

Risoluzione di equazioni non lineari

Calcolo Numerico

Elena Loli Piccolomini

3/11

$$F(x) = 0$$

$$F: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- 1) Esistenza della soluzione
- 2) Metodo \times calcolare la soluzione:

(A) BISEZIONE

(B) APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE
O PUNTO FISSO

(C) NEWTON (Tangenti)

Teoremi di convergenza globale
" " locale

- 3) Criteri di arresto del metodo di iterativi
- 4) Condizionamento del problema

Obiettivo

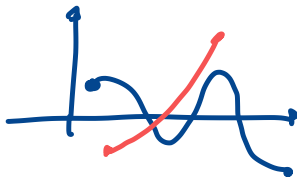
$$F: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Calcolare con metodi numerici la soluzione di un'equazione non lineare

$$F(x) = 0$$

1. Studiare condizioni esistenza e unicità della soluzione
2. Algoritmi x calcolo la soluzione
3. Condizioni di problema

Caso unidimensionale



$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▶ **Esistenza di uno zero di f .**

Se f è una funzione continua in $[a,b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$, allora esiste almeno uno zero di f in (a,b) .

- ▶ **(Individuazione di un intervallo in cui esiste un solo zero di f .)** ←

Metodi iterativi

- ▶ Non è possibile in generale costruire metodi numerici che calcolino le radici di un'equazione non lineare in un numero finito di passi.
- ▶ I metodi per questo tipo di problema sono **metodi iterativi**.
- ▶ A partire da uno o più dati iniziali, calcolano dei valori x_k attraverso un procedimento che si ripete (itera) sempre uguale ad ogni passo k :

$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$

$$x_k = G(x_{k-1})$$

- ▶ Sotto opportune condizioni gli iterati x_k convergono alla soluzione x^* (tale che $f(x^*) = 0$) per $k \rightarrow \infty$.

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^*$$

Metodi iterativi

Schema algoritmo iterativo:

1. Dati: x_0
2. $k=1$
3. Ripeti finchè convergenza
 - 3.1 $x_k = G(x_{k-1})$
 - 3.2 $k = k + 1$

end

Sono da specificare nel singolo metodo le condizioni di convergenza che comunque contengono sempre la seguente:

$$k \leq \text{maxit}$$

Metodi iterativi

Convergenza metodi iterativi.

Si dice che la successione x_k generata da un metodo iterativo converge ad x^* con ordine $p \geq 1$ se:

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = C, \forall k \geq k_0$$

dove k_0 è un intero opportuno e $C \in \mathbb{R}$ tale che.

$$\begin{cases} 0 < C \leq 1 & \text{se } p = 1 \\ C > 0 & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

In tal caso si dirà che il **metodo è di ordine p** .

Osservazione. nel caso $p = 1$ per avere convergenza deve essere $C < 1$. In questo caso C prende il nome di *fattore di convergenza*.

$$e_{k+1} = \frac{1}{2} e_k$$

$$|x_{k+1} - x^*| = \left(\frac{1}{2}\right) |x_k - x^*|$$

$p = 1$ ordine di convergenza

$$C = \frac{1}{2}$$

Metodi iterativi

$$F(x) = 0$$
$$F: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

In generale la convergenza di un metodo iterativo per la risoluzione di un'equazione non lineare dipende dalla scelta del valore iniziale x_0 . Esisteranno quindi risultati di **convergenza globale** quando il metodo converge per *ogni* scelta di x_0 e teoremi di **convergenza locale** quando il metodo converge solo se x_0 è scelto in un *opportuno intorno della radice esatta*.

Posizione del problema

CONDIZIONAMENTO
 $|x^* - x_\epsilon^*|$

→ $f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon h(x)$, ϵ piccolo, x_ϵ^* zero semplice di $f_\epsilon(x)$. Sviluppando in serie di Taylor di punto iniziale x^* :

+ $R(\xi)$ su $[x^*, x_\epsilon^*]$

$$\rightarrow 0 = f_\epsilon(x_\epsilon^*) = f_\epsilon(x^*) + f'_\epsilon(x^*)(x_\epsilon^* - x^*) + \frac{1}{2}f''_\epsilon(\xi)(x_\epsilon^* - x^*)^2$$

$$= \underbrace{f(x^*) + \epsilon h(x^*)}_{0} + \underbrace{f'(x^*)(x^* - x_\epsilon^*) - \epsilon h'(x^*)(x^* - x_\epsilon^*)}_{0} + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_\epsilon^* - x^*)^2 + \frac{1}{2}\epsilon h''(\xi)(x_\epsilon^* - x^*)^2$$

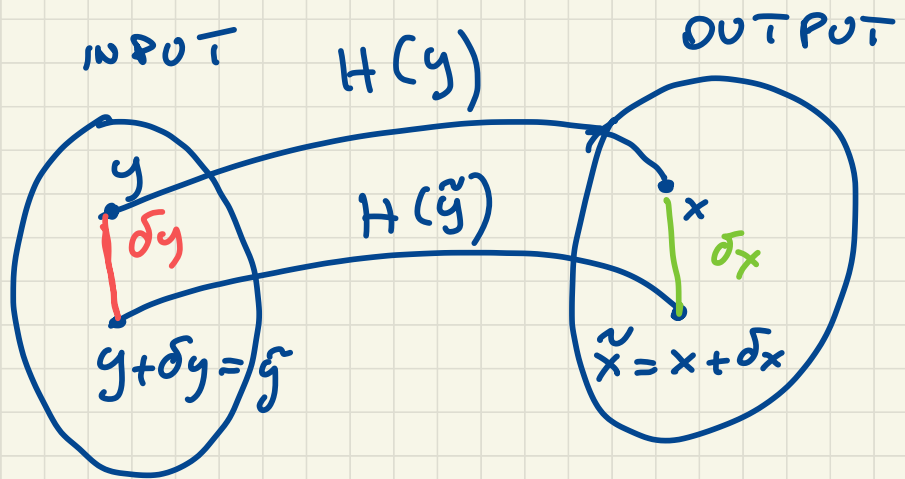
$$\epsilon(x^* - x_\epsilon^*) \approx \epsilon^2$$

$\xi \in (x^*, x_\epsilon^*)$. Tralasciando perturbazioni del II ordine:

$$\rightarrow 0 \approx \epsilon h(x^*) - f'(x^*)(x^* - x_\epsilon^*) \Rightarrow$$

$$|x_\epsilon^* - x^*| \leq \left| \frac{\epsilon h(x^*)}{f'(x^*)} \right|$$

$|dx| \approx 1/f'(x^*) |dy|$



$H \rightarrow$ mappo

$$|\delta x| \approx \mathcal{O} |\delta y|$$

si sceglie LINARI

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \overset{\wedge}{\overset{\wedge}{K(A)}} \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}$$

\uparrow
 $\|A\| \|A^{-1}\|$

Posizione del problema

La perturbazione sul risultato è pari a quella del dato amplificata di un fattore

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$

se x^* ha molteplicità

, che è detto **numero di condizione del problema**.

Se il numero di condizione è grande il problema è **mal condizionato** se è piccolo il problema è **ben condizionato**.

Se x^* è zero di molteplicità m si dimostra che:

$$|x_\epsilon^* - x^*| \leq \left| \frac{m! \epsilon h(x^*)}{f^m(x^*)} \right|^{1/m}$$

quindi il problema è sempre mal condizionato, perchè $\epsilon^{1/m}$ può essere grande.

Posizione del problema. Esempi

$$\frac{1}{f'(x^*)}$$

Polinomio di Wilkinson (Wilkinson, [1959]) (esempio da Quarteroni)

$$P_{10}(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+10) = x^{10} + 55x^9 + \dots + 10!$$

Sia: $\tilde{P}_{10}(x) = P_{10} + \epsilon x^9$, con $\epsilon = 2^{-23} \simeq 1.2 \cdot 10^{-7}$. Secondo le stime precedenti, il massimo errore $|x_\epsilon^{*(i)} - x^{*(i)}|$ si ha in corrispondenza di $i = 8$, $|x_\epsilon^* - x_i^*| \leq 1.9843 \cdot 10^{-4}$. L'errore effettivo in corrispondenza di $i = 8$ è $1.98767 \cdot 10^{-4}$, quindi il problema è mal condizionato.

$$|\delta y| \simeq 10^{-7}$$

$$|\delta x| \simeq 2 \cdot 10^{-4} \dots 10$$

Posizione del problema. Esempi

Radici multiple. (da Quarteroni)

$$P_4(x) = (x - 1)^7$$

ha radici coincidenti $x^{*(i)} = 1$.

→ $\tilde{P}_4(x) = (x - 1)^7 - \epsilon, \quad \epsilon \ll 1$

ha radici semplici $\alpha_i = 1 + \sqrt[7]{\epsilon}$. Quindi $|x_\epsilon^{*(i)} - x^{*(i)}| = \sqrt[7]{\epsilon}$. Se $\epsilon = 10^{-7}$ allora l'errore

$$|x_\epsilon^{*(i)} - x^{*(i)}| = (10^{-7})^{1/7} = 1,$$

quindi il problema è mal condizionato.

$$|\delta y| = 10^{-7}$$

$$|\delta x| = 1$$

~~$x = 1 + \sqrt[7]{\epsilon}$~~

Metodo di bisezione

Si costruisce una successione di intervalli ($f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$):

$$I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots, I_k = [a_k, b_k]$$

tali che:

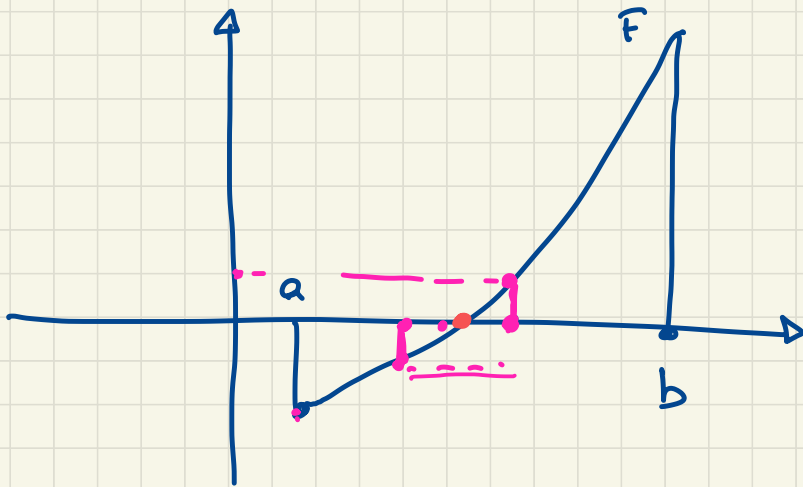
$$I_k \subset I_{k-1} \subset \dots \subset I_1$$

con $f(a_k)f(b_k) < 0$, $k = 1, 2, \dots$ ($a_1 = a$, $b_1 = b$). Al passo k si calcola

punto medio $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, $k = 1, 2, \dots$

e il valore $f(c_k)$. Se $f(c_k) = 0$, $c_k = x^*$, altrimenti:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k], & \text{se } f(c_k) > 0 \\ [c_k, b_k], & \text{se } f(c_k) < 0. \end{cases}$$

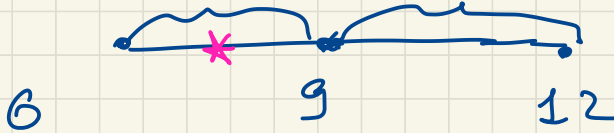


→ $F(a) \cdot F(b) < 0$

$$\begin{bmatrix} 6, 12 \\ a_1, b_1 \end{bmatrix} \rightarrow 6$$

$$c_1 = \frac{b_1 + a_1}{2} = \frac{9}{3}$$

$$|x^* - c_2| < 3$$



Metodo di bisezione

Esempio. Si vuole risolvere $x^2 - 78.8 = 0$ in $[6, 12]$.

$$f(6) = 36 - 78.8 < 0$$

$$f(12) = 144 - 78.8 > 0$$

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$
1	6	12	9	2.2
2	6	9	7.5	-22.55
3	7.5	9	8.25	-10.7375
4	8.25	9	8.625	-4.409375
5	8.625	9	8.8125	-1.139844
6	8.8125	9	8.90625	0.5212891
7	8.8125	8.90625	8.859375	-0.3114746
8	8.859375	8.90625	8.882813	0.1043579

8.882813 è una approssimazione della soluzione $\sqrt{78.8} \approx$
8.876936408 tale che

$$\rightarrow |8.882813 - x^*| \leq \frac{1}{2^8} 6 = 0.0234$$

L'errore assoluto è 0.00587... Occorrono 10 valutazioni di funzione.

$$[a_8, b_8] \rightarrow \frac{1}{2^8} \cdot [a, b] = \frac{1}{2^8} \cdot 6$$

Metodo di bisezione

$$c_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}$$

Osservazioni.

- ▶ $c = a + \frac{b-a}{2}$ altrimenti c_{k+1} può cadere esterno all'intervallo $[a_k, b_k]$.
esempio: $a = 0.983, b = 0.986, \mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$.
- ▶ $f(a)f(b)$ può non essere rappresentabile sulla macchina. per verificare il segno conviene quindi usare la funzione *sign*:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$F(10, 3, -5, 5)$$

$$0.983 +$$

$$0.986 =$$

$$\text{fl}(\overbrace{1.969}) \rightarrow = 0.196\cancel{9} \cdot 10^1 =$$
$$0.196 \cdot 10^1$$

$$0.196 \cdot 10^1 / 2 = 0.0980 \cdot 10^1$$

$$\text{fl}(0.0980 \cdot 10^1) = 0.980 \cdot 10^0$$

$$\uparrow$$
$$[0.983, 0.986]$$

Metodo di bisezione

$$\text{while } |b_n - a_n| < \epsilon$$

- L'algoritmo in aritmetica finita può non avere fine.

esempio: $a_k = 98.5$, $b_k = 98.6$, $\epsilon = 0.004$ in $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$. Infatti

- $c_k = 98.55$, ma $fl(c_k) = 0.985 \cdot 10^2$, quindi si genera una successione di iterati costanti.

Test modificato:

$$\rightarrow |b_k - a_k| < \epsilon + \text{eps} \cdot \max(|b|, |a|) \quad \& \quad \text{iter} < \text{itmax}$$



dove eps è la precisione di macchina.

Convergenza metodo di bisezione

Al passo k ,

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1)$$

quindi $x^* = \underbrace{c_{k+1}} \pm \epsilon_{k+1}$, dove


$$\epsilon_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b - a).$$


Viceversa, fissato ϵ tale che $\epsilon = \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$, il numero c_{k+1} è una approssimazione di x^* entro una tolleranza ϵ .

$$\epsilon = 10^{-4} \Rightarrow 10^{-4} = \frac{1}{2^{k+1}} (b-a)^6$$

Convergenza metodo di bisezione

Quindi per $k \rightarrow \infty$, $\{c_k\} \rightarrow x^*$ con velocità di convergenza pari a quella della successione $\{\frac{1}{2^k}\}$.

Il metodo fornisce inoltre una maggiorazione dell'errore, cioè fissata una tolleranza δ è possibile determinare il numero minimo di iterazioni k per ottenere un errore minore di δ . Infatti k è tale che:

$$\frac{1}{2^k}(b-a) < \delta \Rightarrow 2^k \geq \frac{b-a}{\delta} \Rightarrow$$



$$k \geq \log_2 \frac{b-a}{\delta}$$

$$\delta = \varepsilon$$

Complessità computazionale del metodo: ad ogni iterazione occorrono 2 valutazioni di funzione.

Il metodo delle approssimazioni successive

o di punto fisso

$$x_0$$
$$x_{k+1} = G(x_k)$$

Il problema di determinare lo zero di una funzione in genere non si risolve in un numero finito di passi. Si deve generare un **procedimento iterativo**.

- ▶ determinare una approssimazione iniziale alla soluzione x^* di $f(x) = 0$
- ▶ Determinare una relazione funzionale a partire da $f(x)$
- ▶ a partire da x_0 , generare una successione di iterati x_k fino ad ottenere la precisione desiderata per l'approssimazione del risultato.

Il metodo delle approssimazioni successive

Il problema di cercare una radice di

$$(1) \quad f(x) = 0$$

è connesso al problem di cercare una soluzione dell'equazione

$$(2) \quad x = g(x)$$

equazione di punto fisso

cioè un punto fisso della funzione $g(x)$.

$$g(x) = x - f(x)\Phi(x)$$

•

Il metodo delle approssimazioni successive

Se $f(x)$ si annulla in $[a, b]$ e $\Phi(x)$ è una funzione tale che:

$$0 < |\Phi(x)| < \infty, \quad x \in [a, b]$$

allora è equivalente risolvere una delle due equazioni:

$$(1) \quad f(x) = 0 \quad g(x) = x. \quad (2)$$

Quindi si riporta il problema di calcolare lo zero di una funzione $f(x)$ al problema di calcolare il punto fisso di una funzione $g(x)$.

Geometricamente è l'intersezione delle due curve:

$$y = x \quad y = g(x)$$

→ (1) $f(x) = 0$

→ (2) $x = g(x)$

$$g(x) = x - f(x) \phi(x)$$

$$(2) \Rightarrow \cancel{x} = \cancel{x} - f(x) \phi(x) \quad \leftarrow$$
$$- f(x) \cdot \phi(x) = 0$$

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$(2) \Rightarrow -f(x) \phi(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$(1)$$

\Downarrow

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

$$g(x) = x - \underline{f(x) \phi(x)}$$

x_0 arbitrarily

$$x = g(x)$$

$x_{k+1} = g(x_k)$

 →

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^* \rightarrow \text{solution}$$

$$x^*: \boxed{F(x^*) = 0} \rightarrow \underline{x^* = g(x^*)}$$

$$x_k \approx x^* \quad \underline{\text{ERRORE TRONCAMENTO}}$$

$$x_{k+1} = g(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^*$$

↓

$$x = f(x) \quad \underline{\phi(x)}$$

$$A[i, j, k]$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$B = A[:, :, 0]$$

$$B1 = A[:, :, 1]$$

$$B2 = A[:, :, 2]$$

$$AP = [i, j, k]$$

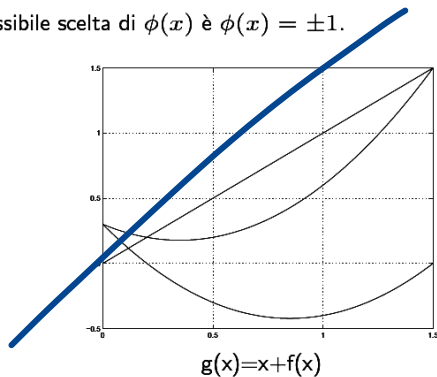
$$C = \sum_{i=1}^P \dots$$

$$C1 = \dots$$

$$C2 = \dots$$

Il metodo delle approssimazioni successive

Una possibile scelta di $\phi(x)$ è $\phi(x) = \pm 1$.



Il metodo delle approssimazioni successive

$$x = g(x) ?$$

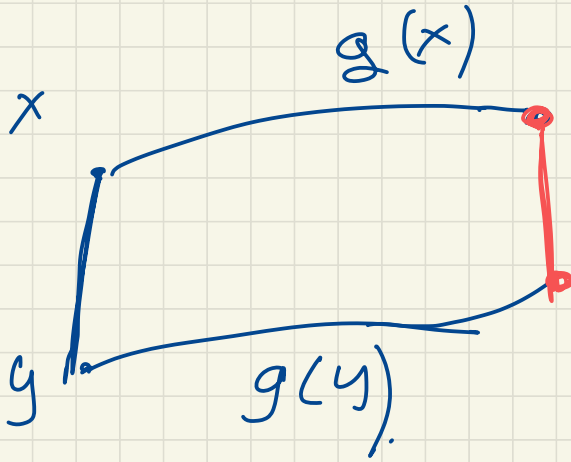
Teorema di esistenza e unicità del punto fisso nel modello continuo.

Sia $g(x)$ continua in $[a, b]$ e tale che $g(x) \in [a, b]$. Sia L una costante $0 \leq L < 1$ tale che, per ogni $x, y \in [a, b]$ si ha:

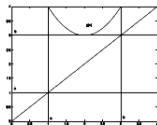
$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

ossia g è una contrazione in $[a, b]$. Allora esiste un unico punto fisso x^* di $g(x)$ in $[a, b]$. Dimostrazione in aula

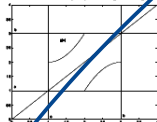
Osservazione. Se $g(x)$ è derivabile in $[a, b]$ con $|g'(x)| \leq L < 1$ per $x \in [a, b]$, allora $g(x)$ è una contrazione. Il viceversa non è vero perchè $g(x)$ può non essere differenziabile.



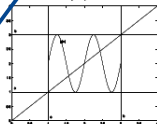
Il metodo delle approssimazioni successive



Occorre $g(x) \in [a, b]$



Occorre $g(x)$ continua perchè ci sia un punto fisso



Occorre che $g(x)$ non oscilli troppo, ossia che sia una contrazione, perchè ci sia un unico punto fisso.

centerline

Il metodo delle approssimazioni successive

Data una approssimazione iniziale x_0 di x^* , punto fisso di $g(x)$ in $[a, b]$ si genera una successione di iterati mediante il metodo delle approssimazioni successive o del punto fisso o iterazione funzionale:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$



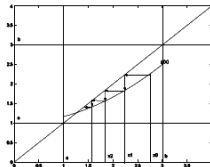
Convergenza del metodo allo zero della funzione.

Se $g(x)$ è continua e la successione $\{x_k\}$ converge per $k \rightarrow \infty$ a un punto x^* , allora x^* è punto fisso di $g(x)$. (Infatti:

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = g(x^*)$$

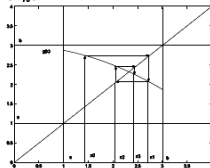
Geometricamente, il metodo dell'iterazione funzionale equivale alla costruzione di una poligonale orientata con lati orizzontali e verticali nel piano xy .

Il metodo delle approssimazioni successive



Convergenza monotona:

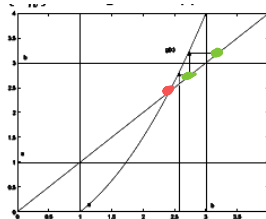
$\{x_k\}$ converge a x^* approssimando sempre per eccesso o per difetto.



Convergenza alternata:

$\{x_k\}$ converge a x^* approssimando per eccesso e per difetto.

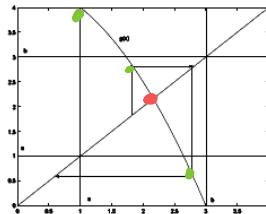
Il metodo delle approssimazioni successive



NON CONTRAZIONE

$$|g'(x)| > 1$$

$$g'(x) > 1$$



NON CONTRAZIONE

$$|g'(x)| > 1$$

$$g'(x) < -1$$

Per $|g'(x)| > 1$ non c'è convergenza.

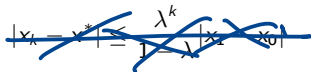
Il metodo delle approssimazioni successive

Teorema di convergenza globale del metodo delle approssimazioni successive.

Sia $g(x)$ una funzione definita in $[a, b]$. Sia:

- ▶ $g(x)$ continua in $[a, b]$,
- ▶ $g(x) \in [a, b]$
- ▶ $g(x)$ una contrazione in $[a, b]$

Allora per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione degli iterati $\{x_k\}$ con $x_k = g(x_{k-1})$ $k = 1, 2, \dots$ converge per $k \rightarrow \infty$ all'unico punto fisso x^+ di $g(x)$ in $[a, b]$. Inoltre vale:


$$|x_k - x^*| \leq \lambda^k |x_1 - x_0|$$

Il metodo delle approssimazioni successive

$$f(x) = 0$$

Esempio.

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0, \quad x \in [1, 2]$$

si considera $x_0 = 1.5$.

$$1. \quad x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = g_1(x)$$

$$2. \quad x = \left(\frac{1}{x} - 4x\right)^{1/2} = g_2(x) \quad (\text{da } x^3 = 10 - 4x^2)$$

$$3. \quad x = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2} = g_3(x) \quad (\text{da } x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3))$$

$$4. \quad x = \left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2} = g_4(x) \quad (\text{da } x^3 + 4x^2 = 10)$$

$$5. \quad x \leftarrow x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = g_5(x) \quad \left(\text{da } x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) \rightarrow \text{Newton}$$

$$g = x - f \cdot \phi$$

Il metodo delle approssimazioni successive

$$x_0 = 1.5 \in [1, 2]$$

$$x_k = g_1(x_{k-1}) \quad x_k = g_2(x_{k-1})$$

Newton

k	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	$1.08 \cdot 10^8$	impossibile	1.375170253	1.365264748	1.365230013
...	diverge		
15			1.365223680	1.365230013	
...			...		
30			1.365230013		

Non tutte le scelte portano ad un metodo convergente (caso 1) o ben definito (caso 2). Inoltre la velocità di convergenza del metodo è diversa nei vari casi (con il metodo di bisezione per avere la stessa precisione sono necessarie 27 valutazioni di funzione)

Teorema di convergenza locale



Teorema Sia x^* un punto fisso di $g(x)$; si suppone che $g(x)$ sia continua e sia una contrazione per ogni $x \in [x^* - \rho, x^* + \rho] = I_\rho$.

Allora, per ogni $x_0 \in I_\rho$, la successione degli $\{x_k\}$ è ben definita, ossia $x_k \in I_\rho$ e converge per $k \rightarrow \infty$ a x^* .

Inoltre, x^* è l'unico punto fisso di $g(x)$ in I_ρ .

Propagazione degli errori

Poichè si opera coi numeri finiti, è impossibile calcolare esattamente la funzione $g(x)$ per x assegnato. Piuttosto, si calcola una approssimazione di $g(x)$ data da

$$a(x) = g(x) + \delta(x)$$

ove $\delta(x)$ è l'errore commesso. Di solito è nota una maggiorazione dell'errore:

$$|\delta(x)| \leq \delta.$$

Operando in aritmetica finita, il metodo delle approssimazioni successive diventa:

$$w_{k+1} = a(w_k) = g(w_k) + \delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ove w_k è il k -esimo iterato ottenuto operando coi numeri finiti e $|\delta_k| \leq \delta$.

In generale, la successione dei w_k non converge. Tuttavia, sotto opportune condizioni, è possibile determinare una approssimazione di x^* tanto più accurata tanto più δ è piccolo.

Teorema Sia x^* un punto fisso di $g(x)$. Supponiamo che, in un intervallo $I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$, $g(x)$ sia continua e contrattiva. Allora, per ogni $w_0 \in I_{\rho_0} = [x^* - \rho_0, x^* + \rho_0]$ con $\rho_0 = \rho - \frac{\delta}{1-L}$, con $\delta \geq |\delta_k|$, la successione dei w_k è tale che:

$$|w_k - w^*| \leq \frac{\delta}{1-L} + L^k \left(\rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) \quad \text{e} \quad w_k \in I_\rho.$$

Il primo termine può essere grande se L è prossimo a 1; il secondo termine tende a 0 per $k \rightarrow \infty$. Pertanto, non si ha più convergenza della successione degli iterati a x^* .

Osservazione

Si osservi che:

$$\begin{aligned} |w_{k+1} - w_k| &= |w_{k+1} - x^* + x^* - w_k| \\ &\leq |w_{k+1} - x^*| + |x^* - w_k| \\ &\leq \frac{\delta}{1-L} + L^k \left(\rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) + \frac{\delta}{1-L} + L^{k+1} \left(\rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) \\ &= \frac{2\delta}{1-L} + L^k (L+1) \left(\rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) \end{aligned}$$

Per quanto k sia preso grande, la differenza tra due iterati successivi non può essere più piccola di $\frac{2\delta}{1-L}$ a causa degli errori di arrotondamento nel calcolo di $g(x)$.

Criteri di arresto

$$\rightarrow F(x) = 0$$

$$x = g(x)$$

Occorre determinare un criterio per vedere se l'approssimazione ottenuta è un punto fisso di $g(x)$ ossia se $x - g(x) = \phi(x)f(x) = 0$.

Si ritiene che x_k sia una approssimazione accettabile se contemporaneamente:

$$|f(x_k)| \leq \epsilon_1$$

e

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon_2$$

2 soluzioni

oppure

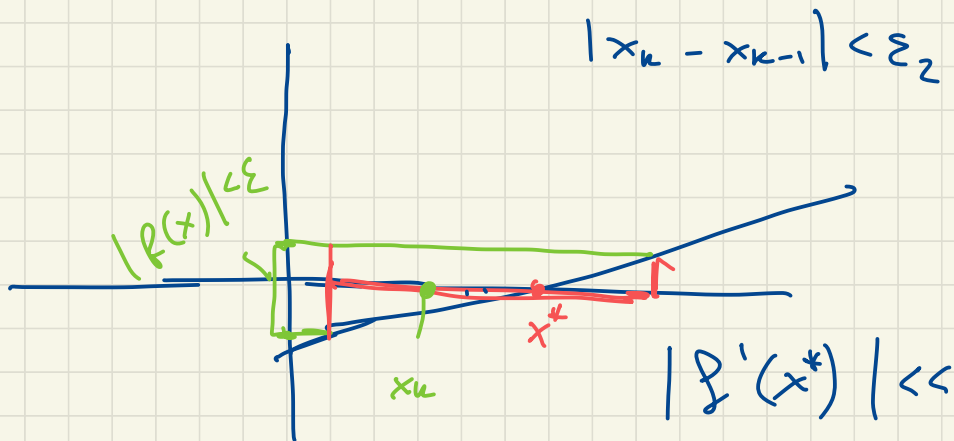
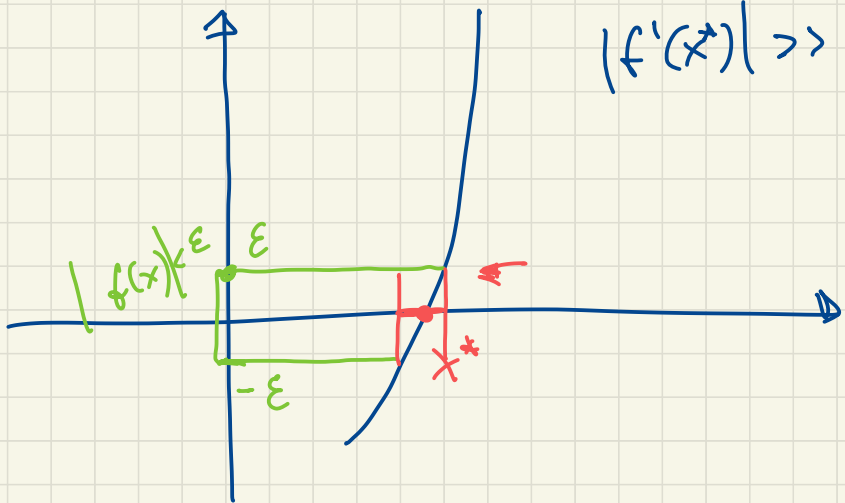
$$\frac{|f(x_k)|}{f_{\max}} \leq \sigma_1$$

e

$$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \leq \sigma_2$$

dove $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1, \sigma_2$ sono tolleranze assegnate e $f_{\max} = \max_{x \in I_p} |f(x)|$

\downarrow
 $f(x_0)$



Inoltre deve essere $\epsilon_2 \geq \frac{2\delta}{1-L}$, poichè questo termine che tiene conto degli errori di arrotondamento non converge a 0 per $k \rightarrow \infty$.

$x_k - x_{k-1}$ può convergere a 0, pur essendo le due successioni divergenti. Se non si conosce nulla di $f(x)$ conviene applicare i test relativi.

Ordine di convergenza

Definizione Sia x^* un punto fisso di $g(x)$. Se per ogni $x_0 \in I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$, la successione generata con l'iterazione funzionale è tale che esistono una costante positiva C e un positivo p tale che

$$|x_k - x^*| \leq C|x_{k-1} - x^*|^p, \quad k \geq 1$$

con $C > 0$ per $p > 1$ e $0 < C < 1$ per $p = 1$, allora il metodo iterativo è di ordine p .

Se $p = 1$, il metodo si dice lineare; se $p = 2$, ha velocità di convergenza quadratica.

C si dice *costante asintotica d'errore*.

Vale:

$$e_{k+1} = |x_{k+1} - x^*| \approx C|x_k - x^*|^p = Ce_k^p,$$

o anche

$$e_{k+1} = (C + \delta_k)e_k^p \quad \text{con} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0.$$

Velocità convergenza

metodo punto fisso

- Se x^* è un punto fisso di $g(x)$ e $g \in C^1$, con $g'(x^*) \neq 0$ e $|g'(x^*)| < 1$, allora esiste un intorno $I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$ per cui $|g'(x)| < 1$ per $x \in I_\rho$.
Nell'intervallo I_ρ , per ogni $x_0 \in I_\rho$ il metodo iterativo converge al punto fisso in modo lineare.

ordine conv. $p=1 \rightarrow$ lineare

- Se x^* è un punto fisso di $g(x)$ e $g \in C^2$, con $g'(x^*) = 0$ e $g''(x^*) \neq 0$, allora esiste un intorno $I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$ tale che per ogni $x_0 \in I_\rho$ il metodo iterativo converge al punto fisso con velocità di convergenza quadratica e vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|g''(x^*)|}{2}$$

o equivalentemente

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{|g''(\xi_k)|}{2} |x_k - x^*|^2 \quad \text{con } \xi_k \in I_\rho$$

Metodo di Newton

particolare metodo di punto fisso

- ▶ Data l'equazione $f(x) = 0$, si può determinare la soluzione x^* come punto fisso di

$$x = x - \phi(x)f(x) = g(x)$$

con $\phi(x) \neq 0$ per ogni x nell'intervallo in cui si cerca la soluzione.

- ▶ *Velocità di convergenza*

Vale $g'(x) = 1 - \phi(x)f'(x) - \phi'(x)f(x)$ e $g'(x^*) = 1 - \phi(x^*)f'(x^*)$.

Il metodo iterativo ha velocità di convergenza lineare se

$$\phi(x^*) \neq \frac{1}{f'(x^*)}, \text{ supposto } f'(x^*) \neq 0.$$

Se $\phi(x)$ è costante, $\phi(x) = m \neq \frac{1}{f'(x^*)}$, il metodo è lineare.

se $\phi(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)} \Rightarrow p = 2$ (quadratica)

La convergenza è quadratica se

- $\phi(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$ con $f'(x^*) \neq 0$.

Allora o si pone $\phi(x) = \frac{1}{f'(x^*)}$ costante (ma x^* è incognito), oppure si pone

$$\phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\rightarrow g(x) = x - f(x) \cdot \phi(x) \\ = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ottenendo un metodo a convergenza quadratica dato da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Il metodo è detto **metodo di Newton**.

Vale:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x^*)^2 - f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = 0$$

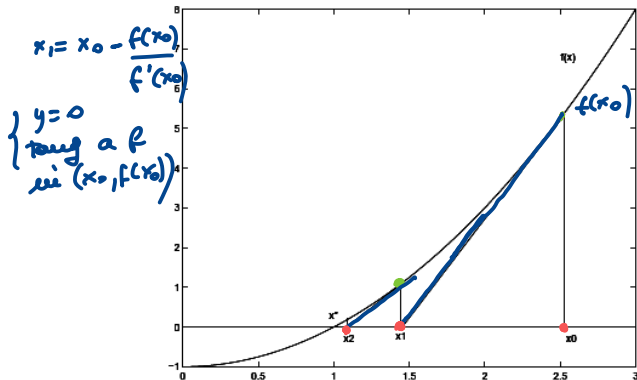
$$g''(x) = \frac{(f'(x^*)f''(x^*) + f(x^*)f'''(x^*))f'(x^*)^2 - 2f(x^*)f''(x^*)^2f'(x^*)}{f'(x^*)^4} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

Allora, se $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$, il metodo di Newton ha convergenza quadratica con costante asintotica di convergenza $\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

E' detto anche *metodo delle tangenti* perchè geometricamente il punto x_{k+1} è il punto d'intersezione tra $y = 0$ e la retta tangente a $f(x)$ in $(x_k, f(x_k))$:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Convergenza locale del metodo di Newton



Convergenza locale del metodo di Newton

g del metodo di Newton

Sia x^* uno zero di $f(x)$. Sia $f(x)$ continua insieme alle sue derivate prima, seconda e terza (continuità di g, g', g'').

Sia $f'(x) \neq 0$ per x in un opportuno intorno di x^* e sia $f''(x^*) \neq 0$ ($f(x)/f'(x)$ deve essere definita e deve essere $g''(x) \neq 0$).

Allora, per ogni $x_0 \in I_\rho$, la successione generata dal metodo di Newton converge a x^* in modo quadratico.

$$I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$$

Convergenza globale del metodo di Newton

Teorema Sia $f \in C^2[a, b]$. Sia inoltre:

- ▶ $f(a) < 0, f(b) > 0$;
- ▶ $f'(x) \neq 0$;
- ▶ $f''(x) \leq 0$; ←
- ▶ $|f(b)| \leq (b - a)|f'(b)|$.

no 1

Allora il metodo di Newton genera una successione di iterati convergenti all'unica soluzione di $f(x) = 0$ appartenente ad $[a, b]$ a partire da qualunque $x_0 \in [a, b]$.

MODI ALTERNATIVI

Il teorema resta valido se valgono le seguenti condizioni:

- ▶ $f(a) < 0, f(b) > 0$;
- ▶ $f'(x) \neq 0$;
- ▶ $f''(x) \geq 0$;
- ▶ $|f(a)| \leq (b - a)|f'(a)|$.

MOD 2

oppure

- ▶ $f(a) > 0, f(b) < 0$;
- ▶ $f'(x) \neq 0$;
- ▶ $f''(x) \geq 0$;
- ▶ $|f(b)| \leq (b - a)|f'(b)|$.

MOD 3

oppure

- ▶ $f(a) > 0, f(b) < 0;$
- ▶ $f'(x) \neq 0;$
- ▶ $f''(x) \leq 0;$
- ▶ $|f(a)| \leq (b - a)|f'(a)|.$

modo 4

Esempio 1

~~$f(x) =$~~ $\sin(x) - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ in $[1, 2]$.

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{x}{2}; \quad f''(x) = -\sin(x) - \frac{1}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k) - \left(\frac{x_k}{2}\right)^2}{\cos(x_k) - \frac{x_k}{2}} \quad \leftarrow \text{Newton}$$

costante asintotica d'errore $\frac{g''(x^*)}{2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \simeq 0.54$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$-f(x_k)/f'(x_k)$
0	1.5	0.434995	-0.67926	0.64039
1	2.14039	-0.303197	-1.60948	-0.18838
2	1.95201	-0.024372	-1.34805	-0.01808
3	1.93393	-0.000233	-1.32217	-0.00018
4	1.93375	0.000005		

Esempio 2

$$f(x) = x^2 - \gamma = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - \gamma}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{\gamma}{x_k} \right) \quad \leftarrow \text{Newton}$$

Per $\gamma = 2$ e $[1, 2]$ si ha:

k	x_k
0	1.5
1	1.41666666
2	1.41421568
3	1.414213561
4	1.414213562

$$|x_k - x^*| \leq C |x_{k-1} - x^*|^2$$

↑

costante asintotica d'errore $\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$ se γ è piccolo, la convergenza può essere lenta.

Considerazioni algoritmiche

I criteri di arresto del metodo di newton sono gli stessi del metodo delle approssimazioni successive.

La **complessità computazionale** del metodo di Newton è pari ad una valutazione della funzione e una valutazione della derivata prima per passo.

Se la complessità di f' è analoga a quella di f , si dice che il metodo richiede due valutazioni di funzioni per passo.