

Informatica Teorica 2022/2023 - Esercitazione 1

1 Marzo 2023

`melissa.antonelli2@unibo.it`

Quesito 1. Cosa si intende per codifica di un problema decisionale? Quali proprietà deve rispettare?

Problema 1. Consideriamo la quadratica in x

$$q(x) = ax^2 + bx + c,$$

dove x è una variabile e a, b, c sono interi. Assumi il nostro problema decisionale sia costituito dall'insieme delle quadratiche su interi le cui istanze SI siano quelle per cui esiste un intero x tale che $q(x) = 0$. Presenta un *sistema di codifica* tramite cui questo problema possa essere processato da una TM. Presenta almeno un'istanza di tale codifica. (Non è necessario programmare la TM.)

Suggerimento. Nota che ogni quadratica considerata è definita dai tre interi a, b, c . Quindi, è sufficiente un sistema che codifichi di tre interi consecutivi.

Quesito 2. Definisci intuitivamente e formalmente la TM standard.

Problema 2.1. Considera l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e rappresenta tramite diagrammi una TM che per ogni stringa presa in input:

- si fermi e accetti l'input quando esso contiene 101,
- si fermi e rifiuti l'input altrimenti.

(Per semplicità assumi l'input sia sempre una stringa finita di caratteri di Σ seguita da un numero infinito di \sqcup .)

Problema 2.2. Descrivi tramite diagrammi la TM che decide il linguaggio delle stringhe dispari su alfabeto $\Sigma = \{1\}$.

Problema 2.3. Assumi l'alfabeto Σ sia costituito dai simboli a, b, c :

- Definisci una TM \mathcal{T} che si fermi e accetti l'input quando esso contiene la sequenza ab ; si fermi e rigetti l'input altrimenti. (Per semplicità assumi l'input sia sempre definito da una stringa finita di caratteri di Σ seguita da un numero infinito di \sqcup .)
- Quale *regular expression* descrive il linguaggio deciso da \mathcal{T} ?

Quesito 3. Cosa si intende per linguaggio decidibile? E per linguaggio riconoscibile?

Problema 3. Esiste un linguaggio che sia decidibile ma non riconoscibile?

Quesito 4. Enuncia la tesi di Church-Turing. Perché in questo contesto la TM è un modello rilevante? Sapresti indicare almeno due modelli equivalenti alla TM standard?

Problema 4. Dimostra, per assurdo, che $HALT^-$ non è riconoscibile.

Suggerimento. Ricorda che il complemento di $HALT$ è definito:

$$HALT^- = \{\langle y, x \rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid y \neq \text{code}(\mathcal{M}) \text{ per ogni } \mathcal{M} \text{ or } y = \text{code}(\mathcal{M}) \text{ \& } \mathcal{M} \text{ non si ferma su } x\}.$$

La dimostrazione è per assurdo. Assumiamo $HALT^-$ sia riconoscibile, quindi, per definizione, esista una TM \mathcal{M}_{H^-} che la riconosce. Definiamo una nuova TM \mathcal{M}'' tale che per ogni $z \in \Sigma^*$, esegue \mathcal{M}_{H^-} su input $\langle z, z \rangle$ e si ferma se \mathcal{M} si ferma; altrimenti entra in loop.

Esercizi Difficili

Problema 5. Definiamo una classe \mathcal{C} di modelli di computazione simili alla TM ma privi del comando \leftarrow , quindi tali per cui la testina non possa muovere a sinistra ma solo a destra. Formalmente, la funzione di transizione è quindi data da $\delta : (Q \setminus H) \times \Sigma \rightarrow Q \times (\Sigma \cup \{\rightarrow\})$ e non da $\delta : (Q \setminus H) \times \Sigma \rightarrow Q \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$. Dunque,

- Fornisci un argomento informale del fatto che il modello definito da \mathcal{C} non sia equivalente a quello definito dalla classe di TM standard.
- Fornisci una prova formale.
- Farebbe differenza il fatto che il modello di computazione di \mathcal{C} fosse definito sostituendolo il comando \leftarrow con il comando $-$ che mantiene la testina dove si trova? Motiva informalmente.

Problema 6. Un *enumeratore* è definito da una TM annessa a una stampante e che rispetta i seguenti vincoli: (1) non c'è lo stato di fermata, (2) esiste uno stato q_{print} , (3) il nastro inizia con \sqcup , (4) ogni volta che la macchina entra nello stato q_{print} il contenuto corrente del nastro viene stampato (il contenuto del nastro immediatamente successivo a \triangleright fino al primo simbolo \sqcup). Quindi un enumeratore E inizia con \sqcup , su cui scrive alcune stringhe dall'alfabeto, talvolta stampandone e può stampare la stessa stringa più volte. Il linguaggio enumerato da E è la raccolta di tutte le stringhe stampate da E . Dunque,

- Descrivi un enumeratore che generi il linguaggio

$$L_{even} := \{x \in \Sigma^* : |x| \text{ pari}\}$$

sull'alfabeto $\Sigma = \{1\}$.

- Dimostra che un linguaggio L è riconoscibile quando esiste un enumeratore E che lo enumera.