Tabelle Hash

Pietro Di Lena

Dipartimento di Informatica – Scienza e Ingegneria
Università di Bologna

Algoritmi e Strutture di Dati
Anno Accademico 2022/2023

Introduzione

- Molte applicazioni richiedono una struttura dati di tipo Dizionario che supporti in maniera estremamente efficiente unicamente le operazioni basilari SEARCH, INSERT, DELETE
  - Esempio: i compilatori utilizzano un Dizionario per memorizzare ed etichettare gli identificatori (chiavi) nel programma
- La Tabella Hash implementa efficientemente la struttura dati Dizionario
  - Idea: generalizzare l'indicizzazione in un array ordinario
- Per quanto le operazioni su una Tabella Hash possano avere un costo pessimo lineare, in media le prestazioni computazionali sono efficienti
  - Sotto ragionevoli assunzioni probabilistiche le operazioni SEARCH, INSERT, DELETE hanno un costo medio $O(1)$

Nozioni preliminari

- Indichiamo con
  - U = Universo di tutte le chiavi possibili
  - K = Insieme di tutte le chiavi effettivamente utilizzate
- Scelte implementative: dipendono dal dominio di applicazione
- Esempi:
  - $U = \{0, 1, \cdots, m-1\}$ con m *piccolo*, $|K| \sim |U|$
    - Usiamo tabelle ad indirizzamento diretto
  - U è un insieme generico molto grande, $|K| \ll |U|$
    - Usiamo Tabelle Hash

Tabelle ad indirizzamento diretto

- Implementazione basata su array T di dimensione $|U|$
- La chiave k è memorizzata nella posizione k dell'array
- Ricordiamo che tutte le chiavi sono distinte

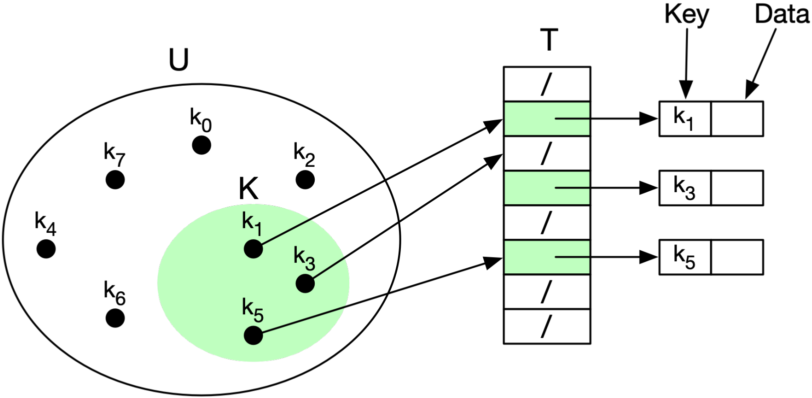


Tabelle ad indirizzamento diretto

```
function search(HashTab T, Key k) → Data
    if T[k] == NIL then return NIL
    else return T[k].data

function insert(HashTab T, Key k, Data d)
    T[k].key = new node(k, d)

function delete(HashTab T, Key k)
    T[k] = NIL
```

- Costo computazionale in termini di tempo: $O(1)$
- Costo computazionale in termini di memoria: $\Theta(|T|) = \Theta(|U|)$
  - Se $|K| \sim |U|$ soluzione accettabile
  - Se $|K| \ll |U|$ soluzione non accettabile
    - Esempio: U = identificatori lunghi massimo 20 caratteri e T array di puntatori (4 bytes per puntatore)

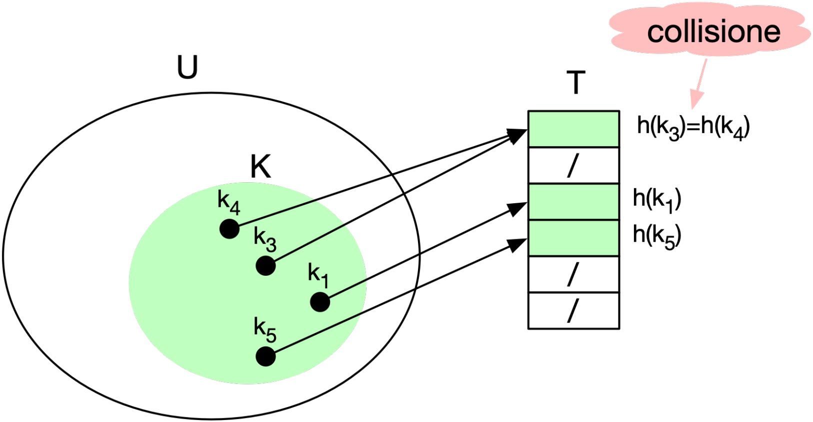
$$|U| > 26 * (26 + 10)^{19} \approx 10^{31} \Rightarrow |T| > 10^{31} * 4\text{bytes} > 10^{19}\text{Terabytes}$$

Tabelle Hash

- Un array di dimensione $\Theta(|U|)$ richiede troppa memoria se U è grande
- Generalmente l'insieme di chiavi K è molto più piccolo rispetto ad U
- Soluzione: Tabelle Hash
  - Usiamo un array $T[0, \cdots, m-1]$ di dimensione $m = \Theta(|K|)$
  - Usiamo una funzione hash $h : U \rightarrow [0, \cdots, m-1]$
- Indirizzamento hash
  - Diciamo che $h(k)$ è il valore hash della chiave k
  - La funzione h trasforma una chiave k in un indice dell'array T
  - La chiave k viene *mappata* nello slot $T[h(k)]$
  - Se due chiavi hanno lo stesso valore hash abbiamo una collisione
- Problema: evitare e gestire le collisioni hash
  - Idealmente vorremmo funzioni hash che evitino sempre collisioni
  - Non possiamo evitarle, dobbiamo almeno minimizzarle

Tabelle Hash

- Implementazione basata su array T di dimensione $\Theta(|K|)$
- La chiave k e i dati sono memorizzati nella posizione $h(k)$ dell'array
- Evitare le collisioni è impossibile anche con buone funzioni hash



Ricapitolando

- Per implementare una Tabella Hash efficiente abbiamo bisogno di
  1. Una funzione hash
     - Deve poter essere calcolata velocemente
     - Deve garantire una buona distribuzione delle chiavi su T
     - Una buona distribuzione minimizza il rischio di collisioni
  2. Un metodo per gestire le collisioni
     - Le collisioni sono inevitabili
     - Quando non riusciamo ad evitarle dobbiamo gestirle
  3. Un array $T[0, \cdots, m-1]$ di dimensione $m = \Theta(|K|)$
     - Generalmente possiamo solo stimare m
     - Non sappiamo a priori quante chiavi andremo a memorizzare
     - Potrebbe essere necessario ridimensionare T
     - La scelta migliore per la dimensione m dipende dalla funzione hash e dal metodo utilizzato per gestire le collisioni

Funzioni hash

- Una buona funzione hash soddisfa (approssimativamente) la proprietà di uniformità semplice (*hashing uniforme semplice*)
  - Una funzione hash h deve distribuire uniformemente le chiavi negli indici $[0, \cdots, m-1]$ della tabella T
  - Ogni indice $i = h(k)$ deve essere generato con probabilità $1/m$
  - Se alcuni indici in $[0, \cdots, m-1]$ sono *scelti* con maggiore probabilità da h allora avremo un numero maggiore di collisioni

- Per soddisfare la proprietà di uniformità semplice bisogna conoscere la distribuzione di probabilità con cui le chiavi sono *estratte* da U
  - Conoscere tale distribuzione di probabilità è spesso irrealistico
  - Solo in casi specifici tale distribuzione è nota
  - Esempio: assumendo che le chiavi k siano estratte a caso da $U = [0, 1)$ (tutte le chiavi in U sono equiprobabili). Allora

    $$h(k) = \lfloor mk \rfloor$$

    soddisfa la proprietà di uniformità semplice

Funzioni hash: assunzioni

1. Tutte le chiavi sono equiprobabili
   - Tutte le chiavi hanno la stessa probabilità di essere estratte da U
   - Non è sempre vero (es. identificatori in un programma)
   - Semplificazione necessaria per proporre un meccanismo generale
2. La funzione hash può essere calcolata in tempo $O(1)$
   - Una codifica hash non $O(1)$ domina il costo delle operazioni
   - Es. costa più calcolare il valore hash che effettuare una ricerca
   - In realtà, ci accontentiamo di hashing sufficientemente veloci
3. Tutte le chiavi sono valori interi non-negativi
   - E' sempre possibile trasformare una qualsiasi chiave k in un intero
   - Es. numero decimale ottenuto dalla rappresentazione binaria di k

Esempio: da stringa ad intero positivo

- Vogliamo trasformare una chiave di tipo *stringa* in intero
- Idea: trasformiamo i caratteri in un codice binario
- Assumiamo di associare i seguenti codici alle lettere dell'alfabeto

$$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 \cdots , r = 18, \cdots z = 26$$

  in binario sono sufficienti 5 bit per carattere

- Codifica ottenuta concatenando i codici binari

$$\text{bin}(\text{"beer"}) = 00010\ 00101\ 00101\ 10010$$

  che rappresenta il numero 70.834 in base 10

Funzione hash: metodo della divisione

- Metodo della divisione: $h(k) = k \mod m$

- Esempi:
  - Se $m = 12, k = 100 \Rightarrow h(k) = 4$
  - Se $m = 10, k = 101 \Rightarrow h(k) = 1$

- Vantaggi:
  - Molto efficiente (richiede solo una divisione intera)

- Svantaggi:
  - Suscettibile a specifici valori di m (potrebbe non usare tutto k)
  - Esempio 1: se $m = 10$ allora $h(k) =$ ultima cifra di k
  - Esempio 2: se $m = 2^p$ allora $h(k)$ dipende unicamente dai p bit meno significativi di k e non da tutti i bit di k
  - Soluzione: scegliere m come numero primo distante da potenze di 2 (e di 10)

Funzione hash: metodo della moltiplicazione

- Metodo della moltiplicazione: $h(k) = \lfloor m(kC - \lfloor kC \rfloor) \rfloor$
  - Sia C una costante $0 < C < 1$
  - Moltiplichiamo k per C e prendiamo la parte frazionaria
  - Moltiplichiamo quest'ultima per m e prendiamo la parte intera
- Esempi:
  - Se $m = 12, k = 101, C = 0.8 \Rightarrow h(k) = 9$
  - Se $m = 1000, k = 124, C = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618 \Rightarrow h(k) = 18$
- Svantaggi:
  - La costante C influenza la proprietà di uniformità di h
  - $C = (\sqrt{5} - 1)/2$ suggerito da Knuth (*The Art of Computer Programming, Vol 3*)
- Vantaggi:
  - Il valore di m non è critico

Funzione hash: metodo della codifica algebrica

- Metodo della codifica algebrica:

$$h(k) = (k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0) \mod m$$

dove

  - $k = k_n k_{n-1} \cdots k_1 k_0$ e k_i è l'i-esimo bit della rappresentazione binaria di k, oppure l'i-esima cifra della rappresentazione decimale di k, o anche il codice ascii dell'i-esimo carattere
  - x è un valore costante

- Esempio: usando la rappresentazione decimale
  - Se $m = 12, k = 234, x = 3 \Rightarrow h(k) = (2 \times 3^2 + 3 \times 3 + 4) \mod 12 = 7$

- Vantaggi:
  - Dipende da tutti i bit/caratteri della chiave

- Svantaggi:
  - Costoso da calcolare
  - Richiede n addizioni e $n * (n+1)/2$ prodotti ($n = \Theta(\log k)$)

Regola di Horner

- Valutazione di un polinomio in un punto
- Un polinomio di grado n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

può essere riscritto nel seguente modo

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\cdots x(a_{n-1} + a_n x))))$$

che richiede n addizioni ed n moltiplicazioni

- La regola di Horner permette di abbassare il costo (da quadratico a lineare sul numero di cifre della chiave k) del calcolo della funzione hash basata sul metodo della codifica algebrica
    - Dato che il numero di cifre di una chiave è tipicamente un numero relativamente piccolo, possiamo assumere un costo costante per il metodo della codifica

java.lang.String.hashCode()

```
/**
* Returns a hash code for this string. The hash code for a String
* object is computed as
*
* s[0]*31^(n-1) + s[1]*31^(n-2) + ... + s[n-1]
*
* using int arithmetic, where s[i] is the ith character of the
* string, n is the length of the string, and ^ indicates
* exponentiation. (The hash value of the empty string is zero.)
*/
public int hashCode() {
        int h = hash;
        if (h == 0 && value.length > 0) {
            char val[] = value;

            for (int i = 0; i < value.length; i++)
                h = 31 * h + val[i];
            hash = h;
        }
        return h;
}
```

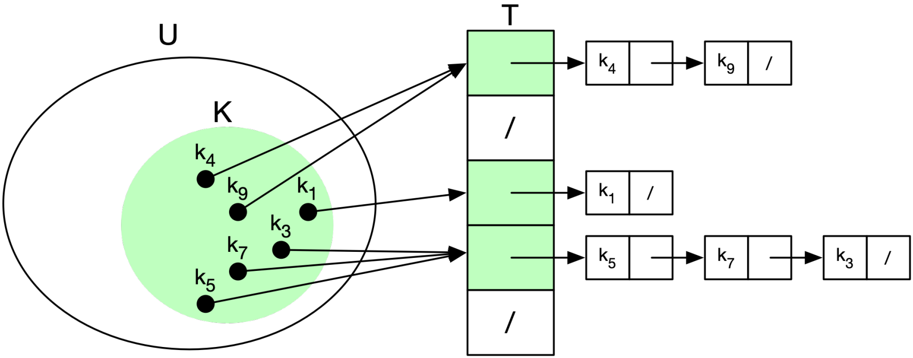
- Funzione hash di libreria Java della classe String
- Basata sul metodo della codifica algebrica
    - Utilizza i codici ascii dei caratteri
    - Calcolata con il metodo di Horner
    - La costante x è il numero primo 31

Problema delle collisioni

- Hashing uniforme semplice riduce ma non elimina le collisioni
- Anche assumendo hashing uniforme semplice, la probabilità che ci sia collisione tra due chiavi è (sorprendentemente) molto alta
  - Problema del compleanno: date n persone scelte a caso qual è la probabilità che due tra esse compiano gli anni nello stesso giorno?
  - Paradosso del compleanno: in un gruppo di 23 persone tale probabilità è maggiore del 50%
- Come gestire le eventuali collisioni?
  - Dobbiamo trovare collocazioni alternative per le chiavi
  - Se una chiave non si trova nella posizione attesa, bisogna andare a cercare nelle posizioni alternative
  - Le operazioni diventano costose nel caso pessimo
- Vediamo due possibili tecniche
  - Concatenamento (o anche scansione esterna)
  - Indirizzamento aperto (o anche scansione interna)

Risoluzione collisioni: concatenamento

- Concatenamento (chaining)
  - Le chiavi k con lo stesso valore hash $h(k) = i$ sono memorizzate in una lista concatenata (lista di trabocco)
  - Lo slot $T[i]$ contiene il puntatore alla testa della lista contenente tutte le chiavi k con hash $h(k) = i$



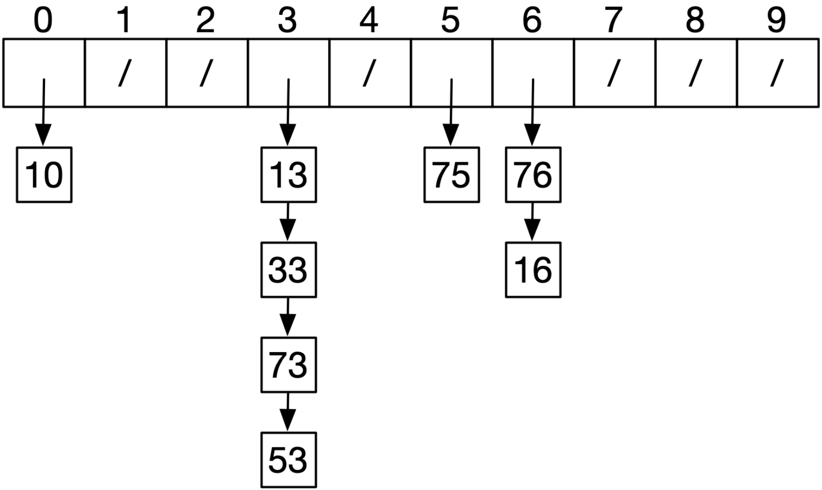
Pseudocodice: concatenamento

```
function SEARCH(HASHTAB T, KEY k) → DATA
    tmp = LLSEARCH(T[h(k)], k)
    if tmp ≠ NIL then return tmp.data
    else return NIL

function INSERT(HASHTAB T, KEY k, DATA d)
    tmp = LLSEARCH(T[h(k)], k)
    if tmp ≠ NIL then tmp.data = d
    else LLINSERT(T[h(k)], k, d)

function DELETE(HASHTAB T, KEY k)
    LLDELETE(T[h(k)], k)
```

- LLSEARCH esegue una ricerca lineare su lista concatenata
- LLINSERT esegue un inserimento in testa in una lista concatenata
- LLDELETE esegue una rimozione su una lista concatenata

Esempio: concatenamento

- Funzione hash $h(k) = k \mod 10$
- Inserimenti nel seguente ordine: $53, 75, 16, 73, 10, 33, 13, 76$



Analisi del metodo di concatenamento

- Dimensione della tabella
  - Non impone vincoli sulla dimensione del vettore $T[0, \cdots, m-1]$
    - Vincoli eventualmente imposti dalla funzione hash
  - Se m troppo grande, rischio di sprecare spazio
  - Se m troppo piccolo, liste di collisione lunghe $\Rightarrow$ nel caso pessimo operazione di ricerca di una chiave ha un costo lineare sulla dimensione della lista
- Quanto costano le operazioni SEARCH, INSERT, DELETE?
  - Sia L la lunghezza della lista di collisione più lunga
  - SEARCH: costo nel caso pessimo $O(L)$, caso ottimo $O(1)$
  - INSERT: costo nel caso pessimo$O(L)$, caso ottimo $O(1)$
  - DELETE: costo nel caso pessimo $O(L)$, caso ottimo $O(1)$
  - N.B. $L = O(n)$, dove $n =$ numero di elementi nella tabella
  - N.B. Il costo pessimo non dipende da m ma dal numero di elementi n
  - Riusciamo a analizzare il caso medio?

Concatenamento: analisi del caso medio

- Il costo nel caso medio dipende dal numero medio di accessi per cercare (con successo o insuccesso) una chiave
  - Il costo della ricerca di una chiave incide su SEARCH, INSERT e DELETE (tutte richiedono la ricerca di una chiave)
  - Il numero medio di accessi dipende da come vengono distribuite le chiavi dalla funzione hash

- Chiamamo fattore di carico $\alpha = n/m$ il rapporto tra il numero di elementi e la dimensione di una Tabella Hash
  - $n =$ numero di elementi nella Tabella Hash
  - $m =$ numero di slot nella Tabella Hash

- Sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice ogni slot della tabella ha mediamente α chiavi
  - Ricordiamo che hashing uniforme semplice $\Rightarrow$ la funzione hash distribuisce le chiavi uniformemente in $T[0, \cdots, m-1]$

Analisi del caso medio: ricerca con insuccesso

Teorema

Sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice, una ricerca senza successo in una tabella hash con concatenamento ha costo medio $\Theta(1+\alpha)$

- Dimostrazione
  - Sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice, data una chiave k non presente nella tabella, gli m slot di T sono tutti ugualmente probabili per la codifica hash $h(k)$
  - Se k non compare nella tabella (ricerca con insuccesso), la ricerca visita tutte le chiavi nella lista $T[h(k)]$, che ha in media α chiavi
  - Costo medio: tempo di hashing $h(k)$ (costo medio 1) + tempo di visita della lista $T[h(k)]$ (costo medio α) $\Rightarrow \Theta(1+\alpha)$

Analisi del caso medio: ricerca con successo

Teorema

Sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice, una ricerca con successo in una tabella hash con concatenamento ha costo medio $\Theta(1 + \alpha)$

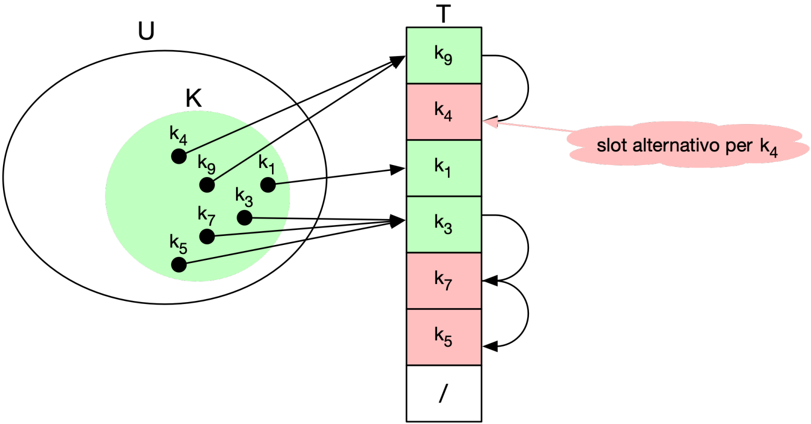
- Dimostrazione
  - Sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice, data una chiave k non presente nella tabella, gli m slot di T sono tutti ugualmente probabili per la codifica hash $h(k)$
  - Se k compare nella tabella (ricerca con successo), la ricerca visita in media all'incirca metà delle chiavi nella lista $T[h(k)]$, che ha in media α chiavi
  - Costo medio: tempo di hashing $h(k)$ (costo medio 1) + tempo medio di visita della lista $T[h(k)]$ (costo medio $\alpha/2$) $\Rightarrow$
$$\Theta(1 + \alpha/2) = \Theta(1 + \alpha)$$

Riassumendo: analisi del caso medio

- Abbiamo dimostrato che su una Tabella Hash in cui le collisioni siano risolte con concatenamento, sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice, la ricerca ha un costo medio $\Theta(1 + \alpha)$
  - $n =$ numero di elementi nella tabella
  - $m =$ numero di slot nella tabella
  - fattore di carico $\alpha = n/m$
- Il fattore di carico influenza quindi il costo delle operazioni
  - Se $n = O(m)$ allora $\alpha = O(1) \Rightarrow$ costo medio della ricerca $O(1)$
  - Quindi SEARCH, INSERT, DELETE hanno costo medio $O(1)$

Risoluzione collisioni: indirizzamento aperto

- Indirizzamento aperto (open addressing)
  - Tutte le chiavi sono memorizzate nella stessa tabella
  - Ogni slot contiene una chiave oppure NIL
  - Se uno slot è occupato, se ne cerca uno alternativo nella tabella



Indirizzamento aperto: ispezioni

- Idea: data una chiave k, se uno slot $T[h(k)]$ è già occupato allora ispezioniamo la tabella alla ricerca di uno slot libero

- Per determinare quale slot ispezionare estendiamo la funziona hash in modo che abbia come parametro anche il passo di ispezione

$$h : U \times [0, \cdots, m-1] \to [0, \cdots, m-1]$$

- La sequenza di ispezione

$$h(k, 0), h(k, 1), \cdots, h(k, m-1)$$

  deve fornire una permutazione degli indici della tabella

  - Vogliamo visitare ogni slot solo una volta
  - Potrebbe essere necessario visitare tutti gli m slot

Pseudocodice: indirizzamento aperto

```
function SEARCH(HashTab T, Key k) → Data
    i = 0
    repeat
        j = h(k, i)                          ▷ hash value at step i
        if A[j].key == k then
            return A[j].data
        i = i + 1
    until A[j] == NIL or i == A.size
    return NIL
```

```
function INSERT(HashTab T, Key k, Data d)
    i = 0
    repeat
        j = h(k, i)                          ▷ hash value at step i
        if A[j] == NIL then
            A[j].key = k
            A[j].data = d
            return
        i = i + 1
    until i == A.size
    error "overflow"
```

Attenzione: non funziona correttamente

Pseudocodice delete: indirizzamento aperto

- Non possiamo sostituire la chiave che vogliamo cancellare con NIL
  - search si ferma se trova NIL mentre la chiave cercata potrebbe essere presente e verrebbe trovata nelle ispezioni successive

- Soluzione: utilizziamo il valore DELETED invece di NIL per marcare uno slot vuoto dopo la cancellazione
  - search/delete: DELETED trattati come slot pieni
  - insert: DELETED trattati come slot vuoti

```
function delete(HashTab T, Key k)
    i = 0
    repeat
        j = h(k, i)                          ▷ hash value at step i
        if A[j].key == k then
            A[j] = DELETED
            return
        i = i + 1
    until A[j] == NIL or i == A.size
```

Pseudocodice: indirizzamento aperto

```
function SEARCH(HASHTAB T, KEY k) → DATA
    i = 0
    repeat
        j = h(k, i)                          ▷ hash value at step i
        if A[j].key == k then
            return A[j].data
        i = i + 1
    until A[j] == NIL or i == A.size
    return NIL
```

```
function INSERT(HASHTAB T, KEY k, DATA d)
    i = 0
    repeat
        j = h(k, i)                          ▷ hash value at step i
        if A[j] == NIL or A[j] == DELETED then
            A[j].key = k
            A[j].data = d
            return
        i = i + 1
    until i == A.size
    error "overflow"
```

Analisi del metodo di indirizzamento aperto

- Nel caso pessimo SEARCH, INSERT, DELETE costano $O(m)$
  - $m =$ dimensione della tabella
  - Nel caso pessimo ispezioniamo l'intera tabella
- Quanto costano le operazioni nel caso medio?
  - Costo medio influenzato dalla strategia di ispezione
  - Anche sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice
- Vediamo tre strategie di ispezione
  - ispezione lineare
  - ispezione quadratica
  - doppio hashing

Strategie di ispezione: ispezione lineare

- Funzione di ispezione ($m =$ dimensione della tabella)

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \mod m$$

dove $h'(k)$ è una funzione hash ausiliaria

- Quando si ha una collisione, si ispeziona l'indice successivo
  - Il primo indice $h'(k)$ determina l'intera sequenza

$$h'(k), h'(k) + 1, \cdots, m - 1, 0, 1, \cdots h'(k) - 1$$

  - Sono possibili solo m sequenze distinte di ispezione
  - Ogni slot è ispezionato una sola volta

- Problema: clustering primario
  - Lunghe sotto-sequenze occupate, che diventano sempre più lunghe
  - Assumendo hashing uniforme semplice, uno slot vuoto preceduto da i slot pieni viene riempito con probabilità $(i + 1)/m$
  - I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono

Esempio: ispezione lineare

- Funzione hash $h(k,i) = (h'(k) + i) \mod 10$ dove $h'(k) = k \mod 10$
- Inserimenti nel seguente ordine: $53, 75, 16, 73, 10, 33, 13, 76$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
insert 53	/	/	/	53	/	/	/	/	/	/	h(53,0) = 3	
insert 75	/	/	/	53	/	75	/	/	/	/	h(75,0) = 5	
insert 16	/	/	/	53	/	75	16	/	/	/	h(16,0) = 6	
insert 73	/	/	/	53	73	75	16	/	/	/	h(73,1) = 4	h'(73) = 3
insert 10	10	/	/	53	73	75	16	/	/	/	h(10,0) = 0	
insert 33	10	/	/	53	73	75	16	33	/	/	h(33,4) = 7	h'(33) = 3
insert 13	10	/	/	53	73	75	16	33	13	/	h(13,5) = 8	h'(13) = 3
insert 76	10	/	/	53	73	75	16	33	13	76	h(76,3) = 9	h'(76) = 6

Esempio: ispezione lineare

$h(k,i) = (h'(k)+i) \mod 31$ dove $h'(k) = ascii(k) \mod 31$ $(ascii(A)=65)$

						C		E				I			L	M	N	O	P		R	S	T		V						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P																			P												
R																			P		R										
E								E											P		R										
C						C		E											P		R										
I						C		E				I							P		R										
P						C		E				I							P	P	R										
I						C		E				I	I						P	P	R										
T						C		E				I	I						P	P	R		T								
E						C		E	E			I	I						P	P	R		T								
V						C		E	E			I	I						P	P	R		T		V						
O						C		E	E			I	I					O	P	P	R		T		V						
L						C		E	E			I	I		L			O	P	P	R		T		V						
I						C		E	E			I	I	I	L			O	P	P	R		T		V						
S						C		E	E			I	I	I	L			O	P	P	R	S	T		V						
S						C		E	E			I	I	I	L			O	P	P	R	S	T	S	V						
I						C		E	E			I	I	I	L	I		O	P	P	R	S	T	S	V						
M						C		E	E			I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V						
E						C		E	E	E		I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V						
V						C		E	E	E		I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V					
O						C		E	E	E		I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V	O				
L						C		E	E	E		I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V	O	L			
M						C		E	E	E		I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V	O	L	M		
E						C		E	E	E	E	I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V	O	L	M		
N						C		E	E	E	E	I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V	O	L	M	N	
T						C		E	E	E	E	I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V	O	L	M	N	T
E	E					C		E	E	E	E	I	I	I	L	I	M	O	P	P	R	S	T	S	V	V	O	L	M	N	T
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

C. Demetrescu, I. Finocchi, G. F. Italiano, "Algoritmi e strutture dati"

Strategie di ispezione: ispezione quadratica

- Funzione di ispezione (m = dimensione della tabella)

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \mod m \quad \text{(con costanti } c_1 \neq c_2\text{)}$$

  dove $h'(k)$ è una funzione hash ausiliaria

- Quando si ha una collisione, si usa un passo quadratico
  - Il primo indice $h'(k)$ determina l'intera sequenza
  - Le ispezione successive hanno un offset che dipende da una funzione quadratica nel numero di ispezione i
  - Sono possibili solo m sequenze distinte di ispezione
  - c_1, c_2 devono garantire una permutazione di $[0, \cdots, m-1]$

- Problema: clustering secondario
  - Se due chiavi hanno la stessa ispezione iniziale, allora le loro sequenze di ispezione sono identiche

Esempio: ispezione quadratica

- Funzione hash $h(k,i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \mod 10$ dove
  $$h'(k) = k \mod 10 \text{ e } c_1 = 0, c_2 = 1$$
- Inserimenti nel seguente ordine: $53, 75, 16, 73, 10, 33, 13, 76$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
insert 53	/	/	/	53	/	/	/	/	/	/	h(53,0) = 3	
insert 75	/	/	/	53	/	75	/	/	/	/	h(75,0) = 5	
insert 16	/	/	/	53	/	75	16	/	/	/	h(16,0) = 6	
insert 73	/	/	/	53	73	75	16	/	/	/	h(73,1) = 4	h'(73) = 3
insert 10	10	/	/	53	73	75	16	/	/	/	h(10,0) = 0	
insert 33	10	/	/	53	73	75	16	33	/	/	h(33,2) = 7	h'(33) = 3
insert 13	10	/	13	53	73	75	16	33	/	/	h(13,3) = 2	h'(13) = 3
insert 76	10	76	13	53	73	75	16	33	/	/	h(76,5) = 1	h'(76) = 6

Strategie di ispezione: doppio hashing

- Funzione di ispezione ($m =$ dimensione della tabella)

$$h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \mod m$$

dove $h_1(k)$ e $h_2(k)$ sono la funzione hash primaria e secondaria

- Quando si ha una collisione, si usa la funzione secondaria e l'indice di ispezione per determinare il successivo slot da ispezionare
  - Evita il clustering primario e secondario
  - Se $h_1 \neq h_2$ è meno probabile che per una coppia di chiavi $a \neq b$

$$h_1(a) = h_1(b) \text{ e } h_2(a) = h_2(b)$$

  - Sono possibili più di m sequenze distinte di ispezione

- Vincoli sulla funzione hash secondaria h_2
  - Non deve mai dare il valore hash 0
  - Deve permettere di iterare su tutta la tabella

Esempio: doppio hashing

- Funzione hash $h(k,i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \mod 10$ dove
  $h_1(k) = k \mod 10$ e $h_2(k) = (k \mod 9) + 1$
- Inserimenti nel seguente ordine: 53, 75, 16, 73, 10, 33, 13, 76

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
insert 53	/	/	/	53	/	/	/	/	/	/	h(53,0) = 3
insert 75	/	/	/	53	/	75	/	/	/	/	h(75,0) = 5
insert 16	/	/	/	53	/	75	16	/	/	/	h(16,0) = 6
insert 73	/	/	/	53	/	75	16	73	/	/	h(73,2) = 7 $h_2(73) = 2$
insert 10	10	/	/	53	/	75	16	73	/	/	h(10,0) = 0
insert 33	10	/	/	53	33	75	16	73	/	/	h(33,3) = 4 $h_2(33) = 7$
insert 13	10	/	/	53	33	75	16	73	13	/	h(13,1) = 8 $h_2(13) = 5$
insert 76	10	76	/	53	33	75	16	73	13	/	h(76,1) = 1 $h_2(76) = 5$

ESEMPIO: DOPPIO HASHING

$h(k,i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \mod 31$ dove

$$h_1(k) = ascii(k) \mod 31 \text{ e } h_2(k) = (h_1(k) \mod 30) + 1$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
						C		E				I			L	M	N	O	P		R	S	T		V						
P																			P												
R																			P		R										
E								E											P		R										
C						C		E											P		R										
I						C		E				I							P		R										
P						C	P	E				I							P		R										
I						C	P	E				I							P		R			I							
T						C	P	E				I							P		R		T	I							
E						C	P	E				I				E			P		R		T	I							
V						C	P	E				I				E			P		R		T	I	V						
O						C	P	E				I				E		O	P		R		T	I	V						
L						C	P	E				I			L	E		O	P		R		T	I	V						
I					I	C	P	E				I			L	E		O	P		R		T	I	V						
S					I	C	P	E				I			L	E		O	P		R	S	T	I	V						
S					I	C	P	E				I	S		L	E		O	P		R	S	T	I	V						
I					I	C	P	E				I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V						
M	M				I	C	P	E				I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V						
E	M				I	C	P	E	E			I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V						
V	M				I	C	P	E	E			I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V	V					
O	M				I	C	P	E	E	O		I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V	V					
L	M				I	C	P	E	E	O		I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V	V				L	
M	M	M			I	C	P	E	E	O		I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V	V				L	
E	M	M	E		I	C	P	E	E	O		I	S		L	E	I	O	P		R	S	T	I	V	V				L	
N	M	M	E		I	C	P	E	E	O		I	S		L	E	I	O	P	N	R	S	T	I	V	V				L	
T	M	M	E		I	C	P	E	E	O		I	S	T	L	E	I	O	P	N	R	S	T	I	V	V				L	
E	M	M	E		I	C	P	E	E	O	E	I	S	T	L	E	I	O	P	N	R	S	T	I	V	V				L	

C. Demetrescu, I. Finocchi, G. F. Italiano, "Algoritmi e strutture dati"

Indirizzamento aperto: analisi del caso medio

- Utilizziamo il fattore di carico $\alpha = n/m$ anche per l'analisi del costo medio col metodo di indirizzamento aperto
  - In questo caso, poiché $n \leq m$, abbiamo che $\alpha < 1$

- Assumiamo hashing uniforme semplice

- Assumiamo inoltre che le permutazioni degli indici $[0, \cdots, m-1]$ determinate dalle sequenze di ispezione

$$h(k, 0), h(k, 1), \cdots, h(k, m-1)$$

  siano tutte equiprobabili
  - Ogni chiave k ha un'unica sequenza di ispezione associata
  - Ogni sequenza di ispezioni è ugualmente probabile
  - Questo dipende dalla strategia di ispezione: l'ispezione lineare non soddisfa tale proprietà, mentre è soddisfatta dall'ispezione quadratica e doppio hashing

Indirizzamento aperto: analisi del caso medio

Teorema (ricerca senza successo)

Sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice e sequenze di ispezione equiprobabili, il numero medio di ispezioni di una ricerca senza successo in una tabella hash con indirizzamento aperto e fattore di carico $\alpha < 1$ è al massimo $1/(1-\alpha)$

Teorema (ricerca con successo)

Sotto l'assunzione di hashing uniforme semplice e sequenze di ispezione equiprobabili, il numero medio di ispezioni di una ricerca con successo in una tabella hash con indirizzamento aperto e fattore di carico $\alpha < 1$ è al massimo $\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$

- In entrambi i casi, se α è costante il tempo di accesso è $O(1)$
- Se la tabella è piena al 50%, la ricerca senza successo richiede in media al massimo due ispezioni, la ricerca con successo meno di due
- Se la tabella è piena al 90%, la ricerca senza successo richiede in media al massimo dieci ispezioni, la ricerca con successo meno di tre

Analisi del caso medio: ispezione lineare

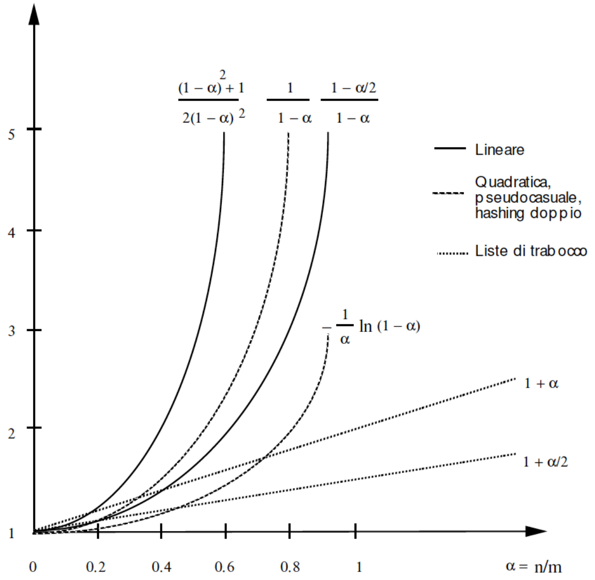
- L'ispezione lineare non assicura che le sequenze di ispezione siano tutte equiprobabili (effetto del clustering primario)
- Il costo medio non è caratterizzato dai due teoremi precedenti
  - Il costo medio nel caso di ricerca senza successo è al massimo

$$\frac{(1-\alpha)^2+1}{2(1-\alpha)^2}$$

  - Il costo medio nel caso di ricerca con successo è al massimo

$$\frac{(1-\alpha/2)}{2(1-\alpha)}$$

Confronto costi medi di ispezione



A. Bertossi, A. Montresor, "Algoritmi e strutture di dati"

Commenti generali: ruolo del fattore di carico

- Le prestazioni delle tabelle hash sono legate al fattore di carico α
- Secondo il paradosso del compleanno, le collisioni sono molto probabili
  - Le collisioni sono praticamente inevitabili anche su sottoinsiemi relativamente piccoli di possibili chiavi
- Strategia: mantenere il fattore di carico basso
  - Un fattore di carico $\alpha < 0.75$ è considerato ottimale
  - Ridimensioniamo la tabella quando il fattore di carico supera una certa soglia critica
  - N.B. Ridimensionare la completa ricostruzione della Tabella Hash poiché gli indici hash cambiano

Tabelle Hash in Java

- java.util.HashMap
  - Gestione delle collisioni con concatenamento
  - Java 7: liste di trabocco con liste concatenate
  - Java 8 : liste di trabocco con liste concatenate e alberi bilanciati
    - Liste concatenate troppo grandi sono convertite in albero
    - Gli alberi piccoli sono riconvertiti in liste
    - Costo pessimo logaritmico delle operazioni di ricerca, inserimento, rimozione per liste di trabocco grandi
- Parametri fondamentali:
  - Fattore di carico (default 0.75)
  - Capacità iniziale (default 16)
  - Quando il numero di elementi eccede il prodotto tra fattore di carico e la capacità della Tabella Hash, questa viene ridimensionata (ricostruita completamente da capo)
  - Suggerimenti: evitare il più possibile i ridimensionamenti settando una capacità iniziale opportuna

Dizionario: riassunto dei costi

	SEARCH		INSERT		DELETE	
	Medio	Pessimo	Medio	Pessimo	Medio	Pessimo
Array non ordinati	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Array ordinati	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Lista concatenata	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Albero Binario di Ricerca	$O(\overline{h})$	$O(h)$	$O(\overline{h})$	$O(h)$	$O(\overline{h})$	$O(h)$
Albero AVL	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Tabelle Hash	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$

- $h =$ altezza dell'albero, $\overline{h} =$ altezza media dell'albero
- Nonostante le Tabelle Hash abbiano un costo pessimo lineare, sotto ragionevoli assunzioni probabilistiche hanno un costo medio costante e sono in pratica molto efficienti
- Le implementazioni di strutture dati di tipo Dizionario fanno tipicamente uso di Tabelle Hash