Ejercicio 1

Para poder resolver de una forma “sencilla” vamos a pensar al problema como uno de vectores. Sabemos que si el origen de coordenadas es A entonces el vector P puede calcularse de la siguiente forma: (r es la longitud de la varilla AP)

$$\overline{P_A(t)} \ = \ (r \times \cos(\phi(t)), r \times \sin(\phi(t)))$$

El problema es que nos interesa saber el angulo que se forma entre el vector $\bar{i}$ cuando el origen de coordenadas se encuentra en B. Sin embargo, punto B es equivalente a \$ A + (0, l)\$ siendo l la distancia entre ellos. De hecho, culaquier vector con origen de coordenadas B podemos trasladarlo a A sumando $\bar{l} = (0, l)$ o trasladar de A a B restando $\bar{l} = (0, l)$.

Entonces tenemos que en B:

$$\overline{P_B(t)} \ = \overline{P_A(t)} - \bar{l}$$

$$\overline{P_B(t)} \ = \ (r \times \cos(\phi(t)), r \times \sin(\phi(t))) - \bar{l}$$

$$= (r \times \cos(\phi(t)), r \times \sin(\phi(t))) - (0, l)$$

$$= (r \times \cos(\phi(t)), (r \times \sin(\phi(t))) - l)$$

Sabiendo esto podemos calcular:

$$\cos(\widehat{\bar{i}\overline{P_B(t)}}) = \frac{\bar{i} \times \overline{P_B(t)}}{|\bar{i}| \times |\overline{P_B(t)}|}$$

$$= \frac{r \times \cos(\phi(t))}{1 \times |\overline{P_B(t)}|}$$

$$= \frac{r \times \cos(\phi(t))}{\sqrt{(r \times \cos(\phi(t)))^2 \ + \ (r \times \sin(\phi(t)) - l)^2}}$$

$$= \frac{r \times \cos(\phi(t))}{\sqrt{r^2 \times \cos(\phi(t))^2 \ + \ (r \times \sin(\phi(t)) - l)^2}}$$

$$= \frac{r \times \cos(\phi(t))}{\sqrt{r^2 - 2 \times r \times \sin(\phi(t)) + l^2}}$$

Y por lo tanto:

$$\widehat{\bar{i}\overline{P_B(t)}} = \cos^{-1}\left(\frac{r \times \cos(\phi(t))}{\sqrt{r^2 - 2 \times r \times \sin(\phi(t)) \times l + l^2}}\right)$$

Por simplicidad de la notación definimos:

$$f(t) = \cos^{-1}\left(\frac{r \times \cos(\phi(t))}{\sqrt{r^2 - 2 \times r \times \sin(\phi(t)) \times l + l^2}}\right)$$

Pero esta no es la solución correcta. Esto nos da el menor ángulo entre $\bar{i}$ y $\overline{P_B(t)}$ por lo que hay que tener en cuenta si este angulo es el que buscamos.
Para determinar esto, simplemente hay que determinar si el punto P se encuentra en los cuadrantes 1 o 2. Eso lo podemos determinar si la segunda componente de $\overline{P_B(t)}$ es mayor a 0.

Simplificando:

$$\sin(\phi(t)) \geq \frac{l}{r}$$

Por lo tanto nos queda:

$$\theta(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } \sin(\phi(t)) \geq \frac{l}{r} \\ 2\pi - f(t), & \text{si } \sin(\phi(t)) < \frac{l}{r} \end{cases}$$

Y también:

$$\dot{\theta}(t) = \begin{cases} \dot{f}(t), & \text{si } \sin(\phi(t)) \geq \frac{l}{r} \\ -\dot{f}(t), & \text{si } \sin(\phi(t)) < \frac{l}{r} \end{cases}$$