Osservazione 3.4 *Poiché gli autovalori di $\mathbf{A}^T$ sono i medesimi della matrice $\mathbf{A}$, applicando il teorema precedente alla matrice $\mathbf{A}^T$ si ottiene una nuova regione. Gli autovalori di $\mathbf{A}$ appartengono alla* intersezione *delle due regioni.*

Il secondo risultato, la cui dimostrazione è leggermente più impegnativa è il seguente.

Teorema 3.11 (Secondo teorema di Gershgorin–Hadamard) *Sia $\mathbf{A}$ una matrice di ordine n, irriducibile. Se un autovalore λ è situato sulla frontiera della riunione dei dischi, allora tutti i cerchi D_k passano per λ.*

3.4.1 Norma di vettore e di matrice

Una applicazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, è chiamata *norma*, indicata usualmente con $\|\mathbf{x}\|$, quando verifica le seguenti condizioni

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = 0$.

(iii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, vale la *disuguaglianza triangolare*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Il numero $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ definisce allora una *distanza* tra i punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Un esempio di norma in $\mathbb{R}^n$ è fornito dalla cosiddetta *norma p*, definita, per $1 \leq p < \infty$, nel modo seguente

$$\boxed{\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}} \tag{3.28}$$

Per $p = 2$ si ha la usuale *norma euclidea*; per $p = 1$ la norma corrispondente è anche nota come *norma di Manhattan*.

Nel caso $p = \infty$ si ha la *norma del massimo*, ~~detta anche *norma di Chebichev*~~, definita da

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{3.29}$$

Ad esempio, se $\mathbf{x} = [1, -2]^T$ si ha

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{5}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = 2$$

Per $p = 1$ e $p = \infty$, non ci sono problemi a mostrare che le proprietà richieste dalla definizione di di norma sono verificate. Per $1 < p < \infty$ la proprietà triangolare diventa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

nota anche come *disuguaglianza di Minkowski*.

Se $\mathbf{A}$ è una matrice simmetrica di ordine n e *definita positiva*, si può definire una norma di vettore ponendo

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} := \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j\right)^{1/2}$$

1. Esistenza (unicità) soluzione
2. Metodi ~~numerici~~ diretti x calcolare la soluzione
3. Analisi errore inerente
$\Rightarrow$ condizionamento

$$Ax = b$$

$$|x_{esatta} - x_{calcolata}|$$

$$\in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$d(x_{esatta}, x_{calcolata})?$$

$$x_{errore} = x_{esatta} - x_{calcolata}$$

NORMA $\xrightarrow{V}$ funzione

$f(x) = \|x\|$

$$\underset{f}{\|\cdot\|} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Proprietà

1) $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Norma euclidea (norma 2)

$$x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$x = (1, -2, 3) \qquad \|x\|_2 = \sqrt{14}$$

Norme ∞

$x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

$\rightarrow$ $\|x\|_\infty = \max \{1, 2, 3\} = 3$

Norma 1

$x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_1 = 1 + 2 + 3 = 6$

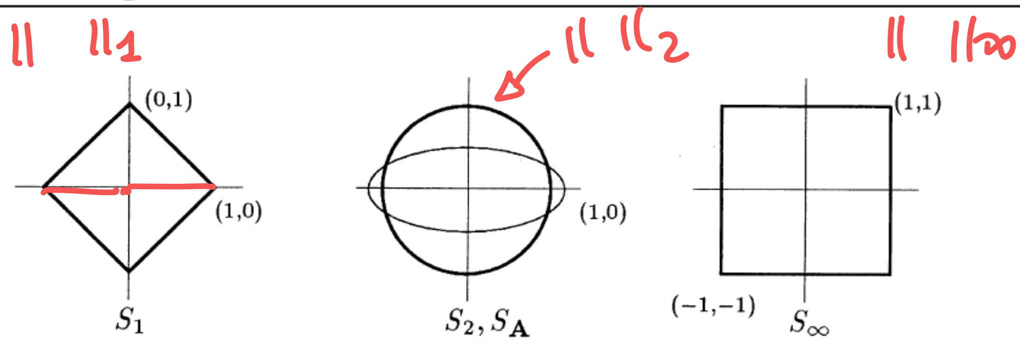


Figura 3.9 Le sfere unitarie S_pe $S_{\mathbf{A}}$ relative alla norma $\|\cdot\|_p$ e alla norma $\|\cdot\|_A$.

In Figura 3.9 sono rappresentate le sfere unitarie in $\mathbb{R}^2$ corrispondenti a differenti tipi di norme.

Osserviamo che una norma di vettore è una funzione continua in $\mathbb{R}^n$ e che per ogni coppia di norme di vettore, $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{x}\|'$, esistono due costanti positive m e M tali che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$\| \, \| \quad \| \, \|'$

$$m\|\mathbf{x}\|' \leq \|\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|'$$

In altre parole, in $\mathbb{R}^n$, per n fissato, le norme sono tra di loro equivalenti.

```
x=(1:4)/5
norm1=norm(x,1)
norm2=norm(x)
norminf=norm(x,inf)
x=0.2000 0.4000 0.6000 0.8000
norm1=2.0000
norm2=1.0954
norm3=0.8000
```

Norma di matrice

Una *matrice* quadrata di ordine n può essere considerata un vettore in uno spazio di dimensione n^2 (avendo fissata una convenzione relativamente all'ordine degli elementi). Allora, per definire una *norma di matrice*, potremmo utilizzare la definizione data per un vettore. Tuttavia, per le applicazioni conviene restringere ulteriormente la definizione. In particolare, date due matrici quadrate di ordine n $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, è utile porre nella definizione la seguente condizione

$$\text{(v)} \qquad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|$$

È da sottolineare che non tutte le norme di vettore verificano la condizione (v); si consideri, ad esempio

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha

$$\max_{i,j} |c_{i,j}| = 2 \qquad \max_{i,j} |a_{i,j}| = \max_{i,j} |b_{i,j}| = 1$$

Per riassumere, possiamo chiamare *norma* di matrice un'applicazione: $\mathbf{A} \to \|\mathbf{A}\|$, che verifica condizioni analoghe alle condizioni (i), (ii), (iii), (iv) date nella definizione di norma di vettore, con l'aggiunta della precedente condizione (v). Un modo naturale, geometrico, di definire una norma di matrice, che verifica le condizioni precedenti, è il seguente.

$$\| \ \| : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^{m \times n} \to \{$ matrici di dimensione $m \times n$ con valori reali $\}$

Norme indotte dalle norme vettoriali

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$$

$m = 3$

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| =$$

$$= \max \{ 3, 7, 11 \} = 11$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$ NORMA 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \|A\|_1 = \max\{9, 12\} = 12$$

NORMA 2

raggio spettrale ρ

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} =$$

$$= \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

$n \times n$

$\boxed{A^T \cdot A} \rightarrow$ simmetrica $\rightarrow$

(semi)definita positiva $\rightarrow$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$

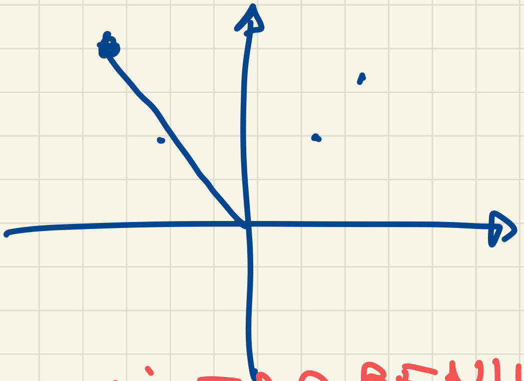
Se A rango massimo,

allora $A^T A$ definita positiva

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_n > 0$

A $m \times n$, $\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$

Se A $n \times n$, $\text{rango}(A) \leq n$



NORMA di FROBENIUS

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

$I \to$ identità $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|I\|_1 = \|I\|_\infty = \|I\|_2 = 1$$

$$\|I\|_F = \sqrt{n} \qquad \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Sia $\|\cdot\|$ una norma fissata di vettore. Definiamo *norma naturale* (o norma indotta dalla norma di vettore) della matrice $\mathbf{A}$ la quantità

$$\|\mathbf{A}\| \equiv \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \tag{3.30}$$

INDOTTA

Poiché per ogni $\mathbf{x} \neq 0$ si può definire $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, sicché $\|\mathbf{u}\| = 1$, la definizione (3.30) è equivalente alla seguente

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|, \qquad \|\mathbf{y}\| = 1$$

Per definizione se $\mathbf{I}$ è la matrice identità e $\|\cdot\|$ è una norma naturale, allora $\|\mathbf{I}\| = 1$.

Osserviamo che per una norma definita come in (3.30) si ha il seguente risultato

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\| \tag{3.31}$$

Più in generale, quando una norma di matrice verifica la condizione (3.31) si dice che essa è *consistente* (o compatibile) con la corrispondente norma di vettore. La norma naturale è, in sostanza, la *più piccola* norma consistente con una assegnata norma di vettore.

Lasciamo come esercizio mostrare che la definizione (3.30) verifica le proprietà (i)–(v).

Vediamo, ora, quali sono le norme naturali di matrice che corrispondono alle norme p di vettore per $p = 1,\ 2,\ \infty$. Indichiamo con a_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,n$ gli elementi della matrice $\mathbf{A}$.

Proposizione 3.8 *La norma di matrice indotta dalla norma del* massimo *($p = \infty$) è la seguente*

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3.32}$$

cioè la massima tra le somme dei moduli delle righe.

In maniera analoga, si dimostra che

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

cioè $\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}^T\|_\infty$.

Consideriamo ora la norma 2, corrispondente alla norma euclidea di vettore. Si ha il seguente risultato.

Proposizione 3.9 *La norma 2 di matrice, corrispondente alla norma euclidea di vettore, può essere calcolata nel modo seguente*

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\,\mathbf{A})} \tag{3.33}$$

Per tale motivo la norma $\|\mathbf{A}\|_2$ è nota anche come norma spettrale. *Nel caso particolare di una matrice simmetrica la norma spettrale coincide con il* raggio spettrale *della matrice.*

Fra le norme che sono state introdotte si hanno le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_\infty \\
&\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{A}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_1 \\
&\max_{i,j}|a_{ij}| \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq n\max_{i,j}|a_{ij}| \\
&\|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1\,\|\mathbf{A}\|_\infty}
\end{aligned}$$

Una norma di matrice che non è subordinata ad una norma di vettore è la norma di *Frobenius* (o di Schur[11]), definita per una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nel modo seguente

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} = \left[\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T A)\right]^{1/2}$$

La norma di Frobenius è essenzialmente la norma euclidea della matrice considerata come un vettore di mn componenti. È interessante osservare che la norma di Frobenius è compatibile con la norma di vettore euclidea; si ha, infatti

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \, \|\mathbf{x}\|_2$$

Matrici convergenti

Per studiare la convergenza di procedure iterative è utile stabilire quando per una matrice $\mathbf{A}$ si ha la convergenza a zero delle successive potenze, cioè

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{A}^m = 0 \tag{3.34}$$

In questo caso si dice che la matrice è *convergente*. Per stabilire la convergenza di una matrice si hanno le seguenti condizioni.

Teorema 3.12 *I seguenti risultati sono equivalenti.*

(a) $\mathbf{A}$ *è convergente*

(b) $\lim_{m \to \infty} \|\mathbf{A}^m\| = 0$, *per una norma di matrice*

(c) $\rho(\mathbf{A}) < 1$

Una *condizione sufficiente*, in generale non necessaria, ma importante nelle applicazioni, è la seguente.

Corollario 3.1 $\mathbf{A}$ *è convergente se per una particolare norma di matrice si ha*

$$\|\mathbf{A}\| < 1$$

3.5 I valori singolari e la pseudoinversa

Per una matrice rettangolare la nozione di autovalore perde di significato. Una nozione più generale e che presenta interesse numerico in relazione al *rango* di una matrice e al suo *condizionamento* è la nozione di *valori singolari*[12]. Dal punto di vista teorico è pure interessante una estensione del concetto di inversa di una matrice, la cosiddetta *pseudoinversa*, che può anche essere definita a partire dai valori singolari.

In questo paragrafo richiameremo le idee essenziali relativamente a questi due concetti, che hanno assunto dal punto di vista numerico un'importanza notevole, in particolare per quanto riguarda la risoluzione dei problemi *malcondizionati*. Per un approfondimento si rinvia ad esempio Golub e Van Loan [172].

[11] Friedrich Heinrich Schur (1856-1932).

[12] Il termine *valore singolare* è collegato al fatto che mediante tali quantità è possibile misurare la distanza di una matrice dall'insieme delle matrici singolari.