Devoir n° 2*

Jeanne LAFLAMME Alexandre PACHOT

16 février 2020

Table des matières

1 Question 1

2 Question 2

3 Question 3

4 Question 4

Soit le problème :

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Min } z = & 5x_1 & & & & + & 3x_4 & - & 2x_5 & \\
\text{Sujet à :} & -6x_1 & & & + x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = 6 \\
 & -3x_1 & + & x_2 & & + & 5x_4 & + & 3x_5 & = 15
\end{array}
$$

Lorsqu'on résout ce problème avec l'algorithme du simplexe. Le premier tableau est :

Variables dépendantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Termes de droite
x_3	-6		1	-2	2		6
x_2	-3	1		5	3		15
$-z$	5			3	-2	1	0

Initialement, les variables dépendantes sont x_3 et x_2, ce sont les deux variables qui n'apparaissent pas dans la fonction à minimiser. La matrice R est composé des vecteurs colonne x_3 et x_2. L'ordre est important, afin d'avoir la matrice R qui est égale à la matrice identité.

Ainsi, pour trouver B^{-1}, il suffit de regarder les valeurs de x_3 et x_2 dans le tableau optimal. On a :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une nouvelle variable qui a des coefficients de -2 et 6 dans la première et deuxième contrainte aura pour valeur dans le tableau optimal :

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

On agit de la même façon pour la valeur de z. On prend les valeurs de z des x_3 et x_2 dans le tableau optimal. Ainsi, on a :

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Il faut ajouter ce nombre au cout dans l'objectif :

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, le tableau optimal avec la nouvelle variable est :

*IFT 1575 - Modèles de recherche opérationnelle - Université de Montréal - Jean-Yves POTVIN

Variables dépendantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	Termes de droite
x_3		1/2	−1/4	3	1	7/2		6
x_2	1	1/6	−1/4	4/3		3/2		1
$-z$		1/6	3/4	7/3		1/2	1	7

5 Question 5

L'algorithme de branch-and-bound est représenté à la figure 1.

La solution optimale ① est $x = (0.2, 1, 0)$ et la valeur de la fonction à minimiser est égale à -82.80. Étant donné que x n'est pas une solution entière et que x_1 est la seule valeur non entière, nous allons appliquer une contrainte sur sur x_1. Soit $x_1 = 1$, soit $x_1 = 0$. En contraignant x à être égale à 1, on trouve une solution entière : $x = (0.2, 1, 0)$ ②. Le meilleur minimum avec une solution passe ainsi de $+\infty$ (pas de solution) à -74.00. Étant donné qu'on a trouvé une solution entière, on arrête l'exploration de cette branche pour passer à la contrainte $x_1 = 0$x. Sur cette branche, on trouve une nouvelle solution $x = (0, 1, 0.67)$ ③. x_3 étant la seule valeur non entière de la solution on va appliquer la contrainte à cette variable. Et ainsi de suite. Il y a trois raisons pour lesquelles on peut arrêter l'exploration d'une branche :

— la solution n'est pas réalisable ⑥;
— la solution est entière ②⑤⑦;
— la solution prend une valeur supérieure à une solution entière déjà trouvée ($z \geq \bar{z}$) : cela ne sert à rien d'explorer la branche plus en avant, toutes les solutions entières trouvées seront moins optimales que l'actuelle meilleure solution entière.

FIGURE 1 – Algorithme par séparation et évaluation, branch and bound