Esercizi risolti

1 Algoritmi e Complessità

Problema 1.1. *Il grado di un grafo è il numero massimo di archi uscenti per ogni nodo. Dimostrare che ogni grafo di grado n può essere colorato con $n+1$ colori. È possibile decidere in tempo polinomiale se un grafo di grado 2 è colorabile con meno di 3 colori?*

Soluzione. Coloriamo un nodo alla volta scegliendo un colore diverso da quello dei nodi adiacenti già colorati. Poichè il numero dei nodi adiacenti è al più n, ci sarà sempre almeno un colore disponibile. La bicolorabilità di un grafo può essere decisa in tempo polinomiale, effettuando una banale visita del grafo stesso in cui si alternano i colori su nodi adiacenti. □

Problema 1.2. *Un grafo si dice bipartito se l'insieme dei suoi vertici si può partizionare in due sottoinsiemi tali che ogni vertice di una di queste due parti è collegato solo a vertici dell'altra. È possibile decidere in tempo polinomiale se un grafo è bipartito?*

Soluzione. Il problema è analogo a quello di stabilire se il grafo è bicolorabile, e dunque polinomiale. □

Problema 1.3. *Mostrare che, se il problema $Clique(G, k)$ di determinare se un grafo ammette una cricca di dimensione k fosse risolubile in tempo polinomiale, allora potremmo determinare la cricca massima di un grafo (non solo la sua cardinalità) in tempo polinomiale.*

Soluzione. Innanzi tutto stabiliamo la dimensione m della cricca massima chiamando ripetutamente $Clique(G, k)$ per valori di k decrescenti, iniziando dalla dimensione n dei nodi del grafo. A questo punto togliamo dal grafo un nodo alla volta e verifichiamo se il grafo risultante ha ancora una cricca di dimensione m. Se la risposta è positiva, il nodo non appartiene alla cricca, altrimenti ci appartiene. Ripetiamo il procedimento per tutti i nodi del

grafo (nel secondo caso, m deve essere decrementato).
Si noti che verificare in modo esaustivo tutte le combinazioni di m nodi potrebbe avere complessità esponenziale, in quanto m dipende dalla dimensione del grafo. $\square$

Problema 1.4. *Dimostrare che dato un grafo G e una costante k è possibile decidere in tempo polinomiale se G ammette una cricca di cardinalità k.*

Soluzione. Basta considerare in modo esaustivo tutti i sottoinsiemi di dimensione k, il cui numero è dato dal coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, e per ciascuno di essi verificare che sia una cricca, che comporta la visita di k^2 archi.
Poichè $\binom{n}{k} \in O(n^k)$ e k è costante, la complessità è polinomiale. $\square$

Problema 1.5. *Descrivere un algoritmo efficiente per determinare se un grafo orientato ammette un ciclo e discuterne la complessità.*

Soluzione. È sufficiente effettuare una visita (in profondità o in larghezza) del grafo colorando via via i nodi già incontrati. Se si rivisita un nodo già colorato il grafo contiene un ciclo, altrimenti ne è privo. La visita del grafo richiede un tempo lineare nella sua dimensione, e dunque il problema è risolubile in tempo lineare (quadratico nel numero dei nodi). $\square$

Problema 1.6. *2Sat è il problema di decidere la soddisfacibilità per formule proposizionali in forma normale congiuntiva con clausole composte da due soli letterali. Dimostrare che 2Sat è risolubile in tempo polinomiale.*

Soluzione. Si definisca un grafo G nel modo seguente: i nodi di G sono le variabili della formula o le loro negazioni; si pone un arco tra x e y se e solo se la formula contiene la clausola $\{\neg x, y\}$ (i.e. $x \to y$). Si osservi che, per costruzione, si ha un arco tra x e y se e solo se si ha un arco da $\neg y$ a $\neg x$.
La proprietà fondamentale è la seguente:

> (*) φ è insoddisfacibile se e solo se esiste una variabile x per cui in G si hanno cammini da x a $\neg x$ e da $\neg x$ a x.

Il verso $\Leftarrow$ è semplice, in quanto se esiste un cammino da x a y e x è vero nell'interpetazione che soddisfa φ, allora deve esserlo anche y. Per il viceversa, supponiamo che non esista nessuna variabile x che soddisfa $(*)$ e costruiamo progressivamente una interpretazione che soddisfa φ attribuendo valori di verità ai nodi. Due importanti invarianti della costruzione sono che (1) un nodo x ha un valore se e solo se lo ha anche $\neg x$, e (2) se un nodo x

ha valore True allora anche tutti i nodi raggiungibili da x hanno valore True e viceversa se un nodo y ha valore False allora lo hanno anche tutti i nodi da cui y è raggiungibile.

Selezioniamo arbitrariamente un nodo x a cui non è ancora stato attribuito un valore di verità. Per ipotesi, o non esiste un cammino da x a $\neg x$ o non esiste un cammino da $\neg x$ a x: i due casi sono simmetrici, e trattiamo il primo. Poniamo x a Vero; poniamo a Vero anche tutti i nodi raggiungibili da x; poniamo inoltre a Falso il nodo $\neg x$ e tutti i nodi da cui $\neg x$ può essere raggiunto. Questo passo è ben definito in quanto se esistesse un cammino da x a y ed uno da y a $\neg x$ allora avremmo un cammino da x a $\neg x$. Il procedimento può essere ripetuto per tutti i nodi del grafo ottenendo una attribuzione di valori di verità che soddisfa φ.

Si osservi infine che la proprietà $(*)$ può essere verificata in tempo $O(n^3)$ nel numero n di nodi del grafo.

□

Problema 1.7. *Un cammino in un grafo si dice* semplice *se non attraversa due volte lo stesso nodo. Si discuta la complessità del problema di determinare se un grafo ammette un cammino semplice di lunghezza maggiore o uguale di k.*

Soluzione. Il problema è NP-hard, in quanto è facile ridurre ad esso il problema dell'esistenza di un cammino hamiltoniano, prendendo semplicemente come valore k il numero dei nodi del grafo. Inoltre il problema è in NP, in quanto il certificato dell'esistenza è la sequenza dei k vertici, per i quali è facile verificare in tempo polinomiale (lineare) che costituiscono un cammino. □

2 Riduzioni

Problema 2.1. *Dimostrare che (i) se L è NP completo allora $\overline{L}$ è $co-NP$ completo, (ii) se L è $co-NP$ completo e $L \in NP$ allora $NP = co-NP$.*

Soluzione. (i) se $A \in co-NP$, allora $overline A \in NP$ e per la NP completezza di L, $overline A \leq L$. Per definizione di riduzione questo implica $A \leq \overline{L}$, e dunque $\overline{L}$ è $co-NP$ completo. (ii) $A \in NP$ se e solo se $\overline{A} \in co-NP$ se e solo se $\overline{A} \leq L$ se e solo se $\overline{A} \in NP$ se e solo se $A \in co-NP$. □

Problema 2.2. *Sia L un linguaggio NP-completo. Dimostrare che allora lo è anche*

$$L' = \{xx | x\ inL\}$$

Soluzione. L' è chiaramente in NP in quanto per decidere se $w \in L'$ ci basta verificare che w abbia sia della forma xx e determinare se $x \in L$. D'altra parte, è facile ridurre L a L', semplicemente duplicando l'input (cosa che richiede tempo lineare). $\square$

Problema 2.3. *Sia dato un grafo $G = (V, E)$, con $|V| = 2n$. Il problema HALF-CLIQUE consiste nel decidere se esiste una cricca di dimensione n. Dimostrare che HALF-CLIQUE è NP-Completo.*

Soluzione. È facile vedere che HALF-CLIQUE è in NP. Mostriamo che CLIQUE è riducibile a HALF-CLIQUE, modificando in modo opportuno il grafo a seconda che la dimensione della cricca k sia minore di n oppure maggiore o uguale ad n. Se $k \geq n$ aggiungiamo al grafo x nodi sparsi (non connessi a nessun altro nodo del grafo) in modo tale che la dimensione della cricca k sia esattamente la metà della dimensione del grafo esteso, ovvero $2k = 2n + x$, da cui si ricava che si devono aggiungere $2(k - n)$ nodi.
Viceversa se $k < n$ dobbiamo aumentare la dimensione della cricca e quindi aggiungere x nodi connessi a tutti i nodi del grafo (loro compresi). La dimensione della cricca nel nuovo grafo sarà pari a $k+x$ e vogliamo che si abbia $2(k + x) = 2n + x$, da cui si ricava che si devono aggiungere $x = 2(n - k)$ nodi. $\square$

Problema 2.4. *Dato un grafo, il problema $IS{-}o{-}CRICCA(k)$ consiste nel determinare se il grafo ammette un Insieme Indipendente* oppure *un Cricca di dimensione k. Dimostrare che il problema è NP-completo per riduzione da $IS(k)$ (esistenza di un Insieme Indipendente di dimensione k).*

Soluzione. Il problema è chiaramente in NP. Dimostriamo che è $NP-hard$ mediante la seguente riduzione da IS. Dato un grafo $G = (V, E)$ ed un numero k costruiamo un nuovo grafo G' aggiungendo $n = |V|$ nodi isolati. Sia $k' = n+k$. Chiaramente G' non può contenere un cricca di dimensione maggiore a n; dunque G' contiene una cricca oppure un insieme indipendente di dimensione k' se e solo se G' contiene un insieme indipendente di dimensione k', se e solo se G contiene un insieme indipendente di dimensione k. $\square$

Problema 2.5. *Dimostrare che il problema dell'esistenza di un cammino Hamiltoniano può esere ridotto in tempo polinomiale al problema dell'esistenza di un ciclo Hamiltoniano, e viceversa.*

Soluzione.

- Cammino Hamiltoniano $\leq$ Ciclo Hamiltoniano. Dato il grafo di partenza G si costruisce un nuovo grafo G' aggiungendo un nuovo nodo connesso a tutti i nodi del grafo originale. Se il grafo G ammetteva un cammino hamiltoniano, allora in G' avremo un ciclo hamiltoniano, e viceversa.

- Ciclo Hamiltoniano $\leq$ Cammino Hamiltoniano. Dato il grafo di partenza G si costruisce un nuovo grafo G' selezionando un nodo qualunque v di G e "duplicandolo", aggiungendo cioè un nodo v' connesso a tutti i nodi adiacenti a v. Vengono aggiunti inoltre altri due nodi *start* e *stop* connessi rispettivamente a v e v'.
  Supponiamo che esista un ciclo in G; possiamo suppore che inizi in v, e questo chiaramente genera un cammino in G' che parte da start, segue il ciclo in G ma invece di richiudersi su v esce verso v' e termina in *stop*.
  Viceversa, se esiste un cammino hamiltoniano in G' questo deve necessariamente andare da *start* fino a *stop*, ed è facile vedere che questo definsice un ciclo da v in v in G.

$\square$

Problema 2.6. *Il problema TSP del commesso viaggiatore consiste nel determinare l'esistenza o meno di un ciclo di lunghezza data k in un grafo di n città con distanze assegnate d_{ij} (intere positive) tra ogni coppia di esse. Dimostrare che TSP è NP completo riducendo ad esso il problema dell'esistenza di un ciclo hamiltoniano.*

Soluzione. È facile vedere che $TSP \in P$, in quanto la verifica che una dato ciclo ha una lunghezza inferiore a k richiede un tempo lineare. Facciamo vedere che TSP è $NP - hard$ riducendo ad esso il problema del ciclo hamiltoniano. Dato un grafo G di n nodi generiamo il grafo G' totalmente connesso con distanze d_{ij} definite nel modo seguente:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in G \\ 2 & \text{se } (i,j) \notin G \end{cases}$$

È immediato osservare che esiste un cammino hamiltoniano in G se e solo se esiste un ciclo di lunghezza inferiore a $n+1$ in G'. $\square$

Problema 2.7. *DOUBLE-SAT è l'insieme delle formule logiche che ammettono almeno due interpretazioni distinte che soddisfano la formula. Dimostrare che il problema di decidere l'appartenenza di una formula a DOUBLE-SAT è NP completo, riducendo ad esso il problema SAT.*

Soluzione. È facile vedere che DOUBLE-SAT $\in$ NP: data la formula proposizionale φ è sufficiente generare in modo non deterministico le due interpretazioni t_1, t_2 e verificare che queste siano distinte e che entrambe soddisfino φ, cosa che richiede tempo polinomiale.

Per mostrare che $DOUBLE - SAT$ è NP-hard, facciamo vedere che $SAT \leq DOUBLE - SAT$. Come funzione di riduzione consideriamo la trasformazione f che associa a φ la formula $\varphi \wedge (x_1 \vee x_2)$, dove x_1, x_2 sono due variabili che non occorrono in φ. Si osservi che la funzione f può essere calcolata in tempo polinomiale; ci resta da dimostrare che $\varphi \in SAT$ se e solo se $f(\varphi) \in DOUBLE - SAT$ Se φ è insoddisfacibile allora lo è anche $f(\varphi)$; viceversa se φ è soddisfatta da t, allora $f(\varphi)$ ha almeno 3 (e dunque almeno 2) interpretazioni differenti possibili, che corrispondono ai tre modi di estendere t alle variabili x_1, x_2 rendendo vera $(x1 \vee x2)$. □

Problema 2.8. *Data una collezione $C = S_1, \ldots, S_n$ di sottoinsiemi non vuoti di S, un* hitting set *per C è un sottoinsieme H di S tale che per ogni i, $H \cap S_i \neq \emptyset$. Esempi:*

- *S è un hitting set per C (banale).*
- *sia $C = \{\{1,2,3\},\{0,1\},\{0,4,5\},\{2,5\},\{6\}\}$. $H = \{1,5,6\}$ è un hitting set per C di cardinalità 3 (non unico). C non ha hitting set di cardinalità 2.*

Dimostrare che il problema di determinare, dato C, se esiste un hitting set di cardinalità minore o uguale a k è NP-completo, riducendo ad esso il problema del ricoprimento di vertici.

Soluzione. È facile vedere che *hitting set* $\in$ NP: dato S possiamo verificare in tempo polinomiale se per ogni i, $H \cap S_i \neq \emptyset$. Mostriamo che *hitting set* è NP-hard riducendo ad esso il problema del ricoprimento.

Dato un grafo $G = (V, E)$, sia C la collezione delle coppie $\{u, v\}$ tali che $(u, v) \in E$. Per definizione, un ricoprimento per G è anche un hitting set per C, e dunque G ha un ricoprimento di dimensione minore o uguale a k se e solo se C ha un hitting set di dimensione minore o uguale a k. □