MAT1720 – INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS – H20
TRAVAIL FINAL

MON NOM

Consignes pédagogiques

- Vous devez rendre votre travail **au format PDF, par StudiUM.**
  Je n'accepterai aucun travail rendu par une autre méthode ou dans un autre format.
- Vous devez rendre votre travail **au plus tard le mardi 21 avril à 23h 59.**
  Ça vous donne exactement 4 semaines. Au-delà de cette date, vous serez pénalisé.e.s de 15% par jour de retard.
- **Votre travail doit être typographié. Aucun travail manuscrit ne sera accepté**.
  Des ressources seront disponibles en ligne pour vous aider à maîtriser le logiciel de typographie mathématique de votre choix (Microsoft Word, LibreOffice Writer, LaTeX). Il y a définitivement une courbe d'apprentissage avec ces outils (spécialement avec LaTeX). Toutefois, le temps consacré à cet apprentissage ne sera pas perdu. LaTeX est le standard en rédaction scientifique, mais peu importe l'outil, il est impératif que vous appreniez à typographier des mathématiques adéquatement.
- **Vous devez rendre un travail par personne.**
  Vous pouvez communiquer entre vous et vous entraider, bien sûr, mais vous devez remettre chacun.e votre propre travail.

Date: 26 mars 2020.

1. Le jeu *Clue*

Problème 1. On n'a pas encore distribué les cartes.

(a) Supposons que Axel devait deviner le crime maintenant. Quelle serait la probabilité que son choix soit le bon ?

Solution.

(b) Supposons que Axel devra deviner le crime immédiatement après avoir vu ses trois cartes. Est-ce que cela augmentera sa probabilité de deviner le crime correctement ? Expliquer pourquoi ou pourquoi pas.

Solution.

(c) Donner la probabilité qu'Axel devinera le crime correctement après avoir vu ses cartes.

Solution.

Problème 2. Le crime a été choisi au hasard, on a brassé les cartes, on les a distribué.

(a) Quelle est la probabilité qu'Axel ait Miss Scarlett dans son jeu ?

Solution.

(b) Quelle est la probabilité que Miss Scarlett soit la coupable sachant qu'Axel n'a pas Miss Scarlett dans son jeu ?

Solution.

2. L'espérance d'une variable aléatoire positive discrète

Problème 3. Soit X une variable aléatoire discrète positive de support $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ (on assume que $0 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \cdots$). On suppose également que $\lim_{x\to\infty} x\overline{F}(x) = 0$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in [v_k, v_{k+1})$,

$$\overline{F}(x) = \overline{F}(v_k),$$

et que pour tout $x \in [0, v_1)$, $\overline{F}(x) = 1$.

Solution.

(b) Déduire que

$$\int_0^{v_1} \overline{F}(x)dx = v_1, \qquad \int_{v_k}^{v_{k+1}} \overline{F}(x)dx = \overline{F}(v_k)(v_{k+1} - v_k),$$

et finalement

$$\int_0^{\infty} \overline{F}(x)dx = v_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{F}(v_k)(v_{k+1} - v_k).$$

Solution.

(c) Si $p_X(x)$ est la fonction de masse probabilités de X, montrer que

$$p_X(v_{k+1}) = \overline{F}(v_k) - \overline{F}(v_{k+1}).$$

Solution.

(d) En utilisant le lemme de sommation d'Abel, montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \overline{F}(x)dx.$$

Solution.

(e) Montrer que si $v_k = (k-1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire si X prend des valeurs entières non-négatives), alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq k\}.$$

Solution.

3. Distributions conditionnelles

Problème 4. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètre p.

(a) En procédant par calcul, montrer que

$$\mathbb{P}\{X+Y=k\} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

Solution.

(b) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=k$ est une loi équiprobable sur $\{1,2,3,\ldots,k-1\}$.

Solution.

Problème 5. Soient $X_1, X_2, X_3, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de paramètres $\lambda > 0$.

On définit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Trouver la densité conditionnelle de X_1 sachant S_n.

Solution.

(b) Montrer que sachant $S_n = t$, X_1/t suit une loi Beta $(1, n-1)$.

Solution.

(c) En remarquant que la densité conditionnelle de X_1/t sachant que $S_n = t$ ne dépend pas de t, déduire que X_1/S_n suit une loi Beta$(1, n-1)$.

Solution.

(d) Utiliser un argument d'interchangeabilité pour justifier que X_i/S_n suit une loi Beta$(1, n-1)$ pour tout i de 1 à n.

Solution.

4. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Problème 6. Supposons qu'on joue plusieurs parties consécutives et que l'enjeu remporté à la $i$ème partie est X_i – les X_i sont indépendants et identiquement distribués comme 2^{Y_i-1}, où les Y_i sont une suite de variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètre $p = 1/2$.

On va noter $G_n = \sum_{i=1}^n X_i - nC$ le gain net après n parties.

Supposons que h soit l'objectif à atteindre – c'est le montant d'argent qu'on veut gagner, net.

(a) Pour un certain paramètre K entier positif (à fixer plus tard), on se définit une nouvelle suite de variables aléatoires :

$$T_n = \min\{X_n, 2^K\}$$

Solution.

(b) Expliquer pourquoi $T_n \leq X_n$.

Solution.

(c) Trouver $\mathbb{P}\left\{T_n = 2^k\right\}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, K$.

Solution.

(d) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[T_n\right] = \frac{K+2}{2}.$$

Solution.

(e) On fixe maintenant $K = 2C$. On définit $\mu = C + 1 = \mathbb{E}\left[T_1\right]$, et

$$H_n = \sum_{i=1}^n T_i - nC.$$

Montrer que $\mathbb{E}\left[H_n\right] = n$.

Solution.

(f) Utiliser la loi des grands nombres faible pour montrer que $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{H_n > h\right\} = 1$$

Solution.

(g) Déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{G_n > h\right\} = 1$$

pour tout n.

Solution.

5. Le processus branchant

Problème 7. Soit ψ la fonction génératrice des probabilités de la distribution marginale des $X_{n,i}$. Soit également ψ_n la fonction génératrice des probabilités de Z_n.

(a) Montrer que
$$\mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}} \;\middle|\; Z_n\right] = \psi(s)^{Z_n}.$$

Solution.

(b) Déduire que
$$\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi. \qquad \text{(i.e. } \psi_{n+1}(s) = \psi_n(\psi(s))\text{)}$$

Solution.

(c) Montrer que $\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n$, où $\mu = \psi'(1)$.

Solution.

(d) On suppose que $0 < \mu < 1$. Prouver que Z_n converge vers 0 presque sûrement. *Indice :* inspirez vous de la preuve de la loi forte des grands nombres.

Solution.

(e) Étant donné que les Z_n sont des variables aléatoires entières positives, comment interprétez-vous ce résultat ?

Solution.