Examen intra - Hiver 2018

MAT1720 - Probabilités

NOM : ____

CODE PERMANENT : ______________________________

Instructions :

— Vous avez 2 heures pour compléter l'examen.

— **Expliquez de manière détaillée** votre raisonnement (excepté pour les Vrai ou Faux).

— La calculatrice est permise.

— Réduisez vos réponses le plus possible.

— **Bon examen !**

Pondération : 35% de la note finale.

L'examen est corrigé sur 40 points.

Date : 12 février 2018
Chargé de cours : Frédéric Ouimet

Problème 1 (7 points)

Vrai ou Faux (Aucune justification n'est nécessaire)

- Bonne réponse = +1 point ;
- Aucune réponse = 0 point ;
- Mauvaise réponse = -0.5 points.

1. Le nombre de manières différentes de distribuer 52 cartes distinctes (13 cartes à chaque joueur) entre 4 joueurs <u>distinguables</u> est $\frac{52!}{4!\cdot(13!)^4}$.

2. Soit un lancer de deux dés distinguables (chaque dé est lancé de façon indépendante). Alors, les événements $A = \{\text{le premier dé affiche } 3\}$, $B = \{\text{le second dé affiche } 4\}$ et $C = \{\text{la somme des dés est } 7\}$ sont indépendants <u>deux-à-deux</u>, c'est-à-dire qu'on a les trois points suivants :
   — A et B sont indépendants,
   — A et C sont indépendants,
   — B et C sont indépendants.

3. Soit A, B, C trois événements, alors
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C).$$

4. Lors d'un anniversaire, il y a un gâteau coupé en 12 pointes non-distinguables et 8 personnes sont présentes. On impose les conditions suivantes : toutes les pointes sont distribuées, mais il est possible que certaines personnes ne prennent pas de pointe. Sous ces conditions, il y a $\binom{11}{7}$ façons de distribuer les pointes.

5. Les événements A, B, C de la question 2 sont indépendants globalement (c'est-à-dire, les trois ensemble).

6. Soit A un événement indépendant de lui-même, alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

7. Deux événements indépendants ne sont jamais disjoints.

Noircissez vos réponses

1. V F
2. V F
3. V F
4. V F
5. V F
6. V F
7. V F

Problème 2 (10 points)
Les élèves d'une classe de MAT1720 font partie de trois groupes :

$$\begin{aligned} B &\circeq \{\textit{les élèves qui avaient une cote R basse au cégep}\}, \\ M &\circeq \{\textit{les élèves qui avaient une cote R moyenne au cégep}\}, \\ H &\circeq \{\textit{les élèves qui avaient une cote R haute au cégep}\}. \end{aligned}$$

Nous savons que
- 1/10 des élèves sont dans la catégorie B ;
- 6/10 des élèves sont dans la catégorie M ;
- 3/10 des élèves sont dans la catégorie H.

À l'aide de données recueillies au fil des ans, un prof estime que la probabilité qu'un élève donné dans une classe de MAT1720 réussisse le cours est :
- 30% pour un élève dans B ;
- 60% pour un élève dans M ;
- 90% pour un élève dans H.

Nous choisissons un élève au hasard dans une classe donnée de MAT1720. Notons l'événement

$$R \circeq \{\textit{l'élève réussit le cours}\}.$$

(a) (**1 point**) Trouvez la probabilité que l'élève <u>n'avait pas</u> une cote R basse au cégep, c'est-à-dire calculez $\mathbb{P}(B^c)$.

(b) (**3 points**) Trouvez la probabilité que l'élève <u>réussisse</u> le cours sachant que l'élève <u>n'avait pas</u> une cote R basse au cégep.

(c) (**3 points**) Si on sait que l'élève a <u>réussit</u> le cours, quelle est la probabilité que l'élève <u>n'avait pas</u> une cote R basse au cégep ?

(d) (**3 points**) Si on sait que l'élève a <u>échoué</u> le cours, quelle est la probabilité que l'élève <u>avait</u> une cote R basse au cégep ?

Problème 3 (3 points)
Deux "cowboys", A et B, se battent en duel. Les règles du duel sont les suivantes. Ils ramassent leur pistolet et se tirent dessus simultanément (1 fois chacun). Si l'un ou l'autre est touché, le duel est fini. Si les deux tirs sont manqués, ils répètent le processus. Supposons que les résultats des tirs sont indépendants. Pour $i \in \{1, 2, 3, ...\}$, notons
- $E_i = \{\textit{A touche B lors de la ronde de tir } i\}$,
- $F_i = \{\textit{B touche A lors de la ronde de tir } i\}$.

Nous supposerons que $\mathbb{P}(E_i) = p_A$ et $\mathbb{P}(F_i) = p_B$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit

$$J \circeq \{\textit{A n'est jamais touché lors du duel}\}.$$

Calculez $\mathbb{P}(J)$ en justifiant vos étapes.

Problème 4 (10 points)
Aux jeux olympiques de Vancouver, le Canada joue une série de parties de hockey contre certains adversaires. À chaque fois, les deux équipes comptent un nombre aléatoire de buts. Pour une partie de hockey donnée, soit

$$C_k \mathrel{\hat=} \{\textit{le Canada compte exactement } k \textit{ buts}\},$$
$$A_j \mathrel{\hat=} \{\textit{l'équipe adverse compte exactement } j \textit{ buts}\}.$$

Les analystes estiment que

$$\mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k \in \{0, 1, 2, ...\}, \qquad \mathbb{P}(A_j) = \frac{2}{3^{j+1}}, \quad j \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Les événements C_k et A_j sont indépendants pour tous k et j.

Voici des formules utiles (pour $|r| < 1$) :

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{r}{1-r}; \quad \sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r}$$

(a) (**3 points**) Exprimez l'événement $E \mathrel{\hat=} \{\textit{le match se termine avec un score égal}\}$ en terme des événements $(A_j, j \geq 0)$ et $(C_k, k \geq 0)$. Calculez $\mathbb{P}(E)$.

(b) (**3 points**) Exprimez l'événement $B_n = \{\textit{le Canada compte } n \textit{ buts ou plus}\}$ en fonction des événements $(C_k, k \geq 0)$. Montrez que $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2^n}$.

(c) (**1 point**) À l'aide d'une propriété de $\mathbb{P}(\cdot)$, montrez que $\mathbb{P}(\left\{\begin{array}{c}\textit{le Canada compte} \\ \textit{une infinité de but}\end{array}\right\}) = 0$.

(d) (**3 points**) Exprimez l'événement $M \mathrel{\hat=} \{\textit{le Canada compte plus de buts que l'adversaire}\}$ en fonction de $(A_j, j \geq 0)$ et $(B_n, n \geq 0)$. Calculez $\mathbb{P}(M)$.

Problème 5 (10 points)
Aux championnat du monde de ski acrobatique, il y a 12 skieurs. Nous comptons 4 canadiens, 2 américains, 2 russes et 4 autres skieurs de nationalités toutes différentes. Nous estimons que les classements finaux des skieurs sont équiprobables (lorsqu'on distingue les 12 skieurs).

(a) (**2 points**) $A \mathrel{\hat=} \left\{\begin{array}{l}\textit{exactement deux skieurs sur les trois} \\ \textit{premiers au classement sont canadiens}\end{array}\right\}$. Montrez que $\mathbb{P}(A) = \frac{12}{55}$.

(b) (**2 points**) $B \mathrel{\hat=} \left\{\begin{array}{l}\textit{au moins un skieur canadien est parmi} \\ \textit{les trois premiers skieurs au classement}\end{array}\right\}$. Montrez que $\mathbb{P}(B) = \frac{41}{55}$.

(c) (**2 points**) $C \mathrel{\hat=} \left\{\begin{array}{l}\textit{les deux premières places du classement} \\ \textit{sont occupées par deux skieurs canadiens}\end{array}\right\}$. Montrez que $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{11}$.

(d) (**4 points**) $N \mathrel{\hat=} \left\{\begin{array}{l}\textit{les deux premières places du classement sont} \\ \textit{occupées par deux skieurs de même nationalité}\end{array}\right\}$. Calculez $\mathbb{P}(C \mid N)$.

Problème BONUS (6 points)

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. Supposons que $\Omega \doteq \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ et $\mathcal{F} \doteq \mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω (incluant $\emptyset$ et Ω). Posons $N \doteq \{1, 2, ..., n\}$. Nous définissons une fonction $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ qui satisfait $\mathbb{Q}(\emptyset) \doteq 0$, $\mathbb{Q}(\Omega) \doteq 1$ et pour tout sous-ensemble d'indice I tel que $\emptyset \neq I \subsetneq N$, nous posons

$$\mathbb{Q}(A) \doteq \prod_{j \in N \setminus I} \mathbb{P}(\{\omega_j\}), \quad \text{lorsque } A = \bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}.$$

(a) (**2 points**) Montrez que $\mathbb{Q}$ n'est jamais une mesure de probabilité lorsque $n = 3$.

(b) (**4 points**) Montrez plus généralement que $\mathbb{Q}$ n'est jamais une mesure de probabilité lorsque $n \geq 3$.

Rappel utile pour le bonus :

Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une fonction

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

qui satisfait

- $\mathbb{P}(E) \geq 0$ pout tout $E \in \mathcal{F}$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Pour toute suite $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ d'événements disjoints (c'est-à-dire $E_i \in \mathcal{F}$ pour tout i, et $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$), alors

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Fin de l'examen