MAT1720 – INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS – HIVER 2020
EXAMEN INTRA

Enseignant : Thomas Davignon
Date : lundi 17 février 2020
Heure : 13h 30
Salles : B-3240, B-3250, Pavillon Jean-Brillant.

Durée : *1h 50*

Consignes : *Documentation/calculatrice non-permise.*

Répondre dans les cahiers prévus à cet effet.
Écrire proprement. Justifier ses démarches.
Identifiez clairement tous les cahiers utilisés.

Le questionnaire est imprimé recto-verso.
Le questionnaire ne sera pas corrigé.

Rappel de formules

Avec la convention que $0^0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \qquad r \neq 1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}, \qquad |r| < 1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n.$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Question 1 (6 points)**.** *Vrai ou faux. Répondez dans le cahier d'examen. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.*

1. *(1 point)* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} n^{-k}\binom{n}{k} = e$.

   VRAI :
   $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} n^{-k}\binom{n}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}1^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

2. *(1 point)* Soient E et F sont deux événements tels que $\mathbb{P}\{E\cap F\} = 0$. Alors, $\mathbb{P}\{E\cup F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\}$.

   VRAI :
   $$\mathbb{P}\{E\cup F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{E\cap F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\}$$

3. *(1 point)* Soient A, B deux événements avec $0 < \mathbb{P}\{A\}, \mathbb{P}\{B\} < 1$, et $\mathbb{P}\{A \mid B\} < \mathbb{P}\{A \mid B^c\}$. Alors, $\mathbb{P}\{A \mid B\} < \mathbb{P}\{A\}$.

   VRAI :
   $$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{A \mid B\}\mathbb{P}\{B\} + \mathbb{P}\{A \mid B^c\}\mathbb{P}\{B^c\} > \mathbb{P}\{A \mid B\}(\mathbb{P}\{B\} + \mathbb{P}\{B^c\}) = \mathbb{P}\{A \mid B\}.$$

4. *(1 point)* On suppose que X est une variable aléatoire quelconque avec fonction de répartition F. Alors on a toujours $\mathbb{P}\left\{X^2 \le x\right\} = F(\sqrt{x})$.

   FAUX : en général,
   $$\mathbb{P}\left\{X^2 \le x\right\} = \mathbb{P}\left\{-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\right\} = F(\sqrt{x}) - \lim_{y\to(-\sqrt{x})^-} F(y) \ne F(\sqrt{x}).$$

5. *(1 point)* Si X est une variable aléatoire de loi binomiale (n, p), $n - X$ est une variable aléatoire de loi binomiale $(n, 1-p)$.

   VRAI : en effet, si X est le nombre de succès en n tentatives, $n - X$ est le nombre d'échecs en n tentatives. Mais si on voit les échecs comme des succès avec probabilité $1-p$, alors $n - X$ est une variable de loi binomiale avec paramètres $n, 1-p$.

6. *(1 point)* Si X est une variable aléatoire géométrique, et que $m, n \in \mathbb{N}$, les événements $\{X > m + n\}$ et $\{X > m\}$ sont indépendants.

   FAUX : La proporiété d'absence de mémoire dit que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{P}\{X > m+n \mid X > m\} = \mathbb{P}\{X > n\}.$$
   Si les événements $\{X > m+n\}$ et $\{X > m\}$ étaient indépendants, on aurait plutôt
   $$\mathbb{P}\{X > m+n \mid X > m\} = \mathbb{P}\{X > m+n\}.$$

Question 2 (6 points)**.** Axel, Bénédicte et Claude vont voire *Cats* au cinéma Beaubien. La salle compte deux sections de 4 rangées de 5 sièges de part et d'autre de l'allée centrale.
Au moment d'acheter leurs billets, il ne reste que 3 places disponibles

(a) *(1 point)* Combien y a-t-il de façons pour 37 personnes de s'asseoir dans une salle de 40 places ?

Solution : Il choisir 37 sièges parmi 40 – donc $\binom{40}{37} = 40 \times 39 \times 38/3! = 9880$.

(b) *(2 points)* Soit $C = \{$Il reste trois places ensemble dans la même rangée.$\}$. Trouver $\mathbb{P}\{C\}$.

Solution : Il y a 8 rangées possibles. Pour chaque rangée, il y a 3 façons de choisir 3 places contigües. donc 24 façons de laisser 3 sièges vides côte-à-côte.

Donc, la probabilité de laisser trois sièges vides côte à côte est de

$$\mathbb{P}\{C\} = \frac{24}{\binom{40}{37}} = \frac{24}{9880} = \frac{3}{1235}.$$

(c) *(1 point)* Soit $B = \{$Axel, Bénédicte ou Claude est assis au bout d'une rangée.$\}$. Trouver $\mathbb{P}\{B \mid C\}$.

Solution :

Il y a 24 façons de choisir trois sièges contigus dans une même rangée, et parmi elles 16 façons de les choisir de telle sorte qu'un des trois sièges soit à l'un des bouts de la rangée. Donc,

$$\mathbb{P}\{B \mid C\} = \frac{|B \cap C|}{|C|} = \frac{16}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

(d) *(2 points)* On assume que Axel, Bénédicte et Claude s'assoient équiprobablement dans n'importe quel siège libre. Soit $A = \{$Axel n'est pas assis au bout d'une rangée.$\}$. Trouver $\mathbb{P}\{A \mid C\}$.

Solution :

On a que

$$\mathbb{P}\{A \mid C\} = \mathbb{P}\{A \mid B \cap C\}\,\mathbb{P}\{B \mid C\} + \mathbb{P}\{A \mid B^c \cap C\}\,\mathbb{P}\{B^c \mid C\}.$$

Bien sûr, $\mathbb{P}\{A \mid B \cap C\} = 2/3$ – c'est la probabilité que Axel n'est pas au bout sachant qu'il y a quelqu'un des trois qui est au bout.

On a également $\mathbb{P}\{A \mid B^c \cap C\} = 1$.

Finalement, $\mathbb{P}\{B^c \mid C\} = 1 - \mathbb{P}\{B \mid C\} = 1/3$.

Donc, on a que

$$\mathbb{P}\{A \mid C\} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

Question 3 (6 points)**.** Monica, Chandler et Joey vont visiter une maison en banlieue de New-York. On définit les événements suivants :
— $M = \{\text{Monica aime la maison.}\}$
— $C = \{\text{Chandler aime la maison.}\}$
— $J = \{\text{Joey aime la maison.}\}$
La probabilité que tout le monde aime la maison est de 0. La probabilité que personne aime la maison est de 1/2. Pour chaque personne, la probabilité qu'il ou elle aime la maison est de 1/4.

(a) *(2 points)* Écrire l'événement {Au moins une personne aime la maison} en fonction des événemenst M, C et J.

Solution : L'événement {Au moins une personne aime la maison} est donné par $A \cup B \cup C$, et
$$\mathbb{P}\{A \cup B \cup C\} = 1 - \mathbb{P}\{A^c \cap B^c \cap C^c\} = 1/2.$$

(b) *(4 points)* Pendant la visite, Joey boude et il ne parle pas à Monica ni à Chandler – donc J est indépendant de C et de M. Calculer $\mathbb{P}\{M \cap C\}$ et déduire si M et C sont indépendants. Si non, est-ce que Monica et Chandler ont plus tendance à s'entendre que Monica et Joey ?

Solution : Par le principe d'inclusion-exclusion,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M \cup C \cup J\} = \mathbb{P}\{M\} + \mathbb{P}\{C\} + \mathbb{P}\{J\} \\ - \mathbb{P}\{M \cap C\} - \mathbb{P}\{M \cap J\} - \mathbb{P}\{C \cap J\} \\ + \mathbb{P}\{M \cap C \cap J\}.\end{aligned}$$

On sait que $\mathbb{P}\{M \cap J\} = \mathbb{P}\{C \cap J\} = 1/16$, puisque $C \perp M$ et $C \perp J$. On a aussi calculé que $\mathbb{P}\{M \cup C \cup J\} = 1/2$.

On sait aussi que $\mathbb{P}\{M \cap C \cap J\} = 0$.

Donc, on déduit que
$$1/2 = 1/4 + 1/4 + 1/4 - 1/16 - 1/16 - \mathbb{P}\{M \cap C\} + 0,$$
ou que $\mathbb{P}\{M \cap C\} = 1/8 > \mathbb{P}\{M\}\mathbb{P}\{C\}$. Donc, Monica et Chandler ont plus tendance à être d'accord que Monica et Joey.

Question 4 (10 points)**.** Thomas est passionné par l'astronomie, et il aime beaucoup observer les astres à l'aide de son télescope. Cependant, il y parvient rarement, parce que d'une part, la météo est rarement coopérante, mais aussi parce qu'il est très occupé.
En moyenne, les conditions d'observation seront favorables avec une probabilité de $1/5$. Mais, indépendamment des conditions, Thomas doit se lever tôt le lendemain 5 soirs sur 7. Pour une soirée choisie aléatoirement :

— si les conditions sont favorables et que Thomas n'a pas à se lever tôt le lendemain, il sortira faire de l'observation ;
— si les conditions sont favorables et qu'il doit se lever tôt le lendemain, il sortira quand même faire de l'observation avec probabilité $1/2$.
— si les conditions ne sont pas favorables, il ne sortira pas faire de l'observation.

On définit les événements suivants :

— $F = \{\text{Les conditions sont favorables}\}$;
— $L = \{\text{Thomas doit se lever tôt le lendemain}\}$;
— $S = \{\text{Thomas est sorti faire de l'observation.}\}$;

(a) *(1 point)* Calculer $\mathbb{P}\{F \cap L\}$ et $\mathbb{P}\{F \setminus L\}$.

Solution : On a que F et L sont indépendants – donc F et L^c sont aussi indépendants. Par l'énoncé, $\mathbb{P}\{F\} = 1/5$ et $\mathbb{P}\{L\} = 5/7$. Donc,

$$\mathbb{P}\{F \cap L\} = \mathbb{P}\{F\}\mathbb{P}\{L\} = 1/7$$

et

$$\mathbb{P}\{F \setminus L\} = \mathbb{P}\{F \cap L^c\} = \mathbb{P}\{F\}\mathbb{P}\{L^c\} = 2/35.$$

(b) *(4 points)* Quelle est la probabilité que Thomas sortira faire de l'observation ?

Solution : On cherche $\mathbb{P}\{S\}$.

On a que, par la formule de probabilités totale,

$$\mathbb{P}\{S\} = \mathbb{P}\{S \mid F \cap L\}\mathbb{P}\{F \cap L\} + \mathbb{P}\{S \mid F \setminus L\}\mathbb{P}\{F \setminus L\} + \mathbb{P}\{S \mid F^c\}\mathbb{P}\{F^c\}.$$

D'une part, l'énoncé nous donne que $\mathbb{P}\{S \mid F \setminus L\} = 1$. D'autre part, $\mathbb{P}\{S \mid F \cap L\} = 1/2$, et $\mathbb{P}\{S \mid F^c\} = 0$.

On a donc

$$\mathbb{P}\{S\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + 1 \cdot \frac{2}{35} = \frac{9}{70}.$$

(c) *(2 points)* Expliquer pourquoi $L \cap S = L \cap F \cap S$. Déduire que $\mathbb{P}\{L \mid S\} = \mathbb{P}\{L \cap F \mid S\}$.

Solution : Puisqu'il faut des conditions favorables pour sortir, $S \subseteq F$ et $S \cap F = S$. Donc, $L \cap S = L \cap S \cap F$.

Par conséquent,

$$\mathbb{P}\{L \mid S\} = \frac{\mathbb{P}\{L \cap S\}}{\mathbb{P}\{S\}} = \frac{\mathbb{P}\{L \cap S \cap F\}}{\mathbb{P}\{S\}} = \mathbb{P}\{L \cap F \mid S\}.$$

(d) *(2 points)* Sachant que Thomas est sorti faire de l'observation, quelle est la probabilité qu'il devait se lever tôt le lendemain (et qu'il est maintenant très fatigué) ?

Solution : On cherche $\mathbb{P}\{L \mid S\} = \mathbb{P}\{L \cap F \mid S\}$.

Par la formule de Bayes, il s'agit de

$$\mathbb{P}\{L \cap F \mid S\} = \frac{\mathbb{P}\{S \mid F \cap L\}\mathbb{P}\{F \cap L\}}{\mathbb{P}\{S\}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{9}{70}} = \frac{5}{9}.$$

(e) *(1 points)* En moyenne combien de fois par année Thomas sort-il son télescope si on assume que tous les soirs d'une année (non-bissextile) sont indépendants ?

Solution : Si X est le nombre de soirs où Thomas sort son télescope, X est une binomiale $(n = 365, p = \mathbb{P}\{S\} = \frac{9}{70}.)$ et l'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] = \frac{9 \times 365}{70} \approx 47.$$

Question 5 (7 points)**.** Soit X une variable aléatoire de distribution de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire de distribution de Poisson avec paramètre $\mu > 0$.
On a aussi que, pour toute paire $k, l \geq 0$, les événements $\{X = k\}$ et $\{Y = l\}$ sont indépendants.

(a) *(4 points)* Soit $Z = X + Y$. Montrer que

$$\mathbb{P}\{Z = n\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X = k\} \mathbb{P}\{Y = n - k\}.$$

Solution : On utilise la formule de probabilité totale :

$$\mathbb{P}\{Z = n\} = \mathbb{P}\{X + Y = n\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X + Y = n, X = k\}.$$

Dans la sommation, les termes où $k > n$ sont tous nuls, puisque si $X > n$, alors $X + Y > n$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z = n\} &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X + Y = n, X = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X = k, Y = n - k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X = k\} \mathbb{P}\{Y = n - k\},\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en vertu du fait que les événements $\{X = k\}$ et $\{Y = n - k\}$ sont indépendants pour tout k.

(b) *(3 points)* Déduire que Z suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Solution : Puisque X (resp. Y) est une variable de Poisson (λ) (resp. μ), on a que

$$\mathbb{P}\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}; \qquad \mathbb{P}\{Y = n - k\} = e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}.$$

On a donc que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z = n\} &= e^{-\lambda-\mu} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}.\end{aligned}$$

On conclue que Z est une variable aléatoire de Poisson $(\lambda + \mu)$, puisque la fonction de masse de Z correspond à celle d'une loi de Poisson pour ce paramètre.