Devoir n° 2*

Jeanne Laflamme   Alexandre Pachot

20 février 2020

Question 1

Trouver des valeurs pour a, b, c et d telles que : x_7 est variable d'entrée, x_5 est variable de sortie…

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	t.d.
x_3	3		1	a		-1			1
x_2	4	1		-1		2	b		6
x_5	-1			2	1	c	4		5
$-z$	2			3		2	d	1	25

Afin que x_5 soit variable de sortie, on doit avoir $min\{\frac{5}{4}, \frac{6}{b}\} = \frac{5}{4}$ ce qui implique que $\frac{5}{4} < \frac{6}{b}$ et donc que $b < \frac{24}{5}$. On peut alors effectuer on pivot pour obtenir le tableau suivant :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	t.d.
x_3	3		1	a		-1			1
x_2	4+$\frac{b}{4}$	1		-1-$\frac{b}{2}$	-$\frac{b}{4}$	2-$\frac{bc}{4}$			6-$\frac{5b}{4}$
x_7	-$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{c}{4}$	1		$\frac{5}{4}$
$-z$	2+$\frac{d}{4}$			3-$\frac{d}{2}$	-$\frac{d}{4}$	2-$\frac{cd}{4}$		1	25-$\frac{5d}{4}$

…et après une itération du simplexe on se retrouve dans une situation où on a :

(a) Une solution optimale unique

Afin que la solution soit optimale, tous les coût doivent être positifs. Les variables a, b, c, d doivent donc respecter les contraintes suivantes :

(1) $2 + \frac{d}{4} > 0 \Rightarrow d > -8$

(2) $3 - \frac{d}{2} > 0 \Rightarrow d < 6$

(3) $-\frac{d}{4} > 0 \Rightarrow d < 0$

(4) $2 - \frac{cd}{4} > 0 \Rightarrow cd < 8$

On peut donc choisir par exemple $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$ et $d = -4$ pour obtenir le tableau suivant qui est optimale :

*IFT 1575 - Modèles de recherche opérationnelle - Université de Montréal - Hiver 2020 - Jean-Yves Potvin

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	t.d.
x_3	3		1	1		-1			1
x_2	5	1		-3	-1				1
x_7	-$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{5}{4}$
$-z$	1			5	1	4		1	30

(b) Une solution optimale qui n'est pas unique

Pour avoir une solution optimale qui n'est pas unique, on doit avoir une des variables indépendantes qui a un coût nul. En fixant par exemple $\bar{c}_1$ à zéro, on obtient la contrainte :

(5) $2 + \frac{d}{4} = 0 \Rightarrow d = -8$

En plus des contraintes (2), (3), (4). On peut alors choisir $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$ et $d = -8$ pour obtenir le tableau suivant qui est optimale mais non-unique car on pourrait effectuer un pivot avec x_1 comme variable d'entrée pour obtenir une autre solution :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	t.d.
x_3	3		1	1		-1			1
x_2	5	1		-3	-1				1
x_7	-$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{5}{4}$
$-z$				7	2	6		1	35

(c) Un problème non borné inférieurement

Afin que le problème soit non borné inférieurement, on doit avoir une variable dont le coût est négatif et dont les coefficients dans toutes les contraintes sont négatifs. Dans ce cas, on pourra augmenter cette variable indéfiniment et donc faire diminuer l'objectif autant qu'on veut. Si on choisi par exemple la variable x_6, les contraintes suivantes sur a,b,c et d doivent être satisfaites :

(6) $2 - \frac{bc}{4} \geq 0 \Rightarrow bc \geq 8$

(7) $\frac{c}{4} \geq 0 \Rightarrow c \leq 0$

(8) $2 - \frac{cd}{4} < 0 \Rightarrow cd > 8$

On peut alors choisir $a = 1$, $b = -4$, $c = -2$ et $d = -8$ pour obtenir le tableau suivant :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	t.d.
x_3	3		1	1		-1			1
x_2	3	1		2	1				1
x_7	-$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-$\frac{1}{2}$	1		$\frac{5}{4}$
$-z$				7	2	-2		1	35

Question 2

Démontrer qu'il ne peut exister de solution de base réalisable où x_{1j} et x_{2j} sont toutes les deux variables de base, quel que soit $j = 1, \ldots, n$.

On a le tableau initial suivant :

v.d.	x_{11}	x_{21}	$\cdots$	x_{1j}	x_{2j}	$\cdots$	x_{1n}	x_{2n}	$-z$	t.d.
	a_{11}	-a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	-a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	-a_{1n}		b_1
	a_{21}	-a_{21}	$\cdots$	a_{2j}	-a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}	-a_{2n}		b_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	a_{m1}	-a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	-a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	-a_{mn}		b_m
-z	c_1	-c_1	$\cdots$	c_j	-c_j	$\cdots$	c_n	-c_n	1	

Afin de rendre x_{1j} variable indépendante, on doit avoir un 1 vis-à-vis de x_{1j} dans une des contraintes. On peut supposer sans perte de généralité qu'il s'agit de la première contrainte. On doit alors diviser la première ligne du tableau par a_{1j} :

v.d.	x_{11}	x_{21}	$\cdots$	x_{1j}	x_{2j}	$\cdots$	x_{1n}	x_{2n}	$-z$	t.d.
	$\frac{a_{11}}{a_{1j}}$	-$\frac{a_{11}}{a_{1j}}$	$\cdots$	1	-1	$\cdots$	$\frac{a_{1n}}{a_{1j}}$	-$\frac{a_{1n}}{a_{1j}}$		$\frac{b_1}{a_{1j}}$
	a_{21}	-a_{21}	$\cdots$	a_{2j}	-a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}	-a_{2n}		b_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	a_{m1}	-a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	-a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	-a_{mn}		b_m
-z	c_1	-c_1	$\cdots$	c_j	-c_j	$\cdots$	c_n	-c_n	1	

On peut maintenant effectuer un pivot pour obtenir :

v.d.	x_{11}	x_{21}	$\cdots$	x_{1j}	x_{2j}	$\cdots$	x_{1n}	x_{2n}	$-z$	t.d.
x_{1j}	$\frac{a_{11}}{a_{1j}}$	-$\frac{a_{11}}{a_{1j}}$	$\cdots$	1	-1	$\cdots$	$\frac{a_{1n}}{a_{1j}}$	-$\frac{a_{1n}}{a_{1j}}$		$\frac{b_1}{a_{1j}}$
	$\bar{a}_{21}$	-$\bar{a}_{21}$	$\cdots$			$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$	-$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$\bar{a}_{m1}$	-$\bar{a}_{m1}$	$\cdots$			$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	-$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
-z	$\bar{c}_1$	-$\bar{c}_1$	$\cdots$	$\bar{c}_j$	-$\bar{c}_j$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	-$\bar{c}_1$	1	$\bar{z}$

Dans ce tableau, tous les coefficients de x_{2j} sont zéros sauf dans la première ligne et donc il est impossible de faire entrer x_{2j} dans la base sans faire sortir x_{ij}

Ceci démontre qu'il est impossible d'avoir x_{ij} et x_{2j} dans la base en même temps.

Question 3

(a) Produire directement le tableau optimal à partir des informations fournies

La matrice des coefficients est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors obtenir les coefficient dans le tableau final en calculant $B^{-1}A$:

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi trouver les termes de droite en calculant $B^{-1}b$:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{25}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

Il reste à calculer $\bar{c}_3$ et z. Pour ce faire, on a besoin de C_B, on regardant $B^{-1}A$, on voit que :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Et donc C_B est composé des coûts des variables x_2,x_1 et x_4 :

$$C_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec, C_B on peut calculer π^T :

$$\pi^T = C_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$\bar{c}_3 = c_3 - \pi^T a_{.3} = -3 - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 + 5 = 2$$

Finalement, on peut calculer z :

$$z = -\pi^T b = -\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 10$$

On obtient alors le tableau optimal suivant :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d.
x_2		1	-$\frac{1}{3}$			$\frac{10}{3}$
x_1	1		$\frac{7}{3}$			$\frac{25}{3}$
x_4			-2	1		5
$-z$			2		1	10

(b) La base optimale demeure-t-elle optimale si le coût de la variable x_3 dans la formulation initiale du problème est égal à -5 ?

Changer le coût de x_3 affecte seulement $\bar{c}_3$. Le nouvelle valeure est :

$$\bar{c}_3 = c_3 - \pi^T a_{.3} = -5 - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 + 5 = 0$$

Donc comme $\bar{c}_3 \geq 0$, la base demeure optimale. Par contre, la solution n'est plus unique car on pourrait effectuer un pivot en utilisant x_3 comme variable d'entrée sans changer la valeure de l'objectif.

(c) La base optimale demeure-t-elle optimale si les termes de droite dans la formulation initiale du problème sont égaux à 5, 10 et 10 ?

Modifier b n'affecte pas les coefficients ni les coût. Seulement les termes de droites doivent être recalculé :

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comme $B^{-1}b \geq 0$, la solution est réalisable et donc la base demeure optimale.

(d) Appliquer une série de transformations linéaires au tableau correspondant à la formulation initiale du problème afin d'obtenir une forme appropriée pour l'algorithme du simplexe

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_2	1	2	3			15
x_1	2	1	5			20
x_4	1	2	1	1		20
$-z$	-1	-2	-3	1	1	

$$L_1 \rightarrow \frac{L_1}{2}$$

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$			$\frac{15}{2}$
x_1	2	1	5			20
x_4	1	2	1	1		20
$-z$	-1	-2	-3	1	1	

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1$$

$$L_4 \rightarrow L_4 + 2L_1$$

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$			$\frac{15}{2}$
x_1	$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$			$\frac{25}{2}$
x_4			-2	1		5
$-z$				1	1	15

$$L_2 \rightarrow \frac{2}{3} L_2$$

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$			$\frac{15}{2}$
x_1	1		$\frac{7}{3}$			$\frac{25}{3}$
x_4			-2	1		5
$-z$				1	1	15

$L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2$
$L_4 \to L_4 - L_3$

v.d	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	t.d
x_2		1	$\frac{1}{3}$			$\frac{10}{3}$
x_1	1		$\frac{7}{3}$			$\frac{25}{3}$
x_4			-2	1		5
$-z$			2		1	10

Question 4

Soit le problème :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\textit{Min } z = & 5x_1 & & & & & + & 3x_4 & - & 2x_5 & & \\
\textit{Sujet à :} & -6x_1 & & & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\
 & -3x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & + & 3x_5 & = & 15
\end{array}$$

Expliquer comment on peut augmenter le tableau optimal afin d'y inclure la variable x_6 sans qu'il soit nécessaire d'appliquer à nouveau l'algorithme du simplexe.

Lorsqu'on résout ce problème avec l'algorithme du simplexe. Le premier tableau est :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	t.d.
x_3	-6		1	-2	2		6
x_2	-3	1		5	3		15
$-z$	5			3	-2	1	0

Dans le tableau initial, les valeurs des colonnes x_3 et x_2 sont identiques à celles de la matrice identité, ainsi les valeurs de ces deux colonnes dans le tableau optimal sont les valeurs de B^{-1}. On a :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une nouvelle variable qui a des coefficients de -2 et 6 dans la première et deuxième contrainte aura pour valeur dans le tableau optimal :

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

On agit de la même façon pour la valeur de z. On prend les valeurs de z des x_3 et x_2 dans le tableau optimal. Ainsi, on a :

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Il faut ajouter ce nombre au cout dans l'objectif :

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Le tableau optimal avec la nouvelle variable est :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	t.d.
x_5		$1/2$	$-1/4$	3	1	$7/2$		6
x_1	1	$1/6$	$-1/4$	$4/3$		$3/2$		1
$-z$		$1/6$	$3/4$	$7/3$		$1/2$	1	7

En supposant que la variable x_6 représente le niveau d'une certaine activité, que pouvez-vous conclure à propos de cette activité ?

La valeur de $\bar{c}_6$ est de $1/2$, c'est une valeur positive. Si c'était une valeur négative, modifier les variables dépendantes, en faire entrer une pour en faire une autre, ce qui aurait changé la solution. Ce n'est pas le cas. Cette nouvelle activité ne change en rien la solution optimale.

Question 5

Résoudre le problème avec l'algorithme de branch-and-bound en posant $x_i = 1$ pour la branche gauche et $x_i = 0$ pour la branche droite.

L'algorithme de branch-and-bound est représenté à la figure 1.

La solution optimale ① est $x = (0.2, 1, 0)$ et la valeur de la fonction à minimiser est égale à -82.80. Étant donné que x n'est pas une solution entière et que x_1 est la seule valeur non entière, nous allons appliquer une contrainte sur sur x_1. Soit $x_1 = 1$, soit $x_1 = 0$. En contraignant x à être égale à 1, on trouve une solution entière : $x = (0.2, 1, 0)$ ②. Le meilleur minimum avec une solution passe ainsi de $+\infty$ (pas de solution) à -74.00. Étant donné qu'on a trouvé une solution entière, on arrête l'exploration de cette branche pour passer à la contrainte $x_1 = 0$x. Sur cette branche, on trouve une nouvelle solution $x = (0, 1, 0.67)$ ③. x_3 étant la seule valeur non entière de la solution on va appliquer la contrainte à cette variable. Et ainsi de suite. Il y a trois raisons pour lesquelles on peut arrêter l'exploration d'une branche :

- la solution n'est pas réalisable ⑥;
- la solution est entière ② ⑤ ⑦;
- la solution prend une valeur supérieure à une solution entière déjà trouvée ($z \geq \bar{z}$) : cela ne sert à rien d'explorer la branche plus en avant, toutes les solutions entières trouvées seront moins optimales que l'actuelle meilleure solution entière.

Figure 1 – Algorithme par séparation et évaluation, branch and bound