Esercitazione 2   Informatica Teorica   15 Marzo 2023

Nozioni Richieste: Mapping Reduction

Definizione: Siano L e L' linguaggi sull'alfabeto Σ, diciamo che L' è <u>mapping-riducibile</u> a L, scritto $L' \leq L$, se esiste una TM che computa la funzione (totale) $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ tale che $x \in L' \longleftrightarrow f(x) \in L$.

R <u>transitiva</u>: $L' \leq L$ e $L \leq L''$ implicano $L' \leq L''$

Problema 1: Mostra che $\leq$ è una relazione transitiva.

$$\frac{aRb \quad bRc}{aRc}$$

Dimostrazione: Supponiamo $L' \leq L$ (H1) e $L \leq L''$ (H2)
allora abbiamo per H1 e mapping riducibilità
che esiste f totale t.c. $x \in L' \longleftrightarrow f(x) \in L$ (H3)
allora abbiamo per H2 e mapping riducibilità
che esiste g totale t.c. $x \in L \longleftrightarrow g(x) \in L''$ (H4)
quindi per H3 e H4 abbiamo che
$x \in L' \longleftrightarrow f(x) \in L \longleftrightarrow g(f(x)) \in L''$
ovvero $x \in L' \longleftrightarrow g(f(x)) \in L''$
ovvero la funzione totale che mappa L' in L''
è $g(f(x)) = h(x)$

Nozioni Richieste: Mapping-Reduction (vedi p.1), Linguaggio Decidibile

- Diciamo che M <u>accetta</u> un input $x \in \Sigma^*$ se la computazione ferma in stato Y. M <u>rigetta</u> se ferma in stato N.
- M <u>decide</u> L se:
  - quando $x \in L$, allora M accetta x.
  - quando $x \notin L$, allora M rigetta x.
- Un linguaggio è <u>decidibile</u> se c'è una TM che lo decide.

Problema 2. Dimostra che se $L \leq L'$ e L' è decidibile, allora L è decidibile.

Dimostrazione: Supponiamo $L \leq L'$ (H1) e L' decidibile (H2)
dobbiamo dimostrare L decidibile.
abbiamo per H1 e mapping riducibilità che
$\exists M \in MT$ t.c. M computa f totale t.c. $\forall x \in \Sigma^*$
$x \in L \longleftrightarrow f(x) \in L'$ (H3)

Alla lavagna: $L \leq L'$ L' è decidibile
D.D. L è decidibile sse $\exists M$ t.c. $\forall x . x \in \Sigma^*$
$x \in L \Rightarrow M$ accetta x, $x \notin L' \Rightarrow M$ rigetta x.
$\exists M$ che computa f $\forall x \in L \longleftrightarrow f(x) \in L'$ ①
② $\exists M_{L'}$ t.c. $\forall x \in \Sigma^*$
$x \in L' \to M_{L'}$ accetta x
$x \in L' \to L_{L'}$ rigetta x.
Costruisco M_L su input x: M che esegue x
eseguo $M_{L'}$ su $f(x)$
- $M_{L'}$ accetta $f(x)$ allora $f(x) \in L'$ allora per ① $x \in L$.
- $M_{L'}$ rigetta $f(x)$ allora $f(x) \notin L'$ allora per ① $x \notin L$.

Problema 2bis. Dimostra che se $L \leq L'$ e L' è riconoscibile, allora anche L' è riconoscibile

Dimostrazione. $L \leq L'$ L' è riconoscibile
D.D. L è riconoscibile sse $\exists M$ t.c. $\forall x . x \in \Sigma^*$
$x \in L \Rightarrow M$ termina, $x \notin L' \Rightarrow M$ non termina
$\exists M$ che computa f $\forall x \in L \longleftrightarrow f(x) \in L'$ ①
② $\exists M_{L'}$ t.c. $\forall x \in \Sigma^*$
$x \in L' \to M_{L'}$ termina
$x \in L' \to M_{L'}$ non termina
Costruisco M_L su input x: M che esegue x
eseguo $M_{L'}$ su $f(x)$
- $M_{L'}$ termina su $f(x)$ allora M_L termina
- $M_{L'}$ non termina su $f(x)$ allora M_L non termina

quindi L è riconoscibile

Problema 3: Considera il seguente linguaggio
$U = \{ y \in \{0,1\}^* \mid y = code(M)$ & M accetta $111 \}$
Dimostra che U è indecidibile sfruttando l'indecidibilità di HALT. Suggerimento: Ricorda che, per il Corollario 1 (Lezione 7), se $L \leq L'$ e L è indecidibile, allora L' è indecidibile.

Il problema della fermata
$HALT = \{ \langle x, y \rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid y = code(M)$ e M ferma su $x \}$

Dimostrazione:
Abbiamo già dimostrato che HALT è indecidibile (H1) nella lezione 7.
$U = \{ y \in \{0,1\}^* \mid y \in code(M)$ & M accetta $111 \}$
$HALT = \{ \langle x, y \rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid y = code(M)$ e M ferma su $x \}$

Devo dimostrare $HALT \leq U$
$\exists M$ che computa f t.c. $\forall \langle x, y \rangle \in HALT \longleftrightarrow f(\langle x, y \rangle) \in U$
$f: \langle x, y \rangle \to \langle 111, y \rangle$

Alla lavagna
$HALT \leq U$
$\langle y, x \rangle \in HALT \Leftrightarrow f(\langle y, x \rangle) \in U$
f definita come
- $y \neq code(M)$ $\forall M$, allora $f(\langle y, x \rangle) = y \notin U$
- $y = code(M)$ $f(\langle y, x \rangle) = code(M_{MX})$

Nota
- $y = code(M)$ è calcolabile (decidibile)
- $y = code(M)$, M_{MX} una macchina effettivamente costruibile <

CANCELLATO

M_{MX} costruita come:
① M_{MX} in loop x string $\neq 111$
② su input 111, scrive x sul nostro e simula <u>M su x</u>

NO

$HALT \leq U$
$\langle y, x \rangle \in HALT \Longleftrightarrow f(\langle y, x \rangle) \in U$
$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ se $y = code(M)$
$y = code(M)$ e M si ferma su x $code(M_M, x) \in U$
$\Updownarrow$
M_{MX} accetta 111

M_{MX} costruita come:
① M_{MX} in loop x string $\neq 111$
② su input 111, scrive x sul nostro e simula <u>M su x</u>

Teorema di Rice

Nozioni Richieste: Proprietà di Linguaggio; Proprietà Triviale

Problema 4: Quali delle seguenti proprietà sono proprietà di linguaggio triviali?

a. $\{ y \mid y = code(M)$ & $\varepsilon \in L_M \}$

b. $\{ y \mid y = code(M)$ & <u>M non è TM</u> $\}$

c. $\{ y \mid y = code(M)$ & L_M contiene tutte le stringhe di lung. pari $\}$

d. $\{ y \mid y = code(M)$ & M ha 3 strati $\}$

Problema 5: Enuncia il teorema di Rice.
Puoi applicarlo per dimostrare l'indecidibilità di
$INF = \{ code(M) \mid M$ TM tale che $L(M)$ linguaggio infinito?