

Risoluzione di sistemi lineari con metodi iterativi.

Elena Loli Piccolomini

SISTEMI LINEARI

$$Ax=b$$

$$A_{m \times n}$$

A non singolare

① Metodi diretti

Ⓐ $A = L \cdot U$ (L.R)

fattorizzazione di Gauss
(Metodo di eliminazione
di Gauss)

→ $P \cdot A = L \cdot U$ con pivoting

Ⓑ Fattorizzazione di
Cholesky $A = L \cdot L^T$

2) Condizionamento (errore
inerte)

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

A simmetrica definita positiva

Def. A si dice **semi**definita
 \uparrow
 $\mathbb{R}^{n \times n}$ **positiva**

se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{x^T A x}{x^T x} \geq 0$$

A **semi**definita positiva

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n \geq 0$$

$$Ax = b$$

A simmetrica e def. positiva

Metodo di Cholesky

$$A = L \cdot L^T$$

L triangolare
superiore

inferiore unitaria

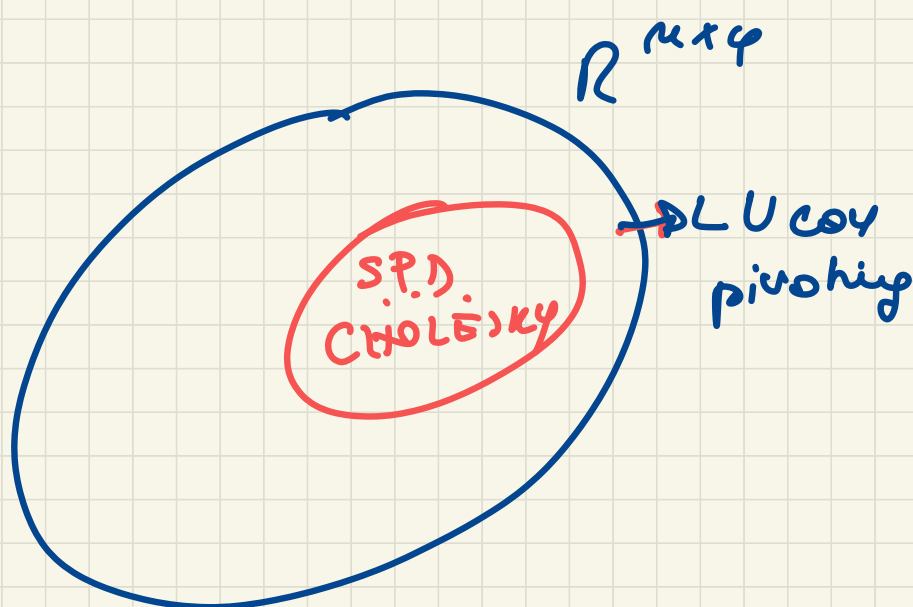
$$\rightarrow O\left(\frac{n^3}{6}\right)$$

$$LU \rightarrow O\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

$$Ax = b \Leftrightarrow$$

$$L \cdot L^T x = b$$

$$\begin{cases} Ly = b & (1) \\ L^T x = y & (2) \end{cases}$$



SPD \rightarrow symmetric positive
definite

$$Ax = b$$

① METODI DIRETTI

ALTA
ACCURATEZZA

ALTA COMPLESSITÀ

② METODI ITERATIVI

BASSA
ACCURATEZZA

BASSA
COMPLESSITÀ

Metodi iterativi

$x_0, x_1, x_2 \dots$

x_0

↓

- I **metodi iterativi**. A partire da uno o più dati iniziali, calcolano dei valori x_k attraverso un procedimento che si ripete (itera) sempre uguale ad ogni passo k :

$$x_k = \underline{G(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Sotto opportune condizioni gli iterati x_k convergono alla soluzione x^* (tale che $\underline{x^* = A^{-1}b}$) per $k \rightarrow \infty$.

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^*$$

Generalità

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

Dato il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i metodi iterativi ricercano la soluzione mediante una opportuna successione \mathbf{x}_{k+1} che può avere una delle seguenti forme:

$$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Metodo di Jacobi} \\ \text{Metodo di Gauss Seidel} \\ \text{Metodi di Rilassamento (SOR, SSOR)} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k} \left\{ \begin{array}{l} \text{Metodo Gradienti Coniugati} \\ \text{Metodo GMRES} \\ \text{Metodi di Krylov} \end{array} \right.$$

dove $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{d}, \mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Metodi iterativi

x_0, x_1, x_2, \dots

ERRORE di TRONCAMENTO

$x_0, x_1, \dots, x_k^* \approx x^*$

Schema algoritmo iterativo:

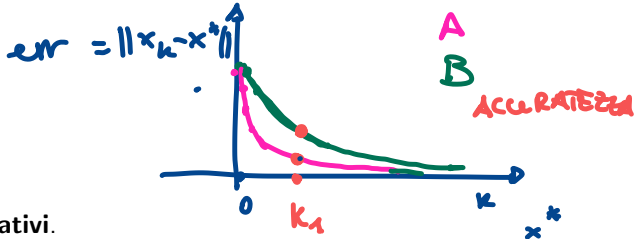
1. Dati: x_0
2. $k=1$
3. Ripeti finchè convergenza
 - 3.1 $x_k = G(x_{k-1})$
 - 3.2 $k = k + 1$

end

Sono da specificare nel singolo metodo le condizioni di convergenza che comunque contengono sempre la seguente:

$k \leq \text{maxit}$ controllo

Metodi iterativi



Convergenza metodi iterativi.

Si dice che la successione x_k generata da un metodo iterativo converge ad α con ordine $p \geq 1$ se:

$$\exists C > 0 : \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \leq C, \forall k \geq k_0$$

dove k_0 è un intero opportuno. In tal caso si dirà che il metodo è di ordine p .

Osservazione. nel caso $p = 1$ per avere convergenza deve essere $C < 1$. In questo caso C prende il nome di *fattore di convergenza*.

C costante

$$\underbrace{|x_{k+1} - \alpha|}_{err_{k+1}} \leq C \underbrace{|x_k - \alpha|^p}_{err_k^p}$$

$$\rho = 1$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c |x_n - \alpha|$$

$$c < 1$$

$$k > k_0$$

$$\frac{1}{4} = \underline{0.25}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}$$

A

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c |x_n - \alpha|$$

B

$$0.35$$

$$0.7$$

$$\frac{1}{2}$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c_2 |x_n - \alpha|$$

$$c_1 < c_2$$

$$p=2$$

$$\rightarrow |x_{k+1} - \alpha| < \underline{C} \underbrace{|x_k - \alpha|}^2$$

metodo di ordine 2

è "più veloce" di un metodo
di ordine 1

$$1 < p \in \mathbb{R}$$

Introduzione ai metodi iterativi per sistemi lineari

- Consentono di mantenere la struttura della matrice
- Si applicano a matrici di grandi dimensioni e sparse, quali quelle che si incontrano nella risoluzione di equazioni differenziali con condizioni ai limiti, risolte con metodi alle differenze finite o agli elementi finiti.
- La complessità computazionale è di un prodotto matrice vettore per iterazione.

Introduzione ai metodi iterativi per sistemi lineari

- Consentono di mantenere la struttura della matrice
- Si applicano a matrici di grandi dimensioni e sparse, quali quelle che si incontrano nella risoluzione di equazioni differenziali con condizioni ai limiti, risolte con metodi alle differenze finite o agli elementi finiti.
- La complessità computazionale è di un prodotto matrice vettore per iterazione.

Introduzione ai metodi iterativi per sistemi lineari

- Consentono di mantenere la struttura della matrice
- Si applicano a matrici di grandi dimensioni e sparse, quali quelle che si incontrano nella risoluzione di equazioni differenziali con condizioni ai limiti, risolte con metodi alle differenze finite o agli elementi finiti.
- La complessità computazionale è di un prodotto matrice vettore per iterazione.

Metodi iterativi per sistemi lineari

Dato il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i metodi iterativi ricercano la soluzione mediante una opportuna successione \mathbf{x}_{k+1} che può avere una delle seguenti forme:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{d} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Metodo di Jacobi} \\ \text{Metodo di Gauss Seidel} \\ \text{Metodi di Rilassamento (SOR, SSOR)} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Metodo Gradienti Coniugati} \\ \text{Metodo GMRES} \\ \text{Metodi di Krylov} \end{array} \right.$$

dove $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{d}, \mathbf{p}_k \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Introduzione ai metodi iterativi STATIONARI

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice non singolare,

$n \times n$

$n \times n$

$n \times n$

$$A = M - N$$

$$x_{k+1} = Hx_k + d_k$$

$$x_k \rightarrow A^{-1}b = x^* \quad k \rightarrow \infty$$

dove M è una matrice non singolare e caratterizzata dal fatto che $Mz = h$ sia "facilmente" risolubile.

Allora il sistema

$$Ax = b \Rightarrow (M - N)x = b \quad (1)$$

si può scrivere come

$$Mx - Nx = b \rightarrow \underbrace{M^{-1}Mx}_I - M^{-1}Nx = M^{-1}b$$

ovvero

$$x = Tx + c \quad (2)$$

dove $T = M^{-1}N$ e $c = M^{-1}b$.

Il sistema (5) è equivalente al (2). $Ax = b$

Introduzione ai metodi iterativi

Assegnato un vettore iniziale x_0 si considera la successione x_1, x_2, \dots definita da

$$x_k = Tx_{k-1} + c \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Se

- la successione $\{x_k\}$ è convergente e
- $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$

passando al limite

$$x^* = Tx^* + c. \quad (4)$$

Quindi x^* è la soluzione del sistema.

La relazione (3) individua un **metodo iterativo** per determinare la soluzione x^* di (5); la matrice T si chiama *matrice di iterazione* del metodo.

$$T = A^{-1}U$$
$$c = A^{-1}b$$

Introduzione ai metodi iterativi

Al variare del vettore iniziale x_0 si ottengono da (3) diverse successioni $\{x_k\}$, alcune delle quali sono convergenti ed altre no.

Un metodo iterativo è detto **convergente** se, qualunque sia il vettore iniziale x_0 , la successione $\{x_k\}$ è convergente. ←

Esempio.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = Tx_n + c$$

per cui $x^* = (0, 0, 0)^T$, si ha

$$\rightarrow T^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

x_0

$$x_{k+1} = T x_k + c \quad \leftarrow$$

$x_0, x_1, x_2 \dots$

x_0 \rightarrow VALUE INITIAL
STARTING GUESS

Metodi iterativi

Se $x_0 = (1, 0, 0)^T$ si ottiene la successione

$$x_k = (1/2^k, 0, 0) \quad k = 1, 2, \dots$$

che converge alla soluzione x^* del sistema. Se invece si pone $x_0 = (0, 1, 1)^T$ si ottiene la successione

$$x_k = (0, 1/2^k, 2^k) \quad k = 1, 2, \dots$$

che non converge a x^* .

Questo è un esempio di metodo **non convergente**.

Teorema

Il metodo iterativo è convergente se e solo se $\rho(T) < 1$.

$\rho(T) \rightarrow$ raggio spettrale

Velocità convergenza metodi iterativi

Fissata una norma di vettori $\|\cdot\|$ e la corrispondente norma di matrici indotta

$$\|e_k\| \leq \|T^k\| \|e_0\|$$

Esempio Siano

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$T^k = \begin{pmatrix} 0.5^k & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{pmatrix} \quad S^k = \begin{pmatrix} 0.5^k & k0.5^{k+1} \\ 0 & 0.5^k \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la norma infinito risulta

$$\|T^k\|_\infty = 0.6^k \quad \|S^k\|_\infty = (2+k)0.5^{k+1}.$$

- per $k \leq 9$ si ha che $\|T^k\|_\infty < \|S^k\|_\infty$ e per $k \geq 10$ si ha che $\|T^k\|_\infty > \|S^k\|_\infty$

Costruzione dei metodi iterativi

$$A = \underbrace{M}_{\text{diagonale}} - \underbrace{N}_{\text{triangolare inferiore}}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} F \\ \text{---} D \text{---} \\ \text{---} E \end{array}$$

$$\rightarrow A = D - E - F$$

dove $D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$, $-E$ è la parte strettamente triangolare inferiore di A e $-F$ è la parte strettamente triangolare superiore.

Si definisce il procedimento iterativo

$$Mx_k = Nx_{k-1} + b$$

$$\wedge \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= T x_k + c \\ T &= M^{-1}N & c &= M^{-1}b \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & -F \\ -E & D & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -7 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D - E - F = A$$

Metodo di Jacobi

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{D}^{-1}(\underline{E} + \underline{F}) \underline{x}_k + \underline{D}^{-1} \underline{b}$$

metodo di Jacobi (o delle sostituzioni simultanee):

$$M = D$$

$$N = E + F.$$

$$T = M^{-1}N$$

La matrice di iterazione \mathcal{J} del metodo di Jacobi è

$$T = \mathcal{J} = D^{-1}(E + F) = \underline{I} - \underline{D}^{-1}\underline{A}.$$

$$c = M^{-1}b = D^{-1}b$$

Il metodo di Jacobi è definito se D è non singolare ($a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$).

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n$$

dove il superindice k indica il numero di iterazione e $x^{(0)}$ è un vettore arbitrario.

$$x_{k+1} = M^{-1} N x_k + M^{-1} b$$

Jacobi:

$$x_{k+1} = \bar{D}^{-1} (E + \bar{F}) x_k + \bar{D}^{-1} b$$



Metodo di Jacobi

metodo di Jacobi (o delle sostituzioni simultanee):

$$M = D \quad N = E + F.$$

$$x_k = \frac{D^{-1}(E+F)x_{k-1} + D^{-1}b}{1}$$

La matrice di iterazione \mathcal{J} del metodo di Jacobi è

$$\mathcal{J} = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A.$$

Il metodo di Jacobi è definito se D è non singolare ($a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$).

$$D^{-1}(E)x_{k-1}$$

$$D^{-1}(F)x_{k-1}$$

$$D^{-1}$$

$$x_i^{(k)} = \left(\underline{b_i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) / \underline{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n$$

dove il superindice k indica il numero di iterazione e $x^{(0)}$ è un vettore arbitrario.

Metodo di Gauss-Sidel

$$T = M^{-1}N$$

metodo di Gauss-Sidel (o delle sostituzioni successive)

$$M = D - E$$

$$N = F.$$

La matrice di iterazione è

$$\underline{x}_k = (D - E)^{-1} F \underline{x}_{k-1} + (D - E)^{-1} b$$

$$T = \mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1} F.$$

Il metodo di Jacobi è definito se $D - E$ è non singolare ($a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$) ed è espresso dal procedimento iterativo

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n$$

dove il superindice k indica il numero di iterazione e $x^{(0)}$ è un vettore arbitrario.

Gauss - Seidel:

$$x_{n+1} = (D-E)^{-1} F x_n + (D-E)^{-1} b$$



Metodo di Gauss-Sidel

metodo di Gauss-Sidel (o delle sostituzioni successive)

$$M = D - E \quad N = F.$$

La matrice di iterazione è

$$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F.$$

Il metodo di Jacobi è definito se $D - E$ è non singolare ($a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$) ed è espresso dal procedimento iterativo

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n$$

dove il superindice k indica il numero di iterazione e $x^{(0)}$ è un vettore arbitrario.

12/10/2022

$$Ax=b$$

$$A \, n \times n$$

METODI ITERATIVI

$$\underline{x}_0, x_1, x_2 \dots x_n, x_{k+1} \dots$$

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^* \quad \text{sol. esatta}$$

$$x_k \in \mathbb{R}^n, \quad x^* \in \mathbb{R}^n$$

$$x_k(i) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^*(i) \quad \forall i=1..n$$

METODI ITERATIVI STAZIONARI

$$x_{k+1} = Tx_k + c$$

Metodi di Jacobi e Gauss-Sidel

$$T = M^{-1}N$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Matrice di iterazione di Jacobi:

$$\textcircled{T=} J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4/3 \\ -7/4 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(J) = \underline{1.337510}$$

Matrice di iterazione di Gauss-Sidel

$$T= \alpha G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 11/6 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \quad \rho(G) = \underline{0.25}$$

quindi Gauss-Sidel è convergente, Jacobi no.

Metodi di Jacobi e Gauss-Sidel

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrice di iterazione di Jacobi:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4/7 & 0 & 8/7 \\ 5/9 & 7/9 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(J) = 0.8133091 < 1$$

Matrice di iterazione di Gauss-Sidel

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4/7 & 0 \\ 0 & 1 & -10/9 \end{pmatrix} \quad \rho(G) = 1.11111 > 1$$

quindi Jacobi è convergente, Gauss-Sidel no.

Criteri di arresto

while condizione
 x_1, x_2, \dots, x_k

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon \|x_k\|$$

dove ε è una tolleranza relativa prefissata.

$$\rightarrow \frac{\|x_k - x_{k-1}\|}{\|x_k\|} \leq \varepsilon$$

$$k \leq k_{MAX}$$

Matrici particolari

- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è con **diagonale dominante in senso**



stretto se $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è **irriducibile** se non esiste una matrice di permutazione P per cui

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

con B_{11}, B_{22} matrici quadrate.

- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice **irriducibile con diagonale dominante** se A è irriducibile e $|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$, con almeno un indice i per cui la disuguaglianza vale in senso stretto.

Matrici particolari

- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è con **diagonale dominante in senso stretto** se $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.
- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è **irriducibile** se non esiste una matrice di permutazione P per cui

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

con B_{11}, B_{22} matrici quadrate.

- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice **irriducibile con diagonale dominante** se A è irriducibile e $|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$, con almeno un indice i per cui la disuguaglianza vale in senso stretto.

Matrici particolari

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è con **diagonale dominante in senso stretto** se $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.
- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è **irriducibile** se non esiste una matrice di permutazione P per cui

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

con B_{11}, B_{22} matrici quadrate.

- Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice **irriducibile con diagonale dominante** se A è irriducibile e $|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$, con almeno un indice i per cui la disuguaglianza vale in senso stretto.

Criteri di convergenza

- Se A è una matrice di ordine n con **diagonale dominante in senso stretto**, ~~oppure irriducibile con diagonale dominante~~ allora il **metodo di Jacobi** è convergente.
- Se A è una matrice di ordine n con **diagonale dominante in senso stretto**, oppure irriducibile con diagonale dominante allora il **metodo di Gauss-Seidel** è convergente.
- Sia A una matrice **hermitiana non singolare** con elementi sulla diagonale reale e positivi. Allora il **metodo di Gauss-Seidel** è convergente se e solo se A è definita positiva.

Criteri di convergenza

- Se A è una matrice di ordine n con **diagonale dominante in senso stretto, oppure irriducibile con diagonale dominante** allora il **metodo di Jacobi** è convergente.
- Se A è una matrice di ordine n con **diagonale dominante in senso stretto, oppure irriducibile con diagonale dominante** allora il **metodo di Gauss-Seidel** è convergente.
- Sia A una matrice **hermitiana non singolare con elementi sulla diagonale reale e positivi**. Allora il **metodo di Gauss-Seidel** è convergente se e solo se A è definita positiva.

Criteri di convergenza

- Se A è una matrice di ordine n con **diagonale dominante in senso stretto, oppure irriducibile con diagonale dominante** allora il **metodo di Jacobi** è convergente.
- Se A è una matrice di ordine n con **diagonale dominante in senso stretto, oppure irriducibile con diagonale dominante** allora il **metodo di Gauss-Seidel** è convergente.
- Sia A una matrice ~~hermitiana~~ ^{SIMMETRICA} non singolare con elementi sulla diagonale (reale) e positivi. Allora il **metodo di Gauss-Seidel** è convergente se e solo se A è definita positiva.

Criteri di convergenza

Matrici tridiagonali

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrice tridiagonale:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & c_{n-1} & \\ & & b_{n-1} & a_n & \end{pmatrix}$$

in cui $a_i \neq 0, i = 1, \dots, n$. Valgono:

- 1 se μ autovalore di J , allora μ^2 autovalore di G ;
- 2 se λ autovalore non nullo di G allora $\sqrt{(\lambda)}$ autovalore di J .

Quindi, per le matrici tridiagonali, il metodo di Gauss-Sidel è convergente se e solo se lo è il metodo di Jacobi e vale:

$$\rho(G) = \rho^2(J)$$

Metodi di rilassamento

Il metodo di Gauss-Sidel può essere visto nella forma:

$$x_k = x_{k-1} + r_k$$

dove:

$$r_k = x_k - x_{k-1} = D^{-1}(Ex_k + Fx_{k-1} + b) - x_{k-1}$$

Quindi il punto $x^{(k)}$ si ottiene a partire da x_{k-1} effettuando un passo nella direzione r_k di lunghezza $\|r_k\|_2$. Non sempre questa è la scelta migliore per avere una convergenza veloce. Si modifica allora la lunghezza del passo introducendo un parametro ω :

$$x_k = x_{k-1} + \omega r_k$$

metodi di *rilassamento*:

- $\omega < 0$ *sottorilassamento*
- $\omega > 0$ *sovrarilassamento*

Gradienti Coniugati:criterio di arresto

Relazione di decrescita dell'errore in norma A:

$$\|x_k - x^*\|_A \leq 2\|x_0 - x^*\|_A \left(\frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \right)^2$$

dove $\sqrt{K_2(A)} = \lambda_1/\lambda_n$.

- Questa stima può essere anche molto pessimistica. Per esempio quando gli autovalori di A sono accumulati in pochi intervalli, il numero di condizione può essere molto grande ma il CG converge velocemente.
- La trasformazione del problema in uno i cui autovalori sono tutti accumulati verso 1 si chiama **precondizionamento**