MAT1720 – INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS – H20
ÉNONCÉ DU TRAVAIL FINAL (40%)

THOMAS DAVIGNON

Consignes pédagogiques

- Vous devez rendre votre travail **au format PDF, par StudiUM.**
  Je n'accepterai aucun travail rendu par une autre méthode ou dans un autre format.
- Vous devez rendre votre travail **au plus tard le mardi 21 avril à 23h 59.**
  Ça vous donne exactement 4 semaines. Au-delà de cette date, vous serez pénalisé.e.s de 15% par jour de retard.
- **Votre travail doit être typographié. Aucun travail manuscrit ne sera accepté**.
  Des ressources seront disponibles en ligne pour vous aider à maîtriser le logiciel de typographie mathématique de votre choix (Microsoft Word, LibreOffice Writer, LaTeX). Il y a définitivement une courbe d'apprentissage avec ces outils (spécialement avec LaTeX). Toutefois, le temps consacré à cet apprentissage ne sera pas perdu. LaTeX est le standard en rédaction scientifique, mais peu importe l'outil, il est impératif que vous appreniez à typographier des mathématiques adéquatement.
- **Vous devez rendre un travail par personne.**
  Vous pouvez communiquer entre vous et vous entraider, bien sûr, mais vous devez remettre chacun.e votre propre travail.

Date: 26 mars 2020.

1. Le jeu *Clue*

Au jeu *Clue,* Axel, Bénédicte, Claude, Dominique, Éli et Fred doivent deviner comment Mr Bobby a été assassiné dans son somptueux manoir anglais.

Pour déterminer comment le meurtre a été commis, on pige des cartes. Il y a

— 9 « pièces » ;
— 6 « personnages » ;
— 6 « armes ».

et une unique carte respectivement pour chaque pièce, chaque arme et chaque personnage.

On tire aléatoirement une carte de chaque pile, puis on les place dans une enveloppe. Le but du jeu est de déterminer quelle combinaison de cartes est dans l'enveloppe.

On bat ensuite ensemble les 18 cartes restantes (5 personnages, 5 armes et 8 pièces), puis on les répartit équitablement entre les 6 joueurs ; chaque joueur recevra donc trois cartes au début de la partie.

Problème 1. On n'a pas encore distribué les cartes.

(a) Supposons que Axel devait deviner le crime maintenant. Quelle serait la probabilité que son choix soit le bon ?

(b) Supposons que Axel devra deviner le crimme immédiatement après avoir vu ses trois cartes. Est-ce que cela augmentera sa probabilité de deviner le crime correctement ? Expliquer pourquoi ou pourquoi pas.

(c) Donner la probabilité qu'Axel devinera le crime correctement après avoir vu ses cartes.

Problème 2. Le crime a été choisi au hasard, on a brassé les cartes, on les a distribué.

(a) Quelle est la probabilité qu'Axel ait Miss Scarlett dans son jeu ?

(b) Quelle est la probabilité que Miss Scarlett soit la coupable sachant qu'Axel n'a pas Miss Scarlett dans son jeu ?

2. L'espérance d'une variable aléatoire positive discrète

Nous avons vu en cours que lorsque X est une variable aléatoire positive continue et que sa fonction de répartition complémentaire est $\overline{F}(x) = \mathbb{P}\{X > x\}$, alors on a que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx.$$

Nous allons maintenant montrer que ce résultat est aussi vrai si X est une variable aléatoire discrète.

Pour ce faire, on commence par prouver une identité pratique.

Lemme (Sommation d'Abel)**.** *Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sont deux suites de nombres réels, et qu'on définit pour tout n les suites*

$$A_n = a_{n+1} - a_n; \qquad B_n = b_{n+1} - b_n.$$

Alors,

$$\sum_{n=M}^{N} a_n B_n = a_{N+1}b_{N+1} - a_M b_M - \sum_{n=M}^{N} A_n b_{n+1}.$$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n B_n + \sum_{n=M}^{N} A_n b_{n+1} &= \sum_{n=M}^{N} \left[a_n(b_{n+1} - b_n) + (a_{n+1} - a_n)b_{n+1}\right] \\
&= \sum_{n=M}^{N} \left[a_n b_{n+1} - a_n b_n + a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_{n+1}\right] \\
&= \sum_{n=M}^{N} \left[a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n\right] \\
&= a_{N+1}b_{N+1} - a_M b_M.
\end{aligned}$$

□

Problème 3. Soit X une variable aléatoire discrète positive de support $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ (on assume que $0 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \cdots$). On suppose également que $\lim_{x\to\infty} x\overline{F}(x) = 0$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in [v_k, v_{k+1})$,

$$\overline{F}(x) = \overline{F}(v_k),$$

et que pour tout $x \in [0, v_1)$, $\overline{F}(x) = 1$.

(b) Déduire que

$$\int_0^{v_1} \overline{F}(x)dx = v_1, \qquad \int_{v_k}^{v_{k+1}} \overline{F}(x)dx = \overline{F}(v_k)(v_{k+1} - v_k),$$

et finalement

$$\int_0^\infty \overline{F}(x)dx = v_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{F}(v_k)(v_{k+1} - v_k).$$

(c) Si $p_X(x)$ est la fonction de masse probabilités de X, montrer que

$$p_X(v_{k+1}) = \overline{F}(v_k) - \overline{F}(v_{k+1}).$$

(d) En utilisant le lemme de sommation d'Abel, montrer que

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_0^\infty \overline{F}(x) dx.$$

(e) Montrer que si $v_k = (k-1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire si X prend des valeurs entières non-négatives), alors

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{X \geq k\right\}.$$

3. Distributions conditionnelles

Problème 4. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètre p.

(a) En procédant par calcul, montrer que
$$\mathbb{P}\{X+Y=k\} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

(b) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=k$ est une loi équiprobable sur $\{1,2,3,\ldots,k-1\}$.

Problème 5. Soient $X_1, X_2, X_3, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$.

On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Trouver la densité conditionnelle de X_1 sachant S_n.

(b) Montrer que sachant $S_n = t$, X_1/t suit une loi Beta $(1, n-1)$.

(c) En remarquant que la densité conditionnelle de X_1/t sachant que $S_n = t$ ne dépend pas de t, déduire que X_1/S_n suit une loi Beta$(1, n-1)$.

(d) Utiliser un argument d'interchangeabilité pour justifier que X_i/S_n suit une loi Beta$(1, n-1)$ pour tout i de 1 à n.

4. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

On considère le jeu de hasard suivant :

1. On paye un prix d'entrée C pour jouer une partie.
2. La partie débute avec un enjeu fixe de 1 dollar.
3. On tire une pièce de monnaie. Chaque fois qu'on fait pile, l'enjeu est doublé. Lorsqu'on fait face, on remporte l'enjeu et la partie se termine.

Un résultat bien connu de ce jeu est que l'espérance du gain d'une partie est infinie. Si X est la mise remportée au cours de la partie, on a que $X = 2^{Y-1}$, où Y est une variable aléatoire géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On trouve

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[2^{Y-1}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}\frac{1}{2^i},$$

et la série diverge.

L'objectif des problèmes qui suivent, c'est de montrer qu'on va toujours finir par gagner autant d'argent qu'on veut si on joue à ce jeu de façon répétée.

Problème 6. Supposons qu'on joue plusieurs parties consécutives et que l'enjeu remporté à la $i$ème partie est X_i – les X_i sont indépendants et identiquement distribués comme 2^{Y_i-1}, où les Y_i sont une suite de variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètre $p = 1/2$.

On va noter $G_n = \sum_{i=1}^n X_i - nC$ le gain net après n parties.

Supposons que h soit l'objectif à atteindre – c'est le montant d'argent qu'on veut gagner, net.

(a) Pour un certain paramètre K entier positif (à fixer plus tard), on se définit une nouvelle suite de variables aléatoires :

$$T_n = \min\{X_n, 2^K\}$$

Expliquer pourquoi $T_n \leq X_n$.

(b) Trouver $\mathbb{P}\left\{T_n = 2^k\right\}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, K$.

(c) Montrer que

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{K+2}{2}.$$

(d) On fixe maintenant $K = 2C$. On définit $\mu = C + 1 = \mathbb{E}[T_1]$, et

$$H_n = \sum_{i=1}^n T_i - nC.$$

Montrer que $\mathbb{E}[H_n] = n$.

(e) Utiliser la loi des grands nombres faible pour montrer que $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{H_n > h\} = 1$$

(f) Déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{G_n > h\} = 1$$

pour tout n.

5. Le processus branchant

On veut modéliser la croissance d'une population. Pour ce faire, on fait l'hypothèse que chaque individu se reproduit et crée une portée d'une nombre aléatoire d'individus dans la génération suivante.

On définit $X_{n,i}$ le nombre d'enfants de l'$i$ème individu de la $n$ième génération. Les $X_{n,i}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

On définit $Z_0 = 1$.

Puis, on définit par récurrence $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ le nombre d'individus total de la $n+1$ième génération comme étant égal à la somme du nombre d'enfants de chacun des Z_n individus de la $n$ième génération.

Le problème qui suit vise à explorer brièvement le processus branchant au moyen de fonctions génératrices.

Problème 7. Soit ψ la fonction génératrice des probabilités de la distribution marginale des $X_{n,i}$. Soit également ψ_n la fonction génératrice des probabilités de Z_n.

(a) Montrer que
$$\mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n\right] = \psi(s)^{Z_n}.$$

(b) Déduire que
$$\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi. \qquad \text{(i.e. } \psi_{n+1}(s) = \psi_n(\psi(s))\text{)}$$

(c) Montrer que $\mathbb{E}\left[Z_n\right] = \mu^n$, où $\mu = \psi'(1)$.

(d) On suppose que $0 < \mu < 1$. Prouver que Z_n converge vers 0 presque sûrement. *Indice :* inspirez vous de la preuve de la loi forte des grands nombres.

(e) Étant donné que les Z_n sont des variables aléatoires entières positives, comment interprétez-vous ce résultat ?