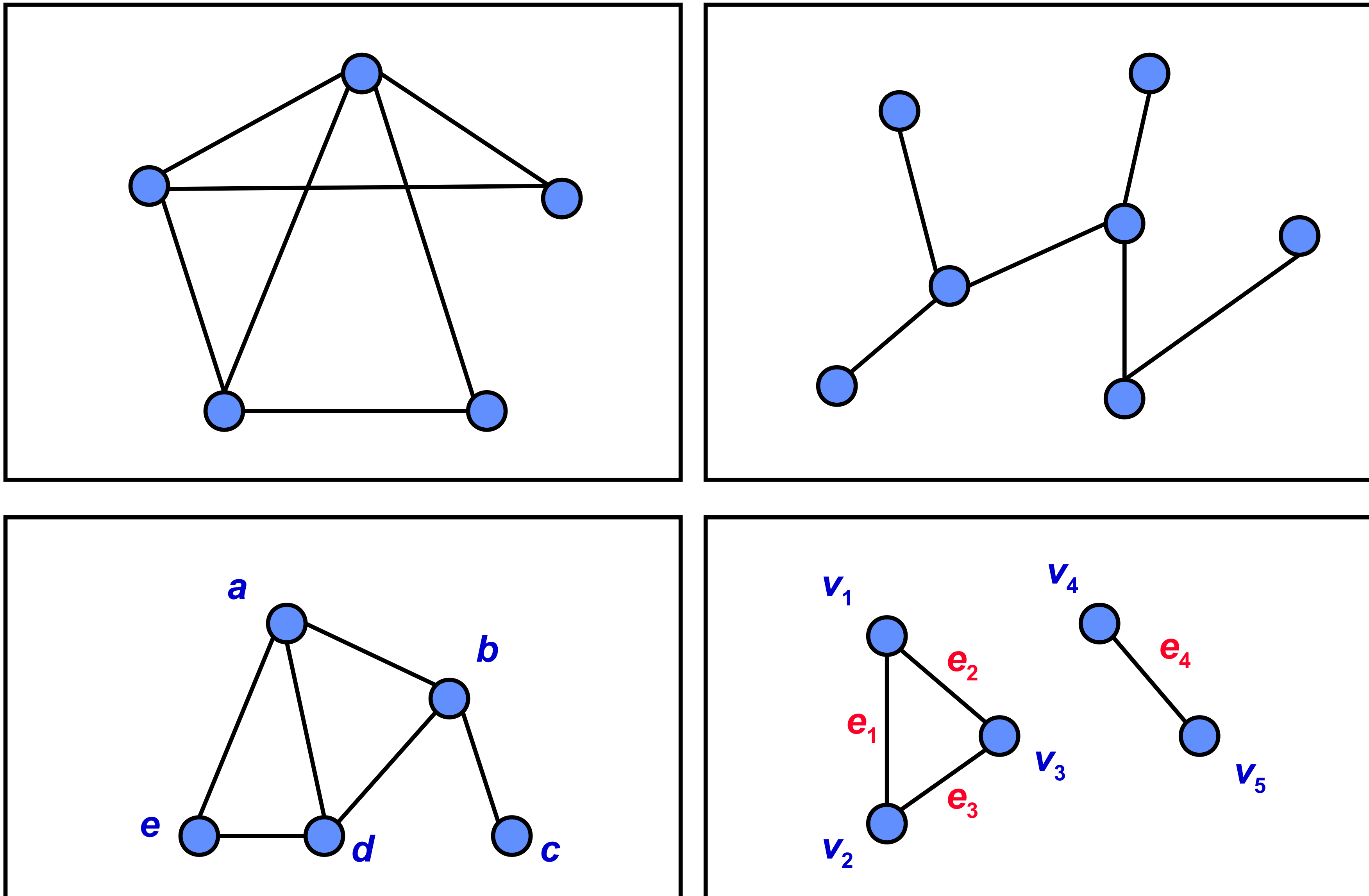
Grafi

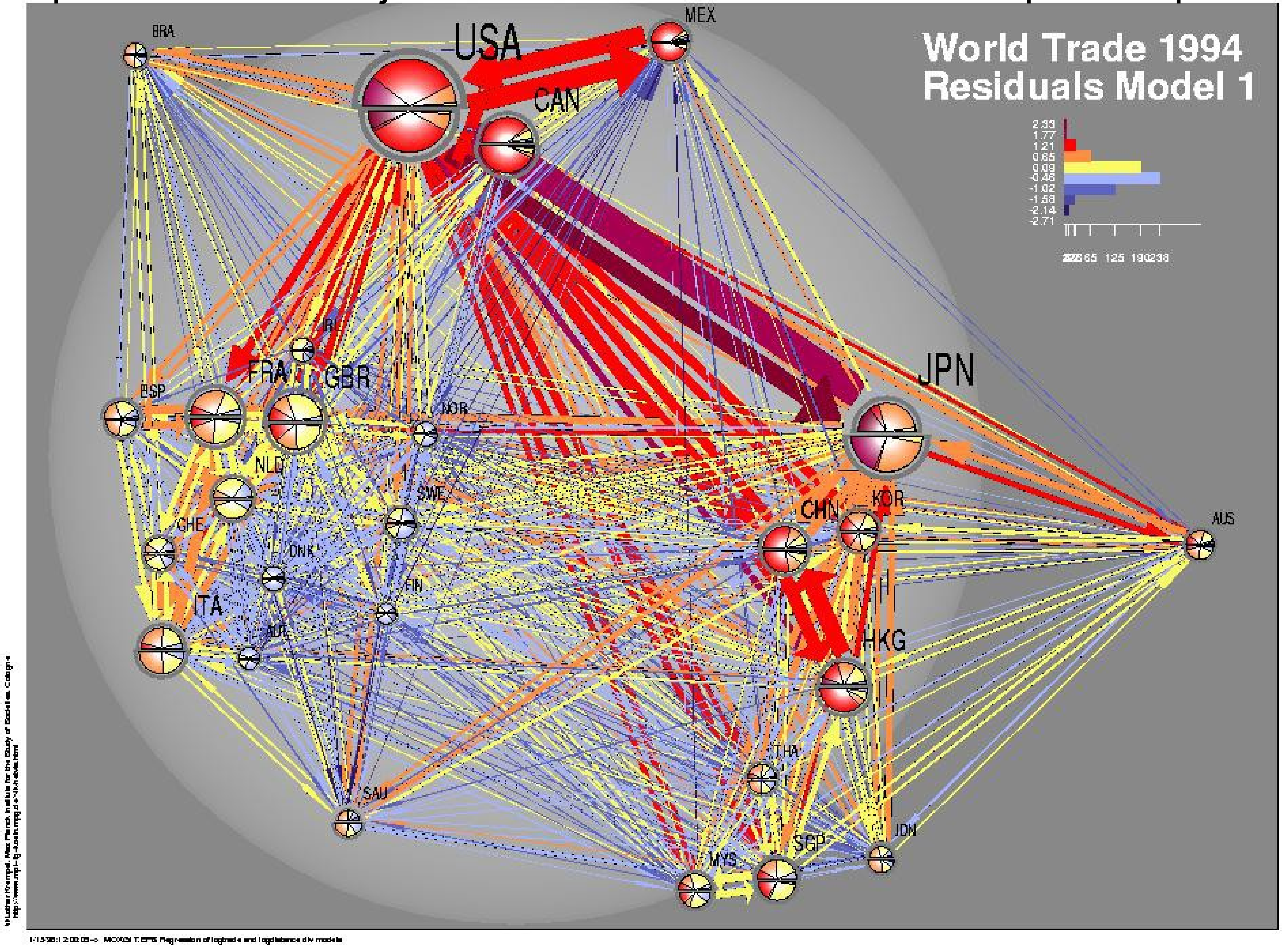
Gianluigi Zavattaro
Dip. di Informatica – Scienza e Ingegneria
Università di Bologna
gianluigi.zavattaro@unibo.it

Esempi di grafi

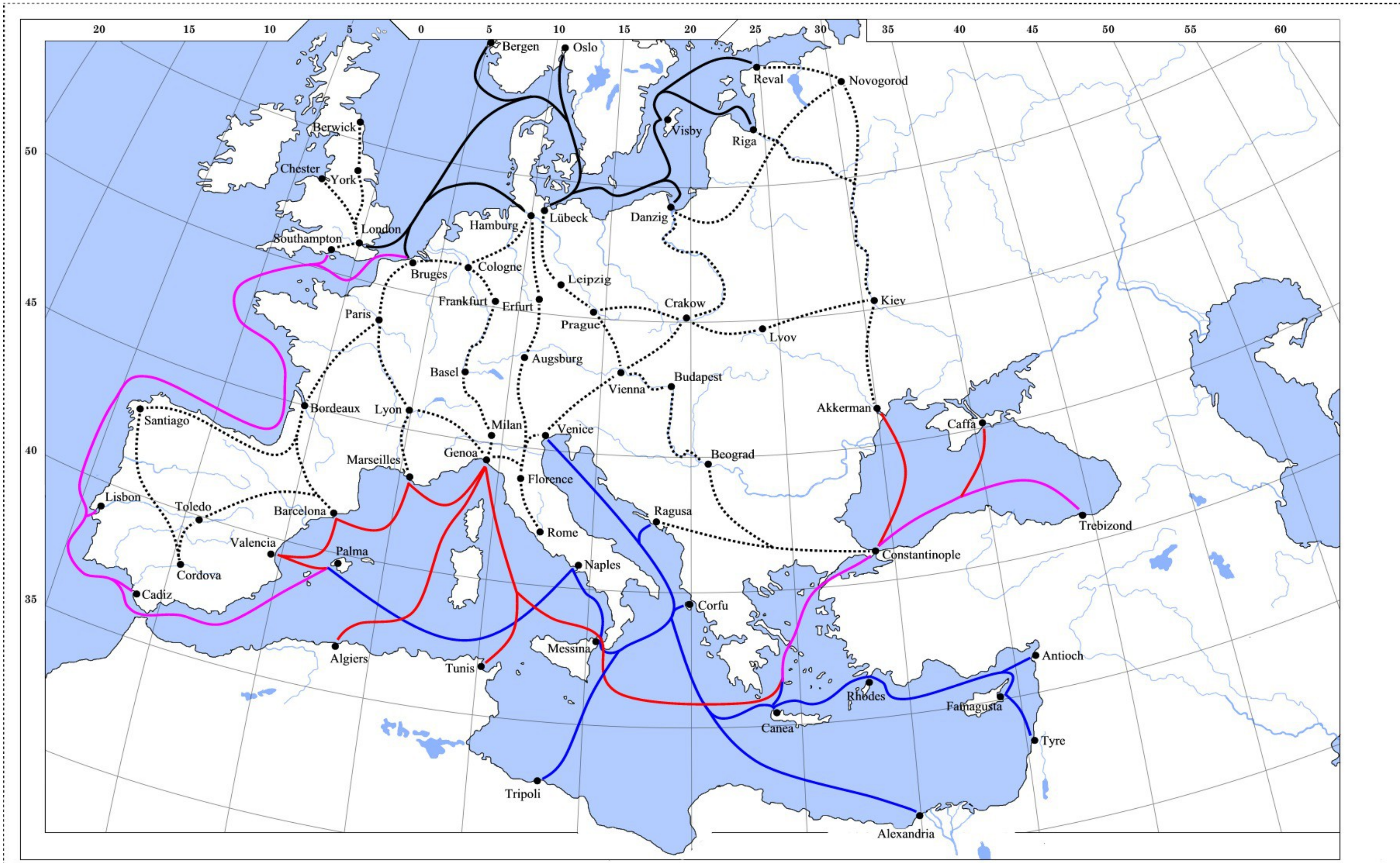


Esempi di grafi
Import/Export

http://www.cmu.edu/joss/content/articles/volume4/KrempelPlumper.html



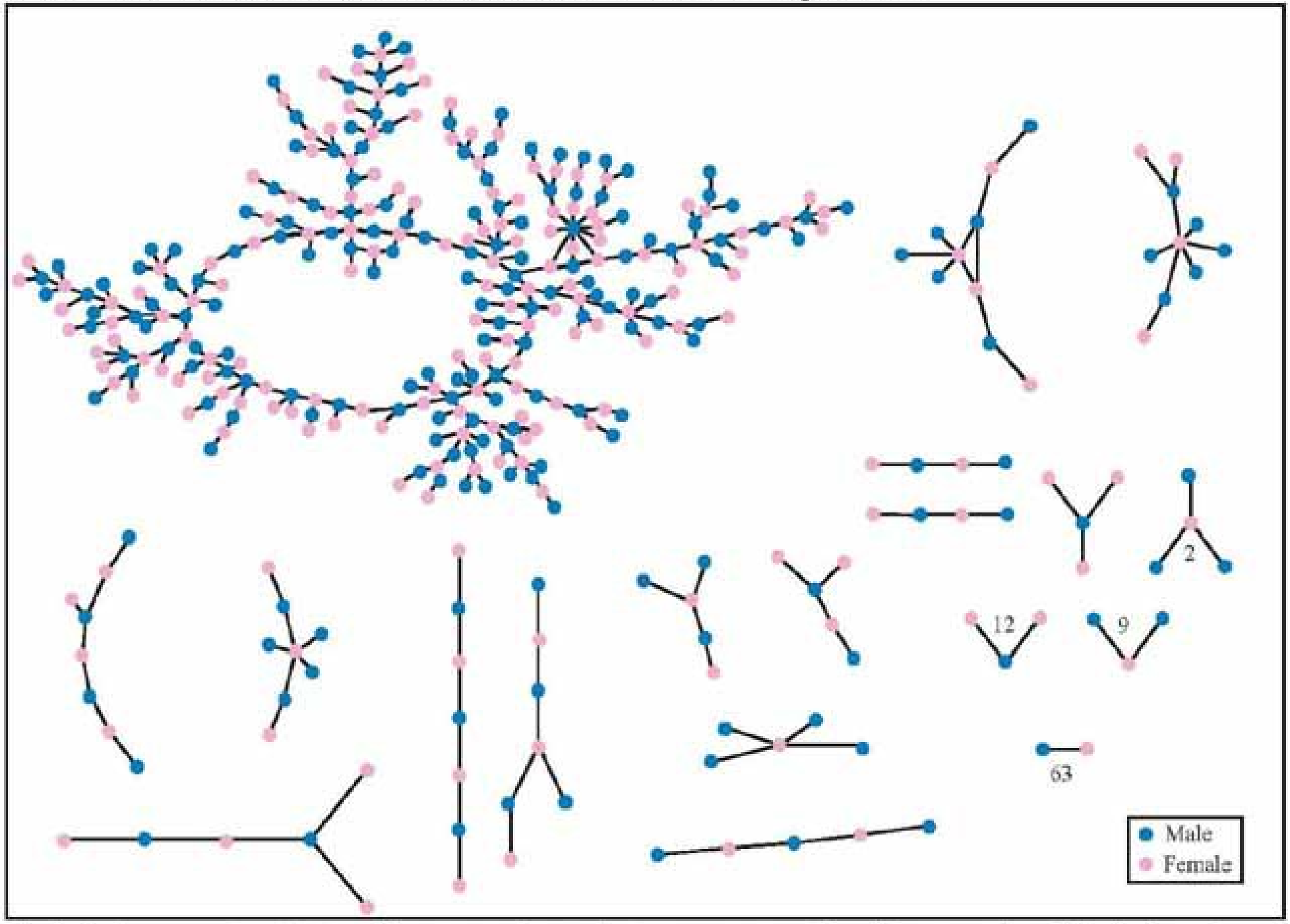
Esempi di grafi
Rotte commerciali medievali



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Late_Medieval_Trade_Routes.jpg

Esempi di grafi
Relazioni romantiche

The Structure of Romantic and Sexual Relations at "Jefferson High School"



Each circle represents a student and lines connecting students represent romantic relations occuring within the 6 months preceding the interview. Numbers under the figure count the number of times that pattern was observed (i.e. we found 63 pairs unconnected to anyone else).

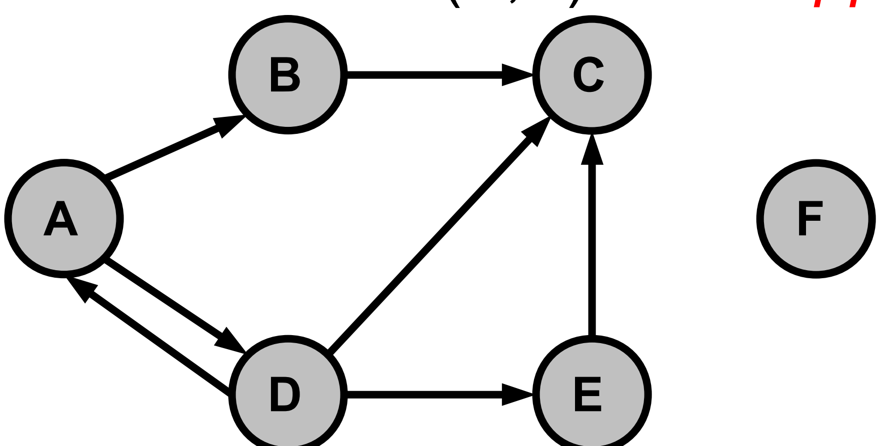
From the American Journal of Sociology, Vol. 100, No. 1. *"Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks,"* Bearman PS, Moody J, Stovel K. http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/386272

Problemi sui grafi

- Visite
  - Visite in ampiezza (cammini di lunghezza minima da singola sorgente)
  - Visite in profondità (ordinamento topologico, componenti fortemente connesse)
- Alberi di copertura minimi
- Cammini minimi
  - Da singola sorgente
  - Fra tutte le coppie di vertici

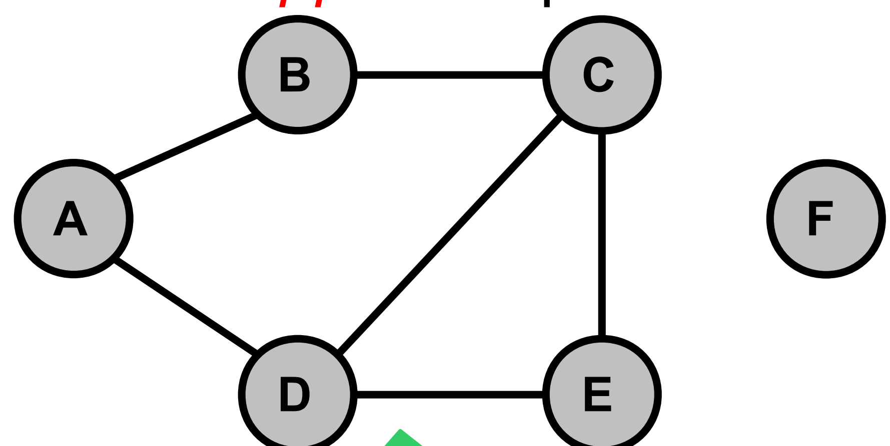
Grafi orientati e non orientati: definizione

- Un grafo orientato G è una coppia (V, E) dove:
  - Insieme finito dei *vertici V*
  - *Insieme degli archi E:* relazione binaria tra vertici
  - Un arco (X,X) è un *cappio*



V = {A, B, C, D, E, F}
E = { (A,B), (A,D), (B,C), (D,C), (E,C), (D,E), (D,A) }

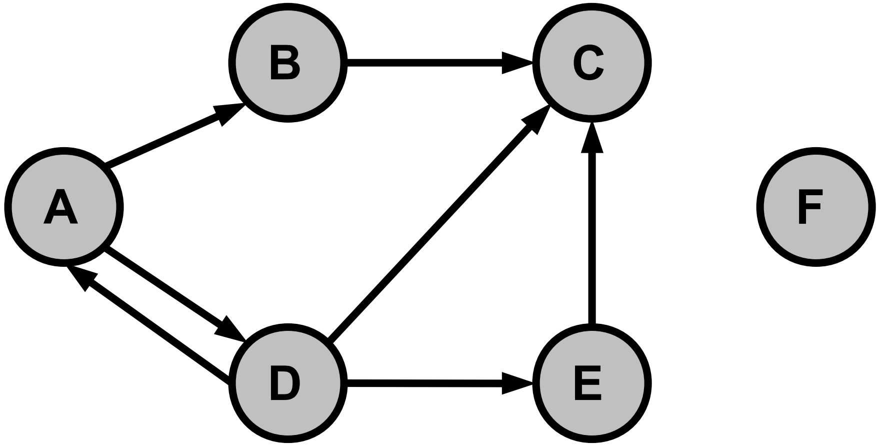
- Un grafo non orientato G è una coppia (V, E) dove:
  - Insieme finito dei *vertici V*
  - *Insieme degli archi E:* coppie non ordinate
  - I *cappi* sono proibiti



V = {A, B, C, D, E, F}
E = { {A,B}, {A,D}, {B,C}, {C,D}, {C,E}, {D,E} }

Definizioni: incidenza e adiacenza

- In un grafo orientato l'arco *(v,w)* è *incidente* da *v* in *w*
- Un vertice *w* è *adiacente* a *v* se e solo se **(v, w)** $\in$ **E**
- In un grafo non orientato la relazione di adiacenza tra vertici è simmetrica



(A, B) è incidente da A a B
(A, D) è incidente da A a D
(D, A) è incidente da D a A

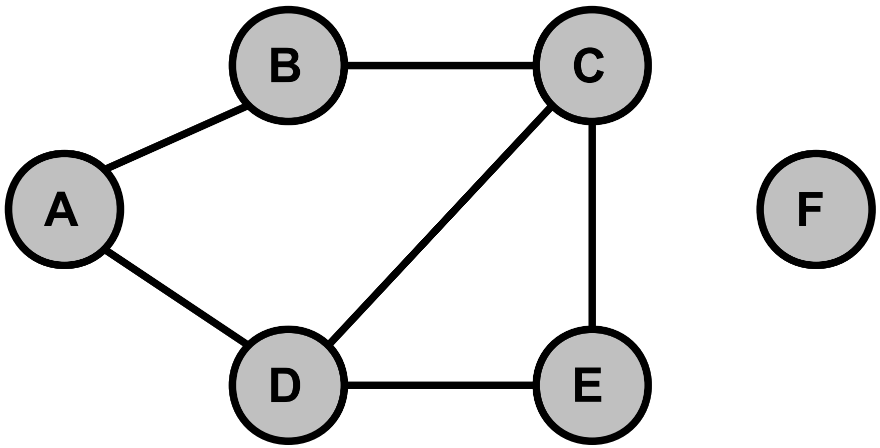
B è adiacente ad A
C è adiacente a B, D, E
A è adiacente a D e viceversa
B non è adiacente a D, C
F non è adiacente ad alcun vertice

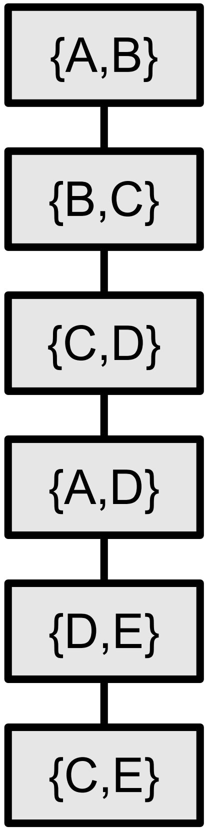
Rappresentazione di grafi

- Operazioni che la struttura dati deve supportare
  - NumVertici() → intero
  - NumArchi() → intero
  - grado(vertice v) → intero
  - archiIncidenti(vertice v) → (arco, arco, ... arco)
  - estremi(arco e) → (vertice, vertice)
  - opposto(vertice x, arco e) → vertice
  - sonoAdiacenti(vertice x, vertice y) → booleano
  - aggiungiVertice(vertice v)
  - aggiungiArco(vertice x, vertice y)
  - rimuoviVertice(vertice v)
  - rimuoviArco(arco e)

Liste di archi (grafo non orientato)

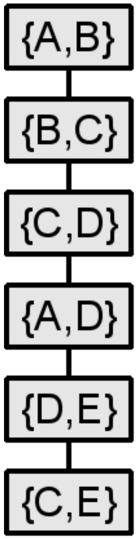
Spazio: Θ(|E|)



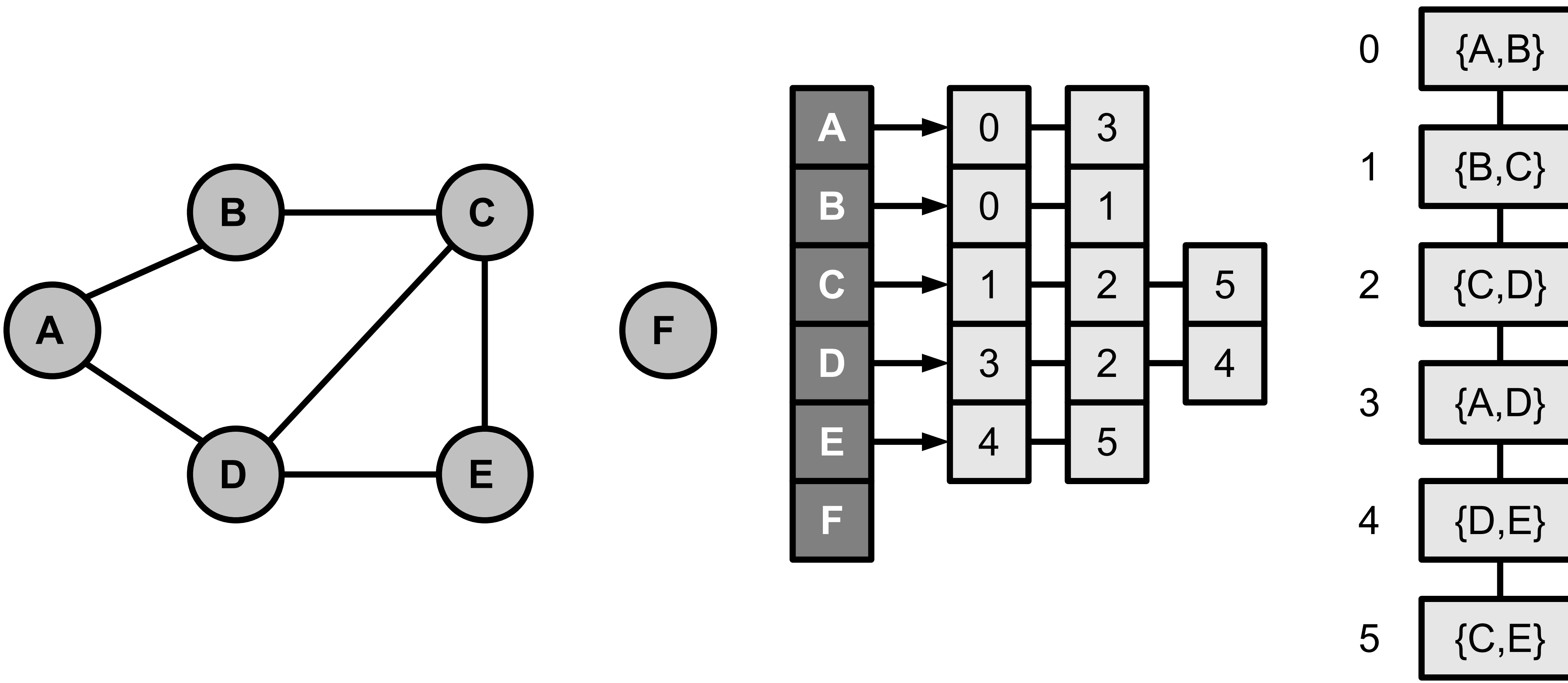


Costi
Liste di archi

- grado(vertice v)→intero O(m)
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) O(m)
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano O(m)
- aggiungiVertice(vertice v) O(1)
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) O(1)
- rimuoviVertice(vertice v) O(m)
- rimuoviArco(arco e) O(1)
- Nota: molte operazioni sono inefficienti perché richiedono la scansione dell'intera lista di archi

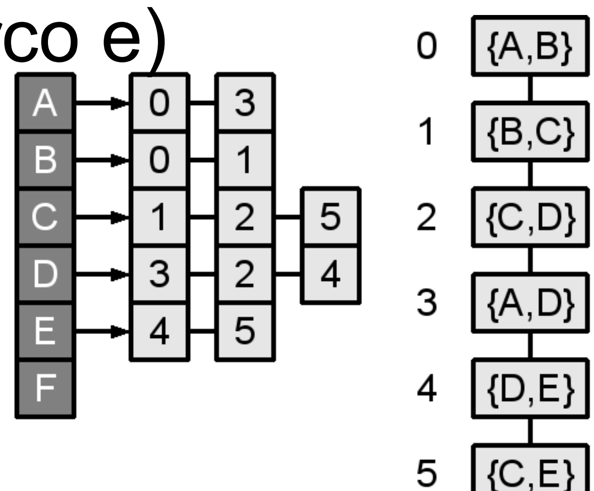


Liste di incidenza (grafo non orientato)



Costi
Liste di incidenza

- grado(vertice v)→intero $O(\delta(v))$
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) $O(\delta(v))$
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano $O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
- aggiungiVertice(vertice v) $O(1)$
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) $O(1)$
- rimuoviVertice(vertice v) $O(m)$
- rimuoviArco(arco e) $O(\delta(x)+\delta(y))$

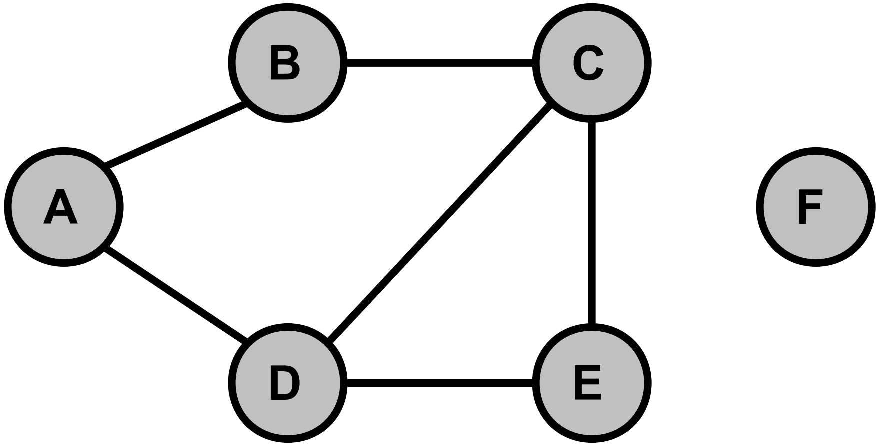


Indichiamo con
$n=|V|$, $m=|E|$,
$\delta(x)$ = grado del nodo x
(spiegato in seguito)

Matrice di adiacenza (grafo non orientato)

Spazio: $\Theta(|V|^2)$

$$M(u,v)=\begin{cases}1 & se \quad \{u,v\}\in E\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$



$$M=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Costi
Matrice di adiacenza

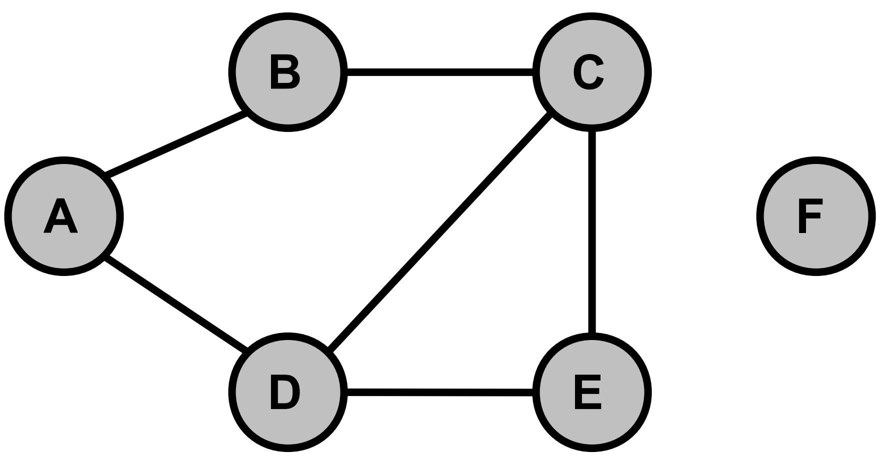
- grado(vertice v)→intero $O(n)$
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) $O(n)$
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano $O(1)$
- aggiungiVertice(vertice v) $O(n^2)$
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) $O(1)$
- rimuoviVertice(vertice v) $O(n^2)$
- rimuoviArco(arco e) $O(1)$

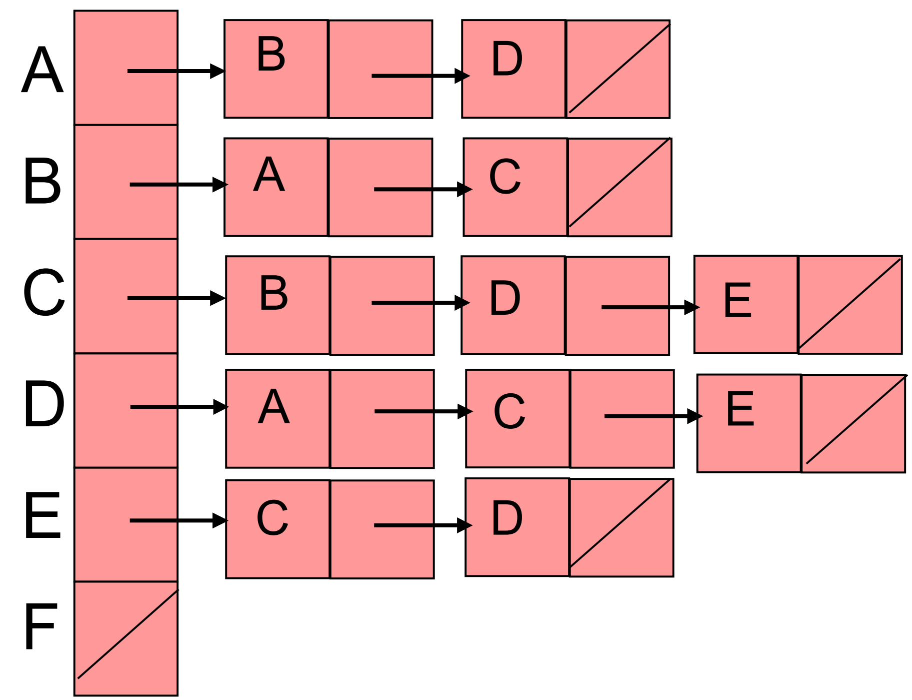
Indichiamo con
$n=|V|$, $m=|E|$

Liste di adiacenza (grafo non orientato)

Spazio: $\Theta(|V|+|E|)$

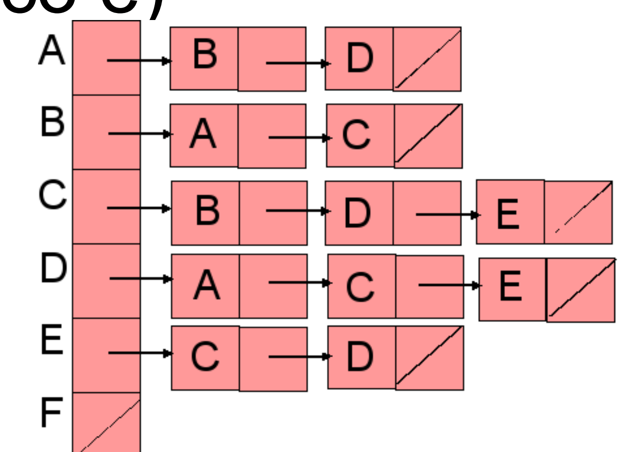
$$v.adj = \{ w \mid \{v,w\} \in E \}$$





Costi
Liste di adiacenza

- grado(vertice v)→intero $O(\delta(v))$
- archiIncidenti(vertice v)→(arco, arco, ... arco) $O(\delta(v))$
- sonoAdiacenti(vertice x, vertice y)→booleano $O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
- aggiungiVertice(vertice v) $O(1)$
- aggiungiArco(vertice x, vertice y) $O(1)$
- rimuoviVertice(vertice v) $O(m)$
- rimuoviArco(arco e) $O(\delta(x)+\delta(y))$

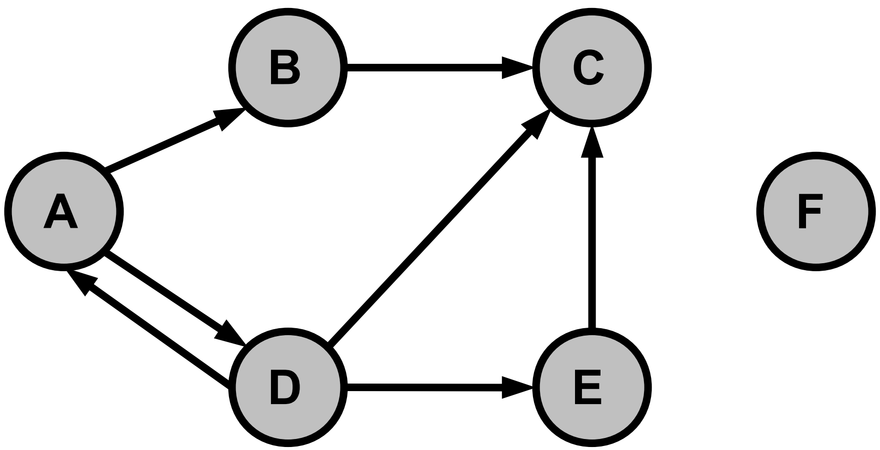


Indichiamo con
n=|V|, m=|E|,
δ(x) = grado del nodo x
(spiegato in seguito)

Matrice di adiacenza (grafo orientato)

Spazio: $\Theta(|V|^2)$

$$M(u,v)=\begin{cases}1 & se\ \ (u,v)\in E\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

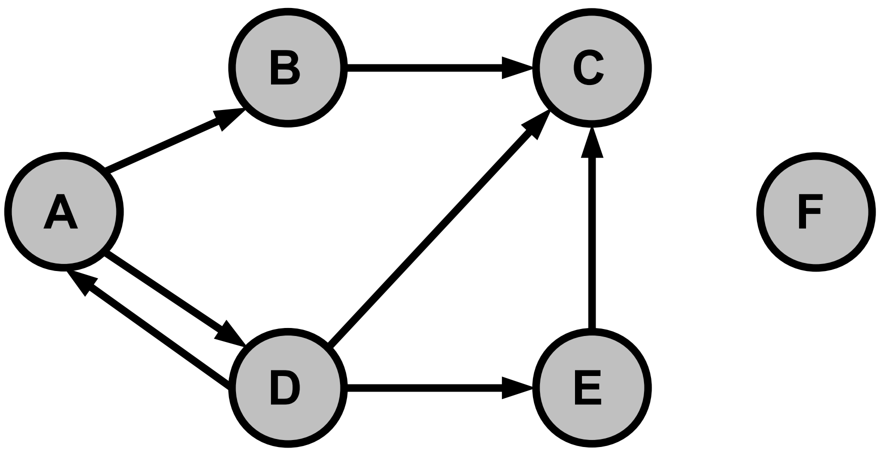


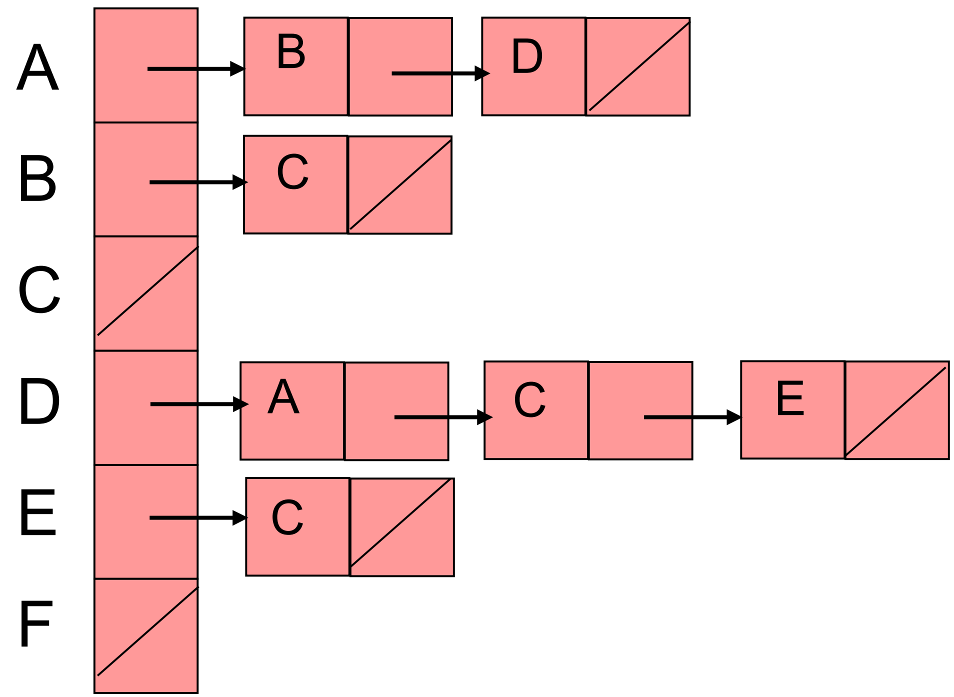
$$M=\begin{array}{c|cccccc} & A & B & C & D & E & F\\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ E & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

Liste di adiacenza (grafo orientato)

Spazio: $\Theta(|V|+|E|)$

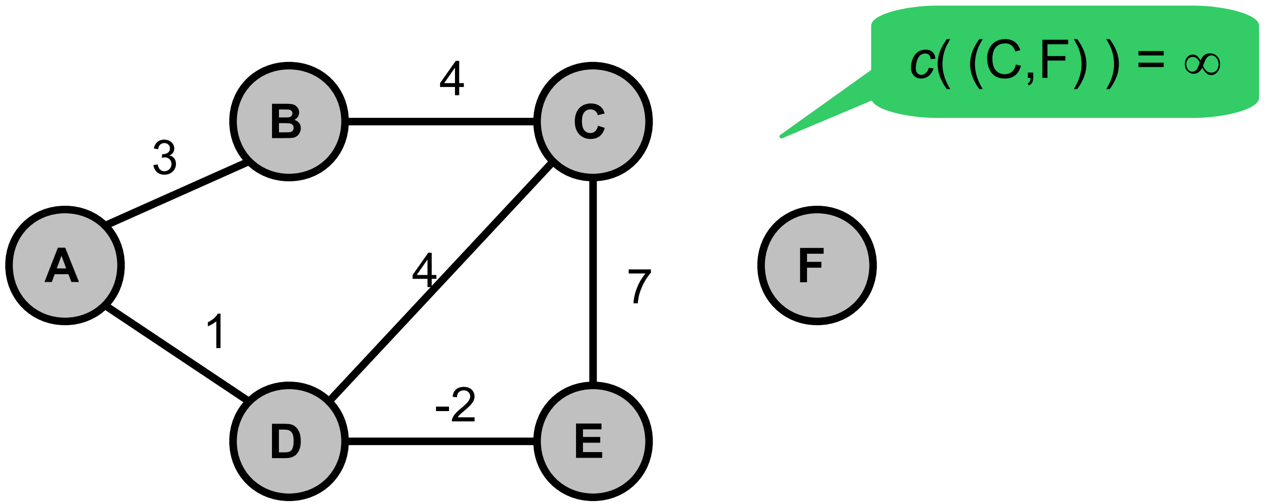
$v.adj = \{ w \mid (v,w) \in E \}$





Grafi pesati

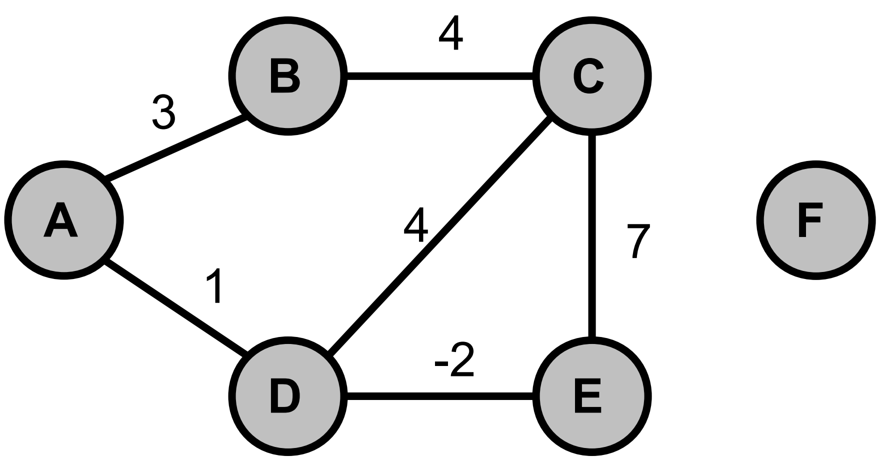
- In alcuni casi ogni arco ha un peso (o costo) associato
- Il costo può essere determinato tramite una funzione di costo $c: E \rightarrow \Re$, dove $\Re$ è l'insieme dei numeri reali
- Quando tra due vertici non esiste un arco, si dice che il costo è infinito



Matrice di adiacenza in grafi non orientati pesati

$$M(u,v)=\begin{cases} c(u,v) & se \quad \{u,v\}\in E \\ \infty & altrimenti \end{cases}$$

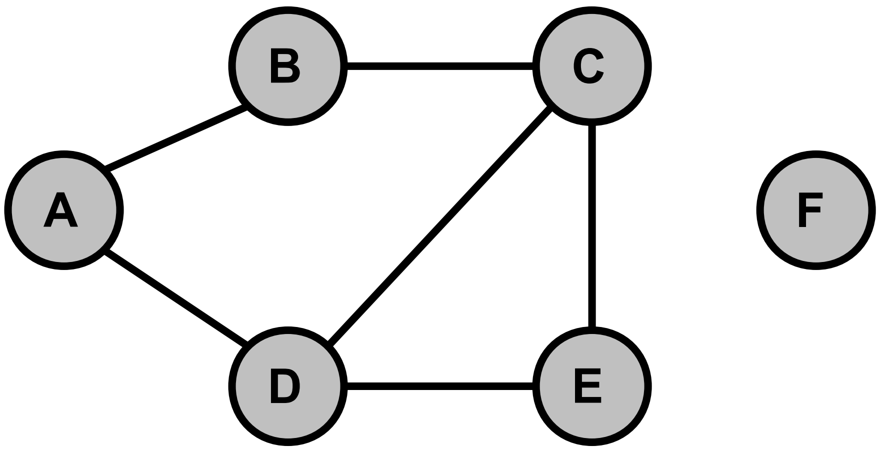
Spazio: $\Theta(|V|^2)$



$$M=\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \;A & \;B & \;C & \;D & \;E & \;F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 4 & 7 & \infty \\ 1 & \infty & 4 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & -2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Definizioni: grado

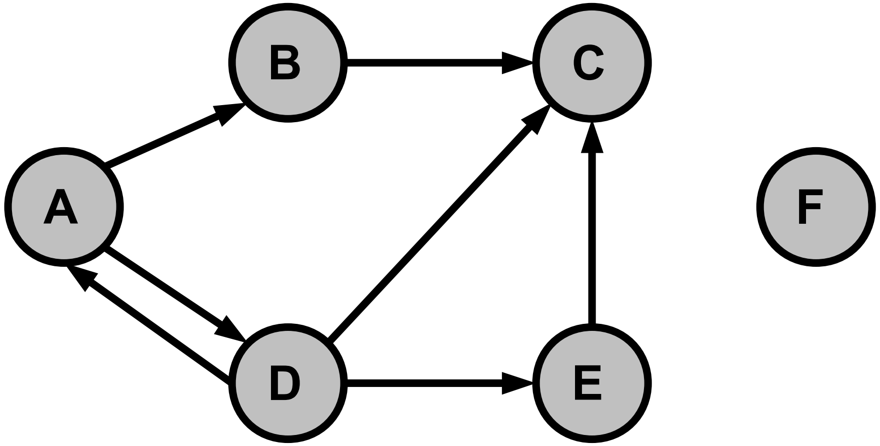
- In un *grafo non orientato*, il *grado* di un vertice è il numero di archi che partono da esso



A, *B* ed *E* hanno *grado* 2
C e *D* hanno *grado* 3
F ha *grado* 0

Definizioni: grado

- In un *grafo orientato*, il *grado entrante* (uscente) di un vertice è il numero di archi incidenti in (da) esso
- In un *grafo orientato* il *grado* di un vertice è la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente

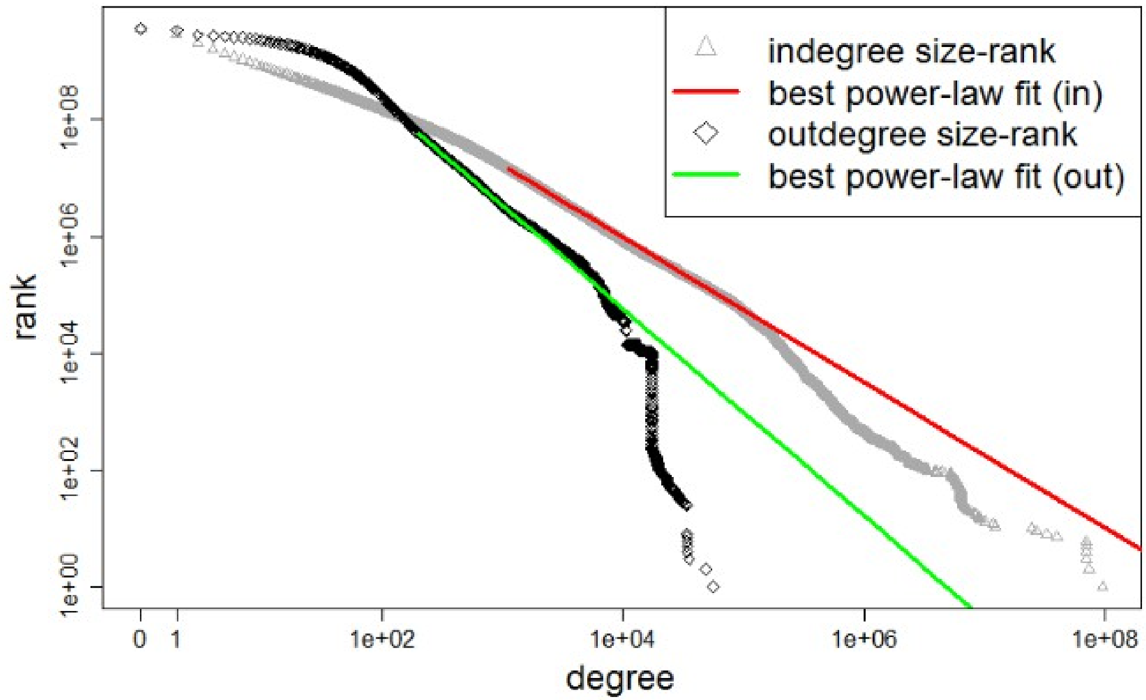


A ha *g. u.* 2 e *g. e.* 1
B ha *g. u. 1* e *g. e. 1*
C ha *g. u. 0* e *g. e. 3*
D ha *g. u. 3* e *g. e. 1*

A e *C* hanno *grado* 3
B ha *grado* 2
D ha *grado* 4

...Nel mondo reale

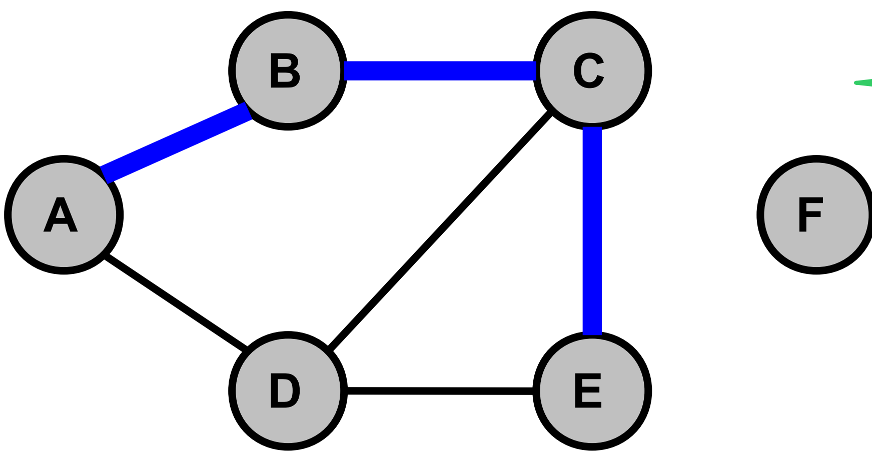
- Il Web può essere visto come un grafo orientato in cui i nodi rappresentano le singole pagine, ed esiste un arco (u,v) sse la pagina u contiene un link che punta verso la pagina v



Meusel et al., "Graph Structure in the Web — Revisited", http://www.quantware.ups-tlse.fr/FETNADINE/papers/P4.9.pdf

Cammini

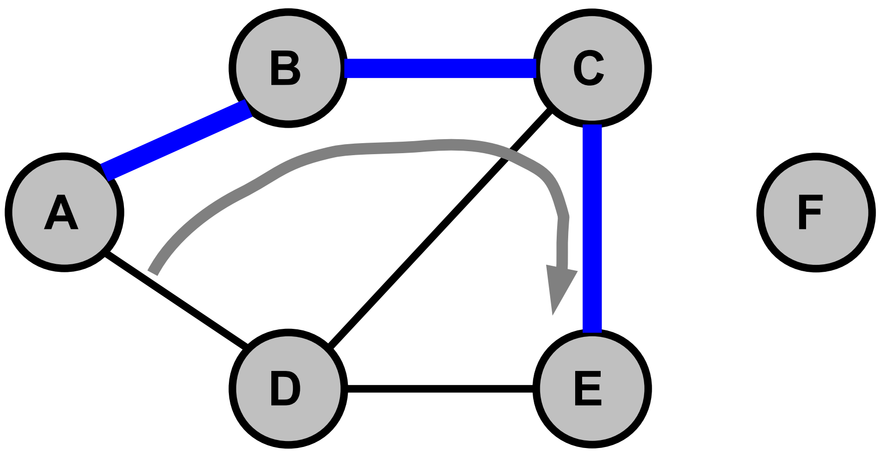
- Un *cammino* in $G=(V,E)$ è una sequenza di vertici $<w_0, w_1, \ldots, w_k>$ tale che w_{i+1} è adiacente a w_i per $0 \le i \le k-1$
- La lunghezza del cammino è il numero di archi attraversati (pari al numero di vertici meno 1)



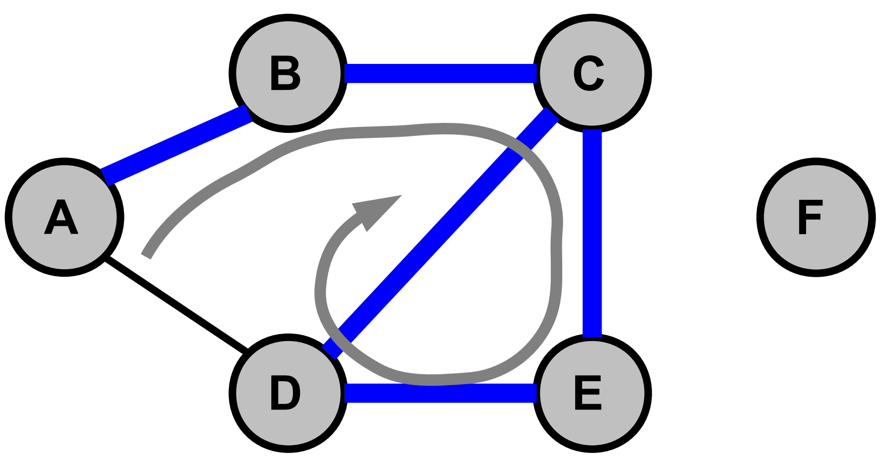
<A, B, C, E> è un cammino di lunghezza 3

Cammini

- Un cammino si dice semplice se tutti i suoi vertici sono distinti (compaiono una sola volta nella sequenza)



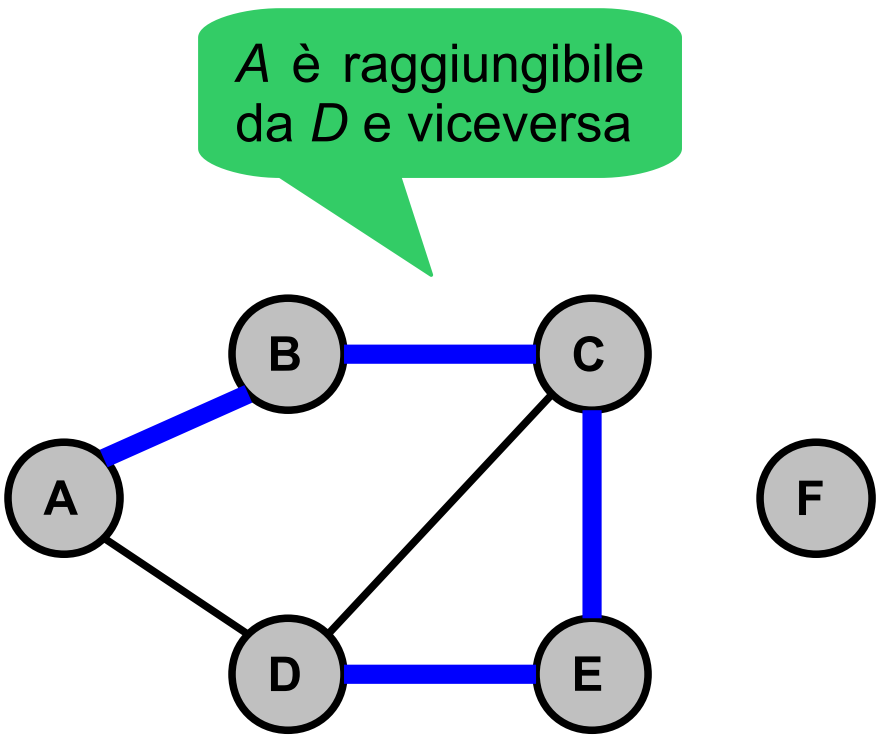
Il cammino
<A, B, C, E>
è semplice...

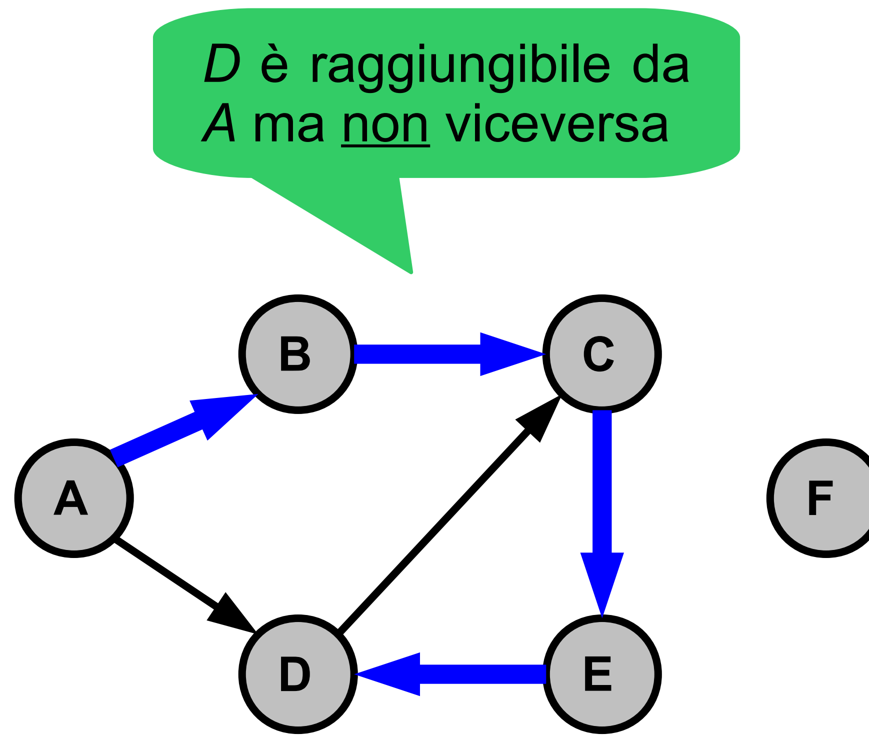


... ma il cammino
<A, B, C, E, D, C >
non è semplice,
poiché C è ripetuto

Cammini

- Se esiste un cammino *c* tra i vertici *v* e *w*, si dice che *w* è raggiungibile da *v* tramite *c*

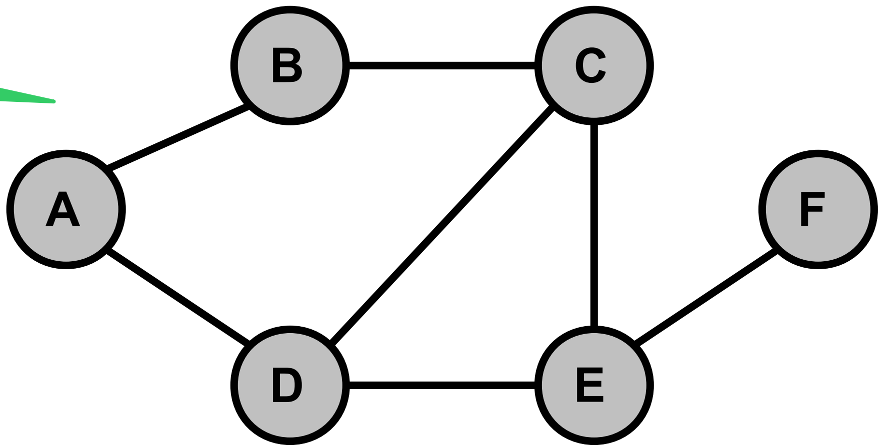


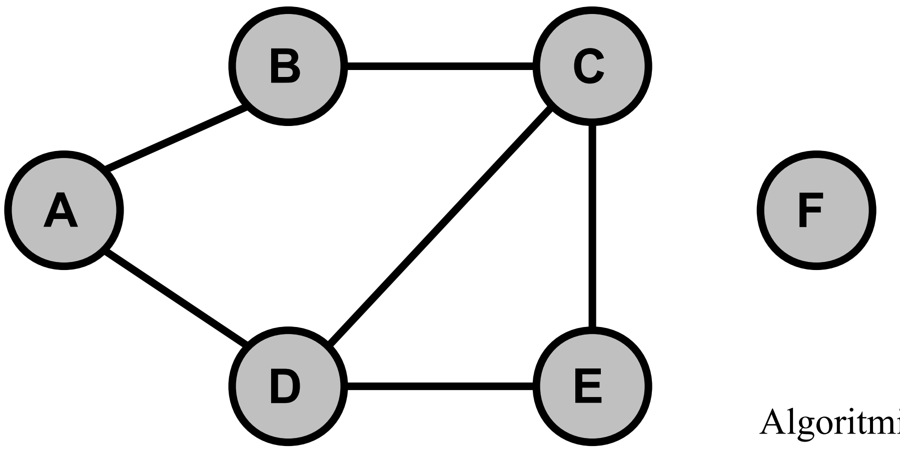


Grafi connessi

- Se *G* è un grafo non orientato, diciamo che *G* è connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.

Questo grafo non orientato **è connesso**.



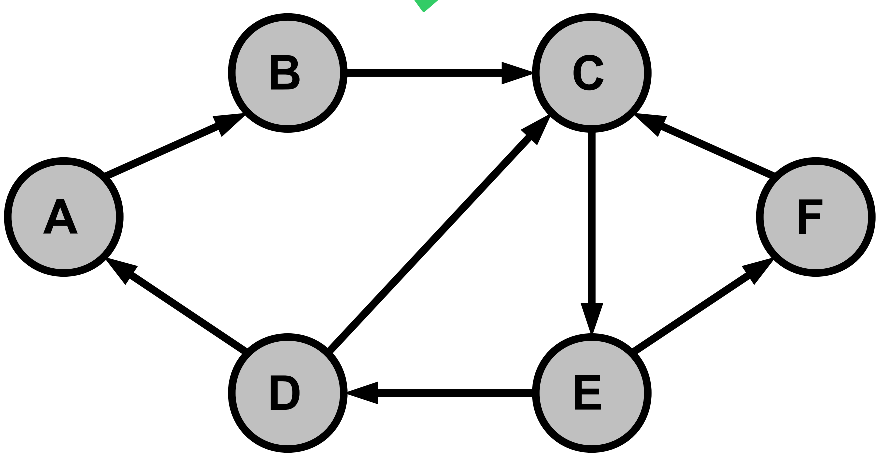


Questo grafo non orientato **non è connesso**.

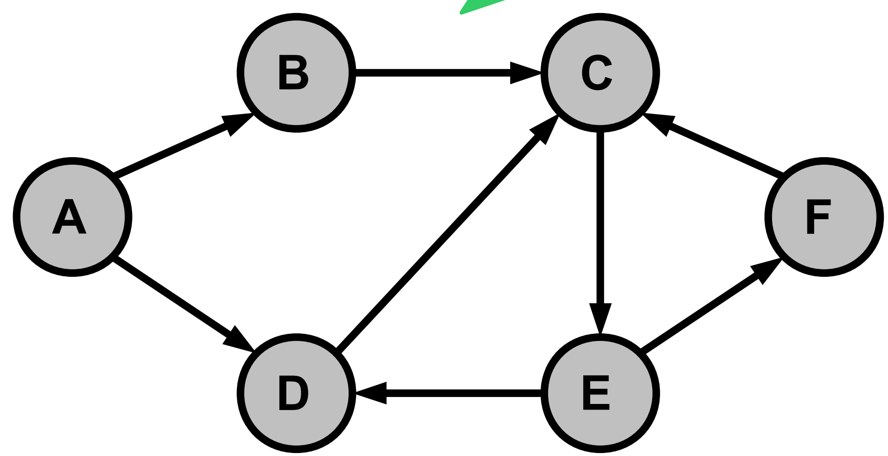
Grafi fortemente connessi

- Se G è un grafo orientato, diciamo che G è fortemente connesso se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.

Questo grafo orientato **è *fortemente connesso.***

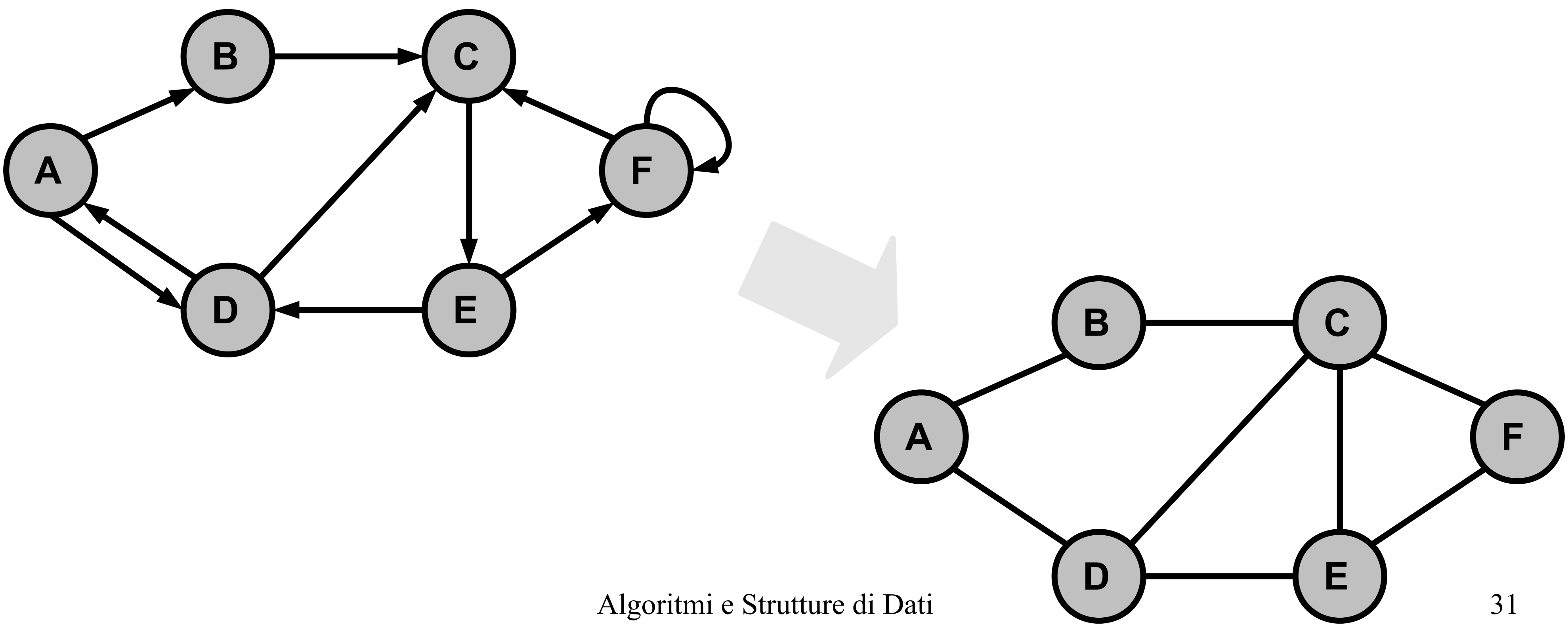


Questo grafo orientato **non è *fortemente connesso*; ad es., *non esiste cammino da* D *a* A**.



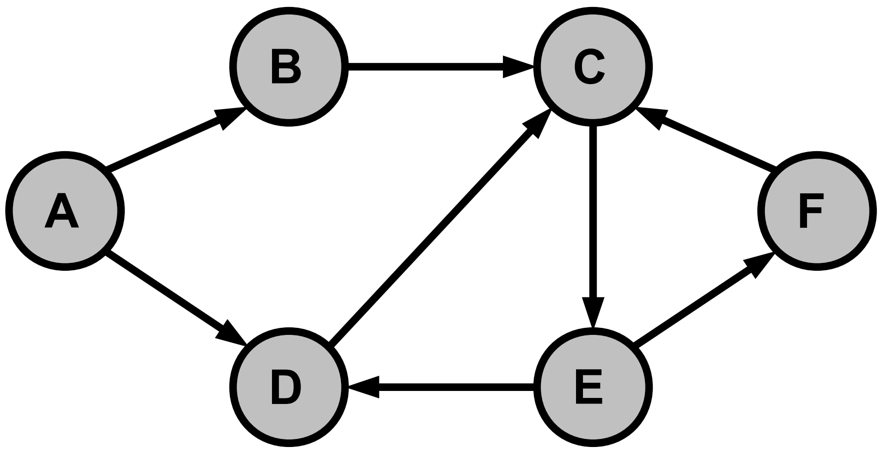
Versione non orientata

- Se G è un grafo orientato, il grafo ottenuto ignorando la direzione degli archi e i cappi è detto grafo non orientato sottostante o anche versione non orientata di G.



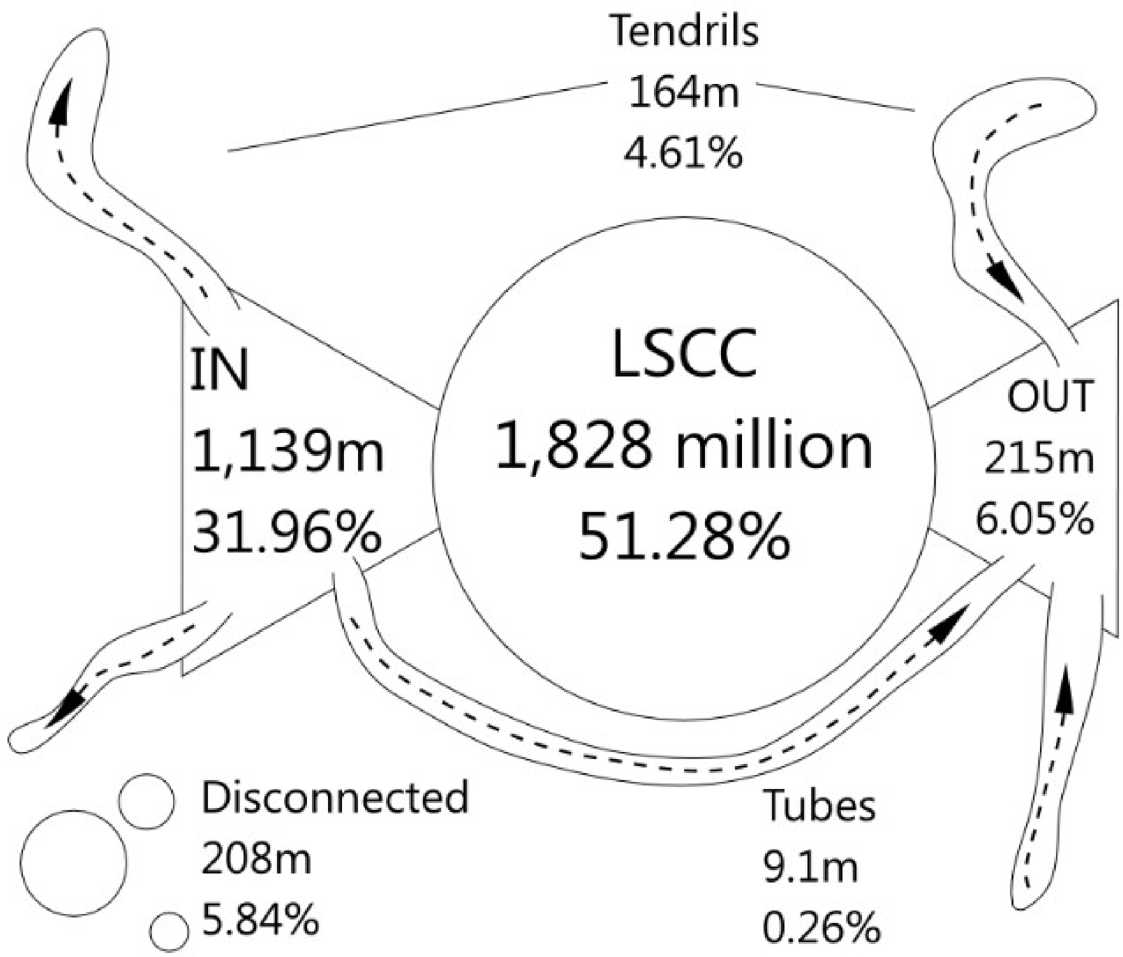
Grafi debolmente connessi

- Se G è un grafo orientato che non è fortemente connesso, ma la sua versione non orientata è connessa, diciamo che G è debolmente connesso



Questo grafo orientato ***non è fortemente connesso***, ma ***è debolmente connesso***

...Nel mondo reale

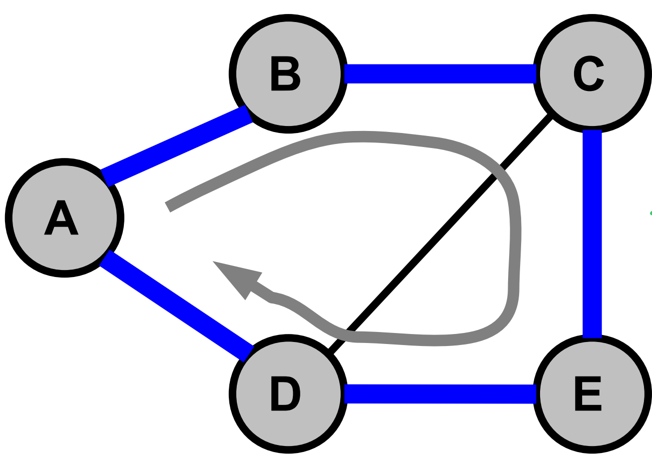


Meusel et al., "Graph Structure in the Web — Revisited",
http://www.quantware.ups-tlse.fr/FETNADINE/papers/P4.9.pdf

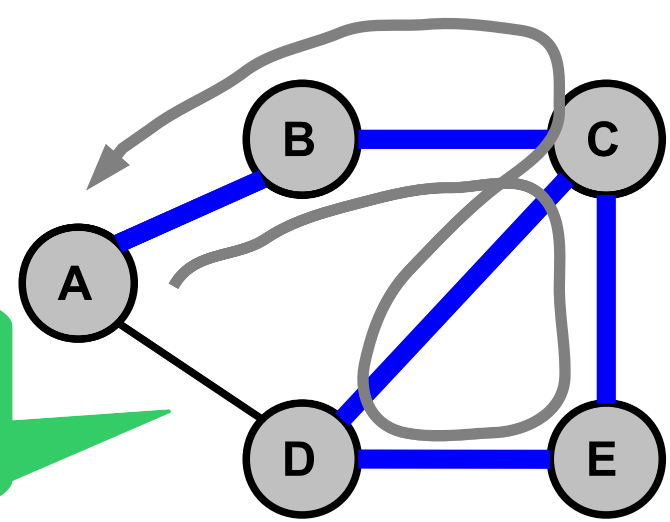
Cicli

- Un *ciclo* è un cammino $\langle w_0, w_1, \ldots, w_n \rangle$ di lunghezza
  - ≥ 1 nei grafi orientati
  - ≥ 3 nei grafi non orientati

  tale che $w_0 = w_n$
- Un ciclo è semplice se i nodi $w_0, \ldots, w_{n-1}$ sono tutti distinti



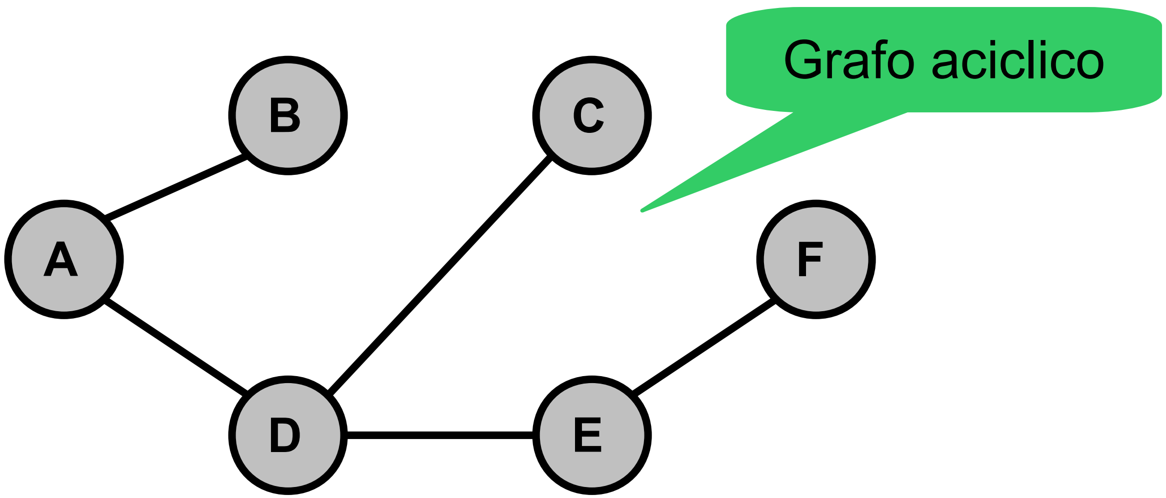
Il cammino
<A, B, C, E, D, A>
è un ciclo semplice

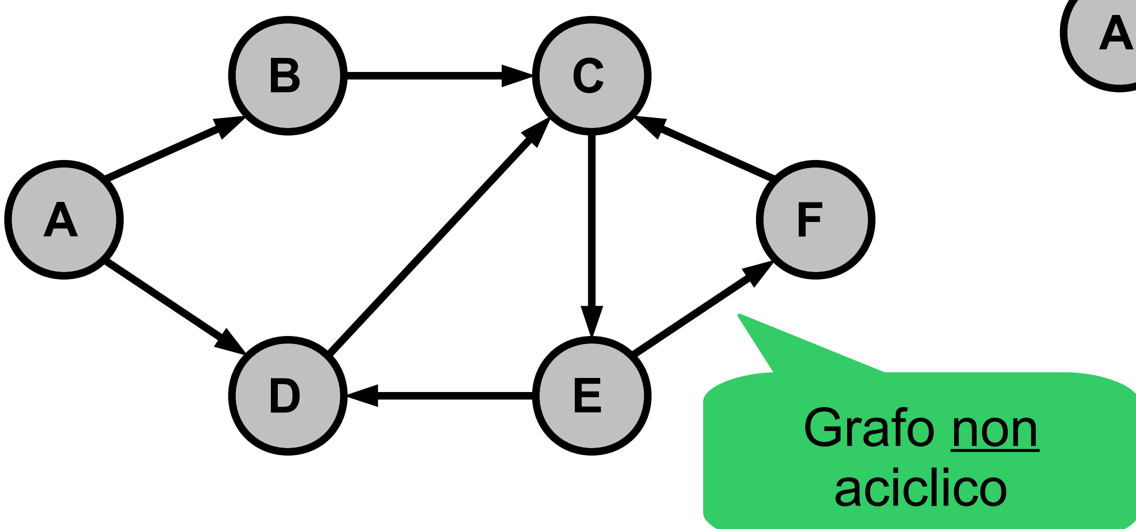


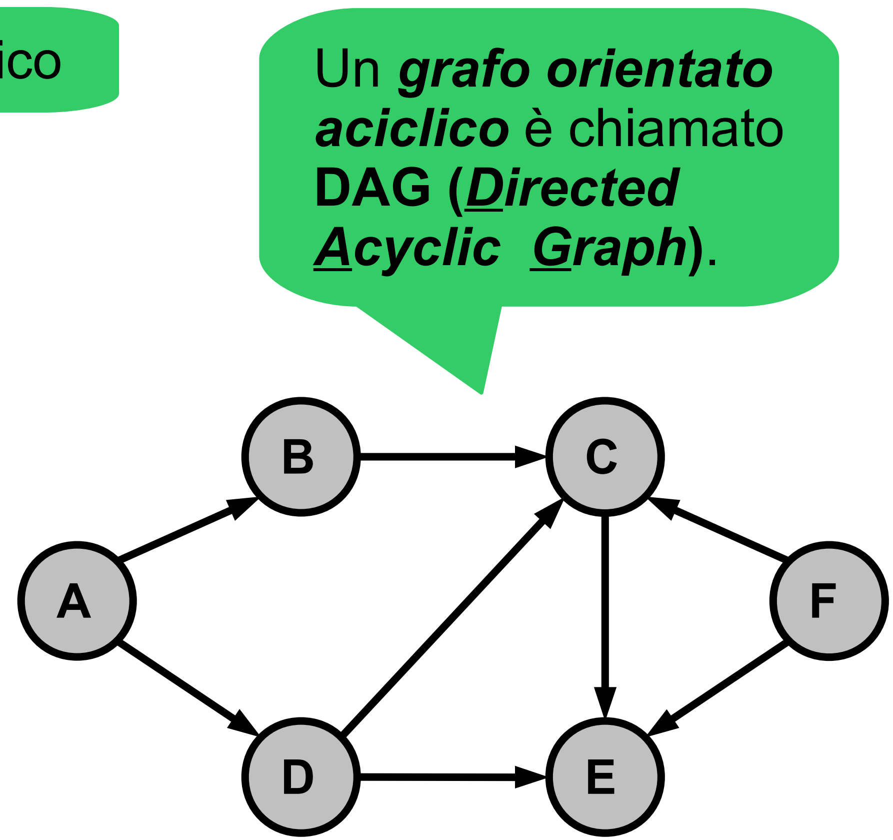
Il ciclo
<A, B, C, E, D, C, B, A>
non è un ciclo semplice

Grafi aciclici

- Un grafo non orientato è aciclico se è senza cicli semplici
- Un grafo orientato è aciclico se è privo di cicli

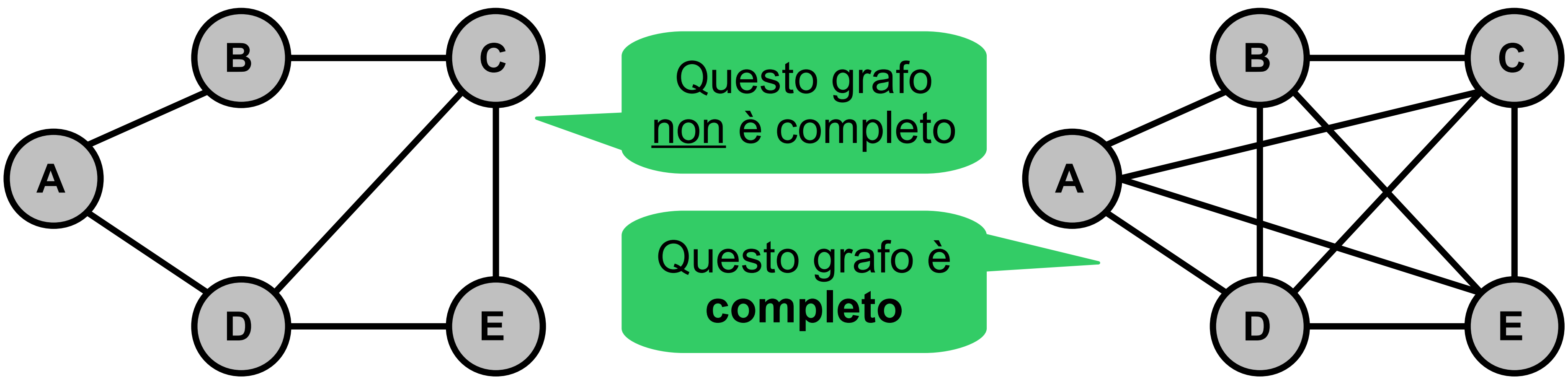






Grafo completo

- Un *grafo non orientato completo* è un grafo non orientato che ha un arco tra ogni coppia di vertici.



- Quanti archi ci sono in un grafo non orientato completo?

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$$

Alberi

- Un albero libero è un grafo non orientato connesso, aciclico.
- Se un vertice è detto radice, otteniamo un albero radicato.