Trabajo Practico 3

Grillo, Libonati, Maiza

Ejercicio 1

Apartado a)

El vagón de longitud L y rapidez inicial v_0 junto a la arena que cae sobre él conforman un sistema de partículas. Tenemos que la sumatoria de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual a 0: $\sum F = 0$.

Siendo $P_0 = m_0 v_0$ la cantidad de movimiento inicial (antes de pasar por el conducto) y $P = mv$ la cantidad de movimiento final (tras pasar por el conducto), por conservación de la cantidad de movimiento debe ser $P_0 = P \Rightarrow m_0 v_0 = mv$, donde m y v son la masa y la velocidad del sistema tras pasar por el conducto, respectivamente. Podemos descomponer $m = m_0 + m_1$, donde m_1 es la masa que gana el sistema (la masa de arena que cae sobre el vagón).

Consideremos que el tiempo inicial es $t_0 = 0\ s$ y el tiempo final es t_f. Además, la masa inicial de arena sobre el vagón (antes de que caiga algún grano) es $0\ kg$.

Tenemos que $\frac{dm}{dt} = q$. Luego:

$$\frac{dm}{dt} = q$$
$$\Rightarrow$$
$$dm = q\ dt$$
$$\Rightarrow$$
$$\int_0^{m_1} dm = \int_{t_0}^{t_f} q\ dt$$
$$\Rightarrow$$
$$m_1 = q\ t_f$$

Por lo tanto, reemplazando en la ecuación anterior, tenemos que $m_0 v_0 = (m_0 + q t_f)v$. Para cualquier instante t la ecuación resulta $m_0 v_0 = (m_0 + qt)v$

Ya conocemos el desplazamiento del sistema en el intervalo $[t_0, t_f]$: es igual a L (ya que el vagón abandonará el conducto una vez que toda su longitud lo abandone). Consideramos entonces que la posición del sistema en el instante t_0 es $x_0 = 0\ m$ y en el instante t_f es $x_f = L$.

De la última ecuación despejamos $v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + qt}$, y como $v = \frac{dx}{dt}$, tenemos que $\frac{dx}{dt} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + q t_f} \Rightarrow dx = \frac{m_0 v_0\ dt}{m_0 + qt}$. Luego:

$$dx = \frac{m_0 v_0\ dt}{m_0 + qt}$$
$$\Rightarrow$$
$$\int_0^L dx = \int_0^{t_f} \frac{m_0 v_0\ dt}{m_0 + qt}$$
$$\Rightarrow$$
$$\int_0^L dx = m_0 v_0 \int_0^{t_f} \frac{dt}{m_0 + qt}$$
$$\Rightarrow$$

$$Sustitución : u = m_0 + qt; du = qdt \Rightarrow \frac{du}{q} = dt$$

$$\Rightarrow$$

$$L = m_0 v_0 \int_0^{t_f} \frac{du}{qu}$$

$$\Rightarrow$$

$$L = \frac{m_0 v_0}{q} \int_0^{t_f} \frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow$$

$$L = \frac{m_0 v_0}{q} \left[ln(u) \right]_0^{t_f}$$

$$\Rightarrow$$

$$L = \frac{m_0 v_0}{q} \left[ln(m_0 + qt) \right]_0^{t_f}$$

$$\Rightarrow$$

$$L = \frac{m_0 v_0}{q} \ (ln(m_0 + qt_f) - ln(m_0 + q * 0 \ s))$$

$$\Rightarrow$$

$$L = \frac{m_0 v_0}{q} \ (ln(m_0 + qt_f) - ln(m_0))$$

$$\Rightarrow$$

$$L = \frac{m_0 v_0}{q} \ ln(\frac{m_0 + qt_f}{m_0})$$

Nosotros queremos obtener $m = m_0 + qt_f$. Despejando en la última ecuación tenemos:

$$L = \frac{m_0 v_0}{q} \ ln(\frac{m_0 + qt_f}{m_0})$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{qL}{m_0 v_0} = ln(\frac{m_0 + qt_f}{m_0})$$

$$\Rightarrow$$

$$e^{\frac{qL}{m_0 v_0}} = e^{ln(\frac{m_0 + qt_f}{m_0})}$$

$$\Rightarrow$$

$$e^{\frac{qL}{m_0 v_0}} = \frac{m_0 + qt_f}{m_0}$$

$$\Rightarrow$$

$$m_0 \ e^{\frac{qL}{m_0 v_0}} = m_0 + qt_f = m$$

Finalmente, la masa del vagón y su carga tras dejar atrás el conducto es:

$$\mathbf{m = m_0 \ e^{\frac{qL}{m_0 v_0}}}$$

Apartado b)

En el apartado anterior despejamos $v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + qt}$. Por lo tanto para el instante t_f tenemos:

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + qt_f}$$
$$\Rightarrow$$
$$v = \frac{m_0 v_0}{m}$$
$$\Rightarrow$$
$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 \ e^{\frac{qL}{m_0 v_0}}}$$
$$\Rightarrow$$
$$v = \frac{v_0}{e^{\frac{qL}{m_0 v_0}}}$$
$$\Rightarrow$$
$$v = v_0 \ e^{-\frac{qL}{m_0 v_0}}$$

Por lo tanto, la rapidez del vagón al dejar atrás el conducto es:

$$\mathbf{v = v_0 \ e^{-\frac{qL}{m_0 v_0}}}$$

Ejercicio 2

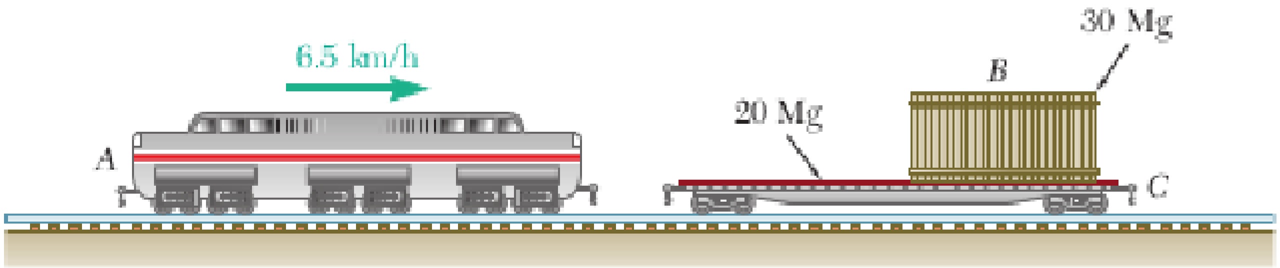

Figure 1: enunciado ej2

Una locomotora A de 80 Mg que viaja a 6.5 km/h choca con un carro plataforma C de 20 Mg que transporta una carga B de 30 Mg, la cual puede deslizarse a lo largo del piso ($\mu = 0.25$).
Si se sabe que el carro plataforma estaba en reposo, sin frenos, y que se acopló automáticamente con la locomotora luego del impacto, determine la velocidad del carro plataforma

a) Inmediatamente después del impacto

b) Después de que la carga se ha deslizado con relación al carro plataforma hasta llegar a un tope.

apartado a)

Consideramos al sistema que integran A, B, y C como un sistema aislado, puesto que no hay fuerzas externas significativas que afecten a las locomotoras.
Si bien el peso de A, B, y C no es nulo, este se ve equilibrado por la normal del suelo, por lo que se anulan y no afectan al movimiento del sistema.

Por lo tanto solo necesitamos considerar el efecto que tienen las partículas entre ellas.

Diagrama de cuerpo libre de la carga

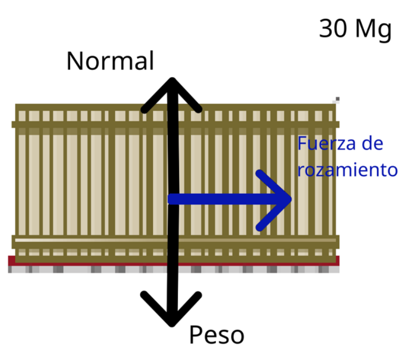

Figure 2: diagrama cuerpo libre ej2

Al momento del impacto, la cantidad de movimiento lineal de la carga es

(por segunda ley de newton)

$$m_1 * v_1 + \int_{t1}^{t2} F dt = m_2 * v_2$$

Donde $F = N * \mu = P * 0.25 = 7.5N$

Como la masa no cambia, $m_1 = m_2$.

A esta integral $\int_{t1}^{t2} Fdt$ la conocemos como el impulso lineal de la fuerza F durante el intervalo de tiempo de t1 a t2.

Si elegimos un intervalo de tiempo que tienda a 0, el impulso también tiende a 0, por lo que la cantidad de movimiento lineal de la carga pasa a ser

$$m * v_1 + 0 = m * v_2$$
$$(\text{para un tiempo límite } \lim_{t2->t1} t2 - t1 = 0)$$

Y como la carga comienza en reposo

$$0 = m * v_2$$
$$m \neq 0 \implies v_2 = 0$$

Por lo que podemos ignorar a la carga en el momento del impacto al calcular la cantidad de movimiento lineal del sistema.

$\dot{P} = \sum F_{externas}$, y como el sistema es aislado $\sum F_{externas} = 0$ por lo tanto $\dot{P} = 0$ y P es constante (conservación de la cantidad de movimiento lineal).

Debido a la conservación de la cantidad de movimiento lineal, inicialmente $P = m_A * v_A$.
Luego, aumenta la masa del sistema (se acopla C) y por lo tanto la velocidad disminuye.

$$P = m_A * v_A = (m_A + m_C) * v_{choque}$$

A partir de esta ecuación despejamos la velocidad del carro plataforma C

$$v_{choque} = \frac{m_A * v_A}{(m_A + m_C)} = \frac{80Mg * 6.5\frac{km}{h}}{80Mg + 20Mg} = \frac{26\frac{km}{h}}{5} = 5,2\frac{km}{h}$$

apartado b)

Ahora nos encontramos en el momento en que la carga se deslizó con relación al carro plataforma hasta llegar a un tope. Esto quiere decir que la partícula B estuvo en movimiento y la fricción entre B y C actuó hasta que B y C comenzaron a moverse a la misma velocidad (cuando llega al tope) junto al resto del sistema.

Por lo tanto, el sistema incorpora la masa de B, y debido a la conservación del movimiento lineal:

$$P = m_A * v_A = (m_A + m_B + m_C) * v_{final}$$

Despejando la velocidad final del carro plataforma

$$v_{final} = \frac{m_A * v_A}{(m_A + m_B + m_C)} = \frac{80Mg * 6.5\frac{km}{h}}{80Mg + 30Mg + 20Mg} = 4\frac{km}{h}$$

Ejercicio 3

3) El extremo A de una barra AB de 5 kg se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante v_A=15 m/s. Con software calcule y grafique las reacciones normales en los extremos A y B de la barra para valores de desde 0 hasta 50°. Determine el valor de con el cual el extremo B de la barra pierde contacto con la pared.

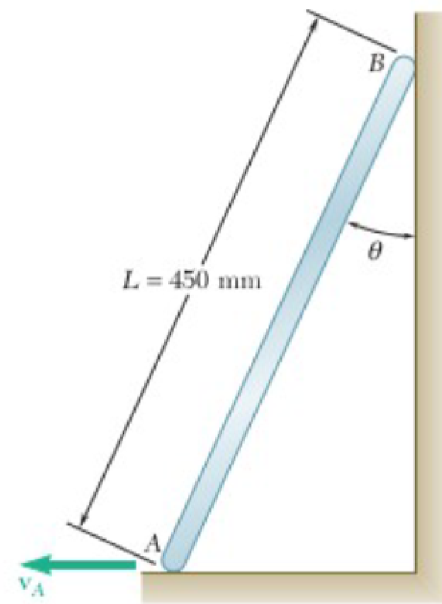

Figure 3: enunciado ej3

Parte 1

Nuestro objetivo consiste en obtener la fuerza normal sobre los puntos A y B en función del angulo theta.

Sabemos que la barra se está moviendo hacia abajo aceleradamente, por lo tanto sabemos (por segunda ley de Newton) que la suma de las fuerzas en Y son:

$$m * -\overline{a} = N_A + -P$$

por lo tanto tenemos que:

$$N_A = m * g - m * \overline{a} = m * (g - \overline{a})$$

ahora, sabemos que $\overline{a}$ es $\frac{1}{2}(a_A + a_B)$ pero como la velocidad de A es constante tenemos que

$$\overline{a} = \frac{1}{2} a_B$$

para saber la aceleración de B en función de theta vamos a plantear lo siguiente:

la aceleración de B se puede expresar como $a_B = a_A + a_{B/A}$

como a se mueve a velocidad constante, nos queda:

$$a_B = a_{B/A} = (a_{B/A})_t + (a_{B/A})_n$$

para poder calcular estas componentes vamos a utilizar el centro de rotación instantanea

la velocidad angular del CRI se puede calcular y es:

$$\omega = \frac{v_A}{L\cos(\theta)}$$

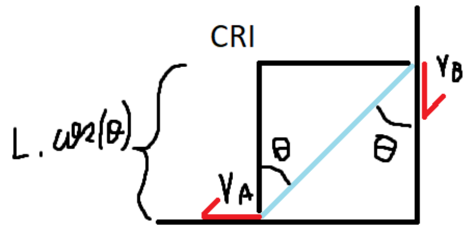

Figure 4: diagrama del CRI

sabiendo esto tenemos (por teorema del seno) que:

$$\frac{L\omega^2}{cos(\theta)} = a_B$$

También podemos obtener la aceleración tangencial :

$$\frac{L * \alpha}{\sin(\theta)} = a_B = \frac{L\omega^2}{cos(\theta)}$$

$$\alpha = \omega^2 * \tan(\theta)$$

Con esto último y el momento de inercia de la vara:

$$I = \frac{1}{12} * m * L^2$$

Fuente para momento de inercia de la vara (problema resuelto 16.10 del libro):

Cinética del movimiento. Se dibujan unos diagramas de cuerpo libre de la ecuación que expresen que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas representadas por el vector de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_x$ y $m\bar{\mathbf{a}}_y$ fijo en G y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Se calculan las siguientes magnitudes:

Figure 5: cinetica del movimiento

$$\bar{I} = \frac{1}{12} ml^2$$

Figure 6: momento de inercia de la barra

Y entonces podemos plantear lo siguiente:

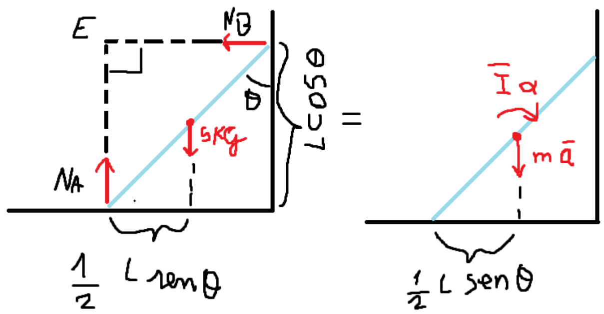

Figure 7: diagrama del movimiento de la barra

De lo cual podemos concluir:

$$N_B * L * \cos(\theta) - P * (L/2) * \sin(\theta) = -m * \overline{a} * (L/2) * \sin(\theta) - \overline{a} * \alpha$$

y por lo tanto:

$$N_B = \frac{\frac{1}{2} * m * L(g - \overline{a}) * \sin(\theta) - \frac{1}{12} m * L^2 \alpha}{L * \cos(\theta)}$$

Parte 2

Para poder determinar en que momento se separa la vara de la pared, solo debemos encontrar cuando la normal de B se vuelve 0. Para eso vamos a utilizar el código realizado y indicaremos cuando N_B es 0.

Los resultados entonces son los siguientes:

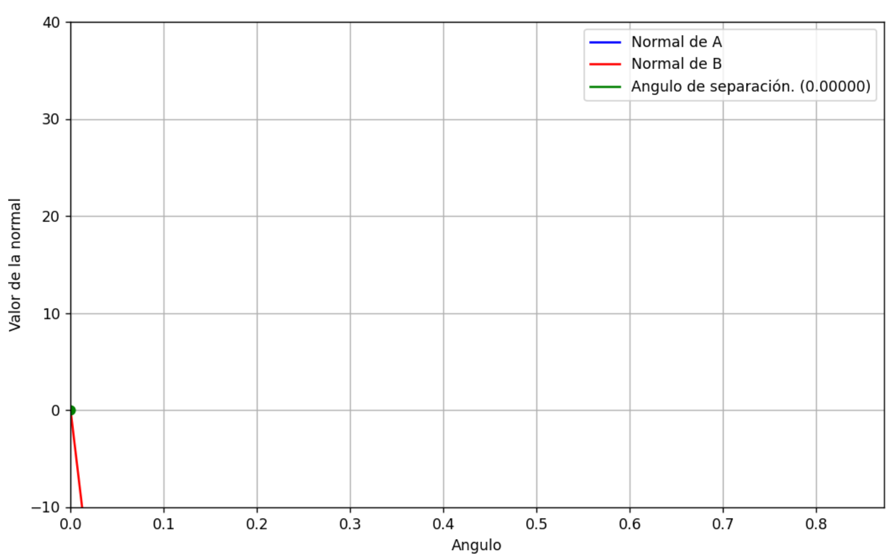

Figure 8: Grafica del angulo de separacion con 15m/s

. . . ¿Que pasó?

Luego de discutirlo con un par de compañeros, llegamos a la conclusión de que el ejercicio tiene un pequeño error, culpa de la traducción al español. En la versión en inglés del ejercicio, la velocidad de A es $1.5\frac{m}{s}$. Por lo que en esta versión del ejercicio, la velocidad es tan alta que se despega inmediatamente de la pared.

Si tenemos en cuenta el error y ponemos la velocidad del ejercicio en inglés, tenemos:

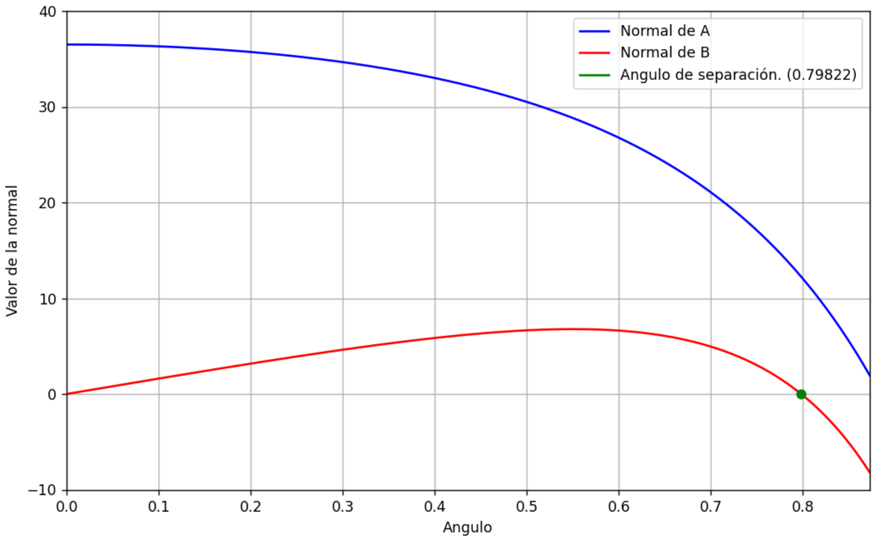

Figure 9: Grafica del angulo de separacion con 1.5m/s

Codigo para las gráficas

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Constantes
g = 9.8  # Gravedad
L = 0.45 # Longitud de la vara
VA = 1.5 # Velocidad de A
m = 5 # Masa


def omega(theta):
    return VA/ (L * np.cos(theta))

def alpha(theta):
    return omega(theta)**2 * np.tan(theta)

def aceleracion(theta):
    return (L * (omega(theta)**2)) / (2 * np.cos(theta))

def normalEnA(theta):
    return m * (g - aceleracion(theta))

def normalEnB(theta):
    return ((1/2) * m * L * (g - aceleracion(theta)) * np.sin(theta) - (1/12) * m * L**2 * alpha(theta))/(

radianes = np.linspace(0, 50 * (np.pi/180), 10000)  # Valores de radianes de 0 a pi/2
```

```python
thetas = []
Normales_A = []
Normales_B = []
ang_separacion = 0
# Comprobación de la igualdad
for theta in radianes:
    norm_A = normalEnA(theta)
    norm_B = normalEnB(theta)

    thetas.append(theta)
    Normales_A.append(norm_A)
    Normales_B.append(norm_B)

    if np.isclose(norm_B,0, atol=1e-2):
        ang_separacion = theta

# Graficar los puntos que cumplen la igualdad
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(thetas, Normales_A, color='b', label="Normal de A")
plt.plot(thetas, Normales_B, color='r', label="Normal de B")
plt.plot(ang_separacion, 0, color="g", label="Angulo de separación. (%.5f)" %(ang_separacion))
plt.plot(ang_separacion,0,'go')
plt.xlabel('Angulo')
plt.ylabel('Valor de la normal')
plt.xlim(0, 50 * (np.pi/180))
plt.ylim(-10, 40)
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```