Libera Longo 29 Marzo 2023

Nozioni Richieste. Complessità di Tempo; Notazione Asintotica

COMPLESSITÁ DI TEMPO

Data una funzione $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiamo la classe di complessità (di tempo) $TIME(t(n))$ come una collezione di tutti i linguaggi decidibili da una TM (deterministica, a un nastro) in tempo $O(t(n))$

NOTAZIONE ASINTOTICA → algoritmi.

Problema 1. Dato il linguaggio: $A = \{0^K 1^K \mid K \geq 0\}$ considera la (multitape) TM M che decide A e programmata come segue:

$n+1$ 1. M legge l'input e rigetta se trova uno 0 a destra di un 1.

n 2. M legge gli 0i sul nastro 1 e li copia sul nastro 2.

$\frac{n}{2}+1$ 3. M legge gli 1i sul nastro 1 e per ogni 1 sul nastro 1 cancella uno zero sul nastro 2

1 4. Se tutti gli 0i sono cancellati, M accetta; se qualche 0 resta sul nastro 2, M rigetta.

$$(n+1)+(n+n)+(n+\frac{n}{2}+1)+1 = 4n+\frac{n}{2}+3 \qquad O(n)$$

Nozioni Richieste. Caratterizzazioni di NP.

Def: (Classe NP)
Data una funzione $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiamo la classe di complessità (di tempo) $NTIME(t(n))$ come collezione di tutti i linguaggi decidibili da NTM (a un nastro) in tempo $O(t(n))$:

$$NP = \bigcup_K NTIME(n^K)$$

Def: (Classe NP, alternativa)
Un linguaggio L é VERIFICABILE se esiste una TM M (che termina sempre, accettando o rigettando), tale che:

$$w \in L \text{ sse esiste } w' \text{ t.c. } M \text{ accetta } \langle w, w' \rangle$$

intuitivamente c'é un CERTIFICATO del fatto che w sia in L.

Problema 2. Considera il problema che dato un insieme di numeri $x_1 \dots x_K$ e un target t, determina se l'insieme dato contiene un sottoinsieme la cui somma di elementi ha valore t.

$$SSUM = \{\langle S, t \rangle \mid S = \{x_1, \dots, x_K\} \text{ \& per qualche } \{y_1, \dots, y_l\} \subseteq \{x_1, \dots, x_K\}, \sum y_i = t\}.$$

Esempio: $\langle \{4, 11, 12, 21, 28, 50\}, 25 \rangle \in SSUM$ in quanto $4 + 21 = 25$.
Dimostra $SSUM \in NP$ (a.) tramite (poly-time) NTM e (b.) tramite verificatore.

(a.)

1. Scegle in modo non det $|A| = K$ $\quad 1 \leq K \leq n$
   $\forall a \in A \quad n \in S$
2. controllo $\sum_{a \in A} a = t$ allora accetta, altrimenti rigetta.

(b.)

TM M prende $\langle\langle S, t \rangle, c \rangle$

1. controllo $\forall a \in C . \ a \in S$ $\qquad O(n)$
2. controllo $\sum_{a \in C} a = t$ $\qquad O(n)$
3. Se (1) e (2) sono verificate allora accetta, altrimenti rigetta. $\qquad O(1)$

Nozioni Richieste: Poly-Riduzione; NP-completezza

Problema 3: Se L è NP-completo, $L' \in NP$ e $L \leq_p L'$, allora L' è NP-completo.

Suggerimento: Ricorda che durante la passata esercitazione abbiamo dimostrato che la m-riduzione è transitiva.

Ricordiamo dall' esercitazione 2 del 15 Marzo 2023 che

Nozioni Richieste: Mapping Reduction

Definizione: Siano L e L' linguaggi sull'alfabeto Σ, diciamo che L' è mapping-riducibile a L, scritto $L' \leq L$, se esiste una TM che computa la funzione (totale) $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ tale che $x \in L' \leftrightarrow f(x) \in L$.

R transitiva: $L' \leq L$ e $L \leq L''$ implicano $L' \leq L''$

Problema 1: ~~Mostra~~ abbiamo dimostrato che $\leq$ é una relazione transitiva.

Dimostrazione
Supponiamo L è NP-completo (H1) e $L' \in NP$ (H2) e $L \leq_p L'$ (H3).
Per NP-completezza, per dimostrare che L' è NP-completo dobbiamo dimostrare (i) $L' \in NP$ (ipotesi H2) e (ii) per ogni $L^* \in NP$. $L^* \leq_p L'$.
Per dimostrare (ii)

Problema 5.1

$$F_1: \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

$1 \qquad 1 \qquad \neg 0 \to 1$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1$

$F_2: \exists x \forall y (x \vee \neg y)$
E vince $(G = 1)$ se mette $x = 1$

$F_3: \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \underline{x_3}) \wedge (x_2 \vee \underline{\neg x_3})$
A vince $(G = 0)$ se mette $x_2 = 0$
poiché $x_3 \wedge \neg x_3 = 0$ quindi una delle due non può essere vera

---

Problema 5.2
Considerando il problema di determinare quale giocatore abbia una winning strategy in un formula game associato a una data formula F:

$$FG = \{\langle F \rangle \mid E \text{ ha WINNING STRATEGY nel FG associato a } F\}$$

Mostra (anche informalmente) che FG è PSPACE-completo.

dim:

TQBF è PSPACE-completo

TQBF $\approx$ FG

$\exists x \forall y \dots G \in TQBF$

E x A y Formula game

$G = 1$ x gli da valore di verità E.
y gli da valore di verità A.

winning strategy per E
(per A richiede 0 ma la chiediamo per E)