Gruppe 8
Loris Reiff

Beweise der Nichtexistenz – Lösungen

1. Zeige dass

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\} \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$$

(Aufgabe 3.14 (a) aus dem Buch / Quiz 4)

Lösung:

Beweis mittels Lemma 3.3.
Angenommen L sei regulär. Es gibt also einen EA $A = (Q, \{a,b\}, \hat{\delta}_A, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Beachten wir die Wörter

$$a, aa, \ldots, a^{|Q|+1}$$

Es existieren also $i, j \in \{1, 2, \ldots, |Q|+1\}$ mit $i < j$ und

$$\hat{\delta}_A(q_0, a^i) = \hat{\delta}_A(q_0, a^j)$$

(Schubfachprinzip)
Gemäss Lemma 3.3 im Buch gilt somit

$$a^i z \in L \iff a^j z \in L$$

für alle $z \in \{a,b\}^*$. Für $z = b^i$ haben wir aber einen Widerspruch: $a^i b^i \in L$ und $a^j b^i \notin L$. Das heisst also, dass L nicht regulär ist. □

Mittels Pumping-Lemma:
Annahme L ist regulär. Betrachten wir nun das Wort

$$w = a^{n_0} b^{n_0}$$

Offensichtlich gilt $|w| = 2n_0 \geq n_0$. Folglich gibt es gemäss dem Pumping-Lemma, für das Wort w, eine Zerlegung $w = yxz$, wobei

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$

Nach (i) gibt es $y = a^l$ und $x = a^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$. Nach (ii) gilt $m \geq 1$. Und weil $w = a^{n_0} b^{n_0} \in L$ ist, muss also $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^0 z = yz = a^{n_0 - m} b^{n_0} \notin L$. Somit ist $L \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$ □

2. Beweise, dass der EA für L mindestens 8 Zustände braucht ($|Q| \geq 8$)

$$L = \{0, 01, 101, 10001\} \subseteq \{0,1\}^*$$

Lösung:

Beweis.
Sei $A = (Q, \{0,1\}, \delta, q_0, F)$ ein EA mit $L(A) = L$ und angenommen $|Q| < 8$. Betrachten wir die Wörter

$$\lambda, 0, 1, 10, 100, 1000, 10001, 11111$$

Auf Grund des Schubfachprinzipes gibt es also unter den Wörter ein Wort x und y mit $x < y$ (kanonisch) und $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$.
Gemäss Lemma 3.3 gilt also für alle $z \in \{0,1\}^*$

$$xz \in L(A) \iff yz \in L(A)$$

Wenn wir eine Fallunterscheidung durchführen, sehen wird jedoch, dass es jeweils zu einem Widerspruch kommt.

Fall $x = \lambda$

y	**z**	**xz**	**yz**
0	10001	$10001 \in L$	$010001 \notin L$
1	10001	$10001 \in L$	$110001 \notin L$
10	10001	$10001 \in L$	$1010001 \notin L$
100	10001	$10001 \in L$	$10010001 \notin L$
1000	10001	$10001 \in L$	$100010001 \notin L$
10001	10001	$10001 \in L$	$1000110001 \notin L$
11111	10001	$10001 \in L$	$1111110001 \notin L$

Fall $x = 0$

y	**z**	**xz**	**yz**
1	1	$01 \in L$	$11 \notin L$
10	001	$0001 \notin L$	$10001 \in L$
100	1	$01 \in L$	$1001 \notin L$
1000	λ	$0 \in L$	$1000 \notin L$
10001	1	$01 \in L$	$100011 \notin L$
11111	1	$01 \in L$	$111111 \notin L$

Fall $x = 1$

y	**z**	**xz**	**yz**
10	0001	$10001 \in L$	$100001 \notin L$
100	0001	$10001 \in L$	$1000001 \notin L$
1000	0001	$10001 \in L$	$10000001 \notin L$
10001	0001	$10001 \in L$	$100010001 \notin L$
11111	0001	$10001 \in L$	$111110001 \notin L$

Fall $x = 10$

y	**z**	**xz**	**yz**
100	001	$10001 \in L$	$100001 \notin L$
1000	001	$10001 \in L$	$1000001 \notin L$
10001	001	$10001 \in L$	$10001001 \notin L$
11111	001	$10001 \in L$	$11111001 \notin L$

Fall $x = 100$

y	**z**	**xz**	**yz**
1000	01	$10001 \in L$	$100001 \notin L$
10001	01	$10001 \in L$	$1000101 \notin L$
11111	01	$10001 \in L$	$1111101 \notin L$

Fall $x = 1000$

y	**z**	**xz**	**yz**
10001	1	$10001 \in L$	$100011 \notin L$
11111	1	$10001 \in L$	$111111 \notin L$

Fall $x = 10001$

y	**z**	**xz**	**yz**
11111	λ	$10001 \in L$	$11111 \notin L$

□

Es sieht nach mehr Arbeit aus, als es ist. Alle Fälle ausser $x = 0$ verwenden immer ein z für jedes y. Es reicht (meiner Ansicht nach) vollkommen für jeden Fall ($x \neq 0$) jeweils nur z anzugeben und zu erwähnen, dass es offensichtlich zu einem Widerspruch führt.

3. Zeige, dass die Sprache L nicht regulär ist

$$L = \{ww \mid w \in (\Sigma_{\text{bool}})^*\}$$

Lösung:

Beweis mittels Lemma 3.3.
Angenommen L sei regulär. Es gibt also einen EA $A = (Q, \{0, 1\}, \hat{\delta}_A, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Beachten wir die Wörter

$$01, 001, \ldots, 0^{|Q|+1}1$$

Es existieren also $i, j \in \{1, 2, \ldots, |Q| + 1\}$ mit $i < j$ und

$$\hat{\delta}_A(q_0, 0^i1) = \hat{\delta}_A(q_0, 0^j1)$$

(Schubfachprinzip)
Gemäss Lemma 3.3 im Buch gilt somit

$$0^i 1z \in L \iff 0^j 1z \in L$$

für alle $z \in \{0,1\}^*$. Für $z = 0^i 1$ haben wir aber einen Widerspruch: $0^i 10^i 1 \in L$ und $0^j 10^i 1 \notin L$, da $i < j$. Das heisst also, dass L nicht regulär ist. □

Mittels Pumping-Lemma:
Angenommen L sei regulär. Betrachten wir nun das Wort

$$w = 0^{n_0} 10^{n_0} 1$$

Offensichtlich gilt $|w| = 2n_0 + 2 \geq n_0$. Folglich gibt es gemäss dem Pumping-Lemma, für das Wort w, eine Zerlegung $w = yxz$, wobei

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$

Nach (i) gibt es $y = 0^l$ und $x = 0^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$. Nach (ii) gilt $m \geq 1$. Und weil $w = 0^{n_0} 10^{n_0} 1 \in L$ ist, muss also $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^0 z = yz = 0^{n_0 - m} 10^{n_0} 1 \notin L$. Somit ist $L \notin \mathcal{L}_{\mathrm{EA}}$ □

Beweis mittels der Methode der Kolmogorov-Komplexität.
Angenommen, L sei regulär. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $0^m 1$ das erste Wort in der Sprache

$$L_{0^m 1} = \{y \mid 0^m 1y \in L\}$$

Nach Satz 3.1 aus dem Buch existiert eine Konstante c, unabhängig von m, so dass

$$K(0^m 1) \leq \lceil \log 2(1+1) \rceil + c = 1 + c$$

Da es nur endlich viele Programme der konstanten Länge kleiner gleich $1 + c$ gibt, aber unendlich viele Wörter der Form $0^m 1$, ist dies ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und L ist nicht regulär. □

4. Zeige, dass die Sprache L nicht regulär ist

$$L = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Lösung:

Beweis mittels Lemma 3.3.
Angenommen L sei regulär. Es gibt also einen EA $A = (Q, \{0,1\}, \hat{\delta}_A, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Beachten wir die Wörter

$$0, 0000, 0^{3^2} \ldots, 0^{(|Q|+1)^2}$$

Es existieren also $i, j \in \{1, 2, \ldots, |Q|+1\}$ mit $i < j$ und

$$\hat{\delta}_A(q_0, 0^{i^2}) = \hat{\delta}_A(q_0, 0^{j^2})$$

(Schubfachprinzip)
Gemäss Lemma 3.3 im Buch gilt somit

$$0^{i^2} z \in L \iff 0^{j^2} z \in L$$

für alle $z \in \{0,1\}^*$. Für $z = 0^{2i+1}$ haben wir aber einen Widerspruch: $0^{i^2} 0^{2i+1} = 0^{(i+1)^2} \in L$ und $0^{j^2} 0^{2i+1} \notin L$, da $j^2 < j^2 + 2i + 1 < (j+1)^2$. Das heisst also, dass L nicht regulär ist. $\square$

Mittels Pumping-Lemma:
Angenommen L sei regulär. Betrachten wir nun das Wort

$$w = 0^{n_0^2}$$

Offensichtlich gilt $|w| = n_0^2 \geq n_0$. Folglich gibt es gemäss dem Pumping-Lemma, für das Wort w, eine Zerlegung $w = yxz$, wobei

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$

Nach (i) gibt es $y = 0^l$ und $x = 0^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$. Nach (ii) gilt $m \geq 1$. Und weil $w = 0^{n_0^2} \in L$ ist, muss also $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^2 z = 0^{n_0^2 + m} \notin L$, weil $n_0^2 < n_0^2 + m < (n_0+1)^2$. Somit ist $L \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$ $\square$

Beweis mittels der Methode der Kolmogorov-Komplexität.
Angenommen, L sei regulär. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist 0^{2m} das erste Wort in der Sprache

$$L_{0^{m^2+1}} = \{y \mid 0^{m^2+1} y \in L\}$$

da $0^{(m+1)^2} = 0^{m^2+1}0^{2m}$ Nach Satz 3.1 aus dem Buch existiert eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, unabhängig von m, so dass

$$K(0^{2m}) \leq \lceil \log 2(1+1) \rceil + c = 1 + c$$

Da es nur endlich viele Programme der konstanten Länge kleiner gleich $1 + c$ gibt, aber unendlich viele Wörter der Form 0^{2m}, ist dies ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und L ist nicht regulär. □

5. Zeige, dass die Sprache L nicht regulär ist

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |v|_a \leq |v|_b \text{ für alle Präfixe } v \text{ von } w\}$$

Lösung:

Beweis mittels Lemma 3.3.
Angenommen L sei regulär. Es gibt also einen EA $A = (Q, \{a,b\}, \hat{\delta}_A, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Beachten wir die Wörter

$$b, b^2, \ldots, b^{|Q|+1}$$

Es existieren also $i, j \in \{1, 2, \ldots, |Q|+1\}$ mit $i < j$ und

$$\hat{\delta}_A(q_0, b^i) = \hat{\delta}_A(q_0, b^j)$$

(Schubfachprinzip)
Gemäss Lemma 3.3 im Buch gilt somit

$$b^i z \in L \iff b^j z \in L$$

für alle $z \in \{a,b\}^*$. Für $z = a^j$ haben wir aber einen Widerspruch: $b^i a^j \notin L$ und $b^j a^j \in L$, da $i < j$ und jedes Wort auch ein Präfix von sich selbst ist. Das heisst also, dass L nicht regulär ist. □

Mittels Pumping-Lemma:
Angenommen L sei regulär. Betrachten wir nun das Wort

$$w = b^{n_0} a^{n_0}$$

Offensichtlich gilt $|w| = 2n_0 \geq n_0$. Folglich gibt es gemäss dem Pumping-Lemma, für das Wort w, eine Zerlegung $w = yxz$, wobei

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$

Nach (i) gibt es $y = b^l$ und $x = b^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$. Nach (ii) gilt $m \geq 1$. Und weil $w = b^{n_0} a^{n_0} \in L$ ist, muss also $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^0 z = b^{n_0 - m} a^{n_0} \notin L$, weil $n_0 - m < n_0$ und jedes Wort auch ein Präfix von sich selbst ist. Somit ist $L \notin \mathcal{L}_{\mathrm{EA}}$ $\square$

6. Zeige, dass die Sprache L nicht regulär ist

$$L = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Lösung:

Beweis mittels Lemma 3.3.
Angenommen L sei regulär. Es gibt also einen EA $A = (Q, \{0,1\}, \hat{\delta}_A, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Beachten wir die Wörter

$$0, 00, 0^{3!} \ldots, 0^{(|Q|+1)!}$$

Es existieren also $i, j \in \{1, 2, \ldots, |Q| + 1\}$ mit $i < j$ und

$$\hat{\delta}_A(q_0, 0^{i!}) = \hat{\delta}_A(q_0, 0^{j!})$$

(Schubfachprinzip)
Gemäss Lemma 3.3 im Buch gilt somit

$$0^{i!} z \in L \iff 0^{j!} z \in L$$

für alle $z \in \{0,1\}^*$. Für $z = 0^{i \cdot i!}$ haben wir aber einen Widerspruch: $0^{i!} 0^{i \cdot i!} = 0^{(i+1)!} \in L$ und $0^{j!} 0^{i \cdot i!} \notin L$, da $j! < j! + i \cdot i! < j! + j \cdot j! = (j+1)!$. Das heisst also, dass L nicht regulär ist. $\square$

Mittels Pumping-Lemma:
Angenommen L sei regulär. Betrachten wir nun das Wort

$$w = 0^{n_0!}$$

Offensichtlich gilt $|w| = n_0! \geq n_0$. Folglich gibt es gemäss dem Pumping-Lemma, für das Wort w, eine Zerlegung $w = yxz$, wobei

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$

Nach (i) gibt es $y = 0^l$ und $x = 0^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$. Nach (ii) gilt $m \geq 1$. Und weil $w = 0^{n_0!} \in L$ ist, muss also $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, da $yx^2z = 0^{n_0!+m} \notin L$, weil $n_0! < n_0! + m \leq n_0! + n_0 < (n_0 + 1)!$. Somit ist $L \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$ $\square$

Beweis mittels der Methode der Kolmogorov-Komplexität.
Angenommen, L sei regulär. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $0^{m \cdot m! - 1}$ das erste Wort in der Sprache

$$L_{0^{m!+1}} = \{y \mid 0^{m!+1}y \in L\}$$

da $(m+1)! = m \cdot m! + m! = m! + 1 + m \cdot m! - 1$. Nach Satz 3.1 aus dem Buch existiert eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, unabhängig von m, so dass

$$K(0^{0^{m \cdot m! - 1}}) \leq \lceil \log 2(1+1) \rceil + c = 1 + c$$

Da es nur endlich viele Programme der konstanten Länge kleiner gleich $1 + c$ gibt, aber unendlich viele Wörter der Form $0^{m \cdot m! - 1}$, ist dies ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und L ist nicht regulär. $\square$

7. Verwende das Pumping Lemma um zu zeigen, dass die Sprache L nicht regulär ist

$$L = \{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

Lösung:

Mittels Pumping-Lemma:
Angenommen L sei regulär. Betrachten wir nun das Wort

$$w = 0^p$$

für eine Primzahl $p \geq n_0$, somit gilt $|w| = p \geq n_0$. Folglich gibt es gemäss dem Pumping-Lemma, für das Wort w, eine Zerlegung $w = yxz$, wobei

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$

Nach (i) gibt es $y = 0^l$ und $x = 0^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$. Nach (ii) gilt $m \geq 1$. Und weil $w = 0^p \in L$ ist, muss also $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0^{p+(k-1)m} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, denn falls wir $k = p + 1$ wählen, ist $yx^kz = 0^{p+p \cdot m} = 0^{p \cdot (m+1)} \notin L$, da $p(m+1)$ offensichtlich keine Primzahl ist! Somit ist $L \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$ $\square$