Quiz 5– Lösungen

1. Welche Aussage ist korrekt?

   √ $\mathcal{L}_{\mathrm{EA}} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$
   ◯ $\mathcal{L}_{\mathrm{EA}} = \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$
   ◯ $\mathcal{L}_{\mathrm{EA}} \supsetneq \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$

2. Welche Aussagen sind korrekt (M_1, M_2 sind TM)?

   ◯ $L(M_1) = L(M_2) \implies M_1 = M_2$
   ◯ $L(M_1) = L(M_2) \iff M_1 = M_2$
   √ $L(M_1) = L(M_2) \impliedby M_1 = M_2$

3. *(Wiederholung Kapitel 2)*
   Sei $w = 1^{2^{3\cdot n^2}} \in \{0,1\}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität von w_n an, gemessen in der Länge von w_n.

Lösung: Wir geben zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Programm an, welches w_n erzeugt

```
begin
  x := n;
  x := 2^(3 * x*x);
  for i:=1 to x do
    write(1);
end;
```

Der einzige Teil des Maschinencodes dieses Programms, der von w_n abhängt, ist die Darstellung von n in der zweiten Zeile. Der restliche Programmcode hat eine konstante Länge. Also ist die binäre Länge dieses Programms $\lceil \log_2(n+1) \rceil + c$ für eine Konstante c.

Damit lässt sich die Kolmogorov-Komplexität von w_n von oben abschätzen durch

$$K(w_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + c$$

Die Länge von w_n ist: $|w_n| = 2^{3\cdot n^2} \iff \sqrt{\log_2 |w_n|/3} = n$, somit

$$\begin{aligned} K(w_n) &\leq \frac{1}{2} \log_2(\log_2 |w_n|/3) + c' \\ &\leq \frac{1}{2} \log_2 \log_2 |w_n| + c'' \end{aligned}$$

für Konstanten c', c''.