Examen final - Été 2017
MAT1720 - Probabilités

NOM : ____________________________________

CODE PERMANENT : ________________________

Instructions :

- Vous avez 3 heures pour compléter l'examen.
- **Expliquez de manière détaillée** votre raisonnement (excepté pour les Vrai ou Faux).
- La calculatrice est permise.
- Réduisez vos réponses le plus possible.
- **Bon examen !**

Pondération : 45% de la note finale.
L'examen est corrigé sur 60 points.

Date : 3 août 2017
Chargé de cours : Frédéric Ouimet

Formule de variance conditionnelle

$$\mathrm{Var}(S) = E[\mathrm{Var}(S \mid N)] + \mathrm{Var}(E[S \mid N]).$$

Lois de probabilités importantes

Poisson

- $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda), \quad \lambda > 0.$
- $$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$
- $E[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Uniforme

- $X \sim \mathrm{Unif}(a, b), \quad -\infty < a < b < \infty.$
- $$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$
- $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a, b].$
- $E[X] = \frac{a+b}{2}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Exponentielle

- $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad \lambda > 0.$
- $$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Gamma

- $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda), \quad \alpha, \lambda > 0.$
- $$f_X(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \quad \text{où } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$
- Notez que la fonction Γ satisfait $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ pour tout $\alpha > 1$. En particulier, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- $E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Normale

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$
- $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$
- $E[X] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Problème 1 (15 points)

Vrai ou Faux (Aucune justification n'est nécessaire) **ATTENTION :** — **Bonne réponse = +1 point ;** — **Aucune réponse = 0 point ;** — **Mauvaise réponse = -0.5 points.**

1. Soit X une v.a. telle que $P(X = 0) = 1$, alors $F_X(\cdot)$ est constante.

2. Soit X une v.a. avec densité $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si on admet que $\lim_{|x|\to\infty} f_X(|x|)$ existe, alors nous avons $\lim_{|x|\to\infty} f_X(|x|) = 0$.

3. Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $X = e^Z$ a pour densité $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x)^2}{2}\right), \quad x > 0.$

4. La fonction caractéristique d'une v.a. existe <u>toujours</u>.

5. Soit X une v.a. avec variance nulle, alors on peut avoir $P(X \neq E[X]) > 0$.

---

6. Soit $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$, alors $P(1 \leq X \leq 3) = 2F_Z(0.25) - 1$ où $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

7. Soit X une v.a. avec fonction de répartition $F_X(\cdot)$ inversible. Alors, $U(\omega) \stackrel{\circ}{=} F_X(X(\omega))$ est de loi uniforme sur $(0, 1)$.

8. Nous considérons une v.a. X avec fonction de répartition
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ \frac{x}{x+1}, & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$
Nous avons $P(1/2 \leq X \leq 1) = 1/6$.

9. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des v.a. i.i.d. de loi Poisson(1) et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ des v.a. i.i.d. de loi Normale$(0, 1)$. Alors, par la loi faible des grands nombres,
$$P\left(0 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) \leq 2\right) \to 1 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

10. À un examen final de probabilité, un étudiant doit répondre à 15 questions Vrai ou Faux valant 1 point chacun. Le pointage attribué à chaque question est le même que dans le présent examen. L'étudiant étant désespéré, <u>il répond à toutes les questions</u> au hasard (Vrai ou Faux avec probabilité 1/2 respectivement). Sa note est donnée par la v.a. $X/15$. L'espérance de X est 7.5.

---

11. Soit X et Y deux v.a. discrètes, alors $E[X \mid \{Y = y\}]$ est une variable aléatoire pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $P(Y = y) > 0$.

12. Soit (X, Y) un vecteur gaussien. Si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, alors les v.a. X et Y sont indépendantes.

13. Soit X une v.a. continue, alors la densité $f_X(\cdot)$ satisfait $\max_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) \leq 1$.

14. Soit $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ et soit $X_1, X_2, X_3, \ldots$ une suite i.i.d. de v.a. telles que $E[X_i^2] < \infty$. On suppose aussi que N et les X_i sont indépendants. Alors,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \lambda \cdot \mathrm{Var}(X_1).$$

15. Soit $X, Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. On a <u>toujours</u> $\mathrm{Cov}(X, Y) \leq \lambda$.

Problème 1 (15 points)

Noircissez vos réponses

1.	V	F
2.	V	F
3.	V	F
4.	V	F
5.	V	F
6.	V	F
7.	V	F
8.	V	F
9.	V	F
10.	V	F
11.	V	F
12.	V	F
13.	V	F
14.	V	F
15.	V	F

Problème 2 (10 points)
Un point X est choisi au hasard sur l'intervalle $(0,1)$ avec la densité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,(1-x^2), & x \in (0,1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) (**2 points**) Trouvez c.

(b) (**2 points**) Montrez que $E[X^2] = 1/5$.

(c) (**2 points**) Trouvez la fonction de répartition $F_X(x)$ pour $x \in (0,1)$.

(d) (**2 points**) Soit $Y \mathrel{\hat=} X^3$. Trouvez une expression pour la fonction de répartition de Y.

(e) (**2 points**) Trouvez la densité de Y.

Problème 3 (15 points)
Soit la densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & \text{si } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) (**4 points**) Trouvez la densité marginale de X et la densité marginale de Y. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

(b) (**3 points**) Considérons $Z \mathrel{\hat=} XY$. Montrez que $Z \sim \text{Exp}(1)$.
Indice : Il y a plusieurs façons de faire, calculez $F_Z(z)$ ou $f_Z(z)$ pour $z > 0$.

(c) (**4 points**) Est-ce que Z et X sont des v.a. indépendantes ? (Justifiez rigoureusement.)

(d) (**2 points**) Soit $W \sim \text{Exp}(\lambda)$. Montrez qu'on a $E[W^k] = \frac{k}{\lambda}E[W^{k-1}]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et déduisez une formule générale pour $E[W^k]$.

(e) (**2 points**) Calculez $E[X^6Y^3]$.

Problème 4 (5 points)
Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $\lim_{|t|\to\infty} g(t)e^{-a|t|} = 0$ pour tout $a > 0$.

(a) (**2 points**) Intégrez par parties pour montrer que $E[g'(Z)] = E[Zg(Z)]$.

(b) (**2 points**) Justifiez rigoureusement l'égalité $E[Z^n] = (n-1)E[Z^{n-2}]$ pour tout $n \geq 2$.

(c) (**1 points**) Trouvez $E[Z^6]$.

(Les problèmes 5,6 et 7 sont à la prochaine page ...)

Problème 5 (7 points)
On considère $N \sim \text{Pois}(\Lambda)$ où Λ est une variable aléatoire. Précisément, nous savons que la loi conditionnelle de N sachant Λ est donnée par

$$P(N = n \mid \{\Lambda = \lambda\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Nous supposons que la loi marginale de Λ est

$$P(\Lambda = 1) = 1/2 \quad \text{et} \quad P(\Lambda = 2) = 1/2.$$

(a) (**2 points**) Trouvez la loi conjointe de (N, Λ), c'est-à-dire $P(N = n, \Lambda = \lambda)$ pour tout $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ et pour tout $\lambda \in \{1, 2\}$.

(b) (**1 points**) Trouvez $P(N = n)$ pour tout $n \in \{0, 1, 2, ...\}$.

(c) (**2 points**) Calculez $P(\Lambda = \lambda \mid \{N = 1\})$ pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

(d) (**2 points**) En déduire la valeur de $E\Big[\Lambda \mid \{N = 1\}\Big]$.

Problème 6 (5 points)
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des v.a. i.i.d. de loi $\text{Exp}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$. Posons

$$N(\omega) \stackrel{\circ}{=} \max\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \leq 1\right\}.$$

C'est-à-dire que $N(\omega) = n$ si n est le plus grand entier tel que la somme des $X_i(\omega),\ 1 \leq i \leq n$, ne dépasse pas 1. Notez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $Y_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, et donc que

$$f_{Y_n}(y) = \frac{(\lambda y)^{n-1} \lambda e^{-\lambda y}}{(n-1)!}, \quad y > 0.$$

(a) (**1 point**) Justifiez (en mots <u>ou</u> mathématiquement) l'égalité

$$P(N = n) = P(Y_n \leq 1, X_{n+1} > 1 - Y_n).$$

(b) (**4 points**) Conditionnez sur les valeurs que peut prendre Y_n afin de trouver la loi de N.

Problème 7 (3 points)
Soit X et Y deux v.a. de variance finie. Le but du problème est de donner une preuve alternative de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}$.

(a) (**1 point**) Développez $p(\lambda) \stackrel{\circ}{=} \text{Cov}(X - \lambda Y, X - \lambda Y)$ sous la forme $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

(b) (**2 points**) <u>Justifiez</u> une condition que $\Delta \stackrel{\circ}{=} b^2 - 4ac$ doit satisfaire, et concluez.

Fin de l'examen