Calcolo Numerico 2022-23
Esercitazione 4

A Calcolare lo zero di una funzione

Esercizio 1

Scrivere una funzione che implementi il metodo di Bisezione e una funzione per il metodo di Newton per il calcolo dello zero di una funzione $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Testare i due risolutori per risolvere

$$f(x) = e^x x^2$$

la cui soluzione è $x^* = 0.7034674$. In particolare:

i. Le due funzioni devono calcolare l'errore $||x_k - x^*||_2$ ad ogni iterazione.

ii. Disegnare il grafico della funzione f nell'intervallo $I = [1, 1]$ e verificare che x^* sia lo zero di f in $[-1, 1]$.

iii. Calcolare lo zero della funzione utilizzando entrambe le funzioni precedentemente scritte

iv. Confrontare l'accuratezza delle soluzioni trovate e il numero di iterazioni effettuate dai solutori.

v. Plottare l'errore al variare delle iterazioni per entrambi i metodi.

Esercizio 2

Scrivere una funzione che implementi il metodo delle approssimazioni successive per il calcolo dello zero di una funzione f(x) per $x \in \mathbb{R}^n$ prendendo come input una funzione per l'aggiornamento:

- $g(x) = x - f(x)e^{x/2}$
- $g(x) = x - f(x)e^{-x/2}$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x)$

Testare il risolutore per risolvere

$$f(x) = e^x x^2$$

la cui soluzione è $x^* = 0.7034674$. In particolare:

i. La funzione deve calcolare l'errore $||x_k - x^*||_2$ ad ogni iterazione.

ii. Disegnare il grafico della funzione f nell'intervallo $I = [1, 1]$ e verificare che x^* sia lo zero di f in $[-1, 1]$.

iii. Calcolare lo zero della funzione utilizzando tutte le funzioni precedentemente scritte.

iv. Confrontare l'accuratezza delle soluzioni trovate e il numero di iterazioni effettuate.

v. Plottare l'errore al variare delle iterazioni per tutte le funzioni.

Esercizio 3

Confrontare e commentare le prestazioni dei tre metodi con le seguenti funzioni

- $f(x) = x^3 + 4xcos(x) - 2$ nell'intervallo $[0, 2]$,con $g(x) = \frac{2-x^3}{4*cos(x)}$.
- $f(x) = x - x^{1/3} - 2$ nell'intervallo $[3, 5]$, con $g(x) = x^{1/3} + 2$

Suggerimento: confronta il numero di iterazioni, i tempi di esecuzione e i risultati ottenuti. Analizza la dipendenza dai parametri, dagli intervalli o dalle funzioni.

B Metodo del gradiente per l'ottimizzazione in $\mathbb{R}^2$

Esercizio 4

Scrivere una funzione che implementi il metodo del gradiente con step size α_k variabile, calcolato secondo la procedura di backtracking ad ogni iterazione k-esima.

Testare la function per minimizzare $f(x)$ definita come:

$$f(x) = 10(x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

In particolare:

i. Plottare la superficie $f(x)$ con `plt.plot_surface()`.

ii. Plottare le curve di livello (`plt.contour()`) e le iterate calcolate dal metodo.

iii. Plottare, al variare delle iterazioni, la funzione obiettivo, l'errore e la norma del gradiente.

Esercizio 5

Minimizzare la seguente funzione utilizzando il metodo del gradiente con step size α_k variabile:

$$f(x) = \|x - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2$$

dove:

- $x, b \in \mathbb{R}^n$.
- $b = (1, ..., 1)$.
- $\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

In particolare per n fissato:

i. Testare differenti valori di λ.

ii. Plottare, al variare delle iterazioni, la funzione obiettivo, l'errore e la norma del gradiente.