Ejercicio 2

Apartado a)

Tenemos que un satélite se ubica en una órbita circular, por lo cual la fuerza de gravedad F que la tierra ejerce sobre el satélite es normal a la órbita, y se tiene que $F = \frac{GMm}{r^2}$, donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la tierra, m es la masa del satélite y r es la distancia del satélite al centro de la tierra.

También podemos escribir $F = ma$, y como $a = \frac{v^2}{r}$ obtenemos $F = \frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, de donde $v^2 = \frac{GM}{r}$.

Además sabemos que $GM = gR^2$, donde R es el radio de la tierra y g la aceleración de la gravedad, por lo cual escribimos $v^2 = \frac{gR^2}{r}$. Finalmente, despejamos la velocidad $v = R\sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ con la cual el satélite describe su órbita.

Además, la velocidad con la cual el satélite describe su órbita es $v = \frac{2\pi r}{T}$, donde T es el período (que tenemos como dato, T = 23.934 h). Luego, $R\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{R\sqrt{\frac{g}{r}}}$

Para los siguientes cálculos utilizaremos estos valores de las constantes g y R:

- $g = 9.81\ m/s^2 = 127137.6\ km/h^2$
- $R = 6.37\ .\ 10^6\ m = 6370\ km$

Ahora planteamos:

$$T = 23.934\ h = \frac{2\pi}{R}\frac{r}{\sqrt{\frac{g}{r}}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{g}{r}}} = 24264.7\ km\ h$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{r^2}{\frac{g}{r}} = 588775461.2\ km^2\ h^2$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{r^3}{g} = 588775461.2\ km^2\ h^2$$

$$\Rightarrow$$

$$r^3 = 588775461.2\ km^2\ h^2 * 127137.6\ km/h^2 = 7.49\ .\ 10^{13}\ km^3$$

$$\Rightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{7.49\ .\ 10^{13}\ km^3}$$

$$\Rightarrow$$

$$r = 42144.53\ km$$

Obtuvimos que la distancia del satélite al centro de la tierra es $r = 42144.53\ km$. Nosotros queremos calcular la distancia d del satélite a la superficie terrestre, que será $d = r - R = (42144.53 - 6370)\ km$.

Por lo tanto, al distancia del satélite a la superficie de la tierra es

$$\mathbf{d = 35774.53\ km = 22229.26\ mi}$$

En unidades del USI y de uso común en Estados Unidos resulta

$$\mathbf{d = 35774530\ m = 117370492.8\ ft}$$

Apartado b)

En el apartado anterior dijimos que $v = \frac{2\pi r}{T}$. Luego:

$$v = 2\pi \frac{42144.53\ km}{23.934\ h}$$
$$\Rightarrow$$
$$v = 2\pi\ 1760.86\ km/h$$

Finalmente, resulta

$$\mathbf{v = 11063.84\ km/h = 6874.75\ mi/h}$$

En unidades del USI y de uso común en Estados Unidos resulta

$$\mathbf{v = 3073.29\ m/s = 10082.97\ ft/s}$$