Devoir n° 1 *

Claudéric DeRoy Alexandre Pachot

1er octobre 2020

Question 1

a) *En utilisant les lois généralisées de De Morgan, montrez que* $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned}
\forall x, x \in \overline{A \cup B \cup C} &\Rightarrow x \notin A \cup B \cup C \\
&\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \quad \wedge \quad x \notin C \\
&\Rightarrow x \in \overline{A} \quad \wedge \quad x \in \overline{B} \quad \wedge \quad x \in \overline{C} \\
&\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}
\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\begin{aligned}
\forall x, x \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} &\Rightarrow x \in \overline{A} \quad \wedge \quad x \in \overline{B} \quad \wedge \quad x \in \overline{C} \\
&\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \quad \wedge \quad x \notin C \\
&\Rightarrow x \notin A \cup B \cup C \\
&\Rightarrow x \in \overline{A \cup B \cup C} \qquad \square
\end{aligned}$$

b) *Prouvez ou infirmez : Pour tous ensembles finis non-vides* A, B, C

$$(\bar{A} \times B) \cup (A \times C) = (\bar{A} \cup A) \times (B \cup C)$$

$$\begin{aligned}
x \in (\bar{A} \times C) &\Rightarrow x \notin (\bar{A} \times B) \quad \wedge \quad x \notin (A \times C) \\
&\Rightarrow x \notin (\bar{A} \times B) \cup (A \times C) \qquad (1) \\
x \in (\bar{A} \times C) &\Rightarrow x \in (\bar{A} \cup A) \times (C \cup B) \\
&\Rightarrow x \in (\bar{A} \cup A) \times (B \cup C) \qquad (2) \\
(1) \text{ et } (2) &\Rightarrow (\bar{A} \times B) \cup (A \times C) \neq (\bar{A} \cup A) \times (B \cup C) \qquad \square
\end{aligned}$$

*IFT 1065 – Structures discrètes en informatique – Automne 2020 – Margarida Carvalho

Question 2

Donnez la table de vérité de la proposition suivante :

$$(p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$$

		(1)	(2)	
p	q	p ⇒ q	p ∧ (1)	(2) ⇒ q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Question 3

Sans avoir recours aux tables de vérité (utilisez le Théorème 1), montrez que les deux propositions suivantes sont équivalentes

$$\neg p \vee (r \Rightarrow (\neg q)) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

$$\begin{aligned}\neg p \vee (r \Rightarrow (\neg q)) &\equiv \neg p \vee \neg(\neg(r \Rightarrow (\neg q)) \\ &\equiv \neg p \vee \neg(r \wedge \neg(\neg q)) \\ &\equiv \neg p \vee \neg r \vee \neg q\end{aligned}$$

Question 4

Donnez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

(a) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / \; (m \geq 2) \Rightarrow (m^2 > n^2 + 3)$

Posons $n = 0$. Pour $m = 2$, on a bien $2^2 > 0^2 + 3$. Pour $m > 2$, on a $m^2 > 2^2 > 0^2 + 3$. La proposition est vraie.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} / \; x < -y^2$

Étudions la négation de cette proposition, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / \; x \geq -y^2$

Posons $y = \sqrt{|x|}$. On a bien $x \geq -(\sqrt{|x|})^2$. La négation de la proposition est vraie. Par conséquent, la proposition initiale est fausse.