Metodi Numerici

- Metodi Diretti: la soluzione viene calcolata in un numero finito di passi modificando la matrice del problema in modo da rendere piú agevole il calcolo della soluzione.
  - Matrici triangolari: Metodi di Sostituzione;
  - Metodo di Eliminazione di Gauss;
  - Matrici simmetriche: Metodo di Cholesky;
- Metodi Iterativi: Calcolo di una soluzione come limite di una successione di approssimazioni $\mathbf{x}_k$, senza modificare la struttura della matrice $\mathbf{A}$. Adatti per sistemi di grandi dimensioni con matrici **sparse** (pochi elementi non nulli).

1. Il problema nel continuo in $\mathbb{R}$ ha soluzione? È unica?

2. Metodi numerici (Algoritmi) per la soluzione del problema
   - A. Accuratezza
   - B. Costo computazionale (Complessità) moltip e divisioni

3. Condizionamento ←

→ errore inerente

Risoluzione di un sistema lineare

(ALGEBRA LINEARE NUMERICA)

$$Ax = b$$

$A \; m \times n \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} m > n \\ m < n \\ m = n \end{array}$

$x \in \mathbb{R}^m \, , \, b \in \mathbb{R}^m$

$\boxed{m = n \rightarrow \text{quadrati} \quad A \; n \times n}$

① Quando $Ax = b$ ha una (unica) soluzione?

$Ax = b$ ha una unica soluzione sse A è non singolare $\Leftrightarrow$ A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

· A non singolare $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Calcolo di A^{-1} richiede

$O(n^3)$ operazioni

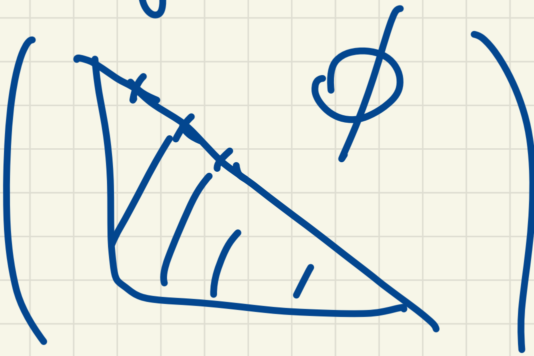
METODI DIRETTI

DECOMPOSIZIONE (FATT.)

$$A = L \cdot U$$

L triangolare inferiore

$L =$

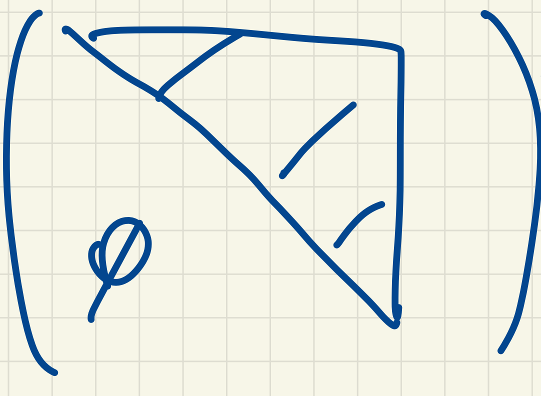


$l_{ij} = 0$

$j > i$

U = triangolare superiore

$U =$



$u_{ij} = 0$

$j < i$

$$\begin{cases} Ax = b \\ \underbrace{L \cdot U x}_{y} = b \end{cases} \qquad A = L \cdot U$$

$$\begin{array}{ll} 1 & \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \\ 2 & \end{array}$$

Sistema Triangolare Superiore $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \ \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \ \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \ \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \ \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \ \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$x_{n-3} = \frac{b_{n-3} - \sum_{j=n-2}^{n} a_{n-3,j}x_j}{a_{n-3,n-3}}$$

Riassumendo:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = n-1, \ldots, 1$$

Riassumendo:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = n-1, \ldots, 1$$

sostituzione all'indietro

```
functionx = UTriSol(U, b)
% Solves the nonsingular upper triangular system Ux = b.
% where U is n-by-n, b is n-by-1, and X is n-by-1.
n = length(b); x = zeros(n, 1);
forj = n : -1 : 2
  x(j) = b(j)/U(j, j);
  b(1 : j - 1) = b(1 : j - 1) - x(j) * U(1 : j - 1, j);
end
x(1) = b(1)/U(1, 1);
```

Complessità computazionale

$\boxed{\mathcal{O}(n^2/2)}$

Sistema Triangolare Inferiore $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & & & & \\
a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\
\vdots & & \ddots & & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\
a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \ \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \ \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \;\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \;\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1 - a_{3,2}x_2}{a_{3,3}}$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \;\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1 - a_{3,2}x_2}{a_{3,3}}$$

$$x_4 = \frac{b_4 - \sum_{j=1}^{3} a_{4,j}x_j}{a_{4,4}}$$

Riassumendo:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = 2, \ldots, n$$

Riassumendo:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = 2, \ldots, n$$

sostituzione all'avanti

```
function x = LTriSol(L, b)
% Solves the nonsingular lower triangular system
% Lx = b where L is n-by-n, b is
% n-by-1, and x is n-by-1.
n = length(b); x = zeros(n, 1);
for j = 1 : n - 1
  x(j) = b(j)/L(j, j);
  b(j + 1 : n) = b(j + 1 : n) - L(j + 1 : n, j) * x(j);
end
x(n) = b(n)/L(n, n);
```

Complessità computazionale

$\boxed{\mathcal{O}(n^2/2)}$

Metodo di Eliminazione di Gauss $R = U$

Si eliminano le incognite in modo sistematico per trasformare i sistema lineare in uno equivalente con matrice a struttura triangolare superiore:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

La soluzione $\mathbf{x}$ viene calcolata con l'algoritmo di sostituzione all'indietro in $\mathcal{O}(n^2/2)$ flops.

$A = L \cdot R$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Passo 1:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right]$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Passo 1:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] \qquad r_2 - 2 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \quad -2$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Passo 1:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] \qquad \begin{array}{l} r_2 - 2 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -2 \\ r_3 - 4 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 5 \;\; -12 \end{array}$$

Esempio

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}
$$

$\boxed{\text{Passo 1:}}$

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\
8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\
6 & 7 & 9 & 8 & -7
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{l}
\\
r_2 - 2 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \quad -2 \\
r_3 - 4 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 5 \quad -12 \\
r_4 - 3 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 8 \quad -16
\end{array}
$$

Esempio(II)

Passo 2:

Esempio(II)

Passo 2:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
$$

Esempio(II)

$\boxed{\text{Passo 2:}}$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -16 \end{array}\right] \end{array} \quad r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -6$$

Esempio(II)

Passo 2:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -6 \\ r_4 - 4 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -8 \end{array}$$

Esempio(II)

Passo 2:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - 3 \cdot r_2 \to \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -6 \\ r_4 - 4 \cdot r_2 \to \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -8 \end{array}$$

Passo 3:

Esempio(II)

Passo 2:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\
r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -6 \\
r_4 - 4 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -8
\end{array}
$$

Passo 3:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -8
\end{array}\right]
$$

Esempio(II)

Passo 2:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -6 \\ r_4 - 4 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -8 \end{array}$$

Passo 3:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 - 1 \cdot r_3 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; -2 \end{array}$$

Esempio (III)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Soluzione del sistema triangolare:

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Soluzione del sistema triangolare: `x=UtriSol(R,y)`

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Soluzione del sistema triangolare: `x=UtriSol(R,y)`

$$\mathbf{x} = (2, 1, -2, -1)^t$$

Fattorizzazione LR (I)

- Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

Fattorizzazione LR (I)

Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

$\boxed{\text{Passo 1}}$

Fattorizzazione LR (I)

Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

$\boxed{\text{Passo 1}}$

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & 0 & 1 & \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}
$$

Fattorizzazione LR (I)

Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

$$\boxed{l_{i,1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}}$$

Passo 1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2}$$

$$l_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad l_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad l_{41} - \frac{a_{41}}{a_{11}}$$

Fattorizzazione LR (II)

Fattorizzazione LR (II)

$\boxed{\text{Passo 2}}$

Fattorizzazione LR (II)

$\boxed{\text{Passo 2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A_2

Fattorizzazione LR (II)

$\boxed{\text{Passo 2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \emptyset & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3$$

$$l_{i,2} = - \frac{a_{i2}}{a_{22}}$$

Fattorizzazione LR (III)

Fattorizzazione LR (III)

Passo 3

Fattorizzazione LR (III)

Passo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione LR (III)

3 passi = $n-1$

Passo 3

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}
$$

$$
L_3 \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{R}
$$

$$
l_{i,3} = -\frac{a_{i,3}}{a_{33}}
$$

Fattorizzazione LR (III)

Passo 3

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
L_3 \qquad \cdot \qquad \mathbf{A}_3 \qquad = \qquad \mathbf{R}
$$

Riassumendo: $L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$

Fattorizzazione LR (III)

Passo 3 $\det L_k \neq 0 \quad k = 1, 2, 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \quad \cdot \quad \mathbf{A}_3 \quad = \quad \mathbf{R}$$

Riassumendo: $\boxed{L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}}$

$\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ con $\mathbf{L} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$

$$L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 A = R$$

$$\underbrace{L_3^{-1} L_3}_{I} \cdot L_2 \cdot L_1 A = L_3^{-1} R$$

$$A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}}_{L} R$$

R triangolare superiore

L triangolare inferiore?

$$L_k^{-1} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \emptyset \\ x & \ddots & & \\ x & x & \ddots & \\ x & x & & 1 \end{pmatrix} \quad -e_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \phi \\ x & \ddots & \\ x & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ x & \ddots & \\ x & x & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \emptyset \\ X & \ddots \ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo della matrice $\mathbf{L}$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & & 1 & \\ 3 & \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & 4 & & 1 \end{pmatrix} \quad L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \ldots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \ldots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$$

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

k

$$l_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \quad i = k+1, \ldots, n$$

$k = 1, 2, 3$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \ldots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \overset{L_k}{\Longrightarrow}$$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \ldots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \quad \overset{L_k}{\Longrightarrow} \quad L_k \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \leq n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \leq n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

$$\Downarrow$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \leq n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i,k} = a_{i,k} - \ell_{i,k} \cdot a_{k,k} = 0$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \leq n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i,k} = a_{i,k} - \ell_{i,k} \cdot a_{k,k} = 0$$

$$\ell_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$$

Matrice L_1

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\ell_{2,1} & 1 & & & \\ -\ell_{3,1} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\ell_{n,1} & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \overline{\ell}_1 \cdot \mathbf{e}_1^t$$

$$\mathbf{e}_1^t = (1, 0, \ldots, 0) \quad \overline{\ell}_1 = (0, \ell_{2,1}, \ell_{3,1}, \ldots, \ell_{n,1})^t$$

Matrici L_k

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k+1,k} & \ddots & & \\ & & -\ell_{k+2,k} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t$$

$\mathbf{e}_k^t = (0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots, 0)$ $\overline{\ell}_k = (0, \ldots, 0, 0_k, \ell_{k+1,k}, \ldots, \ell_{n,k})$

Osservazioni (I)

- Matrice inversa L_k^{-1}:

$$\left(\mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t\right) \cdot \left(\mathbf{I} - \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t\right) = \mathbf{I} - \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t = \mathbf{I}$$

(infatti: $\mathbf{e}_k^t \overline{\ell}_k = 0$) quindi:

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & \ddots & & \\ & & \ell_{k+2,k} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t$$

Osservazioni (II)

- Moltiplicazione fra matrici: $L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1}$

$$\left(\mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t\right)\left(\mathbf{I} + \overline{\ell}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1}^t\right) = \mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t + \overline{\ell}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1}^t$$

infatti: $\overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t \overline{\ell}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1}^t = 0$ quindi:

$$L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & & \\ & & \ell_{k+2,k} & \ell_{k+2,k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & \ell_{n,k+1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice L

Segue quindi che $\mathbf{L} = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$ è data da:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{2,1} & 1 & & & \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A}$ viene fattorizzata nel prodotto di due matrici triangolari:

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}}$$

Algoritmo

```
function[A] = LU_np(A)
n = size(A, 1);
for k = 1 : n - 1
  if abs(A(k, k)) > eps,
  A(k + 1 : n, k) = A(k + 1 : n, k)/A(k, k);
  A(k + 1 : n, k + 1 : n) = ...
  A(k + 1 : n, k + 1 : n) - A(k + 1 : n, k) * A(k, k + 1 : n);
  endend
```

Algoritmo

$\mathtt{function}[\mathtt{A}] = \mathtt{LU\_np}(\mathtt{A})$

$\mathtt{n} = \mathtt{size}(\mathtt{A}, 1);$

$\mathtt{for\ k} = 1 : \mathtt{n} - 1$

$\mathtt{if\ abs}(\mathtt{A}(\mathtt{k}, \mathtt{k})) > \mathtt{eps},$

$\mathtt{A}(\mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}) = \mathtt{A}(\mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}) / \mathtt{A}(\mathtt{k}, \mathtt{k});$

$\mathtt{A}(\mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}, \mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}) = \ldots$

$\mathtt{A}(\mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}, \mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}) - \mathtt{A}(\mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}) * \mathtt{A}(\mathtt{k}, \mathtt{k} + 1 : \mathtt{n});$

$\mathtt{endend}$

Algoritmo

$\mathtt{function}[\mathtt{A}] = \mathtt{LU\_np}(\mathtt{A})$

$\mathtt{n} = \mathtt{size}(\mathtt{A}, 1);$

$\mathtt{for}\ \mathtt{k} = 1 : \mathtt{n} - 1$

$\quad \mathtt{if}\ \mathtt{abs}(\mathtt{A}(\mathtt{k}, \mathtt{k})) > \mathtt{eps},$

$\quad\quad \mathtt{A}(\mathtt{k}+1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}) = \mathtt{A}(\mathtt{k}+1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}) / \mathtt{A}(\mathtt{k}, \mathtt{k});$ $\quad \bar{\ell}_k$

$\quad \mathtt{A}(\mathtt{k}+1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}+1 : \mathtt{n}) = \ldots$

$\quad \mathtt{A}(\mathtt{k}+1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}+1 : \mathtt{n}) - \mathtt{A}(\mathtt{k}+1 : \mathtt{n}, \mathtt{k}) * \mathtt{A}(\mathtt{k}, \mathtt{k}+1 : \mathtt{n});$

$\quad \mathtt{endend}$

Complessità Computazionale

$$\mathtt{for}\ \ \mathtt{k} = \mathtt{1} : \mathtt{n} - \mathtt{1}$$

$$\mathtt{for}\ \ \mathtt{i} = \mathtt{k} + \mathtt{1} : \mathtt{n}$$

$$\mathtt{for}\ \ \mathtt{j} = \mathtt{k} + \mathtt{1} : \mathtt{n}$$

$$\mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{j}) - \mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{k}) * \mathtt{A}(\mathtt{k},\mathtt{j}); \left.\right\} \begin{array}{l} 2(\mathtt{n}-\mathtt{k})^2 \\ flops \end{array}$$

$$\mathrm{end}, \mathrm{end}, \mathrm{end}$$

Complessità Computazionale

$$\texttt{for } k = 1 : n - 1$$

$$\texttt{for } i = k + 1 : n$$

$$\texttt{for } j = k + 1 : n$$

$$\left.\texttt{A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) * A(k,j);}\right\} \begin{array}{l} 2(n-k)^2 \\ flops \end{array}$$

$$\texttt{end, end, end}$$

Complessità Fattorizzazione LR:

$$2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2$$

Complessità Computazionale

$$
\begin{array}{l}
\mathtt{for\ \ k = 1 : n - 1} \\
\quad \mathtt{for\ \ i = k + 1 : n} \\
\quad \mathtt{for\ \ j = k + 1 : n} \\
\qquad \mathtt{A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) * A(k,j);} \quad \left.\right\} \begin{array}{l} \mathtt{2(n-k)^2} \\ flops \end{array} \\
\mathrm{end, end, end}
\end{array}
$$

Complessità Fattorizzazione LR:

$$2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Complessità Computazionale

$$\texttt{for } k = 1 : n - 1$$

$$\texttt{for } i = k + 1 : n$$

$$\texttt{for } j = k + 1 : n$$

$$\left.\texttt{A}(i,j) = \texttt{A}(i,j) - \underline{\texttt{A}(i,k) * \texttt{A}(k,j)};\right\} \begin{array}{l} 2(\texttt{n} - \texttt{k})^2 \\ flops \end{array}$$

comprese $*$ e $/$

o meglio $+$ e $-$

$$\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

$$\texttt{end, end, end}$$

Complessità Fattorizzazione LR:

$$\boxed{2\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2}_{} = 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \approx \mathcal{O}\left(\frac{2n^3}{3}\right)}$$

$Ax = b$

① Calcolare L e R $\quad O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

② Risolvere $Ly = b$ $\quad O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

③ Risolvere $Ux = y$ $\quad O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

$$O\left(\frac{n^3}{3}\right) + O\left(\frac{n^2}{2}\right) + O\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

$$\simeq O\left(\frac{n^3}{3}\right) + O\left(n^2\right)$$

Calcolo A^{-1} $\quad O\left(n^3\right)$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{A non sing.}$$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{1,1} = 0$$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{1,1} = 0 \quad \Rightarrow \ell_{2,1} =?$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \qquad \ell_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{1,1} = 0 \quad \Rightarrow \ell_{2,1} = ?$$

A ~~è non sing~~olare ma non si può calcolare la fattorizzazione LR

! Non tutte le matrici invertibili si possono fattorizzare in L·R

Teorema

Se A è non singolare e tutti i suoi minori principali di ordine k, $k = 1 \ldots n-1$, sono non singolari; allora $\exists\, L, U$ triangolare inferiore e superiore non singolari tali che

$$A = L \cdot U$$

$$D = \begin{pmatrix} x & x & x & v \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & \boxed{1 - 10^{20}} \end{pmatrix} = 1$$

$L = L_1$

$x \quad -10^{20} = y$

$x + y = y = -10^{20}$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & 1 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

$$1 - 10^{20} = -10^{20}(1 + \eta), \quad \eta = -10^{-20}$$

$$fl(1 - 10^{20}) = -10^{20} \text{poichè } \ |\eta| < \text{eps} \approx 10^{-16}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & 1 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

$$1 - 10^{20} = -10^{20}(1 + \eta), \quad \eta = -10^{-20}$$

$$fl(1 - 10^{20}) = -10^{20} \text{poichè } |\eta| < \text{eps} \approx 10^{-16}$$

Quindi le matrici calcolate sono: $\boxed{\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}}$

calcolata nel sistema fl. point

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & -10^{20} \end{pmatrix}} \quad \widetilde{\mathbf{L}} \cdot \widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

! ERRORE ALGORITMICO "GRANDE"

Dipende dal fatto che il denominatore $\boxed{a_{11}}$ è molto piccolo

pivot

→ pivot piccoli

! NON TUTTE LE MATRICI NON SINGOLARI SONO FATTORIZZABILI

Osservazioni

- Ci sono matrici non singolari per cui non si riesce a calcolare una fattorizzazione LR.
- Anche se le matrici $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ sono relativamente *vicine* a $\mathbf{L}$ e $\mathbf{R}$ il loro prodotto può essere molto diverso dalla matrice di partenza.
- I numeri di condizione di $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ possono essere arbitrariamente alti.

Osservazioni

- Ci sono matrici non singolari per cui non si riesce a calcolare una fattorizzazione LR.
- Anche se le matrici $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ sono relativamente *vicine* a $\mathbf{L}$ e $\mathbf{R}$ il loro prodotto può essere molto diverso dalla matrice di partenza.
- I numeri di condizione di $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ possono essere arbitrariamente alti.

$$\Downarrow$$

Fattorizzazione LR con pivot

Pivot

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Pivot

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k}$$

Pivot

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\overset{L_k}{\rightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

Pivot

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\xrightarrow{L_k}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

Pivot

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\xrightarrow{L_k}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

PIVOT

Pivot

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

PIVOT Se $a_{k,k} = 0$ si può scegliere un'altro elemento $a_{j,k}$ $j > k$ per calcolare la trasformazione.

Pivot Parziale

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & {\color{green}\mathbf{x}} & {\color{green}\mathbf{x}} & {\color{green}\dots} & {\color{green}\mathbf{x}} \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & {\color{red}a_{j,k}} & {\color{red}\mathbf{x}} & {\color{red}\dots} & {\color{red}\mathbf{x}} \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Pivot Parziale

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{P_k}$$

Pivot Parziale

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\xrightarrow{P_k}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
$$

Pivot Parziale

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \color{green}{\mathbf{x}} & \color{green}{\mathbf{x}} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\mathbf{x}} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \color{red}{a_{j,k}} & \color{red}{\mathbf{x}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{\mathbf{x}} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\overset{P_k}{\rightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \color{red}{a_{j,k}} & \color{red}{\mathbf{x}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{\mathbf{x}} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \color{green}{\mathbf{x}} & \color{green}{\mathbf{x}} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\mathbf{x}} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
$$

$$
\overset{L_k}{\rightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \color{red}{a_{j,k}} & \color{red}{\mathbf{x}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{\mathbf{x}} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

Pivot Parziale

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\stackrel{P_k}{\rightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
$$

$$
\stackrel{L_k}{\rightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

P_k permutazione, L_k eliminazione

Pivot Parziale

Dopo $n-1$ passi si ha:

$$L_{n-1} \cdot P_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot P_{n-2} \cdots L_1 \cdot P_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

- L'elemento con cui effettuare lo scambio può essere uno degli elementi non nulli della sottomatrice di ordine $n-k$. Questa strategia (Pivoting Completo) è troppo costosa.
- Si ricerca il pivot fra gli ultimi $n-k$ elementi della k–esima colonna (Pivot Parziale). In particolare:

$$a_{j,k} = \max_{k \le i \le n} |a_{i,k}|$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}}_{A_1}$$

$P_1 \to$ dall'identità $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ scambiando la 1 e 3 riga

Esempio

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \\
P_1 & & \mathbf{A} & = & A_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -\frac{1}{2} & & 1 & \\ -\frac{3}{4} & & & 1 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix} \\
L_1 & \cdot & A_1 & = & \mathbf{A}_2
\end{array}
$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}}_{P_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A_2}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}}_{P_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & 1 & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_3}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\underset{P_3}{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{A}_3}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{A_3}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\underset{P_3}{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{A}_3}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{A_3}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}}$$

$$\underset{L_3}{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}} \underset{\cdot}{\cdot} \underset{A_3}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{\mathbf{R}}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

Esempio:

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 = L'_3 \cdot L'_2 \cdot L'_1 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1$$

infatti:

$$\underbrace{L_3}_{L'_3} \quad \underbrace{(P_3 L_2 P_3^{-1})}_{L'_2} \quad \underbrace{(P_3 P_2 L_1 P_2^{-1} P_3^{-1})}_{L'_1} \quad \underbrace{P_3 P_2 P_1}_{P_3 P_2 P_1} =$$

$$\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{R}$$

Caso Generale

In generale per una matrice $n \times n$ la fattorizzazione LR con pivoting parziale può essere scritta come:

$$(L'_{n-1} \cdots L'_2 L'_1)(P_{n-1} \cdots P_2 P_1)\mathbf{A} = \mathbf{R}$$

con

$$L'_k = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_{k+1} L_k P_{k+1}^{-1} \cdots P_{n-2}^{-1} P_{n-1}^{-1}$$

L'_k è una matrice del tipo $\mathbf{I} - \ell_j \mathbf{e}_j^t$ e dunque facilmente invertibile.

$$\boxed{P\mathbf{A} = \mathbf{LR}}$$

con $P = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1$ e $\mathbf{L} = (L'_{n-1} \cdots L'_2 L'_1)^{-1}$

P matrice di permutazione

Sistema Lineare

Provo sviluppare

$$\underline{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}} \Rightarrow P\mathbf{A}\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

P matrice di permutazione.

$$\mathbf{L}\mathbf{R}\mathbf{x} = P\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{y} = P\mathbf{b} & (1) \\ \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y} & (2) \end{cases}$$

Qualunque matrice $\mathbf{A}$ non singolare ammette una fattorizzazione LR con pivoting ~~Parziale~~.

Fattorizzazione è stabile

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right]$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array}\right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Soluzione del sistema triangolare:

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Soluzione del sistema triangolare:

$$\mathbf{x} = (2, 1, -2, -1)^t$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Soluzione del sistema triangolare:

$$\mathbf{x} = (2, 1, -2, -1)^t$$

Caso Generale $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- Calcolo $\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$.
- $\mathbf{PA} = \mathbf{Pb}$ quindi $\mathbf{z} = \mathbf{Pb}$.
- Sistema Triangolare Inferiore:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{z}$$

- Sistema triangolare superiore:

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

Stabilità

- Sia $P\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$ calcolata con eliminazione di gauss senza pivoting allora le matrici calcolate $\widetilde{\mathbf{L}}$,$\widetilde{\mathbf{R}}$ e $\widetilde{P}$ verificano:

$$\widetilde{\mathbf{L}} \cdot \widetilde{\mathbf{R}} = \widetilde{P} \cdot \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}, \quad \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{L}\|\|\mathbf{R}\|} = \mathcal{O}(\mathrm{eps})$$

Se $\|\mathbf{L}\|\|\mathbf{R}\|$ è grande la perturbazione sul risultato può essere molto grande.

Questo algoritmo è instabile.

Stabilità

- Sia $P\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ calcolata con pivoting parziale allora le matrici calcolate $\widetilde{\mathbf{L}}$,$\widetilde{\mathbf{R}}$ e $\widetilde{P}$ verificano:

$$\widetilde{\mathbf{L}} \cdot \widetilde{\mathbf{R}} = \widetilde{P} \cdot \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}, \quad \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} = \mathcal{O}(\rho \cdot \mathrm{eps})$$

ρ è un fattore di crescita stimato come segue:

$$\rho \leq \mathbf{2^{n-1}}$$

Nelle applicazioni pratiche tale limite non viene mai raggiunto.
$\rho \leq \sqrt{\mathbf{n}}$ **Per tale ragione è l'algoritmo piú utilizzato**

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ -1 & 1 & & & 1 \\ -1 & -1 & 1 & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & -1 & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 2 \\ & & 1 & & 4 \\ & & & 1 & 8 \\ & & & & 16 \end{pmatrix}$$

La fattorizzazione non richiede pivoting. Il fattore ρ vale $16 = 2^4$
Un fattore di crescita di 2^m corrisponde alla perdita di m bit di precisione.
Con ordini $n \geq 55$ si hanno risultati totalmente inaffidabili!