Informatica Teorica

Anno Accademico 2022/2023

Fabio Zanasi
https://www.unibo.it/sitoweb/fabio.zanasi

Ottava lezione

Nelle puntate precedenti

Abbiamo analizzato la **non-calcolabilità** nel contesto della computazione via TM.

Abbiamo considerato vari esempi e tecniche per dimostrare che un problema non é calcolabile.

In questa lezione

Ci concentriamo sulla non-calcolabilità in contesti diversi dalla teoria della computabilità.

L'esempio che considereremo è la non-calcolabilità del **tiling problem.**

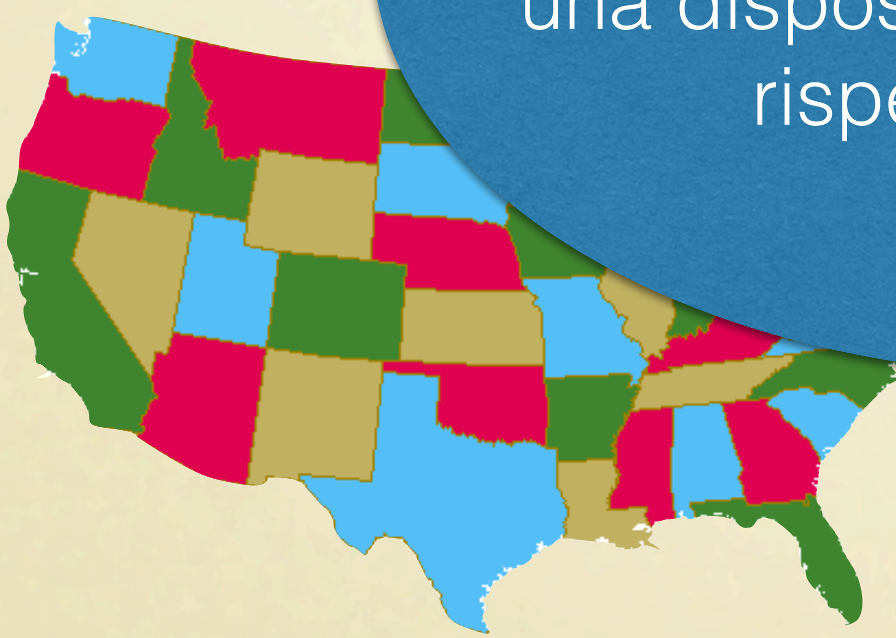
L'obiettivo generale è quello di mostrare che la non-calcolabilità è un fenomeno **pervasivo**, presente in diverse discipline e problemi.

Tiling

Alhambra, Gra

ird/fish n.82 (1951)

Dato un insieme di piastrelle e di regole per metterle insieme, esiste una disposizione del piano che rispetti tali regole?



Il teorema dei quattro colori

Il muro di un bagno

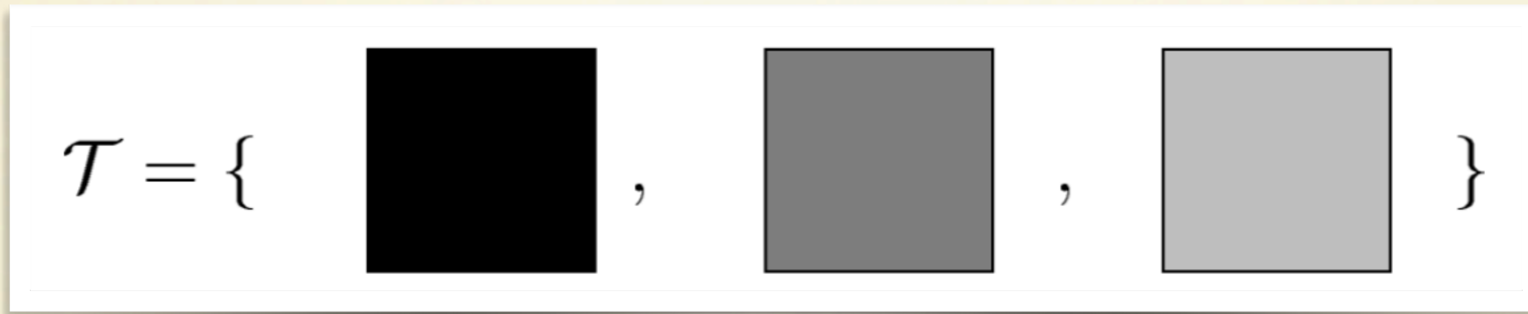
Sistema di tiling

Un sistema di tiling è costituito da:

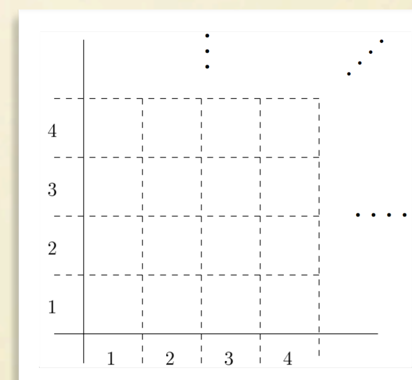
- un insieme di piastrelle (*tiles*) quadrate, per esempio

- un elemento scelto $t_0 \in \mathcal{T}$ detto *piastrella d'origine*.
- un insieme di *regole di adiacenza*, che specificano quali piastrelle possano essere posate le une accanto alle altre.

Tiling

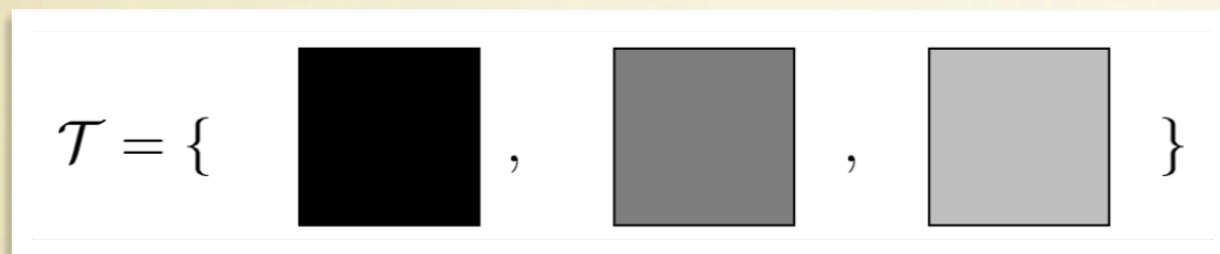


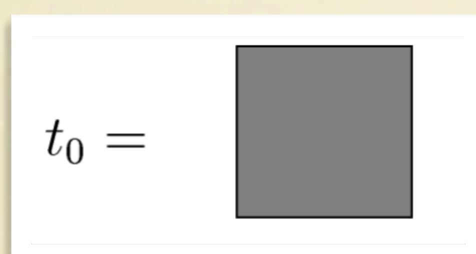
Il **tiling** è una disposizione delle piastrelle in $\mathscr{T}$ con le seguenti proprietà:



- t_0 si trova nell'angolo in basso a sinistra.
- Ogni piastrella ha una piastrella disposta sopra e una disposta alla sua destra, senza spazi intermedi.
- Tutte le regole di adiacenza sono rispettate.

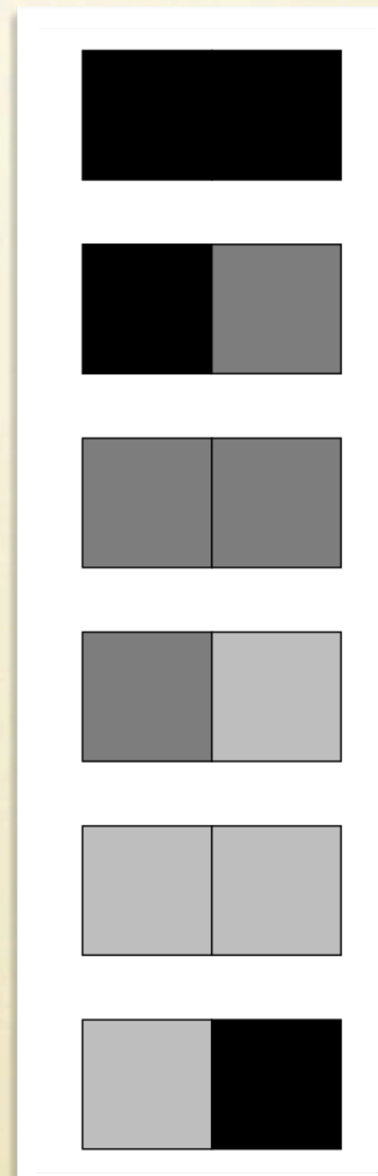
Esempio



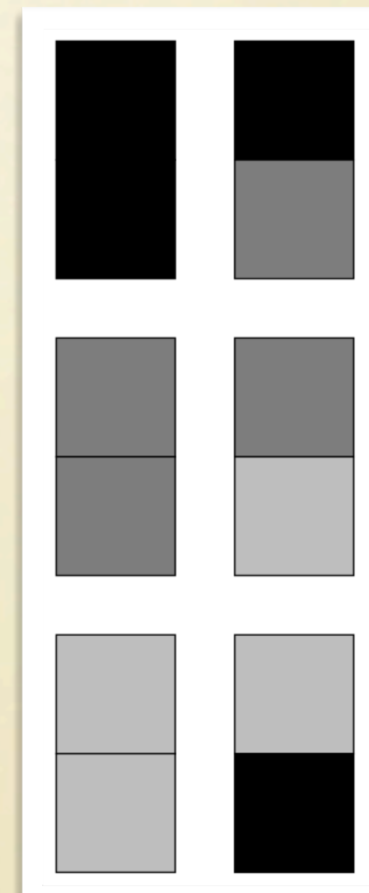


Regole di adiacenza

orizzontali

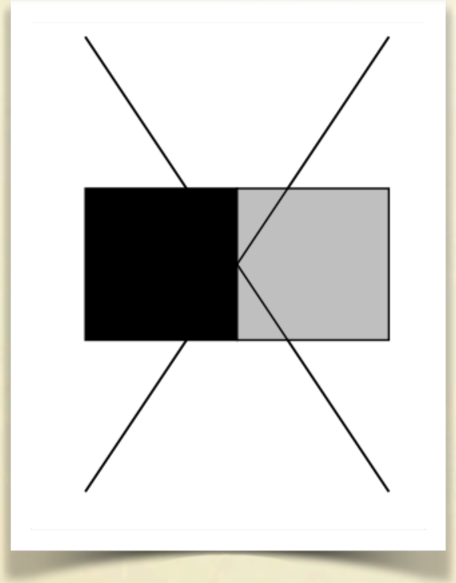


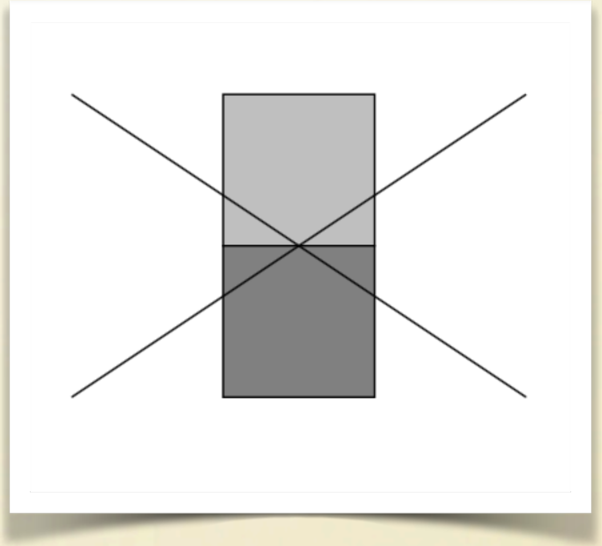
verticali



Esempio

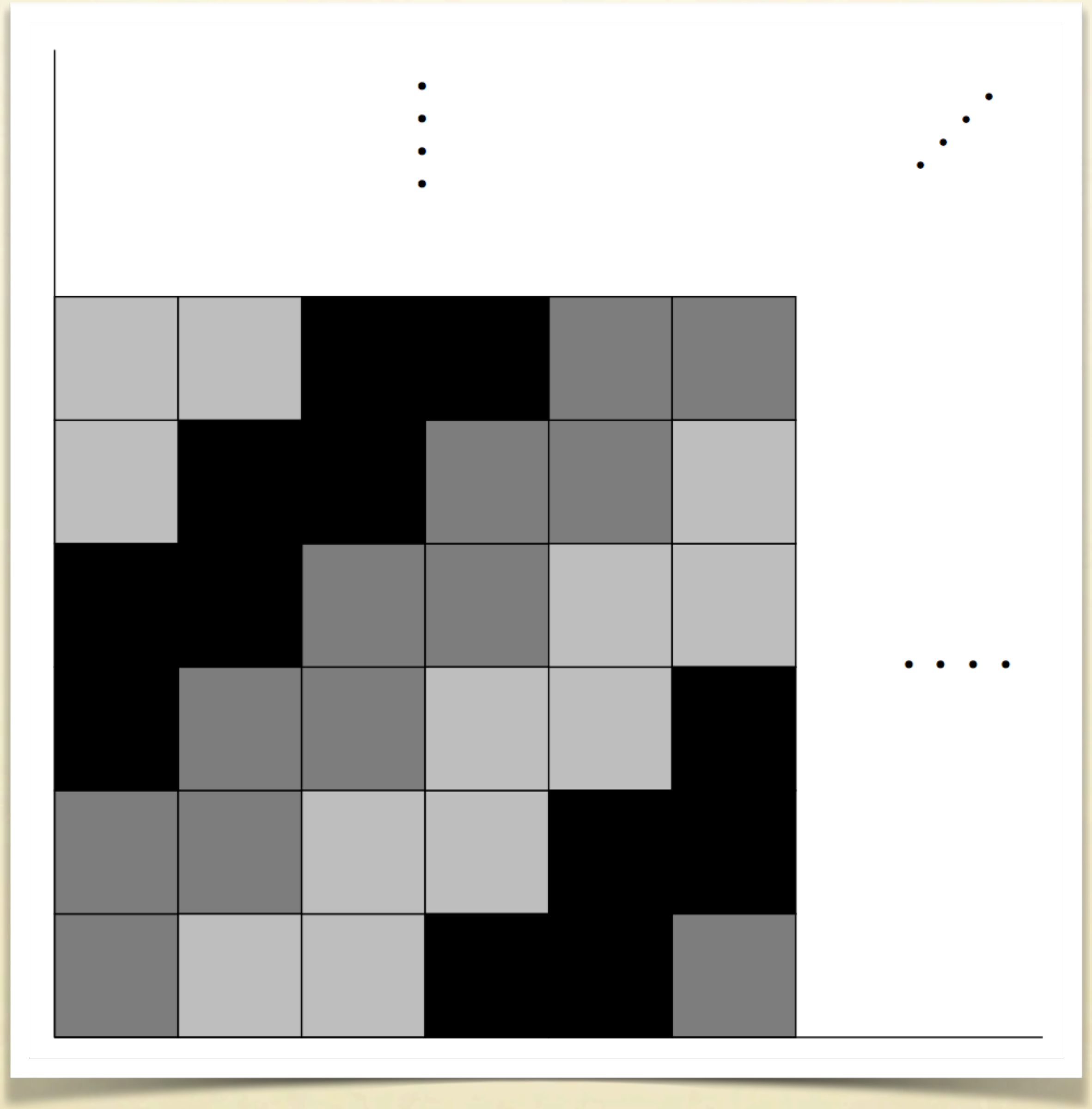
Osserviamo che le regole di adiacenza non permettono alle piastrelle di essere disposte, per esempio, come segue:





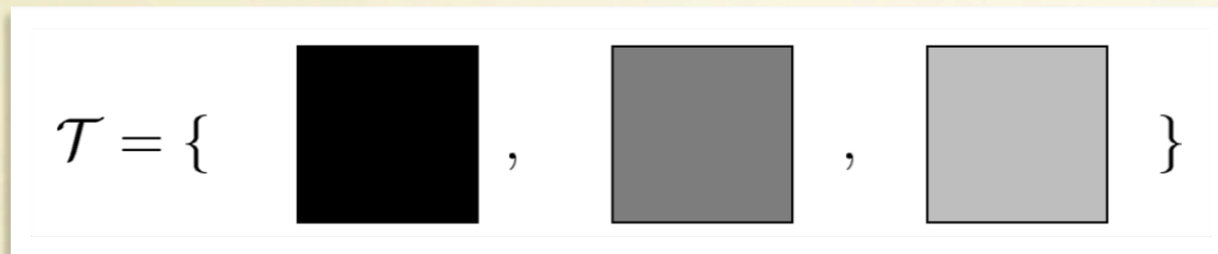
Esempio

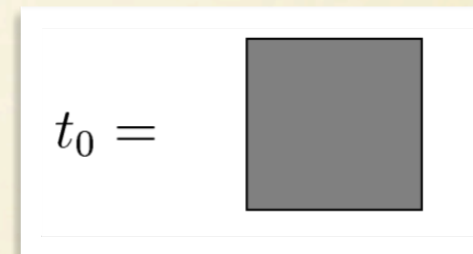
Un tiling per questo sistema è per esempio:



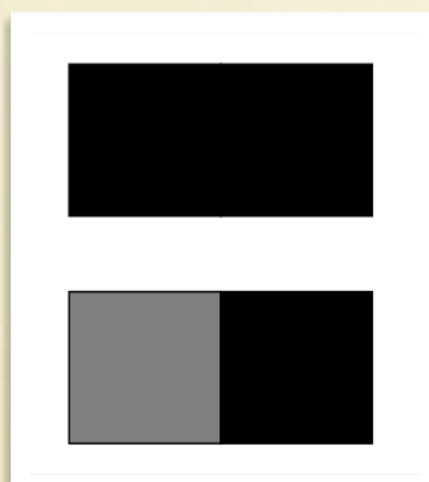
Problemi di tiling

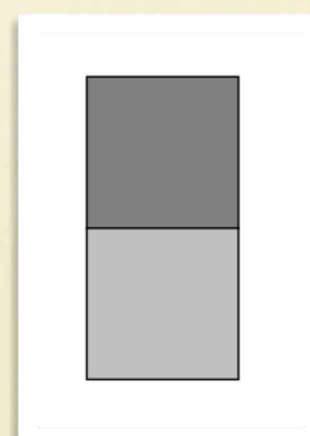
Nota che non è sempre possibile trovare un *tiling* per un dato sistema. Per esempio, dati





e le regole di adiacenza





Non esiste alcun *tiling*.

Il problema del tiling

Vogliamo analizzare il **problem del tiling** (*tiling problem*):

dato un sistema di ricopertura, esiste un tiling?

Nel 1961, Hao Wang si chiese se questo problema fosse risolvibile tramite un algoritmo.

Nel 1966, il suo studente di dottorato Robert Berger rispose negativamente, dimostrando che il problema è non solo indecidibile, ma anche non riconoscibile da TM.

Per dimostrare questo, abbiamo anzitutto bisogno di una definizione formale dei dati del problema (il sistema di ricopertura).

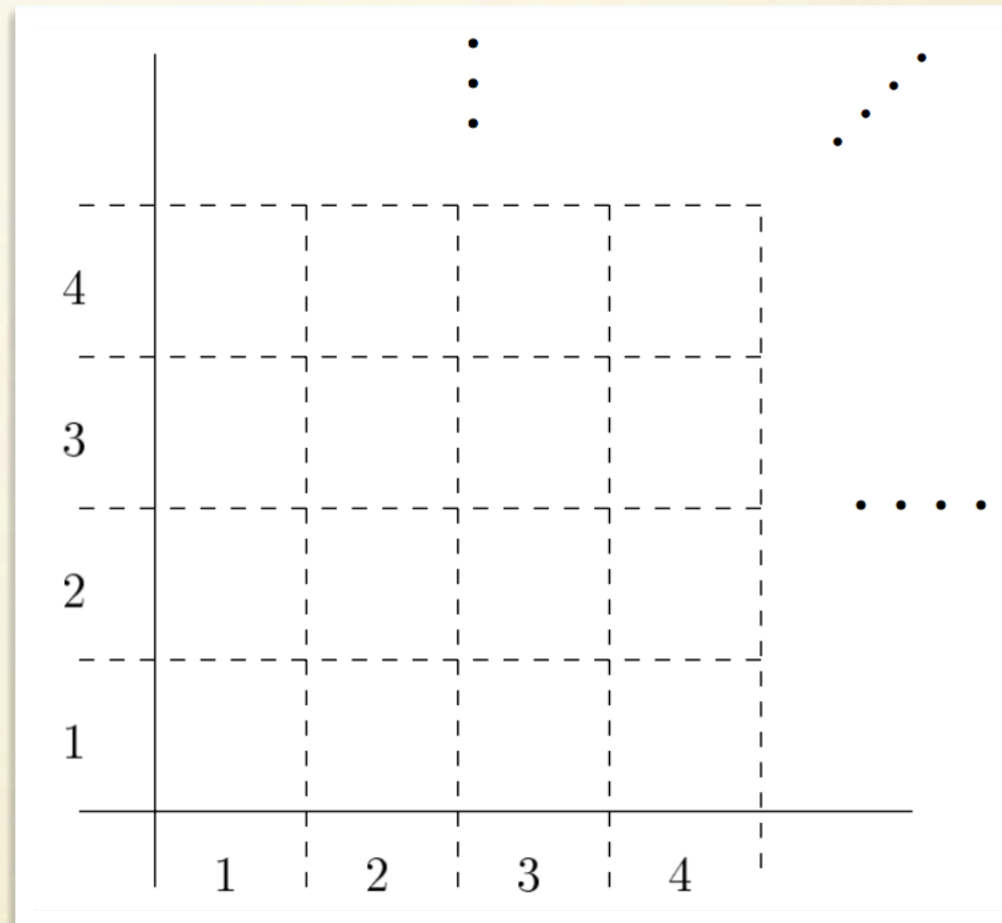
Sistema di ricopertura, ora formalmente

Un **sistema di tiling** è una tupla $\langle \mathcal{T}, t_0, H, V \rangle$ tale che:

- $\mathcal{T}$ è un insieme di piastrelle
- $t_0 \in \mathcal{T}$ è la piastrella d'origine
- $H \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ è un insieme di regole di adiacenza orizzontali e $V \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ è un insieme di regole di adiacenza verticali.

Tiling, formalmente

Assumiamo il quadrante positivo del piano sia diviso in delle identificate dalle proprie coordinate.



Il **tiling** è una funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{T}$ tale che:

1. $f(1,1) = t_0$
2. $(f(n,m), f(n,m+1)) \in V$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$
3. $(f(n,m), f(n+1,m)) \in H$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

Problemi di ricopertura

Eccoci nuovamente al **tiling problem**:

Dato un sistema di ricopertura, esiste un tiling?

Mostreremo che il *tiling problem* è irriconoscibile mostrando che il complemento di *ETH* si reduce a esso.

$ETH = \{x \in \Sigma^* \mid x = \text{code}(\mathcal{M}) \text{ e } \mathcal{M} \text{ ferma su } \varepsilon.\}$

$\overline{ETH} = \{x \in \Sigma^* \mid x \neq \text{code}(\mathcal{M}) \text{ per ogni } \mathcal{M} \text{ o}$

$x = \text{code}(\mathcal{M}) \text{ e } \mathcal{M} \text{ non ferma su } \varepsilon.\}$

Problemi di ricopertura

$ETH = \{x \in \Sigma^* \mid x = \text{code}(\mathcal{M}) \text{ e } \mathcal{M} \text{ ferma su } \varepsilon.\}$

$\overline{ETH} = \{x \in \Sigma^* \mid x \neq \text{code}(\mathcal{M}) \text{ per ogni } \mathcal{M} \text{ o}$

$x = \text{code}(\mathcal{M}) \text{ e } \mathcal{M} \text{ non ferma su } \varepsilon.\}$

- Abbiamo visto che *ETH* è indecidibile ma riconoscibile.
- Quindi, come per il problema della fermata e il suo complemento, $\overline{ETH}$ deve essere non riconoscibile: altrimenti *ETH* sarebbe in realtà decidibile.
- Perciò, ridurre $\overline{ETH}$ al *tiling problem* implica che il *tiling problem* non sia riconoscibile da nessuna TM.

Tornando al *tiling problem*

La nostra strategia per dimostrare che la non-riconoscibilità del *tiling problem* è la seguente:

1. Mostriamo che ogni TM $\mathcal{M}$ può essere trasformata in un sistema di tiling $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$.
2. Questa trasformazione è fatto in modo tale per cui

$$\text{code}(\mathcal{M}) \in \mathit{ETH} \quad \leftrightarrow \quad \text{non esiste un } \textit{tiling} \text{ per } \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$$

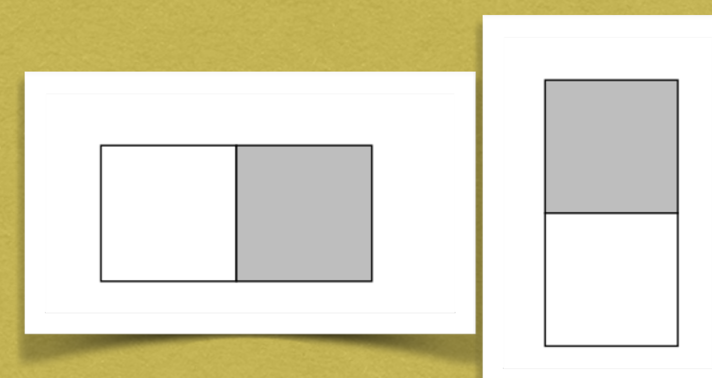
   Tale corrispondenza riduce *ETH* al complemento del *tiling problem*, così che $\overline{\mathit{ETH}}$ si riduce al tiling problem, come desiderato.

Rappresentare regole di adiacenza con simboli

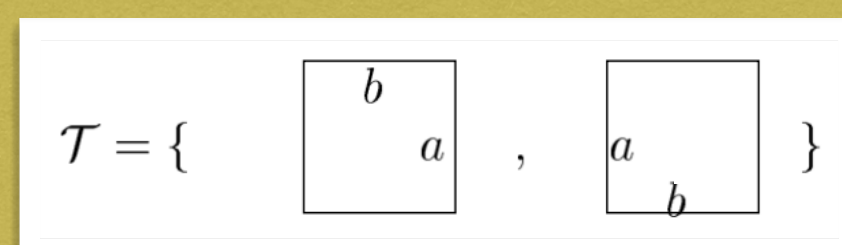
Dato un sistema di ricopertura, possiamo specificare il suo insieme di piastrelle e regole di adiacenza **simultaneamente** segnando i margini delle piastrelle.

Esempi.

con regole di adiacenza



possono essere rappresentate come

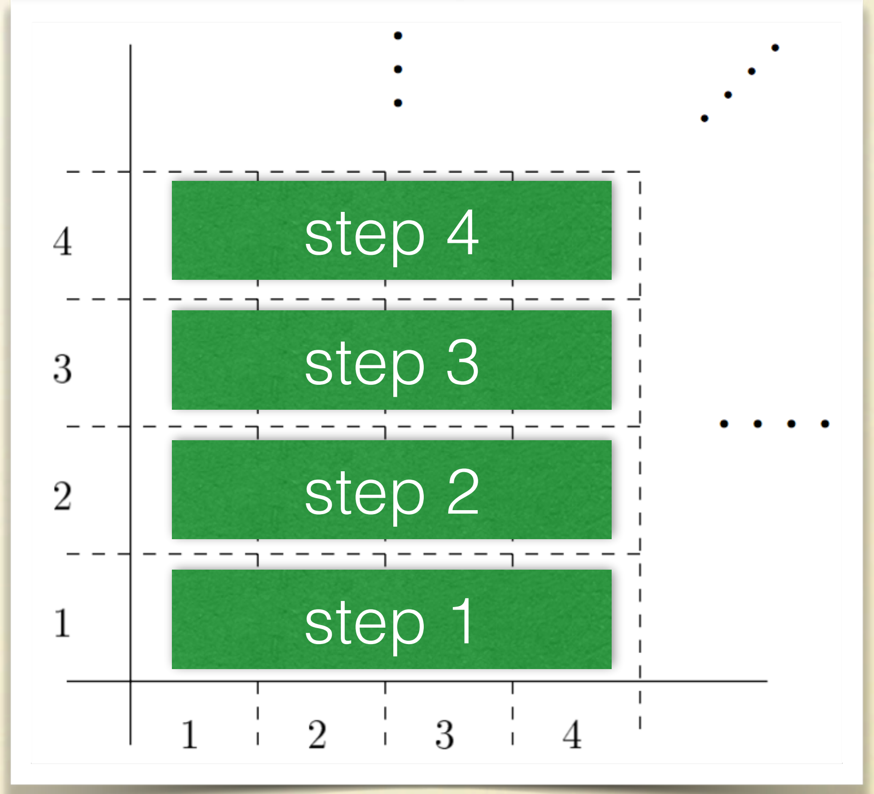


La convenzione è che le piastrelle possano essere posizionate le une accanto alle altre solo se i margini corrispondono.

Dalla TM $\mathscr{M}$ al sistema di tiling $\mathscr{T}_{\mathscr{M}}$

Consideriamo ora come trasformare una TM $\mathscr{M}$ in un sistema di tiling appropriato $\mathscr{T}_{\mathscr{M}}$.

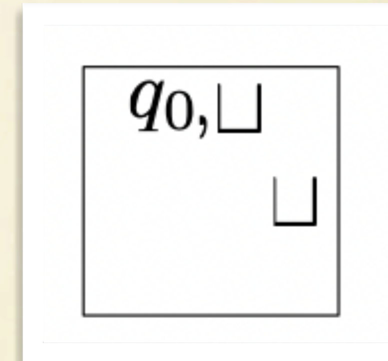
L'idea essenziale è che file successive del tiling rappresentino il nastro nei passi successivi.



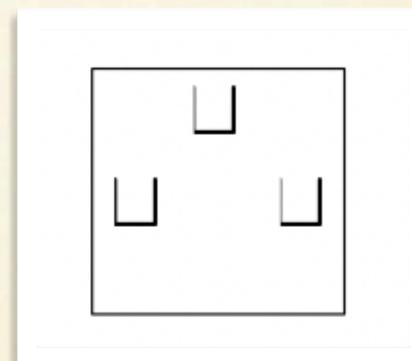
Piastrelle speciali sono usate per tenere traccia di stato e posizione della testina correnti.

Da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$: nastro iniziale

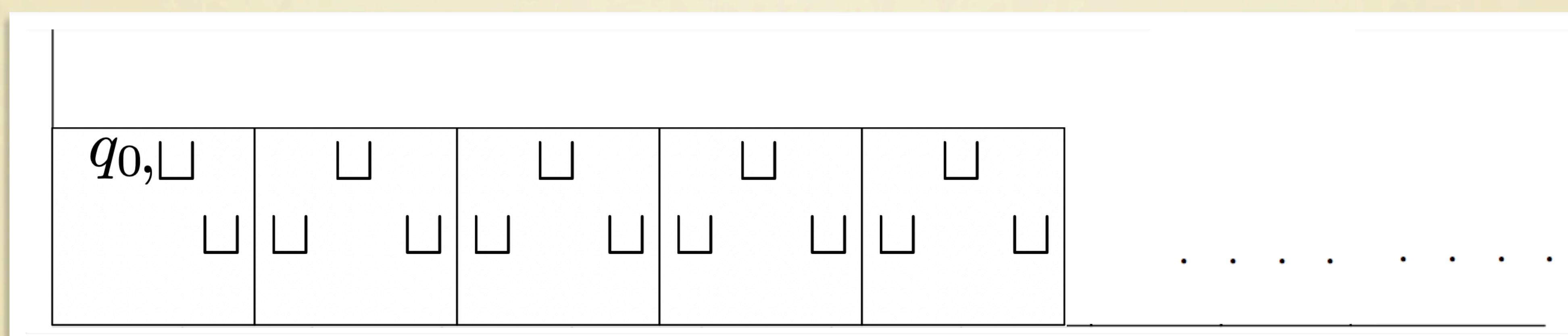
Iniziamo definendo la piastrella d'origine $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ come



Inoltre, includiamo la piastrella

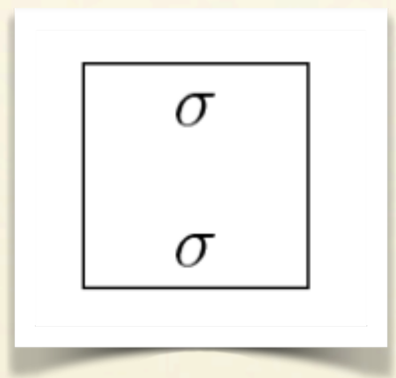


L'idea è di forzare la prima fila di ciascun tilling a rappresentare il nastro all'inizio della computazione di $\mathcal{M}$ su input ε.



Da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$: simboli

Per ogni $\sigma \in \Sigma$, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ includiamo la piastrella



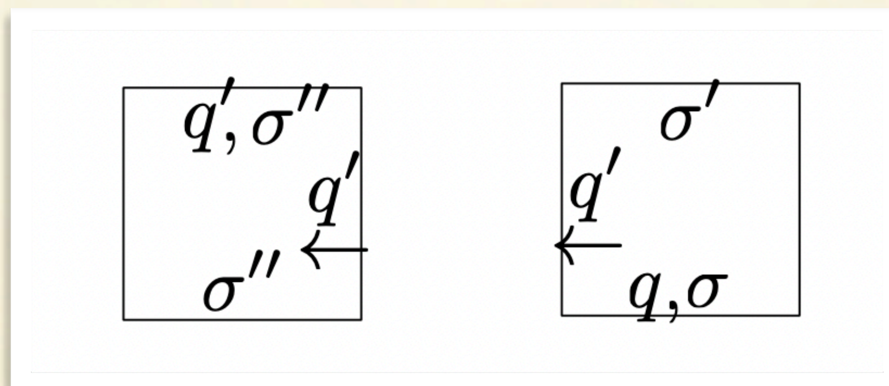
Tale piastrella rappresenta una cella con il simbolo σ scritto in essa. Inoltre, la disposizione dei simboli nella piastrella assicura che al massimo una cella sia modificata ad ogni passo della computazione.

Da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$: transizioni

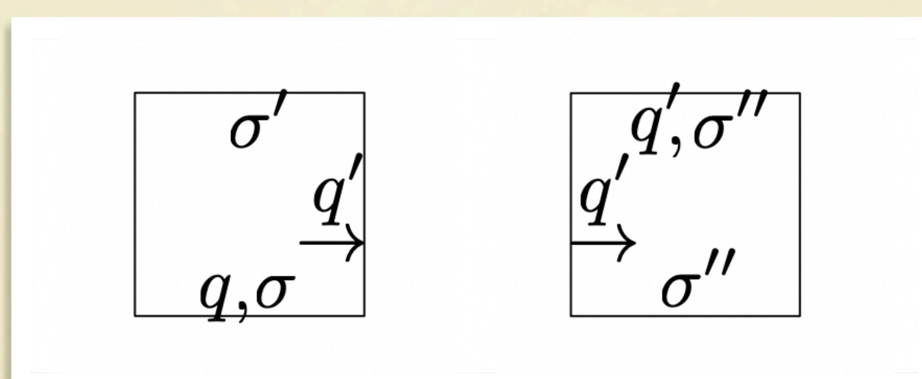
Il successivo insieme di piastrelle da includere rappresenta il fatto che a ogni passo della computazione $\mathcal{M}$ cambia il contenuto della cella nella posizione corrente, cambia il suo stato, e si sposta (a destra o sinistra).

Da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$: transizioni

- Per ogni q ∈ Q\{h} e σ, σ’ ∈ Σ per cui δ(q,σ) = (q’, σ’, ←), e per ogni σ’’ ∈ Σ, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ include le piastrelle

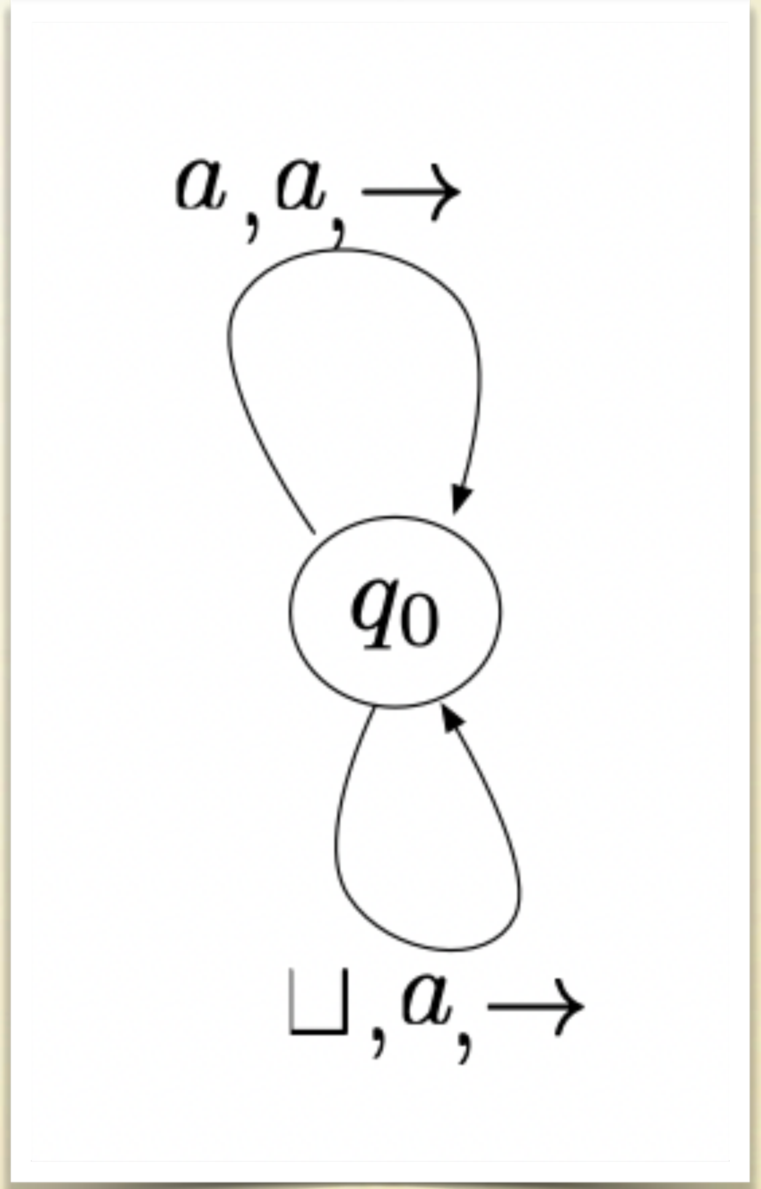


- Per ogni q ∈ Q\{h} e σ, σ’ ∈ Σ per cui δ(q,σ) = (q’,σ’,→), e per ogni σ'' ∈ Σ, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ include le piastrelle



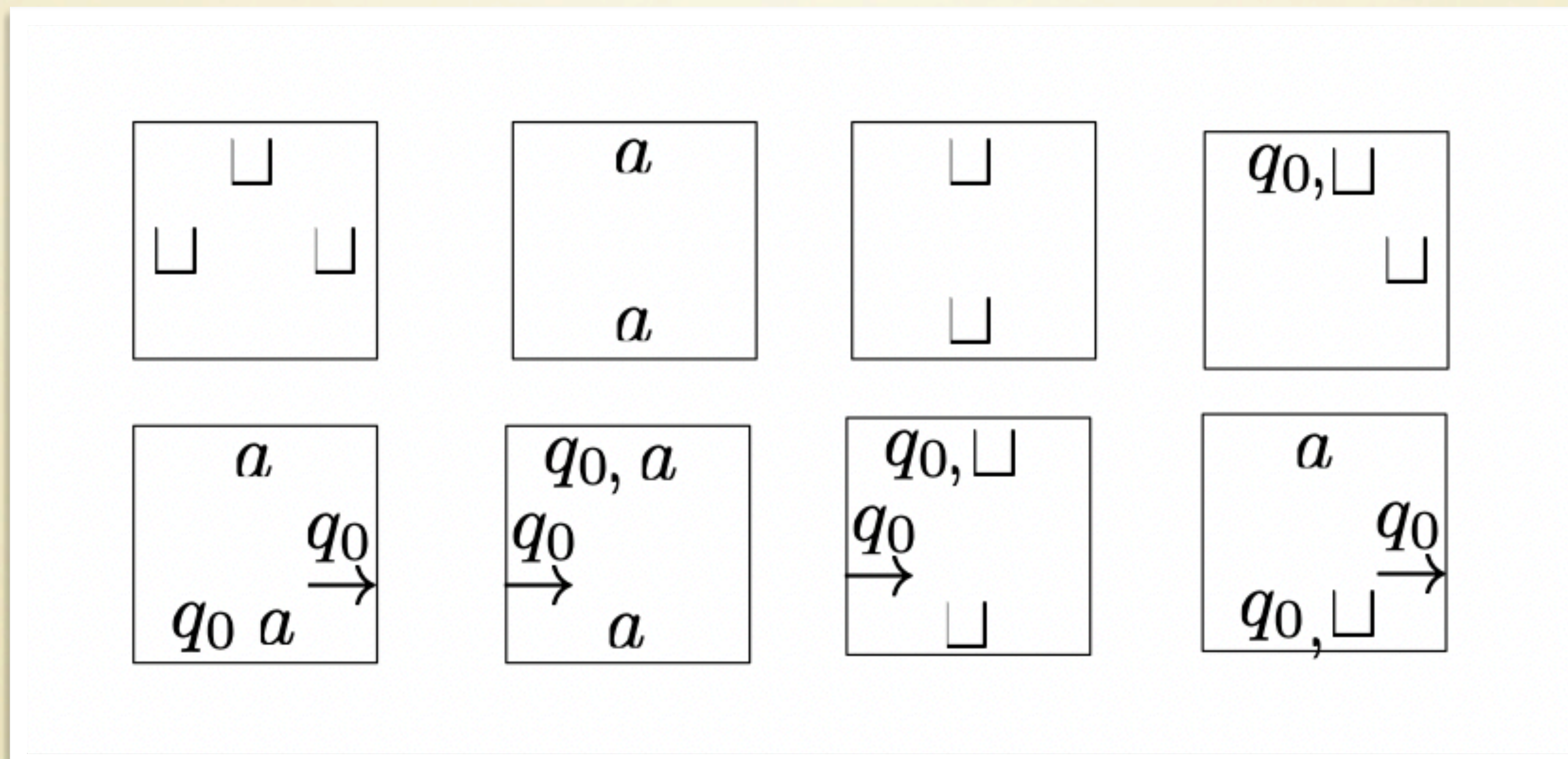
Esempio

Consider la TM $\mathcal{M}$ con $\Sigma = \{a, \sqcup\}$, $Q = \{q_0\}$ e δ come a destra.



Esempio

Il sistema di tiling risultante $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ è definito come

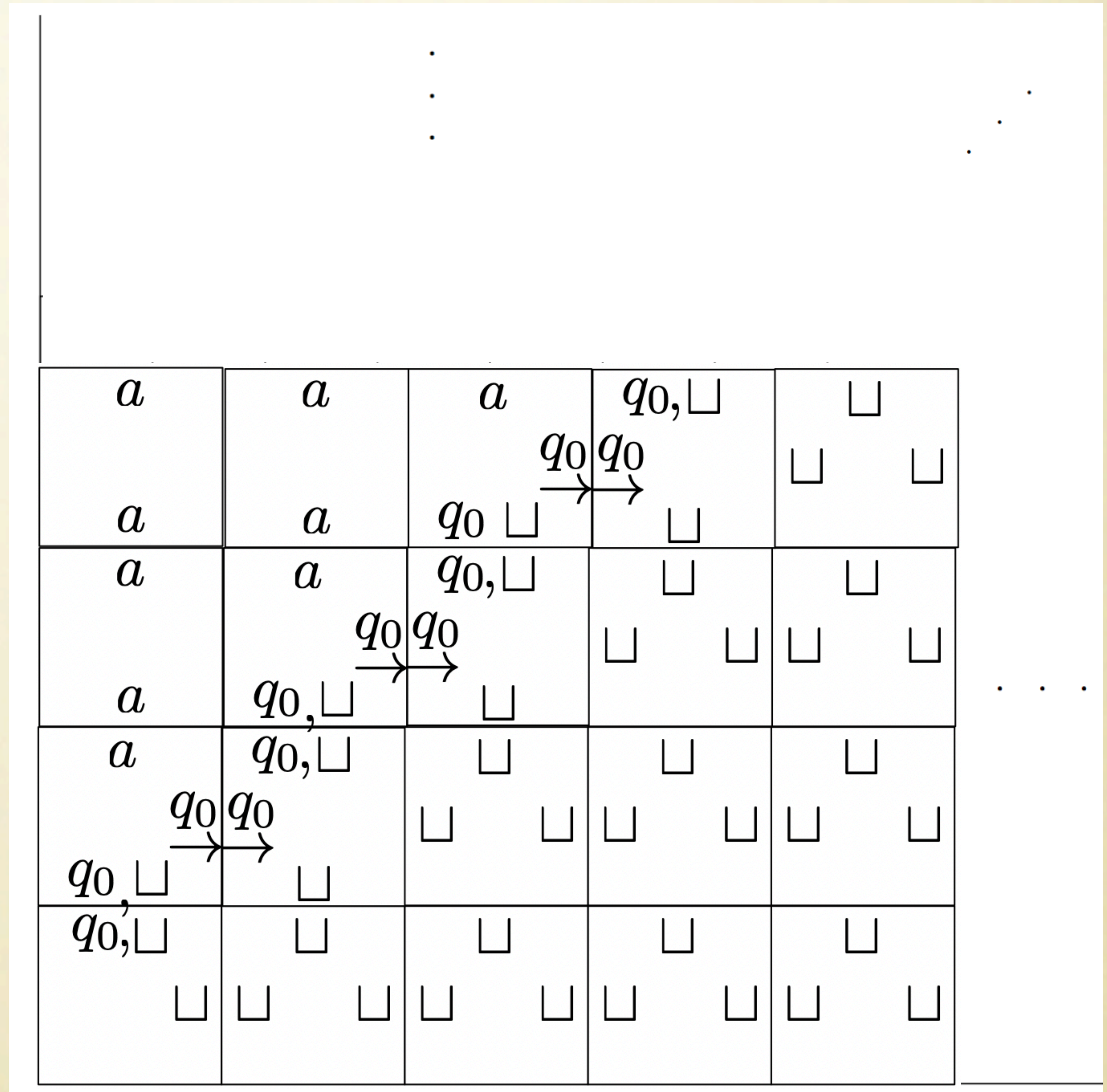


Esempio

$\mathscr{T}_{\mathscr{M}}$ ha un tiling, di cui la parte iniziale è come a destra.

Il tiling descrive la computazione di $\mathscr{M}$ su ε.

Nota: questo tiling esiste $\mathscr{M}$ perché *non* ferma.



Il *tiling problem* è irriconoscibile

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per tornare all’equivalenza:

$$\text{code}(\mathcal{M}) \in ETH \quad \leftrightarrow \quad \text{non esiste un } \textit{tiling} \text{ per } \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$$

Ciò significa che,

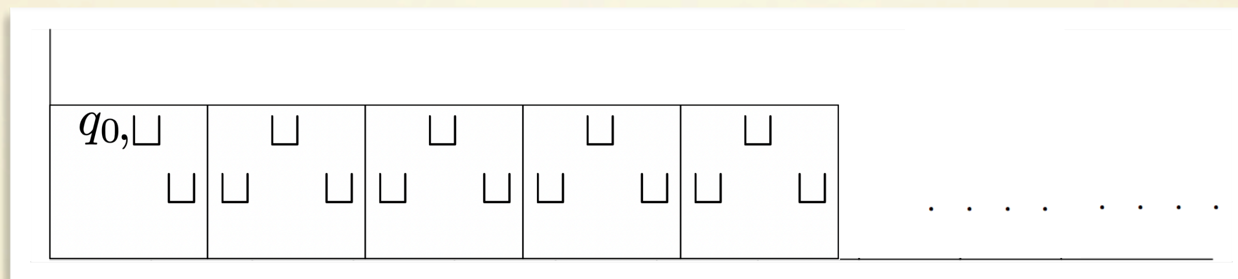
$$\mathcal{M} \text{ ferma su } \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad \text{non esiste un } \textit{tiling} \text{ per } \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$$

Da ciò segue che se il *tiling problem* fosse riconoscibile, allora anche $\overline{ETH}$ sarebbe riconoscibile. Quindi, il *tiling problem* non è riconoscibile.

Il *tiling problem* è irriconoscibile

Dimostriamo: $\mathcal{M}$ ferma su ε $\leftrightarrow$ non esiste un *tiling* per $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$

- Per prima cosa assumiamo che $\mathcal{M}$ fermi su ε, diciamo in *n* passi.
- Un tiling per $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ deve per definizione avere una prima fila

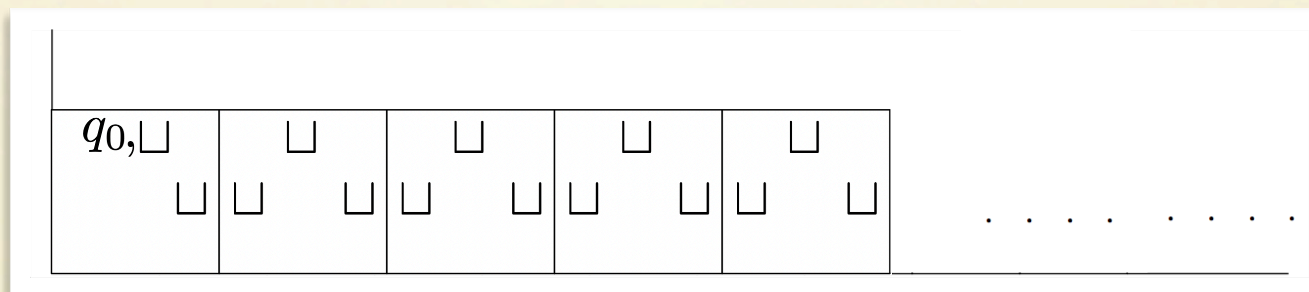


- In generale, la fila *i descriverà l'i*-esimo passo di computazione di $\mathcal{M}$ su ε.
- Ciò continua fino alla fila *n*. Poiché $\mathcal{M}$ raggiunge uno stato di fermata *h*, per definizione di $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, la fila *n+1* non può essere costruita.
- Allora non esiste un *tiling* per $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$.

Il *tiling problem* è irriconoscibile

Dimostriamo: $\mathcal{M}$ ferma su ε $\leftrightarrow$ non esiste un *tiling* per $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$

- Viceversa, assumiamo che $\mathcal{M}$ non fermi (= entri in un ciclo) su ε.
- Un *tiling* per $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ deve, per definizione, avere una prima fila:



- Come prima, l'*i*-esimo passo di computazione di $\mathcal{M}$ su ε determina in modo univoco quale sia la fila *i.*

- Quindi, se la computazione non si ferma, un *tiling* esiste.