Ejercicio 3

Apartado a) 1.

En este caso sabemos que la aceleración es constante y el auto se mueve sobre una rampa recta, por ende el movimiento es un MRUV.

Del enunciado sacamos los siguientes datos:

- $v_0 = 60\ mi/h$ (velocidad inicial)
- $v_f = 0\ mi/h$ (velocidad final)
- $a(t) = cte = -10\ ft/s^2$ (aceleración)

El programa se encarga de convertir estos valores al sistema USI.

Queremos calcular el tiempo t_f requerido para que el automóvil quede en reposo y la distancia d que recorre sobre la rampa.

Tomamos como tiempo inicial $t_0 = 0\ s$ y la posición inicial $x_0 = 0m$. Luego, la distancia recorrida será $d = x(t_f)$.

Como estamos en un MRUV, se cumple la siguiente ecuación: $v(t_f) = v_f = v_0 + a(t_f)(t_f - t_0)$.

Como $v_f = 0\ m/s$ y $t_0 = 0\ s$, resulta: $v_0 + a(t_f)t_f = 0\ m/s$.

Trabemos algebráicamente la expresión: $v_0 + a(t_f)t_f = 0\ m/s \Rightarrow a(t_f)t_f = -v_0 \Rightarrow t_f = -v_0/a(t_f)$.

Por lo tanto, obtuvimos

$$\mathbf{t_f = \frac{-v_0}{a(t_f)}}$$

Ahora queremos calcular $d = x(t_f)$. Por estar en un MRUV tenemos que se cumple esta ecuación: $x(t_f) = x_0 + v_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}a(t_f)(t_f - t_0)^2$.

Como $t_0 = 0\ s$ y $x_0 = 0\ m$, resulta: $x(t_f) = v_0 t_f + \frac{1}{2}a(t_f)t_f^2$.

Finalmente, como $d = x(t_f)$, obtuvimos

$$\mathbf{d = v_0\ t_f + \frac{1}{2}\ a(t_f)\ t_f^2}$$

Apartado a) 2.

En este caso tenemos que la aceleración varía linealmente, por lo cual su ecuación tiene la forma $a(t) = mt + a_0$, siendo $a_0 = -10\ ft/s^2$ y $a_f = a(t_f) = 0\ m/s^2$.

Nuevamente queremos calcular el tiempo t_f y la distancia d con las definiciones hechas en el apartado anterior.

Tenemos que $a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a(t)\ dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{t_0}^{t_f} a(t)\ dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{t_0}^{t_f} (mt + a_0)\ dt$

Como $t_0 = 0\ s$, resulta: $\int_{v_0}^{v_f} dv = m\int_0^{t_f} t\ dt + \int_0^{t_f} a_0\ dt \Rightarrow [v]_{v_0}^{v_f} = \frac{m}{2}\left[t^2\right]_0^{t_f} + a_0\,[t]_0^{t_f} \Rightarrow v_f - v_0 = \frac{1}{2}\ m\ t_f^2 + a_0\ t_f \Rightarrow v_f = v(t_f) = v_0 + \frac{1}{2}\ m\ t_f^2 + a_0\ t_f$

Como $v_f = 0\ m/s$, resulta: $-v_0 = \frac{1}{2}\ m\ t_f^2 + a_0\ t_f$

Luego podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mt_f + a_0 = a_f = 0\ m/s^2 \\ \frac{1}{2}\ m\ t_f^2 + a_0\ t_f = -v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} mt_f = -a_0 \\ \frac{1}{2}\ (m\ t_f)\ t_f + a_0\ t_f = -v_0 \end{cases}$$

Obtenemos estas ecuaciones:

$$mt_f = -a_0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\ (m\ t_f)\ t_f + a_0\ t_f = -v_0 \tag{2}$$

Reemplazando (*1*) en (*2*) resulta: $\frac{1}{2}\ (-a_0)\ t_f + a_0\ t_f = -v_0 \Rightarrow a_0\ t_f - \frac{1}{2}\ a_0\ t_f = -v_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ a_0\ t_f = -v_0 \Rightarrow a_0\ t_f = -2v_0 \Rightarrow t_f = -2\frac{v_0}{a_0}$

Por lo tanto, obtuvimos que

$$\mathbf{t_f = -2\frac{v_0}{a_0}}$$

Y despejamos la pendiente $m = -\frac{a_0}{t_f}$.

Ahora nos queda calcular la distancia recorrida sobre la rampa. Para ello debemos obtener la ecuación del desplazamiento.

Partamos de que: $v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v(t)\ dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x_f} dx = \int_{t_0}^{t_f} v(t)\ dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x_f} dx = \int_{t_0}^{t_f} (v_0 + \frac{1}{2}\ m\ t^2 + a_0\ t)\ dt$

Como $t_0 = 0\ s$ y $x_0 = 0\ m$, resulta: $\int_0^{x_f} dx = v_0 \int_0^{t_f} dt + \frac{1}{2}\ m \int_0^{t_f} t^2\ dt + a_0 \int_0^{t_f} t\ dt \Rightarrow [x]_0^{x_f} = v_0\ [t]_0^{t_f} + \frac{m}{6}\ \left[t^3\right]_0^{t_f} + \frac{a_0}{2}\ \left[t^2\right]_0^{t_f} \Rightarrow x_f = v_0\ t_f + \frac{a_0}{2} t_f^2 + \frac{m}{6}\ t_f^3$

Por lo tanto, como $d = x_f = x(t_f)$, obtuvimos:

$$\mathbf{d = v_0\ t_f + \frac{a_0}{2} t_f^2 + \frac{m}{6}\ t_f^3}$$