수학기반 인공지능프로그래밍 (44630-01)

과제 2

제출일자: 10월 14일 수요일

담당교수: 이덕우 (dwoolee@kmu.ac.kr)

유의: 과제는 개별로 수행합니다. 제출일자 이후에 과제를 제출할 경우 획득점수의 50%를 부여합니다.

내용

연습 문제 3.4

주어진 벡터가 각 벡터공간에서 선형독립인지 선형종속인지 판단하라.

a. 벡터공간 R^3의 벡터 $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (-1, 0, 2)$, $x_3 = (0, 2, 4)$
b. 벡터공간 P^3의 벡터 $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t - t^2$ $p_3(t) = 2t^2 - 2t + 5$

답

(a) 선형 독립

$x_1 = (1, 2, 3) \quad x_2 = (-1, 0, 2) \quad x_3 = (0, 2, 4)$

$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

∴ 선형 독립 이다.

(b) 선형 종속

$P_1(t) = 1 \qquad P_2(t) = t - t^2 \qquad P_3(t) = 2t^2 - 2t + 5$

$c_1 \cdot P_1(t) + c_2 \cdot P_2(t) + c_3 \cdot P_3(t) = 0$

$c_1 + c_2(t - t^2) + c_3(2t^2 - 2t + 5) = 0$

$c_1 + c_2 t - c_2 t^2 + 2c_3 t^2 - 2c_3 t + 5c_3 = 0$

$$\begin{cases} c_1 + 5c_3 = 0 \\ t(c_2 - 2c_3) = 0 \\ t^2(2c_3 - c_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -5c_3 \\ c_2 = 2c_3 \end{cases}$$

$\therefore$ c_3의 값이 0이 아닐수 있으므로 (c_3가 0이 아니면 c_1, c_2도 0이 아님)

선형 종속이다.

연습 문제 3.7

두 벡터 x = (1, 2, 3)과 y = (2, -2, 1)에 대해, x의 y 위로의 정사영 $\mathrm{proj}_y x$를 구하라.

$$\mathrm{Proj}_y x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$$

$$\langle x, y \rangle = 1 \times 2 + 2 \times (-2) + 3 \times 1 = 2 - 4 + 3 = 1$$

$$\langle y, y \rangle = 2 \times 2 + (-2) \times (-2) + 1 \times 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$\therefore \frac{1}{9}(2, -2, 1)$$

답: 1/9(2, -2, 1)

연습 문제 3.8

두 벡터 x와 y가 이루는 각 θ에 대해 cosθ를 구하라.

(a) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (b) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

답

A: $\theta = \cos^{-1}(-1/14)$, (필기에는 누락되어 있습니다.)

공식

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

(a)

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\langle x, y \rangle = 1\times2 + 3\times1 + (-2)\times3 = 2+3-6 = -1$

$\|x\| = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$\|y\| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$\therefore \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-1}{14}$ $\quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$

B: $\theta = \cos^{-1}(6/\sqrt{78})$

$\langle x, y \rangle = 1\times1 + (-2)\cdot0 + 5\times1 + (-3)\times0 = 6$

$\|x\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{1+4+25+9} = \sqrt{39}$

$\|y\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta = \frac{6}{\sqrt{39}\cdot\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{78}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{78}}\right)$

연습 문제 3.9

벡터 (x^2-1, 2)가 두 벡터 (2, x-1), (x, x^2+3x-4)와 직교한다고 할 때 x값을 구하라.

각 벡터마다 내적이 0인 식을 구한다

$(x^2-1)\cdot 2 + 2(x-1) = 2x^2-2+2x-2 = 2x^2+2x-4 = x^2+x-2 = 0$

$\therefore (x+2)(x-1)$

$(x^2-1)\cdot x + 2\cdot(x^2+3x-4) = 0$

$x^3-x+2x^2+6x-8 = x^3+2x^2+5x-8 = 0$

위 식을 계산하면 $x=1,\ -1.5+2.4i,\ -1.5-2.4i$

$\therefore$ 두 벡터와 내적하는 x는 1 이다.

답: x = 1

연습 문제 3.10

두 벡터 x와 y에 대해 ||x|| = 4, ||y|| = 1이고, 두 벡터가 이루는 각이 45° 라고 하자, 이때 (2x+3y)(x-2y)를 구하라

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cdot\cos(45^\circ) = 4\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$(2x+3y)(x-2y) = 2x^2-4xy+3xy-6y^2 = 2x^2-xy-6y^2$$

$$x^2 = \|x\|^2 = 16 \qquad y^2 = \|y\|^2 = 1$$

$$32-2\sqrt{2}-6 = 26-2\sqrt{2}$$

$$\therefore 26-2\sqrt{2}$$

답: 26-2√2

연습 문제 3.11

[정리 3-8]의 슈바르츠 부등식을 증명하라. 즉 내적공간 V의 두 벡터 x, y에 대해 다음이 성립함을 보여라.

|<x, y>| <= √<x, x>√<y, y>

슈바르츠 부등식

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y\cdot y\rangle}$$

$\langle x, y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cos\theta$ (정의 3-12)

노름공간의 정의를 이용하여 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$

$-1 < \cos\theta < 1$ 이므로

$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, y\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ 임이 성립한다.

연습 문제 3.12

다변함수 f(x, y) = x^2+4y^2+7xy의 그래디언트 ∇f를 구하라. 그리고 (2, 5)에서 다변수함수 f의 그래디언트를 구하라.

∇f(2, 5) = (39, 54) 수정해야 함

$f(x,y) = x^2+4y^2+7xy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+7y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y+7x \quad \therefore \nabla f = \begin{bmatrix} 2x+7y \\ 8y+7x \end{bmatrix} \quad \nabla f(2,5) = \begin{bmatrix} 39 \\ 51 \end{bmatrix}$

연습 문제 3.13

다변함수 f(x, y, z) = x^2+xy^2+yz+z의 그래디언트 ∇f와 헤시안 행렬 H(f)를 구하라. 그리고 (1, 2, 3)에서 다변함수 f의 그래디언트와 헤시안 행렬을 구하라.

$f(x,y,z) = x^2+xy^2+yz+z$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x+z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y+1 \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 2x+y^2 \\ 2xy+z \\ y+1 \end{bmatrix}$

$H(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\nabla f(1,2,3) = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad H(f(1,2,3)) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

실습 문제 3.1

주어진 벡터 x, y, z, v, w에 대하여 다음을 구하라.

$x = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $y = (0,\ 2,\ 2,\ 0)$, $z = (1,\ 0,\ 1,\ 2)$, $v = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $w = (2,\ 2,\ 0,\ 1)$

(a) x의 노름, y의 노름, z의 노름

(b) $x \cdot y$

(c) $z \cdot (x+y)$

(d) x와 v 사이의 해밍 거리

(e) v와 w 사이의 맨하튼 거리

코드

```
import numpy as np

# 노름을 구하는 함수
def cal_norm(vec1):
    norm_vec = np.sqrt(np.sum(vec1*vec1))
    return norm_vec

# 내적을 구하는 함수
def cal_innerproduct(vec1, vec2):
    innerprod_vecs = np.sum(vec1*vec2)
    return innerprod_vecs

# 해밍 거리를 구하는 함수
def cal_hamming_dist(vec1, vec2):
    Num_vec = len(vec1)
    hamming_dist = 0
    for i in range(Num_vec):
        if vec1[i] != vec2[i]:
            hamming_dist = hamming_dist+1
    return hamming_dist

# 맨하튼 거리를 구하는 함수
def cal_Manhattan_dist(vec1, vec2):
    Manhattan_dist = np.sum(np.abs(vec1-vec2))
```

```
    return Manhattan_dist

# 벡터 x, y, z, v, w
x = np.array([1,0,1,0])
y = np.array([0,2,2,0])
z = np.array([1,0,1,2])
v = np.array([1,1,1,1])
w = np.array([2,2,0,1])

# 문제 (a)
print("문제 (a)")
print("Norm of x = ", cal_norm(x))
print("Norm of y = ", cal_norm(y))
print("Norm of z = ", cal_norm(z))
print("₩n")

# 문제 (b)
print("문제 (b)")
print("Inner product of x and y = ", cal_innerproduct(x,y))
print("₩n")

# 문제 (c)
print("문제 (c)")
print("Inner product of z and x+y = ", cal_innerproduct(z, x+y))
print("₩n")

# 문제 (d)
print("문제 (d)")
print("Hamming distance of x and v = ", cal_hamming_dist(x,v))
print("₩n")

# 문제 (e)
print("문제 (e)")
print("Manhattan distance of v and w = ", cal_Manhattan_dist(v,w))
```

결과

```
rminal   Help                                                    AI_M
PROBLEMS   OUTPUT   DEBUG CONSOLE   TERMINAL   PORTS
[Running] python -u "c:\Users\man25\Desktop\AI_Math-with-python\work3\work3-1.py"
문제 (a)
Norm of x =  1.4142135623730951
Norm of y =  2.8284271247461903
Norm of z =  2.449489742783178


문제 (b)
Inner product of x and y =  2


문제 (c)
Inner product of z and x+y =  4


문제 (d)
Hamming distance of x and v =  2


문제 (e)
Manhattan distance of v and w =  3

[Done] exited with code=0 in 0.607 seconds
```

실습 문제 3.2

다음과 같은 두 벡터 x, y가 이루는 각을 구하고, x의 y위로의 정사영 $\mathrm{proj}_y\, x$를 구하라.

$$\text{(a)}\ \ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)}\ \ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},\ \ y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\ \ x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \ y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

코드 (교재)

```
import numpy as np

# 두 벡터가 이루는 각을 구하는 함수
# np.linalg.norm(vec) : vec의 노름
# np.arctan() : tan()의 역함수 값

def angle_to_vectors(vec_1, vec_2):
    vec_1_norm = np.linalg.norm(vec_1)
    vec_2_norm = np.linalg.norm(vec_2)
    vec_1_2_dot = np.dot(vec_1.T, vec_2)
    angle = np.arctan(vec_1_2_dot/(vec_1_norm*vec_2_norm))*360/np.pi
    return angle

# 정사영을 구하는 함수
def Proj_onto(vec_1, vec_2):
    vec_2_1_dot = np.dot(vec_2.T, vec_1)
    vec_2_dot = np.dot(vec_2.T, vec_2)
```

```
    proj_vec = (vec_2_1_dot/vec_2_dot)*vec_2
    return proj_vec

# 문제 (a)
x = np.array([[1], [0]])
y = np.array([[4], [4]])
angle = angle_to_vectors(x, y)
projxy = Proj_onto(y, x)
print("문제 (a)")
print("x와 y가 이루는 각 = ", angle)
print("x의 y 위로의 정사영 = ₩n", projxy)
print("₩n")

# 문제 (b)
x = np.array([[1], [2], [5]])
y = np.array([[1], [-1], [2]])
angle = angle_to_vectors(x, y)
projxy = Proj_onto(y, x)
print("문제 (b)")
print("x와 y가 이루는 각 = ", angle)
print("x의 y 위로의 정사영 = ₩n", projxy)
print("₩n")

# 문제 (c)
x = np.array([[0], [-1], [2], [2]])
y = np.array([[1], [1], [3], [2]])
angle = angle_to_vectors(x, y)
projxy = Proj_onto(y, x)
print("문제 (c)")
print("x와 y가 이루는 각 = ", angle)
print("x의 y 위로의 정사영 = ₩n", projxy)
```

결과

```
[Running] python -u "c:\Users\man25\Desktop\AI_Math-with-python\work3\work3-2.py"
문제 (a)
x와 y가 이루는 각 =  [[70.52877937]]
x의 y 위로의 정사영 =
 [[4.]
 [0.]]


문제 (b)
x와 y가 이루는 각 =  [[67.70902963]]
x의 y 위로의 정사영 =
 [[0.3]
 [0.6]
 [1.5]]


문제 (c)
x와 y가 이루는 각 =  [[75.52248781]]
x의 y 위로의 정사영 =
 [[ 0.]
 [-1.]
 [ 2.]
 [ 2.]]

[Done] exited with code=0 in 0.565 seconds
```

코드 (수정본)

projxy = Proj_onto(y, x) => projxy = Proj_onto(x, y)

수기로 푼 답과 프로그래밍의 답이 달라 확인해 보니

x, y가 반대로 되어 있는 것 같아 수정하였습니다.

```
import numpy as np

# 두 벡터가 이루는 각을 구하는 함수
# np.linalg.norm(vec) : vec의 노름
# np.arctan() : tan()의 역함수 값

def angle_to_vectors(vec_1, vec_2):
    vec_1_norm = np.linalg.norm(vec_1)
    vec_2_norm = np.linalg.norm(vec_2)
    vec_1_2_dot = np.dot(vec_1.T, vec_2)
    angle = np.arctan(vec_1_2_dot/(vec_1_norm*vec_2_norm))*360/np.pi
    return angle

# 정사영을 구하는 함수
def Proj_onto(vec_1, vec_2):
    vec_2_1_dot = np.dot(vec_2.T, vec_1)
    vec_2_dot = np.dot(vec_2.T, vec_2)
    proj_vec = (vec_2_1_dot/vec_2_dot)*vec_2
    return proj_vec

# 문제 (a)
x = np.array([[1], [0]])
y = np.array([[4], [4]])
angle = angle_to_vectors(x, y)
# projxy = Proj_onto(y, x)
projxy = Proj_onto(x, y)
print("문제 (a)")
print("x와 y가 이루는 각 = ", angle)
print("x의 y 위로의 정사영 = ₩n", projxy)
print("₩n")
```

```
# 문제 (b)
x = np.array([[1], [2], [5]])
y = np.array([[1], [-1], [2]])
angle = angle_to_vectors(x, y)
# projxy = Proj_onto(y, x)
projxy = Proj_onto(x, y)
print("문제 (b)")
print("x와 y가 이루는 각 = ", angle)
print("x의 y 위로의 정사영 = ₩n", projxy)
print("₩n")

# 문제 (c)
x = np.array([[0], [-1], [2], [2]])
y = np.array([[1], [1], [3], [2]])
angle = angle_to_vectors(x, y)
# projxy = Proj_onto(y, x)
projxy = Proj_onto(x, y)
print("문제 (c)")
print("x와 y가 이루는 각 = ", angle)
print("x의 y 위로의 정사영 = ₩n", projxy)
```

결과