Prova parziale di Informatica Teorica - gennaio 2018

1. Data una funzione $f : N \to N$ e un insieme $A \subseteq N$, la controimmagine di A via f è l'insieme
$$f^{-1}(A) = \{x | f(x) \in A\}$$
   (a) dare un esempio di una funzione parziale calcolabile f e di un insieme *ricorsivo* A tale che $f^{-1}(A)$ è r.e. ma non ricorsivo
   (b) dimostrare che per ogni funzione parziale calcolabile f, se A è r.e. allora anche $f^{-1}(A)$ è r.e.

2. È possibile enumerare ogni insieme r.e. infinito mediante una funzione di enumerazione crescente? Motivare adeguatamente la risposta.

3. Data una funzione di enumerazione f totale e calcolabile, la funzione $count_f(n)$ conta quante volte n compare nella enumerazione, fino ad un massimo di 100 (se n compare più di 100 volte, l'output è 100):
$$count_f(n) = min(100, |\{x | f(x) = n\}|)$$
   E' possibile calcolare $count_f(n)$?

4. E' possibile calcolare il più piccolo input x su cui un programma da un output maggiore o uguale di x?
$$g(i) = min\{x \mid \varphi_i(x) \geq x\}$$

5. Classificare il seguente insieme:
$$A = \{i \mid \varphi_i \text{ è una funzione (parziale) periodica}\}$$

6. Classificare il seguente insieme:
$$A = \{\langle i, m \rangle \mid \forall x, \varphi_i(x)\downarrow \Rightarrow \varphi_i(x) \geq m\}$$

7. Classificare il seguente insieme
$$A = \{i \mid \exists n, \forall x \geq n, \varphi_i(x) = i\}$$
   (l'output è definitivamente uguale all'indice del programma).

8. Dare un esempio di una famiglia numerabile di funzioni h_n tutte calcolabili, ma tali che la funzione
$$g(n, x) = h_n(x)$$
   non sia calcolabile.
   Hint: la definizione di h_n non deve essere effettiva (calcolabile) in funzione di n.