Examen final - Hiver 2018
MAT1720 - Probabilités

NOM : ______________________________

CODE PERMANENT : ____________________

Instructions :

— Vous avez 3 heures pour compléter l'examen.

— **Expliquez de manière détaillée** votre raisonnement (excepté pour les Vrai ou Faux).

— La calculatrice est permise.

— Réduisez vos réponses le plus possible.

— **Bon examen !**

Pondération : 45% de la note finale.
L'examen est corrigé sur 40 points.

Date : 17 avril 2018
Chargé de cours : Frédéric Ouimet

Aide Mémoire

Formule d'espérance et de variance conditionnelle

$$E[S] = E[E[S \mid N]].$$

$$\mathrm{Var}(S) = E[\mathrm{Var}(S \mid N)] + \mathrm{Var}(E[S \mid N]).$$

Lois de probabilités importantes

Poisson

- $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda), \quad \lambda > 0.$
- $$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$
- $E[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Binomiale

- $X \sim \mathrm{Bin}(n, p), \quad n \in \mathbb{N},\ p \in (0, 1).$
- $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$
- $E[X] = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.

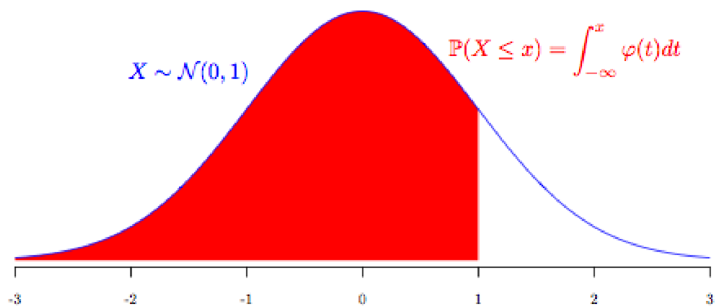
Exponentielle

- $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad \lambda > 0.$
- $$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Gamma

- $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda), \quad \alpha, \lambda > 0.$
- $$f_X(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \quad \text{où } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$
- Notez que la fonction Γ satisfait $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ pour tout $\alpha > 1$. En particulier, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- $E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Table Normale



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Problème 1 (6 points)
Soit X une variable aléatoire avec densité

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot \exp(-x^3), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) (**1 points**) Montrez que $c = \frac{3}{\Gamma(1/3)}$. (Rappel : $\Gamma(\alpha) \circeq \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$)

(b) (**2 points**) Trouvez $E[X^3]$.

(c) (**1 points**) Soit $Y = X^{1/3}$. Écrivez $F_Y(y),\ y > 0$, en terme d'intégrale.

(d) (**2 points**) Trouvez la densité de Y, $f_Y(y),\ y > 0$. (Utilisez la méthode de votre choix.)

Problème 2 (8 points)
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire avec densité jointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (x - y)e^{-x}, & \text{si } x > 0 \text{ et } 0 < y < x, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) (**1 points**) Trouvez la densité marginale $f_X(x),\ x > 0$.

(b) (**1 points**) Trouvez la densité conditionnelle $f_{Y|X}(y \mid x),\ 0 < y < x$.

(c) (**2 points**) Trouvez $E[Y^2 \mid \{X = x\}],\ x > 0$.

(d) (**2 points**) Soit $Z \circeq e^Y$. Trouvez la fonction de répartition $F_{Z|X}(z \mid x),\ 1 < z < e^x$.
(Note : $F_{Z|X}(z \mid x) = E[\mathbf{1}_{\{Z \le z\}} \mid \{X = x\}]$.)

(e) (**2 points**) Trouvez la densité conditionnelle $f_{Z|X}(z \mid x),\ 1 < z < e^x$.

Problème 3 (5 points)
Soit X une variable aléatoire avec densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ sont des paramètres. En général, on note $Z \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$ lorsqu'une v.a. Z possède cette densité.

(a) (**2 points**) Si $\alpha > 1$, montrez que $E[X] = \frac{\lambda}{\alpha-1}$.

(b) (**2 points**) Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $\alpha > k$. Montrez, en intégrant par parties, que si $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$ et $Y \sim \text{Pareto}(\alpha - 1, \lambda)$, alors

$$E[X^k] = \frac{\lambda k}{\alpha - 1} E[Y^{k-1}].$$

(c) (**1 points**) Déduisez une formule générale pour $E[X^k]$ lorsque $\alpha > k \in \mathbb{N}$.

Problème 4 (6 points)
À Montréal, on estime que la chute de neige annuelle (en cm) suit une distribution normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 400)$. On suppose que les chutes de neige sont indépendantes d'une année à l'autre.
Note : <u>Il y a une table normale au début de l'examen</u>.

(a) (**2 points**) Pour une année donnée, quelle est la probabilité d'observer une chute de neige annuelle plus grande que $(\mu + 55)$ cm ? (**gardez 4 décimales**)

(b) (**2 points**) Quelle est la probabilité qu'il y ait au maximum 1 année parmi les 5 années à venir avec plus que $(\mu + 55)$ cm de chute de neige annuelle ? (**gardez 4 décimales**)

(c) (**2 points**) Soit l'événement

$$E = \{\text{la chute de neige pour une année donnée est plus grande que 215 cm}\}.$$

Si on sait que $P(E) = 0.05$, quelle est la valeur de μ ?

Problème 5 (7 points)
Voici les hypothèses du problème :

(H1) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$,
(H2) $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ est une suite de variables aléatoires i.i.d.
(H3) les X_i et N ensemble sont indépendants,
(H4) $E[e^{t|X_i|}] < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notez que cela implique, en particulier, que

$$E[|X_i|] < \infty \quad \text{et} \quad E[|X_i|^2] < \infty.$$

(a) (**3 points**) Si on note $M_X(t) \triangleq E[e^{tX}]$ la fonction génératrice des moments de chaque X_i et $S_n \triangleq \sum_{i=0}^n X_i$, alors montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_{S_N}(t) \triangleq E\left[\exp\left(t \sum_{i=0}^{N} X_i\right)\right] = \exp\Big(\lambda(M_X(t) - 1)\Big).$$

Justifiez bien vos étapes et utilisez les hypothèses de l'énoncé.

(b) (**3 points**) À partir de (a), calculez $E\left[\sum_{i=0}^N X_i\right]$ et $E\left[\left(\sum_{i=0}^N X_i\right)^2\right]$.

(c) (**1 points**) À partir de (b), déduire une formule pour $\text{Var}\left(\sum_{i=0}^N X_i\right)$.

(d) (**BONUS 4 points**) Retrouvez le résultat en (c) en partant plutôt de la formule de variance conditionnelle (voir l'aide mémoire au début de l'examen). Justifiez bien vos étapes et utilisez les hypothèses de l'énoncé.

(Les problèmes 6 et 7 sont à la prochaine page ...)

Problème 6 (6 points)
Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ deux v.a. indépendantes où $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Posons le changement de variables

$$\begin{cases} Z = g_1(X,Y) = \frac{X}{Y} \\ W = g_2(X,Y) = XY \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X = h_1(Z,W) = \sqrt{ZW} \\ Y = h_2(Z,W) = \sqrt{\frac{W}{Z}} \end{cases}$$

(a) (**5 points**) Trouvez l'expression de la densité jointe $f_{Z,W}(z,w),\ z > 0,\ w > 0$.

(b) (**1 point**) Indiquez si Z et W sont indépendantes ou non.

Problème 7 (2 points)
Soit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda),\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, des v.a. indépendantes. Posons $M_n \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(a) (**2 points**) Calculez $P(M_n \leq z)$ pour tout $z > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (**BONUS 1 point**) Sachant que $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculez

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\lambda \cdot \left(M_n - \frac{1}{\lambda}\log n\right) \leq y\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Note : Cela montre que $\lambda \cdot \left(M_n - \frac{1}{\lambda}\log n\right)$ converge en loi vers une Gumbel$(0,1)$.

Fin de l'examen