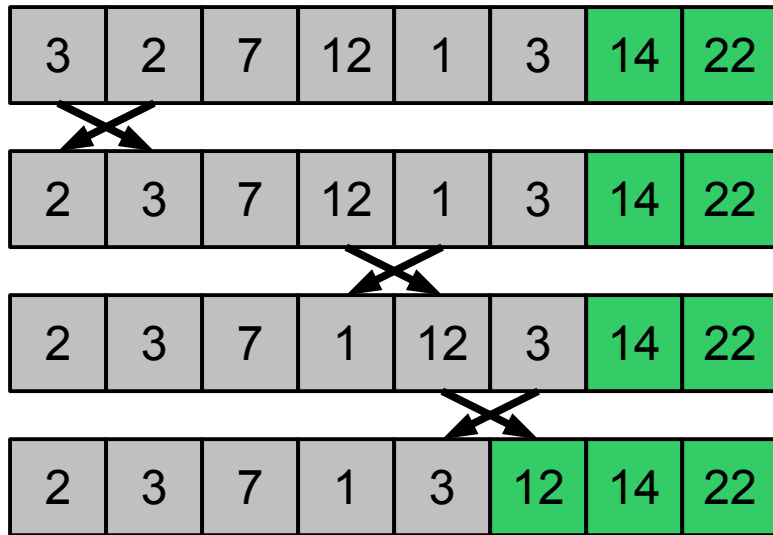
Bubble Sort

- Esegue una serie di scansioni dell'array
 - Ad ogni scansione scambia le coppie di elementi adiacenti che non sono nell'ordine corretto
 - Se al termine di una scansione non è stato effettuato nessuno scambio, l'array è ordinato
- Dopo la prima scansione, l'elemento massimo occupa l'ultima posizione
- Dopo la seconda scansione, il “secondo massimo” occupa la penultima posizione...
- ...dopo la k -esima scansione, i k elementi massimi occupano la posizione corretta in fondo all'array

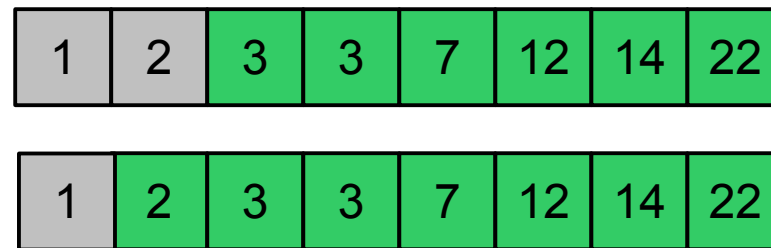
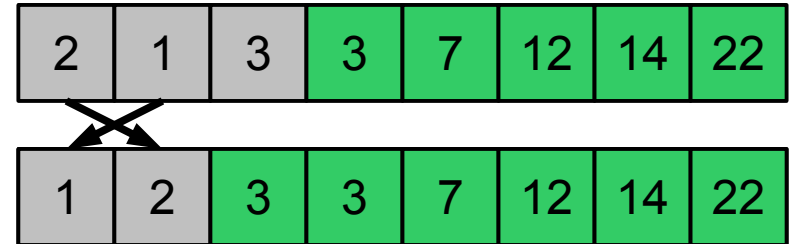
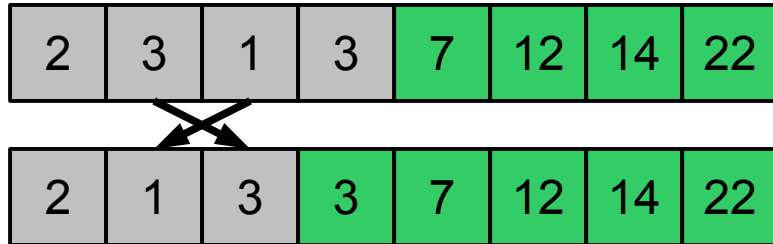
Bubble Sort



Bubble Sort



Bubble Sort



Durante l'ultima iterazione
non si effettuano scambi

Bubble Sort

```
public static void bubbleSort(Comparable A[]) {  
    for (int i = 1; i < A.length; i++) {  
        boolean scambiAvvenuti = false;  
        for (int j = 1; j <= A.length - i; j++) {  
            // Se A[j-1] > A[j], scambiali  
            if (A[j - 1].compareTo(A[j]) > 0) {  
                Comparable temp = A[j - 1];  
                A[j - 1] = A[j];  
                A[j] = temp;  
                scambiAvvenuti = true;  
            }  
        }  
        if (!scambiAvvenuti) break;  
    }  
}
```

Bubble Sort

Invariante di ciclo

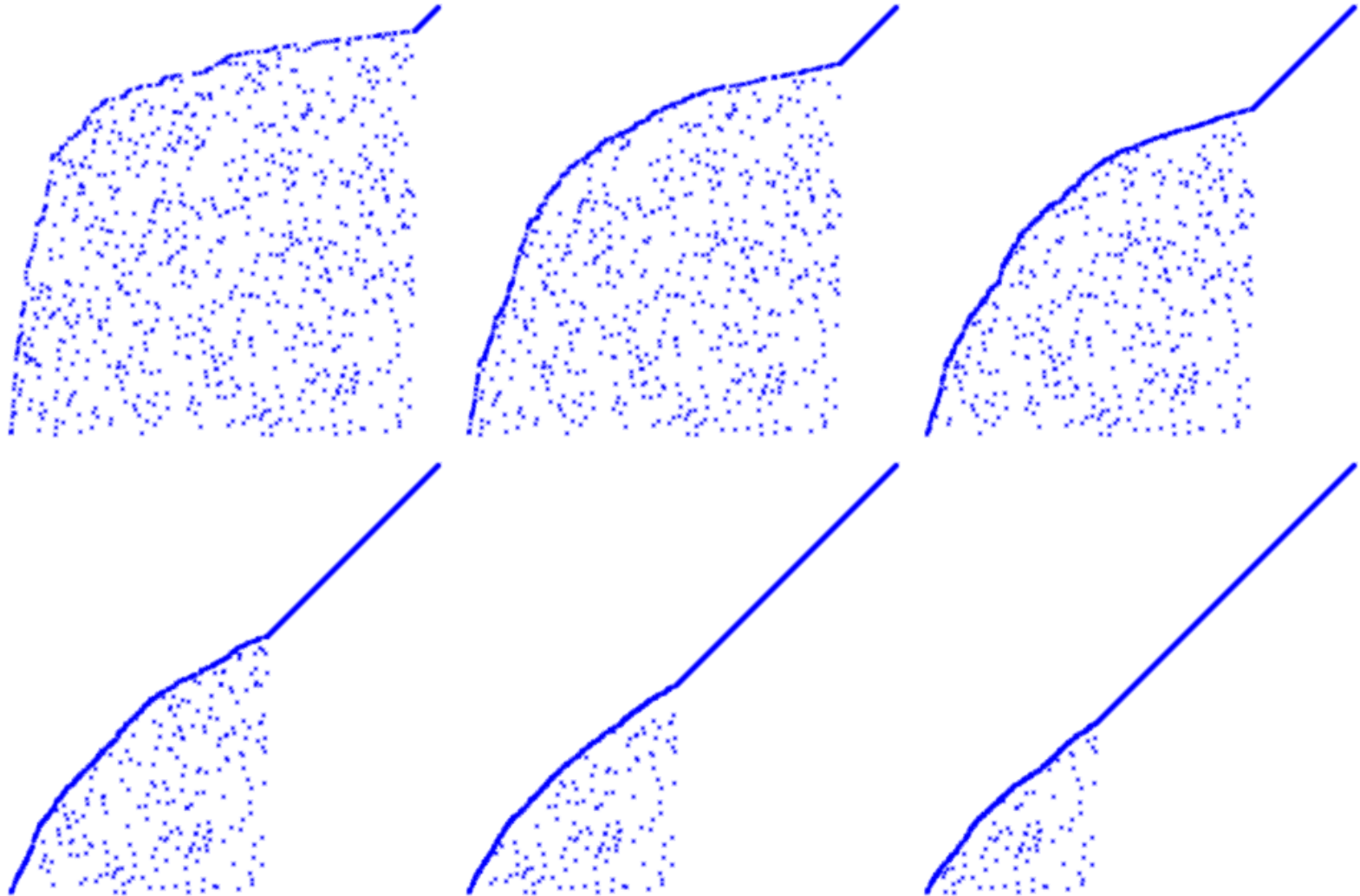
- Dopo l'i-esima iterazione, gli elementi $A[n-i] \dots A[n-1]$ sono correttamente ordinati e occupano la loro posizione definitiva nell'array ordinato

```
public static void bubbleSort(Comparable A[]) {  
    for (int i = 1; i < A.length; i++) {  
        boolean scambiAvvenuti = false;  
        for (int j = 1; j <= A.length - i; j++) {  
            if (A[j - 1].compareTo(A[j]) > 0) {  
                Comparable temp = A[j - 1];  
                A[j - 1] = A[j];  
                A[j] = temp;  
                scambiAvvenuti = true;  
            }  
        }  
        if (!scambiAvvenuti) break;  
    }  
}
```

Bubble Sort

- Nel caso pessimo Bubble Sort ha costo $\Theta(n^2)$
 - Nel caso ottimo l'algoritmo ha costo $\Theta(n)$: effettua una sola scansione dell'array senza effettuare scambi
- In generale, l'algoritmo ha un comportamento “quasi naturale”, nel senso che il tempo di ordinamento **tende** ad essere legato al grado di “disordine” dell'array
 - La parola chiave è “tende”. Infatti, come si comporta l'algoritmo su questo vettore? [2 3 4 5 6 7 8 9 1]

Bubble Sort per immagini



Si può fare di meglio?

- Gli algoritmi visti fino ad ora hanno costo $O(n^2)$
- È possibile fare di meglio?
 - Quanto meglio?

Algoritmi “divide et impera”

- Idea generale
 - **Divide**: Scomporre il problema in sottoproblemi dello stesso tipo (cioè sottoproblemi di ordinamento)
 - Risolvere ricorsivamente i sottoproblemi
 - **Impera**: Combinare le soluzioni parziali per ottenere la soluzione al problema di partenza
- Vedremo due algoritmi di ordinamento di tipo divide et impera
 - Quicksort
 - Merge Sort

Quicksort

- Inventato nel 1962 da Sir Charles Anthony Richard Hoare
 - All'epoca *exchange student* presso la Moscow State University
 - Vincitore del *Turing Award* (l'equivalente del Nobel per l'informatica) nel 1980 per il suo contributo nel campo dei linguaggi di programmazione
 - Hoare, C. A. R. "*Quicksort.*" *Computer Journal* 5 (1): 10-15. (1962).



C. A. R. Hoare (1934—)
http://en.wikipedia.org/wiki/C._A._R._Hoare

Quicksort

- Algoritmo ricorsivo “divide et impera”
 - Scegli un elemento x del vettore v , e partiziona il vettore in due parti considerando gli elementi $\leq x$ e quelli $> x$
 - Ordina ricorsivamente le due parti
 - Restituisci il risultato concatenando le due parti ordinate
- R. Sedgewick, “*Implementing Quicksort Programs*”, Communications of the ACM, 21(10):847-857, 1978
<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=359631>

Quicksort

- Input: Array $A[1..n]$, indici i, f tali che $1 \leq i < f \leq n$
- Divide-et-impera
 - Scegli un numero m nell'intervallo $[i, i+1, \dots f]$
 - Divide: permuta l'array $A[i..f]$ in due sottoarray $A[i..m-1]$ e $A[m+1..f]$ (eventualmente vuoti) in modo che:
$$\forall j \in [i \dots m-1]: A[j] \leq A[m]$$
$$\forall k \in [m+1 \dots f]: A[m] < A[k]$$
 - $A[m]$ prende il nome di **pivot**
 - Impera: ordina i due sottoarray $A[i..m-1]$ e $A[m+1..f]$ richiamando ricorsivamente quicksort
 - Combina: non fa nulla; i due sottoarray ordinati e l'elemento $A[m]$ sono già ordinati

Quicksort

```
public static void quickSort(Comparable A[]) {  
    quickSortRec(A, 0, A.length - 1);  
}  
  
public static void quickSortRec(Comparable A[], int i, int f) {  
    if (i >= f) return;  
    int m = partition(A, i, f);  
    quickSortRec(A, i, m - 1);  
    quickSortRec(A, m+1, f);  
}
```

Ricordarsi che in Java
gli array sono indicizzati
a partire da 0, non da 1

Quicksort: partition()

Idea di base

- Manteniamo due indici, inf e sup , che vengono fatti scorrere dalle estremità del vettore verso il centro
 - Il sotto-vettore $A[i..inf-1]$ è composto da elementi $\leq pivot$
 - Il sotto-vettore $A[sup+1..f]$ è composto da elementi $> pivot$
- Quando entrambi (inf e sup) non possono essere fatti avanzare verso il centro, si scambia $A[inf]$ e $A[sup]$

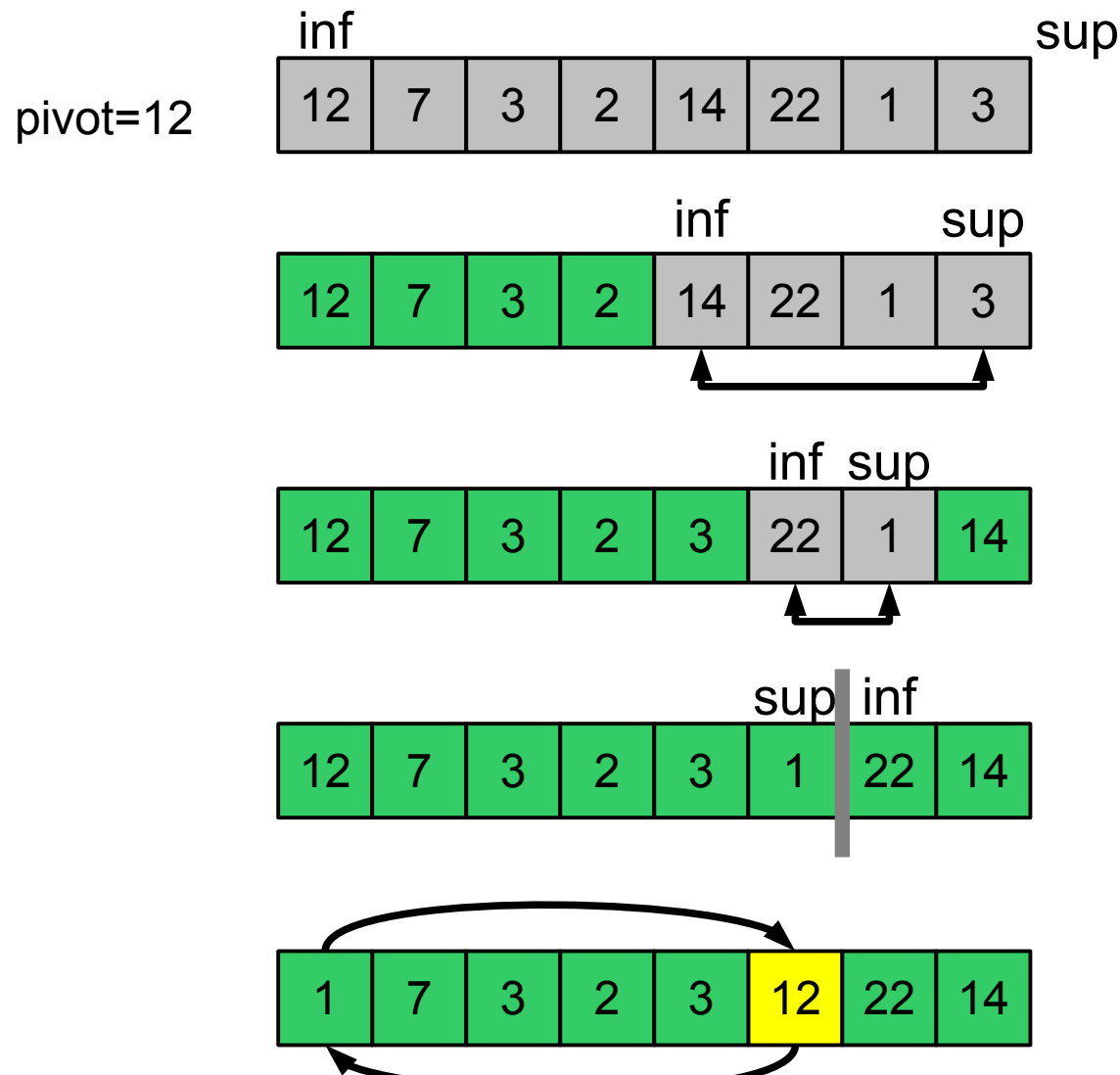


Quicksort: partition()

```
private static int partition(Comparable A[], int i, int f) {  
    int inf = i, sup = f + 1;  
    Comparable temp, x = A[i];  
    while (true) {  
        do {  
            inf++;  
        } while (inf <= f && A[inf].compareTo(x) <= 0);  
        do {  
            sup--;  
        } while (A[sup].compareTo(x) > 0);  
        if (inf < sup) {  
            temp = A[inf];  
            A[inf] = A[sup];  
            A[sup] = temp;  
        } else  
            break;  
    }  
    temp = A[i];  
    A[i] = A[sup];  
    A[sup] = temp;  
    return sup;  
}
```

Scelta deterministica
del pivot

Esempio di partizionamento



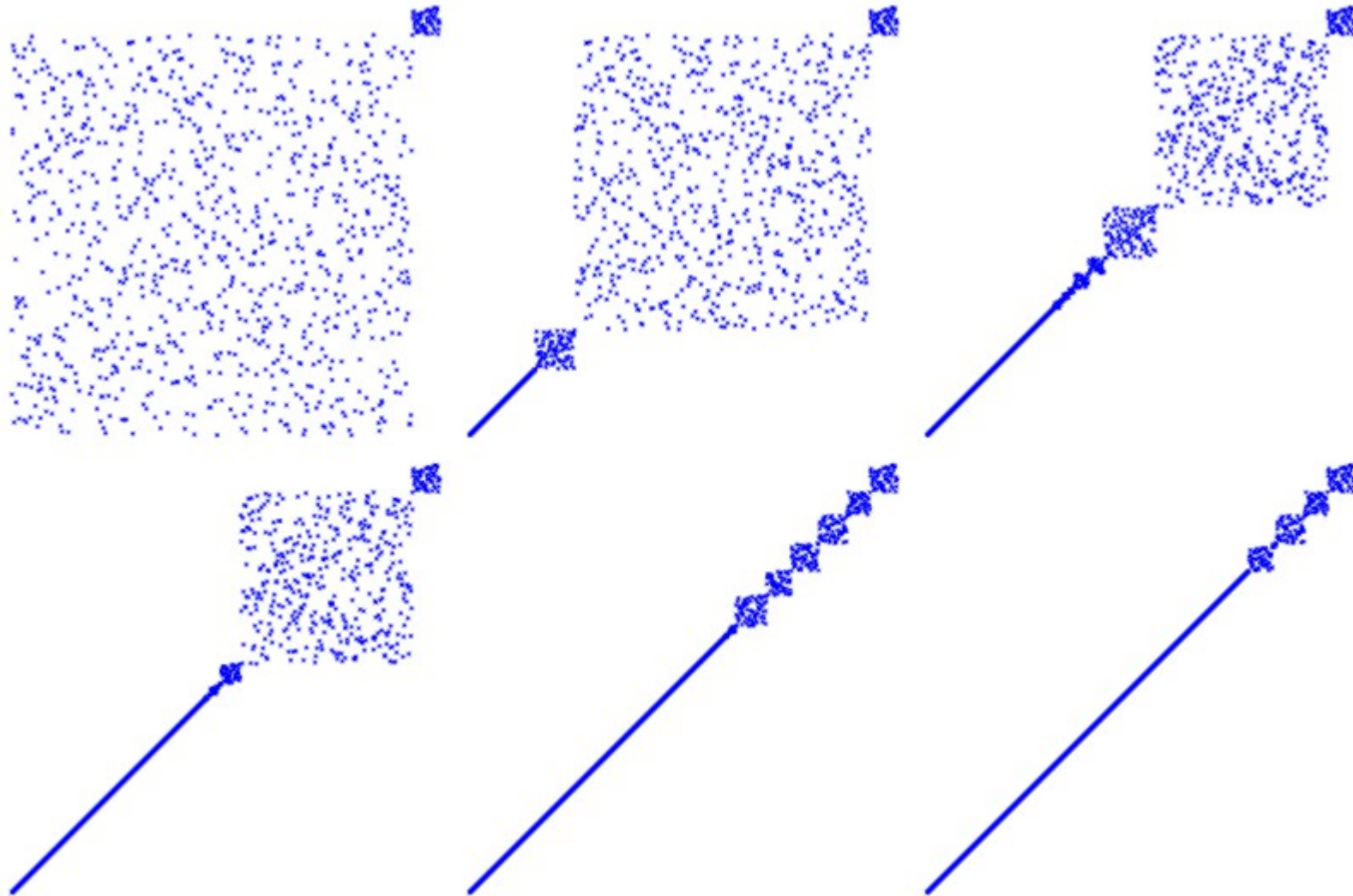
Esercizio

(problema 4.7 p. 116 del libro di testo)

- Il problema della bandiera nazionale. Supponiamo di avere un array $A[1..n]$ di elementi che possono assumere solo tre valori: bianco, verde e rosso. Ordinare l'array in modo che tutti gli elementi verdi siano a sinistra, quelli bianchi al centro e quelli rossi a destra.
- L'algoritmo DEVE richiedere tempo $O(n)$ e memoria aggiuntiva $O(1)$. Può confrontare ed eventualmente scambiare tra loro elementi, e NON DEVE fare uso di ulteriori array di appoggio, né usare contatori per tenere traccia del numero di elementi di un certo colore
- L'algoritmo DEVE richiedere una singola scansione dell'array.

Questo algoritmo verrà utilizzato nell'algoritmo di selezione del k-esimo

Quicksort per immagini



Quicksort: Analisi del costo

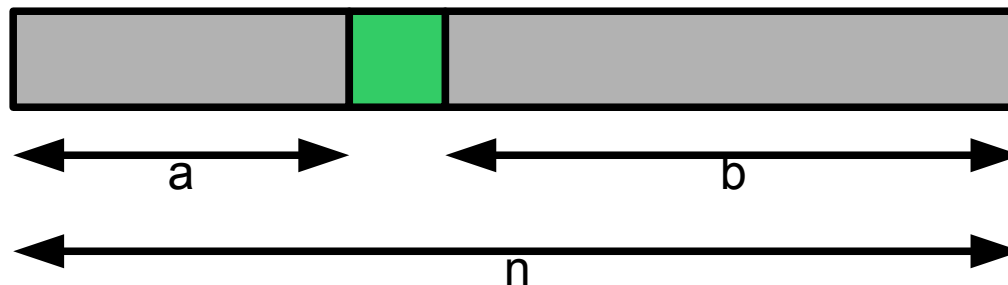
- Costo di partition(): $\Theta(f-i)$
- Costo Quicksort: Dipende dal partizionamento
- **Partizionamento peggiore**
 - Dato un problema di dimensione n , viene sempre diviso in due sottoproblemi di dimensione 0 e $n-1$
 - $T(n) = T(n-1) + T(0) + n = T(n-1) + n = \Theta(n^2)$
- **Domanda:** Quando si verifica il caso pessimo?
- **Partizionamento migliore**
 - Dato un problema di dimensione n , viene sempre diviso in due sottoproblemi di dimensione $n/2$
 - $T(n) = 2T(n/2) + n = \Theta(n \log n)$ (caso 2 Master Theorem)

Quicksort: Analisi nel caso medio

- In generale, possiamo scrivere la relazione di ricorrenza per $T(n)$ —che esprime il numero di confronti richiesti—come segue:

$$T(n) = T(a) + T(b) + n-1$$

con $(a+b)=(n-1)$



- Il problema è che a e b cambiano (potenzialmente) ad ogni iterazione

Quicksort: Analisi nel caso medio

- Assumendo che tutti i partizionamenti siano equifrequenti, possiamo scrivere:

$$T(n) = \sum_{a=0}^{n-1} \frac{1}{n} (n-1 + T(a) + T(n-a-1))$$

- Osserviamo che i termini $T(a)$ e $T(n-a-1)$ danno luogo alla stessa sommatoria, da cui possiamo semplificare

$$T(n) = n-1 + \frac{2}{n} \sum_{a=0}^{n-1} T(a)$$

Quicksort: Analisi nel caso medio

- Si risolve la relazione di ricorrenza “per sostituzione”
- **Teorema**: la relazione di ricorrenza

$$T(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{a=0}^{n-1} T(a)$$

ha soluzione $T(n) = O(n \log n)$

- **Dimostrazione**: dimostriamo per induzione che la soluzione $T(n)$ verifica la relazione $T(n) \leq \alpha n \ln n$ (con $\ln = \log_e$)
 - verificheremo che si potrà fissare $\alpha=2$

Quicksort: Analisi nel caso medio

$$\begin{aligned}T(n) &= n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \\&\leq n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha i \ln i \\&= n - 1 + \frac{2\alpha}{n} \sum_{i=2}^{n-1} i \ln i \\&\leq n - 1 + \frac{2\alpha}{n} \int_2^n x \ln x \, dx\end{aligned}$$

continua...

Quicksort: Analisi nel caso medio

integrazione per parti: $\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq n - 1 + \frac{2\alpha}{n} \int_2^n x \ln x \, dx \\ &= n - 1 + \frac{2\alpha}{n} \left(\frac{n^2 \ln n}{2} - 2 \ln 2 - \frac{n^2}{4} + 1 \right) \\ &\leq n - 1 + \alpha n \ln n - \alpha \frac{n}{2} \\ &\leq \alpha n \ln n \end{aligned}$$

$-2 \ln 2 + 1 < 0$

- L'ultima disuguaglianza vale fissando $\alpha=2$, che implica $n - 1 - \alpha n/2 < 0$, da cui la tesi è dimostrata

Quicksort: Versione randomizzata

- Abbiamo visto una implementazione in cui il pivot è sempre il primo elemento del (sotto-)vettore
 - In questa situazione è abbastanza facile identificare istanze di input in cui si verifica il **caso pessimo**
- Possiamo rendere il bilanciamento delle partizioni indipendente dall'istanza mediante **randomizzazione**
 - Scegliamo in maniera (pseudo-)casuale il pivot tra tutti gli elementi del (sotto-)vettore
 - In questo modo tutte le partizioni sono equi-probabili come da assunzione nell'analisi del **caso medio**

Quicksort: partition() versione randomizzata

```
private static int partition(Comparable A[], int i, int f) {  
    int inf = i, sup = f + 1,  
        pos = i + (int) Math.floor((f-i+1) * Math.random());  
    Comparable temp, x = A[pos];  
    A[pos] = A[i];  
    A[i] = x;  
    while (true) {  
        do {  
            inf++;  
        } while (inf <= f && A[inf].compareTo(x) <= 0);  
        do {  
            sup--;  
        } while (A[sup].compareTo(x) > 0);  
        if (inf < sup) {  
            temp = A[inf];  
            A[inf] = A[sup];  
            A[sup] = temp;  
        } else  
            break;  
    }  
    temp = A[i];  
    A[i] = A[sup];  
    A[sup] = temp;  
    return sup;  
}
```

Scelta
pseudocasuale
del pivot

Merge Sort

- Inventato da John von Neumann nel 1945
- Algoritmo *divide et impera*
- Idea:
 - Dividere $A[]$ in due meta' $A1[]$ e $A2[]$ (senza permutare) di dimensioni uguali;
 - Applicare ricorsivamente Merge Sort a $A1[]$ e $A2[]$
 - Fondere (*merge*) gli array ordinati $A1[]$ e $A2[]$ per ottenere l'array $A[]$ ordinato



John von Neumann (1903—1957)

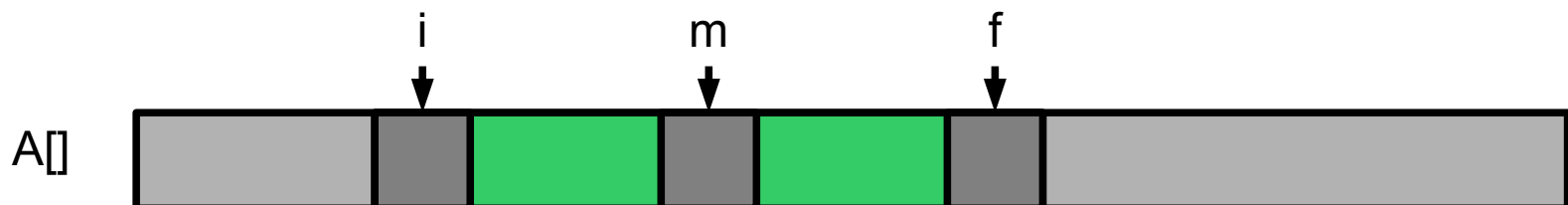
http://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

Merge Sort vs Quicksort

- Quicksort:
 - partizionamento complesso, merge banale (di fatto nessuna operazione di merge è richiesta)
- Merge Sort:
 - partizionamento banale, operazione merge complessa

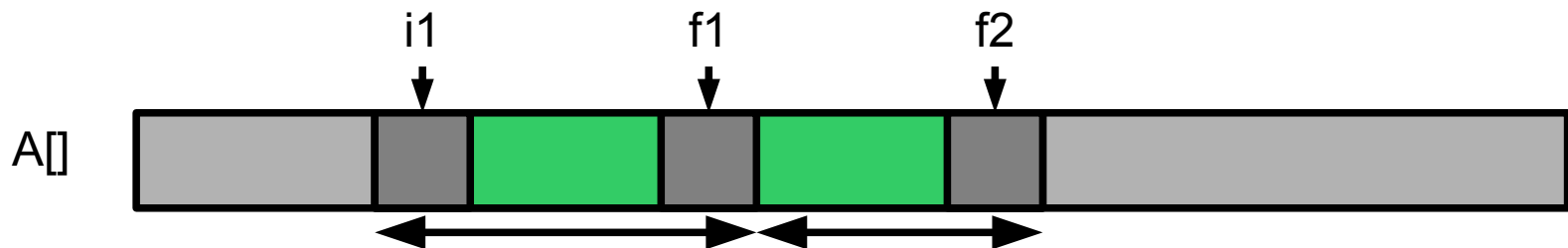
Merge Sort

```
public static void mergeSort(Comparable A[]) {  
    mergeSortRec(A, 0, A.length - 1);  
}  
  
private static void mergeSortRec(Comparable A[], int i, int f) {  
    if (i >= f) return;  
    int m = (i + f) / 2;  
    mergeSortRec(A, i, m);  
    mergeSortRec(A, m + 1, f);  
    merge(A, i, m, f);  
}
```

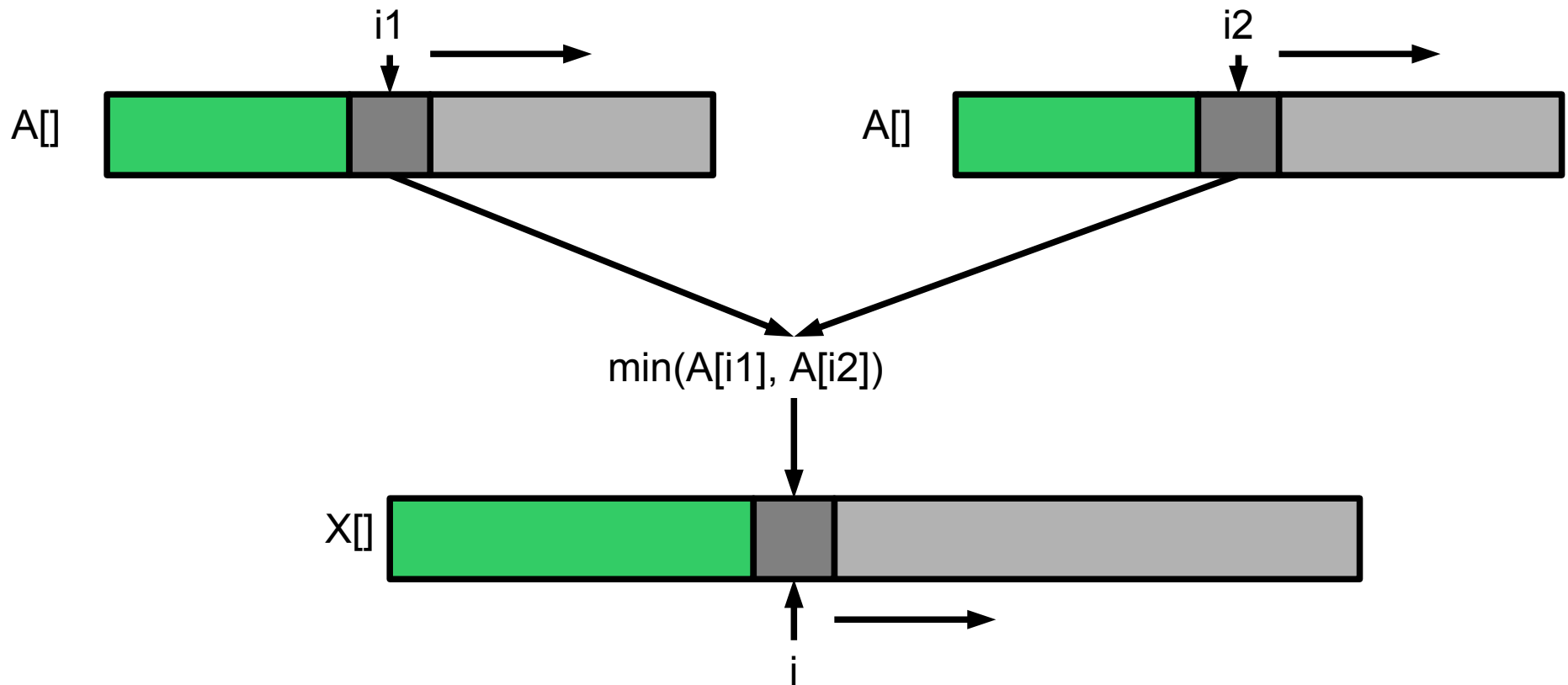


Operazione merge()

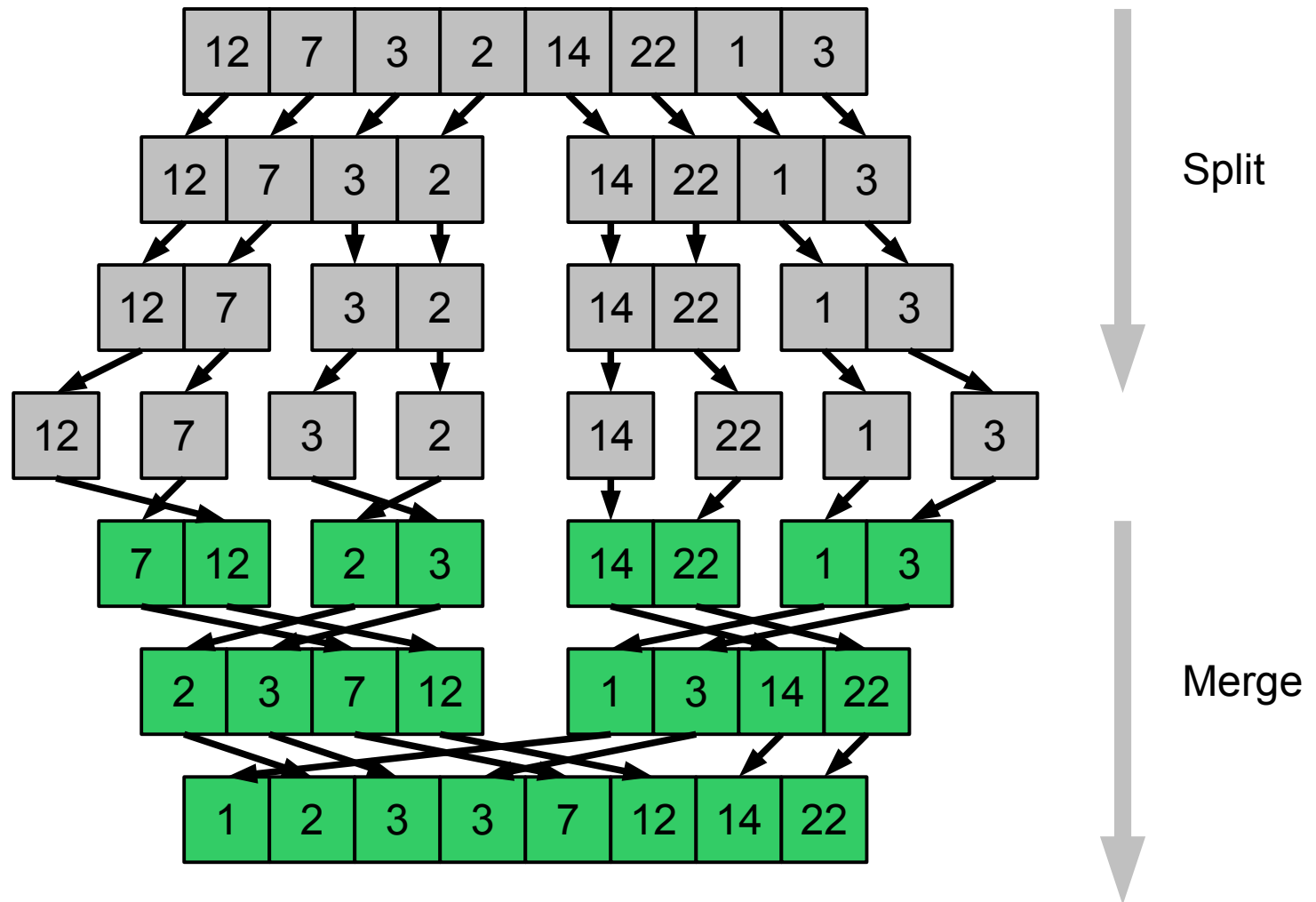
```
private static void merge(Comparable A[], int i1, int f1, int f2)
{
    Comparable[] X = new Comparable[f2 - i1 + 1];
    int i = 0, i2 = f1 + 1, k = i1;
    while (i1 <= f1 && i2 <= f2) {
        if (A[i1].compareTo(A[i2]) < 0)
            X[i++] = A[i1++];
        else
            X[i++] = A[i2++];
    }
    if (i1 <= f1)
        for (int j = i1; j <= f1; j++, i++) X[i] = A[j];
    else
        for (int j = i2; j <= f2; j++, i++) X[i] = A[j];
    for (int t = 0; k <= f2; k++, t++) A[k] = X[t];
}
```



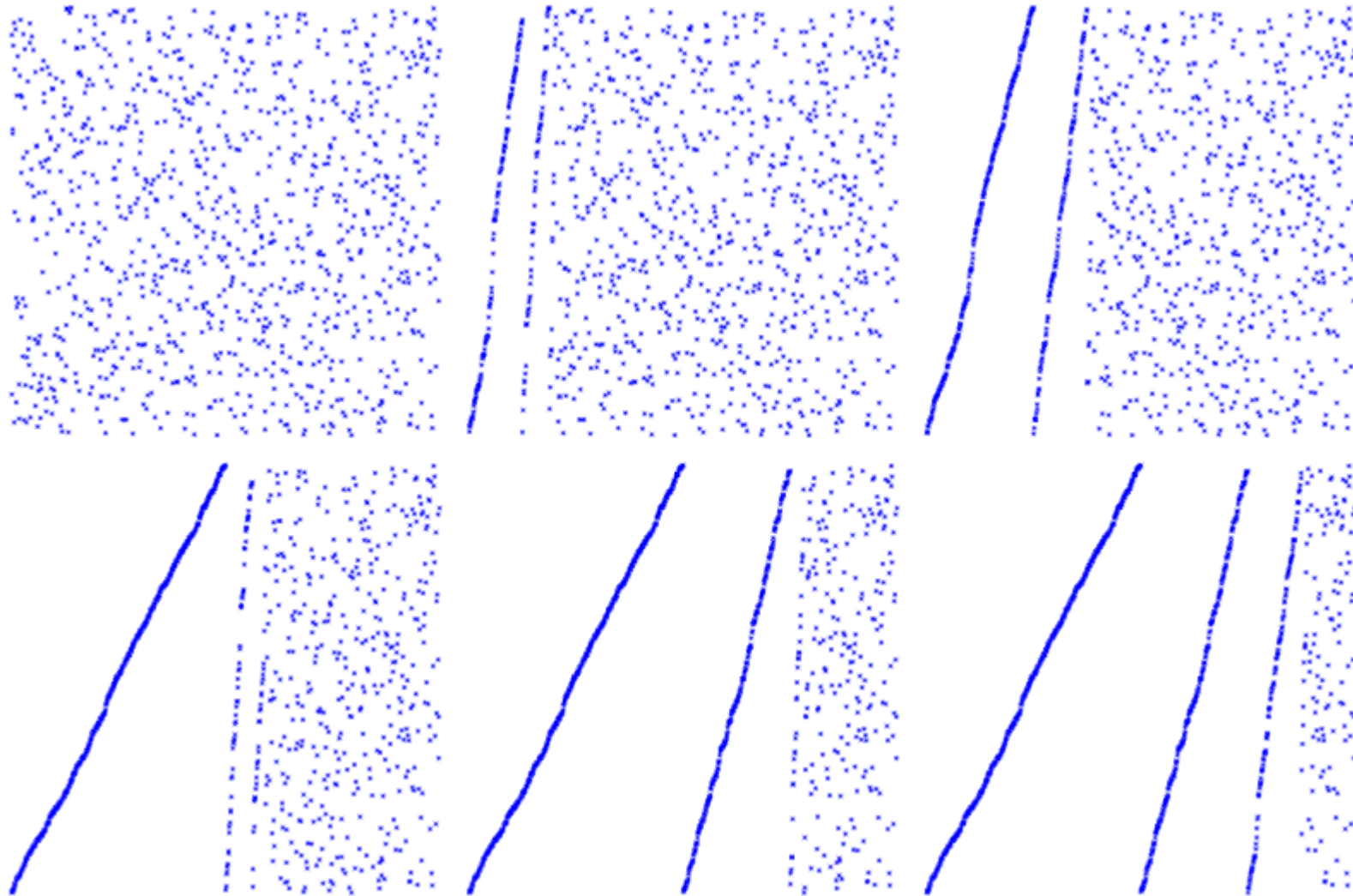
Operazione merge()



Merge Sort: esempio



Merge Sort per immagini



Merge Sort: costo computazionale

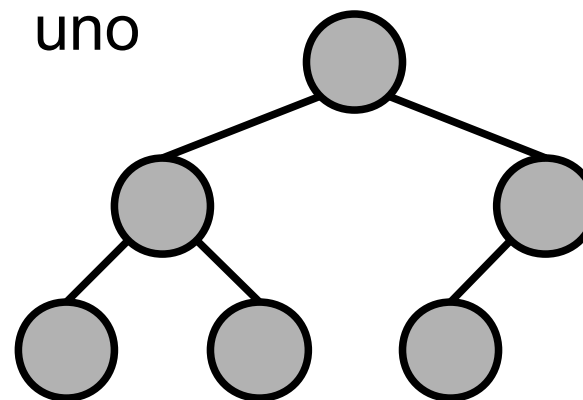
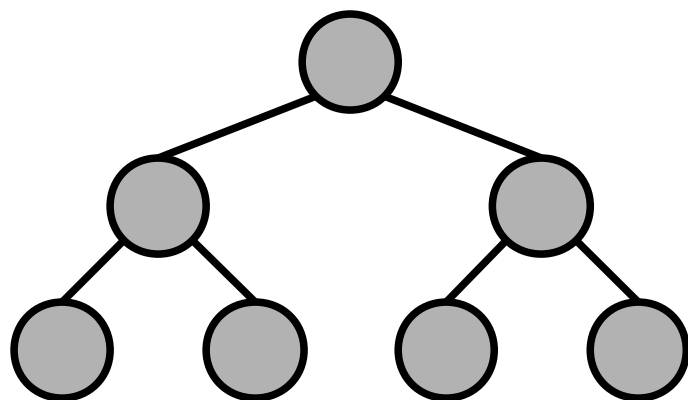
- $T(n) = 2T(n/2) + n$
- In base al Master Theorem (caso 2), si ha
 $T(n) = \Theta(n \log n)$
- Il costo computazionale di Merge Sort **non dipende dalla configurazione iniziale** dell'array da ordinare
 - Quindi il limite di cui sopra vale nei casi ottimo/pessimo/medio
- Svantaggi rispetto a Quick Sort: Merge Sort richiede ulteriore spazio (non ordina in-loco)
 - Jyrki Katajainen, Tomi Pasanen, Jukka Teuhola, “*Practical in-place mergesort*”, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.22.8523>

Heapsort

- L'idea
 - Utilizzare una struttura dati—detta **heap**—per ordinare un array
 - Costo computazionale: $O(n \log n)$
 - Ordinamento sul posto
- Inoltre
 - Il concetto di heap può essere utilizzato per implementare code con priorità

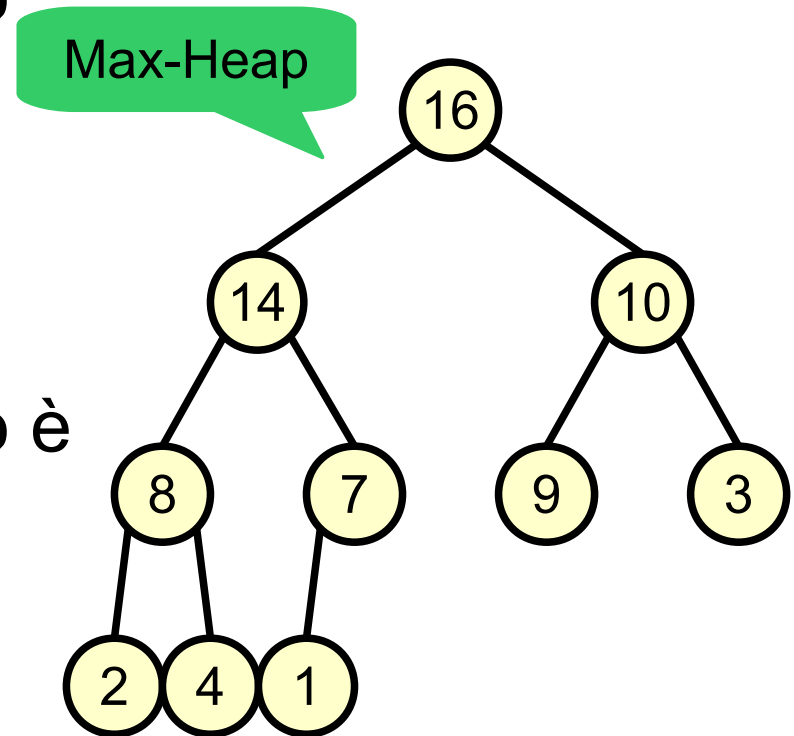
Alberi binari

- Albero binario completo
 - Tutte le foglie hanno la stessa altezza h
 - Nodi interni hanno grado 2
- Un albero completo
 - Ha altezza $h \approx \log N$
 - $N = \text{\#nodi} = 2^{h+1} - 1$
- Albero binario “quasi” completo (struttura rafforzata)
 - Albero completo fino al livello $h-1$
 - Tutti i nodi a livello h sono “compattati” a sinistra
 - Osservazione: i nodi interni hanno grado 2, meno al più uno



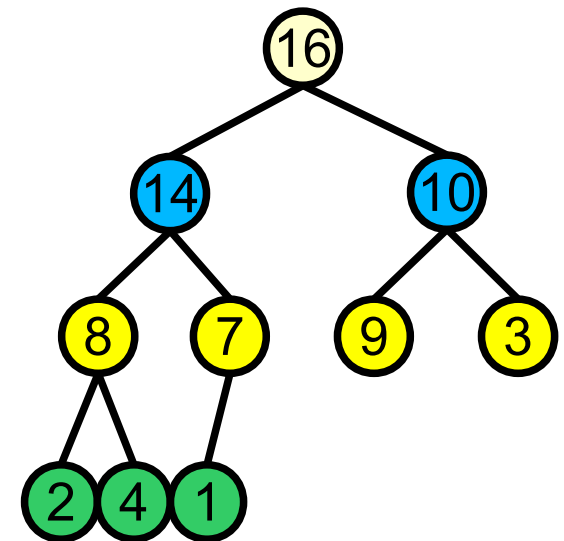
Alberi binari heap

- Un albero binario quasi completo è un albero **max-heap** sse
 - Ad ogni nodo i viene associato un valore $A[i]$
 - $A[\text{Parent}(i)] \geq A[i]$
- Un albero binario quasi completo è un albero **min-heap** sse
 - Ad ogni nodo i viene associato un valore $A[i]$
 - $A[\text{Parent}(i)] \leq A[i]$
- Ovviamente, le definizioni e gli algoritmi di max-heap sono simmetrici rispetto a min-heap



Array heap

- E' possibile rappresentare un albero binario heap tramite un array heap (oltre che tramite puntatori)
- Cosa contiene?
 - Array A, di lunghezza A.length
 - Dimensione A.heapsize \leq A.length
- Come è organizzato?
 - A[1] contiene la radice
 - $\text{Parent}(i) = \text{Math.floor}(i/2)$
 - $\text{Left}(i) = 2*i$
 - $\text{Right}(i) = 2*i+1$



A.heapsize=10



A[0] A[1] A[2] A[3] A[4] A[5]

Algoritmi e Strutture di Dati

A.length = 12

53

Domanda: Gli elementi dell'albero heap compaiono nel vettore nello stesso ordine della visita ...

Operazioni su array heap

- **findMax()**: Individua il valore massimo contenuto in uno heap
 - Il massimo è sempre la radice, ossia $A[1]$
 - L'operazione ha costo $\Theta(1)$
- **fixHeap()**: Ripristinare la proprietà di max-heap
 - Supponiamo di rimpiazzare la radice $A[1]$ di un max-heap con un valore qualsiasi
 - Vogliamo fare in modo che $A[]$ diventi nuovamente uno heap
- **heapify()**: Costruire uno heap a partire da un array privo di alcun ordine
- **deleteMax()**: rimuovi l'elemento massimo da un max-heap $A[]$

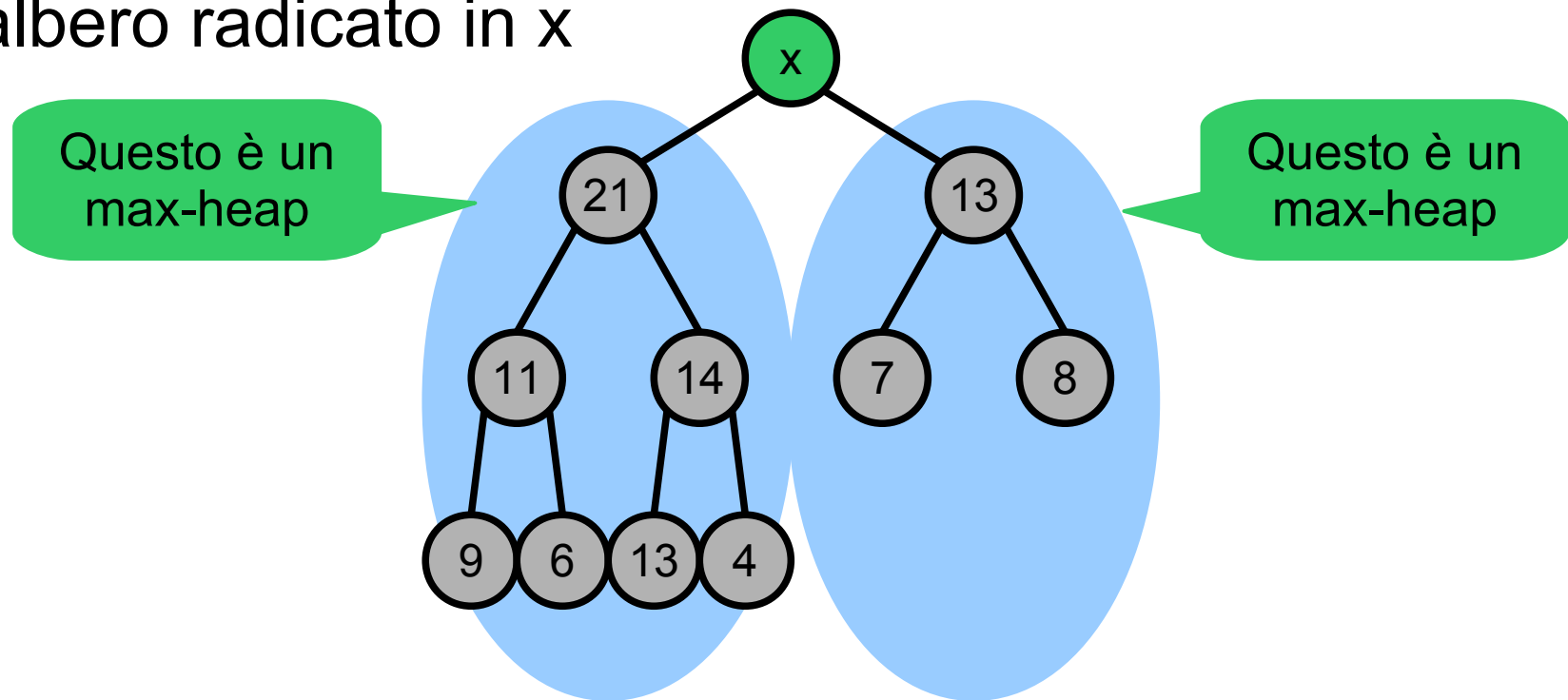
Operazione heapify()

- Parametri:
 - $S[]$ è un array (arbitrario); assumiamo che lo heap abbia n elementi $S[1], \dots, S[n]$ ($S[0]$ non viene usato)
 - i è l'indice dell'elemento che diventerà la radice dello heap ($i \geq 1$)
 - n indica l'indice dell'ultimo elemento dello heap

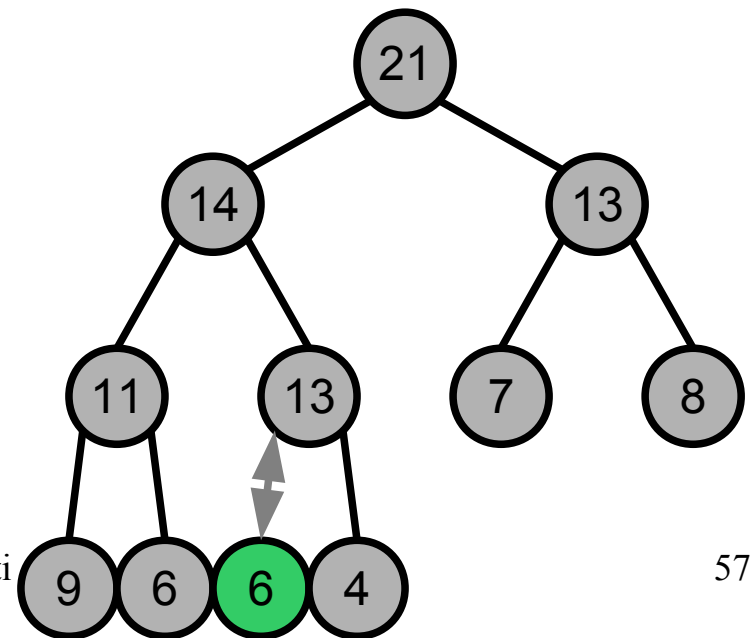
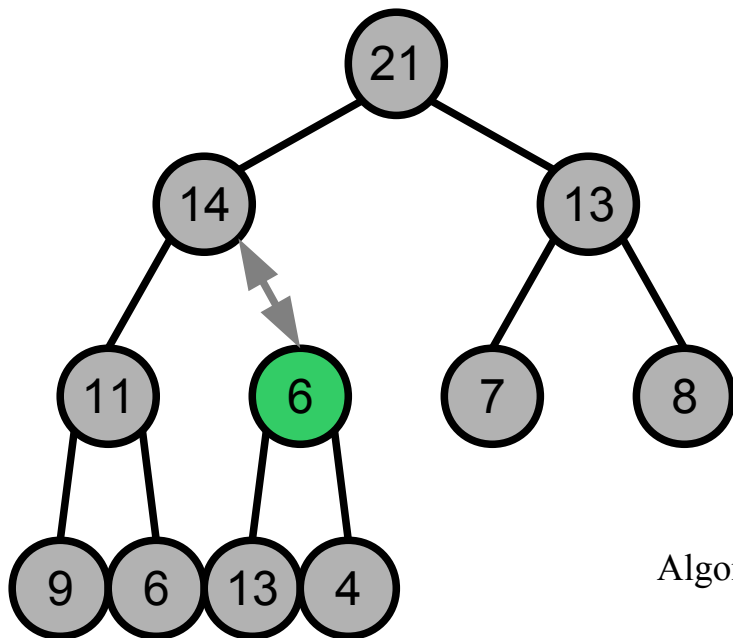
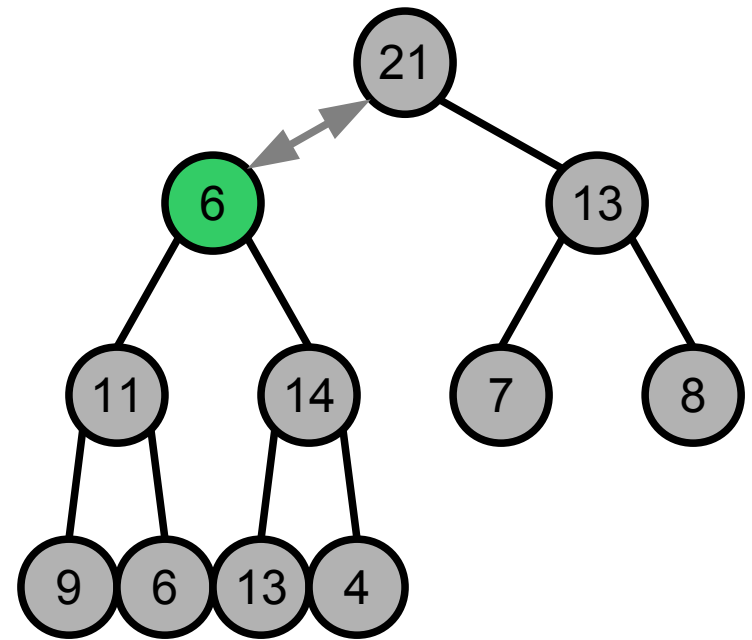
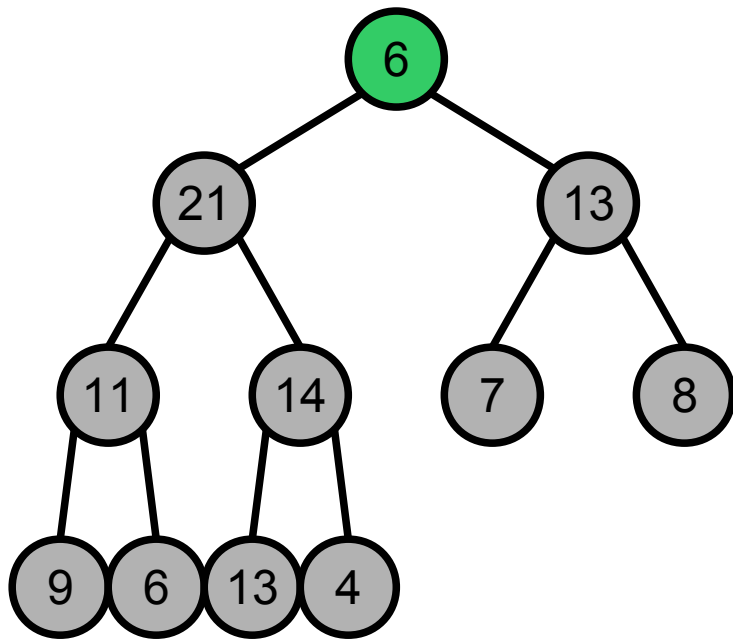
```
private static void heapify(Comparable S[], int n, int i) {  
    if (i > n) return;  
    heapify(S, n, 2 * i); // crea heap radicato in  $S[2*i]$   
    heapify(S, n, 2 * i + 1); // crea heap radicato in  $S[2*i+1]$   
    fixHeap(S, n, i);  
}  
// per trasformare un array S in uno heap:  
// heapify(S, S.length, 1 );
```

Operazione fixHeap()

- Supponiamo di avere trasformato in max-heap i sottoalberi destro e sinistro di un nodo x
- L'operazione fixHeap() trasforma in max-heap l'intero albero radicato in x



Operazione fixHeap()



Operazione fixHeap()

- Ripristina la proprietà di ordinamento di un max-heap rispetto ad un nodo radice di indice i .
- Si confronta ricorsivamente $S[i]$ con il massimo tra i suoi figli e si opera uno scambio ogni volta che la proprietà di ordinamento non è verificata.

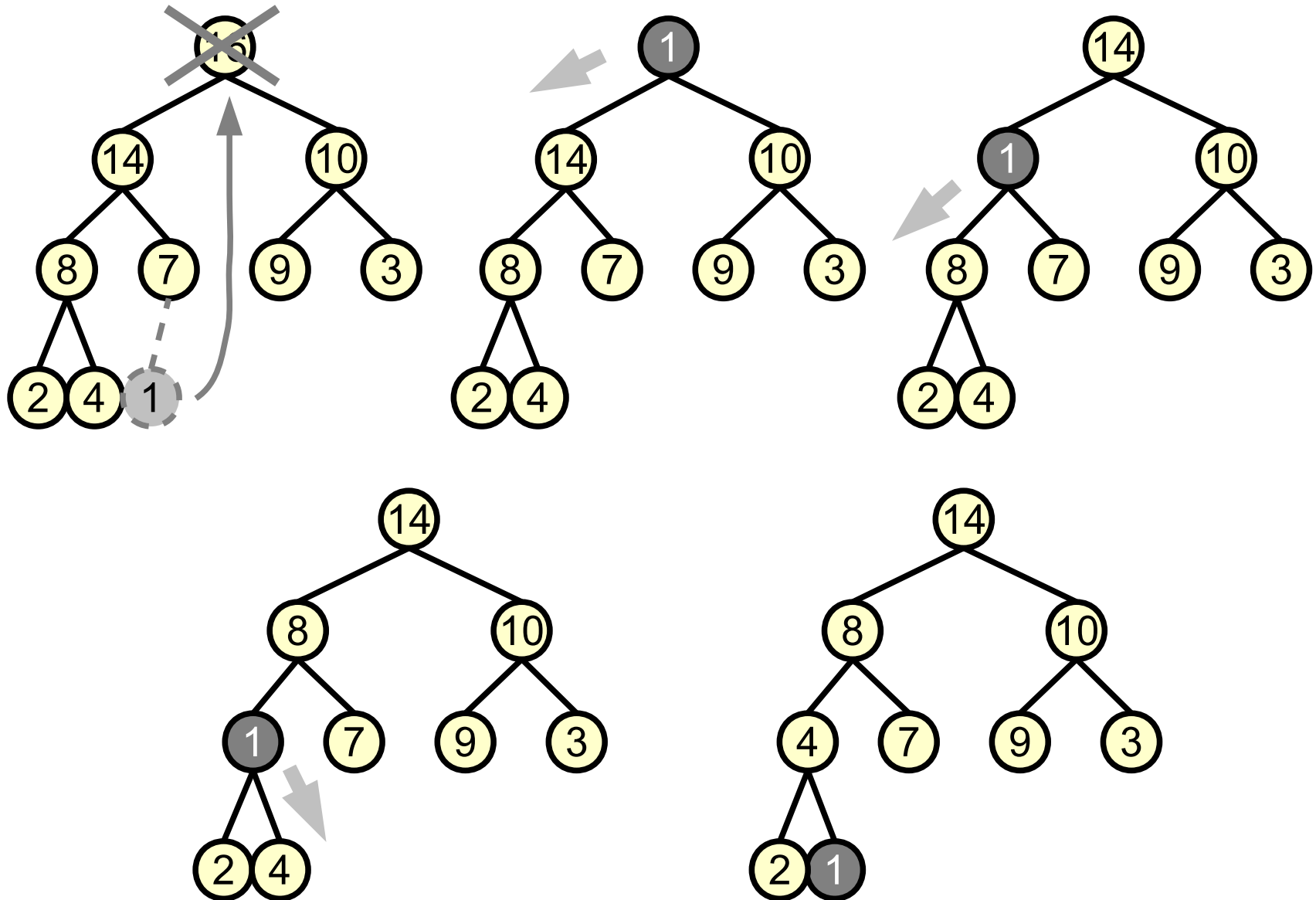
```
private static void fixHeap(Comparable S[], int c, int i) {  
    int max = 2 * i; // figlio sinistro  
    if (2 * i > c) return;  
    if (2 * i + 1 <= c && S[2 * i].compareTo(S[2 * i + 1]) < 0)  
        max = 2 * i + 1; // figlio destro  
    if (S[i].compareTo(S[max]) < 0) {  
        Comparable temp = S[max];  
        S[max] = S[i];  
        S[i] = temp;  
        fixHeap(S, c, max);  
    }  
}
```

c è l'indice dell'ultimo elemento dello heap

operazione deleteMax()

- Scopo: rimuove la radice (cioè il valore massimo) dallo heap, mantenendo la proprietà di max-heap
- Idea
 - al posto del vecchio valore $A[1]$ metto il valore presente nell'ultima posizione dell'array heap
 - applico `fixHeap()` per ripristinare la proprietà di heap

Esempio



Costo computazionale

- **fixHeap()**
 - Nel caso pessimo, il numero di scambi è uguale alla profondità dello heap
 - Cioè $O(\log n)$
- **heapify()**
 - $T(n) = 2T(n/2) + \log n$ ($\leq 2T(n/2) + n^{1/2}$, per $n > 16$)
 - da cui $T(n) = O(n)$ (caso (1) del Master Theorem)
- **findMax()**
 - $O(1)$
- **deleteMax()**
 - la stessa di fixHeap(), ossia $O(\log n)$

Heapsort

- Idea:
 1. Costruire un max-heap a partire dal vettore $A[]$ originale, mediante l'operazione `heapify()`
 2. Estrarre il massimo (`findMax()` + `deleteMax()`)
 - Lo heap si contrae di un elemento
 3. Inserire il massimo in ultima posizione di $A[]$
 4. Ripetere il punto 2. finché lo heap diventa vuoto

Heapsort

O(n)

O(1)

O(log n)

```
public static void heapSort(Comparable S[]) {  
    heapify(S, S.length - 1, 1);  
    for (int c = (S.length - 1); c > 0; c--) {  
        Comparable k = findMax(S);  
        deleteMax(S, c);  
        S[c] = k;  
    }  
}
```

Ricordare che gli
elementi da ordinare
stanno in S[1], ... S[n]

- Costo computazionale:
 - O(n) per heapify() iniziale
 - Ciascuna iterazione del ciclo 'for' costa O(log c)

- Totale:

$$T(n) = O(n) + O\left(\sum_{c=n}^1 \log c\right) = O(n \log n)$$

Algoritmi di ordinamento: sommario

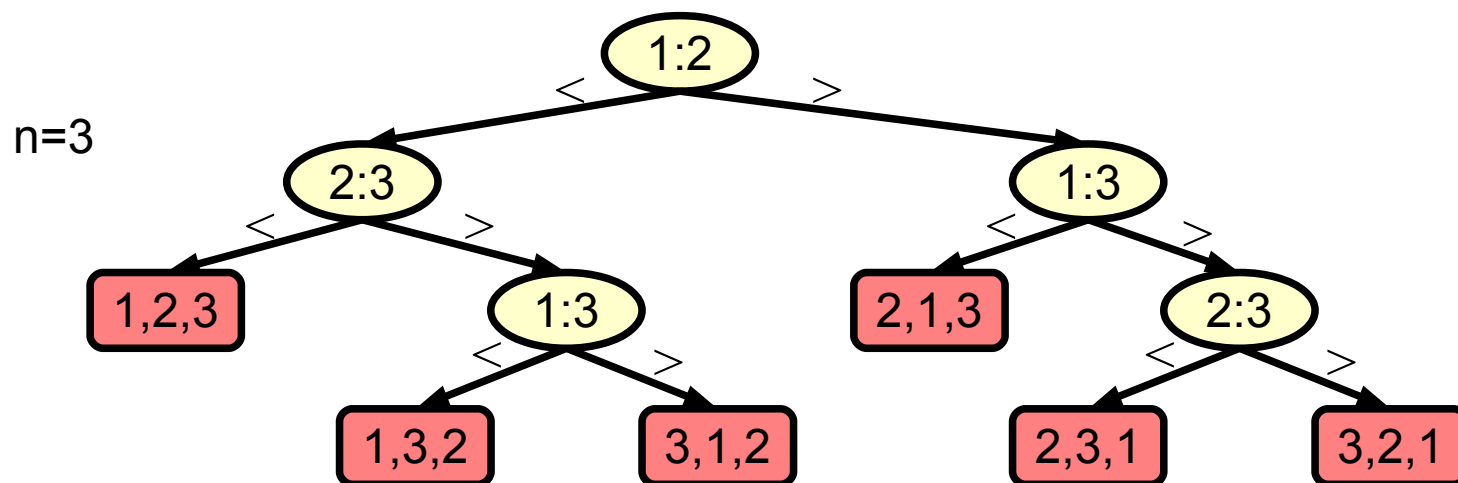
- Abbiamo visto diversi algoritmi di ordinamento:
 - **Selection Sort**: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n^2)$
 - **Insertion Sort**: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n^2)$
 - **Bubble Sort**: ottimo $\Theta(n)$, medio/pessimo $\Theta(n^2)$
 - **Quicksort**: ottimo/medio $\Theta(n \log n)$, pessimo $\Theta(n^2)$
 - **Merge Sort**: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n \log n)$ (non in-loco)
 - **Heapsort**: ottimo/medio/pessimo $O(n \log n)$
- Nota:
 - Tutti questi algoritmi sono basati su confronti
 - le decisioni sull'ordinamento vengono prese in base al confronto ($<, =, >$) fra due valori
- Domanda
 - È possibile fare meglio di $O(n \log n)$?

Esercizio: come modificare per avere caso ottimo $\Theta(n)$?

Esercizio: perché il caso medio è $\Theta(n^2)$?

Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Assunzioni
 - Consideriamo un qualunque algoritmo X basato su confronti
 - Assumiamo che tutti i valori siano distinti
- L'algoritmo X
 - può essere rappresentato tramite un **albero di decisione**, un albero binario che rappresenta i confronti fra gli elementi



Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Idea
 - Ogni algoritmo basato su confronti può essere sempre descritto tramite un albero di decisione
- Proprietà
 - Cammino radice-foglia in un albero di decisione:
sequenza di confronti eseguiti dall'algoritmo corrispondente
 - Altezza dell'albero di decisione:
confronti eseguiti dall'algoritmo corrispondente nel caso pessimo

Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Lemma 1
 - Un albero di decisione per l'ordinamento di n elementi contiene almeno $n!$ foglie
- Dimostrazione
 - Ogni foglia corrisponde ad una possibile soluzione del problema dell'ordinamento
 - Una soluzione del problema dell'ordinamento consiste in una permutazione dei valori di input
 - Ci sono $n!$ possibili permutazioni

Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Lemma 2

- Sia T un albero binario in cui ogni nodo interno ha esattamente 2 figli e sia k il numero delle sue foglie. L'altezza dell'albero è almeno $\log_2 k$

- Dimostrazione (per induzione strutturale)

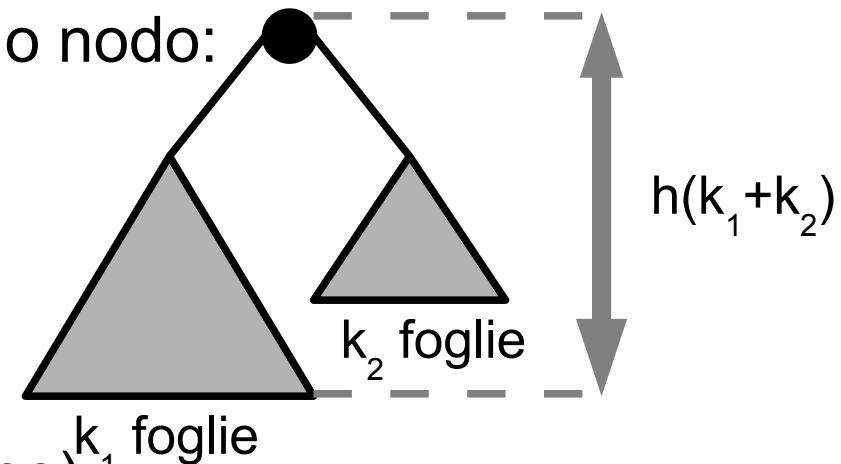
- Consideriamo un albero con un solo nodo:
 $h(1) = 0 \geq \log_2 1 = 0$

- Passo induttivo

$$\begin{aligned} h(k_1 + k_2) &= 1 + \max\{h(k_1), h(k_2)\} \\ &\geq 1 + h(k_1) \end{aligned}$$

Supponiamo
 $k_1 \geq k_2$

$$\begin{aligned} &\geq 1 + \log_2 k_1 \text{ (per induzione)} \\ &= \log_2 2 + \log_2 k_1 = \log_2 (2k_1) \geq \log_2 (k_1 + k_2) \end{aligned}$$



Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Teorema

- Il numero di confronti necessari per ordinare n elementi nel caso peggiore è $\Omega(n \log n)$
- **Domanda:** Dimostrazione
- **Suggerimenti:**
 - Ogni algoritmo basato su confronti richiede tempo proporzionale all'altezza dell'albero di decisione
 - L'albero di decisione ha $n!$ foglie
 - Un albero di decisione con $n!$ foglie ha altezza $\Omega(\log n!)$
 - Utilizzare l'approssimazione di Stirling del fattoriale:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ordinare in tempo lineare

Tecniche lineari di ordinamento

- Una considerazione
 - Il limite inferiore sull'ordinamento si applica solo agli algoritmi basati su confronti
- Altri approcci
 - Counting Sort
 - Bucket Sort
 - Radix Sort

Counting Sort

- I valori di $A[0..n-1]$ appartengono all'intervallo $[0, k-1]$ (ciascun valore può comparire zero o più volte)
 - Costruisco un array $Y[0, k-1]$; $Y[i]$ conta il numero di volte in cui il valore i compare in $A[]$
 - Ricolloco i valori così ottenuti in A

```
public static void countingSort(int[] A, int k) {  
    int[] Y = new int[k];  
    int j = 0;  
    for (int i = 0; i < k; i++) Y[i] = 0;  
    for (int i = 0; i < A.length; i++) Y[A[i]]++;  
    for (int i = 0; i < k; i++) {  
        while (Y[i] > 0) {  
            A[j] = i;  
            j++;  
            Y[i]--;  
        }  
    }  
}
```


Counting Sort: Costo

- $O(\max\{n, k\}) = O(n+k)$
- Se $k = \Theta(n)$, allora il costo è $O(n)$

“Pigeonhole Sort” (Bucket Sort)



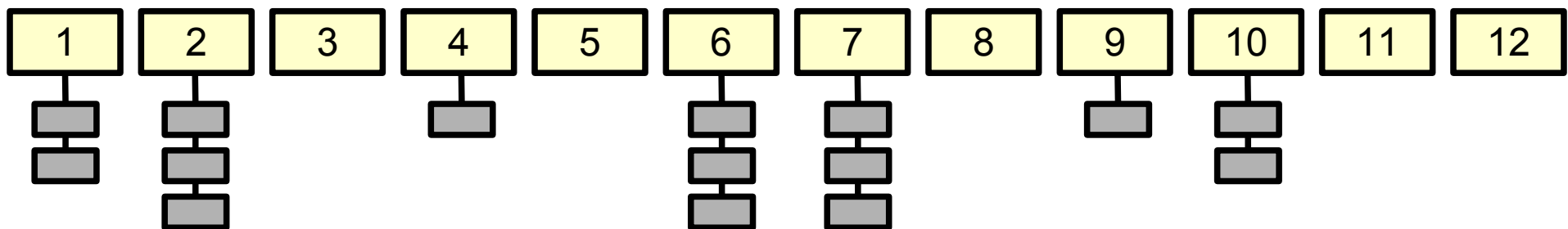
Torre colombaia

http://www.prolocosalento.it/allistefelline/main.shtml?A=f_alliste

Bucket Sort

- Bucket Sort
 - Cosa succede se i valori da ordinare non sono numeri interi, ma record associati ad una chiave?
 - Non possiamo usare counting
 - Ma possiamo usare liste concatenate

mese
nome
cognome
....



Bucket Sort

- Ordina n record con chiavi intere in $[1, k]$

```
Algoritmo bucketSort(array X[1..n], intero k)
  Sia Y un array di dimensione k
  for i := 1 to k do
    Y[i] := lista vuota
  endfor
  for i := 1 to n do
    Appendi X[i] alla lista Y[chiave(X[i])];
  endfor
  for i := 1 to k do
    copia ordinatamente in X gli elementi di Y[i]
  endfor
```

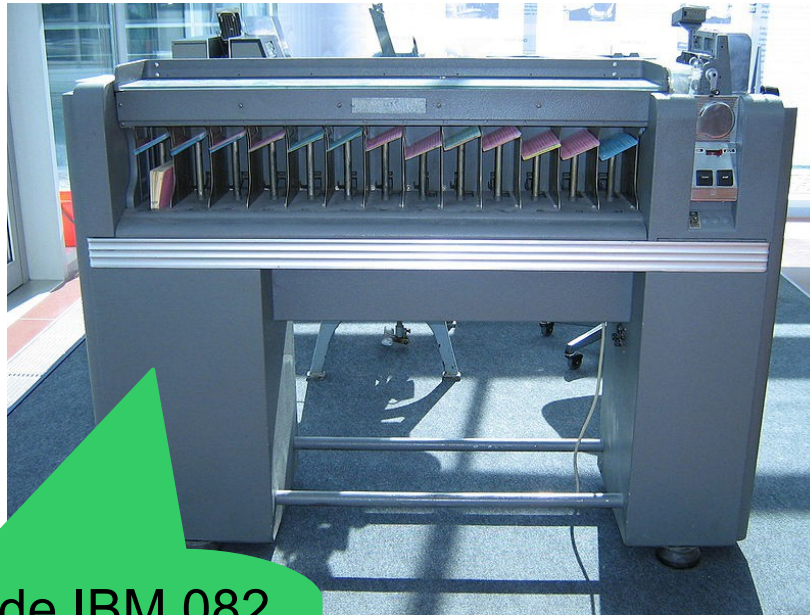
- Costo: $O(n+k)$

Radix Sort

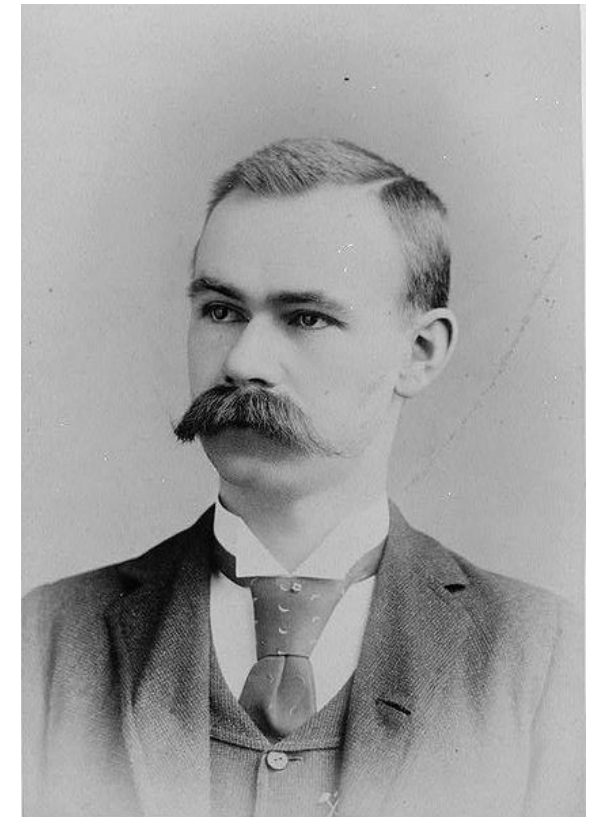
- Bucket Sort è interessante, ma a volte il valore k è troppo grande
- Esempio
 - Supponiamo di voler ordinare n numeri con 4 cifre decimali
 - Questo richiederebbe $n+10000$ operazioni; se $n \log n < n+10000$, questo non sarebbe conveniente
- Idea
 - Ogni cifra decimale è un candidato ideale per Bucket Sort
 - Se Bucket Sort è stabile, possiamo ordinare a partire dalle cifre meno significative

Radix Sort

- Le origini dell'algoritmo risalgono al 1887 (Herman Hollerith e le macchine tabulatrici)



Ordinatrice di schede IBM 082
(13 slots, ogni scheda ha 12
righe di fori + 1 slot per
schede scartate)



Herman Hollerith (1860—1929)
http://en.wikipedia.org/wiki/Herman_Hollerith

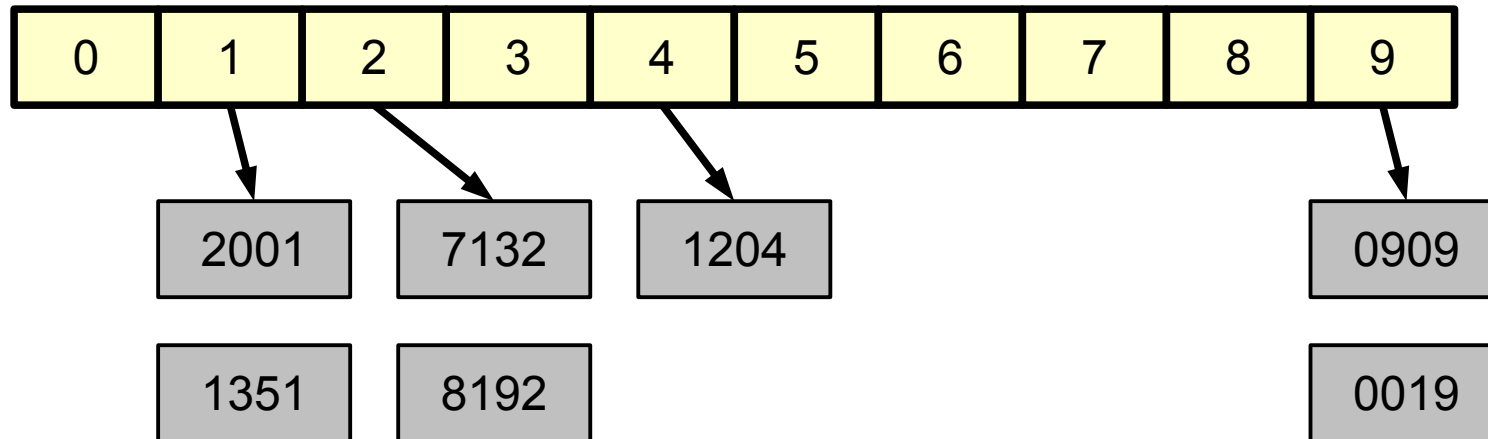
Radix Sort

- Idea:
 - Prima ordino in base alla cifra delle unità
 - Poi ordino in base alla cifra delle decine
 - Poi ordino in base alla cifra delle centinaia
 - ...
- Importante: ad ogni passo è indispensabile usare un algoritmo di ordinamento **stabile**

Esempio

Array di partenza

1204	7132	2001	0909	8192	1351	0019
------	------	------	------	------	------	------

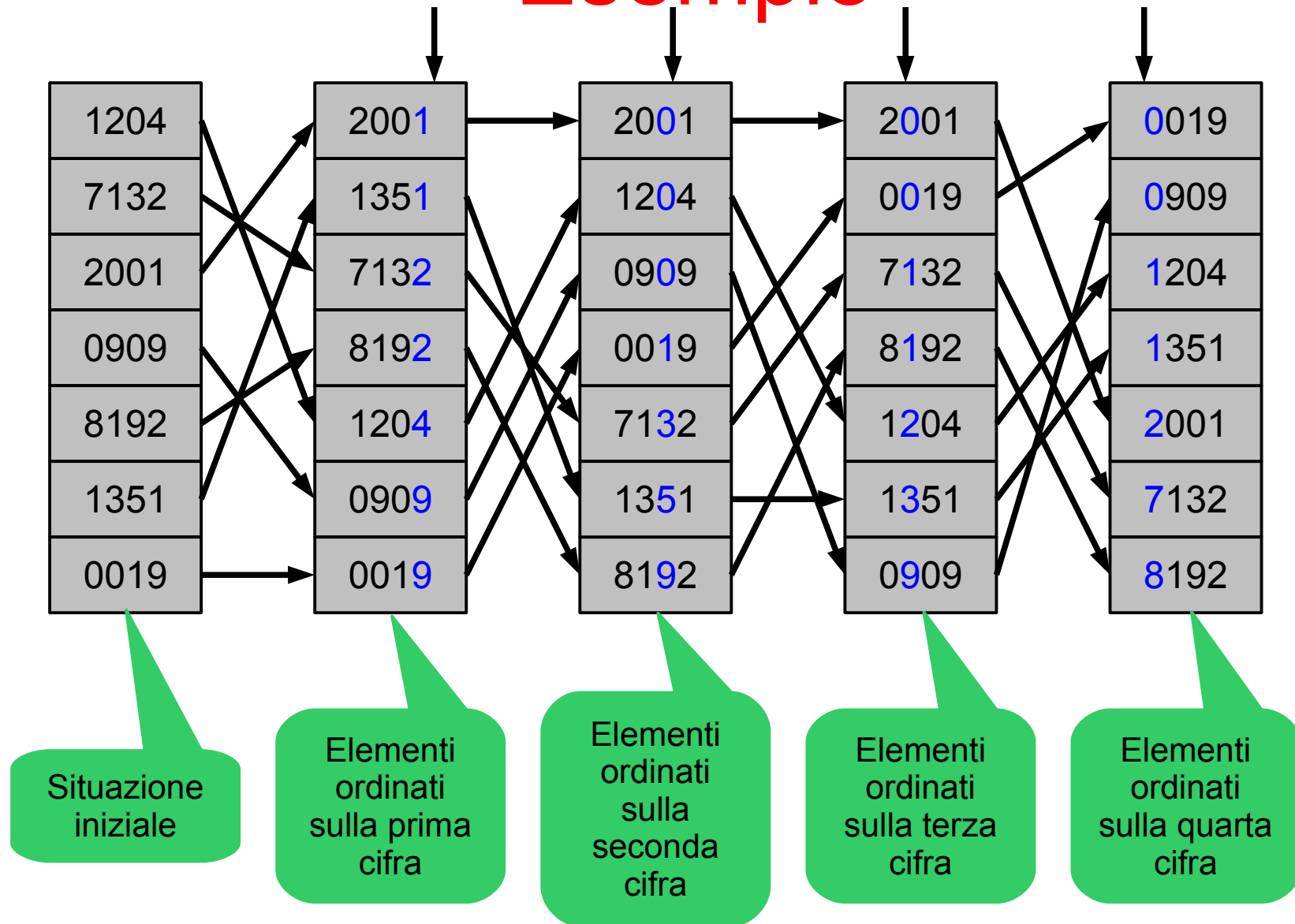


2001	1351	7132	8192	1204	0909	0019
------	------	------	------	------	------	------



Array ordinato in base alla prima cifra a destra (unità)

Esempio



Radix Sort

- Assume che gli elementi dell'array A abbiano tutti valore nell'intervallo $[0, k-1]$
- L'ordinamento avviene applicando l'algoritmo Bucket Sort sulle cifre che compongono la rappresentazione in base b degli elementi di A

```
public static void radixSort(int[] A, int k, int b) {  
    int t = 0;  
    while (t <= Math.ceil(Math.log(k) / Math.log(b))) {  
        sortByDigit(A, b, t);  
        t++;  
    }  
}
```

Ordinamento (stabile)
rispetto alla cifra t ($t=0$ è
quella meno significativa)

Numero di cifre in base
 b che compongono
l'intero k

sortByDigit(A, b, t)

- Una versione specializzata di Bucket Sort per ordinare numeri interi in base alla t-esima cifra (da sinistra) in base b

```
public static void sortByDigit(int[] A, int b, int t) {  
    List[] Y = new List[b];  
    int temp, c, j;  
    for (int i = 0; i < b; i++) Y[i] = new LinkedList();  
    for (int i = 0; i < A.length; i++) {  
        temp = A[i] % ((int) (Math.pow(b, t + 1)));  
        c = (int) Math.floor(temp / (Math.pow(b, t)));  
        Y[c].add(new Integer(A[i]));  
    }  
    j=0;  
    for (int i = 0; i < b; i++) {  
        while (Y[i].size() > 0) {  
            A[j] = ((Integer) Y[i].get(0)).intValue();  
            j++;  
        }  
    }  
}
```

Radix Sort

- Teorema
 - Dati n numeri di d cifre, dove ogni cifra può avere b valori distinti, Radix Sort ordina correttamente i numeri in tempo $O(d(n+b))$
- Dimostrazione (correttezza):
 - Per induzione: dopo i chiamate a `sortByDigit`, i numeri sono ordinati in base alle prime i cifre meno significative.
- Dimostrazione (complessità):
 - d chiamate a `sortByDigit`, ogni chiamata ha costo $O(n+b)$

Radix Sort

- Teorema

- Usando come base (numero di cifre) un valore $b = \Theta(n)$, l'algoritmo Radix Sort ordina n numeri interi in $[0, k-1]$ in tempo

$$O\left(n\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right)\right)$$

- **Domanda:** Dimostrare
- Esempio:
 - 1.000.000 di numeri a 32 bit, base $b = 2^{16}$, due passate in tempo lineare sono sufficienti
 - Attenzione: memoria aggiuntiva $O(b+n)$

Ordinamento—Riassunto

Algoritmo	Stabile?	In loco?	Caso Ottimo	Caso Pessimo	Caso Medio
Selection Sort	No	Si	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Insertion Sort	Si	Si	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Bubble Sort	Si	Si	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Quicksort	No	Si	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$
Merge Sort	Si	No	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Heapsort	No	Si	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
Counting Sort	N.A.	No	$O(n+k)$	$O(n+k)$	$O(n+k)$
Bucket Sort	Si	No	$O(n+k)$	$O(n+k)$	$O(n+k)$
Radix Sort	Si	No	$O(d(n+b))$	$O(d(n+b))$	$O(d(n+b))$

- N.A. = non si applica

Ordinamento—Riassunto

- **Insertion Sort / Selection Sort**
 - $\Theta(n^2)$, stabile (solo insertion), in loco, iterativo.
- **Merge Sort**
 - $\Theta(n \log n)$, stabile, richiede $O(n)$ spazio aggiuntivo, ricorsivo (richiede $O(\log n)$ spazio nello stack).
- **Heap Sort**
 - $O(n \log n)$, non stabile, sul posto, iterativo.
- **Quick Sort**
 - $\Theta(n \log n)$ in media, $\Theta(n^2)$ nel caso peggiore, non stabile, ricorsivo (richiede $O(\log n)$ spazio nello stack).

Ordinamento—Riassunto

- **Counting Sort**
 - $O(n+k)$, richiede $O(k)$ memoria aggiuntiva, iterativo. Conveniente quando $k=O(n)$
- **Bucket Sort**
 - $O(n+k)$, stabile, richiede $O(n+k)$ memoria aggiuntiva, iterativo. Conveniente quando $k=O(n)$
- **Radix Sort**
 - $O(d(n+b))$, richiede $O(n+b)$ memoria aggiuntiva. Conveniente quando $b=O(n)$.

Ordinamento—Conclusioni

- Divide-et-impera
 - Merge Sort: “divide” semplice, “combina” complesso
 - Quick Sort: “divide” complesso, “combina” nullo
- Utilizzo di strutture dati efficienti
 - Heap Sort basato su Heap
- Randomizzazione
 - La tecnica di randomizzazione ci permette di “evitare” il caso pessimo
- Dipendenza dal modello
 - Cambiando l'insieme di assunzioni, è possibile ottenere algoritmi più efficienti