Devoir n° 3 [*]

Claudéric DeRoy (p1174700) Alexandre Pachot (p0774809)

18 novembre 2020

Question 1

5/

Soit $X = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 1 \leq x \leq 10\}$ et $Y = \{y \in \mathbb{N} \ / \ 0 \leq x \leq 8\}$ et la fonction $f : X \to Y$ tel que $f(x) = x \ mod(7+2)$. f est surjective car pour tout élément $y \in Y$, on a un antécédent 1.1 dans X, et f n'est pas injective car 1 ~~est~~ 10 ont la même image, 1.

1.2

Question 2

6/6

Soit R, une relation symétrique définie sur X. Soit $R^1 = R$ et $R^n = R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1}$ pour $n \geq 2$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, R^n est une relation symétrique.

cas de base : $n = 1$
R^1 est symétrique par définition.

Étape inductive :
Par hypothèse R^n est symétrique, est-ce que R^{n+1} est symétrique ?

$xR^{n+1}y = xR^n \circ Ry$
On a xRt et tR^ny. Parce que R^n et R sont symétriques on a tRx et yR^nt. Donc, on a $xR \circ R^ny \equiv xR^{n+1}y$ et $yR^n \circ Rx \equiv yR^{n+1}x$, alors R^{n+1} est symétrique.

Question 3

6/6

Transitivité :
Si $R_1 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$ *et* $R_2 = \{(1,1),(5,5),(1,5),(5,1)\}$. Donc, $R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(5,5),(1,5),(5,1)\}$. L'union des deux relations n'est pas transitive. Puisque $(2,1) \in R_1$ *et* $(1,5) \in R_2$, *mais* $(2,5) \notin R_1 \cup R_2$.

[*] IFT 1065 – Structures discrètes en informatique – Automne 2020 – Margarida Carvalho

Réflexivité :
$\forall x \in X$, $xR_1x \in R_1$ parce que R_1 est réflexif. De même $xR_2x \in R_2$ parce que R_2 est réflexif. Finalement, on a que $xR_1x \in R_1$ et $xR_2x \in R_2$. Donc, $(x, x) \in R_1 \cup R_2$.

Symétrie :
$\forall x, y \in X$, si (x, y) R_1 alors $(y, x) \in R_1$ parce que R_1 est symétrie. De même, si $(x, y) \in R_2$ alors $(y, x) \in R_2$ parce que R_2 est symétrie. Si $(x, y) \in R_1$ ou R_2, alors $(y, x) \in R_1$ ou R_2. Donc, (x, y) et $(y, x) \in R_1 \cup R_2$.

Question 4

(a)

8/

On va raisonner du point de vue de la place, c'est la place qui choisit la personne. La première place elle choisit une personne parmi huit, la deuxième place choisit une personne parmi sept et ainsi de suite. Le nombre de choix possible est $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.

Raisonnement plus mathématique : l'ordre est important, c'est le nombre de 4-permutations d'un ensemble de 8 personnes.

$$P(8, 4) = \frac{8!}{(8-4)!}$$

(b)

On prend Bob, on a le choix entre 4 places. Pour la place suivante on a le choix entre 7 personnes, puis 6 pour la place suivante et 5 pour la dernière place. On a donc $4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$ arrangements qui contiennent Bob.

(c)

On prend Bob, on a le choix entre 4 places. Puis on prend Céline, on a le choix entre 3 place. Pour la place suivante on a le choix entre 6 personnes, puis 5 pour la dernière place. On a donc $4 \times 3 \times 6 \times 5 = 360$ arrangements qui contiennent Bob.

(d)

On peut avoir ou Bob, ou Céline ou les deux. C'est tous les arrangements sauf celles qui contiennent ni Bob ni Céline.

Arrangements contenant ni Bob ni Céline : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$. C'est le même raisonnement que à la question (a).

Arrangements contenant Bob ou Céline = tous les arrangements de la question (a) − arrangements contenant ni Bob ni Céline. On a donc $1680 - 360 = 1320$ arrangements qui contiennent Bob ou Céline.

Index des commentaires

1.1 C'est vrai, mais tu ne fais que répéter la définition de la surjectivité. Ce n'est pas très formel comme preuve.

1.2 et