EXAMEN INTRA
MAT 1720 PROBABILITÉS

— **Vous avez deux heures pour compléter l'intra.**

— **Expliquez de manière détaillée votre raisonnement.**

— **La calculatrice n'est pas permise et de toute manière inutile.**

— **Si vous êtes bloqués sur une question, passez à la suivante !**

Rappels :

(1) $\sum_{n\geq 0} p^n = \frac{1}{1-p}$ pour $p < 1$.

(2) $\sum_{n\geq k} p^n = \frac{p^k}{1-p}$ pour $p < 1$ et $k \geq 0$.

(3) $\sum_{n\geq 1} np^{n-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$ pour $p < 1$.

Professeur : Alexander Fribergh, Université de Montréal.

(1) **(5 points) Vrai ou Faux** (Aucune justification n'est nécessaire)

(a) Nous lançons un dé à six faces standards 8 fois successivement. (Les lancers sont indépendants). La probabilité d'obtenir quatre fois la face 6, trois fois la face 1 et une fois la face 2 (pas nécessairement dans l'ordre) est

$$\frac{8!}{4!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^8 .$$

(b) La probabilité qu'*exactement* un des événements A ou B se réalise est $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

(c) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un ensemble $\mathcal{S}$. Si $\mathbb{E}[XY] = 0$, alors $\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]$.

(d) Soient A, B deux événements de $\mathcal{S}$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{S}$. Si la réalisation de B augmente la probabilité que A se réalise alors la réalisation de A augmente la probabilité que B se réalise.

(e) Soient A, B deux événements dans $\mathcal{S}$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, alors A et B sont indépendants.

(2) **(7 points)** Nous considérons encore une urne contenant 10 boules : 4 Rouges, 4 Noires et 2 Blanches. Pour cette question, nous effectuons une suite infinie de tirages consécutifs avec remise. Les tirages sont indépendants.

(a) (2 points) Soit A l'événement *exactement deux blanches sont tirées dans les trois premiers tirages.* Trouvez $\mathbb{P}(A)$.

On définit pour chaque $i = 1, 2, 3, \ldots$ les événements R_i *la i-ème boule tirée est rouge*, N_i, *la i-ème boule tirée est noire*, et B_i, *la i-ème boule tirée est blanche.* Pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on considère C_n l'événement *la n-ème boule tirée est blanche et les $n - 1$ premières sont noires.*

(b) (1 points) Exprimez C_n en fonction des événements R_i, B_i et N_i, $i = 1, 2, \ldots$.

(c) (3 points) Montrez que $\mathbb{P}(C_n) = \frac{2^{n-1}}{5^n}$.

(3) (**8 points**) On considère que dans la population il y a 10% des gens qui ont le gêne des mathématiques et que le reste ne l'ont pas.

Nous savons que les gens avec le gêne des mathématiques ont 90% de chance de réussir leurs études sous-graduées et après s'être inscrit aux études gradués ils ont 40% de chance de réussir le reste de leurs études. Les gens sans le gêne des mathématiques ont 50% de chance de réussir leurs études sous-graduées et 10% de chance de réussir leurs études graduées.

Nous choisissons une personne au hasard et considérons les événements

$$M = \{\textit{la personne a le gêne des mathématiques}\}$$
$$N = \{\textit{la personne n'a pas le gêne des mathématiques}\}.$$

Soit A_1 l'événement $\{$*la personne réussi ses études sous-graduées*$\}$ et A_2 l'événement $\{$*la personne réussi ses études graduées*$\}$.

(a) (2 points) Calculez $\mathbb{P}(A_1)$.

(b) (3 points) Calculez $\mathbb{P}(M|A_1)$ et $\mathbb{P}(N|A_1)$.

(c) (3 points) Calculez $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$.

(4) (**5 points**) Nous choisissons deux entiers X et Y de manière indépendante, i.e. $P[X = k \text{ et } Y = k'] = P[X = k]P[X = k']$ pour tout $k, k' \geq 0$. Leur loi est donnée par les probabilités

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 2^{-k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) (3 points) Montrez que $\mathbb{P}(X = Y) = 1/3$.

(b) (2 points) Montrez que $\mathbb{P}(X < Y) = 1/3$. *Indice : Utiliser un argument de symétrie.*

(5) (**5 points**) On a une urne avec des boules numérotées de 1 à 20. On les retire une à une, de manière équiprobable, avec remise.

(a) (3 point) Prenons $0 \leq i \leq 19$ et supposons avoir tiré i numéro différents. On note X_{i+1} le nombre de boules qu'il faut tirer pour voir un numéro différent des i premiers numéros déjà tirés (en particulier $X_1 = 1$). Quelle est la loi de X_{i+1} ? En déduire que $E[X_{i+1}] = \frac{20}{20-i}$.

(b) (2 points) Notons T le temps nécéssaire pour observer tous les numéros. Calculer $E[T]$ en se servant de la question précédente.

Solutions

Exercice 2

(1) On prend comme espace de probabilité les 2 premières places du classement des nationalités, c'est donc comme prendre 2 boules parmi 12. Le résultat est donc $\mathbf{\binom{4}{2}/\binom{12}{2}}$ car on veut alors prendre 2 des américains parmi les 4 possibles.

(2) La proba d'avoir 2 personnes de la même nationalité dans les 2 premières places est $\frac{\binom{4}{2}+\binom{2}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{12}{2}}$, car il y a les possibilités des 2 anglais et des deux jamaïcains. Donc

$$P[2 \text{ américains en premier} \mid 2 \text{ de même nationalité}] = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}+2} = \mathbf{3/4}.$$

Exercice 3

(1) On a $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A_1 \mid N)\mathbb{P}(N)$.

(2) On utilise Bayes,

$$\mathbb{P}(M|A_1) = \frac{P[A_1 \mid M]P[M]}{P[A_1 \mid M]P[M] + P[A_1 \mid N]P[N]}$$

(3) On applique la probabilité totale

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = P[A_2 \mid A_1, M]P[M \mid A_1] + P[A_2 \mid A_1, N]P[N \mid A_1].$$

Exercice 4

(1) C'est une loi **géométrique de paramètre** $p := \frac{20-i}{20}$ qui correspond exactement à la probabilité de tirer une boule que l'on a pas vu jusqu'à présent. On sait que la moyenne de la géométrique est $\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$, d'où le résultat.

(2) On a $T = \sum_{i=0}^{19} X_i$, donc par la linéarité de l'espérance et la question précédente on a $\mathbf{E[T] = \sum_{i=0}^{19} \frac{20}{20-i}}$.

Exercice 5

(1) On peut voir que $\mathbb{P}(X = Y)$ est égal à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\cup_{k\geq 1}\{X = Y = k\}] = \sum_{k\geq 1} P[X = k \text{ et } Y = k] &= \sum_{k\geq 1} P[X = k]P[Y = k] \\ &= \sum_{k\geq 1} 4^{-k} = \mathbf{1/3},\end{aligned}$$

où on a utilisé l'union sur k est disjointe puis que X et Y sont indépendants.

(2) On a $S = \{X = Y\} \cup \{X < Y\} \cup \{X > Y\}$, donc comme l'union est disjointe on peut utiliser la symétrie $P[X < Y] = P[X > Y]$ pour dire que

$$1 = 1/3 + 2\mathbb{P}(X < Y),$$

d'où $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbf{1/3}$.