Examen intra - Été 2017

MAT1720 - Probabilités

NOM : ______________________________

CODE PERMANENT : ______________________________

Instructions :

- Vous avez 2 heures pour compléter l'examen.
- **Expliquez de manière détaillée** votre raisonnement (excepté pour les Vrai ou Faux).
- La calculatrice est permise, mais pas vraiment utile.
- Réduisez vos réponses le plus possible.
- **Bon examen !**

Pondération : 35% de la note finale.

L'examen est corrigé sur 40 points.

Date : 13 juin 2017
Chargé de cours : Frédéric Ouimet

Problème 1 (10 points)

Vrai ou Faux (Aucune justification n'est nécessaire)

ATTENTION :
- **Bonne réponse = +1 point ;**
- **Aucune réponse = 0 point ;**
- **Mauvaise réponse = -0.5 points.**

1. Le nombre de manières différentes de diviser 12 personnes distinguables en 3 groupes *indistinguables* de 4 personnes chacun est $12!/(4!)^3$.

2. Soit A_1, A_2,..., A_n des événements (i.e. des ensembles mesurables sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), alors nous avons toujours $\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$.

3. Soit A un événement, alors A est toujours indépendant de son complément A^c.

4. Soient A, B deux événements dans Ω tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, alors A et B sont indépendants.

5. Des événements A et B disjoints sont toujours indépendants.

---

6. Nous voulons acheter 10 actions de compagnies au total. Quatre compagnies possibles A, B, C et D nous sont offertes. Le nombre d'allocations des 10 actions parmi les quatres compagnies est $\frac{13!}{3!10!}$.

7. Nous lançons un dé à six faces standards 10 fois successivement. (Les lancers sont indépendants). La probabilité d'obtenir cinq fois la face 6, trois fois la face 1 et deux fois la face 2 (pas nécessairement dans l'ordre) est
$$\frac{10!}{5!3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} .$$

8. Un événement A n'est jamais indépendant de lui-même.

9. La probabilité qu'*exactement* un des événements A ou B se réalise est donnée par
$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).$$

10. Un père et une mère ont 2 enfants. Sachant que l'enfant le plus vieux est un garçon, la probabilité (conditionnelle) que le plus jeune soit aussi un garçon est $1/2$.

Problème 1 (10 points)

Noircissez vos réponses

1. V F
2. V F
3. V F
4. V F
5. V F

6. V F
7. V F
8. V F
9. V F
10. V F

Problème 2 (7 points)
Une compagnie d'assurance-santé répartit la population en trois catégories :

B : les gens à bas risque de maladie ;
M : les gens à risque moyen de maladie ;
H : les gens à haut risque de maladie.

La compagnie estime que

— 2/10 de la population est dans la catégorie B ;
— 5/10 de la population est dans la catégorie M ;
— 3/10 de la population est dans la catégorie H.

De plus, elle estime que les chances de tomber malade dans la prochaine année sont de

— 5% pour une personne dans B ;
— 10% pour une personne dans M ;
— 20% pour une personne dans H.

Nous choisissons une personne au hasard dans la population.

(a) (**3 points**) Soit E l'événement *la personne choisie tombe malade durant la prochaine année*. Trouvez $\mathbb{P}(E)$.

(b) (**4 points**) Si la personne choisie tombe malade durant la prochaine année, quelle est la probabilité qu'elle soit à bas risque, c'est-à-dire dans la catégorie B ?

Problème 3 (10 points)
Une urne contient 10 boules : 4 Rouges, 4 Noires et 2 Blanches. Nous tirons **trois boules** de l'urne **SANS remise**. (Les boules d'une même couleur sont indistinguables.)

(a) (**3 points**) Soit A l'événement *exactement deux boules tirées sont rouges*. Trouvez $\mathbb{P}(A)$.

(b) (**3 points**) Soit C l'événement *aucune blanche n'est tirée*. Trouvez $\mathbb{P}(C)$.

(c) (**4 points**) Montrez que la probabilité qu'exactement deux boules tirées soient rouges sachant qu'aucune blanche n'a été tirée, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A|C)$, est $\frac{3}{7}$.

Problème 4 (3 points)
Nous considérons encore une urne contenant 10 boules : 4 Rouges, 4 Noires et 2 Blanches. Pour cette question, nous effectuons une suite infinie de tirages consécutifs **AVEC remise**. Les tirages sont indépendants.

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, on définit les événements :
R_i : *la i-ème boule tirée est rouge* ;
N_i : *la i-ème boule tirée est noire* ;
B_i : *la i-ème boule tirée est blanche.*

(**3 points**) Soit A l'événement *une boule blanche est tirée avant une rouge*, calculez $\mathbb{P}(A)$ en *conditionnant* sur la couleur de la boule pigée lors du premier tirage.

Problème 5 (10 points)
Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre d'accidents sur une autoroute un jour donné. Supposons que $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Le nombre d'accidents d'une journée à l'autre sont des événements indépendants.

(a) (**3 points**) Soit $\lambda = 3$. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 accidents se produisent aujourd'hui ?

(b) (**4 points**) Soit $\lambda = 3$. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 journées avec au moins 4 accidents dans les prochains 7 jours ?

(c) (**3 points**) Soit $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés, calculez $\mathbb{E}[e^{tX}]$.