Devoir n^{o} 2 *

Claudéric DeRoy (p1174700) Alexandre Pachot (p0774809)

15 octobre 2020

Question 1

5/5

Montrez que $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$. Pour cela réécrivez l'expression en utilisant quantificateurs et prédicats.

$$\forall x \mid (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow [(x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in B \cap C)]$$

On suppose que $A \subseteq B$ est vrai. Par conséquent on a que si $x \in A$, x est aussi $\in B$. Montrons que si $x \in A \cap C$ alors $x \in B \cap C$.

$$\begin{aligned} \forall x \in A \cap C &\equiv x \in A \wedge x \in C \\ &\equiv x \in B \wedge x \in C \qquad x \in B \ (par\ x \ \in A \subseteq B) \\ &\equiv \forall x \in B \cap C \end{aligned}$$

On a donc, que l'implication est vraie.

□

Question 2

7/7

Montrez que l'ensemble des nombres premiers est infini à l'aide du résultat décrit pour les nombres composés.

Supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini et que sa cardinalité est k. Soit q le nombre représenté par l'ensemble $\{(p_1, 1), (p_2, 1), \ldots (p_k, 1)\}$, $q = p_1.p_2.p_3 \ldots p_k$, la multiplication de tous les nombres premiers. Considérons le nombre $r = q + 1$, $r = p_1.p_2.p_3 \ldots p_k + 1$.

*IFT 1065 – Structures discrètes en informatique – Automne 2020 – Margarida Carvalho

r n'est pas divisible par p_1, car le reste de la division de r par p_1 est 1. De même r n'est pas divisible par p_2, p_3 $\dots p_k$. Soit r est un « nouveau » nombre premier, soit c'est la multiplication de nombres premiers qui ne sont pas dans la liste $p_1, p_2 \dots p_k$. Il s'agit donc d'un ensemble infini.

$\square$

Question 3 2.1

Cas de base : 1 carré

5/7

$$\begin{aligned} \textit{nombre de coupe} &= n - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

effectivement si nous avons un carré, nous devons le diviser zéro fois.

Étape inductive :
Posons un rectangle de k morceaux tel que $1 \leq k < n$. Le rectangle k est de base k_2 et de hauteur k_1, donc

2.2
$$k = k_1 \times k_2$$

Si nous effectuons une coupure au rectangle k d'une valeur j. Nous avons deux nouveaux rectangles :

$$\begin{aligned} \textit{premier rectangle} &= k_1 \times j \\ \textit{deuxième rectangle} &= k_1 \times (k_2 - j) \end{aligned}$$

Ainsi, pour calculer le nombre de coupure à faire pour ces nouveaux rectangles :

$$\begin{aligned} &(k_1 \times j) - 1 + (k_1(k_2 \times j) - 1) + 1 \\ &= k_1 j - 1 + k_1 k_2 - k_1 j - 1 + 1 \\ &= k_1 k_2 - 1 \\ &= k - 1 \end{aligned}$$

$\square$

1/5

Question 4

Prouvez ou infirmez : $(A \times B) \cup (C \times D) = \overline{(\overline{A} - C)} \times \overline{(\overline{B} - D)}$. *Justifier votre réponse.*

Nous allons infirmer cette proposition. Pour cela, trouvons un contrexemple.

Considérons l'univers : $U = \{A, B, C, D\}$. Et les quatre ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{A\} \\ B &= \{B\} \\ C &= \{C\} \\ C &= \{D\} \end{aligned}$$

3.1

On a :

$$\begin{aligned} (A \times B) &= \{(A, B)\} \\ (C \times D) &= \{(C, D)\} \end{aligned}$$

Ce qui donne pour la partie gauche de notre égalité :

$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(A, B), (C, D)\}$$

Maintenant, considérons la partie droite de notre égalité. On a :

$$\begin{aligned} (A \times B) &= \{(A, B)\} \\ (C \times D) &= \{(C, D)\} \end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned} \overline{A} - C &= \{(A, B)\} \\ (C \times D) &= \{(C, D)\} \end{aligned}$$

3.3

3.4

On a donc :
$\overline{A} = \{B, C, D\}$
$\overline{B} = \{A, C, D\}$
$\overline{C} = \{A, B, D\}$
$\overline{D} = \{A, B, C\}$

3.5

$\square$

Index des commentaires

2.1 Prédicat?

2.2 Avec l'hypothèse faite sur les valeurs k entre 1 et n exclue, il faut donc prouver pour la valeur n, pas k. Simplement poser n=k1*k2 et le reste de la preuve aurait été complète. Puisque k1*j <n et k1*(k2-j)<n, alors on peut appliquer l'hypothèse.

3.1 Éviter de poser un ensemble qui se contient lui même comme élément. C'est un paradoxe pas très plaisant. A={a}... aurait suffit.

3.2 C'est la partie gauche et non la droite il me semble.

3.3 Où est la barre du complément?

3.4 Que c'est-il passé ici?

3.5 Et puis? Qu'est ce que cela nous donne pour infirmer l'égalité?