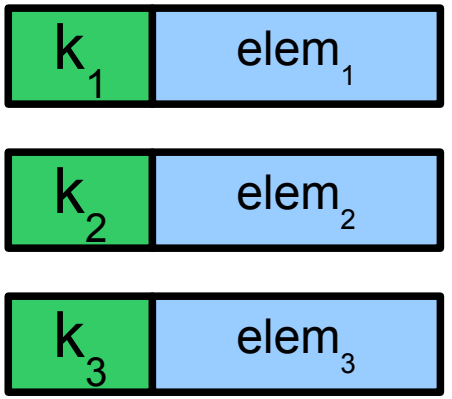
Code con priorità

Gianluigi Zavattaro
Dip. di Informatica – Scienza e Ingegneria
Università di Bologna
gianluigi.zavattaro@unibo.it

Slide realizzate a partire da materiale fornito dal Prof. Moreno Marzolla

Coda con priorità

- Struttura dati che mantiene il minimo (o il massimo) in un insieme dinamico di chiavi su cui è definita una relazione d'ordine totale
- Una coda di priorità è un insieme di *n* elementi di tipo *elem* cui sono associate chiavi

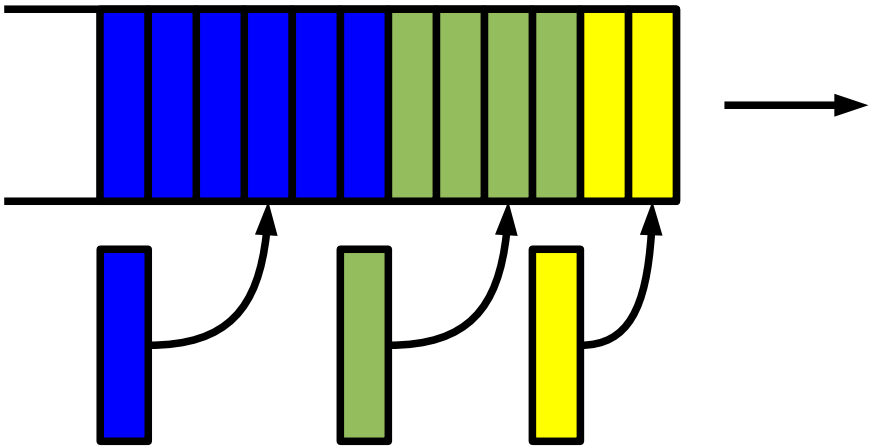


Operazioni

- findMin() → elem
  - Restituisce un elemento associato alla chiave minima
- insert(elem e, chiave k)
  - Inserisce un nuovo elemento *e* con associata la chiave *k*
- delete(elem e)
  - Rimuove un elemento dalla coda (si assume di avere accesso diretto a tale elemento *e*)
- deleteMin()
  - Rimuove un elemento associato alla chiave minima
- increaseKey(elem e, chiave d)
  - Incrementa la chiave dell'elemento *e* della quantità *d* (si assume di avere accesso diretto a tale elemento *e*)
- decreaseKey(elem e, chiave d)
  - Decrementa la chiave dell'elemento *e* della quantità *d* (si assume di avere accesso diretto a tale elemento *e*)

Esempio di applicazione

- Gestione della banda di trasmissione
  - Nel routing di pacchetti in reti di comunicazione è importante processare per primi i pacchetti con priorità più alta (ad esempio, quelli associati ad applicazioni con vincoli di real-time: VoIP, videoconferenza...)
  - I pacchetti in ingresso possono essere mantenuti in una coda di priorità per processare per primi quelli più importanti



Due possibili implementazioni

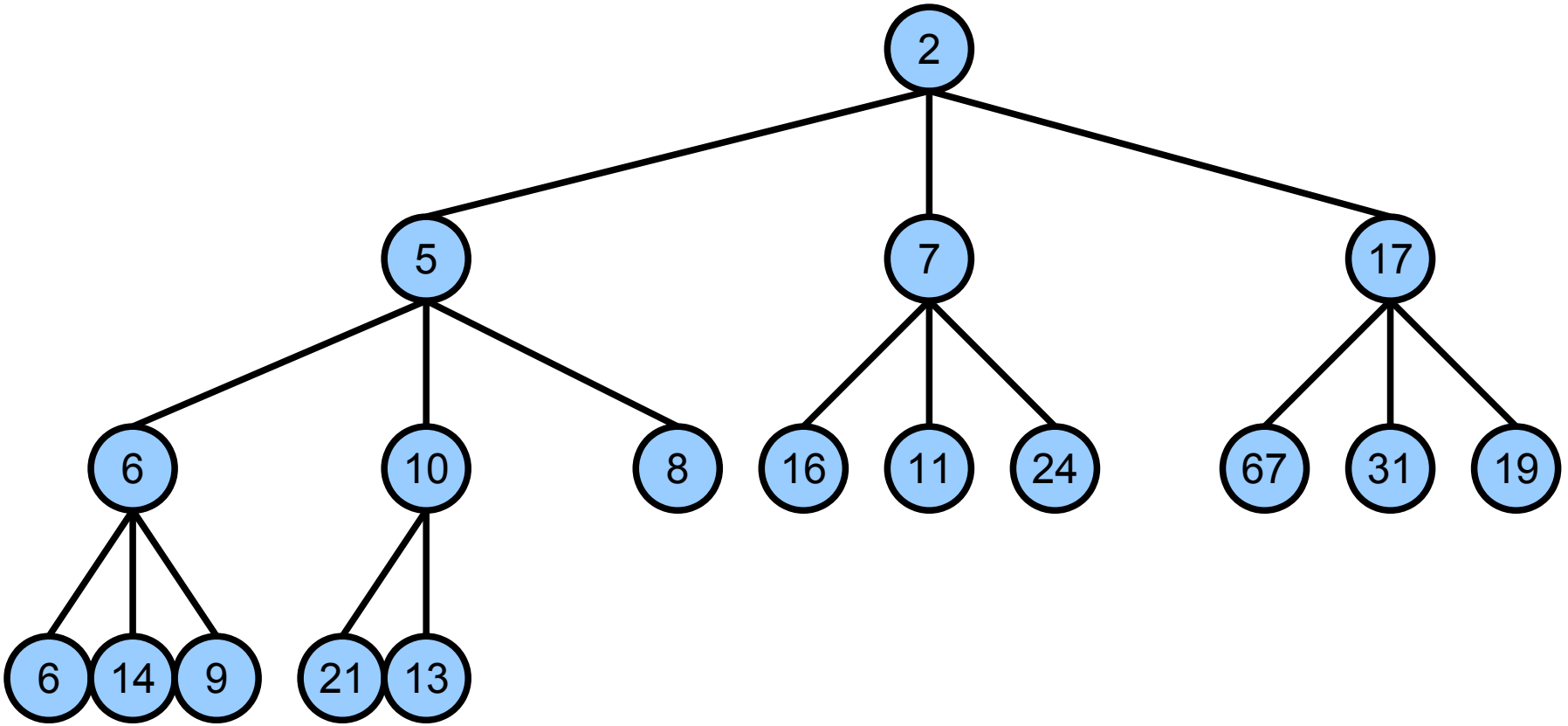
- d-heap
  - Semplice estensione/modifica della struttura dati max-heap già studiati in quanto usata nell'algoritmo heapsort
- Heap binomiali e Heap di Fibonacci
  - Non li tratteremo: potete studiarli come approfondimento

d-heap

d-heap

- Estendono “naturalmente” il concetto di min/max-heap binario già visto
  - Uno heap binario era modellato su un albero binario
  - Un d-heap è modellato su un albero d-ario
- **Definizione**: un d-heap è un albero d-ario con le seguenti proprietà
  - un d-heap di altezza h è perfetto almeno fino alla profondità *h-1*; le foglie al livello *h* sono accatastate a sinistra
  - ciascun nodo *v* contiene una chiave *chiave(v)* e un elemento *elem(v)*. Le chiavi appartengono ad un dominio totalmente ordinato
  - ogni nodo diverso dalla radice ha chiave non inferiore (≥) a quella del padre

Esempio
d-heap con d=3



Altezza di un d-heap

- Un d-heap con n nodi ha altezza $O(\log_d n)$
  - Sia h l'altezza di un d-heap con n nodi
  - Il d-heap è completo fino al livello h-1
  - Un albero d-ario completo di altezza h-1 ha

$$\sum_{i=0}^{h-1} d^i = \frac{d^h - 1}{d-1}$$

    nodi
  - Quindi $\frac{d^h - 1}{d-1} < n$

$$d^h < n(d-1)+1$$

$$h < \log_d \left(n(d-1)+1 \right) = O(\log_d n)$$

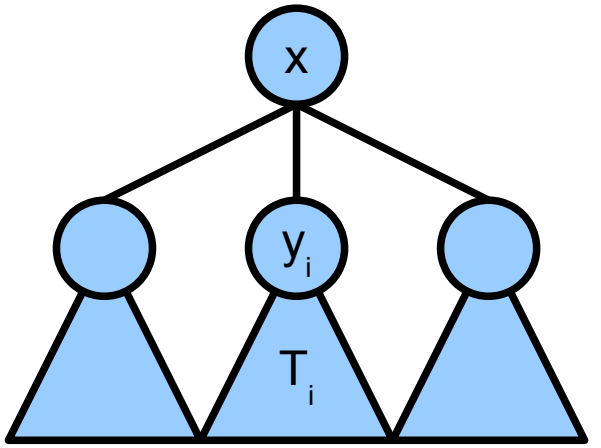
Memorizzazione d-heap in array

(come per binary-heap, iniziamo da cella 1)

- Il livello *h* inizia da $1+\sum_{k=0}^{h-1} d^k = 1+\frac{d^h-1}{d-1}$
- Il livello *h* termina in $d^h+\sum_{k=0}^{h-1} d^k = d^h+\frac{d^h-1}{d-1}$
- L'ultimo figlio di un nodo in posizione *i* è in *(i * d)+1*, il primo figlio è in *((i-1) * d)+2*, il padre è in $\lceil (i-1)/d \rceil$

Proprietà fondamentale dei d-heap

- La radice contiene un elemento con chiave minima
- Dimostrazione: per induzione sul numero di nodi
  - Per n=0 (heap vuoto) oppure n=1 la proprietà vale
  - Supponiamo sia valida per ogni d-heap con al più n-1 nodi
  - Consideriamo un d-heap con n nodi. I sottoalberi radicati nei figli della radice sono a loro volta d-heap, con al più n-1 nodi
  - La radice di T_i contiene il minimo di T_i
  - La chiave radice x è ≤ della chiave in ciascun figlio
  - Quindi la chiave in x è il minimo dell'intero heap



Operazioni ausiliarie

```
procedura muoviAlto(v)
    while( v != root(T) and
           chiave(v)<chiave(padre(v)) ) do
        scambia di posto v e padre(v) in T;
        v := padre(v);
    endwhile
```

Costo: O(h)

```
procedura muoviBasso(v)
    repeat forever
        if ( v non ha figli ) then
            return;
        else
            sia u il figlio di v con la minima chiave(u)
            if ( chiave(u) < chiave(v) ) then
                scambia di posto u e v;
                v := u;
            else
                return;
            endif
        endif
```

Costo: O(dh)

Costo: O(d)

findMin() → elem

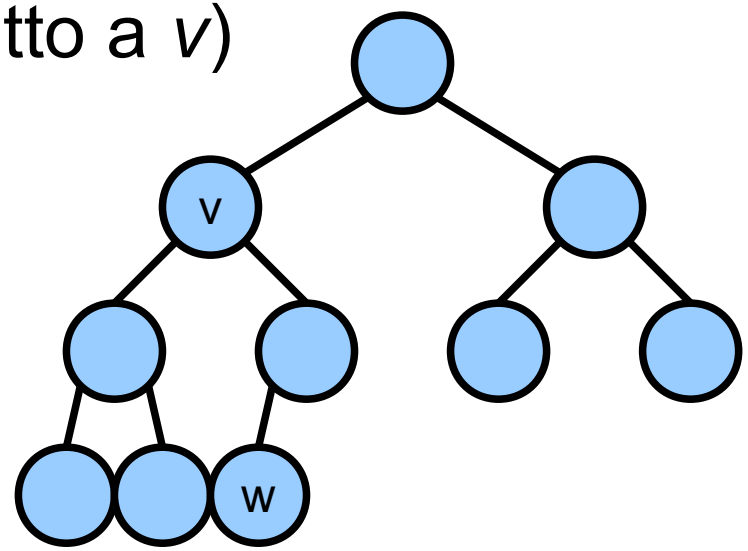
- Restituisce l'elemento associato alla radice dello heap
  - In base alla proprietà fondamentale dei d-heap, la radice è un elemento che ha chiave minima
- Costo complessivo: O(1)

insert(elem e, chiave k)

- Crea un nuovo nodo v con chiave *k* e valore *e*
- Aggiungi il nodo come ultima foglia a destra dell'ultimo livello
  - La proprietà di struttura è soddisfatta
- Per mantenere la proprietà di ordine, esegui muoviAlto(v) (che costa $O(\log_d n)$ nel caso peggiore)
- Costo complessivo: $O(\log_d n)$

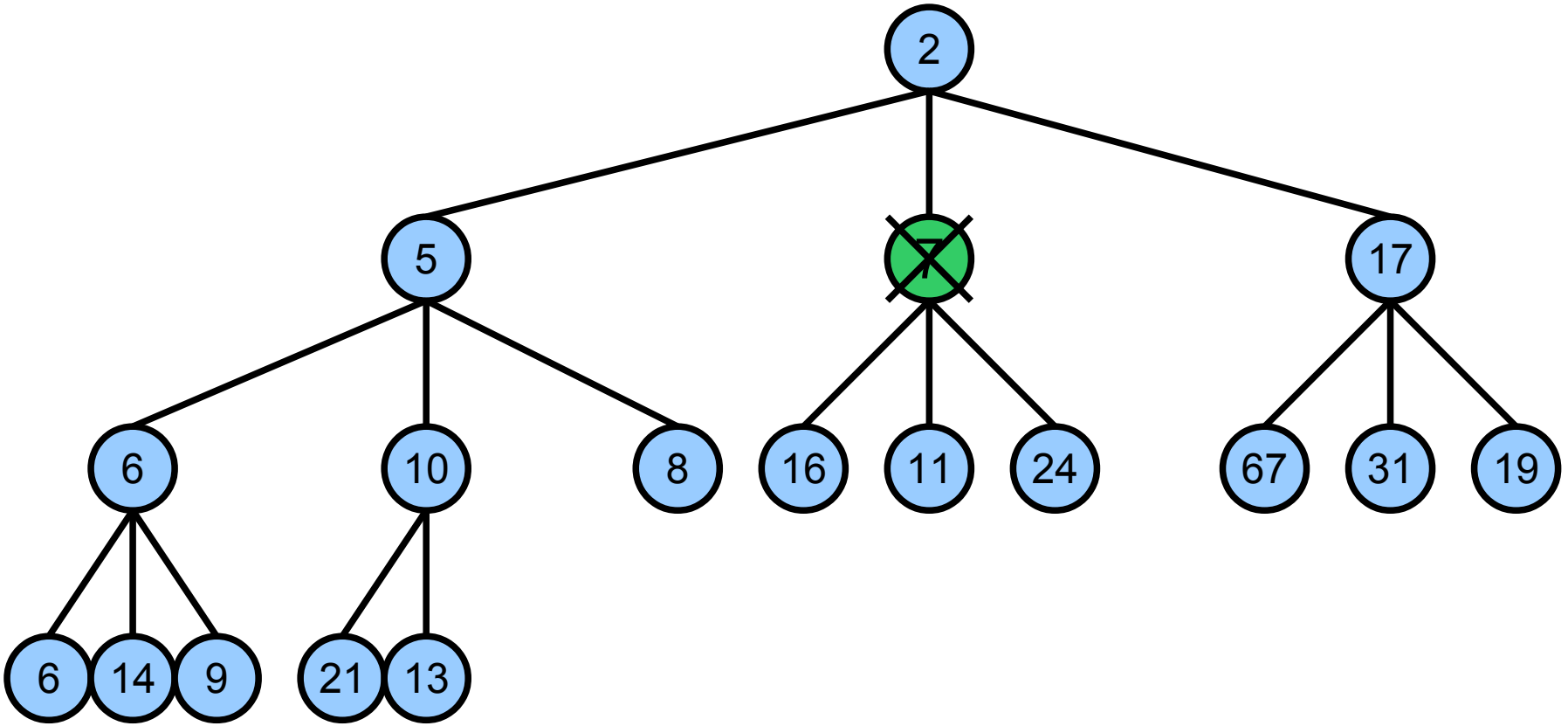
delete(elem e)
(e deleteMin())

- Sia *v* il nodo che contiene l'elem. *e* con chiave *k* (assumiamo di avere accesso diretto a *v*)
- Sia *w* l'ultima foglia a destra
  - Setta elem(v) := elem(w);
  - Setta chiave(v) := chiave(w);
  - Stacca e cancella w dallo heap
- Esegui muoviAlto(v)
  - costo $O(\log_d n)$
- Esegui muoviBasso(v)
  - costo $O(d \log_d n)$
- Costo complessivo: $O(d \log_d n)$

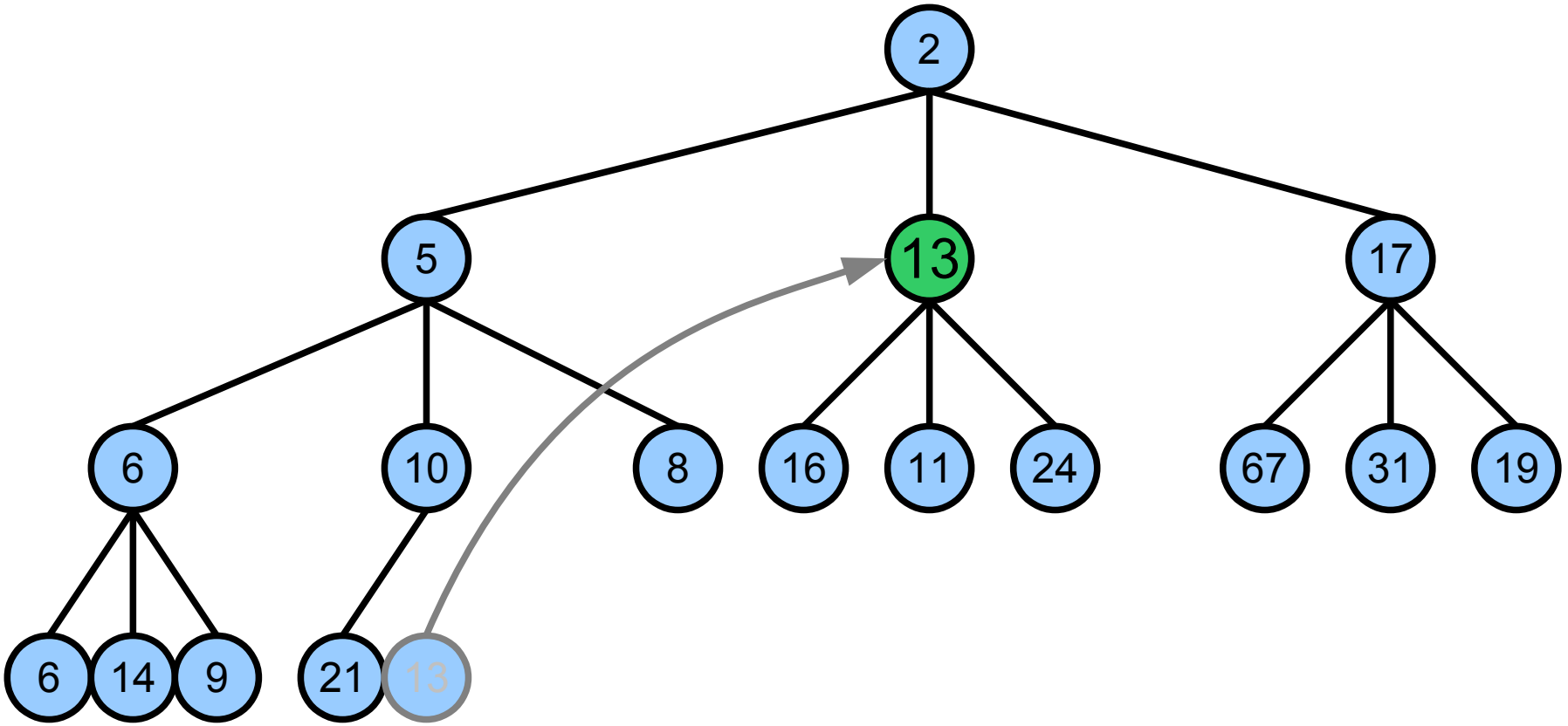


Nota: una sola tra queste operazioni viene eseguita: l'altra termina immediatamente

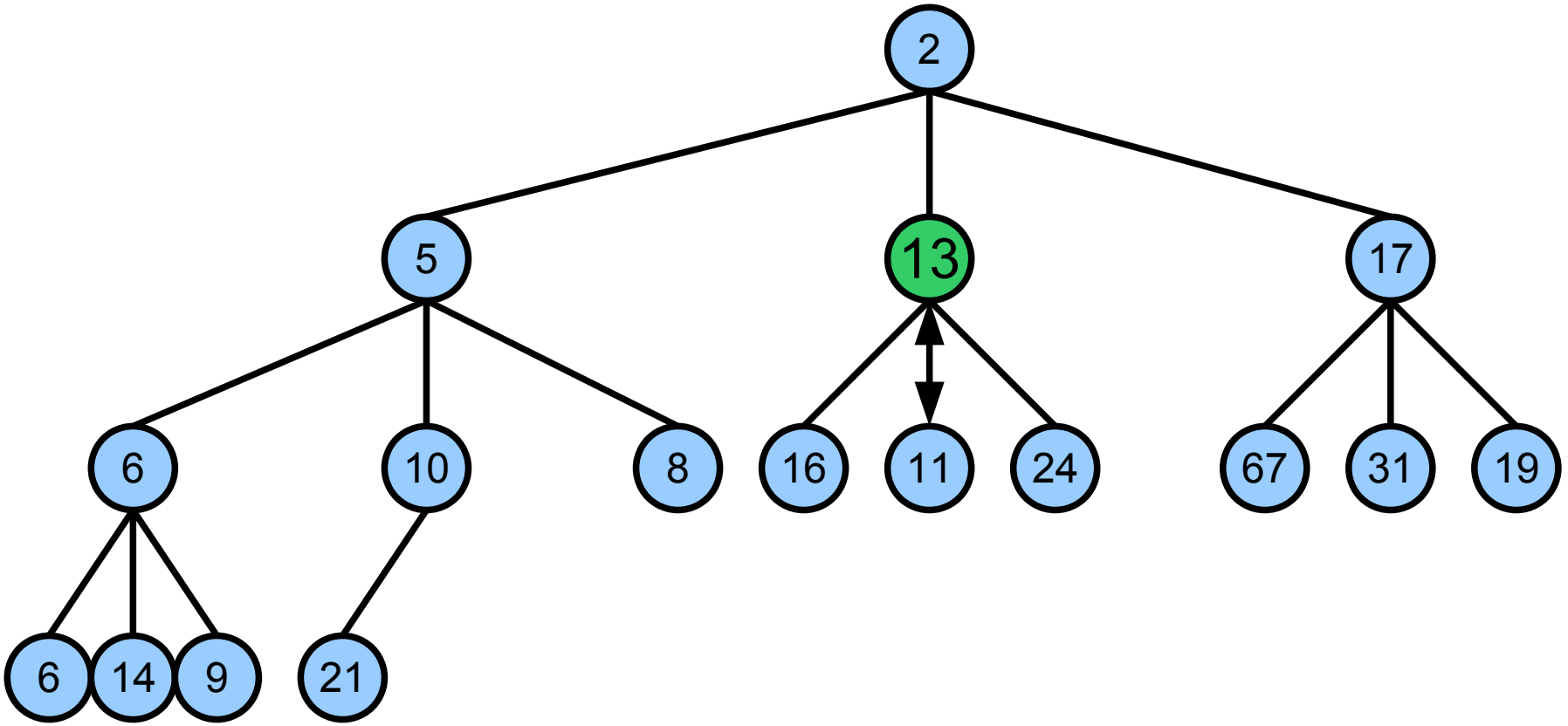
Esempio / 1



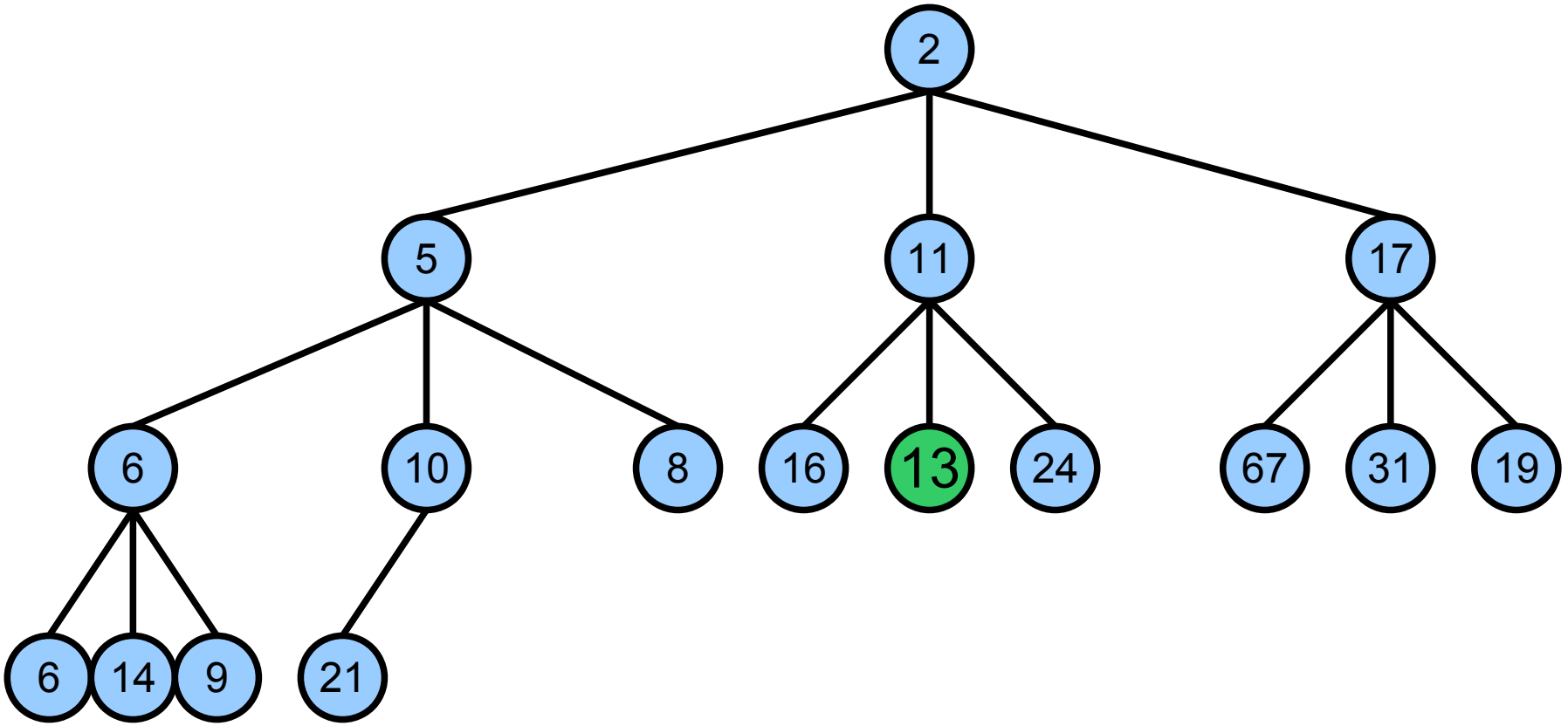
Esempio / 2



Esempio / 3



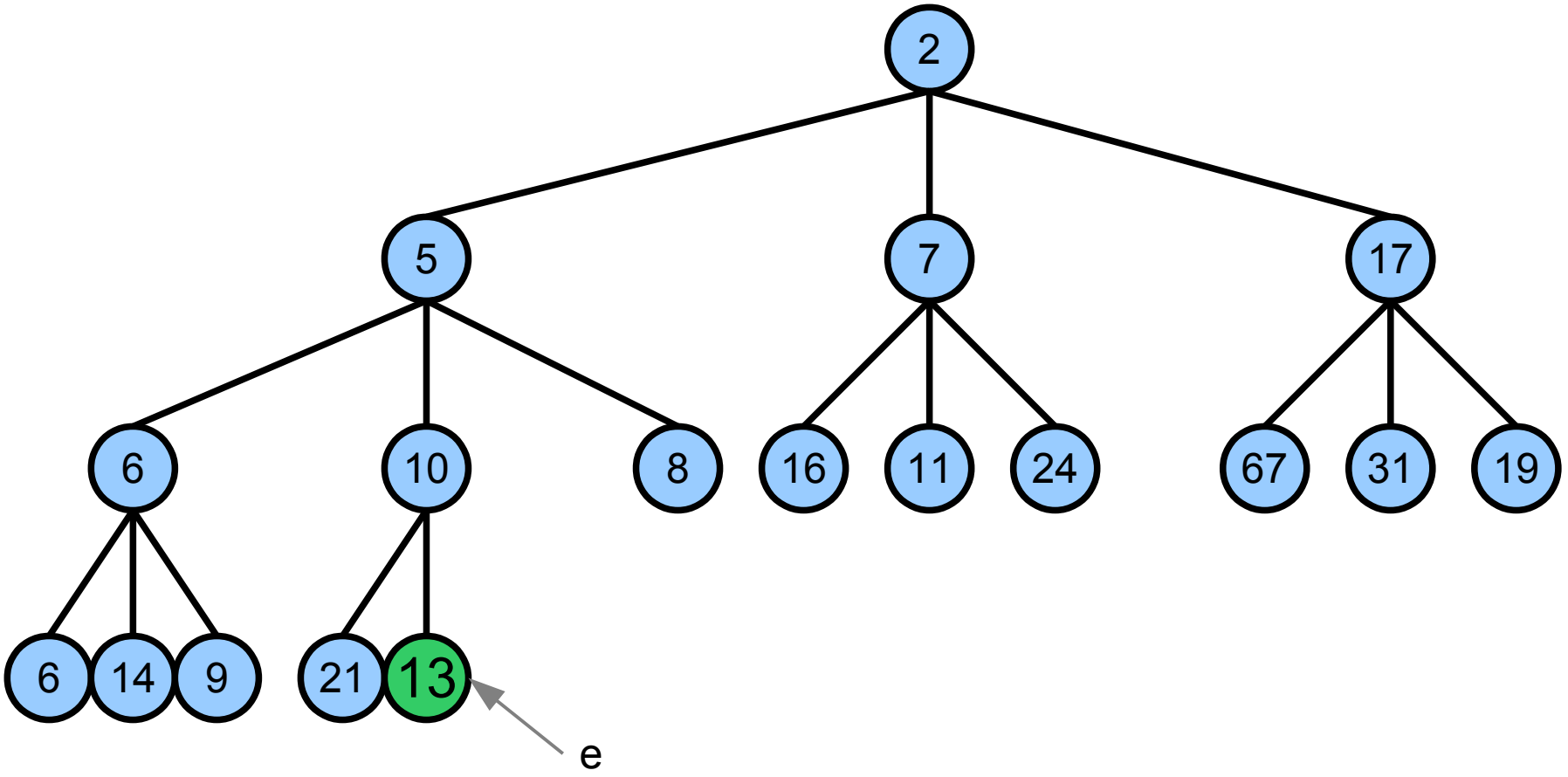
Esempio / 4



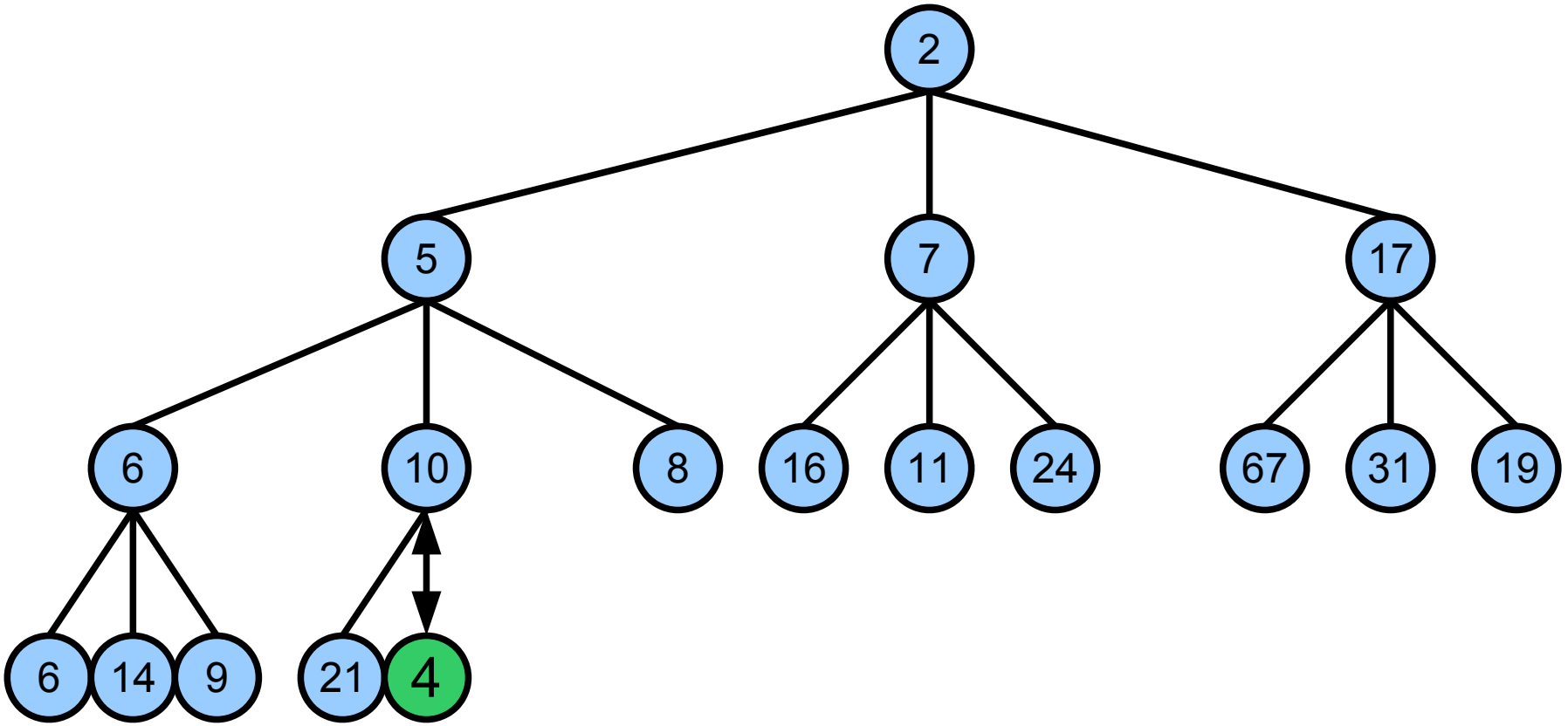
decreaseKey(elem e, chiave d)

- Sia *v* il nodo contenente *e*
  (assumiamo di avere accesso diretto a *v*)
- Setta chiave(v) := chiave(v) – d;
- Esegui muoviAlto(v)
  - Costo: $O(\log_d n)$
- Costo complessivo: $O(\log_d n)$

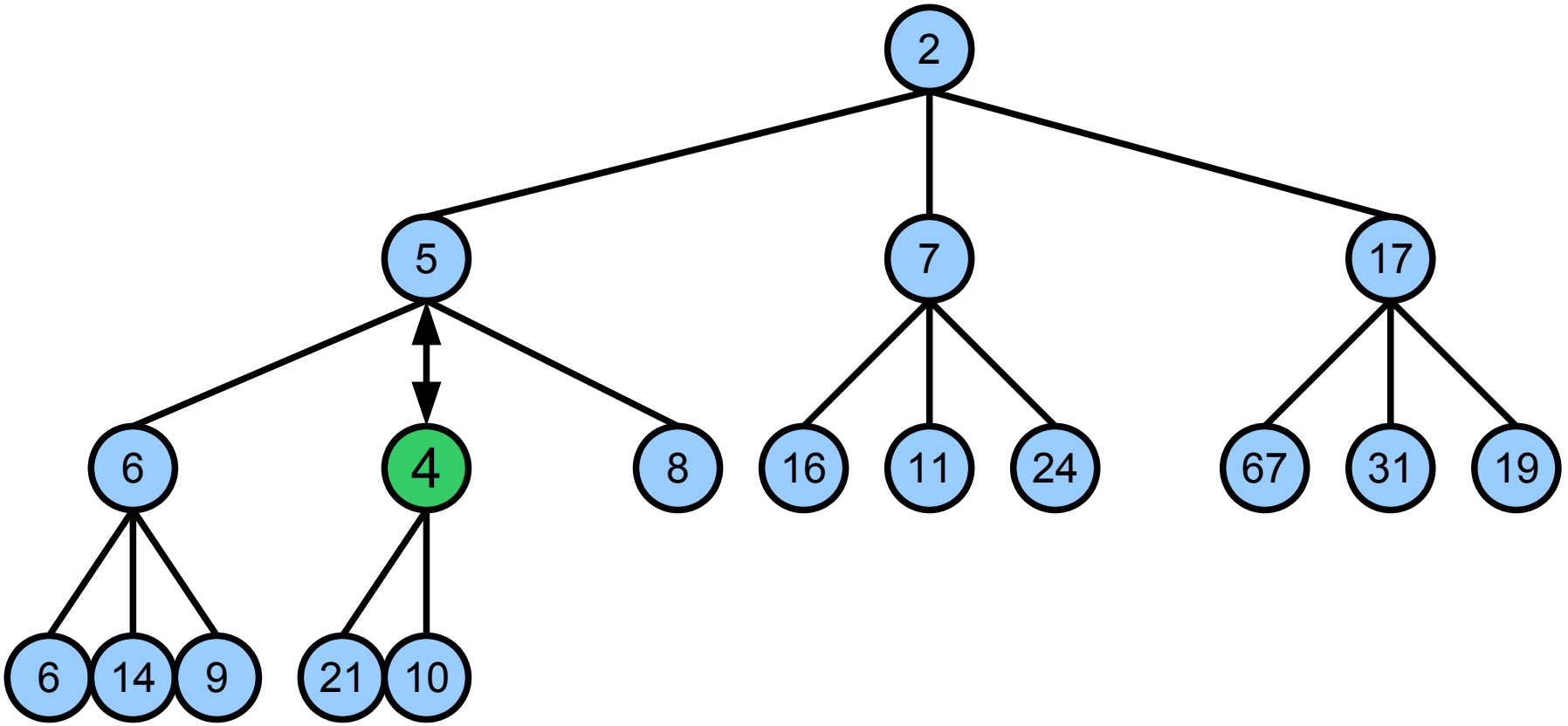
Esempio: decreaseKey(e, 9)



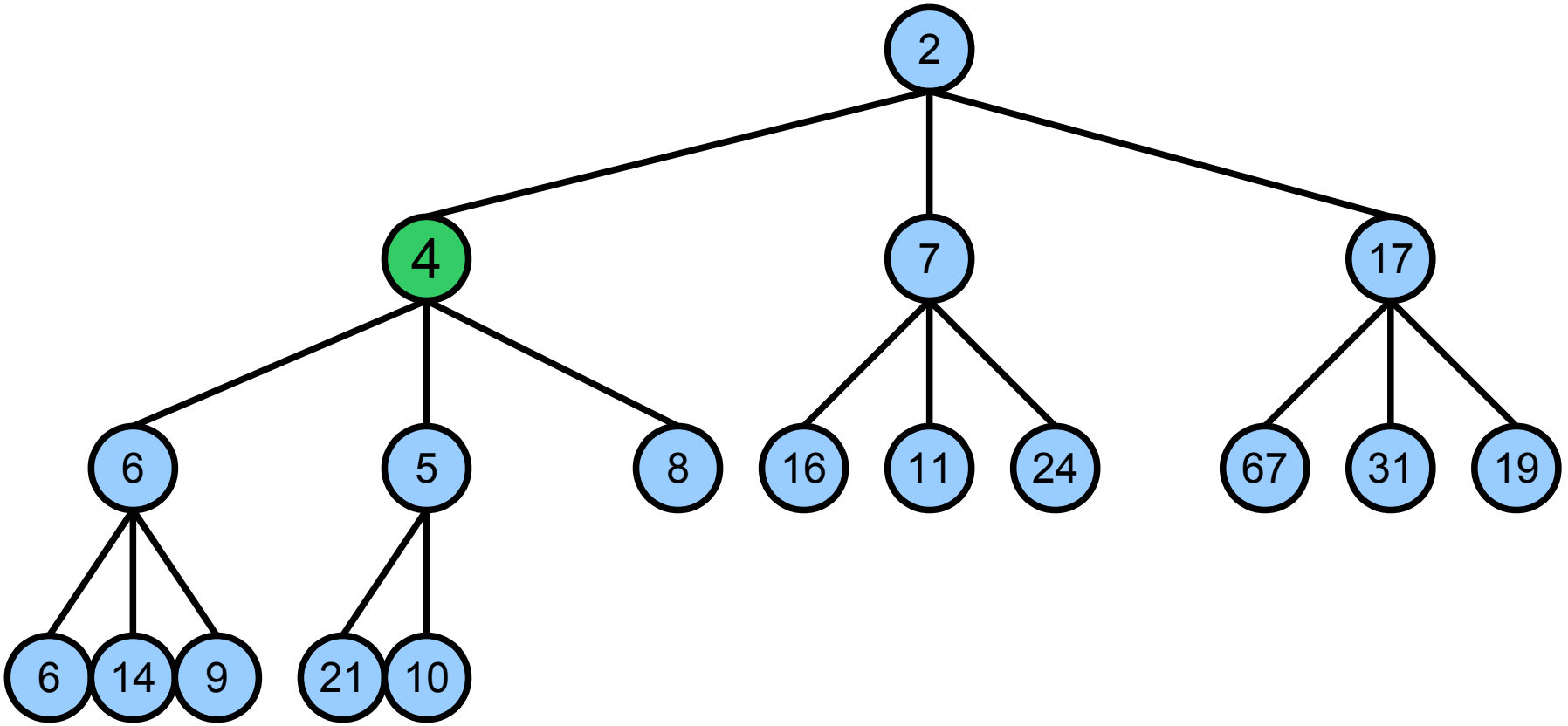
Esempio / 2



Esempio / 3



Esempio / 4



increaseKey(elem e, chiave d)

- Sia *v* il nodo contenente *e*
  (assumiamo di avere accesso diretto a *v*)
- Setta chiave(v) := chiave(v) + d;
- Esegui muoviBasso(v)
  - Costo: $O(d \log_d n)$
- Costo complessivo: $O(d \log_d n)$

Riepilogo costi per d-heap

- findMin() → elem — $O(1)$
- insert(elem e, chiave k) — $O(\log_d n)$
- delete(elem e) — $O(d \log_d n)$
- deleteMin() — $O(d \log_d n)$
- increaseKey(elem e, chiave d) — $O(d \log_d n)$
- decreaseKey(elem e, chiave d) — $O(\log_d n)$