Ejercicio 3

Apartado a) 1.

En este caso sabemos que la aceleración es constante y el auto se mueve sobre una rampa recta, por ende el movimiento es un MRUV.

Del enunciado sacamos los siguientes datos:

- v_0 = 60 mi/h (velocidad inicial)
- v_f = 0 mi/h (velocidad final)
- $a(t) = cte = -10$ ft/s^2 (aceleración)

El programa se encarga de convertir estos valores al sistema USI.

Queremos calcular el tiempo t_f requerido para que el automóvil quede en reposo y la distancia d que recorre sobre la rampa.

Tomamos como tiempo inicial t_0 = 0 s y la posición inicial x_0 = 0m. Luego, la distancia recorrida será $d = x(t_f)$.

Como estamos en un MRUV, se cumple la siguiente ecuación: $v(t_f) = v_f = v_0 + a(t_f)(t_f - t_0)$.

Como v_f = 0 m/s y t_0 = 0 s, resulta: $v_0 + a(t_f)t_f$ = 0 m/s.

Trabemos algebráicamente la expresión: $v_0 + a(t_f)t_f$ = 0 m/s $\Rightarrow a(t_f)t_f = -v_0 \Rightarrow t_f = -v_0/a(t_f)$.

Por lo tanto, obtuvimos

$$\bold{t_f = {-v_0 \over a(t_f)}}$$

Ahora queremos calcular $d = x(t_f)$. Por estar en un MRUV tenemos que se cumple esta ecuación: $x(t_f) = x_0 + v_0 (t_f - t_0) + {1 \over 2} a(t_f) (t_f - t_0)^2$.

Como t_0 = 0 s y x_0 = 0 m, resulta: $x(t_f) = v_0 t_f + {1 \over 2} a(t_f) t_f^2$.

Finalmente, como $d = x(t_f)$, obtuvimos

$$\bold{d =v_0~t_f + {1 \over 2}~a(t_f)~t_f^2}$$

Apartado a) 2.

En este caso tenemos que la aceleración varía linealmente, por lo cual su ecuación tiene la forma $a(t) = mt + a_0$, siendo $a_0 = -10\ ft/s^2$ y $a_f = a(t_f) = 0\ m/s^2$.

Nuevamente queremos calcular el tiempo t_f y la distancia d con las definiciones hechas en el apartado anterior.

Tenemos que $a(t) = {dv \over dt}$ ⇒ $dv = a(t)\ dt$ ⇒ $\int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{t_0}^{t_f} a(t)\ dt$ ⇒ $\int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{t_0}^{t_f} (mt+a_0)\ dt$

Como $t_0 = 0$ s, resulta: $\int_{v_0}^{v_f} dv = m\int_0^{t_f} t\ dt + \int_0^{t_f} a_0\ dt$ ⇒ $\left[v\right]_{v_0}^{v_f} = {m \over 2} \left[t^2 \right]_{0}^{t_f} + a_0 \left[t\right]_{0}^{t_f}$ ⇒ $v_f-v_0 = {1 \over 2}~m~t_f^2 + a_0~t_f$ ⇒ $v_f = v(t_f) = v_0 +{1 \over 2}~m~t_f^2 + a_0~t_f$

Como $v_f = 0$ m/s, resulta: $-v_0 = {1 \over 2}~m~t_f^2 + a_0~t_f$

Luego podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$ $ ⇒ $

$

Obtenemos estas ecuaciones:

$$ \begin{align} mt_f = -a_0\\ {1 \over 2}~(m~t_f)~t_f + a_0~t_f = -v_0 \end{align} $$

Reemplazando $\it{(1)}$ en $\it{(2)}$ resulta: ${1 \over 2}~(-a_0)~t_f + a_0~t_f = -v_0$ ⇒ $a_0~t_f - {1 \over 2}~a_0~t_f = -v_0$ ⇒ ${1 \over 2}~a_0~t_f = -v_0$ ⇒ $a_0\ t_f = -2v_0$ ⇒ $t_f = -2{v_0 \over a_0}$

Por lo tanto, obtuvimos que

$$\mathbf{t_f = -2{v_0 \over a_0}}$$

Y despejamos la pendiente $m = -{a_0 \over t_f}$.

Ahora nos queda calcular la distancia recorrida sobre la rampa. Para ello debemos obtener la ecuación del desplazamiento.

Partamos de que: $v(t) = {dx \over dt}$ ⇒ $dx = v(t)\ dt$ ⇒ $\int_{x_0}^{x_f} dx = \int_{t_0}^{t_f} v(t)\ dt$ ⇒ $\int_{x_0}^{x_f} dx = \int_{t_0}^{t_f} (v_0 +{1 \over 2}~m~t^2 + a_0~t)~dt$

Como t_0 = 0 s y x_0 = 0 m, resulta: $\int_{0}^{x_f} dx = v_0 \int_{0}^{t_f} dt +{1 \over 2}~m \int_{0}^{t_f} t^2~dt + a_0 \int_{0}^{t_f} t~dt$ ⇒ $\left[x\right]_{0}^{x_f} = v_0 \left[t\right]_{0}^{t_f} + {m \over 6} \left[t^3 \right]_{0}^{t_f} + {a_0 \over 2} \left[t^2 \right]_{0}^{t_f}$ ⇒ $x_f = v_0~t_f + {a_0 \over 2} t_f^2 + {m \over 6}~t_f^3$

Por lo tanto, como d = x_f = x(t_f), obtuvimos:

$$\bold{d = v_0~t_f + {a_0 \over 2} t_f^2 + {m \over 6}~t_f^3}$$