Loris Reiff

Methode der Reduktion – Lösungen

Alle 4 Aufgaben lassen sich mit der EE-Reduktion lösen und ich habe nur diese Angegeben [Aufgabe 1 und 4] (Ich werde in der nächsten Lektion noch etwas dazu erwähnen).

1. Zeige dass folgende Sprache

$$L = \{\text{Kod}(M)\#x\#0^i \mid x \in \{0,1\}^*, i \in \mathbb{N}, M \text{ hat mindestens } i+1 \text{ Zustände und während der Berechnung von } M \text{ auf } x \text{ wird der } i\text{-te Zustand von } M \text{ min. einmal erreicht}$$

keine rekursive Sprache ist.

(Aufgabe 5.16 aus dem Buch)

Lösung:

Beweis.
Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass $L_{\text{U}} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ gilt. Wir zeigen also $L_{\text{U}} \leq_{\text{EE}} L$, was $L \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ impliziert.

Folgende TM A transformiert eine Eingabe w für L_{U} in eine Eingabe für L:

- Prüfe, ob $w = \text{Kod}(M)\#x$ für eine TM M und ein Wort x
  - Falls nein, gib λ aus.
  - Falls ja, bestimme i, so dass $q_i = q_{\text{accept}}$ und gib $\text{Kod}(M)\#x\#0^i$ aus

Wir zeigen nun, dass $w \in L_{\text{U}} \iff A(w) \in L$ gilt:

Sei $w \in L_{\text{U}}$:

$$\begin{aligned} w \in L_{\text{U}} &\implies w = \text{Kod}(M)\#x \in L_{\text{U}} \\ &\implies w \in L(M) \\ &\implies A(w) = \text{Kod}(M)\#x\#0^i \in L \end{aligned}$$

Wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass M die Berechnung in q_{accept} beendet, d.h. der i-te Zustand wurde min. einmal erreicht. Ausserdem hat M, genau $i+1$ Zustände, da q_{accept} der zweit letzte Zustand ist (Definition der TM-Kodierung).

Sei $w \notin L_{\text{U}}$:
Fall 1: w hat nicht die Form $\text{Kod}(M)\#x$, also gilt $A(w) = \lambda \notin L$.
Fall 2: w hat die Form $\text{Kod}(M)\#x$, also gilt

$$x \notin L(M) \implies A(w) = \text{Kod}(M)\#x\#0^i \notin L$$

da der i-te Zustand, welcher q_{accept} entspricht, nie erreicht wird.

Somit schliessen wir $L \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$. □

2. Zeige $L_{\mathrm{U}}^{C} \leq_{\mathrm{EE}} L_{\mathrm{Diag}}$

Lösung:

Beweis.
Folgende TM B transformiert eine Eingabe x für L_{U}^{C} in eine Eingabe für L_{Diag}:

- Prüfe, ob $x = \mathrm{Kod}(M)\#w$ für eine TM M und ein Wort w
  - Falls nein, konstruiere die TM $M_{\emptyset}$, welche alle Eingaben verwirft.
  - Falls ja, konstruiere die TM $\widehat{M}$, welche M auf w simuliert und die Eingabe ignoriert.
- Berechne i, so dass M_i die konstruierte TM ist und gib w_i zurück.

Wir zeigen nun, dass $x \in L_{\mathrm{U}}^{C} \iff B(x) \in L_{\mathrm{Diag}}$ gilt:
Sei $x \in L_{\mathrm{U}}^{C}$, dann haben wir zwei Fälle
Fall 1: x hat nicht die Form $\mathrm{Kod}(M)\#w$, somit gilt $B(x) \in L_{\mathrm{Diag}}$, da $M_i = M_{\emptyset}$ kein Wort akzeptiert, insbesondere nicht w_i.
Fall 2: x hat die Form $\mathrm{Kod}(M)\#w$:

$$\begin{aligned} x \in L_{\mathrm{U}}^{C} &\implies w \notin L(M) \\ &\implies \widehat{M} \text{ verwirft alle Eingaben} \\ &\implies w_i \notin \widehat{M} = M_i \\ &\implies B(x) = w_i \in L_{\mathrm{Diag}} \end{aligned}$$

Sei $x \notin L_{\mathrm{U}}^{C}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Kod}(M)\#w \notin L_{\mathrm{U}}^{C} &\implies w \in L(M) \\ &\implies \widehat{M} \text{ akzeptiert alle Eingaben} \\ &\implies w_i \in \widehat{M} = M_i \\ &\implies B(x) = w_i \notin L_{\mathrm{Diag}} \end{aligned}$$

$\square$

3. Zeige $L_{\mathrm{H}}^{C} \leq_{\mathrm{EE}} L_{\mathrm{U}}^{C}$

Lösung:

Beweis.
Folgende TM C transformiert eine Eingabe x für L_{H}^{C} in eine Eingabe für L_{U}^{C}:

- Prüfe, ob $x = \mathrm{Kod}(M)\#w$ für eine TM M und ein Wort w
  - Falls nein, gib λ zurück
  - Falls ja, modifiziere die TM M zu $\widehat{M}$, in dem alle Transitionen von q_{reject} nach q_{accept} umgeleitet werden und gib $\mathrm{Kod}(\widehat{M})\#w$ zurück

Wir zeigen nun, dass $x \in L_{\mathrm{H}}^{C} \iff C(x) \in L_{\mathrm{U}}^{C}$ gilt:
Sei $x \in L_{\mathrm{H}}^{C}$:
Fall 1: x hat nicht die Form $\mathrm{Kod}(M)\#w$, somit gilt $C(x) = \lambda \in L_{\mathrm{U}}^{C}$
Fall 2:

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Kod}(M)\#w \in L_{\mathrm{H}}^{C} &\implies M \text{ hält nicht auf } w \\ &\implies \widehat{M} \text{ hält nicht auf } w \\ &\implies w \notin L(\widehat{M}) \\ &\implies C(x) = \mathrm{Kod}(\widehat{M})\#w \in L_{\mathrm{U}}^{C} \end{aligned}$$

Sei $x \notin L_{\mathrm{H}}^{C}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Kod}(M)\#w \notin L_{\mathrm{H}}^{C} &\implies M \text{ hält auf } w \\ &\implies \widehat{M} \text{ akzeptiert } w \\ &\implies C(x) = \mathrm{Kod}(\widehat{M})\#w \notin L_{\mathrm{U}}^{C} \end{aligned}$$

$\square$

4. Zeige, dass $L_4 \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ ohne den Satz von Rice zu verwenden.

$$L_4 = \{\mathrm{Kod}(M) \mid \mathrm{M\ akzeptiert\ 100}\}$$

Lösung:

Beweis.
Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass $L_{\mathrm{U}} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ gilt. Wir zeigen also $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{EE}} L_4$, was $L_4 \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ impliziert.

Folgende TM D transformiert eine Eingabe x für L_{U} in eine Eingabe für L_4:

- Prüfe, ob $x = \mathrm{Kod}(M)\#w$ für eine TM M und ein Wort w
  - Falls nein, gib λ zurück
  - Falls ja, konstruiere die TM $\widehat{M}$, welche M auf w simuliert und die Eingabe ignoriert; gib $\mathrm{Kod}(\widehat{M})$ zurück.

Wir zeigen nun, dass $x \in L_{\mathrm{U}} \iff D(x) \in L_4$ gilt:

Sei $x \in L_{\mathrm{U}}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Kod}(M)\#w \in L_{\mathrm{U}} &\implies w \in L(M) \\ &\implies \widehat{M} \text{ akzeptiert alles} \\ &\implies \widehat{M} \text{ akzeptiert } 100 \\ &\implies D(x) = \mathrm{Kod}(\widehat{M}) \in L_4 \end{aligned}$$

Sei $x \notin L_{\mathrm{H}}^{C}$, dann haben wir zwei Fälle:
Fall 1: x hat nicht die Form $\mathrm{Kod}(M)\#w$, somit gilt $D(x) = \lambda \notin L_4$
Fall 2:

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Kod}(M)\#w \notin L_{\mathrm{U}} &\implies w \notin L(M) \\ &\implies \widehat{M} \text{ akzeptiert keine Eingabe} \\ &\implies 100 \notin L(\widehat{M}) \\ &\implies D(x) = \mathrm{Kod}(\widehat{M}) \notin L_4 \end{aligned}$$

$\square$