Présentation du projet

Nous avons choisi de partir sur la création d'un jeu de poker. Nous tronvons que c'est un jeu de carte intéressant car les joueurs sont amenés à parier, et donc doivent constamment estimer leur probabilité de gagner la manche avec les informations partielles à leur disposition. Et nous trouvions qu'il s'agissait d'un contexte intéressant pour chercher à reproduire un comportement simpliste de joueurs virtuels à partir d'un ensemble de variables aléatoires influencé par les chances de chaque joueur de gagner.

Règles du jeu

Le jeu développé repose sur les règles du Texas Hold'em Poker. Dans notre version, un seul joueur réel se retrouve à jouer face à une nombre de joueurs variable dont le comportement est dicté par le programme, il s'agit donc de joueurs virtuels.

Chaque joueur possèdent un capital de jeton qui lui est distribué au début de la partie. La partie se décompose en manches (ou mains), elles-mêmes décomposées en tours. Le jeu se joue avec un paquet de cartes standard de 52 cartes. Au Texas Hold'em Poker chaque manche compte 4 tours, durant lesquels chaque joueur est ammené à faire une action :

- Une fois au début du jeu, après la distribution de 2 cartes en main pour chaque joueur.
- Une fois après que trois cartes aient été dévoilées sur le plateau de jeu. (Le flop)
- Une fois qu'une quatrième carte est dévoilée sur le plateau. (Le turn)
- Une fois que la cinquième carte est dévoilée sur le plateau. (Le river)

Lors de chacun de ces tours, les joueurs font tous une action à tour de rôle, le joueur devant commencer change à chaque manche. Les joueurs ont le choix parmi 4 actions :

- Si aucune mise n'a encore été donnée, ils peuvent ne pas miser et rester dans la manche. (check)
- Si une mise a déjà été posée durant le tour, ils peuvent mettre la même ou compléter leur mise pour avoir la même (suivre)
- Ils peuvent augmenter la mise actuelle du tour (relancer)
- Ils peuvent ne pas suivre la mise et ne plus jouer pendant la manche, perdant leur chance de gagner cette manche (se coucher).

Une fois le tour fini, les mises sont collectées dans le pot.

A la fin d'une manche, le joueur ayant été capable de constituer avec ses deux cartes en main et les 5 sur le plateau une serie particulière plus forte que les autres joueurs remporte l'ensemble du pot effectué durant cette manche.

Lorsqu'à la fin d'une manche, un joueur se retrouve sans plus aucun jeton, il a perdu. La partie s'arrête lorsqu'il ne reste qu'un seul joueur avec des jetons.

Pour plus de détail sur les règles, vous pouvez consulter les règles officielles, résumées ici : https://www.joa.fr/casinos/jeux/texas-hold-em-poker. Nous les respectons entièrement au sein du jeu. Les séries rémarquables évoquées plus haut sont détaillées dans la partie Calcul des probabilités du jeu du dossier.

Récapitulatif des variables aléatoires

Détail du projet

Analyse et calcul des probabilités du jeu

Lors de l'élaboration de ce jeu, nous souhaitions que les joueurs virtuels agissent durant le jeu en fonction de paramètres aléatoires, mais également en fonction de leur main et de leur chance de gagner la partie.

Contexte

Pour cela, nous avons déterminé les probabilités pour un joueur d'effectuer une serie remarquable aux différents moments d'une manche en fonction des données auxquelles ce joueur virtuel est sensé avoir accès, c'est à dire sa propre main et les éventuelles cartes présentes sur le plateau.

Définition de l'univers

Dans ce contexte, nous pouvons donc simplifié la mécanique de jeu en disant que chaque joueur se retrouve à tirer successivement 7 cartes dans le paquet en comptant 52. Bien sûr, d'autre cartes sont distribuées aux autres joueurs, et certaines écartées du paquets pendant la manche (les cartes brulées), mais celles-ci n'étant pas révélées au joueur, cela n'influe pas sur le calcul qu'il peut faire de tirer telle ou telle carte.

Par soucis de simplification dans l'écriture, nous désignerons par la suite les cartes du paquet par des nombres allant de 1 à 52. La correspondance des nombres avec les véritables cartes n'aura ici pas d'importance.

Cela nous permet de définir un ensemble représentant l'univers possible de mains que peut avoir un joueur spécifique durant une manche, tel que :

$$\#\Omega_0 = \binom{52}{7} = C_{52}^{7} = \frac{52!}{7!(52-7)!}$$

Si l'on s'intéressent de la même façon aux mains possibles après le tirage de 2, 5 ou 6 cartes, on obtient :

$$\#\Omega_2 = \binom{50}{5} = C_{50}^{5}$$
$$\#\Omega_5 = \binom{47}{2} = C_{46}^{2}$$
$$\#\Omega_6 = 46$$

Probabilité par série remarquable

Nous allons maintenant étudier la propabilité perçue par le joueur de pouvoir tirer chacune des séries remarquables pouvant le faire gagner.

La quinte flush royale

Il existe 4 quintes flushs royales, une pour chaque couleur. La quinte mobilise 5 cartes, puis 2 reste libres parmi celles restantes.

En début de manche, on obtient donc un nombre de mains possibles $\#Q_0^r$ tel que :

$$\#Q_0^r = 4\binom{47}{2}$$

Quand 2, 5 ou 6 cartes sont déjà tirées, on définit $Q_c^{r'}$ comme une quinte flush royale de couleur spécifique :

$$Q^{r'} = \bigcup_{c=1}^{4} Q_c^{r'}$$

On pose ensuite t comme le nombre de cartes déjà tirées et x le nombre de cartes nécessaires pour compléter la quinte flush royale étudiée. Alors :

- Si $x > (7-t)$, la quinte flush royale de cette couleur est impossible : $\#Q_c^{r'} = 0$
- Sinon :

$$\#Q_c^{r'} = \binom{47}{7-(t+x)}$$

  Les $\#Q_c^{r'}$ sont dijoints entre eux, donc les mains possible seront :

$$\#Q^{r'} = \sum_{c=1}^{4} \#Q_c^{r'}$$

La couleur

L'évènement C d'avoir une couleur se détermine par 3 cas possibles :

- Avoir 5 cartes d'une couleur et 2 couleurs différentes : $4\binom{13}{5}\binom{39}{2}$
- Avoir 6 cartes d'une couleur et 1 d'une autre : $4\binom{13}{6}39$
- Avoir 7 cartes de la même couleur : $4\binom{13}{7}$ Additionnés, et en retirant les possibilités de faire une quinte flush, et de faire une quinte flush royale, on obtient en début de manche :

$$\#C_0 = 4(\binom{13}{5}\binom{39}{2} + 39\binom{13}{6} + \binom{13}{7}) - \#Q^f - \#Q^r$$

Avec 2, 5 ou 6 cartes déjà tirées, le schéma se complexifie. On va donc considérer C comme l'union C_c, représentant l'évenement de faire une couleur de couleur c :

$$C_0 = \bigcup_{i=1}^{4} C_c \cap (Q^f)^c \cap (Q^r)^c$$

Ensuite pour chaque C^c, on pose t le nombre de cartes déjà tirées, x le nombre de cartes nécessaires pour compléter la couleur :

- Si $x > (7-t)$, la couleur en question est impossible : $\#C_c = 0$
- Sinon : ** Si $7-(t+x) = 2$, alors :

$$C_c = \binom{13-x}{x}\binom{39}{7-(t+x)} + 39\binom{13-x}{x+1} + \binom{13-x}{x+2}$$

** Si $7-(t+x) = 1$, alors :

$$C_c = \binom{13-x}{x}\binom{39}{7-(t+x)} + 39\binom{13-x}{x+1}$$

** Si $7-(t+x) = 0$, alors :

$$C_c = \binom{13-x}{x}\binom{39}{7-(t+x)}$$

Les C_c sont disjoints entre eux, donc il suffit de faire la somme :

$$\#C'_c = \sum_{c=1}^{4} C_c - \#Q^{f'} - \#Q^{r'}$$

La quinte flush

L'évènement d'avoir une quinte flush se calcule finalement avec la réunion des deux calculs précédents. On va cette fois considérer l'union des couleurs de couleurs c dans l'union des quintes de valeur i. Pour écarter les flush royales on retire une série :

$$Q^f = \bigcup_{i=1}^{9}(\bigcup_{c=1}^{4} Q^f_{ic})$$

Comme pour les quintes simples, les Q^f_i ne sont pas disjoints. Pour éviter les doublons on empêche donc à chaque Q^f_{ic} de pouvoir être une série améliorée en interdisant une carte supplémentaire pour les 2 cartes restantes.

$$\#Q = \sum_{i=1}^{9}\sum_{c=1}^{4} \#\binom{46}{2}$$

Pour les différents tours, comme précédemment, pour un Q^f_{ic} donné, soit t le nombre de cartes déjà tirées et x le nombre de cartes nécessaires pour compléter la quinte flush :

- Si $x > (7-t)$, alors la quinte flush est impossible : $Q_i = 0$
- Sinon :

$$\#Q^{f'}_{ic} = \binom{46}{7-(t+x)}$$

La quinte

L'évenement de la quinte représente un calcul de probalité difficile. On va donc, pour faciliter les prochains calculs également, le découper en 4 parties :

- Q_n : Avoir une quinte avec 7 cartes de valeurs différentes
- Q_p : Avoir une quinte une paire.
- Q_{dp} : Avoir une quinte une double paire.
- Q_b : Avoir une quinte un brelan. Ces 4 évenements sont disjoints, donc leur union revient à les additionner.

Ensuite, comme pour la quinte flush, on va à chaque fois redécouper en fonction des 10 quintes spécifiques possibles :

Pour éviter les doublons, il faut empecher de considérer les quintes douples ou triples plusieurs fois, pour cela on empèche aux 2 cartes libres de prendre la valeur juste au dessus de la quinte considérée. Cela ne prévaut par contre pas pour les quintes finissant par un AS. Reste à retirer les mains offrant une série plus forte, ce qui se résume aux mains avec une couleur, notées ici $\#C$, puisqu'elles incluent les quintes flushs et royales. On obtient :

Type de quinte condéré	Valeur de quinte différente de AS	Valeur de quinte en AS
$\#Q_n$	$(4^7 - \#C_n)\binom{13-6}{2}$	$(4^7 - \#C_n)\binom{13-5}{2}$
$\#Q_p$	$\binom{6}{1}\binom{4}{2}(4^5 - \#C_p)(13-6)$	$\binom{6}{1}\binom{4}{2}(4^5 - \#C_p)(13-5)$
$\#Q_{dp}$	$\binom{5}{2}\binom{4}{2}^2(4^3 - \#C_{dp})$	$\binom{5}{2}\binom{4}{2}^2(4^3 - \#C_{dp})$
$\#Q_b$	$\binom{5}{1}\binom{4}{3}(4^4 - \#C_b)$	$\binom{5}{1}\binom{4}{3}(4^4 - \#C_b)$

En effet, le nombre de mains dépend de la série particulière additionnelle (paire : $\binom{6}{1}$;double paire : $\binom{5}{2}$; brelan : $\binom{5}{1}$) et de la couleur des cartes.

On arrive aussi au cardinal de Q :

$$\sum_{i=1}^{10}(\binom{5}{2}\binom{4}{2}^2(4^3 - \#C_{dp}) + \binom{5}{1}\binom{4}{3}(4^4 - \#C_b)) + \sum_{j=1}^{9}((4^7 - \#C_n)\binom{13-6}{2} + \binom{6}{1}\binom{4}{2}(4^5 - \#C_p)(13-6)) + (4^7 - \#C_n)\binom{13-5}{2}$$
$$+ \binom{6}{1}\binom{4}{2}(4^5 - \#C_p)(13-5)$$

Reste à déterminer le nombre de mains réalisant une couleur en fonction des cas :

Type de quinte condéré	Valeur de quinte différente de AS
$\#C_n$	$4(1 + 3\binom{7}{6} + 3^2\binom{7}{5})$
$\#C_p$	$4 + \binom{5}{4} * 2 * 3$
$\#C_dp$	$2 + 4$
$\#C_b$	3

Pour les différents tours, un certain nombre de données sont à prendre en compte vis à vis de chaque quinte spécifique : le nombre de cartes déjà tirées (t), le nombre de cartes manquantes pour réaliser la quinte spécifique (x), le nombre de valeur différentes déjà tirées (v), le nombre de brelans actuels (b) On définira également a qui vaudra 5 dans le cas d'un quinte en As et 6 sinon. $$

Type	Condition sinon null	Valeur de t-v	Cardinal de la quinte
$\#Q_n$	$x <= (7-t) ET t = v$	0	$(4^{7-t} - \#C_n)\binom{13-a}{7-(x+t)}$
$\#Q_p$	$x <= (7-t) ET t - v < 2 ET x + v - 5 < 2$	0	$(3\binom{v}{1}(4^{6-t} - \#C_{p1}) + 6\binom{6-v}{1}(4^{5-t} - \#C_{p2}))\binom{13-a}{6-x-v}$
		1	$(4^{7-t} - \#C_{p3}))\binom{13-a}{6-x-v}$
$\#Q_dp$	$x <= (7-t) ET$	0	$\binom{5-x}{2}3^2(4^{5-t} - \#C_{dp1}) + \binom{x}{2}6^2(4^{3-t} - \#C_{dp2}) + 3(5-x) * 6x(4^{4-t} - \#C_{dp3})$
		1	$\binom{4-x}{1}3^1(4^{6-t} - \#C_{dp4}) + \binom{x}{1}6^1(4^{5-t} - \#C_{dp5})$
		2	$(4^{7-t} - \#C_{dp6})$
$\#Q_b$	$x >= (7-t) ET$	0	$3v(4^{5-t} - \#C_{b1}) + 4x(4^{4-t} - \#C_{b2}))$
		1	$2(4^{6-t} - \#C_{b3})$
		2	$(4^{7-t} - \#C_{b4})$

Les différents C, il faut une nouvelle fois les subdivisés en C_c en fonction des quatres couleurs. Pour chacun des C_c considéré, on posera y, le nom de carte manquante pour finir la couleur, et r le nombre de fois où la couleur est présente soit dans une paire, soit dans le brelan.

Type	Condition sinon null	Cardinal de la couleur
$\#C_{cp}$		$\binom{7-t}{y+2} + \binom{6-t}{y+1}3^{6-t-y} + \binom{7-t}{y}3^{7-t-y}$
$\#C_{cp1}$		$(5-y)(\binom{7-t}{y}) + (t-5+y)(\binom{7-t}{y}3^{6-t-y} + \binom{7-t}{y+1})$
$\#C_{cp2}$		$\binom{5-t}{y}$
$\#C_{cp3}$		$\binom{7-t}{y+1}3^{6-t-y} + \binom{7-t}{y}3^{7-t-y}$
$\#C_{dp1}$		$\binom{5-t}{y}?$
$\#C_{dp2}$		$\binom{5-t}{y}$
$\#C_{dp3}$		$\binom{4-t}{y}?$
$\#C_{dp4}$		$\binom{6-t}{y}?$
$\#C_{dp5}$		$\binom{5-t}{y}$
$\#C_{dp6}$		$\binom{7-t}{y}$

$\#C_{b2}$	$t = 5 - y$	1
$\#C_{b2}$	$t = 5 - y$	1
$\#C_{b3}$	$x <= (7 - t)$	$\binom{7-t-r}{y}$
$\#C_{b4}$	$x <= (7 - t)$	1

Si l'on reprend les raisonnements précedents, on peut déjà déterminer les probabilités de ces séries en début de manche :

Série	Mains possible en début de manche	Probabilité en début de manche
Quinte Flush Royale	$4\binom{47}{2} = 4324$	0.000032
Quinte Flush	$9 * 4 * \binom{46}{2} = 37260$	23
Couleur	$\#C_0 = 4(\binom{13}{5}\binom{39}{2} + 39\binom{13}{6} + \binom{13}{7}) - 37260 - 4324 = 4047644$	-7
Quinte		120

La paire.

Le joueur effectue une paire lorsqu'il obtient deux cartes ayant la même valeur (Ex : deux rois). A chaque tour, la probabilité varie entre deux cas :

- Le joueur dispose déjà de la paire : dans ce cas nous considèrerons une probabilité de 100%.
- Le joueur ne dispose pas de paire : la probabilité dépend du nombre de carte restant à tirer.

Dans ce second cas (et seulement lui), nous allons nous intéresser à l'évènement A_0, défini par le fait d'obtenir une unique paire avec les 7 cartes, autres séries remarquables exclues. Soit l'évenement A_0 :

$$A_0 = \underbrace{\{\text{Avoir une seule paire}\}}_{B} \cap \underbrace{\{\text{Avoir un brelan, double paire ,full ou carré}\}^c}_{C} \cap \underbrace{\{\text{Avoir une quinte ou une couleur}\}^c}_{D}$$

Intéressons-nous au cardinal de $B \cap C$. Pour le cas d'une paire d'une valeur spécifique, sans brelan, double-paire ou full, il faut avoir 6 valeurs différentes en main ($\binom{13}{6}$), dont l'une parmi les 6 (($\binom{6}{1}$) constitue une paire avoir les couleurs possibles ($\binom{4}{2}$). Pour les 5 autres cartes, on a 4 choix de couleurs possibles (4^5) On arrive à :

$$\#B \cap C = \binom{13}{6}\binom{6}{1}\binom{4}{2}4^5$$

Pour avoir une couleur, il faut que les 5 cartes autres que la paire aient la même couleur (4 possibilités), ou qu'une carte de la paire ait la même couleur que 4 autres ($\binom{2}{1}3\binom{5}{4}$).

Pour avoir une suite, sur les 6 valeurs différentes des 7 cartes, il faut que 5 se suivent, et il existe 10 suites de valeurs différentes : $\binom{13-5}{1} + (10-1)\binom{13-6}{1}$ En soustrayant ces cas dans le choix des valeurs et le choix des couleurs, on arrive au cardinal de A :

$$\#A_0 = \left(\binom{13}{6} - \left(\binom{13-5}{1} + (10-1)\binom{13-6}{1}\right)\right) 6\binom{4}{2}\left(4^5 - \left(4 + \binom{2}{1}\binom{5}{4}3\right)\right)$$

Lors du premier tour, nous avons 2 cartes parmi 7 déjà tirées. Si nous prenons le cas où nous n'avons pas encore de paire, on peut en obtenir en complètant une carte déja tirée ou en tirant deux nouvelles cartes de même valeur sur les 5 restantes :

$$A_2 = (\underbrace{\{\text{Completer une carte déjà tirée}\}}_{B^1} \cup \underbrace{\{\text{Tirer deux cartes de même valeur}\}}_{B^2}) \cap C \cap D$$

$$A_2 = (B^1 \cap C) \cup (B^2 \cap C) \cap D$$

Dans le cas de $B^1 \cap C$ on veut 4 valeurs parmi les 11 autres que celles déjà tirées, puis pour l'une des deux cartes en main, il faut l'une des trois cartes de même valeur restantes. On a :

$$\#B^1 \cap C = \binom{11}{4}\binom{2}{1}\binom{3}{1}4^4 = 6\binom{11}{4}4^4$$

Avec un résonnement similaire :

$$\#B^2 \cap C = \binom{11}{4}\binom{4}{1}\binom{4}{2}4^3$$

$B^1 \cap C$ et $B^2 \cap C$ étant disjoint on obtient finalement :

$$\#((B^1 \cap C) \cup (B^2 \cap C)) = \binom{11}{4}(6 * 4^4 + 4\binom{4}{2}4^3) = \binom{11}{4}(6 + \binom{4}{2})4^4$$

Si on soustrait à nouveau les cas de quinte et de couleur :

$$\#A_2 = \left(\binom{11}{4} - \left(\binom{13-5}{1} + (10-1)\binom{13-6}{1}\right)\right)(6 + \binom{4}{2})\left(4^4 - \left(4 + \binom{2}{1}\binom{5}{4}3\right)\right)$$

Si l'on généralise le raisonnement pour les tours suivants, et calcule la probabilité de chaque évènement avec la formule :

$$P(A) = \#A/\#\Omega$$

On obtient les différentes probabilités d'obtenir juste une paire aux différents tours d'une manche :

Serie	Condition	t - v	Cardinal
Pair		0	$(3v(4^{6-t} - \#Cp1) + (6-v)\binom{4}{2}(4^{5-t} - \#Cp2))\binom{13-v}{6-v}$
Pair		1	$\binom{13}{6-v}(4^{7-t} - \#Cp3) - \#Qp$

Les séries suivantes se basent sur des raisonnements similaires à ceux vus précédemment, nous les présenterons donc plus succintement ici :

Serie	Début de manche	Probabilités
Carée	$13\binom{48}{3}$	
Full	$4*6*4^2*13(13-1)\binom{13-2}{2} + 4^3\binom{13}{2}(13-2) + 4*6^2*13\binom{13-1}{2}$	
Brelan	$5*4*(4^4-3)(\binom{13}{5}-10)$	
Double pair	$\binom{13}{3}\binom{4}{2}^3\binom{13-3}{1}4 + (\binom{13}{5}-10)\binom{5}{2}\binom{4}{2}^2(4^3-1)$	
Pair	$(\binom{13}{6} - (\binom{13-5}{1} + (10-1)\binom{13-6}{1}))\,6\binom{4}{2}\,(4^5 - (4+\binom{2}{1}\binom{5}{4}3))$	

Serie	Condition	t - v	Cardinal
Carée		0	$(13-t)\binom{48-t}{3-t} + t\binom{47-t}{2-t}$
Carée		$\{1,2,3\}$	$\binom{49-v}{4-v}$
Full		0	$\binom{49-v}{4-v}$
Full		1	$2*6(13-v)4^{4-v}\binom{13-v}{4-v} + 4*12+?$
Full		$2ETb$	$6(13-v)4^{4-v}\binom{13-v}{4-v}+?$
Full		2	$2*2*4^{4-v}\binom{13-v}{4-v}+?$
Full		$3ETb$	$4^{4-v}\binom{13-v}{4-v}+?$
Brelan		0	$t*4^{4-v}\binom{13-v}{4-v} + (5-t)4^{3-v}\binom{13-v}{3-v}$
Brelan		1	$2*4^{5-v}\binom{13-v}{5-v}$
Brelan		$2etb$	$4^{5-v}\binom{13-v}{5-v}$
Double pair		0	?
Double pair		1	?
Double pair		2	$(v-2)(3\binom{10}{4-v} + \binom{7-t}{2}\binom{4}{2}\binom{13-v}{5-v} + (4^{5-v})$
Double pair		$3etb$	$4(13-v)$
pair		0	$(3v(4^{6-t} - \#Cp1) + (6-v)\binom{4}{2}4^{5-t})\binom{13-v}{6-v}$
pair		1	$\binom{13}{6-v}(4^{7-t} - \#Cp3) - \#Qp$