Quiz 7– Lösungen

1. Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$, dann

   √ $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} \wedge L^{\mathsf{C}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} \implies L \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$

   √ $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} \wedge L^{\mathsf{C}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} \impliedby L \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$

   √ $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} \wedge L^{\mathsf{C}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} \iff L \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$

   ◯ Keine der Aussagen ist korrekt

Lösung: Informal justification for $L \in \mathcal{L}_{RE} \wedge L^C \in \mathcal{L}_{RE} \Rightarrow L \in \mathcal{L}_R$:

If $L \in \mathcal{L}_{RE} \wedge L^C \in \mathcal{L}_{RE}$ we know that there exists a TM M such that $L = L(M)$ and a TM M' with $L^C = L(M')$. We can therefore create a TM $\overline{M}$ that alternately executes a state in M and M' for an input x. We note that q_{accept} and q_{reject} of M become q_{accept} and q_{reject} of $\overline{M}$. And q_{accept} of M' becomes q_{reject} of $\overline{M}$. q_{reject} of M' becomes q_{accept} of $\overline{M}$.

If x is in L, then $\overline{M}$ is guaranteed to terminate in q_{accept} because of M. If x is not in L, $\overline{M}$ is definitely going to halt in q_{reject} because of M'.

$\Leftarrow$ follows from Lemme 5.4 and $\mathcal{L}_{\mathrm{R}} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$

2. Sei $L = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM die Primzahlen akzeptiert}\}$ dann gilt

   ◯ $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$

   √ $L \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$

   Begründe:

Lösung: L ist die Sprache der Turingmaschinen, welche $L_P = \{p \mid p \text{ ist Prim}\}$ akzeptiert. Es gilt $L \neq \emptyset$, ausserdem L_P ist offensichtlich rekursiv. Somit ist L ein semantisch nichttriviales Entscheidungsproblem über Turingmaschinen und gemäss Satz von Rice $L \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$

3. Sei $L = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ hält nie}\}$

   (a) Bestimme L^{C}

Lösung:

$$\begin{aligned} L^{\mathsf{C}} = &\{w \in (\Sigma_{\mathrm{bool}})^* \mid w \neq \mathrm{Kod}(M) \text{ für alle TM } M\} \\ &\cup \{\mathrm{Kod}(M) \mid \exists x \text{ so dass TM } M \text{ auf } x \text{ hält}\} \end{aligned}$$

(b) Zeige $L^{\mathsf{C}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$

Lösung: Wir beschreiben eine NTM M, so dass $L(M) = L$. Für jedes Wort $w \in L^{\mathsf{C}}$ gibt es eine endliche akzeptierende Berechnung.

1. Prüfe ob $w = \mathrm{Kod}(M')$ für eine TM M', falls nicht akzeptiert M das Wort.
2. Falls $w = \mathrm{Kod}(M')$ für eine TM M', dann wählt M nichtdeterministisch ein Wort x über dem Eingabealphabet von M' und simuliert M' deterministisch auf x. Falls M' auf x hält, akzeptiert M das Wort. Sonst rechnet M unendlich lange.

Korrektheitsbegründung (schwammig): M akzeptiert offensichtlich alle Wörter, welche keine TM sind. Falls w eine Kodierung einer TM M' ist, so ist $w \in L^C$ gdw. es ein Wort gibt so dass diese TM M' hält. Es gibt eine akzeptierende Berechnung von M wo dieses Wort nichtdeterministisch gewählt wird. Oder $w \in L$, dann gibt es keine akzeptierende Berechung von M. Somit $L^C \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$

4. Welche Aussagen sind korrekt? (M ist eine MTM, $n \in \mathbb{N}$, C ist eine Konfiguration)

- $\surd$ **$\min\{\mathbf{Time}_M(x) \mid x \in \Sigma^n\} + \max\{\mathbf{Time}_M(x) \mid x \in \Sigma^n\} \leq 2 \cdot \mathbf{Time}_M(n)$**
- ◯ $\mathrm{Space}_M(n)$ hängt von der Mächtigkeit des Arbeitsalphabetes von M ab.
- ◯ $\mathrm{Space}_M(n)$ hängt von der Mächtigkeit des Eingabealphabetes von M ab.
- $\surd$ **$\mathrm{Space}_M(C)$ hängt nicht von der Länge des Eingabewortes ab.**