Prova Scritta di Informatica Teorica - giugno 2011

1. Sia $\delta(i) = \mu n.\varphi_i(n) \uparrow$ (i.e. δ associa a i il più piccolo input n su cui φ_i diverge, e diverge se φ_i è totale). Discutere la calcolabilità di δ.

2. Consideriamo la funzione MAX così definita:

$$MAX(f,g)(n) = \begin{cases} max\{f(n), g(n)\} & \text{se } f(n)\downarrow \text{ e } g(n)\downarrow \\ f(n) & \text{se } f(n)\downarrow \text{ e } g(n)\uparrow \\ g(n) & \text{se } f(n)\uparrow \text{ e } g(n)\downarrow \\ \uparrow & \text{se } f(n)\uparrow \text{ e } g(n)\uparrow \end{cases}$$

   Discutere la calcolabilità di $MAX(f,g)$ supponendo che f e g siano calcolabili.

3. Dare un esempio di due insiemi A e B *disgiunti* ($A \cap B = \emptyset$), r.e. ma non ricorsivi.

4. Classificare il seguente insieme:

$$A = \{i | \varphi_i \text{ converge su ogni input pari}\}$$

5. Classificare il seguente insieme, per n fissato:

$$B = \{i | i > n \lor \varphi_i \equiv \varphi_n\}$$

6. Un grafo si dice bipartito se l'insieme dei suoi vertici si può partizionare in due sottoinsiemi tali che ogni vertice di una di queste due parti è collegato solo a vertici dell'altra. È possibile decidere in tempo polinomaile se un grafo è bipartito?

7. Mostrare che, se il problema $CLIQUE(G,k)$ di determinare se un grafo ammette una cricca di dimensione k fosse risolubile in tempo polinomiale, allora potremmo determinare la cricca massima di un grafo (non solo la sua cardinalità) in tempo polinomiale.

8. Sia dato un grafo $G = (V,E)$, con $|V| = 2n$. Il problema HALF-CLIQUE consiste nel decidere se esiste una cricca di dimensione n. Dimostrare che HALF-CLIQUE è NP-Completo.
   Hint: si mostri che CLIQUE è riducibile a HALF-CLIQUE, modificando in modo opportuno il grafo a seconda che la dimensione della cricca k sia minore di n oppure maggiore o uguale ad n.