Université de Montréal - Département de mathématiques et de statistique

MAT1720 : PROBABILITÉS

NOTES DE COURS

CHAPITRE 1 : ANALYSE COMBINATOIRE

Professeur : M. Ismaïla NDIAYE

Chapitre 1

ANALYSE COMBINATOIRE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions quelques techmiques permettant de déterminer le nombre de résultats possibles d'une expérience. Par exemple :

1) De combien de façons différentes peut-on disposer 5 personnes en ligne ?
2) On dispose d'un groupe formé de 7 hommes et 5 femmes. Si l'expérience consiste à former un comité composé de 2 femmes et 3 hommes, de combien de façons peut-on former des comités ?

On appelle **analyse combinatoire** la théorie mathématique du dénombrement.

1.2 Principe fondamental de dénombrement (Principe de multuplication)

Exemple 1.2.1 Dans une classe de 10 filles et 5 garçons, combien de groupes différents composés d'une fille et d'un garçon peut-on former ?
Solution :

- Si une première expérience consiste à choisir une fille : il y aura 10 possibilités pour ce choix
- Pour chaque fille choisie, la seconde expérience consiste à choisir un garçon : il y aura 5 possibilités pour ce choix.

Au total, il y aura $10 \cdot 5 = 50$ possibilités pour former les groupes.

Théorème 1.2.2 (Version généralisée du principe de multiplication)
Si nous devons réaliser r expériences à la suite l'une de l'autre et si :

- la première comporte n_1 possibilités
- la deuxième comporte n_2 possibilités
- $\cdots$
- la r-ième comporte n_r possibilités

alors on aura au total $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$ possibilités.

Exemple 1.2.3 Combien de plaques d'immatriculation d'auto de 7 caractères peut-on former si les 3 premiers caractères sont des lettres et les 4 derniers des chiffres ?
Solution :

Exemple 1.2.4 Reprendre l'exemple précédent si l'on exclut que les lettres et les chiffres se répètent.
Solution :

Exemple 1.2.5 Combien de codes alphanumériques (formés de chiffres et de lettres) de longueur 3 peut-on former si les répétitions ne sont pas permises ?
Solution :

1.3 Permutations

1.3.1 Permutations d'objets discernables

Exemple 1.3.1 De combien de façons différentes peut-on disposer 5 personnes en ligne ?
Réponse : Il y a 5 possibilités pour placer la première personne, 4 possibilités pour placer la 2e personne, 3 possibilités pour placer la 3e personne, 2 possibilités pour placer la 4e personne et 1 possibilité pour placer la 5e personne. Donc, on aura au total $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ arrangements ordonnés.

Remarque : chaque arrangement est appelé *permutation*.

Définition 1.3.2 On appelle **permutation** un arrangement de n objets considérés en même temps et pris dans un ordre donné.

Notation : le produit des entiers de 1 à n est noté par l'expression $n!$ (Lire "factorielle n").

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

avec la convention : $0! = 1$

Théorème 1.3.3 Le nombre de permutaitons de n objets discernables est $n!$.

Exemple 1.3.4 De combien de façons différentes peut-on disposer 5 personnes en ligne ?
Réponse : 5 !

Exemple 1.3.5 M. Jones va disposer 11 livres différents sur un rayon de sa bibliothèque. Cinq d'entre eux sont des livres de mathématiques, quatre de chimie et deux de physique.

1. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
   Réponse :
2. Jones aimerait ranger ses livres de façon que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
   Réponse :

1.3.2 Permutations d'objets partiellement indiscernables

Exemple 1.3.6 Combien d'arrangements différents peut-on faire avec les lettres du mot $PAPA$?
Réponse :

- En numérotant les lettres identiques, il existe 4 ! permutations du mot $P_1A_1P_2A_2$
- Si nous permutatons les lettres P entre elles et les lettre A entre elles, alors nous obtenons $2! \cdot 2! = 4$ anagrammes identiques $(P_1A_1P_2A_2, P_2A_1P_1A_2, P_1A_2P_2A_1, P_2A_2P_1A_1)$ qui de la forme $PAPA$ sans la numérotation.
- Par conséquent, il y aura $\frac{4!}{2!2!} = 6$ anagrammes du mot $PAPA$ (qui sont : $PPAA, PAPA, PAAP, APPA, APAP, AAPP$).

Théorème 1.3.7 Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont indiscernables entre eux, n_2 sont indiscernables entre eux, ..., n_r sont indiscernables entre eux est donné par :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Exemple 1.3.8 Trouvez le nombre d'anagrammes du mot $PATATAS$.

Réponse :

Exemple 1.3.9 Mme Jones va disposer 11 livres sur un rayon de sa bibliothèque. Cinq d'entre eux sont des livres de mathématiques, quatre de chimie et deux de physique. Les livres traitant du même sujet sont indiscernables.

1. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

   Réponse :

2. Combien y a-t-il de dispositions possibles si les livres de mathématiques doivent rester groupés ?
   Réponse :

3. Combien y a-t-il de dispositions possibles si les livres traitant du même sujet doivent rester groupés ?
   Réponse :

Remarque : une permutation de n objets est un arrangement de ces objets considérés tous en même temps. Dans certains cas, on peut faire un arrangement de r objets choisis parmi n, avec ou sans répétition. De combien de façons différentes peut-on arranger r objets parmi n si :

1) les répétitions ne sont pas permises ?
   Réponse :

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)\cdots\big(n-(r-1)\big) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots\big(n-(r-1)\big)\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} := A_r^n \end{aligned}$$

2) les répétitions sont permises ?
   Réponse : $n\cdot n\cdots n = n^r$

Exemple 1.3.10 Combien de codes alphanumériques de longueur 3 peut-on former si :

1) les répétitions ne sont pas permises ?

   Réponse :

2) les répétitions sont permises ?

   Réponse :

1.4 Combinaisons

On s'intéresse à déterminer le nombre de groupes de r objets qu'il est possible de former sans répétition à partir d'un total de n objets distincts.

- Pour le choix du premier objet, il y a n possibilités
- Pour le choix du deuxième objet, il y a $n-1$ possibilités
- Pour le choix du troisième objet, il y a $n-2$ possibilités
- $\vdots$
- Pour le choix du r-ième objet, il y a $n-(r-1)$ ou $n-r+1$ possibilités

Le nombre total de possibilités, en tenant compte de l'ordre, est : $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$. Comme chaque groupe de r objets apparaît dans $r!$ ordres possibles dans ce dénombrement, le nombre de groupes de r objets pris dans un ensemble de n sera :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

On transforme cette expression pour utiliser la notation factorielle, on l'écrit sous la forme :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

On définit l'expression $\binom{n}{r}$, pour $r \leq n$, par :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Cas particuliers : $\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{1}=n \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{n-1}=n$

Définition 1.4.1 Toute disposition de r objets choisis sans répétition dans un ensemble qui en contient n est appelé **combinaison** de r objets pris parmi n.

Théorème 1.4.2 $\binom{n}{r}$ est le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n.

NB : $\binom{n}{r}$ est le nombre de façons de choisir r objets sans répétition dans un ensemble qui en contient n.

Exemple 1.4.3

1. Combien y a-t-il de combinaisons différentes à la loterie 6/49 ?

   Réponse :

2. À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ?

   Réponse :

3. Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen.
   a) De combien de manières peut-il les choisir ?
   b) Même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questoins ?

   Réponse :

   a)

   b)

1.5 Théorème du binôme

On rappelle les identités remarquables suivantes :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad , \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Le théorème du binôme donne une formule générale pour calculer : $(x+y)^n, n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.5.1 (Théorème du binôme)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Remarque : les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux** en raison de leur rôle dans le théorème du binôme.

Pour démontrer le théorème du binôme, nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 1.5.2

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Eneffet : on peut démontrer analytiquement ce résultat avec un argument combinatoire.

- Dans un groupe de n objets, on en fixe un, appelons-le objet 1. On distingue les cas suivants :
  - Il y a $\binom{n-1}{r-1}$ combinaisons de taille r qui contiennent l'objet 1 ;
  - Il y a $\binom{n-1}{r}$ combinaisons de taille r qui ne contiennent pas l'objet 1.
- Comme il y a au total $\binom{n}{r}$ combinaisons de taille r regroupant les deux cas précédents, la formule est vérifiée.

Démonstration de la formule du binôme (Par induction)

- Pour $n = 1$, la formule du binôme se réduit à :

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = x + y$$

- Admettons que la formule est vérifiée pour $n-1$ (hypothèse d'induction), c'est-à-dire :

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

- Montrons que la formule est vraie pour n en utilisant l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \end{aligned}$$

En posant (changement d'indice) $i = k+1$ dans la première somme et $i = k$ dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i} + y^n \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] x^i y^{n-i} + y^n \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} + y^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \end{aligned}$$

Exemple 1.5.3 Par la formule du binôme, on montre les identités remarquables :

1)

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k y^{2-k} = \binom{2}{0} x^0 y^{2-0} + \binom{2}{1} x^1 y^{2-1} + \binom{2}{2} x^2 y^{2-2} = y^2 + 2xy + x^2$$

2)

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k y^{3-k} \\ &= \binom{3}{0} x^0 y^{3-0} + \binom{3}{1} x^1 y^{3-1} + \binom{3}{2} x^2 y^{3-2} + \binom{3}{3} x^3 y^{3-3} \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + x^3 \end{aligned}$$

Exemple 1.5.4

1. Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble à 3 éléments ? Répondez à la question en donnant la liste des sous-ensembles de l'ensemble $A = \{a, b, c\}$.

   Réponse :

2. Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble à 3 éléments ? Calculer en utilisant un argument mathématique.

   Réponse :

3. Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments ?

   Réponse :

1.6 Coefficients multinomiaux

On veut généraliser le théorème du binôme à plus de deux variables. On veut trouver une formule pour : $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$.

• Soit $n_1, n_2, \ldots, n_r$ des entiers positifs tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. On définit l'expression :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Remarque : cette expression représente le nombre de répartitions possibles de n objets en r groupes distincts de tailles respectives $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Exemple 1.6.1

1. Calculez :

$$\binom{5}{2, 1, 2} = \ldots$$

2. Le poste de police d'une petite ville compte 10 agents. Si l'organisation de ce poste est d'avoir 5 agents en patrouille, 2 au poste travaillant activement et les 3 autres au poste également mais de réserve, à combien de répartitions de ces agents en trois groupes définis peut-on procéder ?

   Réponse : $\binom{10}{5, 2, 3} = \frac{10!}{5!2!3!} = 2\,520$

3. Un homme veut offrir un total de 7 cadeaux à ses 3 enfants. L'aîné en recevra 3 et les autres 2. De combien de manières peut-il procéder ?

   Réponse :

Théorème 1.6.2

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

NB : les coefficients $\displaystyle\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ sont appelés **coefficients multinomiaux**.

Exemple 1.6.3

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \sum_{\substack{(n_1, n_2, n_3): \\ n_1 + n_2 + n_3 = 2}} \binom{2}{n_1, n_2, n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$$

- Déterminez les triplets (n_1, n_2, n_3) vérifiant $n_1 + n_2 + n_3 = 2$:

- On a alors :

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \ldots$$

Remarque : le théorème ne donne pas le nombre de termes dans la somme :

$$\sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}}$$

c'est-à-dire le nombre de solutions de l'équation $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.
La réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.6.4

Il y a $\binom{n+r-1}{r-1}$ vecteurs $(n_1, n_2, ..., n_r)$ à composantes entières et non négatives satisfaisant à la relation $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

NB : dans notre dernier exemple, $n = 2,\ r = 3$, il y a :

$$\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6 \text{ termes dans la somme.}$$

Exemple 1.6.5 Si 8 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ?