Prénom :
Nom de famille :
Matricule :

MAT1720 – INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS – HIVER 2020
MINI-TEST 1

Enseignant : Thomas Davignon
Date : lundi 20 janvier 2020

Durée :	*20 minutes*
Consignes :	*Documentation/calculatrice non-permise.* *Écrire proprement. Justifier ses démarches.* *Répondre directement sur la feuille.* *Utilisez du papier supplémentaire au besoin. Identifiez clairement toutes les feuilles supplémentaires utilisées.* *Il y a une questions au verso ! !*

Question 1 (1 point par bonne réponse.)**.** Vai ou faux ? *Encerclez la réponse. Pas besoin de justifier.*

(a) (V | F) Pour tout $n \geq 1$, on a l'identité suivante : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

(b) (V | F) On peut former exactement 180 chaînes différentes de 6 lettres avec les lettres PANINI.

(c) (V | F) Soit E un événement avec $\mathbb{P}\{E\} = 0$. Alors, $E = \emptyset$.

(d) (V | F) Pour E, F deux événements, on a toujours que $\mathbb{P}\{E \cap F\} \geq \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\} - 1$.

(e) (V | F) Pour E, F deux événements, on a toujours que $\mathbb{P}\{E \cap F\} \leq \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\}$.

Solution. (a) **VRAI :** Par le théorème binomial,

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

(b) **VRAI :** Si les lettres étaient toutes différentes, il y aurait $6! = 720$ permutations possibles. Mais comme le N est là deux fois, on a compté en double. Mais comme le I est aussi là deux fois, on a compté encore en double. Finalement, il y a $6!/(2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!) = \binom{6}{2,2,1,1} = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 180$ chaînes différentes avec les lettres PANINI.

(c) **FAUX :** Nous en avons discuté encours : rien parmi les axiomes n'implique que $\emptyset$ soit le seul événement de probabilité nulle.

(d) **VRAI :** On a que

$$1 \geq \mathbb{P}\{E \cup F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{E \cap F\}.$$

Il suffit de réarranger.

(e) **VRAI :** On a que

$$\mathbb{P}\{E \cap F\} \leq \mathbb{P}\{E \cup F\} \leq \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\}.$$

Question 2 (5 points)**.** Au sprint 100 mètres, 4 Américaines, 2 Jamaïcaines, 1 Canadiennes et 1 Éthiopienne prennent part à la finale.

(a) (*1 point*) Combien y a-t-il de classements possibles si on distingue toutes les athlètes ?

Solution. Le nombre de classements correspond au nombre de façons différentes de permuter 8 athlètes. C'est donc $8!$.

(b) (*1 point*) Combien y a-t-il de classements possibles si on distingue seulement entre les nationalités ?

Solution. Le nombre de classements possibles si on ne distingue que les nationalités est le nombre de combinaisons de 4 athlètes américaines, 2 jamaïcaines, 1 canadienneet et 1 éthiopienne. Il y a donc $\binom{8}{4,2,1,1} = 840$ combinaisons possibles qui ne distinguent pas entre les athlètes mais seulement entre les nationalités.

(c) (*3 points*) En supposant que tous les classements soient équiprobables, quelle est la probabilité qu'exactement deux Américaines montent sur le podium ?

Solution. Ici, notre espace fondamental Ω peut être plusieurs choses.

— **Si c'est l'ensemble de tous les classements :** Alors, $|\Omega| = 8!$. On veut compter le nombre de classements où 2 américaines se retrouvent parmi le top 3. Alors, on a
  — $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles pour les américaines en question ;
  — $\binom{4}{1} = 4$ choix possibles pour la troisième athlète à se retrouver sur le podium, qui ne peut pas être une américaine.
  — $3!$ façons possibles d'ordonner le podium.
  — $5!$ façons possibles d'ordonner les 5 autres athlètes.
  Finalement, si A est l'événement qu'au moins deux américaines montent sur le podium,
$$\mathbb{P}\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot 3!\cdot 5!}{8!} = \frac{17280}{40320} = \frac{3}{7}.$$

— **Si c'est l'ensemble de tous les podiums, ordonnés :** Alors, $|\Omega| = 8!/5! = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$. On a
  — $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles pour les américaines en question ;
  — $\binom{4}{1} = 4$ choix possibles pour l'autre athlète sur le podium ;
  — $3!$ ordres possibles pour le podium.
  Finalement,
$$\mathbb{P}\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot 3!}{8!/5!} = \frac{144}{336} = \frac{3}{7}.$$

— **Si c'est l'ensemble de tous les trios d'athlètes possibles, sans ordre :** Alors, $|\Omega| = \binom{8}{3}$. On a
  — $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles pour les américaines ;
  — $\binom{4}{1} = 4$ choix possibles pour l'autre athlète sur le podium.
  Alors,
$$\mathbb{P}\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}.$$