Université de Montréal - Département de mathématiques et de statistique

MAT1720 : PROBABILITÉS

NOTES DE COURS

CHAPITRE 2 : AXIOMES DE PROBABILITÉS

Professeur : M. Ismaïla NDIAYE

Chapitre 1

ANALYSE COMBINATOIRE

Chapitre 2

AXIOMES DE PROBABILITÉS

2.1 Ensemble fondamental et événement

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience est appelé **ensemble fondamental** et est noté S.

Exemple 2.1.1 Décrivez l'ensemble fondamental

1. Si l'expérience consiste à lancer un dé régulier et on observe le résultat :
   $S = \ldots$

2. Si l'expérience consiste à lancer deux pièces de monnaie différentes et on observe le résultat :
   $S = \ldots$

3. Si l'expérience consiste à choisir une lettre de l'alphabet :
   $S = \ldots$

Remarque : Dans ces 3 exemples, S est un ensemble fin dénombrable.

Exemple 2.1.2

1. L'expérience consiste à jeter un dé jusqu'à l'obtention de 6 et on compte le nombre de fois qu'on a jeté le dé :
   $S = \ldots$

   Donner une caractéristique de S :
2. L'expérience consiste à mesurer la durée de vie d'un transistor :
   $S = \ldots$

   Donner une caractéristique de S :
3. L'expérience consiste à mesurer l'heure d'arrivée des train dans une gare entre 8h00 et 12h00 :
   $S = \ldots$

   Donner une caractéristique de S :

Définition 2.1.3 Tout sous-ensemble E de S est appelé **événement.**

Exemple 2.1.4

1. Dans l'exemple du lancé de dé, si $E = \{2, 4, 6\}$. E est l'événement : obtenir un nombre pair.
2. Dans l'exemple du choix d'une lettre de l'alphabet, si $E = \{a, e, u, i, o, y\}$.
   E est l'événement : ...

Remarque :

1. L'événement $\{a\}$ contenant un seul élément de S est appelé **événement élémentaire.**
2. L'ensemble vide noté $\varnothing$ et S sont des événements. Le premier est appelé **événement impossible**, alors que le deuxième est appelé **événement certain**.

Définition 2.1.5 Si un résultat de l'expérience est contenu dans E, on dit que E est réalisé.

2.2 Opérations sur les ensembles

Soit E et F des événements d'un ensemble fondamental S

i) $E \cup F$, appelé l'**union** de E et F, est l'événement qui est réalisé si E ou F est réalisé.

ii) $E \cap F$, appelé l'**intersection** de E et F, est l'événement qui est réalisé si E et F sont tous les deux réalisés.

iii) E^c appelé le **complémentaire** de E dans S, est l'événement qui est réalisé si E n'est pas réalisé.

Définition 2.2.1 Si $E \cap F = \varnothing$, E et F sont dits mutuellement exclusifs (ou disjoints ou incompatibles).

Remarques :

1. $S^c = \varnothing$
2. $E \cap E^c = \varnothing$
3. $E \cup E^c = S$
4. Si $E_1, E_2, \ldots$ sont des événements, alors :
   - $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n$ est l'événement contenant chaque élément qui est dans E_n pour au moins une valeur de $n = 1, 2, 3, ...$
   - $E = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} E_n$ est l'événement contenant tous les éléments qui sont à la fois dans tous les événements $E_n, n = 1, 2, 3, ...$

2.3 Propriétés des opérations sur les événements

- Commutativité : $E \cup F = F \cup E \quad \text{et} \quad E \cap F = F \cap E$

- Associativité : $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad \text{et} \quad (E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

- Distributivité : $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G) \quad \text{et} \quad E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

- Lois de De Morgan

$$i) \quad \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i)^c$$

$$ii) \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i)^c$$

En effet :

Exemple 2.3.1 Trouver une expression simple pour les événements suivants :

a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c) = ...$

b) $(E \cap F) \cup (E \cap F^c) = ...$

c) $(E \cup F) \cup (E \cup F^c) = ...$

c) $(E \cap F) \cap (E \cap F^c) = ...$

2.4 Axiomes de probabilités

Considérons une expérience dont l'ensemble fondamentale est S. Pour chaque événement E de l'espace S, nous admettons qu'il existe un nombre $P(E)$ qui satisfait aux trois axiomes suivants :

- Axiome 1 : $0 \leq P(E) \leq 1$
- Axiome 2 : $P(S) = 1$
- Axiome 3 : pour chaque séquence d'événements disjoints $E_1, E_2, ...$, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

$P(E)$ est appelée la probabilité de l'événement E.

Remarque : $P(\varnothing) = 0$

Exemple 2.4.1

1. On lance un dé pièce de monnaie régulière. $S = ...$

   Par axiome 2 :

   Par axiome 3 :

2. On lance un dé régulier. $S = ...$

   Par axiome 2 :

   Par axiome 3 :

2.5 Quelques théorèmes élémentaires

Théorème 2.5.1 $P(E^c) = 1 - P(E)$

Démo.

Exemple 2.5.2 On lance deux dés réguliers et on note la somme des points. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de 2 points ?

Théorème 2.5.3 Si $E \in F$, alors $P(E) \leq P(F)$

Démo.

Exemple 2.5.4 On lance un dé régulier. Soit E l'événement "obtenir 6" et F l'événement "obtenir un nombre pair". Vérifiez le théorème.

Théorème 2.5.5 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Démo.

Exemple 2.5.6 On pige au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que ce soit un coeur ou un as ?
On note A l'événement "obtenir un coeur" et B l'événement "obtenir un as".

Remarque : $P(E \cup F \cup G) = ...?$

$$\begin{aligned}
P(E \cup F \cup G) &= P\big((E \cup F) \cup G\big) = P(E \cup F) + P(G) - P\big((E \cup F) \cap G\big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{avec } (E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (E \cap G) \\
&= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G) \\
&= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)
\end{aligned}$$

On peut généraliser cette remarque dans le théorème suivant.

Théorème 2.5.7 (Identité d'inclusion-exclusion)

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_i<i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots \\ &+ (-1)^{r+1} \sum_{i_i<i_2<\cdots<i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) + \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) \end{aligned}$$

où la somme $\displaystyle\sum_{i_i<i_2<\cdots<i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r})$ est prise sur les $\binom{n}{r}$ sous-ensembles possibles de taille r de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}\}$.

Notation condensée (de l'identité d'inclusion-exclusion) :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_i<i_2<\cdots<i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r})$$

- Décrivez l'identité d'inclusion exclusion lorsque $n = 3$.

Exemple 2.5.8 (Problème de rencontre)
Une réception réunit N invité, tous des hommes. Chacun jette son chapeau au milieu de la pièce. On mélange les chapeaux puis chacun en choisit un au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucun des hommes ne choisisse son propre chapeau ?

Solution. Il y a $N!$ façons de répartir les chapeaux.

On calcule d'abord la probabilité de l'événement complémentaire qu'on moins un homme choisisse son propre chapeau.

Désignons par $E_i, i = 1, 2, \ldots, N$, l'évenement "le i-ième homme choisit son propre chapeau".

L'événement $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}$, que chacun des n hommes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ choisit son propre chapeau, peut survenir de $(N-n)!$ manières possibles (car $E_{i_1}, E_{i_2}, ..., E_{i_n}$ sont fixés et les autres hommes se trompent de chapeau de $(N-n)!$ manières).

On calcule :

$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}) = ...$

$$\sum_{i_i < i_2 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}) = ...$$

Par l'identité d'inclusion-exclusion :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) =$$

Ainsi, la probabilité qu'aucun des hommes ne choisisse son chapeau est égale à : ...

Exercice. Prouver l'inégalité de Boole :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Indication : considérer les ensembles $F_1 = E_1$ et $F_i = \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} E_j\right)^c$, $i > 1$. Montrer que les F_i sont mutuellement exclusifs.

2.6 Ensembles fondamentaux à événements élémentaires équiprobables

Soit S l'ensemble fondamental d'une expérience. Si chaque élément ou événement élémentaire a la même probabilité d'apparaître, on dit que ces événements élémentaires sont **équiprobalbes**.

Par exemple : si $S = \{1, 2, 3, ..., N\}$ avec $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{N\})$, alors on a :

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N}\,, \quad i = 1, 2, ..., N$$

Si un événement A est formé de r éléments, alors : $P(A) = \dfrac{r}{N} = \dfrac{card(A)}{card(S)}$, où $card(A)$ est le nombre d'éléments de A.

Remarque : le nombre d'éléments de A est souvent noté $card(A)$ ou $\#A$ ou $|A|$.

- **Méthode de calcul de probabilité**

Pour tout événement E,

$$P(E) = \frac{card(E)}{card(S)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de } E}{\text{Nombre de cas possibles de l'ensemble } S}$$

Exemple 2.6.1

1. On veut former un comité de 3 personnes à partir d'un groupe de 6 femmes et 5 hommes. Quelle est la probabilité que ce comité soit constitué d'une femme et de deux hommes ?

   Réponse :

2. On veut placer trois couples mariés en ligne ligne pour une photo de groupe. Calculez la probabilité que chaque couple soit réuni (côte à côte).

   Réponse :

3. Lors d'une partie de bridge, les 52 cartes du paquet sont réparties entre 4 joueurs.
   a) Quelle est la probabilité qu'un joueur reçoive les 13 piques ?

      Réponse :

   b) Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un as ?

      Réponse :

2.7 Théorème de passage à la limite

• Une suite d'événements $\{E_n,\ n \geq 1\}$ est dite suite croissante si :

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$$

• Une suite d'événements $\{E_n,\ n \geq 1\}$ est dite suite décroissante si :

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$$

• Si $\{E_n,\ n \geq 1\}$ est une suite croissante d'événements, alors nous définissons un nouvel événement par :

$$\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

• Si $\{E_n,\ n \geq 1\}$ est une suite décroissante d'événements, alors nous définissons un nouvel événement par :

$$\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Théorème 2.7.1 Si $\{E_n,\ n \geq 1\}$ est une suite soit croissante soit décroissante d'événements, alors

$$\lim_{n \to \infty} P(E_n) = P(\lim_{n \to \infty} E_n)$$