Prénom :
Nom de famille :
Matricule :

MAT1720 – INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS – HIVER 2020
MINI-TEST 2

Enseignant : Thomas Davignon
Date : lundi 3 février 2020

Durée : *20 minutes*
Consignes : *Documentation/calculatrice non-permise.*
Écrire proprement. Justifier ses démarches.
Répondre directement sur la feuille.
Utilisez du papier supplémentaire au besoin. Identifiez clairement toutes les feuilles supplémentaires utilisées.
Il y a une questions au verso !!

Question 1 (1 point par bonne réponse.)**.** Choix multiples. *Encerclez la réponse. Pas besoin de justifier.*

1. Soient A, B et C trois événements, tous avec probabilité strictement positive. Parmi les expressions suivantes, trouver celle qui n'est pas égale aux trois autres.

   (a) $\mathbb{P}\{A \cap B \mid C\}$
   (b) $\mathbb{P}\{A \mid B \cap C\}\mathbb{P}\{B \cap C\}$
   (c) $\dfrac{\mathbb{P}\{A \cap B \cap C\}}{\mathbb{P}\{C\}}$
   (d) $\mathbb{P}\{A \mid C\}\mathbb{P}\{B \mid C \cap A\}$

   Explication : $\mathbb{P}\{A \mid B \cap C\}\mathbb{P}\{B \cap C\} = \mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} \neq \mathbb{P}\{A \cap B \mid C\} = \dfrac{\mathbb{P}\{A \cap B \cap C\}}{\mathbb{P}\{C\}}$.

2. Soient A et B deux événements avec $0 < \mathbb{P}\{A\}, \mathbb{P}\{B\} < 1$. Parmi les énoncés suivants, tous sont faux en général, sauf un. Lequel ?

   (a) Si $\mathbb{P}\{A \mid B\} = \mathbb{P}\{B \mid A\}$, alors $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\}$.
   (b) Si A et B sont disjoints, alors A et B sont indépendants.
   (c) Si A^c et B^c sont indépendants, alors A et B sont indépendants.
   (d) Si un événement C est indépendant de A, et est aussi indépendant de B, alors C est indépendant de $A \cap B$.

   Explication : Puisque A, B ont probabilité entre 0 et 1, par une proposition vue en classe, si A^c et B^c sont indépendants, alors A^c et $(B^c)^c = B$ sont indépendants, mais alors $(A^c)^c = A$ et B sont indépendants.

   Toutes les autres affirmations sont fausses. Si A et B sont disjoints, alors $\mathbb{P}\{A \mid B\} = 0 \neq \mathbb{P}\{A\}$ et A et B ne sont pas indépendants. Mais $\mathbb{P}\{A \mid B\} = \mathbb{P}\{B \mid A\} = 0$ quand même, et on pourrait très bien avoir $\mathbb{P}\{A\} \neq \mathbb{P}\{B\}$.

   Nous avons aussi vu en classe que si $C \perp A$ et $C \perp B$, on ne peut pas automatiquement conclure que $C \perp (A \cap B)$. Le contre exemple est le suivant : pour un lancer de deux dés équilibrés à six faces, $A = \{\text{Le premier dé donne } 2\}$, $B = \{\text{Le second dé donne } 5\}$, $C = \{\text{La somme des dés donne } 7\}$.

3. Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

   Parmi les expressions suivantes, identifier celle qui n'a pas de sens.

(a) $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 4\}$
(b) $\mathbb{P}\{X = 4\}$
(c) $\mathbb{E}[X = 4]$
(d) $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X=4\}}\right]$

Explication : On calcule la TOUJOURS
— la PROBABILITÉ d'un ÉVÉNEMENT ;
— l'ESPÉRANCE d'une VARIABLE ALÉATOIRE.

« $X = 4$ » **n'est pas** une variable aléatoire. $\{X = 4\}$ est un événement. La variable $\mathbb{1}_{\{X=4\}}$ est la variable indicatrice de l'événement $\{X = 4\}$.

4. *Vrai ou faux ?* Soit X une variable aléatoire à valeurs entières non-négatives $(0, 1, 2, 3, \dots)$. Alors si $p_X(0) = 0$, $\mathbb{E}[X] \geq 1$.

(a) Vrai
(b) Faux

Explications : On a que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k).$$

Si $p_X(0) = 0$, alors il suffit de sommer pour $k \geq 1$, et puisque $k \geq 1$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_X(k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1.$$

Question 2 (6 points)**.** Thomas possède quatre jupes et une paire de jeans, deux cols-roulés et sept T-shirts, ainsi que quatre coton-ouatés. Pour s'habiller, il respecte les règles suivantes :
— Il choisit équiprobablement entre chacune de ses jupes ou ses jeans.
— Il porte toujours un T-shirt s'il met des jeans ; sinon, il choisit équiprobablement parmi ses chandails.
— Il porte toujours un coton-ouaté s'il porte un T-shirt ; sinon, il tire à pile ou face pour décider s'il portera un coton ouaté.

En vous servant des événements $J = \{\text{Thomas porte une jupe}\}$, $T = \{\text{Thomas porte un T-shirt}\}$ et $C = \{\text{Thomas porte un coton ouaté}\}$, répondez aux questions suivantes :

(a) *(2 points)* Quelle est la probabilité qu'il porte un coton-ouaté ?

Solution : Par la formule de probabilités totale :

$$\mathbb{P}\{C\} = \mathbb{P}\{C \mid T\}\mathbb{P}\{T\} + \mathbb{P}\{C \mid T^c\}\mathbb{P}\{T^c\}.$$

Selon l'énoncé, $\mathbb{P}\{C \mid T\} = 1$ et $\mathbb{P}\{C \mid T^c\} = \frac{1}{2}$.

Par la formule de probabilités totale :

$$\mathbb{P}\{T\} = \mathbb{P}\{T \mid J\}\mathbb{P}\{J\} + \mathbb{P}\{T \mid J^c\}\mathbb{P}\{J^c\}.$$

Par l'énoncé, $\mathbb{P}\{T \mid J\}$, la probabilité qu'il porte un T-shirt sachant qu'il porte une jupe est de $\frac{7}{9}$. $\mathbb{P}\{T \mid J^c\} = 1$. $\mathbb{P}\{J\} = \frac{4}{5}$ et $\mathbb{P}\{J^c\} = \frac{1}{5}$.

Finalement, $\mathbb{P}\{T^c \mid J\} = \frac{2}{9}$, $\mathbb{P}\{T^c \mid J^c\} = 0$ et on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{C\} &= \mathbb{P}\{C \mid T\}\,\mathbb{P}\{T\} + \mathbb{P}\{C \mid T^c\}\,\mathbb{P}\{T^c\} \\ &= \mathbb{P}\{C \mid T\}\left(\mathbb{P}\{T \mid J\}\,\mathbb{P}\{J\} + \mathbb{P}\{T \mid J^c\}\,\mathbb{P}\{J^c\}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\{C \mid T^c\}\left(\mathbb{P}\{T \mid J\}\,\mathbb{P}\{J\} + \mathbb{P}\{T \mid J^c\}\,\mathbb{P}\{J^c\}\right) \\ &= 1 \cdot \left(\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{41}{45}\end{aligned}$$

Alternativement, (et c'était beaucoup plus rapide), on pouvait calculer la probabilité qu'il ne porte pas de coton-ouaté :

$$\mathbb{P}\{C^c\} = \mathbb{P}\{J\}\,\mathbb{P}\{T^c \mid J\}\,\mathbb{P}\{C^c \mid T^c\} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{45},$$

ce qui donne finalement bien le résultat attendu :

$$\mathbb{P}\{C\} = 1 - \mathbb{P}\{C^c\} = \frac{41}{45}.$$

(b) *(2 points)* Quelle est la probabilité qu'il porte une jupe sachant qu'il porte un coton-ouaté ?

Solution : On utilise la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}\{J \mid C\} = \frac{\mathbb{P}\{C \mid J\}\,\mathbb{P}\{J\}}{\mathbb{P}\{C\}}.$$

Il faut trouver $\mathbb{P}\{C \mid J\}$, la probabilité qu'il porte un coton-ouaté sachant qu'il porte une jupe. Par la formule de probabilité totale pour les probabilités conditionnelles, c'est :

$$\mathbb{P}\{C \mid J\} = \mathbb{P}\{C \mid J \cap T\}\,\mathbb{P}\{T \mid J\} + \mathbb{P}\{C \mid J \cap T^c\}\,\mathbb{P}\{T^c \mid J\}.$$

On a que $\mathbb{P}\{C \mid J \cap T\} = \mathbb{P}\{C \mid T\} = 1$. De plus on a que $\mathbb{P}\{C \mid J \cap T^c\} = \mathbb{P}\{C \mid T^c\} = \frac{1}{2}$. Donc,

$$\mathbb{P}\{C \mid J\} = 1 \cdot \frac{7}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{9}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\{J \mid C\} = \frac{\mathbb{P}\{C \mid J\}\,\mathbb{P}\{J\}}{\mathbb{P}\{C\}} = \frac{\frac{8}{9} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{41}{45}} = \frac{32}{41}.$$

(c) *(1 point)* Si X est le nombre de vêtements dans l'ensemble porté par Thomas une journée donnée, quel est le support de X ?

Solution : Soit Thomas porte 2 vêtements (si il n'a pas de coton-ouaté) ou 3 (si il a un coton-ouaté). Donc, le support de X est l'ensemble $\{2, 3\}$.

(d) *(1 point)* Quelle est $\mathbb{E}[X]$?

Solution : On a que $\mathbb{P}\{X = 2\}$ est la probabilité que Thomas ne porte pas de coton ouaté. Donc $\mathbb{P}\{X = 2\} = \mathbb{P}\{C^c\} = \frac{4}{45}$. De l'autre côté, $\mathbb{P}\{X = 3\} = \mathbb{P}\{C\} = \frac{41}{45}$.

Finalement,

$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \mathbb{P}\{X = 2\} + 3 \cdot \mathbb{P}\{X = 3\} = \frac{131}{45} \approx 2,9111\ldots$$